UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Historie čísla

Vedoucí bakalářské práce:
Mgr. Jan Tomeček, Ph.D.
Rok odevzdání: 2011

Vypracovala:
Jana Lakomá
ME, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením pana Mgr. Jana Tomečka Ph.D. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne 20. dubna 2011

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce panu Mgr. Tomečkovi Ph.D., za odborné vedení a pomoc dovést tuto práci ke zdárnému konci. Děkuji také všem, kdo mi byli nápomocni při psaní této práce a poradili mi s výběrem literatury. Také bych ráda poděkovala své rodině a přátelům, že mě po celou dobu studia podporovali.

Obsah

1 Průřez historií čísla **5**

1.1 Pravěk 5
1.2 Starověk 7
1.2.1 Mezopotámie 7
1.2.2 Egypt 9
1.2.3 Řecko 11
1.3 Středověk 16
1.3.1 Evropa ve středověku 16
1.3.2 Zakladatelé symbolické algebry 17
1.3.3 Matematika proměnných veličin 19
1.4 Moderní matematika 20

2 Současný pohled na reálná čísla **21**

2.1 Přirozená čísla 21
2.2 Celá čísla 23
2.3 Racionální čísla 24
2.3.1 Uspořádání množiny $\mathbb{Q}$ 26
2.3.2 Součet a rozdíl v množině $\mathbb{Q}$ 27
2.3.3 Součin a podíl v množině $\mathbb{Q}$ 27
2.4 Reálná čísla 28
2.4.1 Předběžná úvaha 28
2.5 Konstrukce reálných čísel pomocí Dedekindovy teorie řezů 30
2.5.1 Definice řezu 30
2.5.2 Uspořádání množiny $\mathbb{R}$ 35
2.5.3 Součet reálných čísel 39
2.5.4 Součin reálných čísel 41
2.6 Jiný způsob zavedení reálných čísel 44
2.6.1 Předběžné úvahy 45
2.6.2 Fundamentální (Cauchyho) posloupnosti 46
2.6.3 Součet a součin posloupností 47
2.6.4 Ekvivalence na množině fundamentálních posloupností, bloky 50
2.6.5 Uspořádání v $F_{\mathbb{Q}}$ 52
2.7 Dodatek 54
2.7.1 Srovnání alternativních konstrukcí reálných čísel 54
2.7.2 Významná reálná čísla 55

Literatura **61**

Úvod

Předložená práce se zabývá historií čísla, tj. popisuje stručně vývoj, kterým matematika prošla než se dospělo k současnému pojmu reálného čísla. Protože historie čísla je spjata s celkovou historií matematiky, bylo přihlédnuto k širším souvislostem s ostatními obory matematiky.

Práce má dvě hlavní části. První část je věnována historii. Řekneme si jak lidé v různých kulturách počítali, jaké používali číselné soustavy nebo jaké měli písmo. Zmíníme důležitá jména, díla a školy. Druhá část je odborně zaměřena na současný pojem reálného čísla. Zabývá se dvojím pohledem na reálná čísla. Především se zaměříme na konstrukci reálného čísla pomocí Dedekindovy teorie řezů a Cauchyho fundamentálních posloupností. Podrobněji provedeme důkazy konstrukce součtu a součinu reálných čísel pomocí Dedekindových řezů.

Protože teorie reálných čísel úzce souvisí s jinými vědními obory matematiky (teorie čísel, teoretická aritmetika, teorie množin, matematická analýza, atd.), bylo nutno pracovat s celou řadou pojmů, které v této práci nejsou definovány (ordinální čísla, kardinální čísla, algebraické struktury, teorie posloupností a řad, aj.). Zahrnutím definic těchto pojmů a příslušných matematických vět do textu, by se práce neúměrně rozrostla. Proto předpokládáme znalost těchto pojmů, případně používáme odkazů na příslušnou literaturu, jejíž seznam je v závěru práce uveden.

1. Průřez historií čísla

1.1. Pravěk

Jaké myšlenkové pochody měli pravěcí lidé můžeme jen odhadovat. Vzhledem k tomu, že neuměli psát, nedochovaly se o jejich myšlenkách ani jejich osudech žádné písemné záznamy. Přesto můžeme předpokládat, že se zabývali něčím abstraktnějším, co se nedalo ulovit, sebrat ani vidět. Byly to náboženské, kulturní, kmenové aj. zvyky, ale také zárodky matematického myšlení. Lidé si dlouho neuvědomovali, že myslí právě „matematicky”, nicméně pokusy měřit nebo zaznamenat množství vznikaly už v kulturách hodně primitivních.

Z období pravěku se dochovalo jen málo hmotných památek. Za nejstarší uměle vyrobené předměty spojené s počítáním jsou považovány vyřezávané kosti, jejichž nálezy se datují až do doby 35000 let př.n.l. Pravděpodobně alespoň v některých případech byly používány jako tzv. lunární kalendáře. Každý zářez vyjadřoval jeden východ měsíce. Podobné příklady počítání pomocí jednoznačného přiřazení jsou známy z období některých prvobytně pospolných společností a k dalším nálezům stále dochází. V roce 1936 našel Karel Absolon u Dolních Věstonic na Jižní Moravě asi 18 cm lýtkovou kost mladého vlka. Její stáří se odhaduje na 25 až 28 tisíc let. Kost sama o sobě by nebyla nic zvláštního. Tahle je výjimečná tím, že do ní byla vyryta řada příčných zářezů, které se dají rozdělit do dvou skupin odděleny od sebe dvojicí delších čar. V první skupině jich je 20, ve druhé 25. Jediné čeho si můžeme všimnout je, že obě skupiny jsou násobky pěti.

Z období 9 až 6,5 tisíc let před naším letopočtem, byla v roce 1960 v nalezišti u osady Išango na břehu jezera Zaire, nalezena kost paviána s hlubokými zářezy. Tyto zářezy byly organizovány mnohem složitěji a tvořily skupiny oddělené mezerami. Je zajímavé, že se zde v hojném počtu objevují prvočísla[1]. Dá se něco takového předpokládat někdy před deseti tisíci lety? Mohly se prvočísla už tehdy pravěkým lidem hodit? Bylo potvrzeno, že tyto zářezy byly vytvořeny 39 různými nástroji. Jestli to byly postupné záznamy nebo si jen kontrolovali kvalitu

[1]Prvočísla představují množství, které už nelze rozdělit. Pro úplnost to jsou přirozená čísla dělitelná jenom jednotkou nebo sama sebou.

pazourkových břitů se už nedovíme.

Nepochybně užívali pravěcí lidé k vyjádření určitého množství i jiných předmětů než kostí; jako počítadla mohly sloužit i zářezy do dřeva, oblázky, škeble nebo plody zemědělské úrody, které se nám však z pochopitelných důvodů nedochovaly. Soubor takovýchto předmětů (nebo zářezů) sice vyjadřuje množství, ale neříká nic o druhu počítaných položek a také jej nelze ve většině případů použít pro uchování informace na delší dobu.

Během 70. a 80. let 20. století vypracovala antropoložka Denise Schmandtová - Besseratová z Texaské univerzity v Austinu podrobnou studii hliněných artefaktů nalezených při archeologických vykopávkách na různých místech Středního východu. Kromě obvyklých hliněných nádob, cihel a sošek se všude nacházely malé, pečlivě vytvarované hliněné předměty zhruba centimetrové velikosti: koule, disky, kužely, šestihrany, válce, trojúhelníky, obdélníky aj. Nejstarší pocházejí podle odhadu asi z 8. tisíciletí př.n.l., tedy z doby, kdy se lidé začali věnovat zemědělství a potřebovali plánovat sklizně a skladovat úrodu.

Vznikla potřeba vyměřovat pole a složitější stavby, museli mít představu o vzdálenostech a směrech. Zprvu geometrii moc nepotřebovali. Pole mělo takový tvar, aby se dalo dobře obdělat, stavby byly stavěny bez plánů a vyměřování, tvar byl přizpůsoben vlastnosti stavebního materiálu. S postupujícím vývojem narůstal počet zemědělských osad a bylo nutné postupovat při stavbách přesněji a plánovitěji. Zejména při stavbě zavlažovacích kanálů a terénních úpravách. Vznikaly osady tak velké, že se jim dalo říkat města, budovám chrámy nebo paláce, a v té době končil pravěk a začínal starověk. Z tohoto období jsou především známé megalitické stavby. Typickým příkladem je Stonehenge - v Anglii, postupně vztyčená mezi lety 1 900 a 1 400 před naším letopočtem.

Jestli pravěcí lidé prováděli elementární početní operace se dnes už můžeme jenom dohadovat. Možná čas od času spojili dvě hromádky dřívek a dostali zase hromádku dřívek. Také je pravděpodobné, že uměli porovnávat, která ze dvou hromádek je větší nebo která ze dvou řad zářezů je delší.

1.2. Starověk

1.2.1. Mezopotámie

První písemné doklady o matematice můžeme najít v povodí řek Eufrat a Tigris, na území dnešního Iráku. V této oblasti se utvářely první městské civilizace. Teplé podnebí a úrodná půda zde podpořily vznik zemědělství. Byly budovány závlahové systémy a k jejich stavbě a řízení vznikaly potřebné organizace a instituce. S tím bylo spojeno vybírání naturálních daní a budování skladišť na úrodu. To se neobešlo bez vyměřování a počítání.

Do roku 6000 př.n.l. se rozšířilo používání hliněných předmětů - jakých si „žetonů", které sloužily k vyjádření určitého množství, k uzavírání smluv, k záznamům o vlastnictví, k plánování a také - díky své směnné hodnotě - k výměnnému obchodu. Vzhled žetonů se v podstatě nezměnil až do roku 3000 př.n.l., kdy podstatně složitější sociální struktura sumerské společnosti - charakterizovaná růstem měst, vznikem náboženských institucí a vývojem organizované vlády - vedla k vypracování mnohem propracovanějších forem těchto žetonů. Kromě rozmanitých tvarů těchto žetonů byly na nich vyrývány určité značky. V zemědělství se však pro účetní záznamy stále používaly původní jednoduché žetony (ty složitější pravděpodobně označovaly druh vyráběných předmětů, např. tkaniny, výrobky z kovu, nádoby s olejem apod.). Jednoduché žetony vkládali do hliněných nádob a aby je nemuseli stále „přepočítávat", začali na povrchu nádob zaznamenávat kolik a jakých žetonů v nádobách je. Až po několika staletích si lidé uvědomili, že samotné žetony jsou tam nadbytečné, protože počet je již uveden na povrchu nádob.

A tak během následujících generací žetony zmizely úplně. Nakonec se začaly používat hliněné tabulky s vyrytými symboly. Sumerští účetní tedy nahradili fyzická počítadla psanými číslicemi. Přechod od fyzických prostředků k abstraktním symbolům můžeme považovat za skutečný pokrok v poznání.

Se zaváděním symbolů úzce souvisí užívání prvního písma, které se datuje kolem roku 3300 př.n.l.. V Uru, Uruku a Kiši se užívaly tzv. piktografické znaky, které byly vyrývány do vlhké hlíny. Mezi nejstaršími zápisy byly i znaky pro čísla. Z piktografických znaků se vytvořilo *klínové písmo*, které se vytlačovalo seříznutým stéblem rákosu.

Vedle Sumerů v počítání prošlapávali dosud neznámou cestu i Asyřané a Babyloňané. Sčítání a odčítání zvládali poměrně zručně, a tyto operace prováděli zpaměti nebo pomocí jednoduchých početních postupů. Pro početní úkony, které nezvládali zpaměti, používali tabulky. Přitom usilovali o přehlednost, a proto se omezili na co nejmenší počet tabulek. Při počítání zpaměti se často používalo prstů na rukou (i nohou). To vedlo postupně k vyjadřování čísel pomocí určitého základu, který též pomáhal při vytváření větších čísel. Nejprve to byl základ 5, potom 10 i 20 (počet prstů na jedné ruce, na dvou a součet prstů na rukou i nohou). Vznikala primitivní aritmetika. Např. čtrnáct se vyjadřovalo jako $10+4$, ale také $15-1$. Operace násobení začalo vznikat tehdy, když se číslo 20 začalo vyjadřovat jako $10+10$, tj. $2 \cdot 10$. Operace zdvojnásobování se používalo po tisíciletí zvláště v Egyptě a Indii. Začátky dělení pak můžeme sledovat jako „polovina těla“ (rozdělení prstů ruce-nohy). Nelze však hovořit o vytváření zlomků. Ty se začaly užívat mnohem později a skoro ve všech případech to byla $\frac{1}{2}$ (výjiměčně se vyskytly též $\frac{1}{3}$ nebo $\frac{1}{4}$).

Bylo také třeba měřit délky a objemy různých předmětů. Také zde posloužilo k odvození lidské tělo a jeho části (odtud byly odvozeny i názvy jednotek, které přetrvávaly dlouhou dobu např. palce, stopy, hrsti, lokty, sáhy apod.).

Měření délek a objemů souviselo úzce s rozvojem geometrických představ. Začaly se tak vytvářet první geometrické pojmy spojené s lidskou činností.[2] Již u neolitického člověka existovalo živé cítění pro geometrickou ornamentiku (pálení a zdobení hrnčířských výrobků, splétání rohoží, proplétání košů apod.). Rozvoj geometrických představ úzce souvisel se zdokonalováním početních praktik a ovlivňoval je. Mimo to ještě jeden obor lidské činnosti přispíval ke zdokonalování matematických dovedností souvisejících s praxí. Byla to astronomie. Již u primitivních kmenů se setkáváme s určitým dělením času spojeným s počítá-

[2] Pravděpodobně první představy geometrických útvarů získal člověk pozorováním oblohy. Slunce a měsíc inspirovaly člověka k „sestrojování“ kruhu a snad to byl první geometrický obrazec, který se člověk naučil zobrazovat.

ním dnů, s pohybem slunce, měsíce a hvězd. Užívání lunárního kalendáře pochází z pradávného období lidské historie, kdy se začaly spojovat vegetační změny s periodickými změnami měsíce. Primitivní národy také pozorovaly slunovraty a východy souhvězdí při stmívání. Z astronomie také pramenily některé znalosti o vlastnostech koule, kruhu, úhlech a s tím spojené výpočty a měření.

1.2.2. Egypt

Matematika vznikala jako praktická věda, která měla usnadnit řízení sklizní, organizaci veřejných staveb nebo také vybírání daní. Egyptská matematika se vyvíjela v závislosti na sezónních záplavách Nilu. Díky tomu byla tato oblast velmi úrodná a bylo nutné mít fungující administrativu, která souvisela s evidencí a vybíráním daní a každoročním vyměřováním políček. Budovaly se zde hráze, zpevňovaly břehy a zakládaly vodní nádrže. Bez počítání a měření by se neobešli. Geometrie byla zatím řazena do stavitelství. Vznikala specializovaná povolání jako umělci, válečníci, obchodníci, kněží. Kněží zaujímali významné postavení jako nositelé vědeckých poznatků. Používali hieroglyfické písmo. Slavnostní hieroglyfické nápisy byly tesány do kamene a pro běžnou potřebu jim sloužil papyrus nebo levnější materiály - střepy a kameny, na které se psalo rákosovým stéblem.

Znalosti o egyptské matematice čerpáme ze dvou papyrů. Oba jsou zhruba stejně staré, vznikly kolem roku 1850 př.n.l. První se nazývá *Rhindův papyrus*, který obsahuje 87 matematických úloh. Jeho autorem je Ahmes a objeven byl angličanem Rhindem v roce 1858. Nyní je uložen v britském státním muzeu v Londýně[3]. Druhý papyrus tzv. *Moskevský* byl objevený rusem Goleniščevem v roce 1893[4].

Z těchto papyrů se dovídáme o egyptské matematice, která zahrnovala aritmetiku převážně aditivního charakteru. Např. násobení bylo převáděno na opakování sčítání dvojnásobků čísel podle následujícího příkladu.

[3] Nezachoval se v původní verzi, opis je asi o dvě století mladší, tedy z roku kolem 1650 př.n.l. Rukopisu se častěji říká Ahmesův. Je to svitek dlouhý asi 6 metrů a široký 35 cm.

[4] Tento papyrus daroval ruský sběratel v roce 1912 moskevskému Muzeu umění. Je psaný v hieratickém písmu s přepisy do hieroglyfů.

Součin $13 \cdot 11 = 143$ byl počítán takto:

$$\begin{array}{cc} *1 & 11 \\ 2 & 22 \\ *4 & 44 \\ *8 & 88. \end{array}$$

V levém sloupci po sečtení čísel s hvězdičkou dostaneme číslo 13 a výsledky v pravém sloupci v řádcích označovaných hvězdičkou se také sečtou a obdržíme výsledek součinu.

Mnoho řešených problémů bylo velmi jednoduchých a nepřekračovalo řešení lineární rovnice o jedné neznámé (tím se neříká, že rovnici řešili v dnešním slova smyslu pomocí ekvivalentních úprav). Problémy byly formulovány slovně např. takto: „ Přičti k veličině její $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ a $\frac{3}{5}$, obdržíš 83. Jaká je to veličina? “

Pro egyptskou matematiku bylo typickým znakem počítání se zlomky. Všechny zlomky se převáděly na součty tzv. *kmenových zlomků*, tj. zlomků s čitatelem rovným 1. Toto převádění usnadňovaly tabulky, které uváděly rozklady zlomků tvaru $\frac{2}{n}$. Ahmesův papyrus obsahuje tabulku, která udává pro všechna lichá n od 5 do 331 rozklady zlomku $\frac{2}{n}$, na kmenové zlomky, např.

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}\ ;\ \frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}.$$

Praktické využití výpočtů dokládají úlohy zabývající se obsahem zrna v chlebu, krmením dobytka a skladováním obilí. Tento způsob počítání se zlomky však vtiskl egyptské matematice komplikovaný a těžkopádný ráz, který trvale zabránil jejímu dalšímu zdokonalení.

Egypťané používali desítkovou číselnou soustavu, která ale nebyla poziční. Číslice proto bylo možné zpřeházet, aniž by se změnila hodnota čísla. Znaků pro hieroglyfické číslovky bylo 7 a odpovídají našim mocninám deseti, od čísla $1 = 10^0$ až po milion 10^6. Čísla mezi nimi se vyjadřovala opakováním, například 80 se zapsalo osminásobným opakováním symbolu pro číslo 10 nebo např. číslo 56 bylo možné zapsat pětkrát po sobě symbolem pro číslo 10 a šestkrát symbolem pro číslo 1.

Narozdíl od Egypťanů číselná soustava Sumerů a Babyloňanů vypadala složitěji a byla i poziční. Její základ byl kombinovaný, což znamená, že do hodnoty 59 byla soustava desítková a pak přecházela na *šedesátkovou*, kde byly jednotlivé pozice vyhrazeny číslům $60^1 = 60, 60^2 = 3600, 60^3 = 216000$... Výhodou bylo, že číslo 60 je dělitelné mnoha čísly $(2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 30)$. *Poziční nulu* jako první užívali v Mezopotámii. Mysleli si, že vynechaný řád poznají ze souvislostí a nakonec vymysleli skutečnou poziční nulu. Její grafická podoba se liší v závislosti na době a teritoriu - užívali pro ni buď dvojitý šikmý klín nebo dva šikmé klíny.

Protože tesání do kamene byla namáhavá práce, používali Babyloňané hliněných destiček a egyptští písaři pro praktické potřeby vyvinuli rukopisnou verzi hieroglyfů pro psaní na papyrus. Skládá se z teček, rovných i obloukových čárek.

Právě záznamy z babylónských hliněných destiček a egyptských papyrusů jsou první dochovalé početní záznamy, které shrnují doposud objevené poznatky aritmetického, geometrického a algebraického charakteru i řadu početních pravidel. Tato pravidla však mají charakter pouhých receptů a návodů jak postupovat a nejsou podložena zatím žádnými důkazy. Také neexistovala ani žádná obecná teorie, z níž by se tyto poznatky daly odvodit. Teprve Řekové z těchto počátečních vědomostí dokázali vytvořit, i v souvislosti s úvahami filozofickými, z matematiky a zejména z geometrie poměrně dokonalý vědecký systém.

1.2.3. Řecko

Období existence antického Řecka trvalo asi dva tisíce let, zhruba od 18. nebo 17. století před naším letopočtem. V této době se předpokládá příchod *Achájů*, po nich přišli v 15. století před naším letopočtem *Jónové* a ve 12. století *Dórové*. Dále se rozlišuje období *mykénské* zhruba do roku 1100 př.n.l., doba úpadku po dórském vpádu se nazývá *homérskou dobou* (1100 až 800 př.n.l.), *archaickou dobu* (800-500 př.n.l.), která je spojována s rozkvětem antické kultury, *klasickou dobu*, která vyvrcholila řecko - perskými válkami a doznívala až do vlády

Alexandra Makedonského a do doby *helénistické*. Na konci této éry přešlo Řecko pod nadvládu Římanů.

Matematické poznatky získané lidstvem během předchozího období se dostávaly z Egypta a zemí Středního východu do Řecka, kde byly dále rozšiřovány. Řekové začínali uvažovat mnohem racionálněji o podstatě návodů zapisovaných na papyrech a o obecné platnosti některých z nich začínali pochybovat. Tyto pochybnosti je přivedly k myšlence *důkazu*, prostřednictvím něhož můžeme určit, která tvrzení jsou nebo nejsou pravdivá. První, kdo vyslovil myšlenku, že matematické tvzení lze určitým metodickým postupem dokázat, byl **Thales z Miletu**. Byli to tedy právě Řekové, kteří postavili matematiku na vědecký základ a trvalo to téměř 2000 let, než studium struktury logického uvažování udělalo další významný pokrok (predikátová logika).

Řekové zavedli a postupně obměňovali číselnou soustavu, která jako u Eypťanů nebyla poziční. V *archaické době* používali svoji vlastní *akrofonickou soustavu číslic*, ve které byla čísla označena písmenem, jímž začínalo jejich čtení. Později byla nahrazena *alfabetickou soustavou*. Symbolem I se značilo číslo 1, symbol Γ byl určen pro číslo 5 (Pente), Δ pro číslo 10 (Deka), písmenem H bylo zastoupeno číslo 100 (Hekaton), X pro číslo 1000 (Chilioi) a znak M určovalo číslo 10000 (Myrion). Čísla, která ležela „mezi“ např. 4 nebo 8 se doplnila opakováním. Například číslo 4 se zapsalo čtyrnásobným opakováním znaku pro číslo 1 - IIII, 8 se zapsalo jako ΓIII. Později Řekové doplnili znaky pro $50, 500, 5000$ a 50000. Jak se vyvýjely písmena v alfabetě, dostávaly i číselné významy. Pro $1, 2, 3, 4, 5$ byly symboly $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, nebo také A, B, Γ, Δ,E. Pro čísla $6, 7$ a 8 měla stará řečtina tři písmena, která se dnes už neužívají (digamma, koppa a san). Písmeno pro 9 bylo θ nebo také Θ. Další písmena po Θ vyjadřovala násobky deseti, např. $10, 20, 30, ..., 80$ se zapisovaly $\iota, \kappa, \lambda \dots \pi$ nebo také I, K, $\Lambda, ..., \Pi$. Pro číslo 90 bylo užívané písmeno koppa. Další písmena byla pro násobky sta, číslo 100 se zapsalo jako ρ nebo P, číslo 200 jako o nebo Σ, následně $300, 400, 500, ..., 800$ se zapsalo jako $\tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \varpi$ případně T, Y, Φ, X, Ψ, Ω a pro 900 již neexistující písmeno san. Další čísla „mezi“ se zapisovala sčítací metodou, například 13 se zapsalo jako $\iota\gamma$ a 333 bylo $\mathrm{T\Lambda\Gamma}$. Soustava nebyla poziční a nepotřebovala tedy ani poziční nulu. Řekové neznali ani „množstevní nulu“ - která vyjadřovala „nic“. Pro zapsání velkých čísel využívali místa kolem číslic, a začali psát do levých rohů nahoru malé písmeno jota, ι. Existoval i druhý způsob, kde se jota psala vlevo dolů. Desetitisíce se zapisovaly pomocí M a cifry se zapisovaly nahoru.

Tato soustava byla velice složitá a matematici se ji snažili zjednodušit, ale ještě více to celou soustavu komplikovalo. Při snaze o zjednodušení začali řečtí matematici početní úlohy řešit geometricky. Tehdy geometrie začala patřit do matematiky. Geometrie jim poskytla vizuální představu o tom, co chtěli počítat. I když konstrukce byly složité, počítání většinou jednoduché a rychlé. Geometrické počítání mělo i své nevýhody. Geometrické konstrukce byly závislé na přesnosti rysování, z dlouhodobějšího hlediska to byla hlavní nevýhoda. Číslo byla úsečka, součin dvou čísel obdelník (plocha), součin tří čísel byl kvádr (objem), při dalším násobení se ale ztrácela opora v realitě. Nebyla zde potřeba záporných čísel, protože zápornou úsečku nebo zápornou plochu nikdo z Řeků nepředpokládal. Další nevýhodou při výpočtech bylo, že jeden vztah se zapsal z různých mocnin. Třeba vztah, který porovnává úsečku a čtverec, který dnes zapisujeme rovností

$$x^2 - 4 = x + 2,$$

chápali jako nedorozumění. Tento výraz upravili do tvaru

$$x \cdot (x - 1) = 6,$$

který už byl obdélník s nějakým poměrem délek stran a k tomu příslušným obsahem.

Řekové, po vzoru Egypťanů, používali na rýsování papyrus, ale byl drahý, takže sloužil k významnějším zápisům, které chtěli nějakou dobu uchovat. Pouhé náčrtky kreslili do písku, který měli na dvoře svého domu, nebo častěji v míse zaplněné vlhkým pískem, kde se snadno náčrtky daly smazat. Možná právě skutečnost, že přesnost rýsování nebyla příliš velká, nutila matematiky logicky dokázat, že při ideálním rýsování výsledek přesný a správný být musel. Nejspíš to udělalo z matematiky onu logickou, přesnou a spolehlivou vědu, kterou známe dnes.

Řecká matematika je první, ve které známe jména jejich tvůrců. Matematika se začala rozvíjet ruku v ruce s filozofií. Řecké filozofické školy jsou děleny na *předsokratovské*, ty *po Sokratovi* a *aristotelské*. Na začátcích filozofie narazíme na jména učenců z Milétské školy : již shora jmenovaný **Thales z Milétu** (narozen mezi roky 620 a 625, zemřel 546 př.n.l.) a jeho žáci *Anaximander* a *Anaximenes*.

Thales byl jmenován mezi „sedm mudrců“, což bylo pojmenování pro sedm nejmoudřejších antických Řeků, mezi které se zařadil výrokem: „ Poznej sám sebe“. Měli pro něj označení „otec vědy“. V geometrii se zasloužil o *Thaletovu větu*, podle které jsou všechny úhly nad průměrem pravé a všechny úhly nad každou tětivou kruhu stejně velké. Spočítal podle délky stínu výšku pyramid, ale také dráhu Slunce, dobu rovnodennosti a předpověděl první doložené zatmění Slunce. Po malých úpravách používáme dodnes kalendář, který sestavil s 365 dny. Thales spolu se svými žáky zkoumal, která látka tvoří podstatu světa.

Dalším, kdo se pokoušel poznat podstatu, která tvoří základ světa, byl ***Pythagoras ze Samu*** (přibližně 590 - 500 př.n.l.). Používal k tomu teorii čísel a vztahů mezi nimi. Právě Pythagoras jako první začal používat slova *filozof* a *filozofie*. Založil školu „pythagorejců“, která se z velké části zabývala matematikou. Mezi sebe přijímali i ženy[5], které brali jako rovnocenné partnerky.

Mezi nejvýznamnější objevy patří Pythagorova věta. V geometrii začali studovat tělesa. Kromě známých tří pravidelných mnohostěnů (čtyřstěn, krychle a osmistěn) objevili poslední dva pravidelné mnohostěny - dvanáctistěn a dvacetistěn. Propracovali teorii čísel a našli výsledky, které dodnes tvoří její základ. Zajímali se o přirozená čísla, při výzkumu dělitelnosti narazili na prvočísla, udělali přehled v průměrech (aritmetickém, geometrickém, harmonickém) a v úměrách. Byli to právě *pythagorejci*, kdo povýšil důkaz (logický, přesný a úplný), na základní kámen matematiky.

V roce 387 založil Platón[6] (427 - 347) slavnou Akademii, která byla vlastně

[5]Bylo jich mezi nimi 17 a Theano, která byla manželka Pythagorase, patří dodnes mezi nejvýznamnější matematičky historie.

[6]Platón byl Sokratův žák, jeho zásluhou je vypracování přesného způsobu matematického myšlení, byly zavedeny definice a vypracován systematický postup pro řešení konstruktivních úloh. O cílech a hodnotě metematiky mluví Platón zejména ve spise „O státě“. Sám se zabýval pravidelnými mnohostěny a dělitelností čísel.

první univerzitou v dějinách. Ve spojení s touto Akademií jmenujme alespoň tři velké matematiky tohoto období: Archytas, Theaitetos a Eudoxos[7]. Nejznámějším byl **Eudoxos**, který jako první přišel s teorií proporcí. Eudoxos navrhl, aby se vzájemné proporce dvou délek x a y popsaly tak, že nalezneme nějaké třetí číslo (délku) t a celá čísla m a n taková, že (pomocí dnešního způsobu zápisu - on to všechno vyjadřoval slovy a větami) dostaneme rovnice $x = mt$ a $y = nt$. Čísla m a n pak vyjadřují proporci mezi x a y. Eudoxos ale zjistil, že na nějaké dvojice úseček jeho metoda nefunguje - např. na čísla 1 a $\sqrt{2}$.

S podobným problémem se setkali Pythagorejci. Při aplikaci pythagorovy věty přišli do styku s čísly, která dnes nazýváme iracionální (např. při výpočtu délky přepony rovnoramenného trojúhelníka a odvěsnách délky 1 dospěli k $\sqrt{2}$). Protože nesprávně předpokládali, že každá délka je racionální, nedovedli si vysvětlit, proč nedojdou při počítání některých odmocnin ke konečnému výsledku. Po pracném hledání, počítání a filozofování prohlásili každé takové číslo za „nevyslovitelné“ a nazvali je „alogos“.[8] Bohužel tento objev iracionálních čísel nepodnítil řeckou matematiku k hledání bohatšího číselného systému, obsahujícího i jiná než racionální čísla vyjádřená ve tvaru zlomku. Hippasův objev byl chápán jako diskreditace početního systému. Přesto však nelze pominout ohromný přínos antického Řecka pro rozvoj matematiky, filozofie a logiky, který je spojen se slavnými jmény - ***Aristoteles ze Stageiry*** (384 - 322 př.n.l.). Byl vychovatelem Alexandra Makedonského. Jeho spisy a poznámky byly shrnuty v knize Organon(Nástroj), která se nadlouho stala základním textem pro studium logiky. O metodách důkazu a usuzování se můžeme dočíst v jeho nejslavnějším spise - *Metafyzice*. Založil vlastní školu Lykeion, kde vyučoval filozofii. Je považován za největšího filozofa starověku.

V období, kdy se Alexandrie stala centrem vzdělanosti, **Ptolemaios**[9] založil múseion - sídlo múz, v podstatě to byla druhá univerzita na světě. Součástí byla i

[7] Eudoxos se prý matematiku učil v řecké kolonii Tarentum v Itálii, právě od Archytase. Naučil se od něj teorii čísel nebo také číselné zákonitosti v hudbě.

[8] Objev iracionálních čísel je připisován mladému matematikovi Hippasovi, který byl podle pověsti svržen z lodi a utopen, aby jeho objev nepronikl na veřejnost.

[9] Alexandrův generál. V roce 305 př.n.l. přijal titul faraona.

slavná *alexandrijská knihovna*. Vedoucím matematické části knihovny byl ***Eukleides z Alexandrie*** (325 - 265 př.n.l.). Do matematiky přispěl tím, že dokázal, že prvočísel je nekonečně mnoho a také tím, že $\sqrt{2}$ nemůže být racionální. Jeho nejslavnějším matematickým dílem jsou *Základy* latinský překlad - *Principia*. Je to soubor 13 knih, z toho v prvních šesti knihách se zabýval problematikou rovinné geometrie - trojúhelníků, čtverců, obdélníků, rovnoběžek, kružnic. Následující tři knihy věnoval teorii čísel a současně obsahují i algoritmus pro výpočet největšího společného dělitele dvou čísel. V desáté knize jako první zpracoval iracionální čísla. Poslední tři knihy jsou o geometrii v prostoru.

Eukleidovy *Základy* jsou vlastně první matematickou encyklopedií a svým významem daleko přesáhly tehdejší dobu. I v dnešní moderní době se na školách vyučují základy eukleidovské geometrie v podstatě v nezměněném pojetí. V rámci této práce a vzhledem k jejímu zaměření není možné popsat a vystihnout komplexnějším způsobem význam a přínos řecké matematiky pro lidstvo.

1.3. Středověk

1.3.1. Evropa ve středověku

Všeobecně je považován rok 476 n.l. za zánik starověkých civilizací, když se římské imperium zhroutilo pod náporem národů pronikajících na kontinent z východu. Je to také rozhranní, kterým končí starověk a začíná středověk (i když tuto hranici nemůžeme považovat za ostrou a striktní). Pro Evropu to znamená krok zpět a návrat k primitivnímu způsobu života, v němž převládá feudální způsob zemědělského hospodaření. Antická kultura byla opomenuta a v této době byla zakázána.

V této době byla zakázaná všechna náboženství kromě křesťanství. Hlavním centrem křesťanství byla Alexandrie. Ve třetím století našeho letopočtu byla alexandrijská knihovna zničena následkem rozporů mezi křesťanstvím a antickým odkazem. Jen díky poslednímu představiteli alexandrijské knihovny **Theonu z Alexandrie** (335-405) se dochovaly některá díla antické matematiky. Nechal například komplexně opsat Euklidovy *Základy*. Toto dílo bylo používáno jako základní zdroj pro výklad matematiky. Za nositelku matematického vzdělání evropského středověku je považována jeho dcera **Hypatie z Alexandrie** (370-415).

Další obrat k lepšímu ve vývoji matematiky nastal až po velmi dlouhé době ve 12., 13. a 14. stol., kdy začala vznikat města. V té době v Itálii vyšel z řad kupců první matematik **Leonardo Pisanský**, nazývaný také **Fibonacci** (1170 - 1250). Ovládal arabské číslice a naučil se používat nulu - jak poziční, tak i tu symbolizující „nic“. Jeho kniha *Liber abaci* (Kniha o počítání) se stala na několik set let základem pro učení algebry a aritmetiky. Zabýval se rovněž problematikou *zlatého řezu*, tj. z estetického hlediska nejvhodnějšího poměru délek dvou úseček.

Slavný německý hvězdář **Johannes Kepler** (1571-1630) napsal v prvním dílu svých sebraných spisů:„ Geometrie má dva poklady. Jeden z nich je Pythagorova věta a druhý zlatý řez. První má cenu zlata; druhý připomíná spíše drahocenný kámen.“ Pythagorova věta je všeobecně známá zatímco pojem zlatého řezu ustoupil poněkud do pozadí. V době minulé však sehrál významnou úlohu.

1.3.2. Zakladatelé symbolické algebry

První krok udělal **Jordanus Nemorarius** (1225-1260), který místo slov začal psát písmena při pojmenování proměnných. **Johann Widmann z Chebu** (1462-1498) jako první začal používat symboly pro sčítání $+$ a odečítání $-$. Je považován za jednoho ze zakladatelů symbolické algebry. Značku pro odmocninu, která byla podobná té dnešní použil ve svých knihách o matematice **Christof Rudolff z Javora** (1490-1549). **Robert Recorde** (1510-1558) jako první použil znaménko $=$.

Přesuneme se ze středověké Evropy na dálný východ k Arabům a Indům. Z arabů se zmíníme o **Muhamadovi ibn Músa al Chwárizmí** (780-850), který vytvořil postupy pro počítání (sčítání, odčítání, násobení, dělení), které používáme i my dnes. Bylo to velké usnadnění, víme, že např. Babyloňané na počítání potřebovali ještě tabulky, které zdaleka nebyly tak přehledné. Také vypracoval postupy pro řešení rovnic a zlomků v šedesátkové soustavě. **Omar Chajjám** (1048-1131) se po dlouhé době zabýval iracionálními čísly včetně jejich aproximace čísly racionálními. Právě on přiblížil vývoj k pojmu reálného čísla.

Za největšího indického matematika středověku byl považován **Brahmagupta**. Jako první přišel s pravou *nulou*, která znamenala „nic“. Pravidla, která pro počítání s nulou vymyslel, jsou užívána dodnes.

S koncem středověku se matematika rozvíjela rychleji, objevovaly se nové obory a podobory. Renesance měla oživit antickou tradici, ale nestačilo jen napodobovat a přejímat, bylo třeba i tvořit a objevovat věci nové. To bylo základem v osvícenství nejen v rozvoji matematiky, ale také v ostatních odvětvích lidské činnosti. Stále se zde objevovalo dědictví řeckého geometrického počítání, kde lidé chápali číslo nebo součet čísel jako délku, součin dvou čísel jako plochu, součin třech čísel jako objem. Nula a záporná čísla, i přes jejich přijetí, byla stále chápána jako absurdní.

Změnu přinesl až **René Descartes** (1596 - 1650), pro něhož už součin dvou čísel nebo druhá mocnina není plocha, ale jen číslo. Nic už nebránilo k počítání se čtvrtou, pátou atd. mocninou, bylo to zase jen číslo. Ani záporné číslo už nebylo tak absurdní, bylo to opět číslo, tedy výsledek aritmetického rozdílu dvou čísel.

Dále vymyslel dodnes používaný systém souřadnic, nazvaný po něm kartézský.[10] Zavedl vůbec poprvé pojem funkce a proměnné veličiny. Objasnil také, že druhá odmocnina kladného čísla může být kladná a záporná, že kořen rovnice $x^2 = a$ může být kladný i záporný, tedy $\sqrt{a}$ i $-\sqrt{a}$.

Díky němu máme dnes víc matematických symbolů. Od jeho dob nemusíme psát $x \cdot x$ ani $x \cdot x \cdot x$, ale x^2 a x^3, pro koeficienty používáme písmena a, b, c a pro neznámé veličiny používáme x, y, z.

Ke konci 15. stl. na bolognské univerzitě, která patřila mezi největší a nejproslulejší v Evropě, se zabývali matematikové problémem obecného řešení kubické rovnice (Cardanovy vzorce). Dalším podstatným zlepšením počtářských metod byl objev logaritmů, k němuž významným způsobem přispěl v roce 1644 skotský zeman John Neper. Tím se dostala do rukou matematiků metoda, která nejen ulehčovala výpočty, ale umožňovala vypočítat výrazy, dřívějšími metodami nevy-

[10] Jako učenec užíval latinskou podobu svého jména Cartesius.

počítatelné. To už se však dostáváme v historickém vývoji matematiky do období, které zahrnuje 17. a 18. století.

1.3.3. Matematika proměnných veličin

Předchozí období středověku do 17. století můžeme charakterizovat jako matematiku konstantních veličin. Zásadní přelom ve vývoji matematiky nastal s objevením *infinitezimálního počtu*. Toto období můžeme právem nazvat jako matematiku proměnných veličin. Tento objev znamenal jeden z největších mezníků ve vývoji lidstva a měl na náš život stejně revoluční dopad jako vynález kola nebo knihtisku.

Již starověký řecký filozof **Zenon** svými „dráždivými paradoxy" (Achiles a želva, letící šíp apod.) ukázal, že „zkrocení" nekonečna je klíčem k porozumění podstatě pohybu a změny.

Diferenciální a integrální počet vyvinuli nezávisle na sobě dva matematici. Jedním z nich byl angličan **Isaac Newton** a druhým němec **Gottfried Wilhelm Leibniz**. Ačkoliv vznikaly určité spory o prvenství tohoto objevu, přínos obou vědců je natolik významný, že dnes historie přisuzuje spravedlivě a rovnoměrně stejné zásluhy oběma a považuje je za „otce" této vynikající a převratné početní metody.

Vedle objevu infinitezimálního počtu se v 17. a 18. stl. matematika rozvíjela i v dalších směrech. Podněty k tomu nebyly jen vnitřní, motivované snahou zacelit mezery mezi starověkými poznatky, ale též vnější. Důvodem byly změny v ekonomice, vznik prvních manufaktur a v nich první stroje. Systematické užívání strojů přineslo další poznatky v mechanice, která se snažila zvládnout tyto problémy matematiky. Dále to byly podněty z námořních cest, z kartografie a hodinářství. Mechanika a optika využívají matematických prostředků k formulaci zákonů pohybu planet (Kepler), volného pádu (Galilei), přitažlivosti těles (Newton), konstrukce dalekohledů (Galilei, Kepler) a vlnové teorie (Huggens, Hooke). Tyto podněty vedly ke kvantitativnímu ujasnění funkční závislosti a k rozvoji algebry, jejíž symbolika poskytovala prostředky k jednoduchým zápisům. Došlo ke sblížení algebraických a geometrických metod (Descartesova metoda analytické geometrie). Začala se vyvíjet teorie diferenciálních rovnic, variační počet, algebraické rovnice a s tím spojené otázky počtu reálných kořenů i jejich přibližné výpočty. Předmětem matematiky se také staly geometrické transformace, klasifikace křivek na algebraické a transcendentní, hledání tečen ke křivkám, maximum, minimum apod. Byly zkoumány také vlastnosti nekonečných řad (Huygens, Leibniz, Bernoulli). Pracovalo se již také s ne zcela vyjasněnými pojmy limita a konvergence. Rozvíjí se Desargnova projektivní geometrie.

18. století je stoletím maximálního rozvinutí nalezeného infinitezimálního počtu a jeho aplikace na jiné oblasti vědění, nejen v matematice. Řada zvučných jmen se zasloužila o jeho další rozšíření a prohloubení (Bernoulli, Laplace, Laqrange, Legendre, D´Alembert, Fourier, Monge a zvláště Euler, který svými podněty zasáhl snad do všech oblastí tehdejší matematiky). Objevují se i nové obory, např. počet pravděpodobnosti, diferenciální geometrie a ke konci 18. stol. také Mongeova deskriptivní geometrie.

1.4. Moderní matematika

Období od počátku 19. stl. až do dnešních dnů lze nazvat obdobím moderní matematiky. Je velmi obtížné ve zkratce podat výstižný přehled rozvoje matematiky v tomto období. Stručně lze říci, že matematika se stala „vědou o vztazích“ v nejširším slova smyslu. Vzniklo mnoho specializovaných odvětví a oborů matematiky. Matematika se rozrostla do nebývalé šíře a hloubky. Došlo ke zpřesňování a precizování pojmů. Matematika začala zasahovat takřka do všech odvětví lidské činnosti i tam, kde by se na první pohled zdálo, že některá odvětví s matematikou vůbec nesouvisí.

S hlediska zaměření této práce si proto povšimneme jen některých stránek tohoto bouřlivého rozvoje matematiky, zvláště těch, které souvisejí s pojmem reálného čísla.

Nejprve poznamenejme, že objev infinitezimálního počtu zahrnuje v sobě předpoklad aktuálního nekonečna. K řešení těchto otázek byl založen nový matematický obor - teorie množin. Zásadní podněty k jejímu založení přinesl **Bernard Bolzano** (1781 - 1848), pražský matematik a filosof. Bolzano ukázal, že o nekonečnu lze hovořit pouze v souvislosti s nekonečným množstvím (tj. s nekonečnými množinami a nikoli např. s „nekonečnými čísly “) a objevil také zásadní vlastnost nekonečných množin - totiž to, že je lze vzájemně jednoznačně zobrazit na jejich vlastní nekonečnou podmnožinu (tento výsledek Bolzano považoval za jeden z hlavních paradoxů nekonečna).

Tyto Bolzanovy myšlenky rozvinul ve své teorii **Georg Cantor** (1845 - 1918), německý matematik a vlastní zakladatel teorie množin. Je to právě teorie množin, na níž je možno vybudovat matematiku a vyjasnit smysl těch nejobecnějších pojmů, jakým je např. pojem „číslo“. Je to pojem složitý, jak dokládá parafrázovaná slavná pasáž filozofa **Augustina**, který řekl: „Dokud se mne nikdo neptá, co je číslo, vím to. Pokud se mne však někdo zeptá, nevím nic.“ Filozofickými aspekty této problematiky se zabýval Gottlob Frege, který se stal na poli matematiky důstojným pokračovatelem Leibnize - ovšem až o dvě století později. Těmito filozofickými problémy se zabývat nebudeme a obrátíme v další části práce pozornost k současnému pohledu na reálná čísla.

Tato kapitola vznikla na základě knih [1][2][3][4][5].

2. Současný pohled na reálná čísla

2.1. Přirozená čísla

Vymezení pojmu „přirozeného čísla“ nám umožňuje propracovaný aparát teorie množin. Opíráme se zejména o kardinální čísla (mohutnosti množin) resp. o ordinální čísla (pořádkový typ uspořádané množiny). Přirozený způsob spočívá v tom, že některá kardinální (ordinální) čísla prohlásíme za čísla přirozená. Abychom však tuto definici mohli vyslovit musíme definovat, které množiny jsou konečné a musíme zajistit jejich existenci. Provádíme to tak, že definujeme tzv. Peanovu množinu.

Definice 2.1.1. Množina P se nazývá Peanova, má-li následující vlastnosti:

1. Ke každému prvku a množiny P existuje právě jeden prvek a' této množiny, který se nazývá *následovník* prvku a.

2. V množině P existuje prvek e, který není následovníkem žádného prvku této množiny.

3. Různé prvky množiny P mají různé následovníky.

4. Princip matematické indukce. Nechť množina M má tyto vlastnosti:

   (i) - obsahuje prvek e,

   (ii) - s každým prvkem množiny P, který obsahuje, obsahuje i jeho následovníka.

   Potom množina M obsahuje všechny prvky množiny P.

Na množině P pak definujeme její další vlastnosti (pojem úseku, předchůdce apod.) a dokazujeme některé věty (vlastnosti následovníka, předchůdce úseku apod.). Po vymezení potřebných pojmů a vlastností vztahujících se k Peanově množině můžeme definovat konečné množiny a na jejich základě zavést pojem přirozeného čísla.

Definice 2.1.2. Množina se nazývá konečná (finitní), je-li ekvivalentní s některým úsekem Peanovy množiny. Množina která není konečná se nazývá nekonečná (transfinitní).

Definice 2.1.3. Kardinální čísla neprázdných konečných množin se nazývají přirozená čísla.

Definice 2.1.4. Ordinální čísla (dobře) uspořádaných neprázdných konečných množin se nazývají přirozená čísla.

Poznámka 2.1.1. Tento způsob zavedení přirozených čísel (budeme značit $\mathbb{N}$) je dosti abstraktní a z didaktických důvodů není vhodný pro nižší stupně škol. Na nejnižším stupni se žáci s přirozenými čísly setkávají od počátku a počítají s nimi, ačkoliv představu o nich získávají spíše intuitivně ve spojení s počtem prvků v určité množině (např. kolik jablek na stromě vyrostlo, kolik žáků je ve třídě apod.)

S přirozenými čísly provádíme operace, zjišťujeme jakými zákony se tyto operace řídí a zda je tato množina vzhledem k těmto operacím uzavřená (sčítání a násobení, zákony asociativní, komutativní a distributivní).[8]

2.2. Celá čísla

Zavedení nové operace (odčítání) spojené s neomezenou proveditelností vyžaduje další rozšíření číselného oboru. Tímto rozšířením je množina *celých čísel* (budeme značit $\mathbb{Z}$) zahrnující nulu (kardinální nebo ordinální číslo prázdné množiny) a záporná celá čísla. Přesněji definujeme celá čísla takto:

Definice 2.2.1. Oborem celých čísel rozumíme každý obor $\mathbb{Z}$, který má tyto vlastnosti:

1. $\mathbb{Z}$ je o obor s neomezeně proveditelným odčítáním (tj. je to komutativní okruh).

2. Obor $\mathbb{Z}$ obsahuje podobor $\overline{\mathbb{N}}$, který je izomorfní s oborem $\mathbb{N}$ přirozených čísel.

3. Každý prvek z oboru $\mathbb{Z}$ se dá vyjádřit jako rozdíl dvou prvků z podoboru $\overline{\mathbb{N}}$.

   Prvky oboru $\mathbb{Z}$ se nazývají celá čísla.

Tato definice ještě nezaručuje, že definovaný obor existuje. Je proto nutné dokázat jeho existenci a jednoznačnost (unicitu). Postupujeme tak, že tento obor zkonstruujeme, přičemž „stavebními kameny“ budou přirozená čísla. Vyjdeme proto z množiny $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel a vytvoříme všechny možné uspořádané dvojice $[a, b]$ kde a, b jsou přirozená čísla. Definujeme ekvivalenci dvojice

$$[a, b] \sim [c, d] \iff a + d = b + c.$$

Z reflexivnosti, symetričnosti a tranzitivnosti této relace plyne rozklad na množině všech uspořádaných dvojic přirozených čísel. Dále definujeme sčítání a násobení tříd tohoto rozkladu takto:

Jsou-li A, B dvě třídy rozkladu, pak v třídě A vezmeme libovolně dvojici $[a, b] \in A$ a v třídě B libovolně dvojici $[c, d] \in B$. Z prvků těchto dvojic vytvoříme novou dvojici $[a + c, b + d]$, kterou nazveme součtem dvojic $[a, b]$, $[c, d]$ a označíme ji $[a, b] + [c, d]$.

Právě sestrojená dvojice $[a + c, b + d]$ padne do jisté třídy C, kterou prohlásíme za součet tříd A, B a píšeme $C = A + B$.

Podobně definujeme násobení tříd vztahem

$$[a, b] \cdot [c, d] = [ac + bd, ad + bc] .$$

Třídu D do níž patří dvojice $[ac + bd, ad + bc]$ prohlásíme za součin tříd A, B a píšeme $D = A \cdot B$.

Takto definované operace jsou asociativní a komutativní a operace násobení je distributivní vzhledem ke sčítání. Dále je třeba provést uspořádání množiny $\mathbb{Z}$ (kladné prvky, záporné prvky, nula, vztahy „$<, >, =$“ a jejich vlastnosti) a dokázat, že obor celých čísel lze uspořádat pouze jedním způsobem.

Sestrojením vzájemně jednoznačného zobrazení f množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\mathbb{Z}$ podle tabulky

Přirozené číslo n	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
Celé číslo $f(n)$	0	1	-1	2	-2	3	-3	$\cdots$

se přesvědčíme, že množina $\mathbb{Z}$ má stejnou mohutnost (kardinální číslo) jako množina $\mathbb{N}$. Je tedy množina všech celých čísel spočetná. [8]

2.3. Racionální čísla

Zavedením celých čísel jsme dosáhli toho, že odčítání je neomezeně proveditelné, avšak dělení (beze zbytku) je proveditelné jen v některých případech. Chceme-li odstranit i toto omezení, musíme opět zavést širší číselný obor, tj. obor *racionálních čísel*, který budeme značit $\mathbb{Q}$.

Obor racionálních čísel vybudujeme z oboru celých čísel v podstatě stejně jako jsme vybudovali obor celých čísel z oboru čísel přirozených. Jen místo požadavku neomezené proveditelnosti odčítání vyžadujeme neomezitelnou proveditelnost dělení (s výjimkou dělení nulou).

Stejně jako čísla celá zavedeme i čísla racionální definicí:

Definice 2.3.1. Oborem racionálních čísel rozumíme každý obor $\mathbb{Q}$, který má tyto vlastnosti:

1. $\mathbb{Q}$ je obor s neomezeně proveditelným odčítáním a dělením (tj. těleso).

2. Obor $\mathbb{Q}$ obsahuje podobor integrity $\overline{\mathbb{Z}}$, který je izomorfní s oborem $\mathbb{Z}$ celých čísel.

3. Každý prvek z oboru $\mathbb{Q}$ se dá vyjádřit jako podíl dvou prvků z podoboru $\overline{\mathbb{Z}}$. Prvky oboru $\mathbb{Q}$ se nazývají racionální čísla.

Dále dokazujeme existenci a unicitu definovaného oboru. Vymezíme pravidla pro počítání s racionálními čísly (tj. v podstatě stanovíme algoritmy pro počítání se zlomky - rovnost, sčítání, násobení) a uvědomíme si, že racionální číslo vyjádřené zlomkem, je v podstatě naznačené dělení. Čitatel a jmenovatel zlomku jsou z oboru $\mathbb{Z}$ s omezením, že ve jmenovateli nesmí být nula. Jestliže vyjádříme racionální číslo jedním z možných způsobů jako zlomek $\frac{a}{b}, b \neq 0$, poslouží nám opět čísla a, b jako stavební kameny ke konstrukci oboru racionálních čísel. Čísla a,b budou prvky uspořádané dvojice $[a, b]$ v nichž druhá složka b je nenulová. Vezmeme v úvahu všechny možné uspořádané dvojice a definujeme na nich relaci ekvivalence vztahem:

$$[a, b] \sim [c, d] \Longleftrightarrow ad = bc$$

Tato reflexivní, symetrická a tranzitivní relace indukuje rozklad množiny všech dvojic na ekvivalentní třídy. Jsou-li A, B třídy tohoto rozkladu vezmeme v první z nich libovolně dvojici $[a, b] \in A$ a ve druhé dvojici $[c, d] \in B$. Definujeme sčítání a násobení těchto tříd takto:

Sčítání: $[a, b] + [c, d] = [ad + bc, bd]$, kde $[ad + bc, bd] \in C$. Třídu C prohlásíme za součet tříd A, B a píšeme $C = A + B$.

Násobení: $[a, b] \in A, [c, d] \in B; [a, b] \cdot [c, d] = [ac, bd] \in D$. Třídu D prohlásíme za součin tříd A, B a píšeme $D = A \cdot B$

Sčítání a násobení tříd je asociativní a komutativní, násobení tříd je distributivní vzhledem ke sčítání.

Obor $\mathbb{Q}$ racionálních čísel se dá uspořádat právě jedním způsobem. Přitom racionální čísla z podoboru $\overline{\mathbb{Z}}$ jsou kladná ve smyslu uspořádání oboru racionálních čísel tehdy a jen tehdy, jsou-li kladná ve smyslu uspořádání oboru celých čísel. Uspořádání charakterizované vztahy „$<, >, =$“ je trichotomické a tranzitivní. Množina všech racionálních čísel je relací „$<$“ hustě uspořádaná.

Množina všech racionálních čísel má stejnou mohutnost jako množina přirozených čísel, tj. spočetná. [8,9]

Nyní podrobněji nadefinujeme uspořádání množiny racionálních čísel spolu se sčítání a násobení, ve zkratce se zmíníme i o odčítání a dělení. Nadefinujeme to pro samotná čísla z množiny racionálních čísel:

2.3.1. Uspořádání množiny $\mathbb{Q}$

Vztah mezi čísly množiny $\mathbb{Q}$ určují znaky „$=$“ pro rovnost a „$>$“ znázorňuje větší než. Zavedeme i znak pro menší než „$<$“. Potom pro znaky „$>$“ a „$<$“ platí ekvivalence $a < b \Longleftrightarrow b > a$.

Nechť $a, b, c \in \mathbb{Q}$, pak platí vlastnosti:

1. zákon trichotomie, kde pro každé $a, b \in \mathbb{Q}$ platí právě jeden ze vztahů $a = b, a > b, b > a$.

   nebo přepsaný pomocí znaku „$<$“ : $a = b, a < b, b < a$.

2. zákon tranzitivní : $(a > b) \wedge (b > c) \Longrightarrow (a > c)$.

   Dokážeme pro znak „$<$“ :

   $(a < b) \wedge (b < c) \Longleftrightarrow (b > a) \wedge (c > b) \Longleftrightarrow (c > b) \wedge (b > a) \Longrightarrow c > a \Longleftrightarrow a < c.$

3. Hustota množiny $\mathbb{Q}: a > b \Longrightarrow \exists c \in \mathbb{Q}: a > c \wedge c > b$.

2.3.2. Součet a rozdíl v množině $\mathbb{Q}$

Pro každá čísla $a, b \in \mathbb{Q}$ existuje číslo $(a+b) \in \mathbb{Q}$, které se nazývá *součet* čísel a, b. Nechť $a, b, c \in \mathbb{Q}$, pak pro operaci sčítání platí:

1. zákon komutativní: $a + b = b + a$,
2. zákon asociativní: $(a + b) + c = a + (b + c)$,
3. přičteme-li k číslu a nulu, dostaneme totéž číslo $a : a + 0 = 0 + a = a$,
4. ke každému číslu a existuje číslo opačné, budeme značit $(-a)$ z množiny racionálních čísel takové, že platí : $a + (-a) = 0$,
5. platí implikace $a > b \Longrightarrow a + c > b + c$.

Rozdílem čísel a, b nazveme číslo c takové, že $c + b = a$. Budeme značit $a - b$. Pro rozdíl čísel neplatí zákon komutativní ani zákon asociativní.

2.3.3. Součin a podíl v množině $\mathbb{Q}$

Nejprve si definujme součin čísel. Pro každá $a, b \in \mathbb{Q}$ existuje číslo $ab \in \mathbb{Q}$, které se nazývá součin čísel a, b. Značí se také $a \cdot b$ nebo ab. Nechť $a, b, c \in \mathbb{Q}$, pak platí axiomy:

1. zákon komutativní $ab = ba$
2. zákon asociativní $(ab)c = a(bc)$.
3. Násobíme-li jakékoliv číslo a jedničkou, dostaneme zase číslo a.

   Zapíšeme : $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

4. Pro všechna nenulová a existuje podíl $\frac{1}{a}$ z množiny racionálních čísel pro která platí, že součin čísla a a podílu $\frac{1}{a}$ se rovná číslu 1. Zapíšeme pomocí symboliky:
$$\forall\ a \neq 0\ \exists\ \frac{1}{a}\ \in \mathbb{Q} : a \cdot \frac{1}{a}\ = 1.$$
5. Dále platí implikace: $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc.$

Pro operaci sčítání a násobení platí zákon distributivní, tj. : $(a + b)c = ac + bc.$

Podíl čísel a, b, kde je podmínkou, že $b \neq 0$, se nazývá číslo c takové, že $cb = a$, značí se $\frac{a}{b}, a : b$. Pro podíl čísel platí stejné vlastnosti jako u součinu s výjimkou dvou zákonů - komutativního a asociativního.

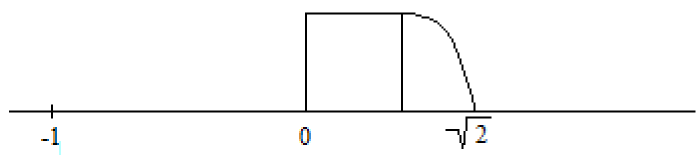
Kromě zmíněných axiomů je třeba také uvést tzv. *Archimedův axiom*
$$\forall c \in \mathbb{Q} \quad c > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ :\ n > c.$$

2.4. Reálná čísla

2.4.1. Předběžná úvaha

V předchozím textu práce jsme postupně rozšiřovali číselné obory od přirozených čísel přes čísla celá až k číslům racionálním pomocí uspořádaných dvojic čísel. Vzniká tedy otázka, jestli můžeme od čísel racionálních přejít k číslům reálným podobným způsobem. Ukazuje se však, že tomu tak není a že k zavedení čísel reálných musíme použít jiný aparát. Nejprve se přesvědčíme, že i když je množina racionálních čísel hustě uspořádaná, nezaplňují obrazy jejích prvků zcela číselnou osu (populárně řečeno - na číselné ose zůstávají ještě určité „mezery“). Přesvědčíme se o tom následující úvahou, která ukáže, že na číselné ose existují body, které nejsou obrazy žádného racionálního čísla.

Obrázek 1:



Důkaz: Abychom to dokázali, sestrojíme čtverec, jehož dva sousední vrcholy jsou obrazy čísel 0 a 1 na číselné ose (obr.1). Z geometrie víme, že délka úhlopříčky čtverce o straně délky 1 je $\sqrt{2}$. Úhlopříčku přeneseme od počátku 0 na kladnou část číselné osy a dostaneme obraz čísla $\sqrt{2}$, o němž dokážeme, že není obrazem žádného racionálního čísla. Důkaz provedeme nepřímo.

Předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo. To znamená, že by měla existovat přirozená čísla a, b taková, že $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, přičemž předpokládáme, že daná čísla a, b jsou nesoudělná.

Umocněním obou stran $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ dostaneme $\frac{a^2}{b^2} = 2$, po úpravě dostaneme $a^2 = 2b^2$. Z předchozího vyplývá, že a^2 je sudé číslo. Navíc víme, že druhá mocnina sudého čísla je opět číslo sudé. Tedy číslo a je možné vyjádřit jako $a = 2r$, kde r je libovolné přirozené číslo. Dosadíme-li $a = 2r$ do vztahu $a^2 = 2b^2$, dostaneme $4r^2 = 2b^2$, což lze upravit na $2r^2 = b^2$. Podle posledního vztahu je číslo b také sudé. Mocnina čísla b je opět sudé číslo.

Obě čísla a i b jsou sudá a tedy dělitelná dvěma. To je spor s předpokladem, že čísla a, b jsou nesoudělná. Předpoklad o existenci takových přirozených čísel

a, b neplatí a číslo $\sqrt{2}$ nelze vyjádřit ve tvaru zlomku, což znamená, že číslo $\sqrt{2}$ není racionální.

$\square$

Dá se ukázat, že kromě obrazu čísla $\sqrt{2}$ existuje na číselné ose nekonečně mnoho dalších bodů, které nejsou obrazy žádného racionálního čísla a které tedy tvoří v množině obrazů další „mezery“. Naším cílem bude rozšířit obor racionálních čísel tak, abychom všechny tyto „mezery“ zaplnily, tj. dosáhnout toho, aby každý bod číselné osy bez jakékoli výjimky byl obrazem nějakého čísla.[8][11]

2.5. Konstrukce reálných čísel pomocí Dedekindovy teorie řezů

2.5.1. Definice řezu

Nechť bod M je obrazem čísla $\sqrt{2}$ na číselné ose a všimněme si vlastností bodu M podrobněji.

Označme A množinu všech racionálních čísel, jejichž obrazy leží nalevo od bodu M a A' množinu všech racionálních čísel, jejichž obrazy leží napravo od bodu M. Do množiny A patří všechna záporná racionální čísla, nula a všechna kladná racionální čísla a, pro něž platí $a^2 < 2$; do množiny A' patří všechna kladná racionální čísla a', pro něž platí $(a')^2 > 2$.

Žádná z množin A, A' není prázdná, každé racionální číslo patří právě do jedné z množin A, A' a zvolíme-li libovolně racionální čísla a, a' tak, že $a \in A, a' \in A'$ pak $a < a'$. Dále v množině A neexistuje největší číslo a v množině A' neexistuje nejmenší číslo. Podrobnějiší rozbor a důkaz viz [8].

Podrobnou úvahu jako pro množiny A, A' můžeme provést pro množiny B, B' resp. pro množiny C, C', přičemž místo bodu M (obrazu čísla $\sqrt{2}$) zvolíme libovolný jiný bod, který je obrazem určitého racionálního čísla, např. čísla 1. Všechna racionální čísla nyní rozdělíme do dvou množin takto: $B = \{b \in B : b < 1\}, B' = \{b' \in B' : b' \geq 1\}$, resp. $C = \{c \in C : c \leq 1\}, C' = \{c' \in C' : c' > 1\}$. Každá z množin B, B', C, C' má podobné vlastnosti jako množiny A, A' přičemž množiny

B, B' se liší od množin C, C' pouze zařazením čísla 1. Obsahuje tedy množina B' nejmenší číslo 1 a v množině B neexistuje největší číslo; v množině C existuje největší číslo 1 a množina C' neobsahuje nejmenší číslo. Nyní definujeme pojem řezu v množině $\mathbb{Q}$.[8][9]

Definice 2.5.1. Dvojice množin $A, A' \subset \mathbb{Q}$ se nazývá *řez v množině* $\mathbb{Q}$, který budeme značit A/A', jestliže platí:

1. $A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset$,
2. každé racionální číslo patří právě do jedné z množin A, A',
3. $a \in A,\ a' \in A' \Longrightarrow a < a'$.

Množina A se nazývá *dolní* skupina řezu A/A' a množinu A' nazveme *horní* skupinou řezu A/A'.

Poznámka 2.5.1. Z definice řezu A/A' plyne:

1. Vezmeme-li libovolné a z množiny A, pak pro všechna racionální x splňující: $x < a$, bude platit, že x je také z množiny A

$$a \in A \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{Q},\ x < a : x \in A,$$

2. Obdobně to platí i pro horní skupinu řezu A/A' : je-li a' z množiny A', pak vezmeme-li nějaké racionální x', které bude splňovat nerovnost $x' > a$, bude platit, že x' patří také do množiny A'

$$a' \in A' \Longrightarrow \forall x' \in \mathbb{Q},\ x' > a' : x' \in A'.$$

Definice 2.5.2. Nechť M je uspořádaná množina. Jestliže existuje prvek $m^* \in M$ tak, že pro každé $x \in M$ platí $x \leq m^*$, pak se m^* nazývá *největší prvek množiny* M a značí se $\max M$. Jestliže existuje prvek $m \in M$ tak, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq m$, pak se m nazývá *nejmenší prvek množimy* M a značí se $\min M$.

Věta 2.5.1. V množině $\mathbb{Q}$ neexistuje řez A/A' tak, aby A měla největší a A' měla nejmenší prvek.

Důkaz: (sporem) Nechť A/A' je řez v $\mathbb{Q}$. Budeme předpokládat, že množina A má největší prvek, tj. $a_0 = \max A$, a množina A' má nejmenší prvek, $a_0' = \min A'$. Protože $a_0, a_0' \in \mathbb{Q}$, pak podle axiomu o hustotě (viz. 2.3.1 uspořádání 3.) množiny $\mathbb{Q}$ existuje $c \in \mathbb{Q}$ tak, že $a_0 < c < a_0'$, což je spor s předpokladem 2. v definici 2.5.1.

□

Poznámka 2.5.2. Z věty 2.5.1 plyne, že existují pouze tři druhy řezů A/A' v $\mathbb{Q}$:

1. druh - A nemá největší prvek, A' má nejmenší prvek;
2. druh - A má největší prvek, A' nemá nejmenší prvek.

   Tyto dva případy můžeme chápat tak, že řezu A/A' je přiřazeno racionální číslo r, které se značí $r = (A/A')$. Číslo r se nazývá „hraničním“ prvkem řezu A/A'. Což znamená, že je buď největším prvkem množiny A nebo nejmenším prvkem množiny A'.
3. druh - A nemá největší prvek, A' nemá nejmenší prvek.

   Tento případ lze chápat následovně: řezu A/A' je přiřazeno číslo α, které není racionální se nazývá iracionální, nebo že řez A/A' definuje iracionální číslo α; značí se $\alpha = (A/A')$. Toto číslo α určitým způsobem hraje roli hraničních prvků řezů 1. a 2. druhu. Můžeme říct, že je vloženo mezi racionální čísla množiny A a racionální čísla množiny A'.[6]

Příklad 2.5.1. Mějme definované množiny A a A' takto:

$$A = \left\{a \in \mathbb{Q};\ a \leq 0 \vee (a > 0 \wedge a^2 < 2)\right\}$$

$$A' = \left\{a' \in \mathbb{Q}; a' > 0 \wedge (a')^2 > 2\right\}.$$

Nejprve dokážeme, že A nemá největší prvek. Zvolíme libovolné racionální číslo $a \in A$. Je-li $a \leq 0$ není to největší číslo této množiny, neboť číslo 1 je větší a také patří do A vzhledem k tomu, že $1^2 < 2$. Proto se omezíme na případ $a > 0$. Dokážeme sporem, že množina A nemá největší prvek.

Budeme předpokládat, že množina A má největší prvek, tedy $a \in A$ a $a > 0$ a také, že $a^2 < 2$. Dokážeme, že existuje kladné racionální číslo x, pro které platí $a < x$ a $x^2 < 2$. Toto racionální číslo x budeme hledat ve tvaru $a + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, pro které bude platit $a + \frac{1}{n} \in A$ a zároveň $(a + \frac{1}{n})^2 < 2$. Úpravou dostaneme $a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2$. Jestliže bude takové racionální číslo x existovat, a není největší prvek. Tedy stačí najít $n \in \mathbb{N}$ takové, aby $a + \frac{1}{n} \in A$.

Ze zadání množiny A vyplývá pro racionální číslo x následující:

$$a + \frac{1}{n} \in A \Longleftrightarrow a + \frac{1}{n} \leq 0 \vee \left(a + \frac{1}{n} > 0 \wedge \left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2\right)$$

Řekli jsme, že se omezíme jen na případ, kdy $a > 0$, tedy $a + \frac{1}{n} \in A$ právě tehdy když $(a + \frac{1}{n})^2 < 2$.
Rozepíšeme $(a + \frac{1}{n})^2 = a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n}$.
Tedy pokud $a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n} < 2$, pak i $(a + \frac{1}{n})^2 < 2$.

Úpravou dostaneme:

$$a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n} < 2,$$

$$a^2 + \frac{2a + 1}{n} < 2$$

$$\frac{2a + 1}{n} < (2 - a^2) \qquad / \cdot n \;/ : (2 - a^2),$$

protože $a^2 < 2$, v závorce budeme mít kladné číslo, znaménko nerovnosti se nezmění

$$n > \frac{2a + 1}{2 - a^2}.$$

Z Archimedova axiomu plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $n_0 > \frac{2a+1}{2-a^2}$.
Z nerovnosti plyne, že $a^2 + \frac{2a}{n_0} + \frac{1}{n_0} < 2$ pak i $(a + \frac{1}{n_0})^2 < 2$. Dokázali jsme, že $a + \frac{1}{n_0} \in A$. Protože $a + \frac{1}{n_0} > a \Longrightarrow a$ není největší prvek množiny A.

Podobně dokážeme, že množina A' nemá nejmenší prvek. Zvolíme libovolné racionální $a' \in A'$ a splňuje nerovnost $a' > 2$. Opět to dokážeme sporem, tedy

budeme předpokládat, že A' má nejmenší prvek, tedy $a' \in A'$ a $a' > 0$ a také, že $(a')^2 > 2$. Dokážeme, že existuje kladné racionální číslo y pro které platí $a' > y$ a $y^2 > 2$. Toto racionální číslo y budeme hledat ve tvaru $a' - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, pro které bude platit $a' - \frac{1}{n} \in A'$, a tedy $(a' - \frac{1}{n})^2 > 2$, úpravou dostaneme $(a')^2 - \frac{2a'}{n} + \frac{1}{n^2} > 2$. Jestliže bude takové racionální číslo y existovat, a' není nejmenší prvek. Tedy stačí najít $n \in \mathbb{N}$ takové, aby $a' - \frac{1}{n} \in A'$. Pro $a' - \frac{1}{n} \notin A$, a tedy $a' - \frac{1}{n} > 0$.
Tedy $a' - \frac{1}{n} \in A'$ právě tehdy když $(a' - \frac{1}{n})^2 > 2$.
Rozepíšeme: $(a' - \frac{1}{n})^2 = (a')^2 - \frac{2a'}{n} + \frac{1}{n^2} > (a')^2 - \frac{2a'}{n} + \frac{1}{n}$.
Předpokládáme, že $(a')^2 - \frac{2a'}{n} + \frac{1}{n} > 2$ pak i $(a' - \frac{1}{n})^2 > 2$.

Úpravou dostaneme:

$$(a')^2 - \frac{2a'}{n} - \frac{1}{n} > 2$$

$$(a')^2 - \frac{2a'+1}{n} > 2$$

$$-\frac{2a'+1}{n} > 2 - (a')^2 \qquad / \cdot n$$

$$-(2a'+1) > n(2 - (a')^2) \qquad / \, (2 - (a')^2)$$

Jelikož $(a')^2 > 2$ v závorce dostaneme záporné číslo, a tudíž se nám změní znaménko nerovnosti.

$$-\frac{2a'+1}{2 - (a')^2} < n$$

Z Archimedova axiomu plyne, že existuje nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $n_0 > -\frac{2a'+1}{2-a'^2}$. Z nerovnosti plyne, že $a'^2 - \frac{2a'}{n_0} + \frac{1}{n_0} > 2$ pak i $(a' - \frac{1}{n_0})^2 > 2$. Dokázali jsme, že $a' - \frac{1}{n_0} \in A'$. Protože $a' - \frac{1}{n_0} < a'$ tedy existuje v množině A' číslo menší, a proto v množině A' neexistuje nejmenší číslo.

Poznámka 2.5.3. Řez uvedený v příkladu 2.5.1 (důkaz věty 2.5.2) definuje číslo $\sqrt{2}$.

Z existence řezu v příkladu 2.5.1 plyne následující věta:

Věta 2.5.2. V množině $\mathbb{Q}$ existuje aspoň jeden řez 3. druhu.

Poznámka 2.5.4. Věta 2.5.2 nám říká, že existuje alespoň jedno iracionální číslo.

Poznámka 2.5.5. Také pro každé racionální číslo existují dva řezy (tj. řez 1. a 2. druhu), které ho definují. Protože se tyto řezy liší jen zařazením hraničního prvku budeme dále uvažovat jen řezy 2. druhu, tj. čísla patřící do dolní skupiny řezu.

Definice 2.5.3. Racionální a iracionální čísla se společně nazývají *reálná čísla*. Množina všech reálných čísel se značí $\mathbb{R}$. Označení $\gamma = (A/A')$ znamená, že řez A/A' definuje reálné číslo γ.

2.5.2. Uspořádání množiny $\mathbb{R}$

Vztahy mezi racionálními čísly jsme již definovali v odstavci 2.3.1. Nyní si je definujeme pro čísla iracionální.

1. Rovnost „=“

   Dvě iracionální čísla $\alpha = (A/A'), \beta = (B/B')$ jsou si rovna, právě když řezy A/A' a B/B' jsou shodné. Ke shodnosti řezů stačí rovnost dolních skupin nebo rovnost horních skupin řezů.

2. Větší než „>“
   - Nechť $r \in \mathbb{Q},\ \alpha = (A/A')$ je iracionální číslo, pak

   $$r > \alpha \Longleftrightarrow r \in A', \quad \alpha > r \Longleftrightarrow r \in A.$$

   - Nechť $\alpha = (A/A')$, $\beta = (B/B')$ jsou dvě iracionální čísla, pak

   $$\alpha > \beta \Longleftrightarrow B \subset A \wedge B \neq A \quad \text{nebo} \quad \alpha > \beta \Longleftrightarrow A' \subset B' \wedge A' \neq B'. \quad (1)$$

Poznámka 2.5.6. Vztah (1) lze definovat i v případě, že řezy A/A', B/B' definují racionální čísla nebo jedno racionální a jedno iracionální.

Definice 2.5.4. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha = (A/A'),\ \beta = (B/B')$. Pak

$$\alpha = \beta \Longleftrightarrow A = B,$$

$$\alpha > \beta \Longleftrightarrow B \subset A \wedge B \neq A.$$

Věta 2.5.3. Nechť $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Pak platí

1. Pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí právě jeden ze vztahů $\alpha = \beta, \alpha > \beta, \beta > \alpha$;
2. $\alpha > \beta \wedge \beta > \gamma \Longrightarrow \alpha > \gamma$.

Důkaz:

Nechť $\alpha = (A/A'), \beta = (B/B'), \gamma = (C/C')$.

1. Pro množiny A, B nastane právě jedna z možností $A = B$, $A \neq B \wedge B \subset A,\ A \neq B \wedge A \subset B$.
2. $B \subset A \wedge C \subset B \Longrightarrow C \subset A$, přičemž $B \neq A \wedge C \neq B \Longrightarrow C \neq A$.

□

Poznámka 2.5.7. Pro znak menší než „<“ platí ekvivalence $\alpha < \beta \Longleftrightarrow \beta > \alpha$.

Věta 2.5.4. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha > \beta$. Pak existuje $r \in Q$, pro které platí $\alpha > r > \beta$.

Důkaz: Nechť $\alpha = (A/A'),\ \beta = (B/B'), \alpha > \beta$. Z předpokladu $B \subset A \wedge B \neq A$ plyne, že existuje $r' \in \mathbb{Q}$ tak, že $\beta < r' \leq \alpha$ (rovnost by nastala v případě, že $\alpha \in \mathbb{Q}$). Je zřejmé, že $r' \in B'$, a protože B' nemá nejmenší prvek (viz. pozn. 2.5.5), existuje $r \in \mathbb{Q}$ tak, že $r \in B'$ a $\beta < r < r'$, tedy i $\beta < r < r' \leq \alpha$.

□

Důsledek 2.5.1. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > \beta$. Pak existuje nekonečně mnoho racionálních čísel r tak, že $\alpha > r > \beta$.

Definice 2.5.5. Řekneme, že množina A je *hustá* v množině B, jestliže $A \subset B$ a mezi každými dvěma prvky množiny B leží alespoň jeden prvek z množiny A.

Poznámka 2.5.8. Z věty 2.5.4 plyne, že množina $\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$. Naopak to ale neplatí.

Lemma 2.5.1. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a pro každé $e \in \mathbb{Q}, e > 0$, existují $s, s' \in \mathbb{Q}$, $0 < s' - s < e$, tak, že $s < \alpha < s', s < \beta < s'$. Pak $\alpha = \beta$.

Důkaz: (sporem) Nechť například $\alpha > \beta$. Podle důsledku věty 2.5.4 existují $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, pro která $\alpha > r_1 > r_2 > \beta$. Pak pro libovolná $s, s' \in \mathbb{Q}$, která splňují předpoklady lemmatu, platí

$$s' > \alpha > r_1 > r_2 > \beta > s \Longrightarrow s' > r_1 > r_2 > s \Longrightarrow s' - s > r_1 - r_2 > 0,$$

a tedy rozdíl $s' - s$ není menší než libovolné $e > 0$, např. $e = r_1 - r_2$. To je ale spor s předpokladem lemmatu.

□

Poznámka 2.5.9. Z lemmatu vyplývá, že každé reálné číslo lze s libovolnou přesností aproximovat racionálními čísly, tj. je-li možné čísla α, β současně „uzavřít“ mezi racionální čísla, jejichž vzdálenost je libovolně malá, pak je nutně $\alpha = \beta$.

Podobně jako jsme definovali řez v množině $\mathbb{Q}$ racionálních čísel, definujeme také řez v množině $\mathbb{R}$ reálných čísel.

Definice 2.5.6. Dvojice množin $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \subset \mathbb{R}$ se nazývá *řez v množině* $\mathbb{R}$, značí se $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$, jestliže platí:

1. $\mathcal{A} \neq \emptyset, \mathcal{A}' \neq \emptyset$,

2. každé reálné číslo patří právě do jedné z množin $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$,

3. $\alpha \in \mathcal{A},\ \alpha' \in \mathcal{A}' \Longrightarrow \alpha < \alpha'$.

Množina $\mathcal{A}$ se nazývá *dolní* skupina řezu $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$, množina $\mathcal{A}'$ *horní* skupina řezu $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$.

Následující věta nám poskytne odpověď, jestli v $\mathbb{R}$ existují také „mezery“ jako v $\mathbb{Q}$.

Věta 2.5.5. (Dedekindova) Ke každému řezu $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$ v množině $\mathbb{R}$ existuje vždy reálné číslo γ, které je tímto řezem definováno. Přitom je γ buď největší prvek množiny $\mathcal{A}$ nebo nejmenší prvek množiny $\mathcal{A}'$.

Důkaz: Nechť $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$ je řez v $\mathbb{R}$. Označme A množinu všech racionálních čísel v $\mathcal{A}$ a A' množinu všech racionálních čísel v $\mathcal{A}'$. Pak A/A' je řez v Q a definuje nějaké reálné číslo γ. Podle definice 2.5.6 řezu $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$ musí γ ležet v jedné z množin $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$. Předpokládejme, že $\gamma \in \mathcal{A}$, a dokážeme, že $\gamma = \max \mathcal{A}$.
Dokážeme sporem. Nechť $\gamma \neq \max \mathcal{A}$, pak existuje $\alpha_0 \in \mathcal{A}, \alpha_0 > \gamma$. Podle věty 2.5.4 existuje $r \in \mathbb{Q}$ tak, že $\gamma < r < \alpha_0$. Z toho plyne, že $r \in \mathcal{A}$ a tedy i $r \in A$, což je ale spor s tím, že řez A/A' definuje číslo γ, neboť musí platit, že $r \leq \gamma$. Analogicky se dokáže, že je-li $\gamma \in \mathcal{A}'$, pak $\gamma = \min \mathcal{A}'$.

Podle věty 2.5.4 není možné, aby měla množina $\mathcal{A}$ největší prvek a množina $\mathcal{A}'$ nejmenší prvek, protože by existovalo $r \in \mathbb{Q}$ tak, že $\max \mathcal{A} < r < \min \mathcal{A}'$, což je ve sporu s definicí řezů $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$ i A/A'.

□

Věta 2.5.6. V množině $\mathbb{R}$ neexistuje řez 3. druhu.

Poznámka 2.5.10. Věta 2.5.6 bezprostředně plyne z věty 2.5.5. Je pouze jinak formulována. Vlastnost množiny $\mathbb{R}$, která je dokázána Dedekindovou větou se nazývá *úplnost množiny* $\mathbb{R}$.

V závěru tohoto odstavce připomeneme dva známé pojmy, které budeme v dalším potřebovat.

Definice 2.5.7. Nechť M je neprázdná shora omezená množina reálných čísel. Číslo $G \in \mathbb{R}$ se nazývá *supremum množiny* M, značí se $G = \sup M$, jestliže má následující vlastnosti:

1. $\forall x \in M : x \leq G$,

2. $\forall G' \in \mathbb{R}, G' < G, \exists x' \in M : x' > G'$.

Nechť M je neprázdná zdola omezená množina reálných čísel. Číslo $g \in \mathbb{R}$ se nazývá *infimum množiny* M, značí se $g = \inf M$, jestliže má následující vlastnosti:

1. $\forall x \in M : x \geq g$,
2. $\forall g' \in \mathbb{R}, g' > g, \exists x' \in M : x' < g'$.

2.5.3. Součet reálných čísel

Na $\mathbb{Q}$ máme definovanou operaci sčítání. Dokážeme, že má smysl definovat součet reálných čísel. Číslo γ v následující větě je vlastně číslo $\alpha + \beta$.

Věta 2.5.7. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Definujme množiny

$$M = \{a + b : a, b \in \mathbb{Q} \wedge a < \alpha \wedge b < \beta\}$$

$$N = \{a' + b' : a', b' \in \mathbb{Q} \ \wedge \ \alpha < a' \ \wedge \ \beta < b'\}.$$

Pak existuje právě jedno γ takové, že

$$\forall c \in M \ \forall c' \in N : \quad c < \gamma < c'. \tag{2}$$

Důkaz: (a) Nejprve dokážeme existenci čísla γ.

Uvažujme množinu všech součtů M. Vezmeme-li libovolné číslo $c \in M$, pak existuje $a \in \mathbb{Q},\ a < \alpha,\ b \in \mathbb{Q},\ b < \beta$ tak, že $c = a + b$.

Pro libovolné číslo $c' \in N$ existuje $a' \in \mathbb{Q},\ a' > \alpha,\ b' \in \mathbb{Q},\ b' > \beta$ tak, že platí $c' = a' + b'$.

Z toho vyplývá, že $c < c'$. To plyne z faktu, že je-li $a, b, a', b' \in \mathbb{Q}$ tak, že $a < \alpha < a'$ a $b < \beta < b'$ pak platí

$$a + b < a' + b'.$$

Tedy množina M je omezená shora, např. libovolným $c' \in N$, tedy má supremum. Toto supremum označme γ. Z definice suprema pro γ platí :

1. $\forall c \in M : c \leq \gamma$,
2. $\forall \overline{\gamma} < \gamma \ \exists c \in M : c > \overline{\gamma}$.

Dokážeme, že pro všechna $c' \in N$ platí $\gamma \leq c'$. Dokážeme to sporem. Předpokládejme, že existuje $c' \in N$ tak, že $c' < \gamma$. Zvolme $\overline{\gamma} = c'$. Tedy existuje $\overline{c} \in M$ pro které platí $\overline{c} > c'$. Potom vezmeme $\overline{a} < \alpha < a'$ a $\overline{b} < \beta < b' \Longrightarrow \overline{c} < c'$, tím dostáváme spor. Z toho plyne, že $\gamma \leq c'$ pro všechny $c' \in N$ a zřejmě pro všechny $c \in M$ platí

$$c \leq \gamma \leq c'. \tag{3}$$

Nyní dokážeme, že M nemá největší prvek. Vezmeme $\overline{c} \in M$ tzn. $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{a} \in \mathbb{Q}$, $\overline{a} < \alpha$, $\overline{b} \in \mathbb{Q}$, $\overline{b} < \beta$.
Z věty 2.5.4 plyne, že

1. existuje $a_1 \in \mathbb{Q} : \overline{a} < a_1 < \alpha$,

2. existuje $b_1 \in \mathbb{Q} : \overline{b} < b_1 < \beta$.

Pak $\overline{c} < c_1$, kde $c_1 = a_1 + b_1$ a zároveň $c_1 \in M$, tedy $\overline{c}$ nemůže být největším prvkem množiny M.

Stejně tak množina součtů N nemá nejmenší prvek. Vezmeme $\overline{c} \in N$ tzn. $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$; $\overline{a} \in \mathbb{Q}$, $\overline{a} > \alpha$, $\overline{b} \in \mathbb{Q}$, $\overline{b} > \beta$. Z věty 2.5.4 plyne, že

1. existuje $a'_1 \in \mathbb{Q} : \overline{a} > a'_1 > \alpha$,

2. existuje $b'_1 \in \mathbb{Q} : \overline{b} > b'_1 > \beta$.

Pak $\overline{c} > c'_1$, kde $c'_1 = a'_1 + b'_1$ a zároveň $c'_1 \in N$. Tedy $\overline{c}$ nemůže být nejmenším prvkem množiny N.

V nerovnostech (3) nemůže nastat rovnost. Jsou tedy dokázány nerovnosti v (2).

(b) Nyní dokážeme jednoznačnost.

Zvolme libovolně $e \in \mathbb{Q}$, kde $e > 0$. K němu existují $a, a', b, b' \in \mathbb{Q}$ splňující nerovnosti:

$$a < \alpha < a' \;,\; b < \beta < b' \tag{4}$$

tak, že $0 < a' - a < \frac{e}{2}$ a $0 < b' - b < \frac{e}{2}$.
Odtud $(a'+b')-(a+b) = (a'-a)+(b'-b) < \frac{2e}{2} = e$. Protože jsme e volili libovolně,

je rozdíl $(a' + b') - (a + b)$ libovolně malý. Podle věty o lemmatu existuje právě jediné $\gamma \in \mathbb{R}$, které leží mezi čísly $(a+b)$ a $(a'+b')$ tj. vyhovuje $(a+b) < \gamma < (a'+b')$ pro každé $a, a', b, b' \in Q$ vyhovující (4).

$\square$

Definice 2.5.8. Číslo γ z věty 2.5.7 se nazývá součet čísel α a β a značí se $\alpha + \beta$.

Poznámka 2.5.11. Ke každým dvěma číslům α, β v množině $\mathbb{R}$ existuje číslo ξ v množině $\mathbb{R}$, že číslo α je součtem čísel β a ξ. Číslo ξ je rozdílem čísel α, β, tj. $\xi = \alpha - \beta$. Je-li číslo β rovno číslu α vzniká jejich odečtením nulové číslo. Jeho hraničním prvkem je číslo 0. Je-li číslo α nulové, je číslo ξ opačným číslem k číslu β. Jeho dolní skupina X obsahuje všechna čísla opačná k číslům $b' \in B'$ a horní skupina X' všechna čísla opačná k číslům $b \in B$ (nepřihlížíme-li k hraničnímu prvku).[6][8]

2.5.4. Součin reálných čísel

Poznámka 2.5.12. V následující větě dokážeme, že má smysl definovat součin reálných čísel a to tak, že definujeme číslo γ, které nazveme součinem čísel α a β, a budeme ho značit $\alpha \cdot \beta$. Součin dvou reálných čísel budeme definovat obdobně jako součet dvou reálných čísel. Zde je nutné rozlišit čísla kladná, záporná a nulu. Jsou-li $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \beta \neq 0$ libovolná, využijeme pro součin absolutní hodnoty: jsou-li α a β stejného znaménka

$$\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta| \,,$$

jsou-li α, β různých znamének

$$\alpha \cdot \beta = -(|\alpha| \cdot |\beta|).$$

Definici součinu $\alpha{\cdot}\beta$ pak převedeme na případ součinu kladných čísel. Postačí nám tedy definovat pouze součin dvou kladných reálných čísel. Definitoricky zavedeme $\gamma \cdot 0 = 0 \cdot \gamma = 0$ pro libovolné $\gamma \in \mathbb{R}$.

Věta 2.5.8. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \beta > 0$. Definujeme množiny

$$X = \{a \cdot b : a, b \in \mathbb{Q} \wedge 0 < a < \alpha \wedge 0 < b < \beta\}$$

$$Y = \{a' \cdot b' : a', b' \in \mathbb{Q} \wedge \alpha < a' \wedge \beta < b'\}.$$

Pak existuje právě jedno γ takové, že

$$\forall c \in X \ \forall c' \in Y : \quad c < \gamma < c'. \tag{5}$$

Důkaz: (a) Nejprve dokážeme existenci čísla γ.

Uvažujme množinu všech součinů X. Vezmeme-li libovolný $c \in X$, pak existuje $a \in \mathbb{Q}, 0 < a < \alpha, b \in \mathbb{Q}, 0 < b < \beta$ tak, že $c = a \cdot b$. Existuje i $a' \in \mathbb{Q},\ a' > \alpha,\ b' \in \mathbb{Q},\ b' > \beta$ tak, že $c' = a' \cdot b'$ a platí $a \cdot b < a' \cdot b'$. Tedy množina X je omezená shora, např. libovolným $c' \in Y$, tedy množina X má supremum, označme ho symbolem γ. Z definice suprema pro γ platí:

1. $\forall c \in X : c \leq \gamma$
2. $\forall \overline{\gamma} < \gamma \ \exists c' \in X : c' > \overline{\gamma}$.

Dokážeme, že pro všechna $c' \in Y$ platí $\gamma \leq c'$. Dokážeme to sporem. Předpokládejme, že existuje $c' \in Y$ tak, že $c' < \gamma$. Zvolme $\overline{\gamma} = c'$, z toho plyne, že existuje $\overline{c} \in X : \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{b}$ a platí, že $\overline{c} > c'$. Potom vezmeme $\overline{a} < \alpha < a'$ a $\overline{b} < \beta < b'$, tedy $\overline{c} < c'$. Dostáváme spor, musí tedy platit $\gamma \leq c'$ pro všechna $c \in X$ a pro všechna $c' \in Y$ a zřejmě

$$c \leq \gamma \leq c'. \tag{6}$$

Nyní dokážeme, že X nemůže mít největší prvek. Vezmeme $\overline{c} \in X$, tzn.$\overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{b}$, $\overline{a} \in \mathbb{Q},\ \overline{a} < \alpha; \overline{b} \in \mathbb{Q}, \overline{b} < \beta$. Z věty 2.5.4 plyne, že

1. $\exists a_1 \in \mathbb{Q}$ pro které platí $\overline{a} < a_1 < \alpha$
2. $\exists b_1 \in \mathbb{Q}$ pro které platí $\overline{b} < b_1 < \beta$.

Pak $\overline{c} < c_1$, kde $c_1 = a_1 \cdot b_1$ a zároveň $c_1 \in X$, tedy $\overline{c}$ nemůže být největším prvkem množiny X. Stejně tak dokážeme, že Y nemá nejmenší prvek. Vezmeme $\overline{c} \in Y$ tzn. $\overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{b}$ a pro $\overline{a} \in \mathbb{Q}: \ \overline{a} > \alpha,\ \overline{b} \in \mathbb{Q}: \ \overline{b} > \beta$. Z věty 2.5.4 plyne, že

1. $\exists a_1' \in \mathbb{Q} : \overline{a} > a_1' > \alpha$,

2. $\exists b_1' \in \mathbb{Q} : \overline{b} > b_1' > \beta$.

Pak $\overline{c} > c_1'$, kde $c_1' = a_1' \cdot b_1'$ a zároveň $c_1' \in Y$, tedy c' nemůže být nejmenším prvkem množiny Y.

V nerovnostech (6) nemůže nastat rovnost. Jsou tedy dokázány nerovnosti v (5).

(b) Nyní dokážeme jednoznačnost.
Zvolme libovolně $e \in \mathbb{Q}$, kde $e > 0$. K němu existují $a, a', b, b', \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Q}$, kde $\overline{a} > \alpha$ a $\overline{b} > \beta$, tak aby splňovali nerovnosti:

$$0 < a < \alpha < a' < \overline{a} \quad \text{a} \quad 0 < b < \beta < b' < \overline{b} \tag{7}$$

tak, že $0 < a' - a < \frac{e}{(\overline{a}+\overline{b})}$ a $0 < b' - b < \frac{e}{(\overline{a}+\overline{b})}$.

Odtud $a'b' - ab = a'b' - a'b + a'b - ab = a'(b' - b) + b(a' - a) < \overline{a}\frac{e}{(\overline{a}+\overline{b})} + \overline{b}\frac{e}{(\overline{a}+\overline{b})} = e$
Protože jsme e volili libovolně, je rozdíl $a'b' - ab$ libovolně malý. Podle věty o lemmatu existuje právě jediné $\gamma \in \mathbb{R}$, které leží mezi čísly ab a $a'b'$ tj. vyhovuje $ab < \gamma < a'b'$ pro každé $a, a', b, b' \in \mathbb{Q}$ vyhovující (7).

□

Definice 2.5.9. Číslo γ z věty 2.5.8 se nazývá součin čísel α a β a značí se $\alpha \cdot \beta$.[6]

Poznámka 2.5.13. Ke každým dvěma reálným číslům α a β existuje číslo $\xi \in \mathbb{R}$ tak, že $\alpha = \beta \cdot \xi$. Číslo ξ se nazývá podíl čísel $\frac{\alpha}{\beta}$ pro $\beta \neq 0$.

Jestliže $\alpha = \beta$ plyne z toho, že $\xi = 1$ (jednotkový prvek). Jestliže $\alpha = 1$ pak $\xi = \frac{1}{\beta}, \beta \neq 0$ je převrácený prvek k prvku β.[8]

Kromě $\sqrt{2}$ pro níž jsme dokazovali iracionalitu v odstavci 2.4.1, existuje nekonečně mnoho dalších iracionálních čísel, např. všechny druhé odmocniny přirozených čísel, které nejsou čtvercem (tj. druhou mocninou) přirozeného čísla, většina logaritmů (dekadických i přirozených), většina hodnot goniometrických funkcí, čísla π, e, ϕ a další.

Fakt, že každé reálné číslo má právě jeden obraz na číselné ose a obráceně každý bod číselné osy je obrazem právě jednoho reálného čísla (vzhledem k tomu, že těleso reálných čísel neobsahuje mezery) znamená, že zavedením reálných čísel je číselná osa zcela „zaplněna“. Z reálných čísel nemůžeme metodou řezů již žádná nová čísla dostat, neboť množina všech řezů v tělese reálných čísel je s tímto tělesem izomorfní.

Protože není možné všechna reálná čísla „očíslovat“ přirozenými čísly tak, aby žádné reálné číslo nezůstalo „neočíslované“ můžeme populárně říci, že ačkoli je celých a racionálních čísel „právě tolik“ jako přirozených čísel, je reálných čísel „mnohem více“. Přesněji tuto skutečnost můžeme formulovat tak, že množina všech reálných čísel má větší kardinální číslo než množina přirozených, celých i racionálních čísel. Není proto množina reálných čísel spočetná. Říkáme, že je spojitá (tj. hustě uspořádaná množina bez mezer).[8][12][13]

2.6. Jiný způsob zavedení reálných čísel

Jiný způsob zavedení reálných čísel pochází od George Cantora. Ten místo řezů pracoval s tzv. Cauchyho posloupnostmi racionálních čísel. Tyto posloupnosti jsou konvergentní a jejich limity mohou, ale nemusí být vždy racionální čísla. Limity těch Cauchyho posloupností, které nejsou racionální nazveme iracionálními čísly. Každá cauchyovská posloupnost $\{a_n\}$ má tu vlastnost, že splňuje tzv. Bolzano-Cauchyovu podmínku, tj. když ke každému kladnému číslu ϵ existuje přirozené číslo n_0 tak, že pro každá čísla m, n větší nebo rovna n_0 je $|a_m - a_n| < \epsilon$. Můžeme říct, že s rostoucími indexy m, n se vzdálenost členů a_m, a_n v této posloupnosti blíží k nule.

2.6.1. Předběžné úvahy

V odstavci 2.4.1 jsme dokázali iracionalitu čísla $\sqrt{2}$. Toto číslo jsme získali výpočtem délky úhlopříčky ve čtverci o straně délky 1. K číslu $\sqrt{2}$ však můžeme dojít i jiným způsobem, užijeme-li metod matematické analýzy, speciálně teorie posloupností a s nimi spojené teorie limit. Doložíme to následujícím příkladem.

Příklad 2.6.1. Určete limitu posloupnosti $\{a_n\}$ dané rekurentně takto:

$$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}).$$

Řešení: Z podmínky $a_1 = 2 > 0$ a z rekurentního vztahu je vidět, že jde o posloupnost kladných čísel. Dále platí

$$a_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\Big(a_n^2 + 4 + \frac{4}{a_n^2}\Big)$$

a tedy

$$a_{n+1}^2 - 2 = \frac{1}{4}\Big(a_n^2 + 4 + \frac{4}{a_n^2}\Big) - 2 = \frac{1}{4}\Big(a_n - \frac{2}{a_n}\Big)^2 \geq 0.$$

Je proto $a_{n+1}^2 \geq 2$, takže $a_{n+1} \geq \sqrt{2}$. Ukážeme, že $\{a_{n+1}\}$ je nerostoucí posloupnost. Platí

$$a_{n+1} - a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{2}\Big(a_{n+1} + \frac{2}{a_{n+1}}\Big) = \frac{1}{2}\Big(a_{n+1} - \frac{2}{a_{n+1}}\Big) = \frac{1}{2}\frac{a_{n+1}^2 - 2}{a_{n+1}} \geq 0,$$

protože $a_{n+1}^2 \geq 2$.

Platí tedy pro všechna $n \in \mathbb{N}$ vztah $a_{n+1} \geq a_{n+2}$ a posloupnost je nerostoucí. Existuje tedy konečná

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = a.$$

Tuto limitu zjistíme přechodem k limitě na levé i pravé straně rekurentního vzorce

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{2}{a_n}\Big).$$

Protože

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} a_{n+1} = a, \ \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{2}{a_n}\Big) = \frac{1}{2}\Big(a + \frac{2}{a}\Big),$$

platí $a = \frac{1}{2}(a + \frac{2}{a})$ odkud $a^2 = 2$, takže $a = \sqrt{2}$.

Poznámka 2.6.1. Tato posloupnost konverguje k $\sqrt{2}$ velmi rychle, již hodnota členu $a_3 = 1,4166667\ldots \doteq \sqrt{2}$.

Tento příklad ukazuje, že existují posloupnosti, jejichž členy jsou racionální čísla, ale jejich limity jsou iracionální. Těmito posloupnostmi se zabýval George Cantor, který na přelomu 19. a 20. století poprvé zpracoval teorii reálných čísel.

2.6.2. Fundamentální (Cauchyho) posloupnosti

Je zřejmé, že ne každá posloupnost racionálních čísel je vhodná pro budování oboru reálných čísel. Cantor použil posloupností speciálního typu, tzn. Cauchyho posloupnosti, které nazýváme také *fundamentální*. Definujeme je následujícím způsobem:

Definice 2.6.1. Posloupnost $\{a_n\}$ racionálních čísel nazveme fundamentální (Cauchyho), jestliže

$$\forall \epsilon > 0, \ \epsilon \in \mathbb{Q}, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall m, n \in \mathbb{N} : \ m \geq n_0 \wedge n \geq n_0 \Longrightarrow |a_m - a_n| < \epsilon.$$

Poznámka 2.6.2. Názorněji s ohlédnutím od obvyklé symboliky můžeme definici 2.6.1 slovně vyjádřit takto: Každá Cauchyho posloupnost má tu vlastnost, že ke každému (sebe menšímu) kladnému číslu ϵ lze najít určitý index n_0 (v závislosti na volbě čísla ϵ) tak, že pro každé indexy m, n větší nebo rovna číslu n_0 je absolutní hodnota rozdíl $a_m - a_n$ menší než ϵ. Tedy s rostoucími indexy m, n se vzdálenost členů a_m, a_n v posloupnosti $\{a_n\}$ blíží k nule.

Věta 2.6.1. Každá fundamentální posloupnost je ohraničená.

Důkaz: Protože pro počítání s absolutními hodnotami platí, že absolutní hodnota rozdílu je větší nebo rovna rozdílu absolutních hodnot můžeme psát $|a_m - a_n| \geq |a_m| - |a_n|$, odkud $|a_m| \leq |a_n| + |a_m - a_n|$. K oběma stranám nerovnosti $|a_m - a_n| < \epsilon$ z definice 2.6.1 přičteme číslo $|a_n|$ takže máme $|a_m - a_n| + |a_n| < \epsilon\, |a_n|$. Z předchozího dále plyne

$$|a_m| \leq |a_n| + |a_m - a_n| < |a_n| + \epsilon$$

Pro $n = n_0 + 1$ odtud dále plyne pro každé $m > n_0$

$$|a_m| \leq |a_n| + |a_m - a_n| < |a_{n_0+1}| + \epsilon = M,$$

kde jsme položili $|a_{n_0+1}| + \epsilon = M$. Je tedy každá fundamentální posloupnost omezená shora i zdola.

$\square$

2.6.3. Součet a součin posloupností

Pro konstrukci oboru reálných čísel pomocí fundamentálních posloupností musíme definovat jejich *součet a součin* a ověřit, jestli výsledkem těchto operací jsou opět fundamentální posloupnosti.

Definice 2.6.2. Součtem posloupností racionálnách čísel $\{a_n\}, \{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{c_n\}$, kde $c_n = a_n + b_n$.

Poznámka 2.6.3. V definici 2.6.2 se říká, že posloupnosti sčítáme tak, že sčítáme jejich členy se stejnými indexy, tj. součet posloupností $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}, \{b_1, b_2, b_3, \cdots\}$ je posloupnost $\{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \cdots\}$.

Věta 2.6.2. Součtem dvou fundamentálních posloupností $\{a_n\}, \{b_n\}$ je opět fundamentální posloupnost.

Důkaz: Především je zřejmé, že všechny sčítance $c_n = a_n + b_n$ jsou racionální čísla, neboť $a_n \in \mathbb{Q}$ a $b_n \in \mathbb{Q}$. Dále pro každé kladné $\epsilon \in \mathbb{Q}$ existují přirozená čísla n_1, n_2 taková, že

$$|a_m - a_n| < \frac{1}{2}\epsilon \qquad \text{pro všechna} \quad m > n_1,\ n > n_1,$$

$$|b_m - b_n| < \frac{1}{2}\epsilon \qquad \text{pro všechna} \quad m > n_2,\ n > n_2,$$

neboť obě posloupnosti $\{a_n\}, \{b_n\}$ jsou fundamentální. Zvolíme tedy $n_0 = \max(n_1, n_2)$ a pak platí $|(a_m + b_m) - (a_n + b_n)| < \epsilon$ pro všechna $m > n_0, n > n_0$. Je tedy i součet $\{c_n\}$ fundamentální posloupnost (podle definice 2.6.1).

$\square$

Definice 2.6.3. Součinem posloupností racionálních čísel $\{a_n\}, \{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{d_n\}$, kde $d_n = a_n \cdot b_n$.

Poznámka 2.6.4. V definici 2.6.3. se říká, že posloupnosti $\{a_1, a_2, a_3 \cdots\}$, $\{b_1, b_2, b_3 \cdots\}$, násobíme tak, že spolu násobíme jejich členy se stejnými indexy. Součinem je tedy posloupnost $\{a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \cdots\}$.

Věta 2.6.3. Součin dvou fundamentálních posloupností $\{a_n\}, \{b_n\}$ je opět fundamentální posloupnost.

Důkaz: Protože $a_n \in \mathbb{Q}$ a $b_n \in \mathbb{Q}$, plyne odtud, že i součin $a_n \cdot b_n \in \mathbb{Q}$. Z ohraničenosti fundamentální posloupnosti plyne existence kladných prvků $M_1 \in \mathbb{Q}, M_2 \in \mathbb{Q}$, že

$$|a_n| < M_1 \qquad \text{pro všechna} \quad n > n_1,$$

$$|b_m| < M_2 \qquad \text{pro všechna} \quad m > n_2,$$

pro vhodná přirozená čísla n_1, n_2. Budiž nyní $\epsilon \in \mathbb{Q}$ libovolný kladný prvek. Pak do $\mathbb{Q}$ patří také prvky $\frac{\epsilon}{2M_1}, \frac{\epsilon}{2M_2}$ a jsou kladné. Podle definice fundamentální posloupnosti existují k nim přirozená čísla $n' \geq n_2,\ n'' \geq n_1$ taková, že

$$|a_m - a_n| < \frac{\epsilon}{M_2} \qquad \text{pro všechna} \quad m > n',\ n > n',$$

$$|b_m - b_n| < \frac{\epsilon}{M_1} \qquad \text{pro všechna} \quad m > n'',\ n > n''.$$

První z předchozích nerovností vynásobíme spolu se shora uvedenou nerovností $|b_m| < M_2$, druhou vynásobíme s nerovností $|a_n| < M_1$ (násobíme spolu souhlasné strany nerovností mezi kladnými čísly). S použitím známého pravidla o násobení absolutních hodnot (absolutní hodnota součinu se rovná součinu absolutních hodnot) dostáváme

$$|a_m b_m - a_n b_m| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{pro všechna} \quad m > n',\ n > n',$$

$$|a_n b_m - a_n b_n| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{pro všechna} \quad m > n'',\ n > n''.$$

Zvolíme-li nyní $n_0 = \max(n', n'')$, pak sečtením obou souhlasných stran nerovností a s použitím trojúhelníkové nerovnosti (absolutní hodnota součtu je menší nebo rovna součtu absolutních hodnot) dostáváme

$$|a_m b_m - a_n b_n| < \epsilon \qquad \text{pro všechna} \quad m > n_0,\ n > n_0$$

což podle definice 2.6.1. znamená, že součin $\{d_n\}$ je fundamentální posloupnost.

□

Snadno nahlédneme, že množina všech fundamentálních posloupností racionálních čísel $\mathbb{Q}$ vzhledem ke shora definovanému sčítání resp. násobení tvoří komutativní okruh s jednotkovým prvkem bez dělitelů nuly, tj. obor integrity. Jednotkovým prvkem pro operaci sčítání je posloupnost $\{0\}$, tj. posloupnost, jejíž všechny členy jsou nulové a jednotkovým prvkem pro násobení je posloupnost $\{1\}$ obsahující samé jedničky (posloupnost $\{0\}$ je neutrální vzhledem ke sčítání a posloupnost $\{1\}$ vzhledem k násobení).

Definice 2.6.4. Jestliže platí, že součet fundamentálních posloupností $\{b_n\}, \{x_n\}$ se rovná posloupnosti $\{a_n\}$, pak posloupnost $\{x_n\}$ nazveme *rozdílem* posloupností $\{a_n\}, \{b_n\}$ (v tomto pořadí).

Poznámka 2.6.5. V definice 2.6.4. je posloupnost $\{a_n\}$ menšencem a $\{b_n\}$ menšitelem tohoto rozdílu a pro členy posloupnosti $\{x_n\}$ platí $x_n = a_n - b_n$, tj. odčítáme členy se stejnými indexy.

Poznámka 2.6.6. Definice rozdílu fundamentálních posloupností nám umožňuje zavést pojem opačné fundamentální posloupnosti k posloupnosti $\{a_n\}$. Je to posloupnost $\{-a_n\} = \{-a_1, -a_2, -a_3, \dots\}$.

Věta 2.6.4. Každá konvergentní posloupnost je fundamentální.

Důkaz: Jeli $\lim a_n = a$, pak pro každé $\epsilon \in \mathbb{Q}$, $\epsilon > 0$, existuje přirozené číslo n_0 tak, že

$$|a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{pro každé} \quad m > n_0,$$

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{pro každé} \quad n > n_0.$$

Sečtením souhlasných stran těchto nerovností máme $|a_m - a| + |a_n - a| < \epsilon$. Protože $|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \le |a_m - a| + |a_n - a| < \epsilon$
pro všechna $m > n_0$, $n > n_0$ splňuje Cauchyho podmínku o konvergenci a je tedy fundamentální.

□

Poznámka 2.6.7. Prvek a se nazývá *limita* posloupnosti $\{a_n\}$, zapisujeme

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = a \qquad \text{nebo jen} \quad \lim a_n = a.$$

Jinak říkáme, že posloupnost diverguje.

Poznámka 2.6.8. Obrácená věta k větě 2.6.4. neplatí. Např. posloupnost $\left\{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right\}$ je fundamentální nad $\mathbb{Q}$ a při tom je v $\mathbb{Q}$ divergentní. (viz [7])

2.6.4. Ekvivalence na množině fundamentálních posloupností, bloky

Na množině $F_{\mathbb{Q}}$ všech fundamentálních posloupností racionálních čísel definujeme relaci $\sim$ takto

$$\{a_n\} \sim \{b_n\}, \text{ jestliže} \quad \lim(a_n - b_n) = 0.$$

Poznámka 2.6.9. Podmínka $\lim(a_n - b_n) = 0$ nemusí znamenat $\lim a_n = \lim b_n$, neboť každá z posloupností $\{a_n\}, \{b_n\}$ může být divergentní v $\mathbb{Q}$.

Relace $\sim$ je reflexivní (neboť $\lim(a_n - b_n) = \lim 0 = 0$); je i symetrická (neboť $\lim(a_n - b_n) = 0 = -0 = \lim(b_n - a_n)$); je také tranzitivní (jestliže $\{a_n\} \sim \{b_n\} \wedge \{b_n\} \sim \{c_n\}$, pak $\lim(a_n - b_n) = 0 = \lim(b_n - c_n)$, odkud $\lim(a_n - c_n) = \lim(a_n - b_n) + \lim(b_n - c_n) = 0 + 0 = 0$, tedy $\{a_n\} \sim \{c_n\}$). Je tedy $\sim$ relace ekvivalence.

Definice 2.6.5. Množinu $[a_n] = \{\{x_n\} \in F_{\mathbb{Q}}; \{x_n\} \sim \{a_n\}\}$ nazýváme blok prvků z $F_{\mathbb{Q}}$ určený posloupností $\{a_n\}$.

Poznámka 2.6.10. Označíme-li $\mathbb{R}$ rozklad na $F_{\mathbb{Q}}$ příslušný k ekvivalenci $\sim$, pak prvky tohoto rozkladu jsou jednotlivé bloky a $\{a_n\}$ je reprezentat bloku $[a_n]$.

S bloky můžeme provádět početné výkony. Rovnost mezi bloky $[a_n] = [b_n]$ znamená, že posloupnost rozdílu reprezentantů $\{a_n - b_n\}$ konverguje k nule. Každou posloupnost $\{b_n\}$ z libovolného bloku $[a_n] \in \mathbb{R}$ lze napsat jako součet posloupnosti $\{a_n\}$ s vhodnou posloupností $\{c_n\}$, kde $\lim c_n = 0$, neboť je $\{b_n\} \sim \{a_n\}$, a tedy $\lim(b_n - a_n) = 0$. Položíme-li $c_n = b_n - a_n$, pak $\{b_n\} = \{a_n\} + \{c_n\}$, kde $\lim c_n = 0$. Sčítání a násobení bloků definujeme jako sčítání a násobení jejich reprezentantů:

$$[a_n] \oplus [b_n] = [a_n + b_n]$$

$$[a_n] \odot [b_n] = [a_n \cdot b_n]$$

Platí, že $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ je pole, do něhož je původní pole $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ vnořeno ($\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R} : a \mapsto [a, a, \cdots] = [a]$). Proto položíme $a = [a]$, takže $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. V podstatě tedy platí, že $a = [a_n]$ jestliže limita $a_n = a$. Speciálně je tedy nulový blok tvořen právě všemi posloupnostmi konvergujícími k nule a jednotkový blok $1 = [1]$ právě všemi posloupnostmi, kde $\lim a_n = 1$. Bloky $[a_n], [-a_n]$ jsou navzájem opačné, tj. $-[a_n] = [-a_n]$.

Dále se dá dokázat, že pro každý nenulový blok $[a_n] \in \mathbb{R}$ existuje v $\mathbb{R}$ blok inverzní (tj. že v poli $\mathbb{Q}$ existují k prvkům $a_n \neq 0$ inverzní prvky a_n^{-1} pro každé přirozené n, a tedy existuje i posloupnost racionálních čísel $\{a_n^{-1}\}$, která je fundamentální. Posloupnost $\{a_n^{-1}\}$ je inverzní k posloupnosti $\{a_n\}$. Pro prvky v $\mathbb{R}$ tedy platí $[a_n]^{-1} = \{a_n^{-1}\}$).(viz [7])

2.6.5. Uspořádání v $F_{\mathbb{Q}}$

Definice 2.6.6. Fundamentální posloupnost racionálních čísel $\{a_n\}$ nazýváme *kladnou*, jestliže existují $\epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{Q}$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$a_m > \epsilon \qquad \text{pro každé} \quad m > n_0.$$

Poznámka 2.6.11. Je zřejmé, že např. posloupnost $\{1\}$ je kladná, a že součet i součin kladných fundamentálních posloupností je opět kladná fundamentální posloupnost.

Kladné fundamentální posloupnosti nevytvářejí ani trichotomickou, tedy ani kladnou část v oboru integrity $F_{\mathbb{Q}}$ a tedy nelze pomocí nich $F_{\mathbb{Q}}$ uspořádat. Proto použijeme k uspořádání pole racionálních čísel $\mathbb{R}$.

Věta 2.6.5. Součet libovolné kladné fundamentální posloupnosti racionálních čísel $\{a_n\}$ s libovolnou fundamentální posloupností racionálních čísel $\{b_n\}$ konvergující k nule je opět kladná fundamentální posloupnost.

Důkaz: Protože existuje $\epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{Q}$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že platí současně

$$a_m > 2\epsilon \qquad \text{pro každé} \quad m > n_0,$$

$$|b_m| < \epsilon \qquad \text{pro každé} \quad m > n_0,$$

plyne odtud, že $a_m + b_m > \epsilon$.

□

Jestliže je tedy v některém bloku z $\mathbb{R}$ aspoň jedna posloupnost kladná, pak jsou všechny posloupnosti tohoto bloku kladné. Takový blok nazveme kladný.

Protože kladné bloky vytvářejí v $\mathbb{R}$ kladnou část je pomocí těchto kladných bloků pole $\mathbb{R}$ uspořádáno. Vnoření $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R} : a \longrightarrow [a]$ zobrazuje kladné prvky z $\mathbb{Q}$ na kladné prvky $\mathbb{R}$. V $\mathbb{R}$ lze tedy obvyklým způsobem zavést uspořádání: $[a_n] > [b_n]$ právě když blok $[a_n - b_n]$ je kladný.

Věta 2.6.6. Jestliže existuje přirozené číslo n_0 takové, že je $a_m \geq b_m$ pro každé $m > n_0$, pak v $\mathbb{R}$ je $[a_n] \geq [b_n]$.

Důkaz: Provedeme nepřímo. Kdyby platilo $[a_n] < [b_n]$, tj.$[b_n - a_n] > 0$, pak by pro vhodné $\epsilon > 0$ a vhodné přirozené číslo m_0 platilo $b_m - a_m \ > \epsilon$ pro každé $m > m_0$. Zvolíme-li však $m = m_0 + n_0$ dostáváme spor s předpokladem $a_m \geq b_m$ pro každé $m > n_0$.

□

Samozřejmě můžeme pro množinu $\mathbb{R}$ zavést pojmy absolutní hodnota, fundamentální posloupnost a limita posloupnosti. Fundamentální posloupnosti racionálních čísel můžeme považovat za fundamentální posloupnosti reálných čísel. Po zavedení těchto pojmů můžeme dokázat, že každá fundamentální posloupnost racionálních čísel $\{a_n\}$ má v množině $\mathbb{R}$ limitu a její limitou je ten prvek z $\mathbb{R}$, který je pomocí ní určen, tj. $\lim a_n = [a_n]$ a dále, že množina reálných čísel $\mathbb{R}$ je *úplná*, tj. splňuje Cauchyho podmínku pro konvergenci.(viz[7])

Konstrukce popsaná v kapitole 2.6 přiřazuje ke každé uspořádané množině $\mathbb{Q}$ úplnou uspořádanou množinu $\mathbb{R}$. Podle Cantora je tedy reálné číslo definováno jako množina všech takových fundamentálních posloupností racionálních čísel, že rozdíl libovolných posloupností této množiny konverguje k nule.

Poznámka 2.6.12. Nejčastěji bývá reálné číslo zadáváno pomocí nekonečného desetinného rozvoje

$$s = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{-j}$$

kde a_0, a_j jsou celá čísla a $0 \leq a_j \leq 10$, tedy jako limita fundamentální posloupnosti racionálních čísel

$$\left\{ a_0 + \sum_{j=1}^{n_0} a_j \cdot 10^{-j} \right\}_{n=1}^{\infty} .$$

Informace k této kapitole jsem čerpala v knihách [7][12][13].

2.7. Dodatek

2.7.1. Srovnání alternativních konstrukcí reálných čísel

V kapitole 2.5 a 2.6 byly popsány dva různé přístupy k vytvoření oboru reálných čísel. Dedekindova metoda řezů v množině racionálních čísel používá metod teoretické aritmetiky zatím co Cantorova metoda se opírá o metody matematické analýzy. V obou případech však tvoří fundamentální základ těchto přístupů teorie množin a algebra.

Otázky a problémy vztahující se ke struktuře prostoru a času zaměstnávaly lidstvo od nepaměti a od samotných počátků vědy měly mimořádný význam. Prakticky celý vědecký a matematický výzkum od doby starověkých Řeků až do konce 19. stol. vycházel z předpokladu spojitosti těchto veličin. Pohlížením na čas a prostor jako na kontinuum se matematici chtěli vyvarovat Zenonovým paradoxům.

Do časů Newtona a Leibnize bylo fyzikální kontinuum času a prostoru ztotožňováno s kontinuem reálných čísel. Číselná měření času a fyzikálních veličin (délky, teploty, hmotnosti, rychlosti apod.) byla považována za body tohoto kontinua. Infinitezimální počet využíval funkce, jejichž proměnné nabývaly hodnot reálných čísel. V 70. letech 19. stol. Cauchy, Weierstrass, Dedekind a další vědci se museli při vývoji teorie limit ponořit hluboko do výzkumu reálných čísel. Jejich původní představa ztotožňovala toto kontinuum s množinou bodů - reálných čísel - ležících na přímce, která probíhá v obou směrech do nekonečna. Klíčovým prvkem, jímž se odlišují reálná čísla od racionálních je axiom z něhož vychází teorie limit. Formuloval ji Cauchy (když si uvědomil, že racionální čísla netvoří vhodnou množinu pro teorii limit): „ Nechť je $a_1, a_2, a_3, \cdots$ nekonečná posloupnost reálných čísel, která se stále více k sobě přibližují (v tom smyslu, že jak postupujeme po poslupnosti, vždy se můžeme dostat tak daleko, že rozdíl mezi každými dvěma vzdálenějšími čísly je libovolně blízký nule). Pak tedy musí existovat reálné číslo (označíme ho L) takové, že čísla v posloupnosti se k němu stále přibližují (opět v tom smyslu, že pro dostatečně vysoké n_0 je rozdíl mezi čísly a_n a číslem L libovolně blízký nule).

Cauchy tedy takto charakterizoval limitu L posloupnosti $\{a_n\}$.

Cauchyho axiom je znám jako axiom úplnosti. Práce, kterou započal Cauchy, Dedekind, Weierstrass a další, stála u zrodu nového oboru - matematické analýzy. Alternativní metodu konstrukce reálných čísel z čísel racionálních předložil Richard Dedekind.[1][10][12]

2.7.2. Významná reálná čísla

Mezi reálnými čísly hrají v matematice významnou úlohu čísla π, e a ϕ.

Číslo $\pi = 3,14159\dots$ je snad nejznámější matematickou konstantou. Odedávna přitahoval pozornost lidstva poměr obvodu kruhu k jeho průměru, který se jevil konstantní nezávisle na volbě poloměru. Jeden z přístupů spočívá v tom, že se setrojují pravidelné n-úhelníky do téže kružnice vepsané a této kružnice opsané. Středoškolskými početními metodami se určí délka a_n strany n-úhelníku vepsaného a délka a'_n strany n-úhelníku opsaného. Z nich příslušné obvody jsou $o_n = n \cdot a_n$ a $o'_n = n \cdot a'_n$ z praktických důvodů volíme číslo n sudé. Posloupnost $\{o_n\}$ obvodů n-úhelníků vepsaných je rostoucí a omezená, posloupnost $\{o'_n\}$ obvodů n-úhelníků opsaných je klesající a omezená. Je-li o délka obvodu kružnice, pak

$$o_n < o < o'_n \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}$$

tj. obě posloupnosti konvergují k číslu o. Je tedy

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} o_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} o'_n = o.$$

Určíme-li pro ilustraci některá $n \in N$ hodnoty podílu $\frac{o_n}{2r}$ resp. $\frac{o'_n}{2r}$ (kde r je poloměr příslušné kružnice) dostaneme následující tabulku

n	$o_n : 2r$	$o'_n : 2r$
6	3	3,46410
12	3,10583	3,21539
24	3,13263	3,15966
48	3,13935	3,14609
96	3,14103	3,14271
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1536	3,14159	3,14160
3072	3,14159	3,14159

Odtud je vidět, jak se hodnoty $\frac{o_n}{2r}, \frac{o'_n}{2r}$ k sobě přibližují a konvergují k limitě, kterou označujeme π a nazýváme Ludolfovým číslem.

Naznačeného postupu použil již starověky řecký matematik a fyzik Archimedes, který ukázal, že pro číslo π platí nerovnosti

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

Zvláště v dřívějších dobách, kdy se neužívalo kalkulátorů, byla iracionální hodnota čísla π z praktických důvodů často nahrazována racionálním číslem $\frac{22}{7} = 3,\overline{1428571}\ldots$.

S menší přesností určil poměr obvodu kruhu a jeho průměru egyptský Ahmes, který stanovil hodnotu $(\frac{16}{9})^2 = 3,1605$. Koncem 16. stl. Vieta a jiní vypočítali tento poměr na deset, dvacet i více desetinných míst. Jeho určení i pojmenování je úzce spjato se jménem holandského metematika a vojenského stavitele **Ludolfa van Ceulen** (též Keulen), který sám vypočetl toto číslo na 35 desetinných míst. Výpočet Ludolfův i jiné udávají číslo π s přesností pro praktické potřeby až zbytečnou (užijeme-li pouze prvních 5 desetinných míst, dopustíme se chyby při výpočtu obvodu kružnice s poloměrem 1 km pouze asi 5 mm). Celé generace lidí se učily 35 desetinným místům čísla π zpaměti (užívalo se mnoha pomůcek - říkanek se slovy, která začínají stejnou hláskou jako příslušné číslice apod.). Důkladnější poznatky o čísle π byly získány až hlubšími teoretickými úvahami. Lambert (1770) ukázal, že číslo π je iracionální, totéž pro π^2 odvodil Legendre (1794). Lindeman koncem 19 stl. ukázal, že π nemůže být kořenem žádné algebraické rovnice, jejíž koeficienty jsou celá čísla a že tedy π je číslo franscendentní (tím byl vlastně vynesen rozsudek nad domělou správností některých laických konstrukcí rektifikace kružnice i kvadratury kruhu).

Moderní doba však dala přece jen v něčem starším myslitelům za pravdu, totiž v tom, že nikoliv kruh samotný, ale poměr jeho obvodu k průměru je podivuhodným číslem, objevujícím se v mnohých matematických úvahách. Je vyjádřeno řadami i součty se zajímavou vnitřní stavbou, např.:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \qquad \text{(řada Leibnizova)}$$

nebo z této řady plynoucí

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \cdots .$$

Další řady jsou

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \cdots .$$

Nakonec uveďmě i zajímavý Wallisův nekonečný součin

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 6} \cdots .$$

Číslo $e = 2,71828\ldots$ (Eulerovo číslo) je jednou z nejdůležitějších matematických konstant. Je základem přirozených logaritmů a často se s ním setkáváme v souvislosti s exponenciální funkcí o základu e. Eulerovo číslo definujeme jako limitu posloupnosti $\{a_n\}\,; a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, resp.$\{b_n\}\,, b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}, n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je roztoucí a $\{b_n\}$ klesající a platí $b_n = a_n(1 + \frac{1}{n}) > a_n$, takže $a_1 < a_n < b_n < b_1$ a proto jsou obě posloupnosti omezené a mají konečnou limitu. Přitom

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} b_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \longrightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = \lim_{n \longrightarrow \infty} a_n.$$

Dále platí $(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{m})^{m+1}$, kde m, n jsou libovolná přirozená čísla.

Exponenciání funkci definujeme jako zobrazení $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vzorcem

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots ,$$

kde řada na pravé straně konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pro $x = 1$ dostáváme odtud $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$.

Inverzní funkce k e^x se označuje ln nebo lg a nazývá se přirozená logaritmická funkce. Je-li $a > 0, a \in \mathbb{R}$, pak číslo $\ln a$ se nazývá přirozený logaritmus čísla a (též Napierův logaritmus). Logaritmická i exponenciální funkce hrají důležitou úlohu v matematické analýze.

Číslo $\phi = 1,61803\ldots$ souvisí s historií zlatého řezu a s osobností italského matematika Leonarda Pisana zvaného Fibonacci. Zlatým řezem rozumíme takové rozdělení úsečky AB bodem C na dvě části tak, aby poměr velikostí menší části k části větší byl stejný jak poměr velikosti větší části k velikosti celé úsečky. Matematické vyjádření těchto vztahů vede k rovnici $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ jejíž řešení je $\phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Fibonacci byl motivován slovní úlohou z praxe a sestavil z přirozených čísel posloupnost

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots,$$

v níž každý následující člen je součtem dvou členů předcházejících, tj. posloupnost je dána rekurentním vzorcem $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ kde $n \in \mathbb{N}, n > 2$.

Členy této posloupnosti se nazývají Fibonacciho čísla a mají zajímavé vlastnosti; např. podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ konverguje k číslu $\phi = 1,61803\ldots$; $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \phi^{-1} = 0,61803\ldots$; $(\frac{a_{n+1}}{a_n})^2 = 2,61803\ldots$. Kterákoli dvojice sousedních členů $x = a_n, y = a_{n-1}$ vyhovuje jedné z rovnic

$$x^2 - xy - y^2 = 1$$
$$x^2 - xy - y^2 = -1.$$

Fibonacciho posloupnost je známá nejen matematikům, ale i přírodovědcům. Vyrůstají-li listy z větve jednotlivě, jsou rozloženy kolem dokola její osy po šroubovici tak, že každý list vyrůstá nad listem předešlým, ale stranou od něho.

Přitom každý rostlinný druh má svůj charakteristický úhel o nějž jsou listy od sebe odchýleny; tento úhel bývá obvykle vyjadřován zlomkem, který udává jakou část obvodu předstihuje. Například u lípy a jilmu jsou listové řapíky od sebe odchýleny o $\frac{1}{2}$ obvodu, u buku o $\frac{1}{3}$ obvodu, u dubu a višně o $\frac{2}{5}$ obvodu, u topolu a hrušně o $\frac{3}{8}$ obvodu, u vrby o $\frac{5}{13}$ obvodu atd. O stejný úhel jsou u určitého druhu rostlin od sebe odchýleny i větve, pupeny, šupiny uvnitř pupenů a květy. Nejčastěji se u rostlin vyskytují tyto úhly (ve zlomcích obvodu)

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \dots .$$

Čitatelé i jmenovatelé jsou Fibonacciova čísla, při čemž každý ze zlomků (třetím počínaje) lze získat tak, že sečtem čitatele i jmenovatele dvou zlomků předcházejících:

$$\frac{2}{5} = \frac{1+1}{2+3}, \ \frac{3}{8} = \frac{1+2}{3+5}, atd.$$

Mohli bychom uvádět další zajímavé vlastnosti Fibonacciho čísla a zlatého řezu. Uveďme jen to, že i umělci považovali poměr ϕ za vrchol estetické dokonalosti a řídili se jím ve své tvorbě.[1][9][11][12]

Závěr

Problematika bakalářské práce je natolik obsáhlá, že tato práce je jen stručným přehledem historie a současného pohledu na reálná čísla. Protože se nevyskytuje v tomto pojetí v jedné publikaci, bylo nutno přihlédnout k více pracím a tuto tématiku sjednotit a v odborné části práce použít jednotné symboliky. Protože první část je věnována historii, bylo i v závěru práce uvedeno několik zajímavostí vztahujících se k iracionálním číslům π, e, ϕ. Zajímavost této tématiky inspiruje ke studiu další a hlubší literatury.

Tato práce byla zpracována pomocí matematického software - TeX.

Reference

[1] Mareš, M.: Příběhy matematiky, nakladatelství Pistorius Olšanská, s.r.o., Příbram 2008, první vydání.

[2] Struik, D. J.: Dějiny matematiky, nakladatelstí Orbis, Praha 1963, první vydání.

[3] Balada, F.: Z dějin elementární matematiky, vydalo SPN, Praha 1959, první vydání.

[4] Bečvář, J., Fuchs, E.(ed.): Historie matematiky I, nakladatelství Prometheus, Praha 1994, .

[5] Bečvář, J., Fuchs, E.(ed.): Historie matematiky II, nakladatelství Prometheus, s.r.o., Praha 1997, první vydání.

[6] Kojecká, J., Kojecký, T.: Matematická analýza pro 1. semestr, vydavatelství UP, Olomouc 1997, první vydání.

[7] Zedník, J.: Reálná čísla podle Cantora, nakladatelství UP, Olomouc 1989, první vydání.

[8] Hruša, K., Dlouhý, Z., Mencl, J.: Aritmetika a algebra, vydalo SPN, Praha 1964, druhé vydání.

[9] Aleksandrov, P.S.: Úvod do obecné teorie množin a funkcí, nakladatelství ČSAV, Praha 1954.

[10] Šilov, G.J.: Matematická analýza, Alfa - vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava 1974, první vydání.

[11] Hruša, K., Dlouhý, Z., Mencl, J.: Úvod do studia matematiky, vydalo SPN, Praha 1977, druhé doplněné vydání.

[12] Veselý, J.: Základy matematické analýzy, vydal Matfyzpress vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, Praha 2004, první vydání.

[13] Další vysokoškolské a středoškolské učebnice a odborné časopisecké články [Rozhledy metemeticko-fyzikální, Matematika, fyzika a informatika, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie (časopis JČMF)].