VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

VLASTNOSTI LIMITY REÁLNÉ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

PROPERTIES OF THE LIMIT OF THE REAL FUNCTION OF ONE REAL VARIABLE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

LUDMILA ŠVANDOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Mgr. VIERA ŠTOUDKOVÁ RŮŽIČKOVÁ, Ph.D.

BRNO 2020

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Studentka:	**Ludmila Švandová**
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	**Mgr. Viera Štoudková Růžičková, Ph.D.**
Akademický rok:	2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Vlastnosti limity reálné funkce jedné reálné proměnné

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Věty o limitách reálné funkce jedné reálné proměnné jsou použitelné na výpočet limit, u kterých je výpočet pomocí definice obtížný.

Cíle bakalářské práce:

1. Nastudovat věty o limitách reálné funkce jedné reálné proměnné a jejich důkazy z literatury.
2. Zformulovat v práci věty o limitách reálné funkce jedné reálné proměnné a jejich důkazy, doplněné o vlastní příklady, obrázky a komentáře.
3. Splnění úkolu vyžaduje od studenta důkladné pochopení teorie, nejenom její přepis z literatury.

Seznam doporučené literatury:

DOŠLÁ, Zuzana a KUBEN, Jaromír. Diferenciální počet funkcí jedné proměnné. Brno: Masarykova univerzita, 2003. ISBN 80-210-3121-2.

VESELÝ, Jiří. Matematická analýza pro učitele. Praha: Matfyzpress, 1997. ISBN 80-85863-23-5.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc. ředitel ústavu	doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D. děkan fakulty

Abstrakt
Tato práce se zabývá zkoumáním vlastností limity reálné funkce jedné reálné proměnné. Vlastnosti jsou zpracovány do vět a následně dokázány. Význam těchto vět je ukázán na konkrétních příkladech limit. Důkladné rozebrání vlastností limit nám pomůže pochopit, jak se limity chovají a jak je můžeme řešit.

Summary
This thesis analyzes properties of limit of real function of a single real variable. The properties are formulated into theorems and these theorems are then proved. Their meaning is shown by examples of limit. Analyzing the properties of limit will help us to understand how limits behave and how we can deal with them.

Klíčová slova
Limity, reálné funkce.

Keywords
Limits, real-valued functions.

ŠVANDOVÁ, L. *Vlastnosti limity reálné funkce jedné reálné proměnné.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2020. 62 s. Vedoucí Mgr. Viera Štoudková Růžičková, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Vlastnosti limity reálné funkce jedné reálné proměnné* vypracovala samostatně pod vedením Mgr. Viery Štoudkové Růžičkové, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Ludmila Švandová

Chtěla bych poděkovat své vedoucí práce Mgr. Viere Štoudkové Růžičkové, Ph.D. za odborné vedení, pomoc a čas strávený při konzultacích.

Ludmila Švandová

Obsah

1 Úvod

Cílem této práce je popsat vlastnosti limity reálné funkce jedné reálné proměnné. Limita je jedním ze základních pojmů matematické analýzy. Zabývat se jejími vlastnostmi dává smysl zejména proto, že samotná definice limity nedává příliš efektivní návod k jejímu řešení. Proto se k výpočtu velice často využívá jejich vlastností.

Práce je rozdělena do tří kapitol. Zprvu definujeme, co je to limita funkce. Následně uvedeme věty o limitách, které nám popisují vlastnosti limit. A nakonec uvedeme sbírku příkladů, kde ukážeme, jak se dají věty používat k výpočtu limit.

Práce by měla čtenáři poskytnout ucelený pohled na limity, včetně veškerých detailů a problémů, které obsahují.

2 Matematický aparát

V této úvodní kapitole jsou uvedeny pojmy, definice a další pomocná tvrzení, které budeme potřebovat a používat.

Definice a tvrzení jsou čerpány z [1], [2] a [3].

2.1 Reálná čísla a funkce jedné reálné proměnné

Ještě dříve, než se dostaneme k samotné definici limity, si uvedeme pár základních pojmů.

Definice 2.1 Množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, která je úplně uspořádaná tak, že

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \text{ platí } -\infty < x < \infty,$$

nazýváme rozšířenou množinou reálných čísel.

Definice 2.2 Nechť M je uspořádaná množina, $A \subseteq M$. Řekneme, že $s \in M$ je supremum (resp. infimum) množiny A, jestliže je nejmenší horní závorou množiny A (resp. největší dolní závorou), tj. jestliže platí

(i) $\forall\, a \in A : a \leq s$ (resp. $s \leq a$),

(ii) $(\forall\, a \in A, \forall\, b \in \mathbb{R} : a \leq b) \Longrightarrow s \leq b$ (resp. $b \leq a \Longrightarrow b \leq s$).

Definice 2.3 Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, pak zavedeme následující označení

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \qquad (a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Množinu $[a, b]$ nazýváme uzavřený interval, množinu (a, b) nazýváme otevřený interval. Dále používáme označení

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \qquad [a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

Tyto množiny nazýváme polouzavřenými (polootevřenými) intervaly.
Číslo $b - a$ pak nazýváme délkou všech těchto intervalů.
Dále klademe

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \qquad (-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\},$$

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \qquad (-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\},$$

$$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}.$$

Definice 2.4 Nechť $x_0, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$.
Pak interval

$$\mathcal{O}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

nazveme okolím bodu x_0.
Intervaly

$$\mathcal{O}^+(x_0) = [x_0, x_0 + \delta), \qquad \mathcal{O}^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0]$$

nazveme pravým (resp. levým) okolím bodu x_0.
Množina
$$\mathcal{O}^*(x_0) = \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$$
se nazývá ryzí (nebo též prstencové) okolí bodu x_0.
Množiny
$$\mathcal{O}^{*+}(x_0) = \mathcal{O}^+(x_0) \setminus \{x_0\}, \qquad \mathcal{O}^{*-}(x_0) = \mathcal{O}^-(x_0) \setminus \{x_0\}$$
pak pravé (resp. levé) ryzí okolí bodu x_0.

Poznámka 2.5 Pro $x_0 = \pm\infty, \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ klademe

$$\mathcal{O}(\infty) = \mathcal{O}^*(\infty) = \mathcal{O}^-(\infty) = \mathcal{O}^{*-}(\infty) = \left(\frac{1}{\delta}, \infty\right),$$

$$\mathcal{O}(-\infty) = \mathcal{O}^*(-\infty) = \mathcal{O}^+(-\infty) = \mathcal{O}^{*+}(-\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{\delta}\right).$$

Volíme $\pm\frac{1}{\delta}$, aby stejně jako v Definici 2.4 platilo, že čím menší δ, tím menší okolí.

Definice 2.6 Funkcí jedné reálné proměnné rozumíme zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Množina $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \exists\, y \in \mathbb{R} \text{ tak, že } y = f(x)\}$ se nazývá definiční obor funkce f.
Množina $H(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in \mathbb{R} \text{ tak, že } y = f(x)\}$ se nazývá obor hodnot funkce f.

Definice 2.7 Řekneme, že funkce f je

(i) rostoucí (resp. klesající) na intervalu I, jestliže $I \subseteq D(f)$ a pro libovolná $x_1, x_2 \in I$ platí
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \qquad (\text{resp. } x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)\ ),$$

(ii) neklesající (resp. nerostoucí) na intervalu I, jestliže $I \subseteq D(f)$ a pro libovolná $x_1, x_2 \in I$ platí
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \qquad (\text{resp. } x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)\ ).$$

Funkce rostoucí, nebo klesající na intervalu se nazývá ryze monotónní na intervalu.
Funkce nerostoucí, nebo neklesající na intervalu se nazývá monotónní na intervalu.

2.2 Limita reálné funkce jedné reálné proměnné

Nyní můžeme přejít k samotným definicím limity reálné funkce jedné reálné proměnné. Obecně lze uvažovat nejen limitu reálné funkce, ale můžeme ji definovat na libovolném topologickém prostoru. Stejně tak lze uvažovat více než jednu proměnnou, i pak by všechna tvrzení uvedená v této práci zůstala v platnosti, pouze by byla obsáhlejší. Problémem by ale bylo, že pro více proměnných neexistuje analogie L'Hospitalova pravidla (viz Věta 3.23).

Limita se dá definovat několika způsoby. Všechny tyto definice jsou ekvivalentní, my si uvedeme pouze ty, které budeme používat.

Definice 2.8 Nechť $x_0, a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 limitu rovnu číslu a, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro všechna $x \in \mathcal{O}^*(x_0)$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(a)$.
Píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Pomocí kvantifikátorů lze psát

$$\forall\, \mathcal{O}(a)\ \exists\, \mathcal{O}(x_0)\ \forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0):\ f(x) \in \mathcal{O}(a).$$

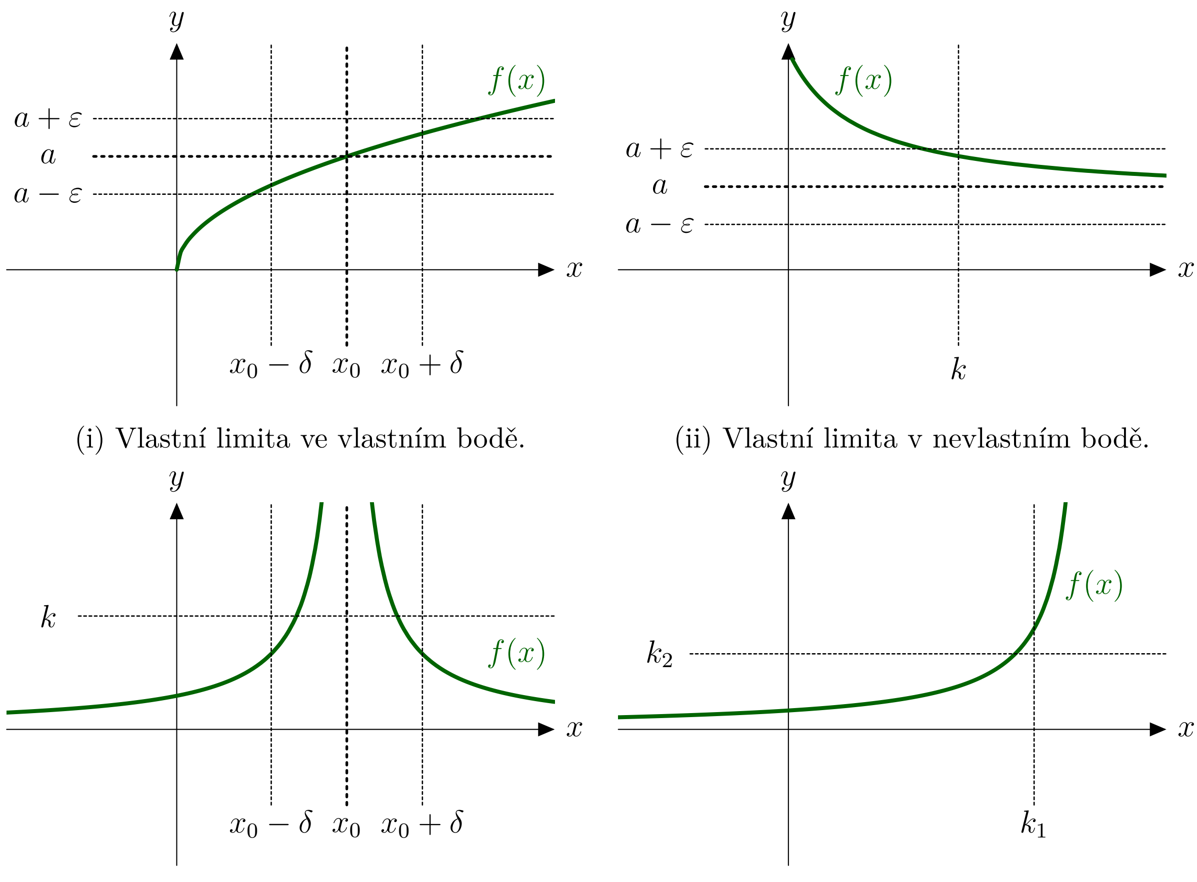
Poznámka 2.9 Tato definice obecně zahrnuje různé případy (viz Obrázek 2.1), které rozlišujeme podle specifikace bodů x_0 a a:

(i) je-li $x_0, a \in \mathbb{R}$, hovoříme o vlastní limitě ve vlastním bodě,

(ii) je-li $x_0 = \pm\infty, a \in \mathbb{R}$, hovoříme o vlastní limitě v nevlastním bodě,

(iii) je-li $x_0 \in \mathbb{R}, a = \pm\infty$, hovoříme o nevlastní limitě ve vlastním bodě,

(iv) je-li $x_0 = \pm\infty, a = \pm\infty$, hovoříme o nevlastní limitě v nevlastním bodě.



(i) Vlastní limita ve vlastním bodě.

(ii) Vlastní limita v nevlastním bodě.

(iii) Nevlastní limita ve vlastním bodě.

(iv) Nevlastní limita v nevlastním bodě.

Obrázek 2.1: Různé druhy limit.

Analogicky lze limitu funkce zavést pomocí „$\varepsilon - \delta$ definice“. Této definice se často využívá při důkazech, proto si ji také uvedeme.

Definice 2.10 Nechť $x_0, a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 limitu rovnu číslu a, jestliže

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x \in \mathbb{R}:\; 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Poznámka 2.11 Předcházející definice (Definice 2.10) je definicí vlastní limity ve vlastním bodě. Analogicky lze zavést „$\varepsilon - \delta$ definici“ i pro ostatní případy (viz Poznámka 2.9). Například pro vlastní limitu v nevlastním bodě ∞ dostáváme

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, k > 0\; \forall\, x \in \mathbb{R}:\; x > k \Longrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Definice 2.12 Je-li $x_0 \in \mathbb{R}$ a nahradíme-li v definici limity ryzí okolí $\mathcal{O}^*(x_0)$ levým ryzím okolím $\mathcal{O}^{*-}(x_0)$ (resp. pravým ryzím okolím $\mathcal{O}^{*+}(x_0)$), dostaneme definici limity zleva (resp. limity zprava). Souhrnně se tyto limity nazývají jednostranné limity a značíme je

$$\lim_{x \to x_0+} f(x), \qquad \lim_{x \to x_0-} f(x).$$

2.3 Spojitost funkce

Spojitost nám udává, zda je funkce v daném bodě spojitá nebo nějakým způsobem roztržená. Je to pojem úzce spjatý s pojmem limita, neboť spojitost je definována právě pomocí limity.

Definice 2.13 Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ zprava (resp. zleva), jestliže

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0) \qquad (\text{resp. } \lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)\ ).$$

Definice 2.14 Řekneme, že funkce f je spojitá na intervalu $I \subseteq D(f)$, jestliže

(i) f je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I,

(ii) patří-li levý (resp. pravý) krajní bod intervalu I do tohoto intervalu, pak je v něm funkce f spojitá zprava (resp. zleva).

Píšeme $f \in C(I)$ a je-li $I = [a, b]$, pak $f \in C[a, b]$.

Věta 2.15 Nechť f je spojitá a ryze monotónní na intervalu I a zobrazuje tento interval na interval J. Pak f^{-1} je spojitá na intervalu J.

Důkaz. Důkaz nebudeme uvádět, dá se dohledat v [2]. □

2.4 Derivace funkce

Jak uvidíme, velmi účinným nástrojem k řešení limit je tzv. L'Hospitalovo pravidlo (viz Věta 3.23), které zahrnuje derivování. Proto si uvedeme, co to derivace funkce je a jaké má základní vlastnosti.

Navíc, stejně jako spojitost funkce, je derivace funkce definována pomocí limity.

Definice 2.16 Nechť f je funkce a $x_0 \in \mathbb{R}$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

nazveme ji derivací funkce f v bodě x_0 a označujeme ji $f'(x_0)$.
Je-li tato limita nevlastní, řekneme, že f má v bodě x_0 nevlastní derivaci.
Neexistuje-li tato limita, řekneme, že funkce f nemá derivaci v bodě x_0.

Poznámka 2.17 Uvedeme si pár základních vlastností derivace.

(i) Derivace je definována pouze v $x_0 \in \mathbb{R}$. Nelze ji definovat v $\pm\infty$.

(ii) Má-li funkce f derivaci v bodě x_0, pak je v tomto bodě a nějakém jeho okolí definována.

(iii) Funkce f má v libovolném bodě $x_0 \in D(f)$ nejvýše jednu derivaci (to vyplyne z Věty 3.1).

2.5 Pomocné definice a tvrzení

Na závěr této kapitoly si uvedeme pomocné pojmy a věty, které budeme v průběhu celé práce často používat.

Jako první to budou vlastnosti absolutní hodnoty, které budeme používat při dokazování vět o limitách, ale i při samotném počítání limit.

Věta 2.18 Absolutní hodnota má následující vlastnosti ($x, y \in \mathbb{R}$):

(i) $|x| \geq 0$ přičemž $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

(ii) $x \leq |x|$,

(iii) $|-x| = |x|$,

(iv) $|xy| = |x| \cdot |y|$,

(v) $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ pro $y \neq 0$,

(vi) $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$.

Důkaz. Důkaz budeme provádět pouze pro bod (vi), neboť ostatní vlastnosti absolutní hodnoty (včetně jejich důkazů) jsou zřejmé.

(vi) Tato vlastnost se nazývá trojúhelníková nerovnost.
Chceme tedy nyní dokázat, že $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|.$$

Protože platí $x \leq |x|$ a $|xy| = |x| \cdot |y|$, lze psát

$$-2 \cdot |x| \cdot |y| \leq 2xy \leq 2 \cdot |x| \cdot |y|.$$

Když nyní v předchozí nerovnosti přičteme výraz $|x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$, dostaneme

$$|x|^2 - 2 \cdot |x| \cdot |y| + |y|^2 \leq x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2 \cdot |x| \cdot |y| + |y|^2.$$

Dále víme, že $x^2 \leq y^2 \iff |x| \leq |y|$, proto dostáváme

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Dosazením $-y$ za y, bychom dostali zbytek tvrzení.

$\square$

Jako další si uvedeme definici posloupnosti a limity posloupnosti. To hlavně z toho důvodu, abychom si mohli definovat Eulerovo číslo.

Definice 2.19 Posloupností rozumíme zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, přičemž $D(f) = \mathbb{N}$. Namísto $f_n := f(n)$ píšeme obvykle a_n. Posloupnost se pak značí $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, stručně $\{a_n\}$.

Definice 2.20 Nechť $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu a, jestliže

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\; \forall\, n \leq n_0 \text{ platí } |a_n - a| < \varepsilon.$$

Píšeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Definice 2.21 Limitu posloupnosti

$$\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

nazýváme Eulerovo číslo.

3 Věty o limitách reálné funkce jedné reálné proměnné

V této kapitole, která tvoří hlavní část práce, uvedeme věty o limitách. Některé věty nám pouze říkají, za jakých podmínek limita existuje (popř. jaké má vlastnosti), jiné věty se dají přímo použít k výpočtu složitějších limit, které nejsme schopni přímo řešit. Proto je kapitola rozdělena na čtyři části.

Tvrzení a ideje důkazů jsou čerpány z [1–8].

3.1 Vlastnosti limit

Věta 3.1 Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu.

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme tedy, že

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a_1, \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = a_2, \qquad a_1 \neq a_2, \qquad a_1, a_2, x_0 \in \mathbb{R}^*.$$

Protože $a_1 \neq a_2$, existují $\mathcal{O}(a_1)$ a $\mathcal{O}(a_2)$ tak, že $\mathcal{O}(a_1) \cap \mathcal{O}(a_2) = \emptyset$.
Dle definice limity (Definice 2.8) platí

$$\begin{aligned} &\exists\, \mathcal{O}_1(x_0) \text{ tak, že } \forall\, x \in \mathcal{O}_1^*(x_0):\ f(x) \in \mathcal{O}(a_1),\\ &\exists\, \mathcal{O}_2(x_0) \text{ tak, že } \forall\, x \in \mathcal{O}_2^*(x_0):\ f(x) \in \mathcal{O}(a_2). \end{aligned}$$

Dále platí, že $\mathcal{O}_1(x_0) \cap \mathcal{O}_2(x_0) = \mathcal{O}(x_0)$ (tzn. že průnikem dvou okolí bodu x_0 dostáváme nové okolí téhož bodu).
Pak tedy musí platit, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0):\ f(x) \in \mathcal{O}(a_1) \cap \mathcal{O}(a_2),$$

což je zřejmě spor. □

Věta 3.2 Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ vlastní limitu $a \in \mathbb{R}$, pak existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že f je na $\mathcal{O}(x_0)$ ohraničená.

Důkaz. Nechť tedy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a.$$

Chceme najít $m, n \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$m \leq f(x) \leq n, \qquad \forall\, x \in \mathcal{O}(x_0).$$

Použijeme „$\varepsilon - \delta$ definici“ limity (viz Definice 2.10 a Poznámka 2.11).
K číslu $\varepsilon := 1$ existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0) \text{ platí } |f(x) - a| < 1, \text{ tedy } a - 1 < f(x) < a + 1.$$

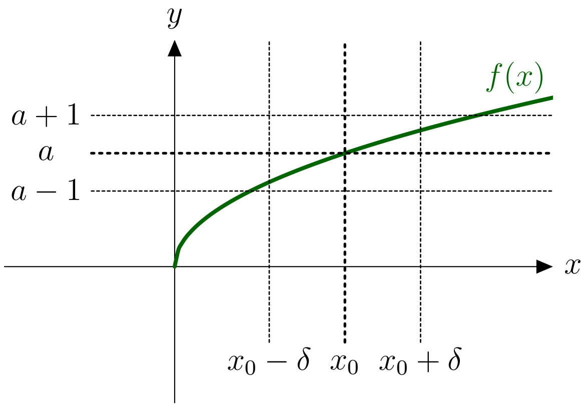
Zvolme tedy, pokud $f(x_0)$ existuje,

$$m := \min\{a - 1, f(x_0)\} \qquad \text{a} \qquad n := \max\{a + 1, f(x_0)\}.$$

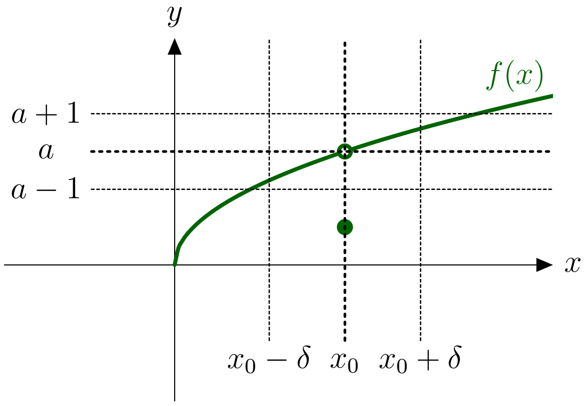
Nebo, pokud $f(x_0)$ neexistuje,

$$m := a - 1 \qquad \text{a} \qquad n := a + 1.$$

Viz Obrázek 3.1 a Obrázek 3.2. □



Obrázek 3.1: Ohraničenost funkce f na okolí bodu, v kterém má limitu. Dolní hranicí je $m := a-1$ a horní $n := a+1$.



Obrázek 3.2: Ohraničenost funkce f na okolí bodu, v kterém má limitu. Dolní hranicí je $m := f(x_0)$ a horní $n := a+1$.

Věta 3.3 Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy když má v tomto bodě limitu zprava i zleva a platí

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = a.$$

Důkaz. Dokazujeme dva směry.

⇒: Toto tvrzení je triviální, plyne přímo z definice limity (Definice 2.8), jednostranných limit (Definice 2.12) a z faktu, že $\mathcal{O}^*(x_0) = \mathcal{O}^{*-}(x_0) \cup \mathcal{O}^{*+}(x_0)$.

⇐: Nechť

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = a \;\wedge\; \lim_{x\to x_0-} f(x) = a.$$

K libovolnému $\varepsilon > 0$ existují tedy $\delta_1 > 0$ takové, že

$$\forall\, x \in (x_0, x_0+\delta_1) \text{ je } f(x) \in \mathcal{O}(a),$$

a $\delta_2 > 0$ takové, že

$$\forall\, x \in (x_0-\delta_2, x_0) \text{ je } f(x) \in \mathcal{O}(a).$$

Zvolíme-li $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$, pak

$$\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ je } f(x) \in \mathcal{O}(a),$$

čímž je věta dokázána.

$\square$

Lemma 3.4 Buď $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť je funkce f monotonní v nějakém $\mathcal{O}^{*-}(x_0)$. Pak existuje

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}^*.$$

Obdobné tvrzení platí i pro limitu zprava.

Důkaz. Nechť je f například neklesající na $\mathcal{O}^{*-}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0)$, pak platí (viz Obrázek 3.3), že

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \sup\{f(x);\ x \in \mathcal{O}^{*-}(x_0)\} =: a.$$

Dokážeme to pomocí vlastností suprema (Definice 2.2) a „$\varepsilon - \delta$ definice“ limity (Definice 2.10 a Poznámka 2.11).
Dle definice suprema k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $c < x_0$, $c \in \mathcal{O}^{*-}(x_0)$ tak, že

$$a - \varepsilon < f(c).$$

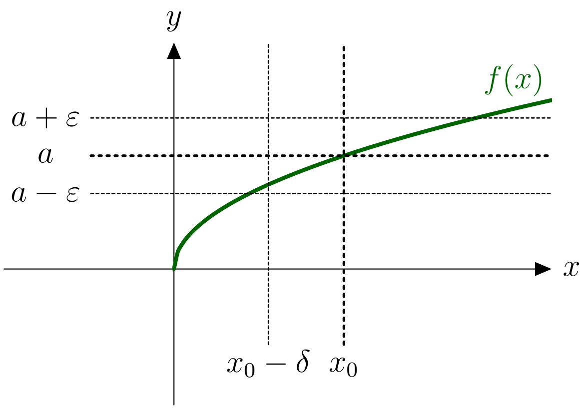
Vzhledem k monotomii pak stačí položit $\delta := x_0 - c$ a dostáváme

$$a - \varepsilon < f(c) \leq f(x) \leq a < a + \varepsilon,$$

tedy

$$\forall\, x \in \mathcal{O}^{*-}(x_0) \text{ platí } |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Tvrzení pro limitu zprava by se dokázalo obdobně. $\square$



Obrázek 3.3: Funkce f monotónní v nějakém $\mathcal{O}^{*-}(x_0)$, která má jednostrannou limitu $a := \sup\{f(x);\ x \in \mathcal{O}^{*-}(x_0)\}$.

3.2 Algebraické vlastnosti limit

Věta 3.5 Buď $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Potom jestliže

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty,$$

pak

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Důkaz. Uvažujme, že $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$. Zvolme pevné $k > 0$.
Pak dle předpokladu věty existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0) \text{ je } \frac{1}{k} < f(x),$$

z čehož úpravou dostaneme

$$\frac{1}{f(x)} < k,$$

čímž je věta dokázána.
Případ pro $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ by se dokázal obdobně. □

Poznámka 3.6 Předchozí věta se dá vyjádřit následujícím heslem

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0.$$

Věta 3.7 Buď $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0) \text{ je } f(x) \neq 0 \qquad (\text{resp. } f(x) > 0, \qquad \text{resp. } f(x) < 0).$$

Potom jestliže

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0,$$

pak

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{|f(x)|} = \infty \qquad \left(\text{resp. } \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty, \qquad \text{resp. } \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty\right).$$

Důkaz. Uvažujme, že $f(x) \neq 0$. Zvolme $\varepsilon := \frac{1}{k}, k > 0$.
Pak dle předpokladů věty platí, že existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0) \text{ je } f(x) \neq 0$$

a $\delta_1 > 0$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_1^*(x_0) \text{ je } |f(x) - 0| < \varepsilon = \frac{1}{k}, \text{ tedy } |f(x)| < \frac{1}{k}.$$

Položme $\delta_2 := \min(\delta, \delta_1)$, Pak platí že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_2^*(x_0) \text{ je } 0 \neq |f(x)| < \frac{1}{k},$$

úpravou tedy dostaneme, že

$$k < \frac{1}{|f(x)|},$$

čímž je věta dokázána.
Případ pro $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$) by se dokázal obdobně. $\square$

Poznámka 3.8 Předchozí věta se dá vyjádřit následujícím heslem

$$\frac{1}{\pm 0} = \pm\infty.$$

Věta 3.9 Buď $x_0, a \in \mathbb{R}^*$ a nechť $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$. Pak platí

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |a| .$$

Důkaz. K libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0) \text{ platí } |f(x) - a| < \varepsilon, \text{ tedy } a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon.$$

Protože

$$||f(x)| - |a|| \leq |f(x) - a| \,,$$

platí že

$$|a| - \varepsilon < f(x) < |a| + \varepsilon,$$

což jsme chtěli dokázat. $\square$

Věta 3.10 Buď $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Jestliže k funkci g existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že je v něm ohraničená, pak

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Důkaz. Podle předpokladu je g ohraničená, tedy existuje $k > 0$ tak, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}(x_0) \text{ je } |g(x)| \leq k.$$

Protože má funkce f limitu, k $\varepsilon_1 > 0$ (které ale určíme až později) existuje $\mathcal{O}_1(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_1^*(x_0) \text{ platí } |f(x) - 0| < \varepsilon_1.$$

Položme $\mathcal{O}_2(x_0) := \mathcal{O}_1(x_0) \cap \mathcal{O}(x_0)$. Potom

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_2^*(x_0) \text{ platí } |f(x) \cdot g(x) - 0| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \varepsilon_1 \cdot k = \varepsilon_2.$$

Položíme-li $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon_2}{k}$ je věta dokázána. $\square$

Věta 3.11 (o početních operacích s limitami) Buď $a, b \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť existují obě limity

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = b.$$

Pak platí

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$,

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = ab$,

(iii) je-li $b \neq 0$, pak $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

Důkaz. Budeme dokazovat tři tvrzení.

(i) Chceme dokázat, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0) \text{ platí } |f(x) + g(x) - (a+b)| < \varepsilon.$$

Nechť je tedy dáno $\varepsilon > 0$, k $\varepsilon_1 > 0$ (které ale určíme až později) existují $\mathcal{O}_1(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in {\mathcal{O}_1}^*(x_0) \text{ je } |f(x) - a| < \varepsilon_1,$$

a $\mathcal{O}_2(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in {\mathcal{O}_2}^*(x_0) \text{ je } |g(x) - b| < \varepsilon_1.$$

Položme $\mathcal{O}(x_0) := \mathcal{O}_1(x_0) \cap \mathcal{O}_2(x_0)$. Pak $\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0)$ platí

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (a+b)| &= |f(x) - a + g(x) - b| \leq |f(x) - a| + |g(x) - b| \\ &< \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = 2 \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Položíme-li nyní $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{2}$, bude tato podmínka splněna a tvrzení je dokázáno. Důkaz pro rozdíl funkcí by se prováděl analogicky.

(ii) Chceme dokázat, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0) \text{ platí } |f(x) \cdot g(x) - ab| < \varepsilon.$$

Funkce g má v bodě x_0 vlastní limitu a proto podle Věty 3.2 existuje $\mathcal{O}_0(x_0)$, kde je ohraničená, tzn. že existuje $k > 0$ tak, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_0(x_0) \text{ je } |g(x)| \leq k.$$

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Protože mají obě funkce f a g limitu, platí, že pro $\varepsilon_1 > 0$ (které ale určíme až později) existuje $\mathcal{O}_1(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_1^*(x_0) \text{ je } |f(x) - a| < \varepsilon_1,$$

a pro $\varepsilon_2 > 0$ (které ale také určíme až později) existuje $\mathcal{O}_2(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_2^*(x_0) \text{ je } |g(x) - b| < \varepsilon_2.$$

Položme nyní $\mathcal{O}(x_0) := \mathcal{O}_0(x_0) \cap \mathcal{O}_1(x_0) \cap \mathcal{O}_2(x_0)$. Pak $\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0)$ je

$$\begin{aligned}|f(x) \cdot g(x) - ab| &= |f(x) \cdot g(x) - ab + g(x)a - g(x)a| \\ &= |g(x) \cdot (f(x) - a) + a \cdot (g(x) - b)| \\ &\leq |g(x)| \cdot |f(x) - a| + |a| \cdot |g(x) - b| < k \cdot \varepsilon_1 + |a| \cdot \varepsilon_2 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Nyní stačí zvolit $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{2k}$ a $\varepsilon_2 := \frac{\varepsilon}{2|a|}$ a tvrzení je dokázáno.

(iii) Chceme dokázat, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0) \text{ platí } \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon.$$

Funkce f má v bodě x_0 vlastní limitu a proto podle Věty 3.2 existuje $\mathcal{O}_1(x_0)$, kde je ohraničená, tzn. že existuje $k > 0$ tak, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_1(x_0) \text{ je } |f(x)| \leq k.$$

Dále podle definice limity (Definice 2.10) k číslu $\frac{|b|}{2} > 0$ existuje $\mathcal{O}_2(x_0)$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_2^*(x_0) \text{ platí } |g(x) - b| < \frac{|b|}{2} \text{ tj. } \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|b|}.$$

Nyní k $\varepsilon_1 > 0$ (které ale určíme až později) existuje $\mathcal{O}_3(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in {\mathcal{O}_3}^*(x_0) \text{ je } |f(x) - a| < \varepsilon_1,$$

a pro $\varepsilon_2 > 0$ (které ale určíme opět až později) existuje $\mathcal{O}_4(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_4^*(x_0) \text{ je } |g(x) - b| < \varepsilon_2.$$

Položme nyní $\mathcal{O}(x_0) := \mathcal{O}_1(x_0) \cap \mathcal{O}_2(x_0) \cap \mathcal{O}_3(x_0) \cap \mathcal{O}_4(x_0)$. Pak $\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0)$ je

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{f(x)}{g(x)} - f(x) \cdot \frac{1}{b} + f(x) \cdot \frac{1}{b} - \frac{a}{b}\right| \\ &= \left|f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{b} \cdot (f(x) - a)\right| \\ &\leq |f(x)| \cdot \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b}\right| + \frac{1}{|b|} \cdot |f(x) - a| \\ &= \frac{|f(x)|}{|b|} \cdot \frac{1}{|g(x)|} \cdot |g(x) - b| + \frac{1}{|b|} \cdot |f(x) - a| \\ &< \frac{k}{|b|} \cdot \frac{2}{|b|} \cdot \varepsilon_2 + \frac{1}{|b|} \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Nyní stačí zvolit $\varepsilon_1 := \varepsilon \cdot \frac{|b|}{2}$ a $\varepsilon_2 := \varepsilon \cdot \frac{b^2}{4k}$ a tvrzení je dokázáno.

□

Poznámka 3.12 Mohlo by se zdát, že bod (iii) v předchozí větě je zbytečný, neboť lze psát

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

a použít bod (ii).
Ukážeme, že to tak opravdu platí.
Víme, že

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = b, \qquad a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, x_0 \in \mathbb{R}^*.$$

Pak stačí dokázat, že

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}.$$

Zřejmě lze psát

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b} - \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{b} \cdot (g(x) - b),$$

dostáváme tedy

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{b} \cdot (g(x) - b) \right] \overset{\text{Věta 3.11}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{1}{b} - \lim_{x \to x_0} \left[\frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{b} \cdot (g(x) - b) \right].$$

Nyní budeme řešit jednotlivé limity.
Z první limity dostáváme

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{b} \overset{\text{Věta 4.1}}{=} \frac{1}{b}.$$

Na druhou limitu budeme chtít použít Větu 3.10, proto si limitu rozdělíme na další dvě části,

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{b} \cdot (g(x) - b) \right] \overset{\text{Věta 3.11}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} \left[\frac{1}{b} \cdot (g(x) - b) \right].$$

Pak

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{1}{b} \cdot (g(x) - b) \right] \overset{\text{Věta 3.11}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{1}{b} \cdot \left(\lim_{x \to x_0} g(x) - \lim_{x \to x_0} b \right) \overset{\text{Věta 4.1}}{=} \frac{1}{b} \cdot (b - b) = 0$$

a protože víme, že

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = b,$$

znamená to, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0) \text{ je } |g(x) - b| < \varepsilon, \text{ tedy } b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon,$$

odkud dostáváme, že

$$\frac{1}{b - \varepsilon} < \frac{1}{g(x)} < \frac{1}{b + \varepsilon},$$

což znamená, že funkce $\frac{1}{g(x)}$ je ohraničená.
Dostáváme tedy

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{b} \cdot (g(x) - b) \right] \overset{\text{Věta 3.10}}{=} 0.$$

Celkem máme

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{b}-\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{1}{b}\cdot(g(x)-b)\right]=\frac{1}{b}-0=\frac{1}{b},$$

což jsme chtěli dokázat.

Nyní si zavedeme analogii Věty 3.11 (o početních operacích s limitami). V této větě se uvažovalo, že pracujeme s vlastními limitami. Proto si nyní uvedeme, jak by to vypadalo s nevlastními limitami. Tuto variantu rozdělíme na dvě části, podle toho, jestli má nevlastní limitu jedna funkce (Věta 3.13), nebo obě (Věta 3.16).

Věta 3.13 Buď $a\in\mathbb{R}, x_0\in\mathbb{R}^*$ a nechť existují obě limity

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a,\qquad \lim_{x\to x_0} g(x)=\infty.$$

Pak platí

(i) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\pm\infty$,

(ii) je-li $a>0$, pak $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\infty$,

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$,

(iv) je-li $a>0$, pak $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=\infty$.

Důkaz. Budeme dokazovat čtyři tvrzení.

(i) Chceme dokázat, že $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=a+\infty=\infty$.
K $\varepsilon:=1$ existuje $\mathcal{O}_1(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x\in\mathcal{O}_1{}^*(x_0) \text{ je } |f(x)-a|<\varepsilon=1, \text{ tedy } a-1<f(x)<a+1.$$

Zvolme pevné $k>0$, pak existuje $\mathcal{O}_2(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x\in\mathcal{O}_2{}^*(x_0) \text{ je } g(x)>k-a+\varepsilon=k-a+1.$$

Položme $\mathcal{O}(x_0):=\mathcal{O}_1(x_0)\cap\mathcal{O}_2(x_0)$. Pak $\forall\, x\in\mathcal{O}^*(x_0)$ platí

$$\begin{aligned} a-1+k-a+1&<f(x)+g(x),\\ k&<f(x)+g(x)\end{aligned}$$

a tím je věta dokázána.
Důkaz pro rozdíl funkcí by se prováděl analogicky.

(ii) Chceme dokázat, že $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=a\cdot\infty=\infty$ pro $a>0$.
K $\varepsilon:=\frac{a}{2}$ existuje $\mathcal{O}_1(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x\in\mathcal{O}_1{}^*(x_0) \text{ je } |f(x)-a|<\varepsilon=\frac{a}{2},$$

tedy

$$a - \frac{a}{2} < f(x) < a + \frac{a}{2},$$
$$\frac{a}{2} < f(x) < \frac{3a}{2}.$$

Zvolme pevné $k > 0$, pak existuje $\mathcal{O}_2(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in {\mathcal{O}_2}^*(x_0) \text{ je } \frac{2k}{a} < g(x).$$

Položme $\mathcal{O}(x_0) := \mathcal{O}_1(x_0) \cap \mathcal{O}_2(x_0)$. Pak $\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0)$ platí

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{2k}{a} < f(x) \cdot g(x),$$
$$k < f(x) \cdot g(x)$$

a tím je věta dokázána.

(iii) Chceme dokázat, že $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{\infty} = 0.$

Funkce f má v bodě x_0 vlastní limitu a proto podle Věty 3.2 existuje $\mathcal{O}_1(x_0)$, kde je ohraničená, tzn. že existuje $k > 0$ tak, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_1(x_0) \text{ je } |f(x)| \leq k^2.$$

Dále existuje $\mathcal{O}_2(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in {\mathcal{O}_2}^*(x_0) \text{ je } k < g(x),$$

lze tedy úpravou dostat

$$\frac{1}{g(x)} < \frac{1}{k}.$$

Položme $\mathcal{O}(x_0) := \mathcal{O}_1(x_0) \cap \mathcal{O}_2(x_0)$. Pak $\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0)$ platí

$$f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} < k^2 \cdot \frac{1}{k},$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} < k$$

a tím je věta dokázána.

(iv) Chceme dokázat, že $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\infty}{a} = \infty.$

Funkce f má v bodě x_0 vlastní limitu a proto podle Věty 3.2 existuje $\mathcal{O}_1(x_0)$, kde je ohraničená, tzn. že existuje $k > 0$ tak, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_1(x_0) \text{ je } |f(x)| \leq k,$$

lze tedy úpravou dostat

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{|f(x)|}.$$

Dále existuje $\mathcal{O}_2(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_2{}^*(x_0) \text{ je } k^2 < g(x).$$

Položme $\mathcal{O}(x_0) := \mathcal{O}_1(x_0) \cap \mathcal{O}_2(x_0)$. Pak $\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0)$ platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \cdot k^2 &< \frac{1}{f(x)} \cdot g(x), \\ k &< \frac{g(x)}{f(x)} \end{aligned}$$

a tím je věta dokázána.

□

Poznámka 3.14 Bod (iii) v předcházející větě plyne přímo z Věty 3.5, Věty 3.11 a Poznámky 3.12, nemuseli bychom ho tedy vůbec dokazovat.

Poznámka 3.15 Analogická pravidla platí i pro další volby limit funkcí f a g ve Větě 3.13, kde jedna limita je vlastní a druhá nevlastní.
Dostáváme tak pravidla pro počítání s $\pm\infty, a \in \mathbb{R}, a > 0$,

$$\begin{aligned} \pm a + \infty &= \infty, & \pm\, a - \infty &= -\infty, \\ \pm a \cdot \infty &= \pm\infty, & \pm\, a \cdot (-\infty) &= \mp\infty, \\ \frac{\infty}{\pm a} &= \pm\infty, & \frac{-\infty}{\pm a} &= \mp\infty, \end{aligned}$$
$$\frac{\pm a}{\pm\infty} = 0.$$

Věta 3.16 Buď $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť existují obě limity

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty.$$

Pak platí

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \infty$,

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \infty$.

Důkaz. Budeme dokazovat dvě tvrzení.

(i) Chceme dokázat, že $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \infty + \infty = \infty$.
Zvolme pevné $k > 0$, pak existují $\mathcal{O}_1(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_1{}^*(x_0) \text{ je } k < f(x)$$

a $\mathcal{O}_2(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_2{}^*(x_0) \text{ je } k < g(x).$$

Položme $\mathcal{O}(x_0) := \mathcal{O}_1(x_0) \cap \mathcal{O}_2(x_0)$. Pak $\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0)$ platí

$$\begin{aligned} k + k &< f(x) + g(x), \\ 2k &< f(x) + g(x) \end{aligned}$$

a tím je věta dokázána.

(ii) Chceme dokázat, že $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \infty \cdot \infty = \infty$.
Zvolme pevné $k > 0$, pak existují $\mathcal{O}_1(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_1{}^*(x_0) \text{ je } k < f(x)$$

a $\mathcal{O}_2(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_2{}^*(x_0) \text{ je } k < g(x).$$

Položme $\mathcal{O}(x_0) := \mathcal{O}_1(x_0) \cap \mathcal{O}_2(x_0)$. Pak $\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0)$ platí

$$\begin{aligned} k \cdot k &< f(x) \cdot g(x), \\ k^2 &< f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

a tím je věta dokázána.

□

Poznámka 3.17 Analogická pravidla platí i pro další volby limit funkcí f a g ve Větě 3.16, kde jsou obě limity nevlastní.
Dostáváme tak pravidla pro počítání s $\pm\infty$.

$$\infty + \infty = \infty, \qquad -\infty - \infty = -\infty,$$

$$\infty \cdot \infty = \infty, \qquad \infty \cdot (-\infty) = -\infty, \qquad (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty.$$

Poznámka 3.18 Platí, že limity typu

$$\infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{0}{0}$$

jsou nejednoznačné (viz Příklad 1 v části 4.2).

3.3 Porovnávání limit

Věta 3.19 Buď $a, x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0) \text{ je } f(x) = g(x).$$

Pak

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff \lim_{x \to x_0} g(x) = a.$$

Důkaz. Předpokládejme, že
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a.$$
Dle předpokladu věty platí, že existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že
$$\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0) \text{ je } f(x) = g(x).$$
Chceme dokázat, že platí také
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = a.$$
Zvolíme tedy libovolné $\mathcal{O}(a)$, z definice limity (Definice 2.8) k němu pak existuje $\mathcal{O}_1(x_0)$, takové, že
$$\forall\, x \in {\mathcal{O}_1}^*(x_0) \text{ je } f(x) \in \mathcal{O}(a).$$
Zvolme $\mathcal{O}_2(x_0) := \mathcal{O}(x_0) \cap \mathcal{O}_1(x_0)$. Pak
$$\forall\, x \in {\mathcal{O}_2}^*(x_0) \text{ platí } f(x) = g(x) \in \mathcal{O}(a),$$
což jsme chtěli dokázat. □

Věta 3.20 Buď $a, b, x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = b.$$
Jestliže $a < b$, pak existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že
$$\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0) \text{ je } f(x) < g(x).$$
Naopak, jestliže existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že
$$\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0) \text{ je } f(x) \le g(x),$$
pak je $a \le b$.

Důkaz. Tvrzení má dvě části.
Nejprve dokážeme první část tvrzení. Důkaz rozdělíme podle toho, jaké máme a a b.

(i) Uvažujme nyní $a, b \in \mathbb{R}$, podle předpokladu je $a < b$.
Zvolme $\varepsilon := \frac{b-a}{2}$. Dle definice limity (Definice 2.10) k tomuto $\varepsilon > 0$ existují $\mathcal{O}_1(x_0)$ tak, že
$$\forall\, x \in {\mathcal{O}_1}^*(x_0) \text{ je } |f(x) - a| < \varepsilon, \text{ tedy } a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$
a $\mathcal{O}_2(x_0)$ tak, že
$$\forall\, x \in {\mathcal{O}_2}^*(x_0) \text{ je } |g(x) - b| < \varepsilon, \text{ tedy } b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon.$$
Zvolíme-li $\mathcal{O}(x_0) := \mathcal{O}_1(x_0) \cap \mathcal{O}_2(x_0)$, pak $\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0)$ platí
$$f(x) < a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2},$$
$$g(x) > b - \varepsilon = b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}.$$
Odtud plyne, že
$$f(x) < \frac{a+b}{2} < g(x),$$
což jsme chtěli dokázat.

(ii) Nyní uvažujme $a \in \mathbb{R}, b = \infty$ (pro ostatní případy by se důkaz provedl analogicky). Pro $\varepsilon := 1$ existují z definice limity (Definice 2.10) $\mathcal{O}_1(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_1{}^*(x_0) \text{ je } |f(x) - a| < \varepsilon, \text{ tedy } a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

a $\mathcal{O}_2(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_2{}^*(x_0) \text{ je } g(x) > a + \varepsilon.$$

Zvolíme-li opět $\mathcal{O}(x_0) := \mathcal{O}_1(x_0) \cap \mathcal{O}_2(x_0)$, pak vidíme, že $\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0)$ platí

$$f(x) < a + \varepsilon = a + 1$$

$$g(x) > a + \varepsilon = a + 1.$$

Odtud plyne, že

$$f(x) < a + 1 < g(x),$$

čímž je tvrzení dokázáno.

Nyní zbývá dokázat druhou část tvrzení, to ale není potřeba. Kdyby bylo $a > b$, dostali bychom přímo spor s první částí tohoto tvrzení. □

Poznámka 3.21 Je-li v druhé části předchozí věty $f(x) < g(x), \forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0)$ nemusí být $a < b$.
Mějme například

$$f(x) = x^2,$$
$$g(x) = 2x^2.$$

Pak

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0,$$

což znamená, že $a = b = 0$.

Věta 3.22 (o třech limitách) Buď $a, x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0) \text{ je } f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Jestliže

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = a,$$

pak

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = a.$$

Důkaz. Důkaz rozdělíme na dvě části podle toho, jaké máme a.

(i) Nejprve uvažujme $a \in \mathbb{R}$.
K libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\mathcal{O}_1(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_1{}^*(x_0) \text{ je } |f(x) - a| < \varepsilon,$$

a $\mathcal{O}_2(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in {\mathcal{O}_2}^*(x_0) \text{ je } |h(x) - a| < \varepsilon.$$

Z předpokladu víme, že existuje $\mathcal{O}^*(x_0)$ v němž platí

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Položme nyní $\mathcal{O}_3(x_0) := \mathcal{O}_1(x_0) \cap \mathcal{O}_2(x_0) \cap \mathcal{O}(x_0)$. Pak $\forall\, x \in \mathcal{O}_3^*(x_0)$ platí

$$a - \varepsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq a + \varepsilon,$$
$$a - \varepsilon \leq g(x) \leq a + \varepsilon,$$

tedy

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = a.$$

(ii) Nyní větu dokážeme pro $a = \infty$ (pro $a = -\infty$ by se věta dokazovala analogicky). K libovolnému $k > 0$ existuje $\mathcal{O}_1(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in {\mathcal{O}_1}^*(x_0) \text{ je } k < f(x).$$

Z předpokladu opět víme, že existuje $\mathcal{O}^*(x_0)$ v němž platí

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Položme nyní $\mathcal{O}_2(x_0) := \mathcal{O}_1(x_0) \cap \mathcal{O}(x_0)$. Pak $\forall\, x \in \mathcal{O}_2^*(x_0)$ platí

$$k < f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$
$$k < g(x),$$

tedy

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty.$$

$\square$

3.4 Ostatní vlastnosti limit

Při počítání limity podílu dvou funkcí se často dostaneme k výrazu, který nemá smysl nebo je nejednoznačný. V takovém případě lze často (ale ne vždycky) k vyřešení použít tzv. L'Hospitalovo pravidlo.

Věta 3.23 (L'Hospitalovo pravidlo) Buď $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť je splněna jedna z podmínek

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$,

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$.

Existuje-li

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pak existuje také

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

a platí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Obdobné tvrzení platí i pro jednostranné limity.

Důkaz. Důkaz nebudeme uvádět, neboť je k němu zapotřebí mnoha vlastností derivace, ale derivace nejsou náplní této práce. Důkaz můžeme najít např. v [1]. □

Poznámka 3.24 Limita $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nemusí existovat. To ale nutně neznamená, že neexistuje také $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ (viz Příklad 2 v části 4.2).

Poznámka 3.25 Limity vedoucí k neurčitým výrazům

$$\infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty$$

lze také řešit pomocí L'Hospitalova pravidla. Je však nutné výrazy upravit.

(i) Pro výraz typu $\infty - \infty$, tedy pro

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty,$$

píšeme

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right) = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}} \right) \overset{\substack{\text{Věta 3.11}\\ \text{Pozn. 3.15}\\ \text{Pozn. 3.17}}}{=} \left[\frac{0}{0}\right].$$

(ii) Pro výraz $0 \cdot \infty$, tedy pro

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty,$$

píšeme

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \overset{\substack{\text{Věta 3.11}\\ \text{Pozn. 3.15}}}{=} \left[\frac{0}{0}\right].$$

Věta 3.26 (o limitě složené funkce) Buď $a, \alpha, x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \alpha, \qquad \lim_{y\to \alpha} f(y) = a$$

a existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}^*(x_0) \text{ je } \varphi(x) \neq \alpha.$$

Pak
$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = a.$$

Důkaz. Chceme dokázat, že k libovolnému $\mathcal{O}(a)$ existuje $\mathcal{O}_1(x_0)$ takové, že $\forall\, x \in \mathcal{O}_1^*(x_0)$ je $f(\varphi(x)) \in \mathcal{O}(a)$.
Zvolme $\mathcal{O}(a)$. K němu pak existuje $\mathcal{O}(\alpha)$ takové, že
$$\forall\, y \in \mathcal{O}^*(\alpha) \text{ je } f(y) \in \mathcal{O}(a).$$
Dále k okolí $\mathcal{O}(\alpha)$ existuje $\mathcal{O}_2(x_0)$ tak, že
$$\forall\, x \in \mathcal{O}_2^*(x_0) \text{ je } \varphi(x) \in \mathcal{O}(\alpha).$$
Položme nyní $\mathcal{O}_1(x_0) := \mathcal{O}(x_0) \cap \mathcal{O}_2(x_0)$. Pak
$$\forall\, x \in \mathcal{O}_1^*(x_0) \text{ je } \varphi(x) \in \mathcal{O}^*(\alpha).$$
Tedy
$$f(\varphi(x)) \in \mathcal{O}(a).$$
□

Poznámka 3.27 Následující poznámky nám pomohou při používání předchozí věty.

(i) Podmínka existence $\mathcal{O}(x_0)$ dle předpokladu věty je velice důležitá.
Mějme například
$$\varphi(x) = 0,$$
$$f(y) = \begin{cases} 0, & y \neq 0, \\ 1, & y = 0. \end{cases}$$
Pak
$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0, \qquad \lim_{y\to 0} f(y) = 0,$$
ale
$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^* \text{ platí } \lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = 1.$$
To znamená, že Věta 3.26 neplatí (právě proto, že není splněn jeden z jejích předpokladů).

(ii) Je-li $\alpha = \pm\infty$, pak je poslední předpoklad Věty 3.26 splněn automaticky.

(iii) Na příkladu v bodě (i) této poznámky můžeme vidět, že problém je právě v tom, že funkce f není v bodě α spojitá.
Lze tedy zavést jinou formulaci věty o limitě složené funkce (která by byla k té původní ekvivalentní) a to nahrazením posledního předpokladu původní věty podmínkou
$$\lim_{y\to\alpha} f(y) = a = f(\alpha),$$
tedy požadavkem spojitosti f v bodě α (viz Definice 2.13).
Tato nová věta by se dokazovala podobně jako ta původní.

4 Početní část

V této kapitole se budeme věnovat samotnému výpočtu limit a popisu postupů, které můžeme při jejich řešení použít.

4.1 Základní limity

Nejprve si uvedeme pár často používaných základních limit a to včetně důkazu.

Většina základních limit je čerpána z [2] a důkazy z [8].

Věta 4.1 Nechť $f(x) = c \in \mathbb{R}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, pak pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = c.$$

Důkaz. Důkaz je zřejmý. □

Věta 4.2 Nechť $f(x) = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, pak pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = x_0.$$

Důkaz. Nechť je $|x - x_0| < \delta$.
Pak má platit, že $|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon$. Stačí tedy zvolit $\varepsilon := \delta$ a dle Definice 2.10 je tvrzení dokázáno. □

Věta 4.3 Nechť P je polynom, pak pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0).$$

Důkaz. Polynom je funkce tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad n \in \mathbb{N}_0, \qquad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Za použití Věty 3.11 (o početních operacích s limitami) dostáváme požadované tvrzení. □

Věta 4.4 Nechť R je racionální lomená funkce a $x_0 \in D(R)$, pak

$$\lim_{x \to x_0} R(x) = R(x_0).$$

Důkaz. Racionální lomená funkce je funkce tvaru

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde P a Q jsou nenulové polynomy.
Tento případ se dá za použití Věty 3.11 převést na předcházející tvrzení (Věta 4.3). □

Věta 4.5 Nechť $f(x) = x^a, a > 0, x_0 \in D(f)$, pak

$$\lim_{x \to x_0} x^a = x_0^a.$$

Důkaz. Pro $a \neq 1$ dokážeme tvrzení přímo z „$\varepsilon - \delta$“ definice limity (Definice 2.10). Budeme se tedy snažit dokázat, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall\, x \in \mathbb{R}:\ 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |x^a - x_0^a| < \varepsilon.$$

Z první nerovnosti dostáváme

$$-\delta < x - x_0 < \delta.$$

Druhou nerovnost si rozepíšeme

$$|x^a - x_0^a| < \varepsilon,$$

$$-\varepsilon < x^a - x_0^a < \varepsilon,$$

$$x_0^a - \varepsilon < x^a < x_0^a + \varepsilon,$$

$$(x_0^a - \varepsilon)^{\frac{1}{a}} < x < (x_0^a + \varepsilon)^{\frac{1}{a}},$$

$$(x_0^a - \varepsilon)^{\frac{1}{a}} - x_0 < x - x_0 < (x_0^a + \varepsilon)^{\frac{1}{a}} - x_0.$$

Zvolíme-li nyní $\delta := \min\left(x_0 - (x_0^a - \varepsilon)^{\frac{1}{a}}, (x_0^a + \varepsilon)^{\frac{1}{a}} - x_0\right)$, pak je tvrzení dokázáno.
Pro $a = 1$ je tvrzení zřejmé (věta přejde na Větu 4.2). $\square$

Věta 4.6 Pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0, \qquad \lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0.$$

Důkaz. Nechť je $|x - x_0| < \delta$.
Platí, že

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \cdot \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2}.$$

Protože

$$|\sin x| \leq |x|, \qquad |\cos x| \leq 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

lze psát

$$|\sin x - \sin x_0| \leq 2 \cdot \left|\frac{x - x_0}{2}\right| \cdot 1 = |x - x_0|.$$

Nyní stačí zvolit $\varepsilon := \delta$ a dle Definice 2.10 je tvrzení dokázáno.
Důkaz pro případ $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$ by byl analogický. $\square$

Věta 4.7 Platí, že

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Důkaz. Na Obrázku 4.1 je na jednotkové kružnici vidět, že obsah trojúhelníku OAB je menší než obsah kruhové výseče OAB a ten je menší než obsah trojúhelníku OAC.
Lze tedy psát

$$\frac{1}{2} \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot x < \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Úpravou pak dostáváme

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Chceme použít Větu 3.22 (větu o třech limitách), proto si vyřešíme limitu na pravé a na levé straně,

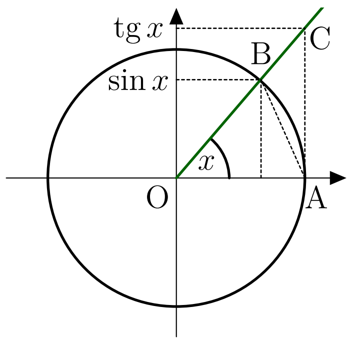
$$\lim_{x\to 0} \cos x \overset{\text{Věta 4.6}}{=} \cos 0 = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} 1 \overset{\text{Věta 4.1}}{=} 1.$$

Pak dle věty o třech limitách dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\text{Věta 3.22}}{=} 1.$$

□



Obrázek 4.1: Nerovnost $\frac{1}{2} \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot x < \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} x$ na jednotkové kružnici.

Věta 4.8 Nechť $f(x) = \mathrm{e}^x, x_0 \in D(f)$, pak

$$\lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{x_0}.$$

Důkaz. Nejprve dokážeme, že

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Vyjdeme z nerovnosti (viz Obrázek 4.2)

$$0 \le |\,\mathrm{e}^x - 1| \le 2 \cdot |x|, \qquad \forall\, x \in (-1, 1).$$

Budeme chtít použít Větu 3.22 (větu o třech limitách), proto si vyřešíme limitu na levé a na pravé straně.
Dostáváme

$$\lim_{x\to 0} 0 \overset{\text{Věta 4.1}}{=} 0,$$

$$\lim_{x\to 0} (2 \cdot |x|) \overset{\substack{\text{Věta 3.11}\\ \text{Věta 3.26}\\ \text{Věta 4.1}\\ \text{Věta 4.2}}}{=} 0.$$

Za použití věty o třech limitách tedy dostáváme

$$\lim_{x\to 0} |\,\mathrm{e}^x - 1| \overset{\text{Věta 3.22}}{=} 0,$$

z čehož (za použití Věty 3.9) dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^x \overset{\text{Věta 3.9}}{=} 1.$$

Nyní tvrzení rozšíříme na $x \to x_0, x_0 \in D(f)$. Dostáváme

$$\lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^x = \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{x_0+(x-x_0)} \overset{\text{Věta 3.11}}{=} \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{x-x_0} \overset{\text{Věta 4.1}}{=} \mathrm{e}^{x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{x-x_0},$$

kde zbylou limitu budeme řešit pomocí substituce

$$y = x - x_0,$$
$$y \to 0.$$

Úlohu tak převedeme na výpočet limity složené funkce $f(\varphi)$ (dle Věty 3.26), kde

$$\varphi(x) = x - x_0,$$
$$f(y) = \mathrm{e}^y .$$

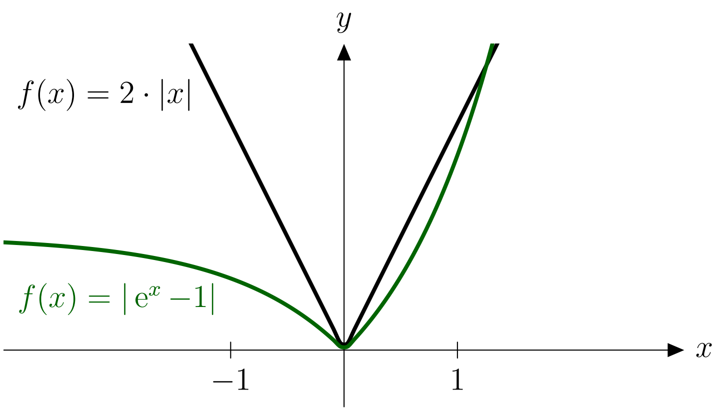
Zbývající předpoklad věty o limitě složené funkce nahradíme, dle Poznámky 3.27 (iii), požadavkem spojitosti e^y v bodě $\alpha = 0$, který je také splněn.
Dostáváme limitu, kterou jsme si již řešili na počátku tohoto důkazu, máme tedy

$$\lim_{y\to 0} \mathrm{e}^y = 1.$$

Celkem dostáváme

$$\lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{x-x_0} = \mathrm{e}^{x_0} \cdot 1 = \mathrm{e}^{x_0} .$$

□



Obrázek 4.2: Nerovnost $0 \leq |\,\mathrm{e}^x - 1| \leq 2 \cdot |x|$, $\forall\, x \in (-1, 1)$.

Věta 4.9 Nechť $\lim_{x\to x_0} g(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, pak

(i) pro $\alpha \neq \pm\infty$ platí $\lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{g(x)} = \mathrm{e}^{\alpha}$,

(ii) pro $\alpha = \infty$ platí $\lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{g(x)} = \infty$,

(iii) pro $\alpha = -\infty$ platí $\lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{g(x)} = 0$.

Důkaz. Důkaz rozdělíme na tři části.

(i) Důkaz budeme provádět pomocí Věty 3.26 (o limitě složené funkce.) Položíme

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= g(x),\\ f(y) &= \mathrm{e}^y,\end{aligned}$$

a ověříme předpoklady věty, tzn.

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \alpha,$$

$$\lim_{y\to\alpha} \mathrm{e}^y \overset{\text{Věta 4.8}}{=} \mathrm{e}^\alpha .$$

Zbývající předpoklad věty o limitě složené funkce nahradíme, dle Poznámky 3.27 (iii), požadavkem spojitosti e^y v bodě α, který je splněn.
Pak dle věty o limitě složené funkce musí platit

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{g(x)} \overset{\text{Věta 3.26}}{=} \mathrm{e}^\alpha = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} .$$

(ii) Chceme ukázat, že k libovolnému $k_1 > 0$ existuje $\mathcal{O}_1(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_1^*(x_0) \text{ platí } k_1 < e^{g(x)}.$$

Dle předpokladu existuje $k_2 > 0$ a k němu $\mathcal{O}_2(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_2^*(x_0) \text{ je } k_2 < g(x),$$

z čehož úpravou dostaneme

$$e^{k_2} < e^{g(x)}.$$

Položíme-li $\mathcal{O}_1(x_0) := \mathcal{O}_2(x_0)$ a $k_2 := \ln k_1$, je tvrzení dokázáno.

(iii) Chceme ukázat, že k libovolnému $\varepsilon_1 > 0$ existuje $\mathcal{O}_1(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_1^*(x_0) \text{ platí } |e^{g(x)} - 0| = |e^{g(x)}| < \varepsilon_1.$$

Dle předpokladu existuje $k_2 > 0$ a k němu $\mathcal{O}_2(x_0)$ tak, že

$$\forall\, x \in \mathcal{O}_2^*(x_0) \text{ je } g(x) < -k_2,$$

z čehož úpravou dostaneme

$$e^{g(x)} < e^{-k_2} = \frac{1}{e^{k_2}}.$$

Položíme-li $\mathcal{O}_1(x_0) := \mathcal{O}_2(x_0)$ a $k_2 := \ln \frac{1}{\varepsilon_1}$, je tvrzení dokázáno.

□

Věta 4.10 Nechť $f(x) = a^x, a > 0, x_0 \in D(f)$, pak

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

Důkaz. Pro $a \neq 1$ lze psát $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$. Dostáváme tedy

$$\lim_{x \to x_0} a^x = \lim_{x \to x_0} \mathrm{e}^{x \ln a} \overset{\text{Věta 4.9}}{=} \mathrm{e}^{\lim\limits_{x \to x_0} x \ln a} \overset{\substack{\text{Věta 3.11}\\ \text{Věta 4.1}\\ \text{Věta 4.2}}}{=} \mathrm{e}^{x_0 \ln a} = a^{x_0}.$$

Pro $a = 1$ je tvrzení zřejmé (věta přejde na Větu 4.1). □

Věta 4.11 Nechť $f(x) = \ln x, x_0 \in D(f)$, pak

$$\lim_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0.$$

Důkaz. Tato věta vlastně říká, že je funkce spojitá (dle Definice 2.13), proto plyne přímo z Věty 2.15 (neboť e^x je spojitá, ryze monotónní funkce na celém $\mathbb{R}$ a inverzní k $\ln x$) a Věty 4.8. □

Poznámka 4.12 Věty 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.8, 4.10 a 4.11 nám vlastně říkají, že jsou tyto funkce spojité (viz Definice 2.13).

Věta 4.13 Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \alpha,\ \alpha \in (0, \infty),\ x_0 \in \mathbb{R}^*$, pak

$$\lim_{x \to x_0} \ln g(x) = \ln \alpha.$$

Důkaz. Důkaz budeme provádět pomocí Věty 3.26 (o limitě složené funkce.) Položíme

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= g(x), \\ f(y) &= \ln y, \end{aligned}$$

a ověříme předpoklady věty, tzn.

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \alpha,$$

$$\lim_{y \to \alpha} \ln y \overset{\text{Věta 4.11}}{=} \ln \alpha$$

a zbývající předpoklad věty o limitě složené funkce opět nahradíme, dle Poznámky 3.27 (iii), požadavkem spojitosti $\ln y$ v bodě α, který je také splněn.
Pak dle věty o limitě složené funkce musí platit

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} \ln g(x) \overset{\text{Věta 3.26}}{=} \ln \alpha = \ln \lim_{x \to x_0} g(x).$$

□

Poznámka 4.14 Lze dokázat, že předchozí věta se dá rozšířit i pro další hodnoty α.

(i) Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty,\ x_0 \in \mathbb{R}^*$, pak

$$\lim_{x \to x_0} \ln g(x) = \infty.$$

(ii) Nechť $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0,\ x_0 \in \mathbb{R}^*$ a existuje $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že $\forall\, x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $g(x) > 0$, pak

$$\lim_{x\to x_0} \ln g(x) = -\infty.$$

Poznámka 4.15 Platí i opačná implikace obou tvrzení z předchozí Poznámky 4.14.

(i) Nechť $\lim_{x\to x_0} \ln g(x) = \infty,\ x_0 \in \mathbb{R}^*$, pak

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty.$$

Důkaz. Označme $\ln g(x) =: h(x)$.
Víme tedy, že

$$\lim_{x\to x_0} \ln g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \infty.$$

Z tohoto výrazu dostáváme pomocí Věty 4.9

$$\lim_{x\to x_0} e^{h(x)} = \infty.$$

Když nyní dosadíme za $h(x)$ dostáváme

$$\lim_{x\to x_0} e^{\ln g(x)} = \infty,$$

tedy

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty,$$

což jsme chtěli dokázat. $\square$

(ii) Nechť $\lim_{x\to x_0} \ln g(x) = -\infty,\ x_0 \in \mathbb{R}^*$, pak

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

Důkaz. Důkaz provádět nebudeme, postupuje se analogicky jako v případě (i). $\square$

Věta 4.16 Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = a,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = b,\ a \geq 0,\ b \in \mathbb{R}^*$, pak

(i) je-li $a \in (0, \infty),\ b \in \mathbb{R}$, pak $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = a^b$,

(ii) je-li $a \in (0, \infty) \setminus \{1\},\ b = \infty$, pak $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1, \\ \infty, & a > 1, \end{cases}$

(iii) je-li $a \in (0, \infty) \setminus \{1\},\ b = -\infty$, pak $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} \infty, & 0 < a < 1, \\ 0, & a > 1, \end{cases}$

(iv) je-li $a = 0,\ b \neq 0$ a existuje $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že $\forall\, x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) > 0$,
pak $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} \infty, & b < 0, \\ 0, & b > 0, \end{cases}$

(v) je-li $a = \infty$, $b \neq 0$, pak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} 0, & b < 0, \\ \infty, & b > 0. \end{cases}$

Důkaz. Důkaz provedeme postupně.

(i) Chceme ukázat, že pro $a \in (0, \infty)$, $b \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = a^b.$$

Lze psát

$$\lim_{x \to x_0} \ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} [g(x) \cdot \ln f(x)] \overset{\text{Věta 3.11}}{=} \lim_{x \to x_0} g(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \ln f(x)$$
$$\overset{\text{Věta 4.13}}{=} \lim_{x \to x_0} g(x) \cdot \ln \lim_{x \to x_0} f(x) = \ln \lim_{x \to x_0} f(x)^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$$

a také

$$\lim_{x \to x_0} \ln f(x)^{g(x)} \overset{\text{Věta 4.13}}{=} \ln \lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}.$$

V tomto bodě by mohl vzniknout problém, kdyby výraz uvnitř logaritmu $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}\right)$ byl záporný nebo roven nule. To ale nikdy nemůže nastat, neboť $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a > 0$ a dle definice limity (Definice 2.10)

$$\exists\, \mathcal{O}(x_0) \text{ takové, že } |f(x) - a| < a.$$

Z toho přímo plyne, že na $\mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) > 0$.
Dostáváme tedy

$$\ln \lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \ln \lim_{x \to x_0} f(x)^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)},$$

z čehož odlogaritmováním máme

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} f(x)^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.$$

(ii) Chceme ukázat, že pro $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, $b = \infty$, platí

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1, \\ \infty, & a > 1. \end{cases}$$

Lze psát

$$\lim_{x \to x_0} \ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} [g(x) \cdot \ln f(x)] \overset{\text{Věta 3.13}}{=} \lim_{x \to x_0} g(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \ln f(x)$$
$$= \infty \cdot \lim_{x \to x_0} \ln f(x) \overset{\text{Pozn. 3.15}}{=} \begin{cases} -\infty, & 0 < a < 1, \\ \infty, & a > 1. \end{cases}$$

Máme tedy

$$\lim_{x \to x_0} \ln f(x)^{g(x)} = \begin{cases} -\infty, & 0 < a < 1, \\ \infty, & a > 1, \end{cases}$$

a dle Poznámky 4.15 dostáváme

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1, \\ \infty, & a > 1. \end{cases}$$

(iii) Chceme ukázat, že pro $a \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, $b = -\infty$, platí

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} \infty, & 0 < a < 1, \\ 0, & a > 1. \end{cases}$$

Důkaz provádět nebudeme, postupuje se analogicky jako v případě (ii).

(iv) Chceme ukázat, že pro $a = 0$, $b \neq 0$ a nějaké $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že $\forall\, x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) > 0$, platí

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} \infty, & b < 0, \\ 0, & b > 0. \end{cases}$$

Důkaz provedeme pouze pro $a = 0$ a $b \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
Pro $a = 0$ a $b = \pm\infty$ by důkaz vypadal analogicky, jen bychom místo Poznámky 3.15 museli použít Poznámku 3.17.
Lze psát

$$\lim_{x\to x_0} \ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} [g(x) \cdot \ln f(x)] \overset{\text{Věta 3.13}}{=} \lim_{x\to x_0} g(x) \cdot \lim_{x\to x_0} \ln f(x)$$
$$\overset{\text{Pozn. 4.14}}{=} [\lim_{x\to x_0} g(x)] \cdot (-\infty) \overset{\text{Pozn. 3.15}}{=} \begin{cases} \infty, & b < 0, \\ -\infty, & b > 0. \end{cases}$$

Máme tedy

$$\lim_{x\to x_0} \ln f(x)^{g(x)} = \begin{cases} \infty, & b < 0, \\ -\infty, & b > 0. \end{cases}$$

a dle Poznámky 4.15 dostáváme

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} \infty, & b < 0, \\ 0, & b > 0. \end{cases}$$

(v) Chceme ukázat, že pro $a = \infty$, $b \neq 0$, platí

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} 0, & b < 0, \\ \infty, & b > 0. \end{cases}$$

Důkaz provedeme pouze pro $a = \infty$ a $b \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
Pro $a = \infty$ a $b = \pm\infty$ by důkaz vypadal analogicky, jen bychom místo Poznámky 3.15 museli použít Poznámku 3.17.
Lze psát

$$\lim_{x\to x_0} \ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} [g(x) \cdot \ln f(x)] \overset{\text{Věta 3.13}}{=} \lim_{x\to x_0} g(x) \cdot \lim_{x\to x_0} \ln f(x)$$
$$\overset{\text{Pozn. 4.14}}{=} [\lim_{x\to x_0} g(x)] \cdot \infty \overset{\text{Pozn. 3.15}}{=} \begin{cases} -\infty, & b < 0, \\ \infty, & b > 0. \end{cases}$$

Máme tedy

$$\lim_{x\to x_0} \ln f(x)^{g(x)} = \begin{cases} -\infty, & b < 0, \\ \infty, & b > 0. \end{cases}$$

a dle Poznámky 4.15 dostáváme

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} 0, & b < 0, \\ \infty, & b > 0. \end{cases}$$

$\square$

Poznámka 4.17 Z Věty 4.16 dostáváme pravidla pro počítání $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$.
Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ a $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, pak pro $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$ platí následující tabulka (Tabulka 4.1).

$a \setminus b$	$\{-\infty\}$	$(-\infty, 0)$	$\{0\}$	$(0, \infty)$	$\{\infty\}$
$\{0\}$	∞	∞	–	0	0
$(0, 1)$	∞	a^b	1	a^b	0
$\{1\}$	–	1	1	1	–
$(1, \infty)$	0	a^b	1	a^b	∞
$\{\infty\}$	0	0	–	∞	∞

Tabulka 4.1: Pravidla pro počítání $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$, kde $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ a $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$.

Poznámka 4.18 Platí, že limity typu

$$1^{\pm\infty}, \qquad \infty^0, \qquad 0^0$$

jsou nejednoznačné.
Mějme například Příklad 11 a Příklad 12. Obě limity jsou typu 1^∞, ale každá má úplně jiný výsledek.
Stejně jako u jiných nejednoznačných limit, i zde můžeme k řešení použít L'Hospitalovo pravidlo (Věta 3.23). Pokud limity upravíme,

$$\lim_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{(g(x) \cdot \ln f(x))} \overset{\text{Věta 4.9}}{=} e^{\lim\limits_{x \to x_0} (g(x) \cdot \ln f(x))},$$

dostáváme vnitřní limitu typu $0 \cdot \infty$ (dle Věty 4.1 a Věty 4.11), kterou dále upravujeme podle Poznámky 3.25.

Poznámka 4.19 K Větě 4.16 lze analogicky definovat větu, která platí pro $a < 0$. Předpoklady zůstanou stejné, pouze se přidá požadavek existence $\lim\limits_{x \to x_0} (-1)^{g(x)}$. Pak platí

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \left[\lim_{x \to x_0} (-1)^{g(x)}\right] \cdot a^b.$$

Důkaz této věty spočívá v převedení problému právě na Větu 4.16. Pro $a < 0$ lze psát

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x \to x_0} [(-1) \cdot |f(x)|]^{g(x)} \\ &\overset{\text{Věta 3.11}}{=} \lim_{x \to x_0} (-1)^{g(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} |f(x)|^{g(x)} \overset{\text{Věta 4.16}}{=} \left[\lim_{x \to x_0} (-1)^{g(x)}\right] \cdot a^b. \end{aligned}$$

Věta 4.20 Platí, že

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}\,.$$

Důkaz. Ukážeme si dva způsoby, kterými lze tuto limitu vyřešit.

(i) Zřejmě platí

$$\lfloor x\rfloor < x < \lfloor x\rfloor + 1, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Lze tedy psát

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lfloor x\rfloor + 1} \le \frac{1}{x} &\le \frac{1}{\lfloor x\rfloor},\\
1 + \frac{1}{\lfloor x\rfloor + 1} \le 1 + \frac{1}{x} &\le 1 + \frac{1}{\lfloor x\rfloor},\\
\left(1 + \frac{1}{\lfloor x\rfloor + 1}\right)^{\lfloor x\rfloor} \le \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} &\le \left(1 + \frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor + 1}.
\end{aligned}$$

Budeme chtít použít Větu 3.22 (větu o třech limitách), proto si vyřeším limitu na pravé a na levé straně.
Tyto limity si nejprve rozepíšeme

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\lfloor x\rfloor + 1}\right)^{\lfloor x\rfloor} \overset{\text{Věta 3.11}}{=} \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\lfloor x\rfloor + 1}\right)^{\lfloor x\rfloor + 1} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\lfloor x\rfloor + 1}\right)^{-1},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor + 1} \overset{\text{Věta 3.11}}{=} \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\lfloor x\rfloor + 1}\right).$$

Dříve, než se dostaneme k jejich řešení, si uvedeme dvě pomocné limity.
Zřejmě platí, že

$$x - 1 < \lfloor x\rfloor < x + 1, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Když nyní použijeme Větu 3.22 (větu o třech limitách), dostáváme

$$\lim_{x\to\infty}(x-1) \overset{\substack{\text{Pozn. 3.15}\\ \text{Věta 4.2}}}{=} \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}(x+1) \overset{\substack{\text{Pozn. 3.15}\\ \text{Věta 4.2}}}{=} \infty,$$

a tedy

$$\lim_{x\to\infty}\lfloor x\rfloor \overset{\text{Věta 3.22}}{=} \infty.$$

Pak také

$$\lim_{x\to\infty}(\lfloor x\rfloor + 1) \overset{\text{Pozn. 3.15}}{=} \infty.$$

Nyní už můžeme řešit limity z původní nerovnosti, které jsme si rozepsali, abychom je dokázali lépe řešit. „Druhé“ limity vyřešíme jednoduše

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\lfloor x\rfloor + 1}\right)^{-1} \overset{\substack{\text{Věta 3.11}\\ \text{Pozn. 3.15}\\ \text{Věta 3.26}}}{=} 1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\lfloor x\rfloor + 1}\right) \overset{\substack{\text{Věta 3.11}\\ \text{Pozn. 3.15}}}{=} 1.$$

Nyní budeme řešit „první“ limity. Označíme-li

$$n := \lfloor x\rfloor, \qquad m := \lfloor x\rfloor + 1,$$

můžeme převést výpočet limity funkce na výpočet limity posloupnosti.
Za použití pomocných limit, které jsme si dokázali, lze psát

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{\lfloor x\rfloor+1} = \lim_{(\lfloor x\rfloor+1)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{\lfloor x\rfloor+1} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} \overset{\text{Def. 2.21}}{=} \mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor} = \lim_{\lfloor x\rfloor\to\infty}\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \overset{\text{Def. 2.21}}{=} \mathrm{e}\,.$$

Dostáváme tedy

$$\mathrm{e} \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leq \mathrm{e}$$

a dle věty o třech limitách

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \overset{\text{Věta 3.22}}{=} \mathrm{e}\,.$$

(ii) Jelikož máme proměnou x v exponentu, potřebujeme ji nějakým způsobem dostat „dolů“. K tomu nám poslouží logaritmus, který umožňuje převést umocňování na násobení.
Tedy

$$\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right) \overset{\text{Věta 4.13}}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right),$$

což je limita typu $\infty\cdot 0$ (dle Věty 3.5, Věty 3.11, Věty 4.2 a Věty 4.11) kterou můžeme řešit L'Hospitalovým pravidlem, pouze je třeba ji upravit (viz Poznámka 3.25),

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \overset{\text{Pozn. 3.25}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{Věta 3.23}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$
$$\overset{\substack{\text{Věta 3.5}\\ \text{Věta 3.11}\\ \text{Věta 4.2}}}{=} \frac{1}{1+0} = 1.$$

Celkem tedy máme

$$\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right) = 1.$$

Když se zbavíme logaritmu, dostáváme

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}\,.$$

□

4.2 Příklady

Nyní přejdeme k samotnému počítání limit. Budeme využívat jak tzv. základních limit, které jsme uvedli v předcházející části, tak samotných vět, kterým se věnuje celá předcházející kapitola.

Pokud lze limitu vypočítat více způsoby, uvedeme je, aby bylo možné porovnat výpočtovou náročnost jednotlivých postupů.

Příklad 1 Na konkrétních příkladech limit ukažte, že limita typu $0 \cdot \infty$ je nejednoznačná.

Řešení Mějme například

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0, \\ g(x) &= x, \end{aligned}$$

pak

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot x\right) \overset{\substack{\text{Pozn. 3.15} \\ \text{Věta 4.2}}}{=} [0 \cdot \infty] \overset{\text{Věta 3.19}}{=} \lim_{x\to\infty} 1 \overset{\text{Věta 4.1}}{=} 1.$$

Ale pro

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0, \\ g(x) &= x^2, \end{aligned}$$

dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot x^2\right) \overset{\substack{\text{Pozn. 3.15} \\ \text{Věta 4.2} \\ \text{Věta 4.5}}}{=} [0 \cdot \infty] \overset{\text{Věta 3.19}}{=} \lim_{x\to\infty} x \overset{\text{Věta 4.2}}{=} \infty.$$

Příklad 2 Na konkrétních příkladech limit ukažte, že pokud neexistuje $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, neznamená to, že neexistuje také $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Řešení Mějme například

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \sin x, \\ g(x) &= x + \cos x. \end{aligned}$$

Pak (pokud využijeme toho, že platí, že $|\sin x| \leq 1$ a $|\cos x| \leq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x + \sin x) \overset{\substack{\text{Pozn. 3.15} \\ \text{Věta 4.2} \\ \text{Věta 4.6}}}{=} \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} (x + \cos x) \overset{\substack{\text{Pozn. 3.15} \\ \text{Věta 4.2} \\ \text{Věta 4.6}}}{=} \infty.$$

Jsou tedy splněny předpoklady pro použití L'Hospitalova pravidla (viz Věta 3.23), ale pravidlo použít nelze, neboť

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1-\sin x}$$

a tato limita podílu derivací neexistuje.
Ale daná limita existuje,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)} \overset{\text{Věta 3.19}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} \overset{\substack{\text{Věta 3.11}\\ \text{Pozn. 3.15}\\ \text{Věta 4.2}\\ \text{Věta 4.6}}}{=} 1.$$

Příklad 3

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}, \qquad m,n \in \mathbb{N}$$

Řešení Přímým dosazením bychom (dle Věty 4.4) dostali limitu typu $\frac{0}{0}$, která je ovšem nejednoznačná. Tuto limitu lze tedy řešit úpravou nebo L'Hospitalovým pravidlem.

(i) Výraz se snažíme upravit tak, abychom se zbavili neurčitého výrazu. Pokud z čitatele i jmenovatele vytkneme výraz $(x-1)$ a upravíme, dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}\\ &\overset{\substack{\text{Věta 3.19}\\ \text{Věta 3.11}}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1}\\ &\overset{\text{Věta 4.4}}{=} \frac{1^{m-1}+1^{m-2}+\cdots+1+1}{1^{n-1}+1^{n-2}+\cdots+1+1} = \frac{m\cdot 1}{n\cdot 1} = \frac{m}{n}.\end{aligned}$$

(ii) Řešení pomocí L'Hospitalova pravidla je výrazně rychlejší a elegantnější, dostáváme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} \overset{\text{Věta 3.23}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{m\cdot x^{m-1}}{n\cdot x^{n-1}} \overset{\text{Věta 4.4}}{=} \frac{m\cdot 1^{m-1}}{n\cdot 1^{n-1}} = \frac{m}{n}.$$

Příklad 4

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}, \qquad n\in\mathbb{N}$$

Řešení Přímým dosazením bychom (dle Věty 4.4) opět dostali limitu typu $\frac{0}{0}$, která je ovšem nejednoznačná. Máme tedy stejné možnosti, jako v předcházejícím případě.

(i) Výraz se snažíme upravit tak, abychom se zbavili neurčitého výrazu. Budeme upravovat čitatele

$$x+x^2+\cdots+x^n-n = \sum_{i=1}^{n} x^i - n = \sum_{i=1}^{n}(x^i-1).$$

Dostáváme tedy

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sum_{i=1}^{n}(x^i-1)}{x-1} \overset{\text{Věta 3.11}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lim_{x\to 1} \frac{x^i-1}{x-1}.$$

Tuto limitu budeme řešit vytknutím výrazu $(x-1)$ z čitatele a následným zkrácením, dostáváme tedy

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^i-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{i-1}+x^{i-2}+\cdots+1)}{x-1}\overset{\substack{\text{Věta 3.19}\\ \text{Věta 3.11}}}{=}\lim_{x\to 1}(x^{i-1}+x^{i-2}+\cdots+1)$$
$$\overset{\text{Věta 4.3}}{=}1^{i-1}+1^{i-2}+\cdots+1=i\cdot 1=i.$$

Pak celkově dostáváme

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}.$$

(ii) Řešení pomocí L'Hospitalova pravidla je opět výrazně rychlejší, dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}&\overset{\text{Věta 3.23}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1+2x+\cdots+n\cdot x^{n-1}}{1}\\ &=\lim_{x\to 1}1+2x+\cdots+n\cdot x^{n-1}\overset{\text{Věta 4.3}}{=}1+2+\cdots+n\\ &=\frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Příklad 5

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}},\qquad a\geq 0,\ x>a$$

Řešení Přímým dosazením bychom (dle Věty 3.11, Věty 3.26, Věty 4.2 a Věty 4.5) opět dostali limitu typu $\frac{0}{0}$, která je nejednoznačná.

(i) Výraz se tedy snažíme upravit tak, abychom se zbavili neurčitého výrazu,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}&=\frac{x-\sqrt{ax}+\sqrt{x(x-a)}+\sqrt{ax}-a+\sqrt{a(x-a)}}{\sqrt{x^2-a^2}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}\\ &=\frac{\sqrt{x-a}\cdot(\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x+a}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}\\ &=\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}.\end{aligned}$$

Dostáváme tedy

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}\overset{\substack{\text{Věta 3.11}\\ \text{Věta 3.26}\\ \text{Věta 4.2}\\ \text{Věta 4.5}}}{=}\frac{\sqrt{a-a}+\sqrt{a}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+a}\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{a})}$$
$$=\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{2a}\cdot 2\cdot\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}=\frac{\sqrt{2a}}{2a}.$$

(ii) Nyní budeme řešit L'Hospitalovým pravidlem,

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} \overset{\text{Věta 3.23}}{=} \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x-a}}}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x(x-a)}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}(\sqrt{x-a}+\sqrt{x})}{2x\sqrt{x(x-a)}}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{(x-a)(x-a)(x+a)}+\sqrt{x(x-a)(x+a)}}{2x\sqrt{x(x-a)}}$$

$$\overset{\substack{\text{Věta 3.19}\\ \text{Věta 3.11}}}{=} \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x(x+a)}}{2x\sqrt{x}}$$

$$\overset{\substack{\text{Věta 3.11}\\ \text{Věta 3.26}\\ \text{Věta 4.2}\\ \text{Věta 4.5}}}{=} \frac{\sqrt{a^2-a^2}+\sqrt{a(a+a)}}{2a\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2}a}{2a\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2a}}{2a}.$$

Příklad 6

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x), \qquad a,b\in\mathbb{R}$$

Řešení Přímým dosazením bychom (dle Poznámky 3.15, Poznámky 3.17, Věty 3.26 a Věty 4.2) dostali limitu typu $\infty-\infty$, která je nejednoznačná.

(i) Výraz se tedy snažíme upravit,

$$\sqrt{(x+a)(x+b)}-x = (\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)\cdot\frac{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}$$

$$= \frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x} = \frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}.$$

Protože $x\to\infty$, snažíme se dostat x do jmenovatele, protože $\frac{a}{\infty}=0,\ a\in\mathbb{R}$ (dle Poznámky 3.15),

$$\frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x} = \frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{x^2+(a+b)x+ab}+x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{(a+b)+\frac{ab}{x}}{\sqrt{1+\frac{(a+b)}{x}+\frac{ab}{x^2}}+1}.$$

Pak dostáváme

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{(a+b)+\frac{ab}{x}}{\sqrt{1+\frac{(a+b)}{x}+\frac{ab}{x^2}}+1} \overset{\substack{\text{Věta 3.11}\\ \text{Pozn. 3.15}\\ \text{Věta 3.26}\\ \text{Věta 4.2}}}{=} \frac{(a+b)+0}{\sqrt{1+0+0}+1}$$

$$= \frac{a+b}{2}.$$

(ii) L'Hospitalovo pravidlo by šlo také použít, ale bylo by nutné limitu upravit na limitu typu $\frac{0}{0}$ (viz Poznámka 3.25). To by bylo v tomto případě dosti zdlouhavé, proto se spokojíme jen s řešením pomocí úpravy.

Příklad 7

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Řešení Přímým dosazením bychom (dle Věty 3.11, Věty 3.26 a Věty 4.2) dostali limitu typu $\frac{0}{0}$, která je nejednoznačná.

(i) První možností, jak limitu řešit, je použít substituci

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[n]{1+x}, \\ x &= y^n - 1, \\ y &\to 1. \end{aligned}$$

Úlohu tak převedeme na výpočet limity složené funkce $f(\varphi)$ (dle Věty 3.26), kde

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sqrt[n]{1+x}, \\ f(y) &= \frac{y-1}{y^n-1} \end{aligned}$$

a lze jednoduše ukázat, že všechny předpoklady jsou splněny.
Dostáváme tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y^n-1}.$$

Nyní z jmenovatele vytkneme výraz $y-1$, abychom mohli krátit, dostáváme tedy

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y^n-1} &= \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{(y-1)(y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+y+1)} \overset{\substack{\text{Věta 3.19} \\ \text{Věta 3.11}}}{=} \lim_{y\to 1} \frac{1}{y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+y+1} \\ &\overset{\text{Věta 4.4}}{=} \frac{1}{1^{n-1}+1^{n-2}+\cdots+1+1} = \frac{1}{n\cdot 1} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

(ii) Pokud použijeme L'Hospitalovo pravidlo, dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} \overset{\text{Věta 3.23}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{n}\cdot(1+x)^{\frac{1}{n}-1}}{1} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{n}\cdot(1+x)^{\frac{1}{n}-1}\right] \overset{\substack{\text{Věta 3.11} \\ \text{Věta 3.26} \\ \text{Věta 4.2}}}{=} \frac{1}{n}.$$

Příklad 8

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(kx)}{x}, \qquad k \in \mathbb{N}$$

Řešení Přímým dosazením bychom (dle Věty 3.11, Věty 3.26, Věty 4.2 a Věty 4.6) dostali limitu typu $\frac{0}{0}$, která je nejednoznačná. Uvedeme si dvě možnosti, jak lze tuto limitu řešit.

(i) Víme, že $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (viz Věta 4.7). Proto se budeme snažit tento vztah využít, dostáváme tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(kx)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{k\cdot\sin(kx)}{kx} \overset{\substack{\text{Věta 3.11}\\ \text{Věta 4.1}}}{=} k\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(kx)}{kx}.$$

Když nyní použijeme substituci

$$\begin{aligned} y &= kx,\\ y &\to 0, \end{aligned}$$

úlohu převedeme na výpočet limity složené funkce $f(\varphi)$ (dle Věty 3.26), kde

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= kx,\\ f(y) &= \frac{\sin y}{y} \end{aligned}$$

a lze jednoduše ukázat, že všechny předpoklady jsou splněny.
Dostáváme tedy

$$k\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(kx)}{kx} = k\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} \overset{\text{Věta 4.7}}{=} k\cdot 1 = k.$$

(ii) Další možností je použít L'Hospitalovo pravidlo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(kx)}{x} \overset{\text{Věta 3.23}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{k\cdot\cos(kx)}{1} = \lim_{x\to 0} k\cdot\cos(kx) \overset{\substack{\text{Věta 3.11}\\ \text{Věta 3.26}\\ \text{Věta 4.1}\\ \text{Věta 4.6}}}{=} k\cdot\cos 0 = k.$$

Příklad 9

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$$

Řešení Přímým dosazením bychom (dle Definice 2.15, Věty 3.11, Věty 4.1 a Věty 4.6) dostali limitu typu $\frac{0}{0}$, která je nejednoznačná.

(i) První možností, jak limitu řešit, je použít substituci

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x,\\ x &= \sin y,\\ y &\to 0. \end{aligned}$$

Úlohu tak převedeme na výpočet limity složené funkce $f(\varphi)$ (dle Věty 3.26), kde

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \arcsin x,\\ f(y) &= \frac{y}{\sin y} \end{aligned}$$

a lze jednoduše ukázat, že všechny předpoklady jsou splněny.
Dostáváme tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}.$$

Nyní využijeme faktu, že $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ (viz Věta 4.7), dostáváme tedy

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} \overset{\substack{\text{Věta 3.11}\\ \text{Věta 4.1}\\ \text{Věta 4.7}}}{=} \frac{1}{1} = 1.$$

Celkem tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

(ii) Druhou možností je použít L'Hospitalovo pravidlo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} \overset{\text{Věta 3.23}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \overset{\substack{\text{Věta 3.11}\\ \text{Věta 3.26}\\ \text{Věta 4.5}}}{=} \frac{1}{1} = 1.$$

Příklad 10

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

Řešení Přímým dosazením bychom (dle Věty 3.11, Věty 4.1, Věty 4.2 a Věty 4.6) dostali limitu typu $\frac{0}{0}$, která je nejednoznačná. Ukážeme si tři postupy, kterým lze tuto limitu řešit.

(i) První možností je použít goniometrický vzorec $\sin x - \sin a = 2 \cdot \cos \frac{x+a}{2} \cdot \sin \frac{x-a}{2}$. Dostáváme

$$\frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \frac{2\cdot \cos\frac{x+a}{2} \cdot \sin\frac{x-a}{2}}{x-a} = \frac{\cos\frac{x+a}{2} \cdot \sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}},$$

tedy

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\cos\frac{x+a}{2} \cdot \sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \overset{\text{Věta 3.11}}{=} \lim_{x\to a} \cos \frac{x+a}{2} \cdot \lim_{x\to a} \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}.$$

První limitu můžeme řešit přímo dosazením, tedy

$$\lim_{x\to a} \cos\frac{x+a}{2} \overset{\text{Věta 4.6}}{=} \cos\frac{a+a}{2} = \cos a.$$

V druhé limitě použijeme substituci

$$y = \frac{x-a}{2}, \qquad y \to 0.$$

Úlohu tak převedeme na výpočet limity složené funkce $f(\varphi)$ (dle Věty 3.26), kde

$$\varphi(x) = \frac{x-a}{2}, \qquad f(y) = \frac{\sin y}{y}$$

a lze jednoduše ukázat, že všechny předpoklady jsou splněny.
Dostáváme

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\overset{\text{Věta 4.7}}{=}1.$$

Celkem tedy máme

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\cos a\cdot 1=\cos a.$$

(ii) Druhou možností je použít L'Hospitalovo pravidlo,

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\overset{\text{Věta 3.23}}{=}\lim_{x\to a}\frac{\cos x}{1}=\lim_{x\to a}\cos x\overset{\text{Věta 4.6}}{=}\cos a.$$

(iii) Třetí možností je si uvědomit, že tato limita je přímo definicí derivace (viz Definice 2.16).
Lze tedy psát

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\overset{\text{Def. 2.16}}{=}(\sin a)'=\cos a.$$

Příklad 11

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$$

Řešení Přímým dosazením bychom (dle Věty 4.6, Věty 4.16 a rozepsáním $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$) dostali limitu typu 1^∞, která je nejednoznačná.
Protože máme proměnou x v exponentu, potřebujeme ji nějakým způsobem dostat „dolů“. K tomu nám pomůže logaritmus, který převádí umocňování na násobení.
Tedy

$$\ln\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}\right)\overset{\text{Věta 4.13}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\ln(\sin x)^{\operatorname{tg} x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg} x\cdot\ln(\sin x)\right),$$

což je limita typu $\infty\cdot 0$, kterou, když upravíme (viz Poznámka 3.25), můžeme řešit L'Hospitalovým pravidlem, tedy

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x\cdot\ln(\sin x))\overset{\text{Pozn. 3.25}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}\overset{\text{Věta 3.23}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin^2 x\cdot\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(-\sin x\cdot\cos x).$$

Nyní využijeme goniometrický vzorec $\sin 2x=2\cdot\sin x\cdot\cos x$ (tedy $\frac{1}{2}\cdot\sin 2x=\sin x\cdot\cos x$) a dostáváme

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(-\sin x\cdot\cos x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\cdot\sin 2x\right)\overset{\substack{\text{Věta 3.11}\\\text{Věta 4.1}\\\text{Věta 4.6}}}{=}-\frac{1}{2}\cdot\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

Celkem tedy máme

$$\ln\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}\right)=0.$$

Když se zbavíme logaritmu, dostáváme

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}=\mathrm{e}^0=1.$$

Příklad 12

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$$

Řešení Přímým dosazením bychom (dle Věty 3.26, Věty 4.10, Věty 4.5, Věty 4.6, Věty 4.16 a rozepsáním $\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}} = (\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$) dostali limitu typu 1^∞, která je nejednoznačná. Protože máme proměnou x v exponentu, budeme postupovat podobně, jako v přecházejícím případě.
Tedy

$$\begin{aligned}\ln\left(\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}\right) &= \ln\left(\lim_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}\right) \overset{\text{Věta 4.13}}{=} \lim_{x\to 0}\left(\ln\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\cos\sqrt{x}\right)\right),\end{aligned}$$

což je limita typu $\infty\cdot 0$, kterou, když upravíme (viz Poznámka 3.25), můžeme řešit L'Hospitalovým pravidlem,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\cos\sqrt{x}\right)\right) \overset{\text{Pozn. 3.25}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos\sqrt{x}\right)}{x} \overset{\text{Věta 3.23}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin\sqrt{x}}{2\cdot\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Dostali jsme ale limitu typu $\frac{0}{0}$, opět tedy použijeme L'Hospitalovo pravidlo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \overset{\text{Věta 3.23}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2\cdot\cos^2\sqrt{x}}\right) \overset{\substack{\text{Věta 3.11}\\ \text{Věta 3.26}\\ \text{Věta 4.1}\\ \text{Věta 4.5}\\ \text{Věta 4.6}}}{=} -\frac{1}{2\cdot\cos^2 0} = -\frac{1}{2}.$$

Celkem tedy máme

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Když se zbavíme logaritmu, dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

Příklad 13

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}, \qquad a\in\mathbb{R}$$

Řešení Přímým dosazením bychom dostali (dle Věty 3.11, Věty 4.2 a Věty 4.10) limitu typu $\frac{0}{0}$, která je nejednoznačná. Ukážeme si dva postupy, kterým lze tuto limitu řešit.

(i) První možností, jak limitu řešit, je použít substituci

$$\begin{aligned}y &= a^x - 1,\\ x &= \frac{\ln(y+1)}{\ln a},\\ y &\to 0.\end{aligned}$$

Úlohu tak převedeme na výpočet limity složené funkce $f(\varphi)$ (dle Věty 3.26), kde

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= a^x - 1,\\ f(y) &= \frac{y}{\frac{\ln(y+1)}{\ln a}}\end{aligned}$$

a lze jednoduše ukázat, že všechny předpoklady jsou splněny.
Dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\frac{\ln(y+1)}{\ln a}} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln a}{\frac{1}{y}\cdot\ln(y+1)} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln a}{\ln(y+1)^{\frac{1}{y}}},$$

kde limitu výrazu $\ln(y+1)^{\frac{1}{y}}$ určíme pomocí substituce (tedy Věty 3.26) a Věty 4.20. Máme tedy

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln a}{\ln(y+1)^{\frac{1}{y}}} \overset{\substack{\text{Věta 3.11}\\ \text{Věta 3.26}\\ \text{Věta 4.20}}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\ln a}{\ln \mathrm{e}} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln a}{1} = \lim_{y\to 0}\ln a \overset{\text{Věta 4.1}}{=} \ln a.$$

Celkem

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a.$$

(ii) Druhou možností je použít L'Hospitalovo pravidlo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} \overset{\text{Věta 3.23}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{a^x\cdot\ln a}{1} = \lim_{x\to 0}(a^x\cdot\ln a) \overset{\substack{\text{Věta 3.11}\\ \text{Věta 4.1}\\ \text{Věta 4.10}}}{=} a^0\cdot\ln a = \ln a.$$

Příklad 14

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

Řešení Pokud bychom přímo dosadili, nedokážeme odhadnout, co jde rychleji do nekonečna. Proto použijeme větu o třech limitách (viz Věta 3.22).
Vyjdeme z toho, že platí (jak můžeme vidět na Obrázku 4.3)

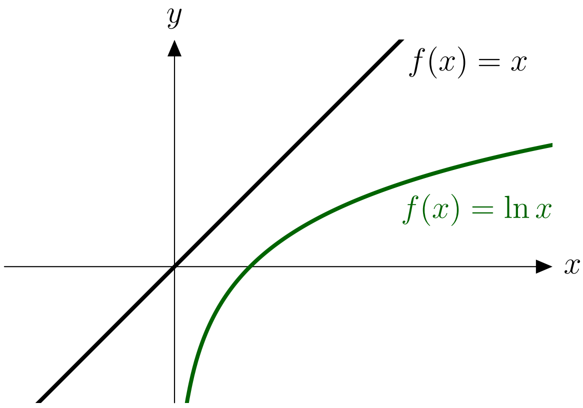
$$\ln x \le x, \qquad \forall\, x > 0.$$

Nyní budeme tuto nerovnost upravovat,

$$\begin{aligned}\ln x &\le x,\\ \ln x^{\frac{1}{4}} &\le x^{\frac{1}{4}},\\ \frac{1}{4}\cdot\ln x &\le \sqrt[4]{x},\\ \ln x &\le 4\sqrt[4]{x}.\end{aligned}$$

Nyní můžeme psát

$$0 < \frac{\ln x}{\sqrt{x}} < \frac{4\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{4}{\sqrt[4]{x}}.$$



Obrázek 4.3: Nerovnost $\ln x \leq x$, $\forall\, x > 0$.

Protože budeme chtít použít Větu 3.22 (věta o třech limitách), vyřešíme si limitu na levé a na pravé straně,

$$\lim_{x\to\infty} 0 \overset{\text{Věta 4.1}}{=} 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4}{\sqrt[4]{x}} \overset{\substack{\text{Pozn. 3.15}\\ \text{Věta 4.1}\\ \text{Věta 4.5}}}{=} 0.$$

Dle věty o třech limitách pak platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{\text{Věta 3.22}}{=} 0.$$

Příklad 15

$$\lim_{x\to 0} \left(x \cdot \sin \frac{1}{x} \right)$$

Řešení Dle Věty 3.11 limitu součinu rozdělíme na součin limit, tedy

$$\lim_{x\to 0} \left(x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) \overset{\text{Věta 3.11}}{=} \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}.$$

Vyřešíme první limitu

$$\lim_{x\to 0} x \overset{\text{Věta 4.2}}{=} 0.$$

Druhá limita neexistuje (neboť sinus je periodická funkce), platí však, že

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1.$$

Proto nyní využijeme Větu 3.10. Pak dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \left(x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) \overset{\text{Věta 3.10}}{=} 0.$$

Příklad 16

$$\lim_{x\to 4} \frac{|4-x|}{x-4}$$

Řešení Přímým dosazením bychom dostali (dle Věty 3.11, Věty 3.26 a Věty 4.3) limitu typu $\frac{0}{0}$, která je nejednoznačná.
Budeme se snažit použít Větu 3.3. Vyřešíme tedy následující jednostranné limity

$$\lim_{x \to 4+} \frac{|4-x|}{x-4} \overset{\substack{\text{Věta 3.11} \\ \text{Věta 3.26} \\ \text{Věta 4.3}}}{=} 1,$$

$$\lim_{x \to 4-} \frac{|4-x|}{x-4} \overset{\substack{\text{Věta 3.11} \\ \text{Věta 3.26} \\ \text{Věta 4.3}}}{=} -1.$$

Protože

$$\lim_{x \to 4+} \frac{|4-x|}{x-4} \neq \lim_{x \to 4-} \frac{|4-x|}{x-4},$$

tak dle Věty 3.3 platí, že neexistuje limita

$$\lim_{x \to 4} \frac{|4-x|}{x-4}.$$

5 Závěr

Cílem této práce bylo popsat vlastnosti limity reálné funkce jedné reálné proměnné.

Mnoho definic a tvrzení vypadá na první pohled složitě a terpve ilustrace na obrázku nám pomůže danou problematiku pochopit. Proto je práce doplněna mnoha obrázky.

Praktický význam uvedených tvrzení o vlastnostech limit byl následně ukázán na příkladech. Nejsou to pouze vyřešené příklady, ale v každém kroku je detailně popsáno, proč to lze takto udělat. Často si při běžném počítání limit ani neuvědomujeme, čeho všeho využíváme. Neověřujeme, zda-li jsou splněny všechny předpoklady, které splněny mají být. A už vůbec se nezamýšlíme, proč co platí.

Je vidět, že mezi nejpoužívanější patří věta o početních operacích s limitami (Věta 3.11, Věta 3.13, Věta 3.16), o třech limitách (Věta 3.22) či o limitě složené funkce (Věta 3.26).

Jako nejmocnější nástroj se však ukázalo L'Hospitalovo pravidlo (Věta 3.23). Za splnění daných předpokladů nám toto pravidlo převede vyšetřování limity podílu funkcí na vyšetřování limity podílu derivací těchto funkcí. Ulehčí nám to tedy práci, ale je nutné umět derivovat. Právě v derivaci, která je definována pomocí limity (viz Definice 2.16), se skrývá mnoho vypočtených limit, které my již počítat nemusíme.

Práce je rozsáhlá, protože byla snaha nic nevynechávat, poskytnout opravdu komplexní pohled na tuto problematiku. Literatura, z které bylo čerpáno, se zabývá celou matematickou analýzou, proto je limitám věnován pouze omezený prostor. Často zde není problematika rozebírána do úplných detailů nebo pro úplně všechny možné varianty (např. Věta 4.16 se obvykle dokazuje pouze pro $a \in (0, \infty)$ a $b \in \mathbb{R}$).

Literatura

[1] DOŠLÁ, Zuzana a Jaromír KUBEN. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.* Brno: Masarykova univerzita, 2003. ISBN 80-210-3121-2.

[2] *MATEMATIKA online* [online]. Brno: Ústav matematiky FSI VUT Brno, 2005 [cit. 2020-06-06]. Dostupné z: `https://mathonline.fme.vutbr.cz/Matematicka-analyzanbspI/sc-1225-sr-1-a-265/default.aspx`

[3] VESELÝ, Jiří. *Matematická analýza pro učitele: první díl.* Druhé. Praha: MATFYZPRESS, 2001. ISBN 80-85863-62-6.

[4] BRABEC, Jiří, Zdeněk ROZENSKÝ a František MARTAN. *Matematická analýza: vysokoškolská učebnice pro elektrotechnické fakulty vysokých škol technických.* 2. upr. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1989. ISBN 80-030-0044-0.

[5] *Introduction to Analysis* [online]. Davis: Department of Mathematics, University of California at Davis, 2014 [cit. 2020-06-06]. Dostupné z: `https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/intro_analysis_pdf/intro_analysis.html`

[6] *Limita a spojitost* [online]. Praha: Katedra didaktiky matematiky, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze, 2011 [cit. 2020-06-06]. Dostupné z: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/limita_a_spojitost/limita.php?kapitola=vety`

[7] SUCHOMEL, Jaromír, Jiřina PLAČKOVÁ a Jaromír KŘÍŽ. *Diferenciální počet.* Brno: Rektorát VUT v Brně, 1978.

[8] NEUBRUNN, Tibor a Jozef VENCKO. *Úvod do matematickej analýzy.* Piate nezmenené vydanie. Bratislava: Univerzita Komenského v Bratislave, 1981.

Použité zkratky a symboly

$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\emptyset$	prázdná množina
$\lfloor x \rfloor$	dolní celá část čísla x