

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA  
KATEDRA OPTIKY



**Měření vlnoplochy  
pomocí Shack-Hartmannova senzoru**

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Jan Vávra

2018

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA  
KATEDRA OPTIKY



**Měření vlnoplochy  
pomocí Shack-Hartmannova senzoru**

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vypracoval:	Bc. Jan Vávra
Studijní program:	B1701 Fyzika
Forma studia:	Prezenční
Studijní obor:	Optika a optoelektronika
Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Libor Motka
Práce odevzdána dne:	.....

Olomouc 2018

PALACKY UNIVERSITY IN OLOMOUC  
FACULTY OF SCIENCE  
DEPARTMENT OF OPTICS



# **Shack-Hartmann wavefront sensing**

DIPLOMA THESIS

Author

Bc. Jan Vávra

Thesis supervisor:

Mgr. Libor Motka

Field of study

Optics and optoelectronics

Olomouc 2018

## **Abstrakt**

Diplomová práce pojednává o principu Shack-Hartmannova senzoru, parametrech sloužících k jeho popisu a způsobech jeho kalibrace včetně experimentálního provedení.

## **Klíčová slova**

Shack-Hartmann, senzor, vlnoplocha, kalibrace, nejistota

## **Abstract**

The diploma thesis deals with the principle of Shack-Hartmann sensor, parameters used for its description and methods of its calibration, including experimental design.

## **Keywords**

Shack-Hartmann, sensor, wavefront, calibration, uncertainty

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci „název práce“ napsal samostatně s použitím uvedené literatury. Souhlasím, aby byla práce použita pro potřeby výuky a prezentována internetových stránkách katedry optiky.

V Olomouci dne .....

Podpis autora

### **Poděkování**

Mé největší díky patří především mému vedoucímu práce Mgr. Liboru Mořkovy za jeho vložené úsilí a čas mi vše v případě mé potřeby vysvětlit. Za důležité a věcné připomínky jak k obsahu práce tak i ke stylistice, bez nichž by tato práce dozajista nevznikla.

Velké díky bych na tomto místě poslal i všem vyučujícím na katedře optiky, kteří nejen za mého studia vkládali do svých studentů nemálo času a energie aby se tak mohli předávat své znalosti a zkušenosti dál.

V neposlední řadě bych chtěl poděkovat mé rodině a blízkým přátelům za podporu během mého studia.

# Obsah

Úvod	2
<b>1 Základní principy</b>	<b>3</b>
<b>2 Parametry Shack-Hartmannova senzoru</b>	<b>8</b>
<b>3 Experimentální měření parametrů SH senzoru</b>	<b>14</b>
<b>4 Kalibrace Shack-Hartmannova senzoru</b>	<b>18</b>
4.1 Kalibrace rovinnou vlnou . . . . .	20
4.2 Experimentální provedení kalibrace rovinnou vlnou . . . . .	24
4.3 Kalibrace sférickou vlnou . . . . .	27
4.4 Experimentální provedení kalibrace sférickou vlnou . . . . .	32
<b>5 Určení náklonu matice mikročoček</b>	<b>34</b>
<b>6 Závěr</b>	<b>36</b>
<b>Literatura</b>	<b>37</b>



# Úvod

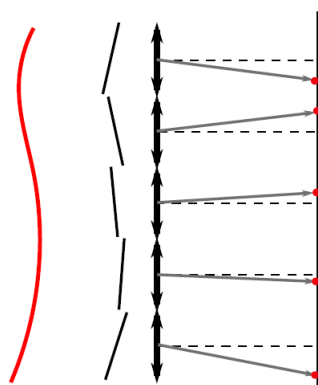
Při přípravě měření si klademe otázky týkající se samotných požadavků měření. V případě měření vlnoplochy se můžeme například ptát jaká je minimální přijatelná přesnost či jaké očekáváme výsledky tj. budeme měřit vlnoplochu s malými lokálními změnami tvaru či prostorově se rychle měnící. V návaznosti na odpovědi na podobné otázky je vybráno vhodné měřící zařízení. Obecně lze říci, že informace získaná z měření je dobrá pouze do té míry, do jaké míry známe měřící přístroj. Proces ověření přesnosti zařízení a jeho následnou justáž nazýváme kalibrací. Součástí kalibrace může být i ověření jiných významných parametrů jako opakovatelnost nebo citlivost. Diplomová práce, kterou nyní držíte v rukách se zabývá kalibrací Shack-Hartmanova senzoru (dále jen SH senzor).

Design SH senzoru byl založen na původní matici apertur vyvinuté J.F.Hartmanem pro testování kvality obrazu velkých teleskopů. V roce 1960 R.Shack and B.Platt modifikovali senzor nahrazením apertur čočkami a umístěním před CCD senzor. SH senzor má dnes široké spektrum uplatnění. Používá se například v oblasti adaptivní optiky, kde měří vlnoplochu záření od referenční hvězdy pro následné korekce zrcadla, v optometrii pro měření aberací oka. Další uplatnění senzoru je v měření kvality optických přístrojů, parametrů laserových svazků či měření prostorové koherence aj. SH senzor představuje alternativu ke stávajícím interferometrickým technikám (odolnost vzhledem k vibracím, cena, podobná přesnost, nevýhodou je však rozlišovací schopnost). Aby byl senzor schopný dosahovat požadovaných přesností, musí být odstraněny některé systematické chyby jeho měření. To znamená musí být provedena jeho kalibrace.

Se základními principy fungování SH senzoru je čtenář seznámen v první kapitole. Následuje kapitola věnující se vztahu mezi konstrukčními parametry SH senzoru a obecnými charakteristikami senzorů jako jsou citlivost, přesnost, dynamický rozsah a rozlišení. V kapitole je dále diskutována volba vhodného SH senzoru pro dané požadavky měření. Třetí kapitola popisuje experimentální měření parametrů SH senzoru. První část kapitoly je věnována experimentálnímu měření a prezentování výsledků na dvou různých SH senzorech. V druhé části je analyzován význam pojmů přesnost a opakovatelnost v souvislosti s SH senzorem. Práce dále pokračuje kapitolou o kalibraci rovinnou a sférickou vlnou. V obou případech je nejprve popsán základní setup pro měření a provedena analýza nejistot. Následuje část věnující se experimentálnímu provedení kalibrací. Do poslední kapitoly diplomové práce byly vložena speciální výsledky kalibrace, které popisují orientaci matice mikročoček SH senzoru vzhledem k rovině CCD senzoru.

# 1 Základní principy

Shackuv-Hartmannuv senzor (SH senzor) je zařízení schopné detekovat fázi dopadajícího záření. Skládá se z matice mikročoček umístěné před intenzitně citlivým senzorem s prostorovým rozlišením, jakým je například CCD nebo CMOS snímač. Samotný princip SH senzoru, zobrazený na obrázku 1, lze popsat v aproximaci paprskové optiky. Dopadající optický signál je jednotlivými mikročočkami po částech fokusován na detektor umístěný v ohniskové rovině. Z obrázku je patrné, že pro správnou funkci SH senzoru se lokální gradient vlnoplochy dopadajícího záření musí měnit jen pomalu ve srovnání s velikostí mikročoček. Vlnoplocha je na jednotlivých mikročočkách aproximována nakloněnými rovinnými vlnami. Signál je fokusován na kameru, kde vznikají difrakční spoty, jejichž vzájemné polohy nesou informaci o vlnoploše. Vzniká tedy inverzní úloha nalezení lokálního gradientu vlnoplochy z poloh difrakčních spotů. Pro řešení takové úlohy existují obecně známé postupy využívající pseudoinverzních matic (viz [1, 2]).



Obrázek 1: Princip SH senzoru. Dopadající vlnoplocha je v oblastech jednotlivých mikročoček aproximována rovinnou vlnou s náklonem. Tento náklon způsobuje vychýlení difrakčního spotu ze středové polohy (tj. od optické osy v rovině detekční plochy). Z poloh spotů lze pak rekonstruovat dopadající vlnoplochu.

V oblasti jednotlivých mikročoček se detekuje intenzitní rozložení  $I(x, y)$  optického záření. Pro určení polohy spotů se využívá výpočet těžiště  $\langle x \rangle$  a  $\langle y \rangle$  detekovaného rozložení. Použité snímače jsou tvořeny maticí pixelů a intenzitní rozložení v dané oblasti  $m, n$  má pak diskrétní charakter  $I_{m,n}(x_{m,n}, y_{m,n})$ .

$$x_c = \langle x \rangle = \frac{\iint x I(x, y) dx dy}{\iint I(x, y) dx dy} = \frac{\sum_{m,n} x_{m,n} I_{m,n}}{\sum_{m,n} I_{m,n}} \quad (1)$$

$$y_c = \langle y \rangle = \frac{\iint y I(x, y) dx dy}{\iint I(x, y) dx dy} = \frac{\sum_{m,n} y_{m,n} I_{m,n}}{\sum_{m,n} I_{m,n}}$$

Vzájemná poloha spotů a středů mikročoček nese informaci o tvaru detekované vlnoplochy. Mezi základní postupy rekonstrukce vlnoplochy z poloh těžišť spotů patří modální a zonální metoda. Zonální metoda rekonstrukce vlnoplochy je založena na numerické integraci naměřených lokálních gradientů. Výsledkem zonální metody je diskrétně zadaná vlnoplocha. Modální metoda fituje data

na soubor derivací Zernikeho polynomů. Zernikeho koeficienty jsou tedy fitovány přímo z měřených dat, nikoliv z vlnoplochy. Obě metody pracují se vstupními daty v podobě lokálních gradientů  $S_{i,j}$  ve směrech  $x$  a  $y$

$$S_{i,j}^x = \frac{\Delta_{x_{i,j}}}{z},$$

$$S_{i,j}^y = \frac{\Delta_{y_{i,j}}}{z},$$

kde  $\Delta_{x_{i,j}}$  resp  $\Delta_{y_{i,j}}$  je rozdíl detekované polohy těžiště spotu od referenční hodnoty a  $z$  je vzdálenost matice mikročoček od snímacího chipu [2]. Jak je vidět vzdálenost  $z$  zde hraje roli škálovacího faktoru, jehož přesné určení má zásadní vliv na vyhodnocení detekované vlnoplochy. Více o metodách rekonstrukce vlnoplochy lze nalézt v [1, 2, 3]. Výsledkem rekonstrukce je funkce vlnoplochy, v literatuře hojně označována písmenem  $w$ . Vlnoplochu lze vyjádřit pomocí Zernikeho aberačních koeficientů společně s Zernikeho polynomem. Význam prvních sedmi Zernikeho koeficientů je vypsan v tabulce 1. V praxi se vlnoplocha vyjadřuje pomocí 30 a více Zernikeho koeficientů. Více o možnostech vyjádření a aberací vlnoplochy lze nalézt v [4].

$Z_0$	piston
$Z_1$	x-náklon
$Z_2$	y-náklon
$Z_3$	fokus
$Z_4$	astigmatismus@0°& fokus
$Z_5$	astigmatismus@45°& fokus
$Z_6$	koma& x-náklon
$Z_7$	koma& y-náklon

Tabulka 1: Tabulka vypisující význam první osmi Zernikeho koeficientů. Zernikeho koeficienty slouží k vyjádření vlnoplochy v polárních souřadnicích.

Budeme-li v souladu s předchozí diskuzí předpokládat, rovinnou vlnu, která se šíří ve směru osy  $z$  pod úhlem  $\alpha$ , potom komplexní amplitudu, v rovině tesně za mikročočkou, lze psát ve tvaru [5]

$$U_t(\xi) = \exp[ik \sin(\alpha)\xi] \text{rect}\left(\frac{\xi}{a}\right) \exp\left[-i\frac{k\xi^2}{2f}\right], \quad (2)$$

rektangulární funkce vyjadřuje prostorové ořezání způsobené mikročočkou o průměru  $a$  a ohniskové vzdálenosti  $f$ , ta zároveň zavádí exponenciální fázový faktor  $\exp\left[-i\frac{k\xi^2}{2f}\right]$ .

Vlna se nadále šíří prostorem za mikročočkou. Toto šíření můžeme popsat obecně známou aproximací difrakčního integrálu

$$U(x) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} U_t(\xi) \exp\left[i\frac{k}{2z}(x-\xi)^2\right] d\xi. \quad (3)$$

Dosažením amplitudy (2), pro případ detekce v ohniskové rovině, tj.  $z = f$ , do difrakčního integrálu, vymizí fázový faktor a pro výstupní amplitudu  $U(x)$  lze psát

$$U(x) = \frac{K}{\lambda f} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{\xi}{a}\right) \exp\left[-i2\pi\xi\left(\frac{x-f\sin(\alpha)}{\lambda f}\right)\right] d\xi, \quad (4)$$

kde  $K$  je intenzitně nezávislá konstanta. Tento vztah představuje Fourierovu transformaci (s přeškálovanou prostorovou frekvencí  $f_x = \frac{x-\Delta_x}{\lambda f}$ , kde  $\Delta_x = f \sin(\alpha)$  funkce *rect*, jejíž výsledkem je sinc funkce

$$U(x) = \frac{K}{i\lambda f} \text{sinc} \left[ \frac{a(x-\Delta_x)}{\lambda f} \right]. \quad (5)$$

Z výsledku lze vidět, že vlivem lokálního gradientu vlnoplochy dochází k posunutí difrakčního spotu od optické osy mikročočky o faktor  $\Delta_x$ . Dále je zřejmé, že průměr difrakčního obrazce (spotu), jež je ve standardních učebnicích optiky definován jako vzdálenost prvních minim, je

$$d_{spot} = \frac{2\lambda f}{d_{sub}}, \quad (6)$$

kde  $d_{sub}$  je průměr mikročočky (v předchozích výrazech značen jako  $a$ ).

Umístění detektoru do ohniskové roviny mikročoček je možné pouze s konečnou přesností závislejší na konstrukci senzoru, měření skutečné vzdálenosti je pak předmětem kalibrace. Nyní se pokusíme rozšířit diskuzi o možnou detekci při rozostření tj. pro případ, kdy  $z \neq f$ . V takovém případě, na rozdíl od detekce v ohniskové rovině, po dosažení amplitudy  $U_t(\xi, z) \equiv U_t(\xi)$  do difrakčního integrálu (2), exponenciální fázový faktor zodpovědný za fázovou transformaci mikročočkou nevytizí a pro výstupní amplitudu  $U(x, z)$  píšeme

$$U(x, z) = \frac{K}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect} \left( \frac{\xi}{a} \right) \exp \left[ i \frac{\pi}{2} \left( 2\sqrt{\frac{\Delta_z}{\lambda}} \xi - \frac{x-\Delta_x}{z\sqrt{\lambda\Delta_z}} \right)^2 \right] d\xi, \quad (7)$$

kde parametr  $\Delta_z = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{z} \right)$  můžeme v absolutní hodnotě označit jako parametr rozostření. Využitím vhodných substitucí lze výstupní amplitudu vyjádřit pomocí Fresnelových integrálů  $C(x) = \int_0^x \cos(t^2\pi/2)dt$  a  $S(x) = \int_0^x \sin(t^2\pi/2)dt$

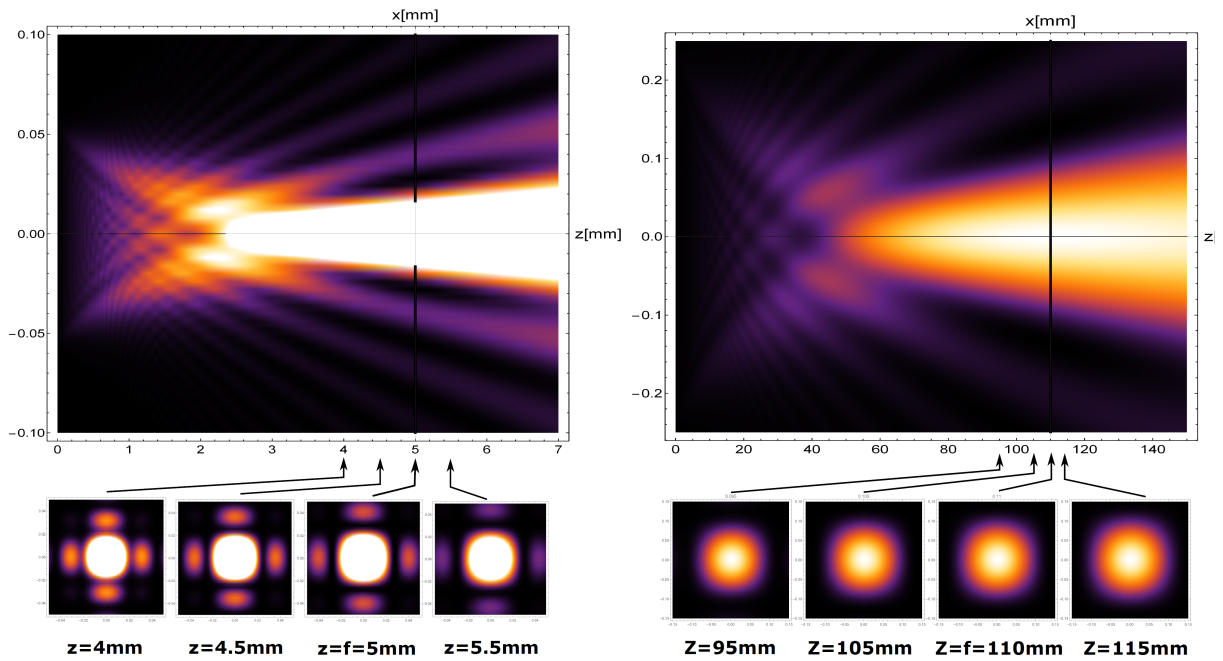
$$U(x, z) = \frac{K}{2z\sqrt{\lambda\Delta_z}} ([C(a_2) - C(a_1)] + i[S(a_2) - S(a_1)]), \quad (8)$$

kde pro  $a_{1,2}$  platí vztahy

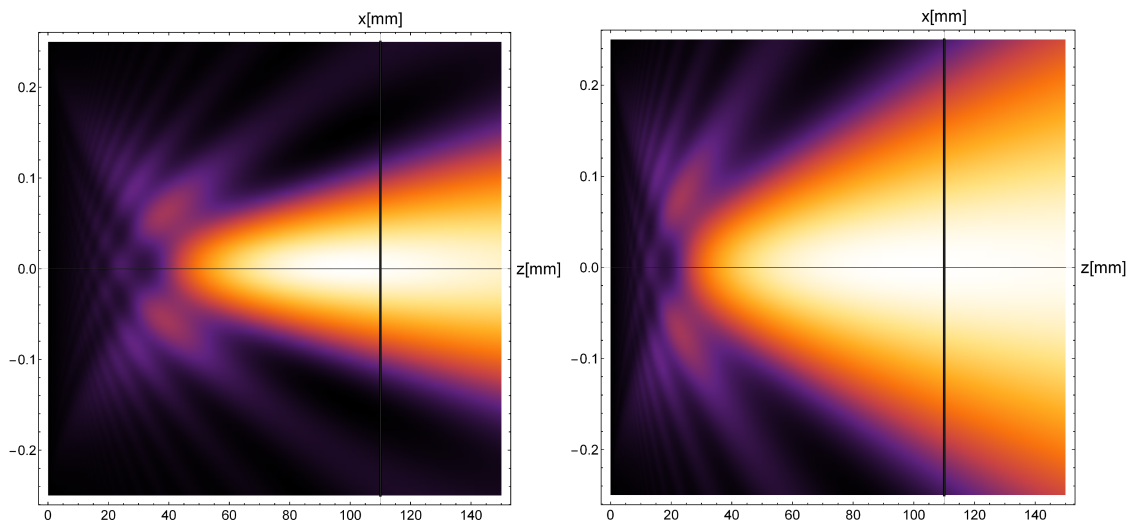
$$a_1 = -a\sqrt{\frac{\Delta_z}{\lambda}} - \frac{x-\Delta_x}{z\sqrt{\Delta_z\lambda}} \quad a_2 = a\sqrt{\frac{\Delta_z}{\lambda}} - \frac{x-\Delta_x}{z\sqrt{\Delta_z\lambda}}$$

Ve vztahu (7) pro výstupní amplitudu  $U(x)$  jsme použili parametry  $\Delta_x$  úměrný náklonu přichozí vlny a  $\Delta_z$  v absolutní hodnotě úměrný míře rozostření. Jak již bylo výše naznačeno náklon vlny způsobuje pouze posunutí difrakčního spotu, proto budeme nadále uvažovat jen kolmý dopad tj. parametr  $\Delta_x$  bude roven nule.

Pro znázornění vlivu rozostření využijeme numerické simulace závislosti  $I(x, z) = I_0|U(x, z)|^2$ . Výsledky simulací jsou zobrazeny níže. Obrázek (2) prezentuje vliv rozostření na dvou senzorech s mikročočkami o průměru  $d_{sub} = 0.114mm$  a  $d_{sub} = 0.5mm$  s ohniskovými vzdálenostmi  $f = 5mm$  a  $f = 110mm$ . Jedná se o průběh intenzity v rovině  $(x, z)$  a řezy v rovině  $(x, y)$  ve vybraných vzdálenostech  $z$  od ohniskové roviny, zobrazující difrakční obrazec. Obrázek (3) simuluje stejným způsobem vliv rozostření jednoho a téhož senzoru s použitím dvou vlnových délek  $\lambda = 630nm$  a  $\lambda = 300nm$ .



Obrázek 2: Numerická simulace rozostření při parametrech mikročočky: Ohnisková vzdálenost  $f$ , pološířka pupily  $w$  při vlnové délce  $\lambda = 630\text{nm}$  Vlevo:  $f = 5\text{mm}, w = 0.057\text{mm}$ ; Vpravo:  $f = 110\text{mm}, w = 0.250\text{mm}$



Obrázek 3: Numerická simulace rozostření pro mikročocku s parametry  $f = 40\text{mm}, w = 0.1\text{mm}$ , jež je součástí SH senzoru určeného pro UV oblast optického záření. Vlevo: simulace pro  $\lambda = 300\text{nm}$ ; Vpravo: simulace pro  $\lambda = 630\text{nm}$

Na začátku kapitoly byl ukázány základní principy fungování SH senzoru. Na rovnicích (2) byla ukázána metoda určení polohy difrakčních spotů pomocí výpočtu těžišť. Díky znalosti vzájemných poloh těžišť spotů je možné vyhodnocení vlnoplochy pomocí zonální nebo modální metody, které jsou popsány následně. V textu je dále uveden význam několika prvních Zernikeho koeficientů, které se používají pro analytické vyjádření vlnoplochy. Teoretický rozbor měření pomocí SH sen-

zoru je prezentován na modelu rovinné vlny dopadající pod náklonem na čočku. Difrakční spot se vlivem lokálního gradientu vlnoplochy posune od optické osy mikročocky. Následuje analýza vlivu rozostření obrazu vlivem nepřesného umístění detekční roviny. Výsledek je v podobě numerické simulace zobrazené na obrázcích (2) a (3). Z uvedené simulace společně s výše zmíněným teoretickým rozbohem naznačují, že není nutné trvat na vysoké přesnosti umístění senzoru do ohniskové roviny mikročockek, ale je nutné znát vzdálenost detekční roviny (CCD resp. CMOS snímač) a matice mikročockek.

## 2 Parametry Shack-Hartmannova senzoru

Jak již bylo v předchozí kapitole ukázáno, SH senzor se skládá z intenzitně citlivého senzoru s prostorovým rozlišením (CCD nebo CMOS snímač) a matice mikročoček. Tyto dvě základní části se svými konstrukčními parametry významně ovlivňují celkové vlastnosti senzoru jako jsou citlivost, prostorové rozlišení, přesnost a dynamický rozsah. Cílem této kapitoly je podat ucelený pohled na vzájemný vztah mezi základními parametry kamery a matice mikročoček a výše jmenovanými vlastnostmi senzoru. Při výkladu se bude vycházet z ISO normy [7] a [1].

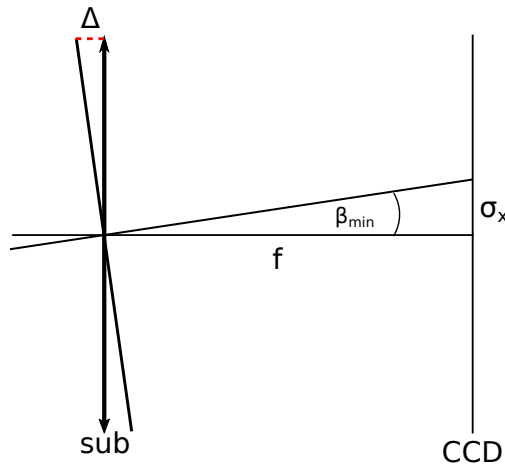
V předchozí kapitole, bylo ukázáno, že velikost difrakčního spotu  $d_{spot}$  detekovaného ve vzdálenosti  $z \approx f$  je určena (rovnice 6) velikostí subapertury  $d_{sub}$  a vzdáleností  $z$ . V dalších výpočtech se bude předpokládat, že  $d_{sub}$  je rovna vzájemné vzdálenosti středů mikročoček. Vlivem lokálního gradientu  $\beta_x$  se difrakční spot posune od optické osy o

$$d_x = \beta_x f. \quad (9)$$

Minimální lokální gradient  $\beta_{min}$ , který je SH senzorem detekovatelný závisí na nejistotě určení polohy spotu  $\sigma_x$  a vzdálenosti mezi maticí mikročoček a CCD senzorem. Tato vzdálenost bude v dalším textu považována za rovnou ohniskové vzdálenosti mikročoček (viz obrázek 4). Pro  $\beta_{min}$  lze psát

$$\beta_{min} = \frac{\sigma_x}{f}. \quad (10)$$

$\beta_{min}$  se nazývá citlivostí senzoru či úhlovou přesností (sensitivity, angular accuracy).

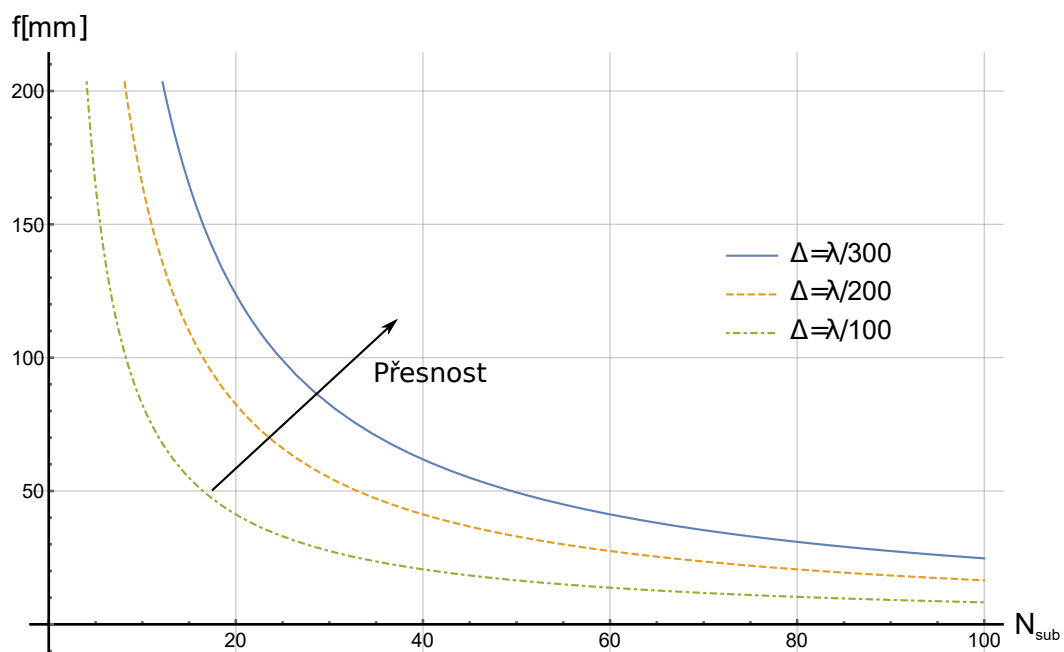


Obrázek 4: Přesnost vyjádřená jako vlnoplocha  $W_{min}$  při dopadu rovinné vlny pod minimálním možným náklonem  $\beta_{min}$ , který je SH senzorem detekovatelný. Nejistota určení polohy spotu je označena jako  $\sigma_x$

Pojem přesnost (accuracy) vyjadřuje chybu rekonstruované vlnoplochy. V určitém zjednodušení ji lze vyjádřit průměrnou lokální chybou vlnoplochy, jejímž zdrojem je šum polohy spotů na kameře. V souladu s definicí citlivosti se zde jedná o minimální detekovatelnou vlnoplochu. Pro  $W_{min}$  lze psát

$$W_{min} = \frac{d_{sub}\sigma_x}{2f}. \quad (11)$$

Čím je  $W_{min}$  větší tím je přesnost senzoru menší. Přesnost může být obecně závislá na vyhodnocovacím algoritmu, parametrech senzoru a konečně i na vnějších vlivech. Obecně všechna vysoce přesná měření jsou náchylná na vibrace, které se mohou podílet na šumu naměřených dat. Optická měření se proto často dělají na robustních optických stolech, které tyto vibrace částečně izolují. Na nejistotu  $\sigma_x$  měření polohy spotu může mít proto vliv i umístění SH senzoru při měření. Mezi standardní postupy minimalizování šumu dat patří nastavení malé expoziční doby a časové či prostorové středování. V kapitole 3 budou zmíněné metody diskutovány na datech z experimentálního měření. Zvyšování přesnosti SH senzoru za pomoci zlepšování vyhodnocovacího algoritmu prezentuje např. [14]. V [13] se autoři zabývají vlivem parametrů detekující kamery jako signal to noise, shot noise a readout noise. Uvážíme-li konstantní velikost kamery, můžeme vztah (11) vyjádřit pomocí počtu mikročoček v jedné dimezi  $N_{sub}$ . Graf na obrázku (5) zobrazuje křivky konstantní přesnosti pro danou vzdálenost  $z$  a počet mikročoček  $N_{sub}$ . V grafu jsou zobrazeny tři křivky konstantní hodnoty přesnosti, vyjádřené ve zlomcích vlnové délky. S rostoucí počtem mikročoček klesá při konstantní velikosti senzoru, průměr jednotlivých subapertur a přesnost senzoru se tak dle (11) zvyšuje. Stejný efekt má i růst ohniskové vzdálenosti  $f$ . Směr růstu přesnosti je v grafu vyznačen šipkou.



Obrázek 5: Přesnost vyjádřená podle vztahu (11) jako vlnoplocha  $W_{min}$  při dopadu rovinné vlny pod minimálním možným náklonem  $\beta_{min}$ , který je SH senzorem detekovatelný. V grafu jsou uvedeny tři křivky s konstantní přesností  $\lambda/300$ ,  $\lambda/200$  a  $\lambda/100$ . Při konstantní velikosti senzoru se průměr mikročoček zmenšuje s jejich rostoucím počtem a přesnost SH senzoru se tak dle (11) zvyšuje. Stejně tak se přesnost zvyšují i s rostoucí ohniskovou vzdáleností mikročoček. Křivky zároveň představují konstantní hodnoty velikosti spotu.

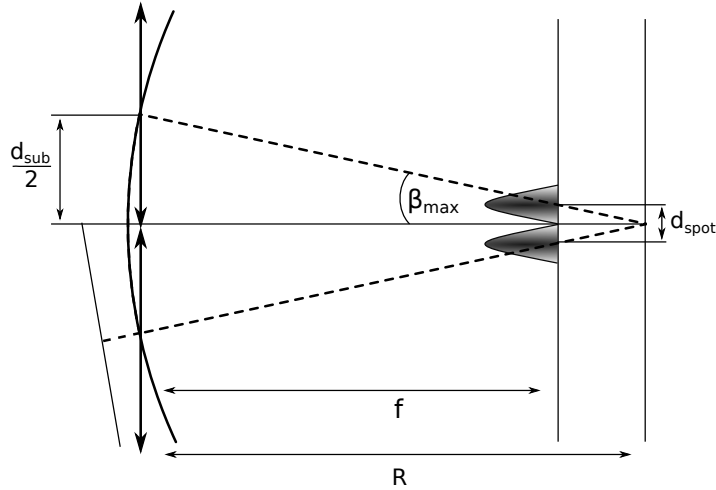
Dalším parametrem SH senzoru je prostorové rozlišení dané počtem mikročoček  $N_{sub}$ . V následujících výpočtech je počet mikročoček uvažován pouze v jedné dimenzi (tj. počet mikročoček v jednom řádku resp. sloupci). Počet mikročoček lze vyjádřit jako podíl rozměrů senzoru  $d_{senzor}$  a mikročočky



$D_{sub}$

$$N_{sub} = \frac{d_{senzor}}{d_{sub}}. \quad (12)$$

Obdobně jako úhlovou přesnost  $\beta_{min}$  je možné hledat úhlový dynamický rozsah  $\beta_{max}$ . Ten představuje maximální možný lokální gradient, který je možné SH senzorem zaznamenat. Pro správné určení polohy spotu je obvykle požadováno, aby se difrakční spot nacházel v oblasti odpovídající poloze dané mikročočky<sup>1</sup>. Tento požadavek vychází z omezení souvisejícím s efektem zvaným Cross-talk. Ilustrativní popis efektu je vidět na obrázku (6). V případě, kdy se difrakční spoty překrývají,



Obrázek 6: Nejmenší lokální poloměr křivosti, detekovatelný SH senzorem. Poloměr křivosti  $R$  musí být dostatečně velký aby se zamezilo efektu zvanému cross-talk, při kterém nastává překrytí difrakčních spotů a tím k chybě ve výpočtu polohy těžišť

pak je znemožněn výpočet polohy jejich těžišť. Zamezení takové situace klade podmínku na míru vychýlení spotu vlivem lokálního gradientu diskutovaného v kapitole 1. Pokud je posunutí spotu  $d_x$  menší jak polovina z rozdílu jeho velikosti a velikosti mikročoček, pak je Cross-talk efekt omezen pouze na oblast mimo centrální disk difrakčních spotů.

$$d_{x,max} = \frac{1}{2}(d_{sub} - d_{spot}) \quad (13)$$

Z rovnic (13), (9) a (6) lze toto omezení vyjádřit jako

$$\beta_{max} = \frac{d_{sub}}{2f} - \frac{\lambda}{d_{sub}}. \quad (14)$$

Z výše uvedeného výrazu pro úhlový dynamický rozsah<sup>2</sup> plyne podmínka  $f \leq d_{sub}^2/2\lambda$  pro ohniskovou vzdálenost senzoru. Krajní hodnota  $f = d_{sub}^2/2\lambda$  odpovídá nulovému dynamickému rozsahu.

<sup>1</sup>Uvedené varianta dynamického rozsahu se vztahuje ke konvenčním algoritmům založených na hledání těžišť difrakčních spotů vně oblasti subapertur. Existují však i modifikované algoritmy, umožňující zvýšení dynamického rozsahu nad rámec zde uvedených limitu (viz [4]).

<sup>2</sup>V [1, str.194] je dynamickým rozsahem uvažován podíl maximálního  $\beta_{max}$  a minimálního  $\beta_{min}$  možného lokálního gradientu detekované vlnplochy, tedy podíl výše uvedené interpretace danamického rozsahu a citlivosti.

Velikost spotu  $d_{spot}$  je v takovém případě rovna průměru mikročočky  $d_{sub}$ . Pro senzor s maximálním možným dynamickým rozsahem, je velikost spotu zanedbatelná ve srovnání s velikostí subapertury a platí

$$\beta_{x,max} = \frac{d_{sub}}{2f}, \quad (15)$$

Tyto dvě krajní situace ukazují že s rostoucím poměrem velikostí spotu a mikročočky je možné docílit senzorů s vysokou přesností a menším dynamickým rozsahem. Naopak senzory s malým poměrem  $\frac{d_{spot}}{d_{sub}}$  disponují vysokým dynamickým rozsahem a menší přesností. Jako kompromis představující SH senzory univerzálního charakteru se jeví poměr  $\frac{d_{spot}}{d_{sub}} = \frac{1}{2}$ .

Podmínku na maximální vychýlení spotu vlivem lokálního gradientu lze zároveň vyjádřit jako minimální lokální poloměr křivosti detekovatelný senzorem. Jeli poloměr křivosti  $R$  rovný ohniskové vzdálenosti  $f$ , pak difrakční spoty splynou v jednom bodě. Na obrázku 6 je schématicky odvozena podmínka pro  $R$ , které musí velké tak, aby vzdálenost mezi spoty byla větší nebo rovna jejich velikosti  $d_{spot}$

$$R \geq f + \frac{d_{spot}}{2} \frac{1}{\beta_{max}}. \quad (16)$$

Po dosazení za  $\beta_{max}$  z rovnice 14 je podmínka pro lokální poloměr křivosti dána poměrem mezi velikostí subapertury a jejím rozdílem od velikosti spotu

$$R \geq f \frac{d_{sub}}{d_{sub} - d_{spot}}. \quad (17)$$

Z předešlých výrazů pro parametry SH senzoru, lze vyčíst, že přesnost senzoru je přímo úměrná velikosti spotu. Pro dynamický rozsah je tato úměra nepřímá a vzhledem k druhému členu v rovnici (14) pouze přibližná. Na obrázku (7) je porovnání křivek konstantní velikosti spotu a dynamického rozsahu. V grafu jsou uvažovány konstantní velikost senzoru a jeho vzdálenost od matice mikročoček  $z$ .

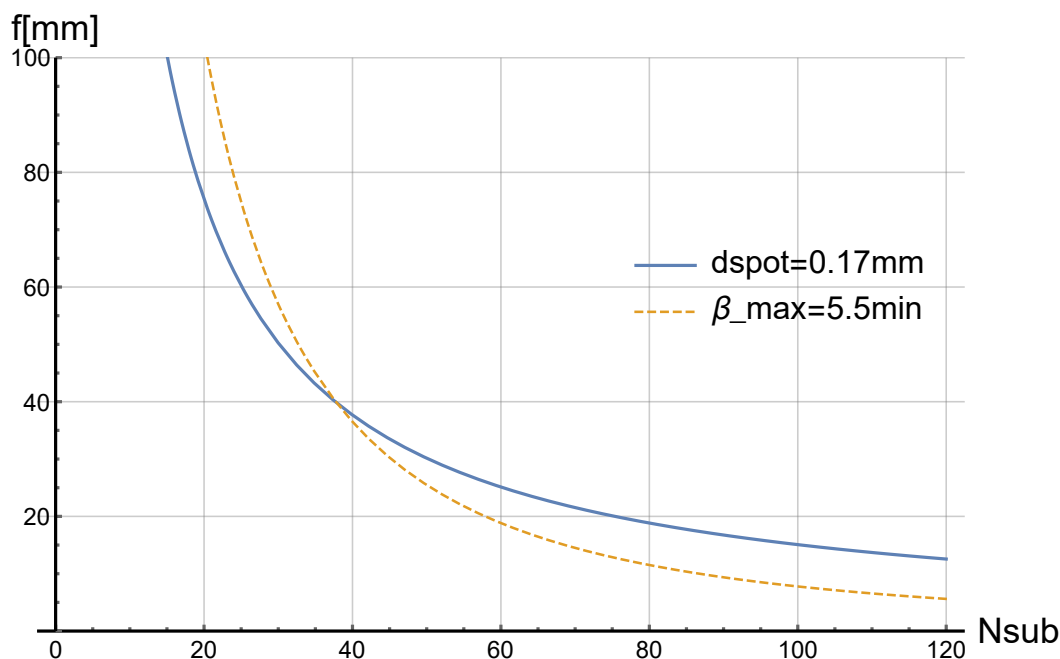
Porovnáním výrazů (10) a (11) se ukazuje, že přesnost je citlivost škálovanou přes poloměr subapertury a analogicky k tomu dynamický rozsah  $\beta_{max}$  škálovaný polovinou velikostí senzoru. To lze interpretovat tak, že maximální detekovatelný gradient (dynamický rozsah) lze vztáhnout na minimální poloměr křivosti sférické vlnoplochy, kterou lze senzorem měřit. Stejně tak lze dynamický rozsah vztáhnout na maximální nakloněnou vlnoplochu. Grafická ilustrace k této interpretaci je zobrazena na obrázku (8). Dynamický rozsah vyjádřený jako vlnoplocha  $W_{max}$  při dopadu rovinné vlny pod náklonem rovným úhlovému dynamickému rozsahu  $\beta_{max}$  je dán vztahem

$$W_{max} = \beta_{max} \frac{d_{sen}}{2} \quad (18)$$

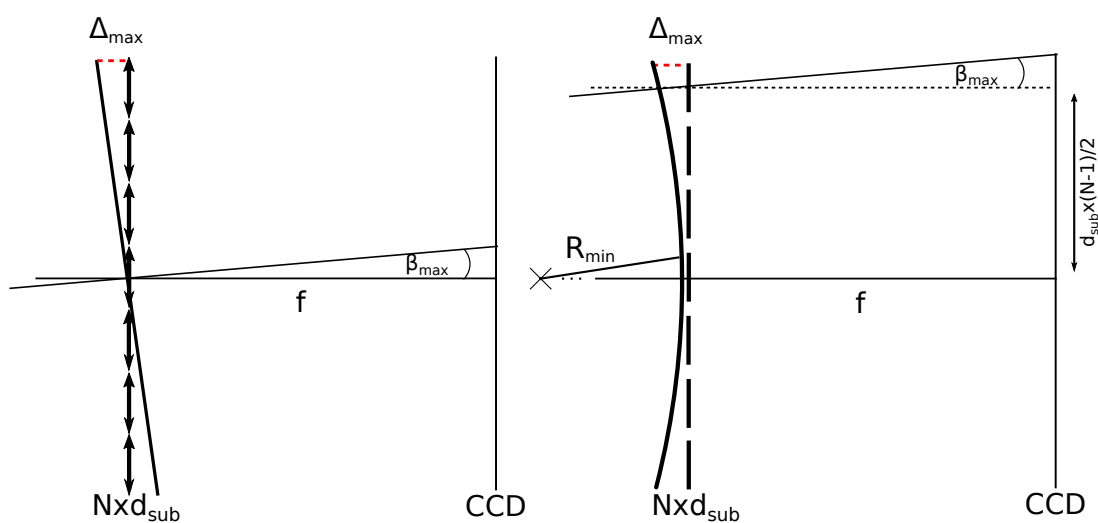
Při dopadu sférické vlny je vlnoplocha  $W_{max}$  závislá na poloměru křivosti  $R_{min}$

$$W_{max} = \frac{d_{sub}^2}{4R_{min}} (N - 1). \quad (19)$$

Na obrázku (9) jsou ilustrativně shrnuty výše diskutovaná provázání jednotlivých parametrů SH senzoru. V grafu jsou znázorněny křivky konstantní velikosti spotu v závislosti na počtu mikročoček



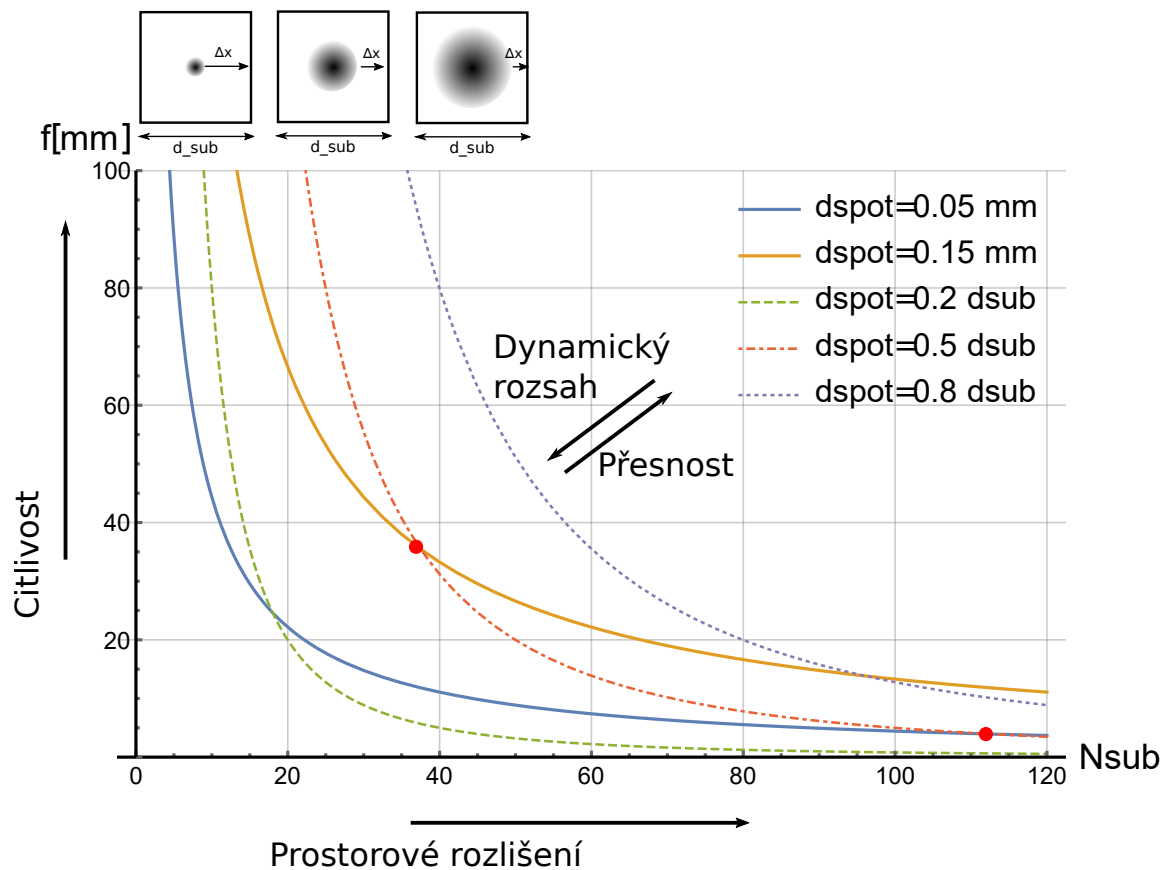
Obrázek 7: Graf pro porovnání křivek konstantí velikosti spotu a dynamického rozsahu při konstantní velikosti senzoru a jeho vzdálenost od matice mikročoček  $z = f$ . Křivka dynamického rozsahu klesá v porovnání s průběhem křivky pro konstantí velikost difrakčního spotu rychleji. Je-li při výpočtu dynamického rozsahu zanedbána velikost spotu, pak je tvar křivek identický.



Obrázek 8: Dynamický rozsah vyjádřený jako změna optické dráhy  $\Delta_{max}$  při dopadu rovinné vlny pod úhlem  $\beta_{max}$  resp. sférické vlny o poloměru křivosti  $R_{min}$ .

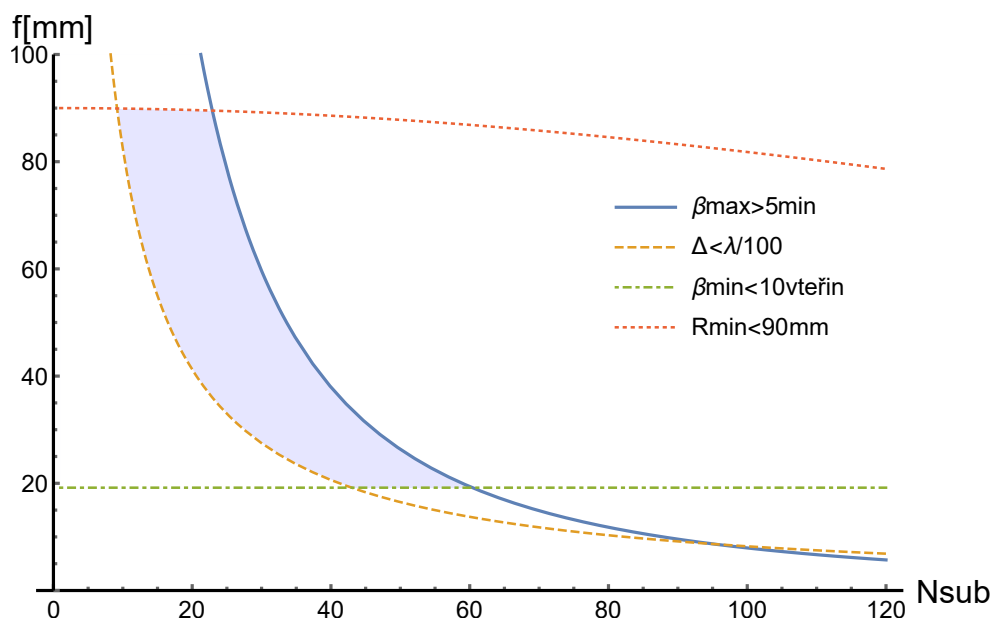
a ohniskové vzdálenosti. Křivky zároveň představují konstantní hodnotu přesnosti a (přibližně) dynamického rozsahu. S rostoucím počtem mikročoček roste prostorové rozlišení senzoru. S rostoucím ohniskem  $f$  mikročoček roste citlivost, která je nepřímo úměrná minimálnímu detekovatelnému gradientu  $\beta_{min}$  (10). Uvažujeme-li konstantní velikost senzoru  $d_{senzor}$ , pak dle rovnice 12 při rostoucím počtu mikročoček  $N$  klesá velikost jednotlivých subapertur  $d_{sub}$  a tím i dynamický rozsah. V grafu jsou přerušovanými čarami zobrazeny křivky konstantního poměru mezi velikostmi difrakčního spotu

a subapertury. Sensory s malým poměr  $d_{sub}/d_{spot}$  mohou dosahovat vysoké přesnosti, avšak za cenu malého dynamického rozsahu a naopak při větších hodnotách poměru mikročocky ku spotu. Pro univerzální sensor se jako vhodný poměr jeví  $d_{sub}/d_{spot} = \frac{1}{2}$ . Z různorodosti nároků měření na měřicí parametry, se zdá být přirozené, že není možné mít jeden ideální sensor na všechna typy měření. Chceme-li například měřit divergentní sférickou vlnu s velkým poloměrem křivosti, pak budeme, s ohledem na malé lokální úhly dopadu, vyžadovat vysokou citlivost měření. Naopak, při měření vlnoplochy s prostorově rychlými změnami lokálních gradientů, je důležité dosáhnout vysokého rozlišení a to při dostatečném dynamickém rozsahu. Vhodnou volbou konstrukčních parametru můžeme tyto nároky pro daná měření pokrýt.



Obrázek 9: Graf znázorňující vzájemný vztah mezi parametry SH senzoru. Křivky představují konstantní dynamický rozsah. Se zvyšujícím se počtem mikročockek (při konstantní velikosti CCD prvku) se zvyšuje prostorové rozlišení senzoru

Na obrázku 10 je zobrazen příklad volby parametrů SH senzoru určeného pro měření kladoucí podmínky na dynamický rozsah  $\beta_{max}$ , citlivost  $\beta_{min}$ , přesnost  $\Delta_{min}$  a detekovatelný lokální poloměr křivosti  $R_{min}$ . Modře označená oblast představuje SH senzory splňující dané požadavky.

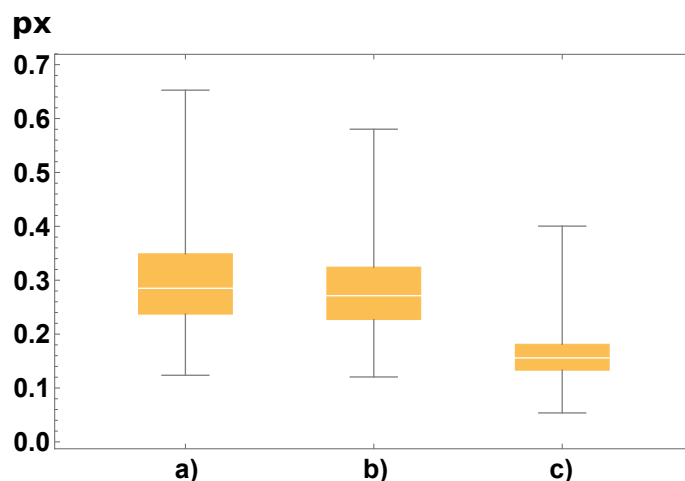


Obrázek 10: Volba SH senzoru na základě požadavků měření. Modře označená oblast představuje SH senzory splňující kladené požadavky na dynamický rozsah  $\beta_{max}$ , citlivost  $\beta_{min}$ , přesnost  $\Delta_{min}$  a detekovatelný lokální poloměr křivosti  $R_{min}$ . Případné omezením v podobě minimálního prostorové rozlišení (minimální počet subapertur) není v grafu uvažováno.

### 3 Experimentální měření parametrů SH senzoru

V předchozí kapitole byli odvozeny teoretické vztahy pro základní parametry SH senzoru jako jsou dynamický rozsah, přesnost a citlivost. Parametry jsou v nich určeny na základě mechanických vlastností senzorů, kterými jsou ohnisková vzdálenost a průměr mikročoček, jejich počet a jiné. V rovnicích pro přesnost a citlivost vystupují mimo tyto konstrukční vlastnosti také nejistota měření polohy spotu  $\sigma_x$ . Rovnice poskytují odhad parametrů SH senzoru, neuvažují však ostatní zdroje nejistot například aberace mikročoček. V této kapitole budou prezentovány výsledky odhadu nejistoty  $\sigma_x$  klíčové pro určení přesnosti a citlivosti SH senzoru dle vztahů (11) a (10). Následně bude diskutován alternativní přístup k určení těchto parametrů založený na měření definovaných vlnoploch.

V předchozí kapitole byli pojmy přesnost a citlivost zavedeny pomocí výrazů závisících na nejistotě určení polohy těžiště spotu  $\sigma_x$ . Před vyčíslením hodnot parametrů SH senzoru je nutné tuto hodnotu zjistit. Experimentálního měření spočívalo v opakovaných záznamech poloh spotů v ekvidistantních časových intervalech. Výsledky měření jsou znázorněny na obrázku 11. Jedná se o tři měření, při nichž se použilo běžných nástrojů pro eliminaci šumu při měření tj časové a prostorové středování (konvoluce). Všechna tři měření proběhla při stejné expoziční době a na stejném SH senzoru s mikročočkami o průměru 0.3 mm a ohnisku 32.2 mm. Prvním boxem, označeným písmenem  $a$ , je poloha spotu měřena bez středování a bez použití funkce konvoluce. V druhém (b) je poloha měřena za použití středování a třetí box představuje měření za použití prostorového středování (konvoluce). Snížení směrodatné odchylky pro soubor naměřených poloh bylo zaznamenáno pouze při použití funkce konvoluce. Nejistota měření polohy spotu tak byla odhadnuta na  $\sigma_x = 0.2px$ .



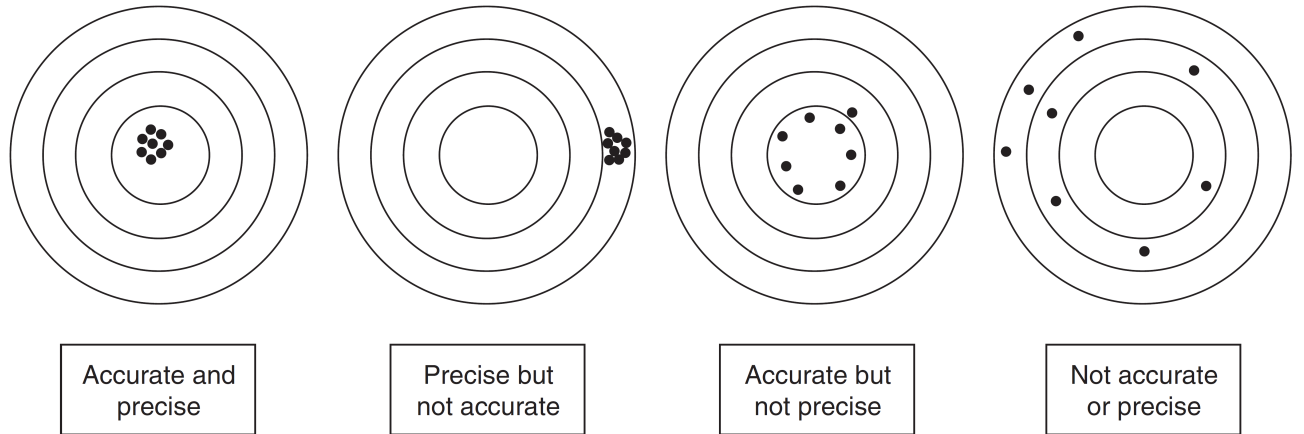
Obrázek 11: Měření polohy spotu v ekvidistantních časových odstupech ( $\approx 10s$ ). V prvním boxu (a) bez použití časového a prostorového středování. V boxu (b) s použitím časového středování a (c) za použití funkce prostorového středování (konvoluce). Naměřené polohy spotu mají směrodatné odchylky: 0.3 px, 0.3 px a 0.2 px.

parametr	vzorec	senzor S1	senzor S2
Dynamický rozsah	$\beta_{max} = d_{sub}/2f - \lambda/d_{sub}$	20'33"	5'37"
Přesnost	$W_{min} = \sigma_x d_{sub}/2f$	10.7( $\lambda/60$ )nm	3.5 ( $\lambda/180$ )nm
Citlivost	$\beta_{min} = \sigma_x/f$	38.4"	4.8"
Minimální lokální poloměr křivosti	$R_{min} = f d_{sub}/(d_{sub} - 2\lambda f/d_{sub})$	9.6mm	91.8mm
Prostorové rozlišení	$N_{sub} = d_{senzor}/d_{sub}$	97	37

Tabulka 2: Tabulka parametrů SH senzoru s vyčíslením pro dva vybrané senzory S1 a S2 obsahující matice mikročoček s průměry  $d_{sub} = 0.115mm$  a  $0.3mm$  s ohniskem  $f = 5mm$  a  $40mm$ . U obou senzorů je nejistota měření polohy spotu  $\sigma_x$  uvažována 0.2 pixelu a vzdálenost matice mikročoček od CCD prvku přibližně rovna ohniskové vzdálenosti mikročoček.

V tabulce 2 je uveden příklad výpočtu parametrů dvou vybraných SH senzorů. Oba senzory mají vzhledem k průměru subapertur poloviční velikost spotu. V předchozí části kapitoly bylo ukázáno, že takové senzory představují kompromis mezi proti sobě jdoucími parametry dynamickým rozsahem a přesností. Senzor S1 vyniká na úkor citlivost vysokým prostorovým rozlišením. Druhý senzor má v porovnání s první vyšší citlivost a menší prostorové rozlišení. V tabulce jsou diskutované parametry vyčísleny pro oba senzory.

Při opakovaném měření téhož signálu jsou ve výsledcích podávaných měřicím zařízením vzájemné rozdíly. Tyto rozdíly mohou být způsobeny statisticky náhodnými či systematickými efekty. Obecně se pro vyhodnocení míry vlivu těchto efektů na výsledky měřicího zařízení používají pojmy *přesnost* a *preciznost* resp. *accuracy* a *precision*. Význam obou pojmů je graficky znázorněn na obrázku 12 převzatého z [12, str. 12]. Zatímco pojem přesnost se vztahuje ke statisticky náhodným vlivům, preciznost se týká systematických chyb [7]. V literatuře se též místo pojmu preciznost objevuje pojem



Obrázek 12: Grafické znázornění [12, str. 87] významu pojmů *accuracy-přesnost* a *precision-preciznost*. Přesnost resp. preciznost vypovídají o vlivu statisticky náhodných resp. systematických efektů na výstup měřicího zařízení.

opakovatelnost (*repeatability*)<sup>3</sup>. Nyní provedeme analýzu vztahů pro výpočet přesnosti a opakovatelnost SH senzoru uvedených v [7].

Opakovatelnost měření vlnoplochy SH senzorem je v [7] vyjádřena vztahem

$$w_{r,rms} = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k \sqrt{\frac{\sum_x \sum_y [w_n(x,y) - \bar{w}(x,y)]^2}{\sum_x \sum_y} - \left( \frac{\sum_x \sum_y [w_n(x,y) - \bar{w}(x,y)]}{\sum_x \sum_y} \right)^2}, \quad (20)$$

kde  $\bar{w}(x,y)$  je průměrná hodnota vlnoplochy  $w_n(x,y)$  v bodě  $(x,y)$  z  $k$  měření identické vlnoplochy

$$\bar{w}(x,y) = \frac{1}{k} \sum_n^k w_n(x,y). \quad (21)$$

Přesnost měření vlnoplochy je v témže zdroji vyjádřena jako průměrné RMS (root-mean-square - představuje dvoudimensionální zobecnění standardní odchylky) rozdílu referenční a náklonem korygované vlnoplochy

$$w_{a,rms} = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k \sqrt{\frac{\sum_x \sum_y [w_{tc,n}(x,y) - w_r(x,y)]^2}{\sum_x \sum_y}}, \quad (22)$$

kde  $w_{tc,n}(x,y)$  je záznam vlny dopadající pod náklonem  $\theta_x$  resp.  $\theta_y$  ve kterém je náklon zpětně odečten. h

Při vyjádření vlnoplochy pomocí Zernikeho polynomů je korekci možné uskutečnit odečtením prvního a druhého Zernikeho koeficientu, které (viz tabulka 1 v kapitole *Základní Principy*) prezentují náklon v ose  $x$  resp.  $y$ .

V úvodní části práce byl popsán princip SH senzoru spočívající v detekci poloh těžišť difrakčních spotů od jednotlivých subapertur matice mikročoček. Z polohy těžišť spotů, úměrných lokálním gradientům vlnoplochy, se pomocí speciálních algoritmů určí tvar vlnoplochy. Výstupem SH senzoru jsou pak Zernikovy koeficienty, které společně s Zernikeovými polynomy vyjadřují tvar vlnoplochy

<sup>3</sup>Preciznost, vlastnost měřicího systému nebo nástroje, představuje měření opakovatelnosti [12].

vzhledem k referenci. Vlnoplocha je tak zadaná spojitě a sumace ve vztazích (20) a (22) přecházejí v numerickou integraci. Obě rovnice (22) a (20) lze zapsat ve zkráceném tvaru

$$W_{r,rms} = \sqrt{\langle [w(x,y) - \bar{w}(x,y)]^2 \rangle - \langle w(x,y) - \bar{w}(x,y) \rangle^2} \quad (23)$$

$$W_{a,rms} = \sqrt{\langle [w_{tc,n}(x,y) - w_r(x,y)]^2 \rangle} \quad (24)$$

První člen v rovnici (24) znázorňuje náhodné chyby měření, kdežto druhý odpovídá systematickým chybám. Výpočet přesnosti dle rovnice (11) poskytuje rychlý odhad, ale získaná hodnota je idealizovaná. V rovnici nejsou uvažovány možné aberace mikročoček způsobující vychýlení těžiště difrakčního spotu. Toto vychýlení představuje systematickou chybu. Výsledkem dopadu vln s náklonem na mikročočky s aberancemi může být nevyvážená statistika. Výraz 24 v sobě uvažuje i tyto okolnosti. Naopak druhý člen pod odmocninou ve výrazu (24) tuto případnou nevyváženost statistiky odstraňuje.

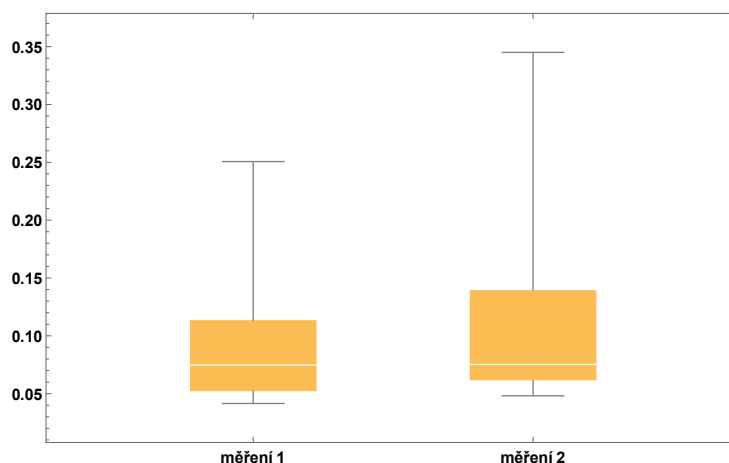
Přesnost i opakovatelnost byla měřena na totožném SH senzoru, na němž byla měřena nejistota polohy těžiště spotu. Jedná se o SH senzor s maticí 19x17 mikročoček o průměru 0.3mm. Výsledky měření přesnosti jsou vidět v tabulce 3. Hodnoty byly vypočteny dle rovnice (24). Vlnoplochy  $w_{tc,n}$  byli zaznamenány jako sada 12 rovinných vln dopadající na SH senzor pod náklonem. Záznamy byli následně na tento náklon korigovány tj. zernikeho koeficienty  $Z_1$  a  $Z_2$  byli vynulovány. V grafu

	měření 1	měření 2
$W_{a,rms}$	0.094 nm	0.123nm
$\sigma_{W_{a,rms}}$	0.06nm	0.1nm

Tabulka 3: Výsledky měření přesnosti získané výpočtem dle rovnice (24). Hodnoty  $w_{tc,n}$  byli získány záznamem sady rovinných vln dopadající pod náklony vůči optické ose. V tabulce jsou také uvedeny směrodatné odchylky naměřených souborů (viz obrázek 13).

na obrázku (13) jsou výsledky znázorněny pomocí krabicového grafu. V grafu je znázorněn soubor dat zpracovaný do podoby  $\sqrt{\langle [w_{tc,n}(x,y) - w_r(x,y)]^2 \rangle}$ . Hodnoty v tabulce 3 představují aritmetický průměr z tohoto souboru. V grafu jsou znázorněny obě provedená měření. Bílá linka znázorňuje medián souboru, hranice boxu pak 1. a 3. kvartál. Tenké černé linie maximální a minimální hodnotu v souboru.





Obrázek 13: Grafické znázornění dvou naměřených a zpracovaných souborů  $\sqrt{\langle [w_{tc,n}(x,y) - w_r(x,y)]^2 \rangle}$  pomocí boxového grafu. Bílá linka znázorňuje medián naměřených dat. Hranice boxu představuje 1. a 3. kvartil.

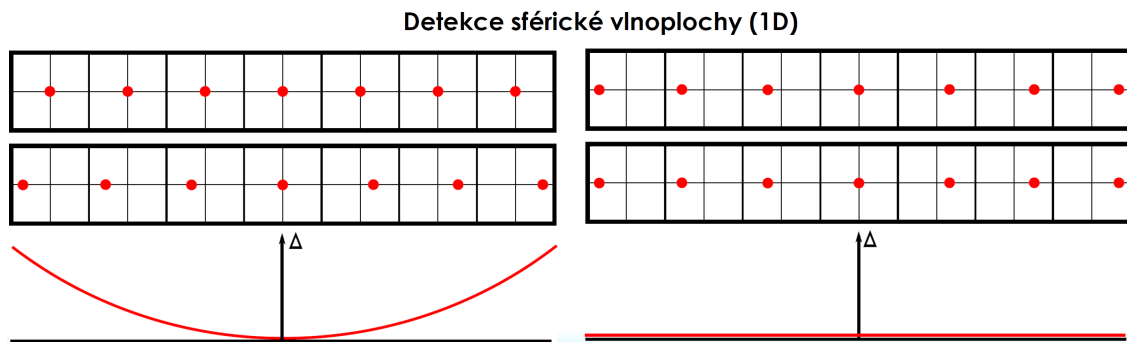
## 4 Kalibrace Shack-Hartmannova senzoru

Kalibraci [10, 11] lze chápat jako proces složený ze dvou základních částí. Jsou jimi ověření přesnosti přístroje a posléze jeho justáž. Ověření přesnosti přístroje lze provést porovnáním s jiným přístrojem, jehož výsledky měření považujeme za správné. Takový přístroj nemusí nutně fungovat na stejných principech. V oblasti detekce a měření vlnoplochy existuje více principiálně odlišných detektorů. K ověření porovnáním lze tedy kromě jiného již kalibrovaného SH senzoru použít například v optice často využívaný interferometr. Alternativou je proměřování signálů s dobře definovanými vlastnostmi. Takové signály jsou v oboru optiky ekvivalentem etalonů či kalibrů v mechanické resp. strojírenské oblasti měření. Následná justáž přístroje představuje krok sloužící ke ztotožnění výsledků měření s výsledky měření porovnávaného přístroje resp. s danými hodnotami připravených signálů. V rámci justáže mohou být stanoveny korekce aditivního či multiplikatívního charakteru. Výsledky měření kalibrovaného přístroje jsou pak korekcemi korigovány. Sofistikovanějším postupem může být zavedení kalibračních konstant, které jsou zahrnuty přímo do procesu měření.

V případě SH senzoru lze popsat obecné zdroje možných chyb v analýze vlnoplochy. V [1] jsou vyzdvíženy zejména

- Chyba vycentrování matice mikročoček. Zde může dojít k azimutální rotaci nebo může dojít k naklonění ve směru osy  $x$  nebo  $y$ .
- Rozdíly v ohniskových vzdálenostech jednotlivých mikročoček.
- Průměrování vlnoplochy v oblasti subaptur. Tato chyba je vnitřně spjata se samotnou metodou měření.
- Při dopadu lokální vlnoploch s většími úhly náklonů se projevují mimoosé aberace mikročoček. Jedná se především o comu způsobující zvýšenou nejistotu detekce polohy těžiště spotu.
- Šum generovaný malými fotonovými fluktuacemi, nebo vznikající v elektronice senzoru.

Existují modely kalibrace stanovující kalibrační konstanty, které reprezentují orientaci roviny matice mikročoček vůči detekční rovině CCD chipu. Touto orientací jsou náklon a rotace (viz [15]). Dále je možné odečtení aberací jednotlivých mikročoček. Vyhodnocení vlnoplochy SH senzoru probíhá podobně jako v interferometrii ve vztahu k referenční vlnoploše. Je-li tato vlnoplocha stanovena numericky, výsledné měření bude obsahovat aberace spojené nedokonalou geometrií matice mikročoček. Tyto odchylky od pravidelného uspořádání jsou korigovány záznamem tzv. referenční vlnoplochy. Příslušný referenční záznam zde hraje roli kalibrační plochy užívané v interferometrii. Roli reference a princip relativního měření SH senzoru názorně prezentuje obrázek (14).

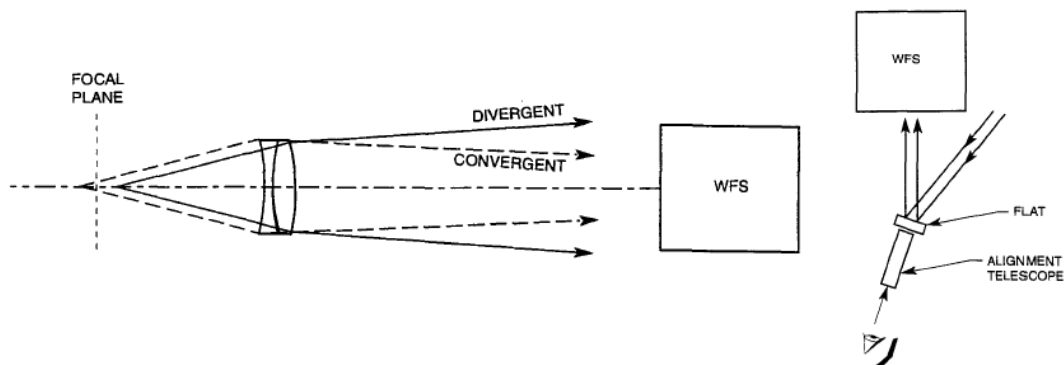


Obrázek 14: Detekce sférické vlnoplochy za použití reference v podobě rovinné vlny (vlevo) a sférické vlny (vpravo). První ze dvou řádků ukazuje referenci v podobě uložených poloh spotů, druhý řádek naměřená data. Grafy ve spodní části prezentují detekovanou vlnoplochu vztažnou k dané referenci.

Přesnost kalibrace je úměrná přesnosti měřicího přístroje, jehož výsledky měření považujeme apriori za správné. V případě proměrování předem definované vlnoplochy je přesnost kalibrace úměrná přesnosti generace připravené vlny. Volba tvaru vlnoplochy, použité pro ověření přesnosti SH senzoru tímto způsobem, se odvíjí od našich možností jejího přesného vytvoření. Mezi snáze a zároveň stále přesně generovatelné vlny můžeme zařadit nakloněnou rovinnou vlnu nebo sférickou vlnu daného poloměru křivosti. Tématem posouzení přesnosti SH senzoru pomocí detekce vlnoplochy daných parametrů se zabývá [3]. Příklad možných schémat takových měření je na obrázku obrázku (15).

Druhá část výše zmíněného pojetí kalibrace představuje justáž přístroje. V rámci tohoto kroku je možné stanovit kalibrační konstanty, které jsou využity pro zkorrigování senzoru vzhledem k očekávaným výsledkům. Nejdůležitějším parametrem pro kalibraci SH senzoru je vzdálenosti matice mikročoček od snímací části (CCD čip kamery). Jak již bylo v kapitole 1 ukázáno, tento parametr má pro detekci SH senzorem zásadní vliv. Význačná důležitost tohoto parametru spočívá v jeho působení v podobě škálovacího faktoru detekovaných lokálních gradientů.

V následujícím textu se omezíme na model kalibrace, jehož hlavním cílem bude stanovení kalibrační konstanty odpovídající vzdálenosti matice mikročoček od CCD kamery. Cílem této kapitoly je odvodit vztahy pro výpočet této vzdálenosti analýzu šíření nejistot při použití dvou základních typů vlnoploch připravovaných pro detekci SH senzorem tj. rovinnou a divergentní sférickou vlnu. V neposlední řadě budou uvedeny výsledky provedených praktických měření a jejich porovnání s



Obrázek 15: Možné schéma kalibrace proměřením známého signálu: (a) signál v podobě rovinné vlny s náklonem zajištěným rovinným zrcadlem; (b) signál v podobě sférické vlny generované bodovým zdrojem. Vložení čočky mezi bodový zdroj a SH senzor je navíc umožněno proměření konvergentní vlny; [3, str. 106].

teoretickými poznatky.

## 4.1 Kalibrace rovinnou vlnou

Asi nejjednodušším typem kalibrace SH senzoru je kalibrace rovinnou vlnou. Základní princip kalibrace rovinnou vlnou spočívá v záznamu dvou a více rovinných vln. Jednotlivé dopadající vlny se liší náklonem vzhledem k optické ose. Tyto směry představují náklony rovinné vlny vzhledem k optické ose. Náklony rovinných vln vůči optické ose jsou změřeny pomocí goniometru. Vlna dopadající na matici mikročoček vytvoří na CCD prvku SH senzoru soubor difrakčních spotů, jejichž polohy jsou senzorem zaznamenány. Záznamy poloh spotů pořízených SH senzorem se, společně s naměřenými úhly dopadů rovinných vln, použijí k estimaci vzdálenosti matice mikročoček od CCD čipu senzoru.

V rámci estimace vzdálenosti mikročoček a CCD kamery představuje záznam dvou nakloněných rovinných vln nejjednodušší informačně úplně schéma měření. Vzdálenost  $z$  lze v takovém případě vyjádřit jako podíl

$$z = \frac{x_2 - x_1}{\tan(\alpha_1) + \tan(\alpha_2)}. \quad (25)$$

Rozdíl poloh  $\Delta_x = x_1 - x_2$  difrakčních spotů představuje posun spotu při změně náklonu dopadající vlny. Poloha spotu  $x_1$  resp.  $x_2$  odpovídá poloze při dopadu rovinné vlny pod náklonem  $\alpha_1$  resp.  $\alpha_2$ .

V následujícím textu bude provedena diskuze nejistot spojených s estimací vzdálenosti matice mikročoček a CCD kamery (parametr  $z$ ). Jedním z hlavních výsledků této diskuze bude optimalizované schéma experimentu minimalizující výslednou nejistotu odhadu. Pro potřeby výpočtu nejistoty

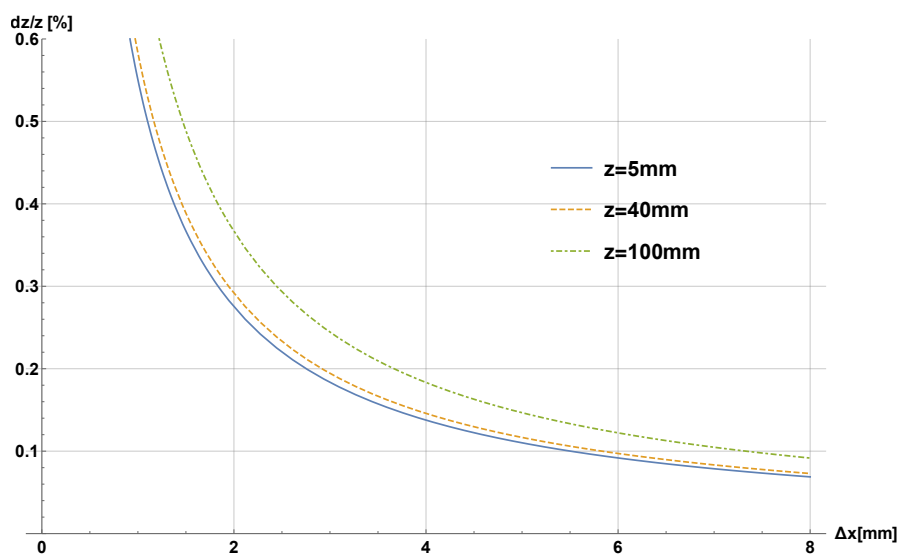
lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že náklony  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  těchto vln jsou zvoleny symetricky kolem optické osy. Platí tedy  $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha$ . V tomto režimu je možné vzdálenost  $z$  vyjádřit jako poměr posunu  $\Delta_x$  difrakčních spotů mikročočky a tangenty náklonu  $\alpha$  zaznamenaných rovinných vln.

$$z = \frac{\Delta_x}{2 \tan \alpha}. \quad (26)$$

Nejistota určení parametru  $z$  bude záviset na vstupujících nejistotách měření. Jedná se o nejistotu náklonu  $\sigma_\alpha$  a nejistotu měření posunu spotu  $\sigma_x$ . Nejistota měření náklonu  $\sigma_\alpha$  závisí na daném goniometru, který je využit pro potřeby kalibrace. Nejistota posunu spotu  $\sigma_x$  souvisí s přesností měření polohy těžiště jednotlivých spotů. Tato nejistota může být ovlivněna podmínkami měření i použitými vyhodnocovacími algoritmy. Vzájemný vztah mezi těmito nejistotami v podobě relativní chyby  $\sigma_z/z$  lze odvodit dosazením rovnice 26 do zákona šíření nejistot

$$\frac{\sigma_z}{z} = \frac{\sigma_x}{\Delta_x} \sqrt{1 + \left(\frac{2z}{\cos^2(\alpha)}\right)^2 \left(\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_x}\right)^2}. \quad (27)$$

Graf na obrázku 16 vykresluje závislost relativní nejistoty  $\sigma_z/z$  na posunutí  $\Delta_x$  difrakčních spotů mikročoček z polohy  $x_1$  do polohy  $x_2$ . Relativní chyba odhadu  $z$  klesá pro vyšší hodnoty rozdílu poloh difrakčních spotů příslušejícím náklonům  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$ . Praktickým důsledkem je, že nižší relativní chybu lze získat zvolením dostatečně velkých náklonů  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$ .



Obrázek 16: Graf nejistoty  $\sigma_z$  v závislosti na velikosti posunu  $\Delta_x$  difrakčních spotů. Závislost je vykreslena pro několik hodnot vzdálenosti  $z$  matice mikročoček od CCD kamery. Pro vykreslení grafu byly použity následující parametry: nejistota goniometru  $\sigma_\alpha = 5''$ , nejistota měření posunu  $\Delta_x = 7.8\mu\text{m}$ . Pro zvolené nejistoty je poměr  $\sigma_\alpha/\sigma_x \ll 1$  mnohem menší než jedna a proto lze výraz pod odmocninou v rovnici 26 zanedbat. Nejistota  $\sigma_z$  je tedy téměř nezávislá na vzdálenosti  $z$  a lze ji určit pouze z hodnoty velikosti posunu  $\Delta_x$  a nejistoty jeho měření  $\sigma_x$ .

Při odhadu parametru  $z$  byla doposud využita informace z měření pouze na jedné mikročočce. V případě SH senzoru je výhodné využít možnosti měření celé matice. Po dopadu rovinné vlny na

SH senzor, budou obrazy všech mikročoček posunuty stejným směrem. Jedná se tedy o  $N$  současných identických měření. Výsledná hodnota odhadu  $z$  potom bude dána aritmetickým průměrem  $N$  měření. Při takovém postupu lze nejistotu  $\sigma_z$  předpokládat pro všechny mikročočky stejnou a díky středování přes  $N$  mikročoček snížit relativní nejistotu faktorem  $1/\sqrt{N}$ . Graf na obrázku 17 znázorňuje závislost relativní nejistoty  $z$  na parametru  $\Delta_x$  pro stejné hodnoty šumu jako na obrázku 16. Oproti obrázku 16 je však odhad získán průměrováním přes  $N$  hodnot. Porovnáním obou grafů zjistíme, že došlo k řádovému snížení relativní nejistoty.

Dopadá-li na SH senzor rovinná vlna s větším náklonem, stane se, že některé difrakční spoty se posunou mimo detekční plochu CCD kamery a nelze je tedy detekovat. Počet spotů, které se tímto způsobem dostanou mimo detekční oblast stoupá s rostoucím náklonem  $\alpha$  dopadající rovinné vlny. Náklon lze dle rovnice (26) vyjádřit pomocí posunu spotu  $\Delta_x$ . Celkový počet  $N$  detekovaných difrakčních spotů

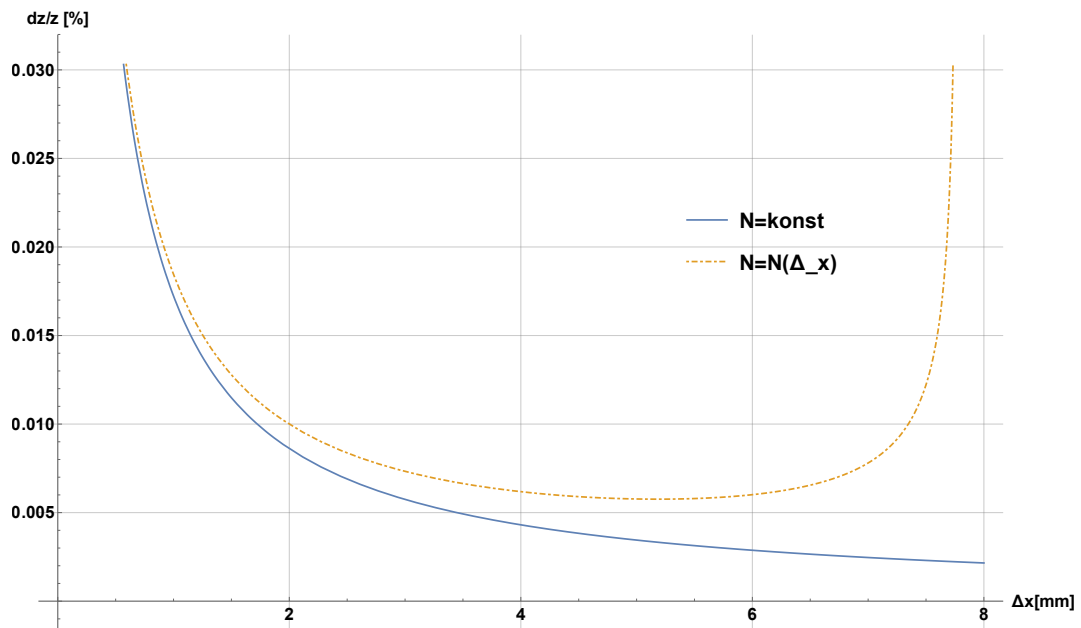
$$N = m \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta_x}{T} \right) \quad (28)$$

závisí na posunu  $\Delta_x$  a na velikosti CCD prvku vyjádřené v počtu mikročoček  $m$  při dané rozteči  $T$ . Rostoucí rozdíl  $\Delta_x$  způsobuje pokles nejistoty  $\sigma_z$ , zároveň ale v jeho důsledku roste počet difrakčních spotů vzniklých mimo detekční oblast. Proto je třeba ve výše uvedeném faktoru  $1/\sqrt{N}$  snižujícím relativní nejistotu uvažovat počet mikročoček  $N(\Delta_x)$  jako klesající funkci posunu  $\Delta_x$ . Takto korigovaná závislost relativní nejistoty  $\sigma_z/z$  na posunu  $\Delta_x$  je vykreslena v grafu 17 spolu s nekorigovaným průběhem, kdy je počet mikročoček uvažován konstantní.

Pomocí vztahu (27) násobeným faktorem  $1/\sqrt{N(\Delta_x)}$  a grafu na obrázku 17 lze navrhnout optimální schéma kalibrace. Jak vyplývá z předchozího textu, při optimalizaci je nutné zhodnotit nejistoty a dynamický rozsah senzoru. Optimalizace spočívá v určení vhodného náklonu  $\alpha$  rovinné vlny dopadající na SH senzor. Za ideální hodnotu náklonu  $\alpha$  se dá pokládat taková hodnota, která minimalizuje relativní nejistoty. čerchovaná křivka v grafu na zmíněném obrázku ukazuje, že pro daný senzor by se jak optimální provedení kalibrace jevílo použití rovinné vlny s náklonem  $\alpha$  takovým, aby rozdíl polohy spotů byl přibližně  $\Delta_x \approx 5\text{mm}$ . Hodnota takového náklonu se dá určit ze vztahu (26).

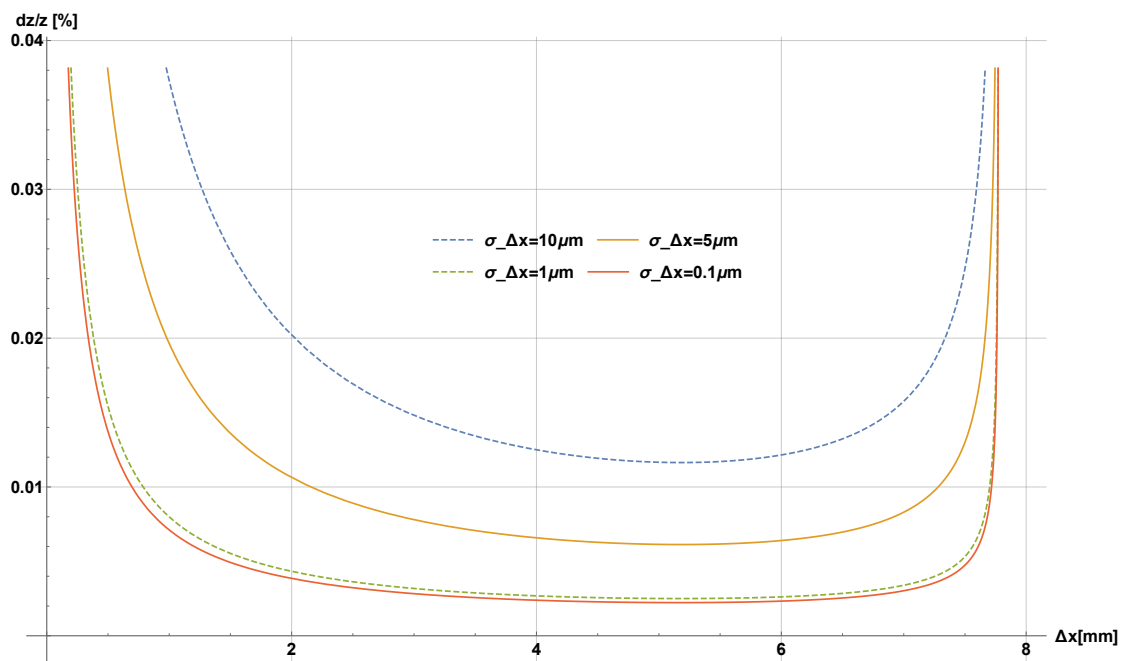
V předchozím textu byla diskutována relativní nejistota odhadu parametru  $z$  a byl uveden vztah (27) pro její výpočet. Graf z obrázku 16, vykresluje průběh relativní nejistoty pro hodnoty nejistot  $\sigma_x$  a  $\sigma_\alpha$ , pro jejichž poměr platí  $\sigma_\alpha/\sigma_x \ll 1$ . V takovém případě je odmocnina ve výrazu (27) pro relativní nejistotu  $\sigma_z/z$  zanedbatelná a relativní nejistota je přímo úměrná nejistotě měření polohy spotů a nepřímo posunu spotů  $\Delta_x$ . S rostoucím poměrem  $\sigma_\alpha/\sigma_x$  již nebude možné odmocninu zanedbat. Tím se začne projevovat závislost relativní nejistoty na odhadovaném parametru  $z$  a nejistotě  $\sigma_\alpha$ . Uvažujme nyní pevně danou nejistotu goniometru  $\sigma_\alpha$ . Je-li hodnota šumu postupně snižována až k ideální nulové hodnotě

$$\lim_{\sigma_{\Delta_x} \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sigma_{\Delta_x}}{\Delta_x} \sqrt{1 + (2z)^2 \left( \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_{\Delta_x}} \right)^2} = \frac{2z}{\sqrt{N}} \sigma_\alpha, \quad (29)$$



Obrázek 17: Graf vykreslující závislost relativní nejistoty parametru  $z$  na velikosti rozdílu poloh spotů  $\Delta_x$ . Oproti grafu z obrázku 16 je zde zohledněno středování přes  $N$  hodnot. Plná křivka odpovídá průběhu relativní nejistoty při středování přes konstantní počet  $N$  spotů. Průběh křivky je podobný jako u závislosti zobrazené na obrázku 16, ale hodnoty jsou zde o řád nižší. čerchovaná křivka ukazuje průběh relativní nejistoty při středování přes počet  $N(\Delta_x)$  spotů jako klesající funkce rozdílu  $\Delta_x$  poloh spotů. Nejistota zde nejprve vlivem středování klesá, až dosahuje minima a následně začíná opět stoupat vlivem posunu části difrakčních spotů mimo pole CCD kamery. Z grafu se pro daný senzor jeví jako optimální schéma kalibrace použití rovinných vln s náklony  $\alpha$  odpovídajícím dle rovnice (26) posunu spotů o  $\Delta_x \approx 5\text{mm}$ .

je relativní nejistota  $\sigma_z/z$  omezená nejistotou goniometru  $\sigma_\alpha$ . To znamená, že snižování nejistoty měření polohy spotu má příznivý vliv na relativní nejistotu pouze do jisté limitní hodnoty. Ta je dána přesností použitého goniometru a parametry senzoru. V grafu na obrázku 18 jsou vykresleny průběhy závislosti relativní nejistoty  $\sigma_z/z$  na posunu  $\Delta_x$  pro několik hodnot šumu  $\sigma_{\Delta_x}$ . Pro zvolený senzor (s parametry  $z = 40\text{mm}$ ,  $N = 840$ ) a nejistotu goniometru  $\sigma_\alpha = 5''$  je limitní hodnotou přibližně  $\sigma_{\Delta_x} = 1\mu\text{m}$ . Další snižování šumu nemá již na relativní nejistotu vliv, protože je zastíněno nejistotou goniometru. Pro docílení nižších hodnot relativní nejistoty by již bylo zapotřebí využít přesnějšího goniometru. Závěrem této diskuze je, že s rostoucí přesností měření polohy spotu jsou zapotřebí přesnější měření náklonů dopadajících vln.



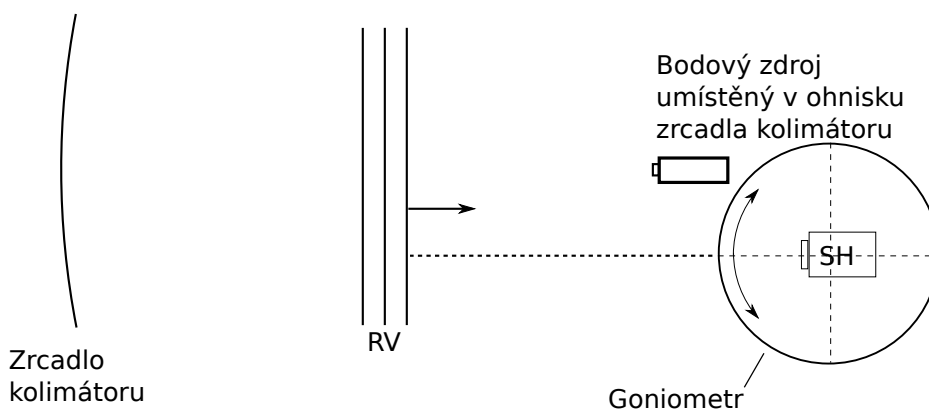
Obrázek 18: Procentuální závislost  $\sigma_z/z$  v závislosti na velikosti posunu spotů  $\Delta_x$ . Graf je vykreslen pro senzor s parametry  $z = 40\text{mm}$  a  $N = 840$  a nejistotu goniometru  $\sigma_\alpha = 5''$ . Pokles nejistoty měření polohy spotu snižuje relativní nejistotu pouze do určité meze. Ta je dána dle rovnice (29) přesností goniometru a parametry senzoru. Pro zvolený senzor se této meze dosahuje při hodnotě šumu  $\sigma_{\Delta_x} = 1\mu\text{m}$ . Další snížení relativní nejistoty daného senzoru je možné pouze za použití goniometru s větší přesností.

## 4.2 Experimentální provedení kalibrace rovinnou vlnou

Cílem této kapitoly je provedení kalibrace SH senzoru. Experiment se věnuje především měření axiální vzdálenosti matce mikročoček od CCD senzoru a stanovení nejistot. Kalibrace byla provedena podle modelu uvedeného v kapitole 4.1, kde byl rovněž přezkoumán vliv nejistot. Závěrem analýzy byla optimalizace schématu kalibrace. Tato optimalizace spočívala v určení hodnoty náklonu  $\alpha$  rovinné vlny dopadající na SH senzor, která minimalizuje nejistotu estimace vzdálenosti z mikročoček od CCD prvku SH senzoru. Pro kalibraci byl vybrán SH senzor obsahující matici 16x19 mikročoček o výrobcem udané ohniskové vzdálenosti 40 mm. Průměr mikročoček je shodný s jejich roztečí  $T = 0.3\text{mm}$ . Na základě rovnic uvedených v kapitole 2 byli v téže kapitole pro uvedený SH senzor vypočteny teoretické hodnoty parametrů (pro  $\lambda = 635\text{nm}$ ), tj.:

- Dynamický rozsah:  $5'37''$  [°]
- Přesnost:  $\lambda/180$  [nm]
- Citlivost:  $4.8''$  [°]
- Minimální lokální poloměr křivosti:  $91.8''$  [°]
- Prostorové rozlišení: 37

Ke kalibraci SH senzoru rovinnou vlnou je zapotřebí zdroj rovinných vln a goniometr pro realizaci jejich náklonů. Teoretické schéma experimentální sestavy pro kalibraci rovinnou vlnou je zobrazeno na obrázku 19. Generování samotné rovinné vlny je zde provedeno za pomoci parabolického zrcadla, v jehož ohnisku leží bodový zdroj světla. Pro realizaci náklonu existuje více možností. V uvedeném schématu provádí goniometr náklon samotného SH senzoru. Jiná možnost je zobrazena na obrázku 14 v úvodu této kapitoly. Zde se náklon zavádí pomocí rovinného zrcadla, na němž se vlny odráží směrem k SH senzoru. Rovinná vlna je v experimentu vytvářena pomocí kolimátoru



Obrázek 19: Schéma generování rovinné vlny a náklonu. Sférické zrcadlo kolimátoru, v jehož ohnisku je umístěn bodový zdroj, generuje rovinnou vlnu. Náklon rovinné vlny vůči SH senzoru je zajištěn goniometrem, na němž je SH senzor umístěn.

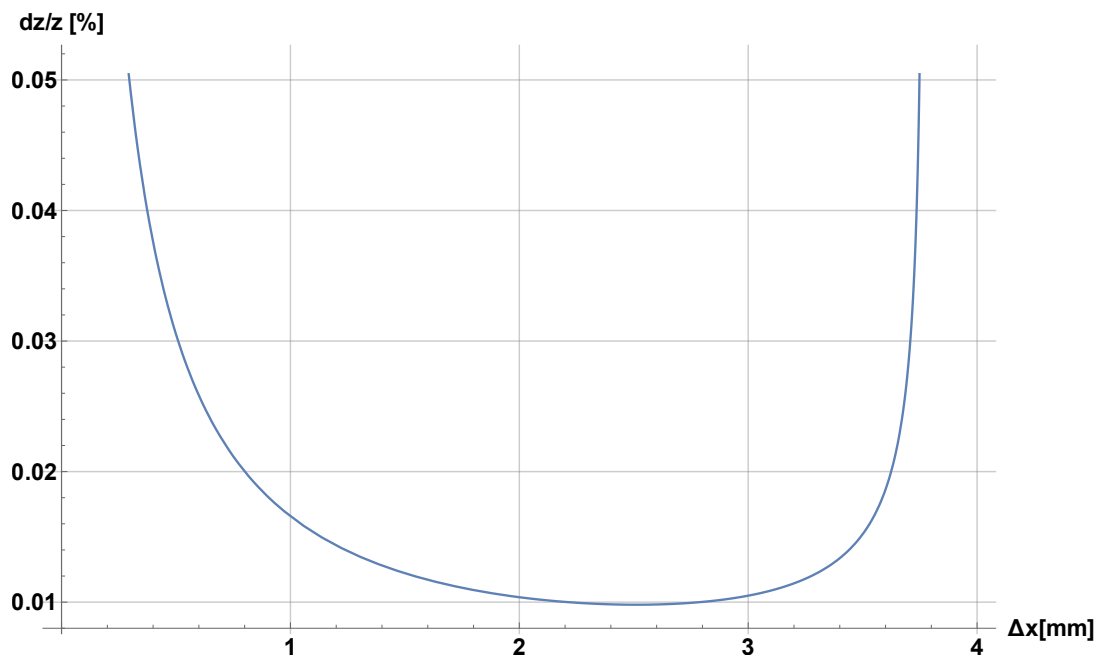
složeného z parabolického zrcadla a bodového zdroje. Generování optického signálu zajišťuje laser zářící na vlnové délce  $635\text{nm}$ . Signál je z laseru vyveden pomocí optického vlákna, jehož výstup je umístěn v ohniskovém bodě kolimačního zrcadla. Náklon rovinné vlny je realizován pomocí goniometru s ručním ovládáním, jehož přesnost dosahuje přibližně  $3''$ . Měřený SH senzor, umístěný na goniometru.

Na základě analýzy nejistot v předchozím textu bylo schéma kalibrace tohoto senzoru optimalizováno výběrem vhodného úhlu dopadu rovinné vlny. Hodnota náklonu byla určena z grafu na obrázku 20, kde je požadovaný náklon vyjádřen rozdílem poloh difrakčních spotů při dopadu rovinné vlny pod úhlem  $\alpha$  a  $-\alpha$ . Z grafu lze vyčíst, že optimální setup měření nastává při posunu spotu o  $2.5\text{mm}$ . To odpovídá dopadu rovinných vln s náklonem  $\alpha = \pm 1.8^\circ$  vzhledem k optické ose. Z teoretického rozboru v kapitole 4.1 a z grafu 20 lze stanovit předpokládanou nejistotu  $\sigma_z = 0.01\%$ .

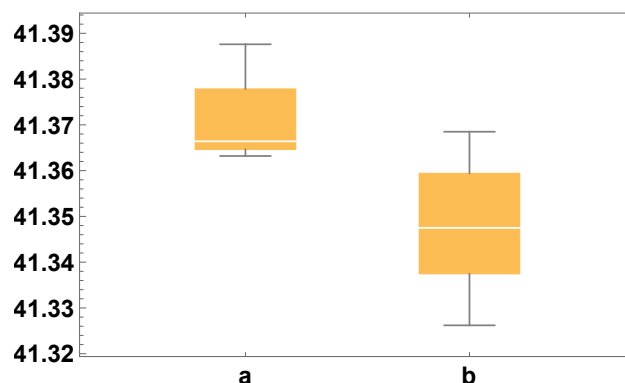
Senzorem se detekovaly dvě rovinné vlny dopadající vzhledem k optické ose mikročoček pod náklony  $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx \alpha$ . Pro výpočet parametru  $z$  bylo využito rovnice (25). Aby bylo možné ověřit předpokládanou relativní nejistotu, byla kalibrace SH senzoru několikrát po sobě zopakována. Z výsledků kalibrace byla určena směrodatná odchylka a ta porovnána s výše teoreticky předpovězenou relativní nejistotou. Celkem bylo provedeno 10 měření, která proběhla ve dvou sadách s časovým odstupem jednoho týdne. Výsledky měření jsou prezentovány pomocí krabicového diagramu na obrázku 21 a v tabulce 4.

Experimentálně získané relativní nejistoty  $\sigma_{z-\text{exp}}$  ze dvou sad měření řádově sedí s teoreticky





Obrázek 20: Graf pro optimalizaci kalibrace s relativní nejistotou na ose  $y$ . Na ose  $x$  je vynesena rozdíl poloh difrakčních spotů při dopadu rovinné vlny pod náklony  $\alpha$  a  $-\alpha$ . Nejnižší relativní nejistota pro SH senzor s rozlišením  $16 \times 19$  mikročoček s roztečí  $T = 0.3 \text{ mm}$  lze dosáhnout při kalibraci rovinnou vlnou dopadající pod úhly přibližně  $\pm 1.8^\circ$ .



Obrázek 21: Estimace parametru z SH senzoru s maticí o  $16 \times 19$  mikročočkách s roztečí  $T = 0.3 \text{ mm}$ . Výsledky dvou sad měření a) a b) s časovým odstupem jednoho týdne. Odhadovaná relativní chyba měření předpovězená teoretickým modelem uvedeným v kapitole 4.1 činí  $\sigma_z = 0.01\%$ . Relativní chyba získaná opakovaným měřením je  $0.024\%$  v sadě a a  $0.038\%$  v sadě měření b.

vypočtenou hodnotou. Zvýšenou relativní nejistotou měření polohy spotu  $\sigma_{\Delta_x}$  lze vyloučit, protože relativní nejistota  $\sigma_{\Delta_x}$  by musela přesahovat  $1 \text{ px}$ . To je však v rozporu s naměřenými daty uvedenými v kapitole 2, kde byl šum v poloze difrakčního spotu odhadnut na  $\sigma_{\Delta_x} = 0.3 \text{ px}$ . Odchytky mohou být způsobeny např. vlivem mimoosových aberací mikročoček. Z případných zdrojů odchytky lze uvažovat i špatné vycentrování matice mikročoček způsobující axiální rotaci popř. náklon v matice v ose  $x$  resp.  $y$ .

	Sada měření <i>a</i>	Sada měření <i>b</i>
$\bar{z}$	41.37[mm]	41.34[mm]
$\sigma_{z-exp}$	0.010[mm]	0.016[mm]
$\sigma_{z-exp}$	0.02[%]	0.04[%]
<i>model</i> – $\sigma_z$	0.01[%]	0.01[%]

Tabulka 4: Výsledky estimace parametru  $z$  SH senzoru s maticí o  $16 \times 19$  mikročočkách s roztečí  $T = 0.3 \text{ mm}$ . Měření byla rozdělena do dvou sad s časovým odstupem jednoho týdne. Relativní chyba měření předpovězená teoretickým modelem uvedeným v kapitole 4.1 činí  $\sigma_z = 0.01\%$ . Relativní chyba získaná opakovaným měřením je  $0.02\%$  v sadě *a* a  $0.04\%$  v sadě měření *b*.

### 4.3 Kalibrace sférickou vlnou

Další možný typ kalibrace SH senzoru je kalibrace sférickou vlnou. Nejjednodušším zdrojem sférické vlny je bodový zdroj, který může být realizován například pomocí výstupu optického vlákna. Generovaná vlna dopadá na SH senzor umístěný ve vzdálenost  $R$  od bodového zdroje (viz obrázek 22). Vlnu dopadající na SH senzor lze v oblastech jednotlivých mikročoček aproximovat rovinnou vlnou s náklonem představující lokální gradient dopadající vlnoplochy. Jak bylo ukázáno v kapitole 1, lokální gradient je úměrný posunu  $\Delta_x$  difrakčního spotu od optické osy dané mikročočky. Jednotlivé lokální gradienty jsou v případě sférické vlny vzájemně svázány. V následujícím bude ukázán model popisující vzájemné polohy difrakčních spotů v závislosti na parametrech SH senzoru a dopadající vlny.

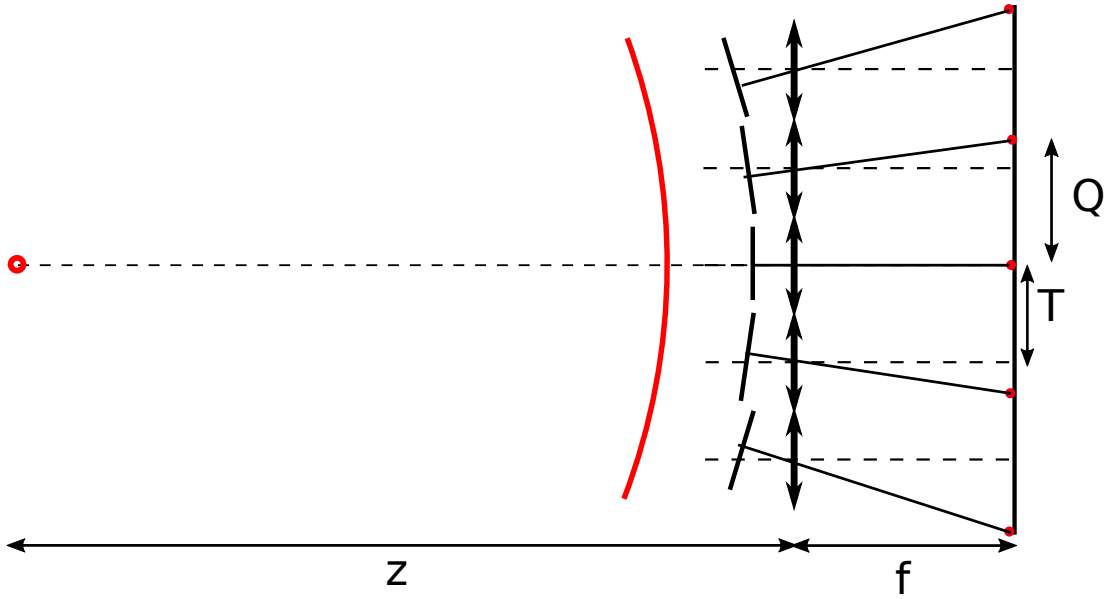
Sférickou vlnu je možné plně popsat dvěma parametry. Těmi jsou poloměr křivosti  $R$  a střed křivosti, reprezentující zdroj vlny. Pro jednoduchost modelu budeme tento zdroj uvažovat na optické ose mikročočky, která bude zároveň představovat střed matice SH senzoru. V takovém případě poloměr křivosti představuje vzdálenost bodového zdroje od matice mikročoček. Schéma dopadu sférické vlny na SH senzor je zobrazeno na obrázku 22. Na obrázku je vidět, že lokální gradient je nulový v oblasti optické osy, na níž je umístěn zdroj. V prostoru sousedících mikročoček je náklon  $\alpha$  uvažované rovinné vlny postupně zvyšován s rostoucí vzdáleností mikročoček od středu matice. Náklon  $\alpha_i$  v oblasti  $i$ -té mikročočky od středu (počínaje  $i = 0$ ) lze vyjádřit jako podíl

$$\alpha_i = \frac{iT}{R}, \quad (30)$$

kde  $T$  je rozteč mikročoček SH senzoru. Jsou-li poloměr křivosti  $R$  a rozteč  $T$  pro dané měření konstantní, pak se dle výrazu (30) náklon zvyšuje ekvidistantně. Lze ukázat (viz [6]), že vzájemný rozestup  $Q$  difrakčních spotů pro dané parametry SH senzoru a sférické vlny je konstantní a roven

$$Q = zT \frac{1}{R} + T. \quad (31)$$

Obdobně jako v kapitole 4.1 bude i zde provedena diskuze nad nejistotami souvisejících s odhadem parametru  $z$ . Cílem následujícího textu je podání teoretického modelu popisujícího relativní nejistoty vystupující při kalibraci SH senzoru sférickou vlnou. Tento model poslouží k optimalizaci experimentálního setupu za účelem minimalizace očekávané chyby měření  $\sigma_z$ .



Obrázek 22: Dopad sférické vlny na SH senzor.

Určení nejistoty  $\sigma_z$  lze provést aplikací zákona o šíření nejistot na parametr  $z$  vyjádřený z rovnice (31) jako  $z = R(Q - T)/T$ . Pro relativní nejistotu tak dostáváme rovnici

$$\frac{\sigma_z}{z} = \sqrt{\left(\frac{1}{Q-T}\right)^2 \sigma_Q^2 + \left(\frac{1}{R}\right)^2 \sigma_R^2}, \quad (32)$$

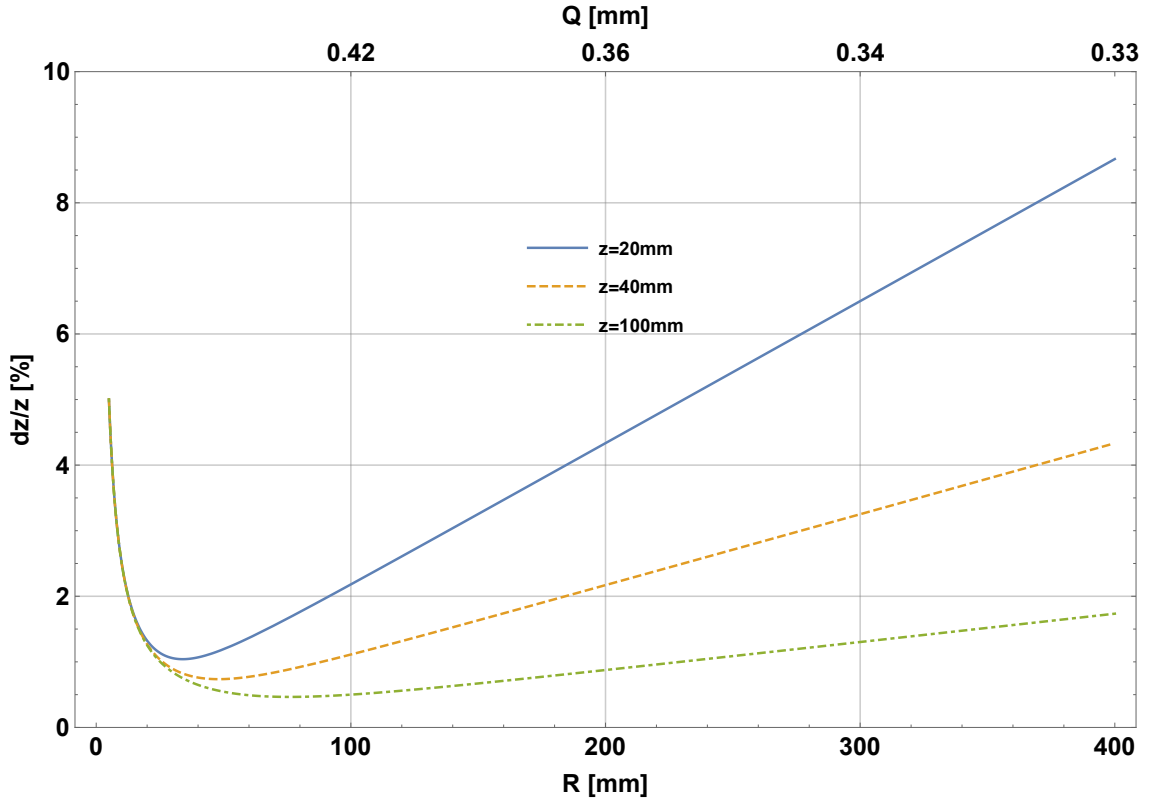
v níž vystupují nejistoty měření rozestupu difrakčních spotů  $\sigma_Q$  a nejistoty měření poloměru křivosti  $\sigma_R$ . Relativní nejistotu lze vyjádřit i v podobě

$$\frac{\sigma_z}{z} = \frac{1}{T} \sqrt{\left(\frac{R}{z} \sigma_Q\right)^2 + \left(\frac{T}{R} \sigma_R\right)^2}. \quad (33)$$

Průběh závislosti relativní nejistoty vyjádřené rovnicí (33) na poloměru křivosti  $R$  použité sférické vlny je zobrazena na obrázku 23. Závislost je v grafu vykreslena pro několik vzdáleností  $z$  matice mikročoček od CCD prvku SH senzoru. Relativní nejistota je zprvu nezávislá na parametru  $z$  a klesá s rostoucím poloměrem křivosti. V této oblasti je dominantní nejistota  $\sigma_R$ . Pro určitou hodnotu  $R$  se kvadráty pod odmocninou v rovnici (33) vyrovnají a nastává lokální minimum. S dalším růstem poloměru křivosti se dominantním členem pod odmocninou stává první kvadrát obsahující nejistotu měření  $\sigma_Q$ . Poloha lokálního minima, která je klíčová pro optimalizaci schématu kalibrace, se s rostoucí vzdáleností  $z$  posouvá směrem doprava. S růstem  $z$  zároveň klesá relativní nejistota odhadu. Hledaný poloměr křivosti, pro nějž minimum nastává, se určí standardním matematickým postupem

$$R_{opt} = \sqrt{\frac{\sigma_R}{\sigma_Q} T z}. \quad (34)$$

Na obrázku 24 je zobrazena závislost minimální hodnoty relativní nejistoty tj. při použití  $R_{opt}$ . Vliv nejistoty nastavení poloměru křivosti  $\sigma_R$  a nejistoty měření vzdálenosti difrakčních spotů  $\sigma_Q$  je zde rovnocenný. Je-li hodnota  $Q$  změřena celkem  $N$  krát pak relativní nejistota  $\sigma_Q$  je snížena faktorem



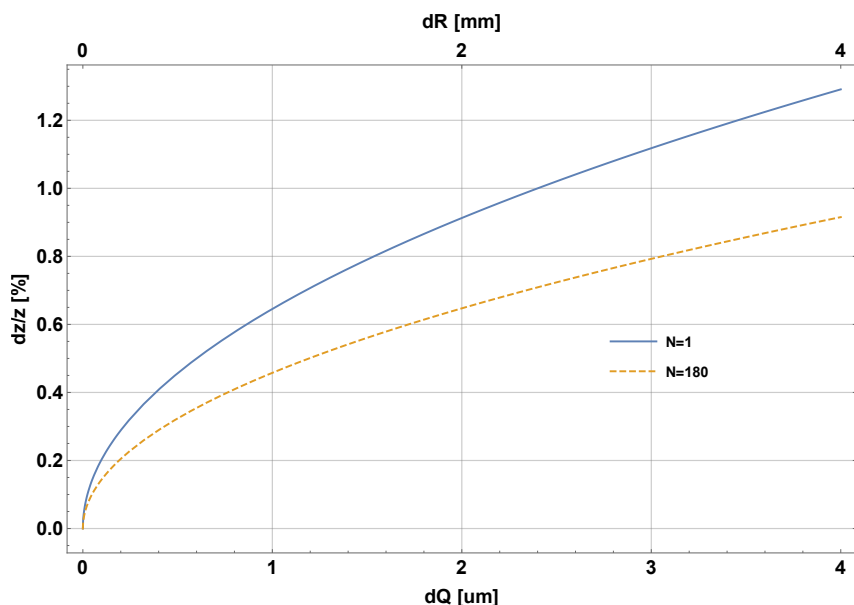
Obrázek 23: Relativní nejistota v závislosti na poloměru křivosti  $R$  sférické vlny dopadající na SH senzor. Závislost je vykreslena pro tři různé hodnoty parametru  $z$  a rozteč  $T = 0.3\text{mm}$ . Do rovnice (33), podle které je závislost vynesena jsou dosazeny nejistoty  $\sigma_Q = 1.3\mu$  a  $\sigma_R = 0.25\text{mm}$ . Paralelně s osou  $R$  je vynesena i osa vyjadřující odpovídající rozestup  $Q$  difrakčních spotů.

$\frac{1}{\sqrt{N}}$ . Oranžová křivka popisuje průběh nejistoty snížené tímto faktorem pro  $N = 180$ .

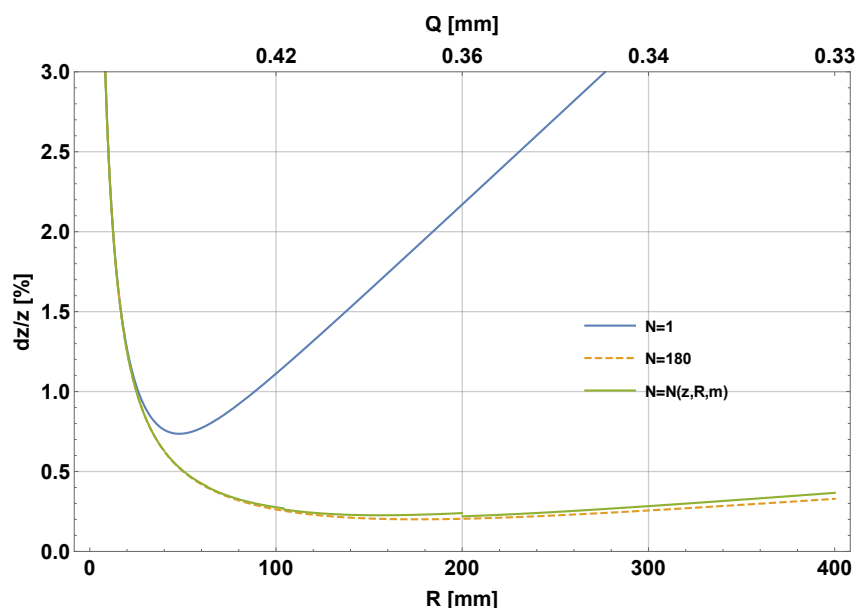
Podobně jako v kapitole o kalibraci rovinnou vlnou, se i zde nabízí otázka vlivu klesajícího počtu detekovaných difrakčních spotů. S klesajícím poloměrem křivosti dopadající sférické vlny se podle rovnice (31) zvětšuje rozestup  $Q$  mezi spoty. S rostoucí  $Q$  se difrakční spoty postupně přesouvají mimo detekční oblast CCD prvku. Graf na obrázku 25 ukazuje, že se pokles počtu detekovaných spotů neprojeví. Jak již bylo výše zmíněno, v levé části grafu je dominantní především nejistota určení poloměru křivosti  $\sigma_R$ , na kterou nemá počet naměřených hodnot  $Q$  vliv. V pravé části dominuje nejistota  $\sigma_Q$ , ale počet  $N$  je zde konstantní, protože se rozestup  $Q$  přibližuje rozteči  $T$ . Proto lze v modelu oprávněně počítat s konstantním faktorem  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  naměřených rozestupů  $Q$ . Relativní nejistota při použití optimálního poloměru křivosti (34) je dána vztahem

$$\frac{\sigma_z}{z} = \frac{1}{T} \sqrt{\frac{2\sigma_R\sigma_Q T}{z\sqrt{N}}}. \quad (35)$$

Cílem diskuze bylo podat model popisující vzájemný vztah mezi parametry senzoru, vstupujícími nejistotami a očekávanou celkovou relativní nejistotou. Rovnice (31) popisuje vztah mezi použitým poloměrem křivosti  $R$  sférické vlny a vzájemným rozdílem poloh  $Q$  difrakčních spotů. Použitím zákona o šíření nejistoty byla z tohoto vztahu získána závislost (33) relativní nejistoty  $\sigma_z$  na parametrech



Obrázek 24: Graf zobrazující průběh minimální relativní nejistoty určené pomocí vztahu (35) v závislosti na nejistotě měření vzdálenosti difrakčních spotů  $\sigma_Q$  resp. nejistoty nastavení poloměru křivosti  $\sigma_R$ . Oranžová (čerchovaná) a modrá (plná) křivka odpovídají nejistotě  $s$  a bez středování přes  $N$  změřených vzdáleností  $Q$ .



Obrázek 25: Závislost relativní nejistoty  $\frac{\sigma_z}{z}$  určené z rovnice 33 s uvážením středování přes  $N$  naměřených hodnot  $Q$ . Nejisto ta je určena pro SH senzor o parametrech  $T = 0.3\text{mm}$ ,  $z = 40\text{mm}$  s maticí o  $10 \times 10$  mikročoček. Závislost je vykreslena pro nejistotu získanou bez středování (modrá plná křivka), se středováním přes  $N = 180$  naměřených hodnot rozestupu  $Q$  a pro středování přes počet  $N = N(R)$  závislí na uvažovaném poloměru křivosti  $R$ .

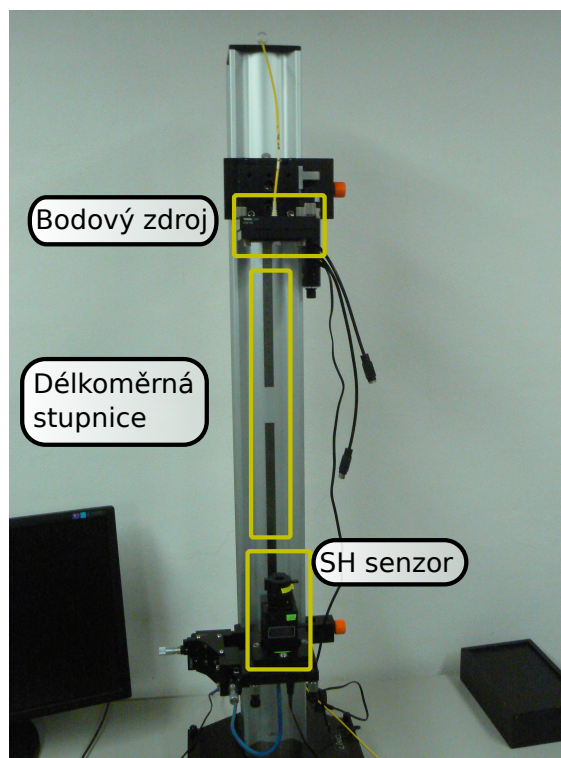
trech SH senzoru a nejistotách určení rozestupu difrakčních spotů a měření poloměru křivosti  $R$ . Na základě této závislosti bylo možné určit optimální poloměr křivosti (34) pro kalibraci daného

SH senzoru. Podobně jako v předchozí kapitole bylo i zde uvažováno středování přes více naměřených hodnot. Bylo ukázáno, že na rozdíl od kalibrace rovinnou vlnou je při kalibraci sférickou vlnou postačující uvažovat počet detekovaných spotů konstantní. Relativní nejistota při použití optimální sférické vlny a středováním přes  $N$  naměřených hodnot  $Q$  je dána vztahem (35).

## 4.4 Experimentální provedení kalibrace sférickou vlnou

V následujícím textu bude popsáno experimentální provedení kalibrace SH senzoru pomocí sférické vlny. Jak již bylo uvedeno pro konečnou justáž přístroje je důležité znát axiální vzdálenost matice mikročoček od snímacího čipu kamery. Cílem měření je určení této vzdálenosti z společně s experimentálním určením relativní nejistoty.

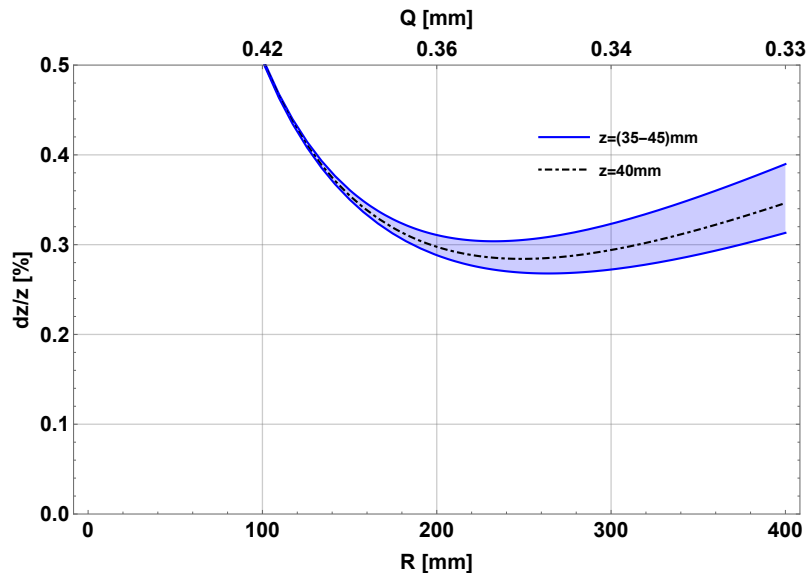
Schéma provedeného měření je totožné se schématem uvedeným v teoretickém úvodu (kapitola 4.3). Z bodového zdroje, který je nahrazen výstupem optického vlákna, vychází sférická vlnoplocha. Ta dopadá na SH senzor umístěný ve vzdálenosti  $R$  od vlákna. Záření vystupující z optického vlákna je generováno laserem pracujícím na vlnové délce  $635\text{nm}$ . Experimentální sestava je zobrazena na obrázku 26.



Obrázek 26: Experimentální uspořádání pro kalibraci sférickou vlnou. Bodový zdroj je nahrazen výstupem optického vlákna umístěného do vzdálenosti  $R$  od matice mikročoček SH senzoru. Optické vlákno je napojeno na laser pracující na vlnové délce  $\lambda = 635\text{nm}$ .

V předchozí kapitole byl navrhnout model kalibrace společně s analýzou vlivu nejistot měření polohy spotu a poloměru křivosti dopadající vlny na celkovou nejistotu estimace vzdálenosti. Obdobně jako v rozboru kalibrace rovinnou vlnou byla provedena optimalizace schématu kalibrace, kladoucí si za cíl minimalizování estimátoru. Při této optimalizaci byl brán v úvahu vliv poloměru křivosti použité sférické vlny a počet měření. Kalibrovaný SH senzor disponuje maticí  $16 \times 19$  mikročoček s roztečí  $T = 0.3\text{mm}$ . Předpokládaná axiální vzdálenost z matice mikročoček od CCD prvku senzoru je přibližně  $40\text{mm}$ . Šum v měření polohy spotu je uvažován  $0.2$  pixelu a nejistota měření vzdálenosti dvou vedlejších spotů je určena jako  $dQ = 1.3\mu\text{m}$ . Předpokládaný průběh relativní nejistoty v závislosti na poloměru křivosti  $R$  pro zvolený senzor je zobrazen na obrázku 27. V grafu je závislost

vykreslena pro interval hodnot  $z$  od 35 do 45mm a nejistota se v tomto intervalu mění řádově v setinách procenta. Optimální poloměr křivosti vychází dle (34) na  $R_{opt} = 247mm$  s očekávanou relativní nejistotou 0.018mm. Pro ověření teoretického modelu byli zvoleny dvě hodnoty poloměru křivosti  $R_1 = 289mm$  a  $R_2 = 97mm$ . Očekávané relativní nejistoty ke zvoleným polůměrům křivosti jsou dle obrázku 27  $\sigma_{1z} = 0.29\%$  a  $\sigma_{2z} = 0.52\%$



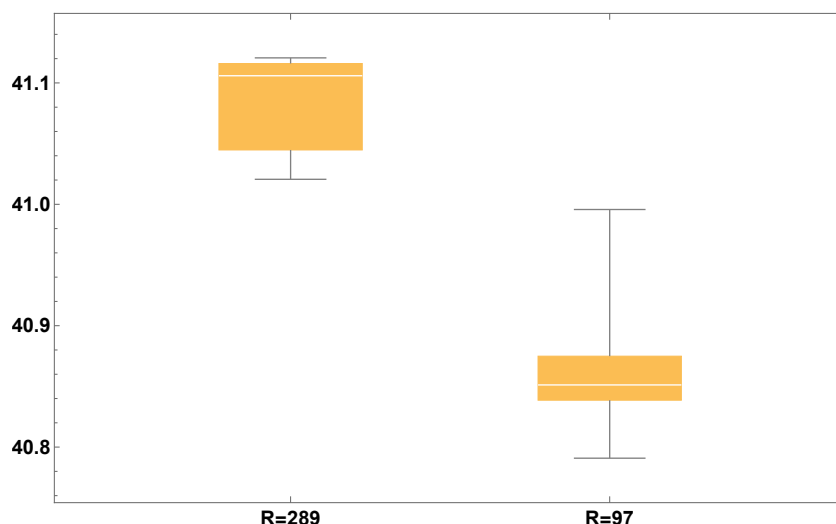
Obrázek 27: Závislost relativní nejistoty  $\frac{\sigma_z}{z}$  s uvážením středování přes  $N = 180$  naměřených hodnot  $Q$ . Nejisto ta je určena pro SH senzor o parametrech  $T = 0.3mm$ ,  $z = 40mm$ . Při výpočtu je uvažována nejistota  $dQ = 1.3\mu m$ .

Pro ověření relativní přesnosti byla kalibrace 10 krát opakována. Výsledky měření jsou vidět v níže uvedeném obrázku 28, kde je prezentován pomocí krabicového diagramu. Z tabulky 5 je vidět, že naměřené relativní nejistoty řádově odpovídají teoreticky předpovězeným hodnotám.

	$R = 289mm$	$R = 97mm$
$\bar{z}[mm]$	41.08	40.86
$\sigma_{z-exp}[mm]$	0.04	0.06
$\sigma_{z-exp}[\%]$	0.09	0.13
$model - \sigma_z[\%]$	0.29	0.52

Tabulka 5: Výsledky estimace parametru axiální vzdálenosti  $z$  matice mikročoček od CCD čipu SH senzoru. Měření byla rozdělena do dvou sad s časovým odstupem jednoho dne. Odhadovaná relativní chyba měření předpovězená teoretickým modelem uvedeným v kapitole 4.3 činí  $\sigma_z = 0.29\%$  resp.  $\sigma_z = 0.52\%$  pro  $R = 97mm$ .





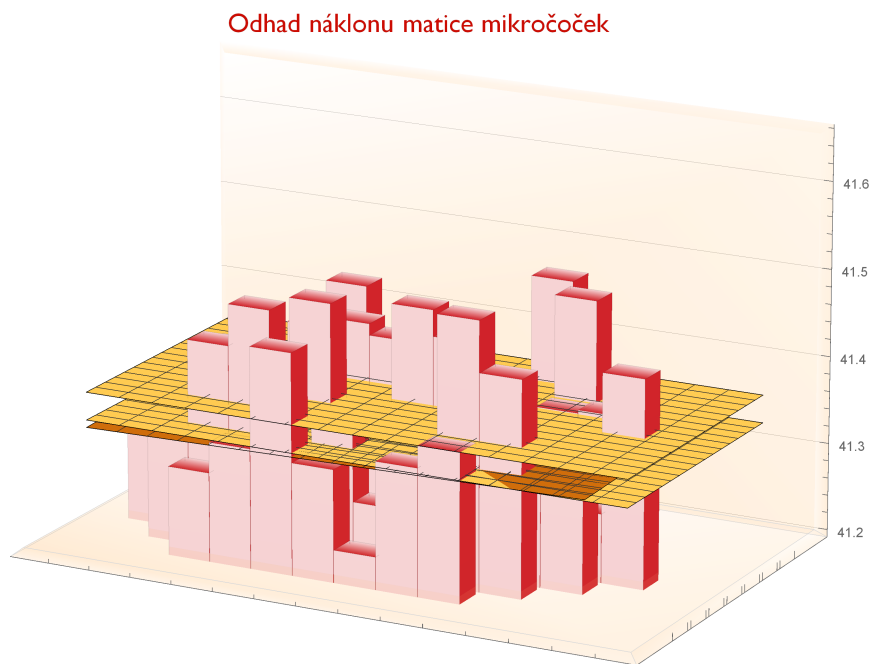
Obrázek 28: Výsledky estimace axiální vzdálenosti z matice mikročoček od CCD prvku SH senzoru. Měření proběhlo opakovaně pro dva poloměry křivosti. Odhadovaná relativní chyba měření předpovězená teoretickým modelem uvedeným v kapitole 4.3 činí  $\sigma_z = 0.29\%$  pro poloměr  $R = 289\text{mm}$  a  $\sigma_z = 0.52\%$  pro  $R = 97\text{mm}$ . Relativní chyba získaná opakovaným měřením je uvedena v tabulce

## 5 Určení náklonu matice mikročoček

Jedním ze z možných zdrojů nejistot při kalibraci SH senzoru uvedených v úvodu kapitoly 4 je chyba vycentrování matice mikročoček, při níž může dojít k azimutální rotaci nebo může k naklonění matice mikročoček ve směru osy  $x$  resp.  $y$ . V rámci kalibrace SH senzoru mohou být stanoveny kalibrační konstanty reprezentující orientaci roviny matice mikročoček vůči detekční rovině CCD chipu. Například v [15] je popsána kalibrace jejíž součástí je určení rotace matice. Cílem této části je pokusit se stanovit odhad náklonu matice mikročoček ve směrech osy  $x$  resp.  $y$ .

Pro estimaci náklonu byla vybrána data pocházející z předcházejících kalibrací rovinnou vlnou. Na rozdíl od postupu při měření axiální vzdálenosti matice mikročoček se v tomto případě bude provádět výpočet vzdálenosti z zvlášť pro jednotlivé mikročočky matice (obrázek 29). Jestli-že je matice mikročoček nakloněna vůči CCD senzoru, lze očekávat, že vzdálenosti z jednotlivých mikročoček budou lineárně růst resp. klesat ve směru náklonu. Soubor estimovaných vzdáleností z je možné fitovat lineární funkci a odhadnout tak náklon matice. Tento postup je uplatněn pro celý jeden soubor provedených kalibrací (viz kapitola 4.2). Zjištěné náklony matice mikročoček ( $\alpha_x, \alpha_y$ ) z jednotlivých měření jsou zprůměrovány. Na obrázku 29 je vyobrazen graf estimovaných vzdáleností jednotlivých mikročoček s odhadnutým náklonem matice mikročoček pro konkrétní měření.

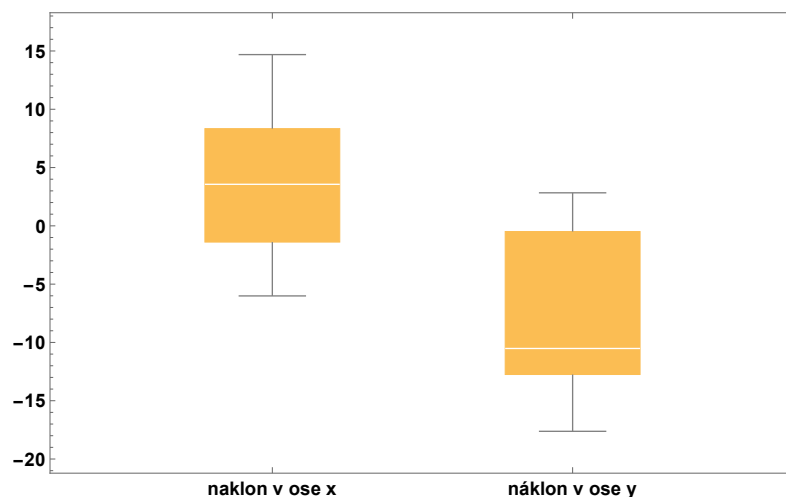
Výsledky měření jsou shrnuty v tabulce 6 a zobrazeny v krabicovém diagramu na obrázku 30. Směrodatná odchylka pro oba úhly  $\alpha_x$  i  $\alpha_y$  je větší jak samotné hodnoty úhlů. Měření tedy neprokaže, že by matice mikročoček byla ve zkoumaném SH senzoru umístěna v náklonu vzhledem k CCD senzoru. To mu nasvědčuje i prezentovaný obrázek 29. Ve kterém se rovina prezentující odhadnutý sklon matice mikročoček drží mezi hranicí  $\pm\sigma_z$ , kde nejistota  $\sigma_z$  byla převzata z výsledků kalibrace.



Obrázek 29: 3D graf znázorňující odhadnuté vzdálenosti jednotlivých mikročoček. Oranžová plocha představuje nabitovaný náklon matice mikročoček. Žluté plochy představují nejistotu průměrné hodnoty  $\bar{z} \pm \sigma_z$ .

	náklon $\alpha_x$	náklon $\alpha_y$
$\bar{\alpha}$	3.8"	-8.2"
$\sigma_\alpha$	7.3"	7.8"

Tabulka 6: Hodnoty získané estimací náklonu matice mikročoček vzhledem k CCD prvku SH Senzoru.



Obrázek 30: Výsledky estimace náklonu matice mikročoček vzhledem k CCD prvku SH senzoru v osách  $x$  a  $y$ .

## 6 Závěr

Tato diplomová práce si klade za cíl představit čtenáři fázově citlivý Shack-Hartmanův (SH) senzor, jeho princip, výhody oproti jiným fázově citlivým sensorům a především postupy jeho kalibrace. V úvodu práce je čtenář ve stručnosti seznámen s historií senzoru, začínající od původní Hartmanovy desky. Čtenáři jsou představeny základní principy fungování SH senzoru. Vysvětleny základní pojmy jako těžiště spotu a způsob vyjádření vlnoplochy. Na jednoduchém příkladu dopadu rovinné vlny na mikročočku je vysvětleno posouvání difrakčních spotů na CCD snímači vlivem sklonu vlny vzhledem k optické ose. Práce dále ukazuje chování difrakčního spotu v závislosti na axiálním posunu matice mikročočky vzhledem k CCD snímači. Tato závislost potvrzuje že při kalibraci SH senzoru není nutné trvat na vysoké přesnosti umístění senzoru do ohniskové roviny mikročoček, ale je nutné znát vzdálenost detekční roviny (CCD resp. CMOS snímač) a matice mikročoček.

Od principů funkčnosti SH senzoru se práce přesouvá k praktickým otázkám důležitých pro použití senzoru při měření. Jsou diskutovány parametry senzoru s důrazem na jejich vzájemné provázání. Práce předkládá návod na vybrání vhodného senzoru pro daný typ měření. Diskutované parametry jsou následně vyčísleny pro vybrané senzory a to na základě experimentálního měření nejistoty detekce polohy těžiště spotu. Ta byla měřena s a bez použití obvyklých metod pro potlačení šumu dat. Výsledky měření jsou nejistoty v rozmezí 0.2 až 0.3px. Pozornost je také věnována diskuzi nad pojmy přesnost a opakovatelnost v souvislosti s SH senzorem, kterou následuje výsledek experimentálního měření přesnosti. V kapitole 4 obsahuje popis kalibrace SH senzoru. Čtenář je nejprve seznámen s pojmem kalibrace poté následuje výčet možných zdrojů chyb při kalibraci SH senzoru. Postupně jsou diskutovány možné přístupy ke kalibraci v souvislosti s SH senzorem. V diplomové práci je zvolen model kalibrace, jehož hlavním cílem je stanovení kalibrační konstanty odpovídající vzdálenosti matice mikročoček od CCD kamery. V následujících podkapitolách je provedeno odvození vztahů pro výpočet této vzdálenosti a analýzu šíření nejistot při použití dvou základních typů vlnoploch připravovaných pro kalibraci SH senzoru tj. rovinné a sférické vlnoplochy. Experimentální výsledky jsou uvedeny v kapitolách 4.2 a 4.4. V obou případech je dosaženo řádové shody s teorií. Poslední kapitola je věnována odhadu náklonu matice mikročoček vzhledem k CCD senzoru. Vzhledem k vysokým naměřeným nejistotám se nedal náklon matice potvrdit.

## Reference

- [1] Bernd Dorband, Henriette Muller, Herbert Gross; HANDBOOK OF OPTICAL SYSTEMS, VOLUME 5, METROLOGY OF OPTICAL COMPONENTS AND SYSTEMS; Published by: John Wiley & Sons, 2012-05-14; ISBN:9783527403813;
- [2] Xiaoming Yin, Liping Zhao, Xiang Li a Zhongping Fang; ONLINE SURFACE MEASUREMENT WITH DIGITAL SHACK–HARTMANN WAVEFRONT SENSOR; International Journal of Nanoscience, 2010, Vol. 9, Num. 3, Pg. 123-133; DOI: 10.1142/S0219581X10006715
- [3] Joseph M Geary; Introduction to Wavefront Sensors; Published by SPIE-The International Society for Optical Engineering, 1995; ISBN 0-8194-1701-7;
- [4] Applied Optics and Optical Engineering, Volume XI. Edited by Robert R. Shannon and James C. Wyant. Published by Academic Press, Inc., a subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1992.
- [5] Goodman, J.W. (1988) Introduction to Fourier Optics. 2nd Edition, McGraw-Hill, New York.
- [6] Jinsheng Yang, Ling Wei, Hongli Chen, Xuejun Rao, Chaghui Rao; ABSOLUTE CALIBRATION OF HARTMANN-SHACK WAVEFRONT SENSOR BY SPHERICAL WAVEFRONTS; Optics Communications 283 (2010) 910-916; doi: 10.1016/j.optcom.2009.11.022;
- [7] ISO 15367-2:2005(E); Lasers and laser-related equipment-Test methods for determination of the shape of a laser beam wavefront-Part 2: Shack Hartmann sensors;
- [8] Mingliang Xia Chao Li, Lifa Hu, Zhaoliang Cao Quanquan Mu, Li Xuan; Shack-Hartmann waverfront sensor with large dynamic range; Journal of Biomedical Optics 15(2), 026009 (March/April 2010); DOI:10.1117/1.3369810;
- [9] J.Vargas, L. González-Fenandez, J. Antonio Quiroga, and T. Belenguier; Calibration of a Shack-Hartmann wavefront sensor as an orthographic camera; Optics letters, Vol. 35, No. 11, June 1, 2010; DOI: 10.1364/OL.35.001762;
- [10] JCGM 200:2012; International vocabulary of metrology - Basic and general concepts and associated terms (VIM); 3rd edition; 2008 version with minor corrections;
- [11] Jay L. Bucher; The metrology handbook;2nd edition; The Measurement Quality Division, ASQ; ISBN 978-0-87389-838-6
- [12] Jay L. Bucher; The Quality Calibration Handbook: Developing and Managing a Calibration Program; ASQ Quality Press, 2007; ISBN–10: 0–87389–704–8
- [13] ChaoLi, Mingliang Xia, Zhaonan Liu, Dayu Li, Li Xuan; OPTIMIZATION FOR HIGH PRECISION SHACK-HARTMANN WAVEFRONT SENSOR; Optics Communications 282 (2009) 4333-4338; doi:10.1016/j.optcom.2009.07.058

- [14] Akondi Vyas, M B Roopashree, B Raghavendra Prasad; *Denoising Shack Hartmann Sensor spot pattern using Zernike Reconstructor*; International Journal of Power Control Signal and Computation(IJPCSC) Vol2. No.2, 2011, 119-123;
- [15] J. Vargas, L. González-Fernandez, J. Antonio Quiroga, and T. Belenguer; CALIBRATION OF A SHACK-HARTMANN WAVEFRONT SENSOR AS AN ORTHOGRAPHIC CAMERA; Optics letters/ Vol. 35, 1762-1764 (2010)