



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická Fakulta
Katedra Matematiky

Bakalářská práce

Konstrukce pomocí skládání papíru

Vypracoval: Marek Voráček
Vedoucí práce: Pavel Pech

České Budějovice 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Konstrukce pomocí skládání papíru jsem vypracoval(a) samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích, 29. 4. 2016

Marek Voráček

Poděkování.

Děkuji panu prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc., který byl vedoucím mé bakalářské práce za jeho přístup, trpělivost a cenné rady, kterými mi při vypracování práce pomohl.

Anotace:

Cílem bakalářské práce Konstrukce pomocí skládání papíru je popsat základní pravidla, která při skládání používáme, a předvést některé geometrické konstrukce, které se skládáním dají provést. Část práce je věnována problémům neřešitelným pomocí pravítka a kružítka, jako například trisekce úhlu, je ukázáno řešení za použití skládání.

Annotation:

The aim of the bachelor thesis Constructions using paper folding is to look at basic folding principles and to show geometric constructions that can be done by folding. Part of the thesis is dedicated to problems such as angle trisection, which can not be solved with straightedge and compass, their solutions using paper folding is described.

Obsah

1	Úvod	3
2	Origami	4
2.1	Historie	4
2.2	Origami a matematika	5
2.3	Moderní origami	6
3	Základní operace při skládání	7
3.1	Huzita-Justinovy axiomy	7
3.2	Popis axiomů	8
3.3	Vlastnosti axiomů	9
4	Origami konstrukce	10
4.1	Dělení úsečky na stejné části	10
4.1.1	Dělení pomocí půlení	10
4.1.2	Křížící se diagonály	11
4.1.3	Dělení pomocí Hagovy věty	12
4.2	Konstrukce tečen k parabole	14
4.3	Konstrukce pravidelných N -úhelníků pomocí skládání	15
4.3.1	Konstrukce rovnostranného trojúhelníku	16
4.3.2	Konstrukce pravidelného šestiúhelníku	16
4.3.3	Konstrukce pravidelného sedmiúhelníku	17
5	„Nemožné úlohy“	20
5.1	Kubická rovnice	20
5.2	Zdvojnásobení krychle	21
5.2.1	Konstrukce $\sqrt[3]{2}$	22
5.3	Trisekce Úhlu	23
5.3.1	Konstrukce podle Abeho	23
5.4	Kvadratura kruhu	25
5.4.1	Konstrukce π	25

6 Závěr	27
Seznam použité literatury	28
Seznam obrázků	30
Seznam tabulek	31

Kapitola 1

Úvod

Pod pojmem skládání papíru nebo origami si toho lze mnoho představit. Může to být zábavná činnost pro děti, jakou je třeba skládání a házení papírových letadel, nebo forma umění, při které autoři děl dokáží z papíru vytvořit jak neuvěřitelně realistické modely zvířat nebo budov, tak i abstraktní tvarově zajímavé kompozice. V posledních letech se objevilo další odvětví, vědecké, které se zabývá postupy a operacemi použitými při skládání (nejen) papíru, jejich analýzou a tvorbou na nich založených řešeních pro různé technické problémy.

Podíváme se na počátky skládání papíru, uvidíme, že se nejedná z historického hlediska o čistě japonskou záležitost, skládalo se i v Evropě. V další kapitole si představíme takzvané Huzita-Justinovy axiomy, což je popis přehybů v origami konstrukcích, které budeme v dalších částech práce používat. Podíváme se na dělení úsečky na stejné části, tečnu paraboly a některé pravidelné mnohoúhelníky. Nakonec pomocí origami vyřešíme antické problémy neřešitelné pomocí pravítka a kružítko.

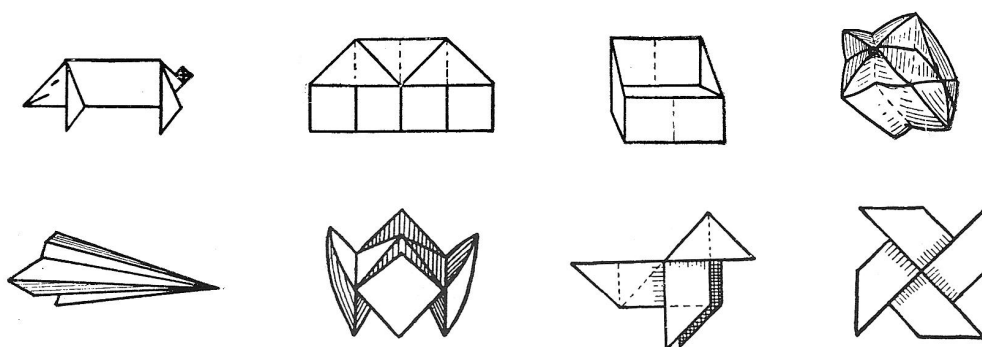
Práce byla zpracována v typografickém prostředí \LaTeX , obrázky jsou buďto vytvořené v programu GeoGebra nebo převzaty z citovaných pramenů.

Kapitola 2

Origami

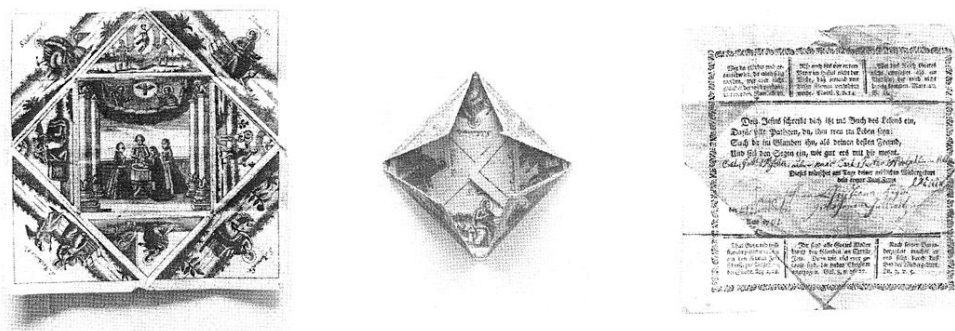
2.1 Historie

Ačkoliv nejstarší objevený kus papíru pochází z Číny z poloviny 2. století před naším letopočtem, nejstarší záznamy o origami, jakožto skládání papíru jak ho známe dnes, jsou staré pouze několik stovek let. Origami navíc nepochází pouze z Japonska, ale vyvíjelo se nezávisle i v Evropě, což lze ukázat na rozdílech v papírových modelech, které vznikly ve stejném období. Mezi evropské patří například šipka (papírové letadlo), čepice nebo ptáček *pajarita* ze Španělska (Obr. 2.1).



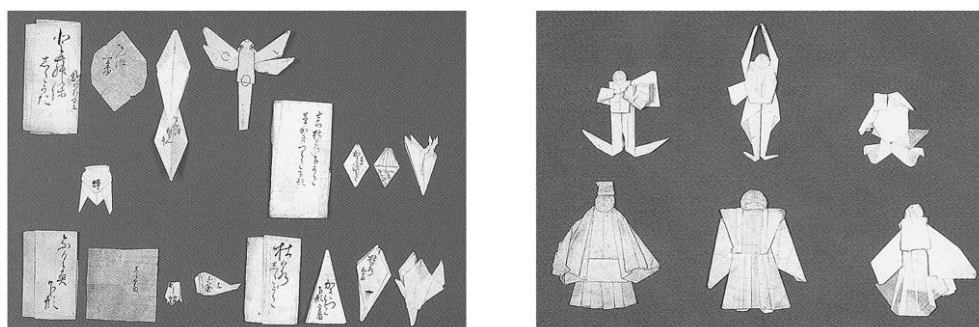
Obrázek 2.1: Příklady tradičních evropských modelů, ptáček *pajarita* ve 2. řádku, 3. sloupci [8]

Za původ evropského skládání jsou považovány křestní listy z 16. století, které měly přeloženy vnější rohy ke středu, což bylo zopakováno ještě jednou na vzniklém menším čtverečku (Obr. 2.2). Papír použitý pro evropské skládanky měl většinou tvar čtverce nebo obdélníku, stříhán byl zřídka a překládán byl většinou po přímkách tvořících čtvercovou síť nebo úhlopříčky. O rozšíření skládání v Evropě se zasloužil také německý pedagog Friedrich Fröbel, který tvorbu papírových modelů začlenil do svého programu pro předškolní výchovu.



Obrázek 2.2: Německý křestní list z 18. století [8]

Za počátek origami v Japonsku jsou považovány obřadní obaly a obálky ze 14. století, které byly složeny specifickým způsobem podle toho, jaká věc v nich měla být zabalena. Japonské modely vytvořené před polovinou 19. století byly vytvářeny z mnoha tvarů papíru: čtverců, obdélníků, šesti a osmiúhelníků nebo z různých nepravidelných tvarů. Byly většinou barveny a při tvorbě bylo často použito stříhání. Pro Japonsko nyní typický jeřáb *orizuru* se objevuje až později.



Obrázek 2.3: Příklady tradičních japonských modelů z počátku 19. století [8]

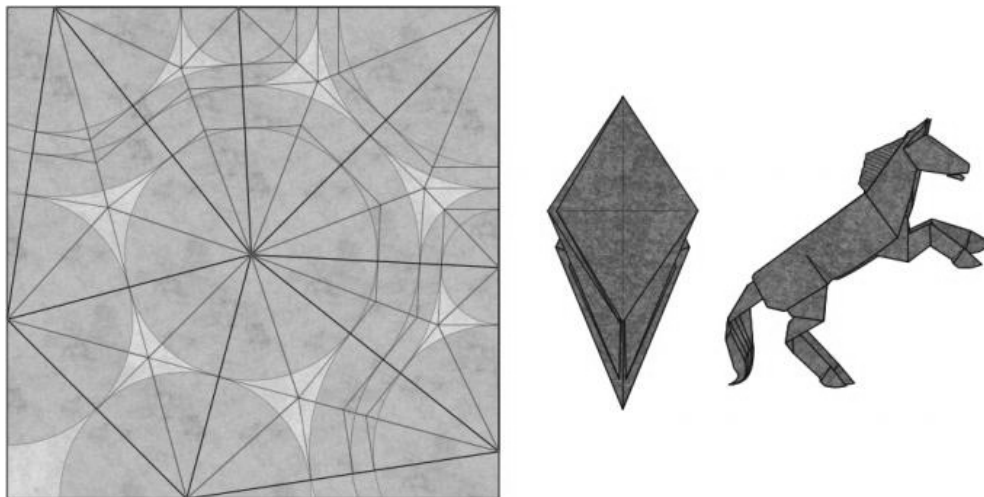
V polovině 19. století došlo díky otevření japonských hranic ke sjednocení japonského a evropského stylu skládání papíru, následně vzniká dnešní origami, pro které se stává pravidlem, že modely se skládají z papírů ve tvaru čtverce, bez použití nůžek nebo lepidla [8].

2.2 Origami a matematika

Při skládání se během postupu často objevuje určitý tvar, tzv. *základ*, který je pro několik různých modelů společný. Například z *ptačího základu* lze složit jak jeřába, tak několik dalších druhů ptáčků nebo draků. Tento *základ* nám například předurčuje, kolik bude mít výsledný výtvar končetin nebo jestli bude mít křídla. Tvorba nových skládanek tedy závisí na výběru již ověřeného *základu*.

Když však *základ* složíme a následně rozložíme, dostaneme papír se vzorem

určeným přehyby. Díky geometrické analýze těchto vzorů, která začala v 80. letech 20. století, byla zjištěna pravidla, která musí každý vzor splňovat, díky čemuž se objevila možnost vytvořit si pomocí počítače *základ* přesně podle specifických požadavků (Obr. 2.4) [7].



Obrázek 2.4: Vzor, *základ* a konečná podoba hřebce, z [16]

2.3 Moderní origami

Origami můžeme rozdělit na dva typy: moderní a tradiční. V tradičním origami se jedná o postupy skládání, které jsou předávány dalším generacím bez znalosti původního autora skládanky. Moderní origami, které vzniká ve 20. století, je založeno na tom, že „návrhář origami“ vytvoří postup a vzor, díky kterému pak může kdokoliv určitý model poskládat. Uznání za hotové dílo pak náleží jak tomu, kdo je autorem vzoru, tak tomu, kdo model skutečně sestavil. Je důležité, aby všechny výtvořiny složené z jednoho vzoru měly stejnou finální podobu a aby byl postup skládání srozumitelný a dobře proveditelný. Z tohoto důvodu dochází v polovině 20. století ke standardizaci zápisů skládacích sekvencí, takzvaných *diagramů*, pomocí šipek a dalších jednoduchých symbolů. Zároveň je v této době slovo *origami* vybráno jako mezinárodní označení pro skládání papíru [7].

Kapitola 3

Základní operace při skládání

3.1 Huzita-Justinovy axiomy

V 70. letech 20. století začalo metodické zkoumání možných kombinací přehybů a také toho, jaké délky úseček pomocí nich můžeme sestrojít. První systematickou studii učinil Humiaki Huzita, který popsal šest základních způsobů, jak přehyb provést. Těmto šesti konstrukcím se dostalo pojmenování *Huzitovy axiomy*.

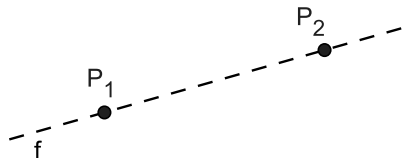
V roce 2003 pak Koshiro Hatori objevil další, sedmý axiom, který neodpovídal žádným z Huzitova šesti. Později se ukázalo, že všech sedm jich již dříve identifikoval Jacques Justin, a to dokonce ve stejném sborníku, ve kterém je původní Huzitova práce. Justinův článek byl však dlouhou dobu přehlížen, možná proto, že byl vydán pouze ve francouzském jazyce. Soubor těchto sedmi axiomů byl následně označen jako „Huzita-Justinovy axiomy“ (HJA) [17].

Bylo zjištěno, že k sestrojení všech možných obrazců pomocí HJA je postačující použití pouze jednoho z nich, Huzitova šestého axiomu ((O6) v tabulce 3.1), spolu s definicí bodu jako průsečíku dvou přehybů [18]. Proto je název *axiomy* mírně zavádějící, jedná se spíše o operace, které využívají již dané body a přímky k vytvoření nových přímek (přehyby) a bodů (průsečík dvou přímek). Mohou také nastat situace, ve kterých můžeme přehyb realizovat více způsoby nebo nám provést vůbec nepůjde. Detailní analýzu těchto operací najdeme v [5]. Pojmenování *Huzitovy axiomy* se však používá již od jejich publikace a stalo se tradičním názvem.

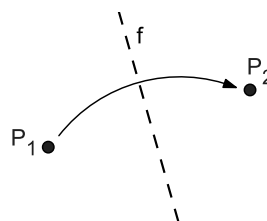
Bylo dokázáno, že výčet těchto sedmi HJA obsahuje všechny možné přehyby, které lze provést pomocí jednoho přeložení bodů nebo přímek na jiné body a přímky [2].

3.2 Popis axiomů

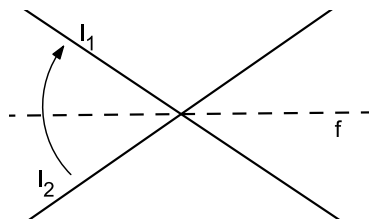
(O1) Jsou-li dány dva body P_1 a P_2 , můžeme vytvořit přehyb, který oběma body prochází.



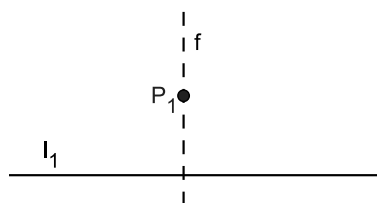
(O2) Jsou-li dány dva body P_1 a P_2 , můžeme přehnout P_1 na P_2 .



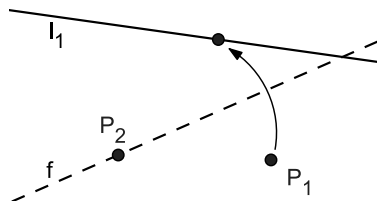
(O3) Jsou-li dány dvě přímky l_1 a l_2 , můžeme přehnout l_1 na l_2 .



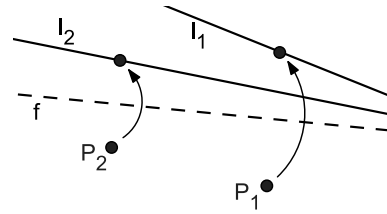
(O4) Jsou-li dány bod P_1 a přímka l_1 , můžeme vytvořit přehyb kolmý k l_1 , který zároveň prochází bodem P_1 .



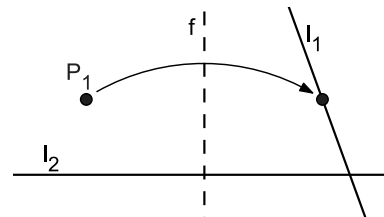
(O5) Jsou-li dány body P_1 , P_2 a přímka l_1 , můžeme vytvořit přehyb, který umístí P_1 na l_1 a zároveň prochází bodem P_2 .



(O6) Jsou-li dány body P_1, P_2 a přímky l_1, l_2 , můžeme vytvořit přehyb, který umístí P_1 na l_1 a zároveň i P_2 na l_2 .



(O7) Je-li dán bod P_1 a přímky l_1, l_2 , můžeme vytvořit přehyb kolmý k l_2 , který umístí bod P_1 na l_1 .



Tabulka 3.1: Huzita-Justinovy Axiomy

3.3 Vlastnosti axiomů

- (O1) nám umožňuje vytvořit přímku jdoucí dvěma známými body,
- pomocí (O2) dokážeme sestrojít osu úsečky dané dvěma body,
- díky (O3) umíme sestrojít osu libovolného úhlu nebo v případě rovnoběžek osu jimi daného rovinného pásu.
- (O4) slouží ke spuštění kolmice z daného bodu k přímce, přímku přehneme samu na sebe tak, aby přehyb zároveň procházel bodem.
- (O5) a (O7) odpovídají konstrukcím tečny k parabole (viz sekce 4.2),
- přehyb (O6) je společnou tečnou dvou parabol, jeho použití bude klíčové u postupů v kapitole 5.

Kapitola 4

Origami konstrukce

Při origami konstrukcích postupujeme tak, že opakovaně používáme HJA na předem danou množinu nějakých objektů - většinou vrcholy a strany čtverce papíru. Nové body a přímky které tímto způsobem dostaneme, pak můžeme použít v dalších krocích.

Bylo ukázáno, že všechny standardní konstrukce, proveditelné pomocí pravítka a kružítka v klasické Eukleidovské geometrii, lze provést pomocí původních 6ti Huzitových axiomů [1].

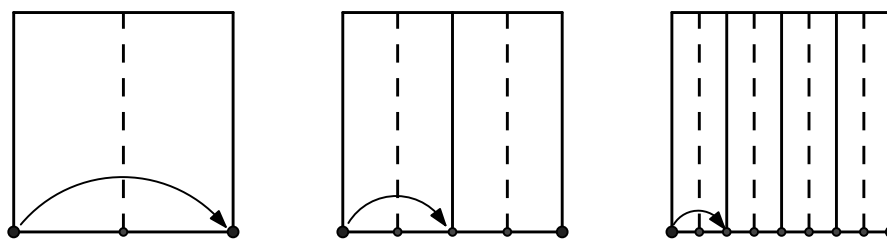
4.1 Dělení úsečky na stejné části

V praxi se při skládání velice často objevuje problém, jak pomocí origami konstrukcí rozdělit úsečku na určitý počet stejných částí. Můžeme to provést hned několika různými způsoby, podle toho, jaký počet částí potřebujeme [17].

4.1.1 Dělení pomocí půlení

Nejjednodušší způsob dělení využívá Huzitovy operace (O2), pomocí které dokážeme zkonstruovat osu úsečky dané dvěma body a najít tak její střed. Provedením (O2) na jednu ze stran počátečního čtverce jí rozdělíme na dvě poloviny. Polovinu můžeme pak rozdělit stejným způsobem na dvě čtvrtiny a postup opakovat až do dosažení požadované délky $\frac{1}{2^n}$ (viz Obr. 4.1).

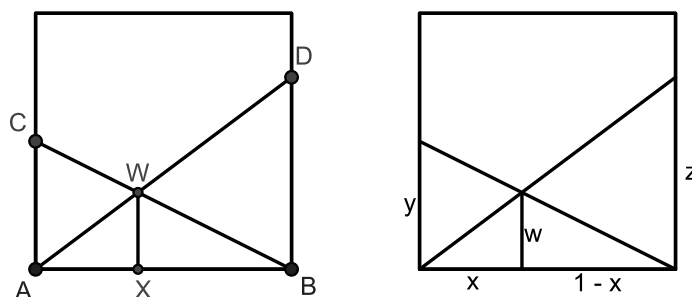
Použití tohoto dělení je velmi výhodné, neboť na našem kousku papíru netvoří žádné pomocné přehyby (tj. při dalším skládání nepotřebné přehnutí papíru). Navíc nemusíme vždy překládat celý papír, stačí, když si uděláme značku na té straně, kterou chceme dělit. Toto nejjednodušší dělení budeme využívat i v dalších konstrukcích.



Obrázek 4.1: Dělení strany čtverce na poloviny, čtvrtiny a osminy

4.1.2 Křížící se diagonály

Při sestavování komplikovanějších origami modelů je třeba rozdělit stranu původního čtverce na části jako jsou třeba třetiny nebo pětiny. K tomu můžeme využít konstrukci podle obrázku 4.2.



Obrázek 4.2: Dělení strany čtverce pomocí křížících se diagonál

Předpokládejme, že strana daného čtverce má velikost 1. Je vidět, že trojúhelník $\triangle ABC$ je podobný $\triangle XBW$ a zároveň je $\triangle ABD$ podobný $\triangle AXW$, neboť $CA \parallel WX \parallel DB$. Potom musí platit následující poměry délek stran:

$$\frac{y}{x+1-x} = \frac{w}{1-x} \quad \text{a zároveň} \quad \frac{z}{x+1-x} = \frac{w}{x}$$

po vyjádření w z obou rovnic a srovnání dostaneme

$$(1-x) \cdot y = x \cdot z$$

$$\frac{1-x}{x} = \frac{z}{y}$$

za x dosadíme $\frac{p}{q}$; $p, q \in \mathbb{N}, p < q$, podle toho na jaké části chceme stranu rozdělit

$$\frac{1 - \frac{p}{q}}{\frac{p}{q}} = \frac{z}{y}$$

a po úpravě dostaneme

$$\left(\frac{q}{p} - 1\right) = \frac{z}{y}. \quad (4.1)$$

Například pro konstrukci $\frac{1}{3}$ bychom po dosazení $p = 1$ a $q = 3$ do (4.1) dostali

$$2 = \frac{z}{y}$$

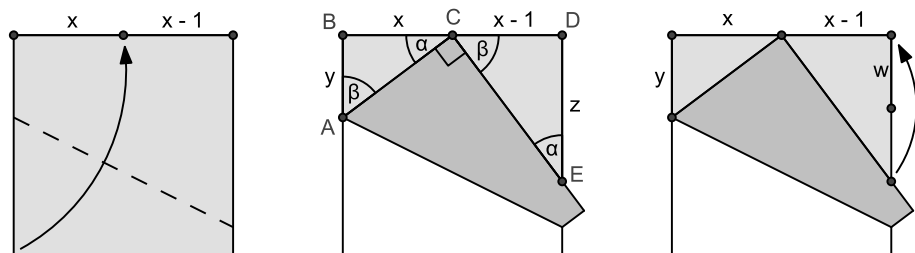
Následně volíme z a y tak, aby vyhovovaly rovnici a zároveň nebyly větší než 1, což je velikost strany čtverce. Pokud je to možné, je vhodné dosazovat čísla ve tvaru $\frac{k}{2^n}$, $k \in \mathbb{N}, k \leq 2^n$ snadno sestrojitelné pomocí půlení strany. V případě $\frac{1}{3}$ tedy třeba $z = 1$ a $y = \frac{1}{2}$.

Pokud chceme vytvořit n -tiny, můžeme uvažovat $p = 1$ a $q = n$, pokud navíc vezmeme $z = 1$, tak po dosazení do (4.1) dostaneme $y = \frac{1}{n-1}$. Opakovaným použitím tohoto postupu jsme tedy schopni provést dělení na libovolný počet částí.

4.1.3 Dělení pomocí Hagovy věty

Kazuo Haga je japonským profesorem biologie, který objevil další možnost dělení úsečky na části, tato konstrukce je dnes známá jako *Hagova věta*.

Věta 1 (Hagova věta [6]). *Mějme papír tvaru čtverce o straně velikosti 1. Přehneme-li jeden z rohů k polovině protější strany, vzniknou nám dva pravoúhlé pythagorejské trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle CDE$ (viz Obr. 4.3). Pak pro délku vzniklé úsečky DE platí, že $|DE| = \frac{2}{3}$.*



Obrázek 4.3: Dělení strany čtverce s použitím Hagovy věty

Důkaz. Pokud označíme $|AB| = y$ a $|BC| = x = \frac{1}{2}$, tak pro velikost přepony v $\triangle ABC$ platí: $|AC| = 1 - y$. Z pythagorovy věty získáme vztah

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = (1 - y)^2$$

po úpravě pak:

$$y = \frac{3}{8}.$$

Součet velikostí úhlů α a β u vrcholu C je 90° , trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle CDE$ mají díky tomu stejné velikosti úhlů, jsou si tedy podobné a jejich strany jsou ve stejném poměru:

$$\frac{|CD|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|BC|}.$$

Po dosazení za $|CD| = |BC| = \frac{1}{2}$ a $|AB| = y = \frac{3}{8}$ dostáváme, že $|DE| = \frac{2}{3}$. □

Tato věta slouží k rozdělení strany čtverce na třetiny, dá se však zobecnit pro dělení na libovolný počet částí. Postup je pak obdobný jako u důkazu věty 1, akorát uvažujeme, že $|BC| = x$ a $|CD| = x - 1$. Z pythagorovy věty pro trojúhelník $\triangle ABC$ dostaneme

$$y = \frac{1 - x^2}{2},$$

z podobnosti pak

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{x - 1},$$

po dosazení za y , vyjádření z a úpravě

$$z = \frac{2x}{1 + x}.$$

Polovinu z označme jako w , pak musí platit

$$w = \frac{x}{1 + x}$$

Za w pak dosadíme $\frac{p}{q}$; $p, q \in \mathbb{N}, p < q$, podle toho na jaké části chceme stranu rozdělit a po úpravě vyjde

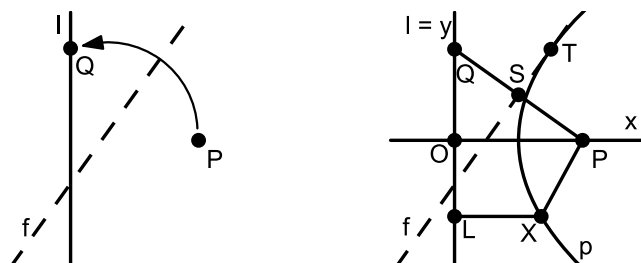
$$x = \frac{p}{q - p}. \tag{4.2}$$

Z rovnice 4.2 je pak vidět, že k sestrojení úseku délky $\frac{p}{q} = \frac{1}{n}$, nám stačí znát velikost $x = \frac{1}{n-1}$, postup tedy můžeme opakovat, dokud se nedostaneme k libovolné n -tině strany.

Poznámka. Při dělení na n -tiny se konstrukce 4.1.2 a 4.1.3 často liší v tom, kolik pomocných přehybů je k jejich provedení třeba sestrojít. Je výhodnější volit postup, pro který je třeba pomocných přehybů méně, ulehčí nám to případné další skládání papíru [17].

4.2 Konstrukce tečen k parabole

Věta 2. Mějme přímku l , bod $Q \in l$ a bod $P \notin l$. Potom přímka f , vytvořená přehybem P na Q podle operace (O2) je tečnou k parabole p , dané ohniskem P a řídicí přímkou l .



Obrázek 4.4: Tečna k parabole sestavená přeložením

Důkaz. Zvolme soustavu souřadnic tak, že $l = y$ a $P \in x$ (viz Obr. 4.4). Souřadnice bodů pak budou $P = [d, 0]$ a $Q = [0, e]$. O přímce f víme, že musí mít rovnici ve tvaru $ax + by + c = 0$, je osou úsečky PQ a leží na ní střed této úsečky, bod $S = [\frac{d}{2}, \frac{e}{2}]$. Jejím normálovým vektorem je $\vec{n} = P - Q = (d, -e)$, tedy

$$f : dx - ey + c = 0,$$

po dosazení souřadnic bodu S do rovnice f dostaneme

$$c = \frac{e^2 - d^2}{2},$$

rovnice přímky f po dosazení za c vypadá následně:

$$f : dx - ey + \frac{e^2 - d^2}{2} = 0 \quad (4.3)$$

Pro každý bod $X = [x, y]$ náležící parabole p platí, že $|PX| = |lX|$. Zároveň $|PX| = \sqrt{y^2 + (x - d)^2}$ a $|lX| = |yX| = |x|$, tedy

$$\begin{aligned} |PX| &= |lX| \\ \sqrt{y^2 + (x - d)^2} &= |x| \\ y^2 + (x - d)^2 &= x^2 \end{aligned}$$

a po úpravě dostaneme:

$$p : y^2 - 2dx + d^2 = 0. \quad (4.4)$$

Vyřešením soustavy rovnic 4.3 a 4.4 pro neznámé x a y , získáme společné body f a p . Z 4.4 dostáváme

$$dx = \frac{y^2 + d^2}{2},$$

dosadíme do 4.3:

$$\frac{y^2 + d^2}{2} - ey + \frac{e^2 - d^2}{2} = 0$$

a po úpravě získáme kvadratickou rovnici:

$$y^2 - 2ey + e^2 = 0. \quad (4.5)$$

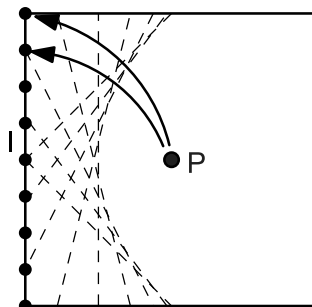
Diskriminant rovnice 4.5 je $D = 4e^2 - 4e^2 = 0$, soustava má tedy jediné řešení

$$x = \frac{e^2 + d^2}{2d}, \quad y = e.$$

Jelikož má přímka f s parabolou p dvojnásobný průsečík $T = \left[\frac{e^2 + d^2}{2d}, e \right]$, můžeme f označit za tečnu p . [20]. □

Tečny k parabole tedy pomocí skládání papíru dokážeme sestrojít velice snadno, stačí nám například označit si za l hranu papíru a za P jakýkoliv bod uvnitř papíru. Následně přeložením P na jakýkoliv z bodů $Q \in l$ získáme tečnu (Obr. 4.5).

Pomocí Huziovy (O5) tedy dokážeme jedním přehybem sestrojít z daného bodu tečnu k parabole, pomocí (O7) pak tečnu kolmou na danou přímku. Nejzajímavější z operací, (O7), nám dokonce umožňuje vytvořit společnou tečnu dvou parabol.



Obrázek 4.5: Tečny vytvořené opakovaným překládáním P k l

4.3 Konstrukce pravidelných N -úhelníků pomocí skládání

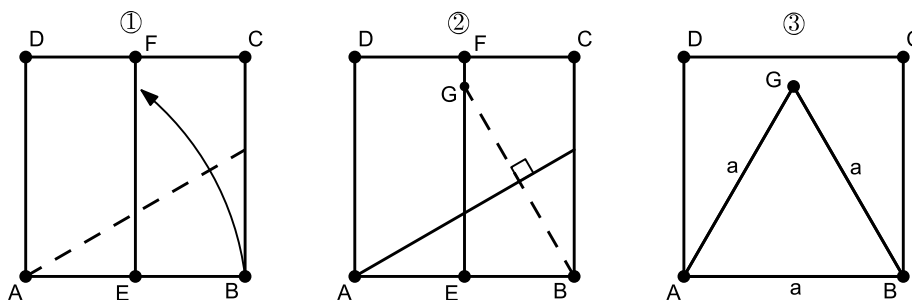
Rakouský matematik Robert Geretschläger zjistil, že pomocí origami konstrukcí jsme schopni složit pravidelné N -úhelníky pro $N = 2^j 3^k (2^n 3^m + 1)$,

kde j, k, n, m jsou přirozená čísla nebo nula a výraz v závorce je prvočíslo [17]. Z této formule lze zjistit, že pro $N \leq 20$ nedokážeme složit pouze pravidelný jedenáctiúhelník. Na postupy pro sestavení některých z nich se podíváme, další konstrukce jsou popsány například v [4].

4.3.1 Konstrukce rovnostranného trojúhelníku

Nejjednodušším pravidelným mnohoúhelníkem je rovnostranný trojúhelník, postup pro jeho konstrukci vypadá následovně (viz Obr. 4.6):

1. Přehneme stranu AD k BC , čímž vytvoříme úsečku EF v polovině čtverce. Následně přeložíme vrchol B k EF tak, aby přehyb procházel bodem A .
2. Na vzniklou přímku spustíme z B kolmici a její průsečík s EF označíme jako bod G .
3. $\triangle ABG$ je pak rovnostranný, neboť jeho výška z bodu G pólí AB a zároveň výška z A pólí BG .



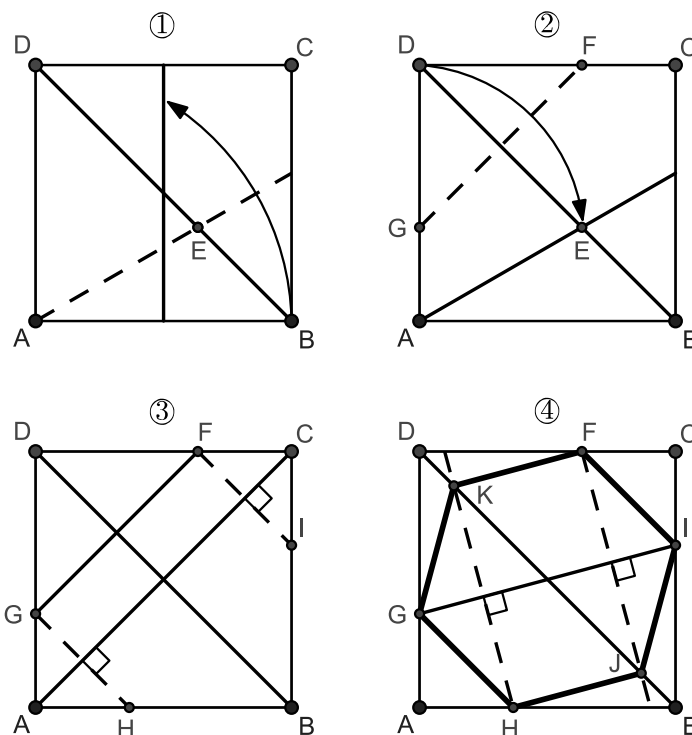
Obrázek 4.6: Postup při skládání rovnostranného trojúhelníku

4.3.2 Konstrukce pravidelného šestiúhelníku

Pravidelný šestiúhelník složený podle následujícího postupu je tím největším, jaký lze ze čtverce papíru získat [4]. Řídíme se obrázkem 4.7.

1. Přeložením A k C získáme úhlopříčku BD . Poté stejně jako u rovnostranného trojúhelníku vytvoříme přehnutím AD k BC úsečku v polovině čtverce a přeložíme k ní vrchol B tak, aby přehyb procházel bodem A . Průsečík tohoto přehybu s BD označíme E .
2. Konstrukcí osy úsečky DE získáme na hranách čtverce body F a G , dva z vrcholů šestiúhelníku.

3. Přehybem D k B dostaneme úhlopříčku AC , na kterou spustíme z bodů F a G kolmice, čímž najdeme vrcholy H a I .
4. Vytvoříme přehyb GI , z F a H k němu sestrojíme kolmice. Průsečíky kolmic s BD jsou poslední hledané vrcholy J a K . Dostáváme šestiúhelník $HJIFKG$. Ze třetího kroku díky osové souměrnosti vidíme, že $|GH| = |FI|$, ze čtvrtého pak, že $|GH| = |GK|$, $|FI| = |IJ|$, $|GK| = |FK|$ a $|IJ| = |HJ|$, všechny strany jsou tedy stejně dlouhé.



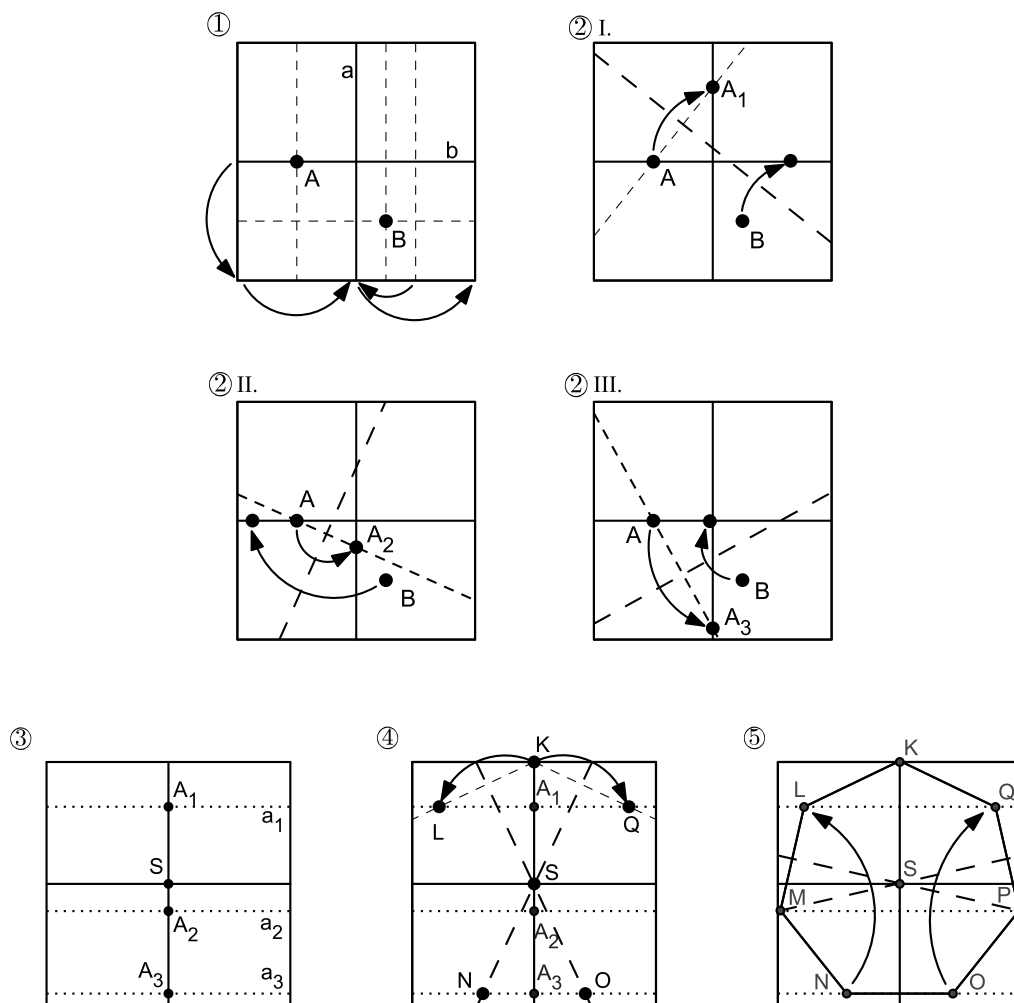
Obrázek 4.7: Postup při skládání pravidelného šestiúhelníku

4.3.3 Konstrukce pravidelného sedmiúhelníku

Vytvořit pravidelný sedmiúhelník pomocí klasických konstrukcí pravítkem a kružítkem nelze, pomocí skládání papíru však ano. Následující postup popsal Humiaki Huzita [13]. Používá se při něm přehyb (O6), který je na přesné provedení poměrně obtížný, je lepší použít větší kus papíru a při skládání si pomoci třeba jeho prosvícením proti světlu.

1. Čtverec papíru přehnutím protějších stran k sobě rozdělíme na čtvrtiny, úsečky označíme a a b podle obrázku 4.8.

2. Uvažujeme souřadný systém, kde má levý dolní roh souřadnice $[0, 0]$ a pravý horní $[1, 1]$, najdeme body $A = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ a $B = [\frac{5}{8}, \frac{1}{4}]$.
3. Nyní použijeme (O6), jehož použitím umístíme A na a a zároveň B na b . Tento přehyb provedeme všemi třemi možnými způsoby (② I., ② II. a ② III. na obrázku 4.8).
4. Kolmice z bodu A k těmto přehybům a svislá úsečka a se protnou v bodech A_1, A_2 a A_3 (což jsou body osově souměrné s bodem A podle přehybů). Na každé z přímk a_1, a_2, a_3 kolmých k a a jdoucích body A_1, A_2, A_3 budou ležet dva vrcholy sedmiúhelníku. $S = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ bude jeho střed, bod $K = [\frac{1}{2}, 1]$ jeho první vrchol.
5. Přehyby procházejícími bodem S umístíme K na a_1 . Jako průsečíky s a_3 dostaneme vrcholy sedmiúhelníku N a O . Osově souměrné s K podle přehybů jsou pak L a Q , které leží na a_1 .
6. Pro nalezení posledních vrcholů přeložíme, opět skrz S, N k L a O ke Q . Vrcholy jsou průsečíky s a_2 , označíme je M a P .
7. Spojením vrcholů vznikne pravidelný sedmiúhelník $KLMNOPQ$.



Obrázek 4.8: Postup při konstrukci pravidelného sedmiúhelníku pomocí skládání

Kapitola 5

„Nemožné úlohy“

Od dob antického Řecka jsou známy tři problémy, které tehdejší matematici nedokázali klasickými konstrukcemi pomocí (neoznačeného) pravítka a kružítka vyřešit:

- Zdvojnásobení krychle, kde je třeba nalézt hranu krychle o dvojnásobném objemu, než je krychle zadaná.
- Trisekce úhlu, kde se jedná o rozdělení libovolného daného úhlu na třetiny.
- Kvadratura kruhu, kde chceme sestrojít stranu čtverce, jehož obsah bude stejný jako obsah zadaného kruhu.

V 19. století bylo pak dokázáno, že vyřešit tyto problémy pouze s použitím pravítka a kružítka nelze. Známe však postupy jak úlohy vyřešit, když použijeme konstrukce pomocí skládání papíru. Důležitou roli zde hraje Huzitova operace (O6) [9].

První, kdo odhalil možnosti použití skládání papíru jako nástroje pro geometrické konstrukce, byla ve 30. letech 20. století italská profesorka matematiky Margharita Piazzola Beloch, která jako první ukázala, že díky (O6) jsme schopni najít řešení libovolné rovnice třetího stupně a pomocí toho vyřešit problémy zdvojnásobení krychle a trisekce úhlu [12].

5.1 Kubická rovnice

Rozdíl mezi konstrukcemi pomocí pravítka a kružítka a origami konstrukcemi, kde využíváme operací daných HJA, spočívá v číslech, která v daném systému dokážeme sestrojít. Sestrojitelným číslem rozumíme takové komplexní číslo, ke kterému jsme schopni najít jemu odpovídající bod v souřadném systému, daném v rovině osami x a y . Používáme přitom vždy jen určité operace a vycházíme

z počáteční množiny bodů, většinou $[0, 0]$ a $[1, 0]$. Všechna čísla, sestrojitelná pomocí pravítka a kružítka mohou být zapsány jako řešení určité kvadratické rovnice [17]. Pomocí origami konstrukcí dokážeme najít reálné kořeny jak kvadratické tak i kubické rovnice s danými sestrojitelnými reálnými koeficienty.

Pokud máme dvě paraboly dané předpisy

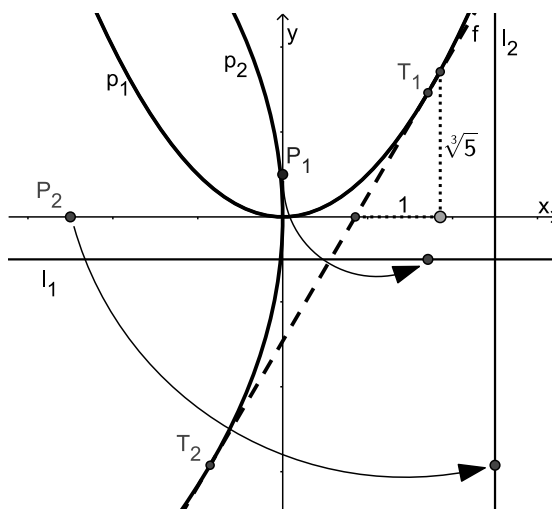
$$p_1 : y = \frac{1}{2}x^2, \quad p_2 : \left(y - \frac{1}{2}a\right)^2 = 2bx,$$

tak pro dané a a b dokážeme pomocí (O6) najít jejich společnou tečnu. Ta bude mít směrnici k , která je kořenem rovnice $k^3 + ak + b = 0$ [1].

Vezměme například $a = 0$ a $b = -5$. Paraboly budou určeny ohnisky P_1, P_2 a řídicími přímkami l_1, l_2 následovně:

$$p_1 : P_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right], l_1 : y = -\frac{1}{2}, \quad p_2 : P_2 = \left[\frac{-5}{2}, 0\right], l_2 : x = \frac{5}{2}.$$

Z kubické rovnice dostaneme směrnici společné tečny f : $k = \sqrt[3]{5}$ a díky znalosti jednotkové vzdálenosti pak můžeme úsečku o velikosti $\sqrt[3]{5}$ sestrojít (Obr. 5.1).



Obrázek 5.1: f je společná tečna parabol p_1 a p_2 , pomocí (O6) ji umíme najít

5.2 Zdvojnásobení krychle

Pokud má zadaná krychle hranu délky a , její objem je $V_1 = a^3$. Potřebovali bychom zjistit délku hrany b jiné krychle, která má objem $V_2 = b^3 = 2V_1$. Platí tedy, že $b^3 = 2a^3$, nebo po odmocnění $b = a \cdot \sqrt[3]{2}$. Délku a známe, kdyby se nám podařilo sestrojít úsečku o délce $\sqrt[3]{2}$, mohli bychom je spolu geometricky vynásobit a výsledek by byla úsečka o délce b , čímž bychom problém vyřešili.

5.2.1 Konstrukce $\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{2}$ je možné sestrojít postupem ze sekce 5.1. Podívejme se však na původní Belochové konstrukci, ke které využila čtverec se stranou XY a dalšími stranami na polopřímkách XA a YB , přičemž X leží na r a Y na s (viz Obr. 5.2) [12]. V rovinné soustavě souřadnic s počátkem O označíme osu y jako r , osu x jako s . Najdeme body $A = [-1, 0]$ a $B = [0, -2]$, poté sestrojíme přímky $r' : x = 1$ a $s' : y = 2$. Přehnutím A k r' a zároveň B k s' podle (O6) vytvoříme přehyb, který protne r v bodě X a zároveň s v bodě Y podle obrázku 5.2. Pravoúhlé rojúhelníky $\triangle OAX$, $\triangle OXY$ a $\triangle OBY$ jsou si navzájem podobné, neboť AA' a BB' jsou obě kolmé k XY . Platí tedy, že

$$\frac{|OX|}{|OA|} = \frac{|OY|}{|OB|} = \frac{|OB|}{|OY|}.$$

Dosažením $|OA| = 1$ a $|OB| = 2$ dostáváme

$$|OX| = \frac{|OY|}{|OB|} = \frac{2}{|OY|},$$

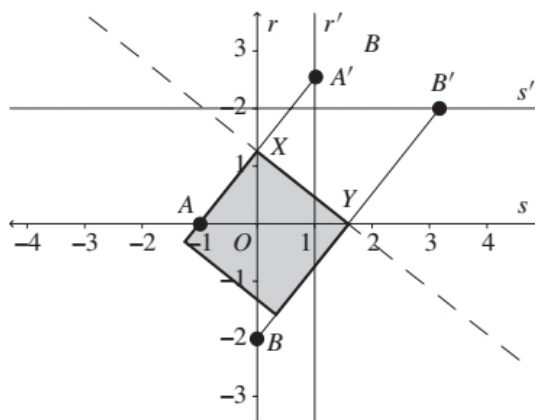
musí tedy platit

$$|OX|^2 = |OY| \quad \text{a zároveň} \quad |OX| \cdot |OY| = 2,$$

tedy

$$|OX|^3 = 2.$$

Dostáváme, že $|OX| = \sqrt[3]{2}$, problém zdvojnásobení krychle tedy pomocí této konstrukce dokážeme vyřešit. Martin v [18] ukázal, že pokud v tomto postupu zvolíme $B = [0, -k]$ a $s' : y = k$, délka úsečky $|OX|$ bude $\sqrt[3]{k}$.



Obrázek 5.2: Konstrukce $\sqrt[3]{2}$ pomocí skládání papíru podle Belochové [12]

5.3 Trisekce Úhlu

K tomu abychom rozdělili daný úhel $\theta = 3\phi$ na třetiny by nám stačilo najít $\cos(\phi)$. Můžeme použít součtové vzorce pro goniometrické funkce:

$$\cos(\theta) = \cos(\phi + 2\phi) = \cos(\phi)\cos(2\phi) - \sin(\phi)\sin(2\phi).$$

Dál víme, že

$$\cos(2\phi) = \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi),$$

$$\sin(2\phi) = 2\sin(\phi)\cos(\phi)$$

a

$$\sin^2(\phi) = 1 - \cos^2(\phi).$$

Dosazením do původní rovnice dostaneme

$$\cos(3\phi) = 4\cos(\phi)^3 - 3\cos(\phi).$$

Označíme $x = \cos(\phi)$ a dostáváme rovnici třetího stupně

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \cos(3\phi) = 0,$$

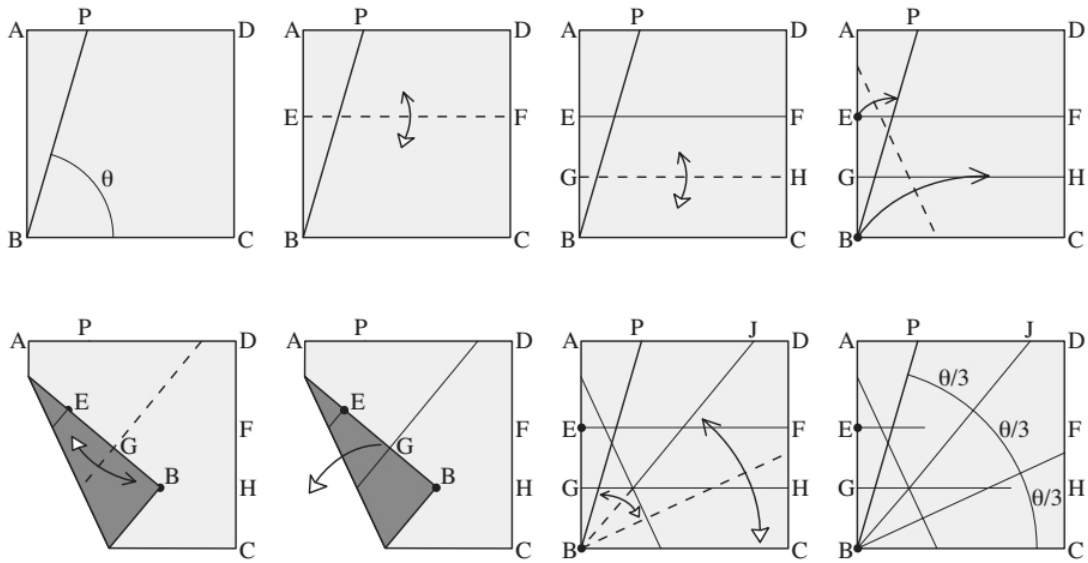
kde $\cos(3\phi)$ díky zadanému úhlu $\theta = 3\phi$ známe. Problém tedy opět vyřešíme, pokud najdeme kořen určité rovnice třetího stupně.

5.3.1 Konstrukce podle Abeho

Pro rozdělení úhlu na třetiny je známo několik postupů, jeden z nich vypracoval japonský matematik a origamista Hisashi Abe pro trisekci ostrého úhlu daného přehybem na čtverci papíru [17].

Postupujeme podle obrázku 5.3:

1. Označíme si úhel $\angle CBP$ určený pro trisekci.
2. Vytvoříme libovolný přehyb EF , rovnoběžný s BC .
3. Přeložíme BC k EF , abychom dostali GH .
4. Nyní nastává chvíle pro (O6), která nám umístí B na GH a zároveň E na BP .
5. Přeložením podél již existujícího přehybu jdoucího bodem G najdeme bod J na straně AD .
6. Prodloužíme přehyb z J až do bodu B



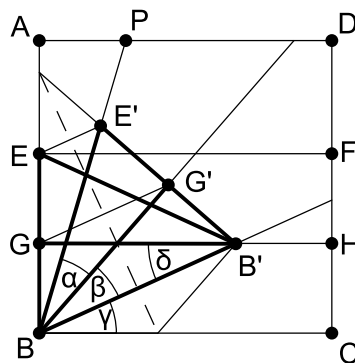
Obrázek 5.3: Postup při Abeho trisekci ostrého úhlu [17]

7. trisekci dokončíme přeložením vrcholu C k BJ tak, aby přehyb procházel bodem B .

Podle obrázku 5.4 ukážeme, že se opravdu jedná o trisekci.

Chceme ověřit, jestli $\alpha = \beta = \gamma$. Podívejme se na trojúhelník $\triangle EBB'$, víme, že $|EG| = |GB|$ a $GB' \perp EB$. GB' je tedy výškou, která zároveň půlí stranu trojúhelníku, $\triangle EBB'$ je tedy rovnoramenný.

$\triangle EBB'$ je osově souměrný s $\triangle E'B'B$ podle čárkovaně vyznačeného přehybu ze 4. kroku, takže je rovněž rovnoramenný. Výška trojúhelníku $\triangle E'B'B$ spuštěná z bodu B je osou úhlu $\angle E'BB'$, čili $\alpha = \beta$. Díky osové souměrnosti je navíc $\beta = \delta$ a jelikož je $GH \parallel BC$, dostáváme, že $\gamma = \delta$, tedy $\alpha = \beta = \delta = \gamma$.



Obrázek 5.4: Důkaz trisekce

5.4 Kvadratura kruhu

Chceme sestrojít stranu čtverce, jehož obsah bude stejný jako obsah zadaného kruhu. Pokud bude mít kruh poloměr r , jeho obsah bude $S = \pi r^2$. Strana čtverce stejného obsahu by potom měla být dlouhá $r\sqrt{\pi}$. Pokud se podíváme na pravoúhlý trojúhelník s odvěsnou délky $\frac{\pi-1}{2}$ a přeponou $\frac{\pi+1}{2}$, zjistíme, že délka druhé odvěsny bude

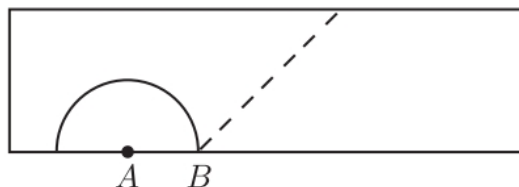
$$\sqrt{\left(\frac{\pi+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi-1}{2}\right)^2} = \sqrt{\pi},$$

stačila by nám tedy úsečku délky π . Bylo však dokázáno, že π je transcendentní číslo, které není kořenem žádného polynomu s racionálními koeficienty. Nedokážeme ho tedy sestrojít pravítkem a kružítkem ani pomocí origami.

Pokud bychom však při skládání papíru byli schopni vytvořit zahnutý přehyb, π bychom sestrojili dokázali. Provedení této operace je však při skutečném skládání velmi obtížné, většina lidí při něm využívá různých nástrojů jako třeba kružítko, kterým se v papíru vytvoří kružnicová rýha podél které se pak papír ohne [11].

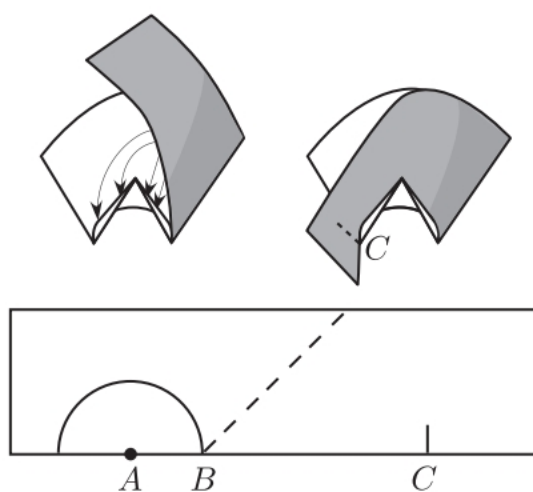
5.4.1 Konstrukce π

V dalším postupu budeme předpokládat, že umíme nějakým způsobem vytvořit kružnicový přehyb. Pruh papíru budeme skládat podle vzoru na obrázku 5.5.



Obrázek 5.5: Vzor pro konstrukci π [11]

Nejdřív vytvoříme kružnicovým přehybem půlkružnici se středem v bodě A . Pak provedeme standardní přehyb podél čárkované úsečky, která svírá se spodní stranou úhel 45° . Poté přehneme papír tak, aby se pomocí půlkružnicového přehnutí vytvořila část kužele s vrcholem A , jako na obrázku 5.6. Část papíru, přeloženou podél čárkované úsečky, následně na kružnicový přehyb nasuneme tak, aby hrana papíru ležela přímo na kružnici. Označíme místo, kde hrana kružnicový přehyb opustí jako bod C . Tím jsme vlastně částí papíru změřili obvod půlkružnice. Rozložíme do roviny. Pokud měl poloměr půlkružnice délku 1, tak úsečka BC bude mít délku π .



Obrázek 5.6: Konstrukce π pomocí kružnicového přehybu [11]

Kapitola 6

Závěr

Jak je vidět z názvu nyní již pravidelně konaných mezinárodních konferencí OSME (Origami Science, Mathematics and Education), zájem o studium skládání je jak ve vědě, tak i v matematice a vzdělávání.

Znalosti z origami konstrukcí lze využít například pro tvorbu algoritmů simulujících skládání airbagů [15] nebo pro návrh vesmírných solárních panelů, které je třeba ve skladné formě dopravit na místo a následně rozložit [19].

Ve školním prostředí můžeme skládání papíru použít ke zpestření hodin matematiky, kde pomocí něj snadno předvedeme dělení celku na části (zlomky), konstrukci tečny k parabole nebo podobnost a s ní spojené vlastnosti trojúhelníků. Možná atraktivnějším typem skládanek z papíru jsou prostorové modely, při jejichž tvorbě se procvičí prostorová představivost a tvořivost [14]. Badatelsky orientované origami aktivity pro pokročilejší studenty, které zasahují do odvětví jako teorie grafů nebo matematická analýza, můžeme najít v knize profesora Hullu [10]. Motivační aspekt origami při výuce bychom však neměli příliš přeceňovat [3].

Seznam použité literatury

- [1] ALPERIN, R. C. A mathematical theory of origami constructions and numbers. *New York Journal of Mathematics* 6 (2000), 119–133.
- [2] ALPERIN, R. C., AND LANG, R. J. One-, two-, and multi-fold origami axioms. In *4th International Conference on Origami, Science, Mathematics and Education* (Caltech, Pasadena CA, 2006), A K Peters, Ltd.
- [3] BOHÁČOVÁ, J. Origami jako didaktické prostředí v matematickém vzdělávání. Diplomová práce, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Praha, 2009.
- [4] DUREISSEIX, D. Folding optimal polygons from squares. *Mathematics Magazine* 79, 4 (2006), 272–280.
- [5] GHOURABI, F., KASEM, A., AND KALISZYK, C. Algebraic analysis of huzita’s origami operations and their extensions. In *Automated Deduction in Geometry* (2012), T. Ida and J. Fleuriot, Eds., Springer, pp. 143–160.
- [6] HAGA, K. Fold paper and enjoy math: Origamics. In *Origami 3: Third International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education* (2002), T. Hull, Ed., A K Peters, Ltd, pp. 307–328.
- [7] HATORI, K. History of origami. [online], dostupné z: <http://origami.ousaan.com/library/historye.html>.
- [8] HATORI, K. History of origami in the east and the west before interfusion. In *Origami 5: Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education* (2011), P. Wang-Iverson, R. J. Lang, and M. Yim, Eds., CRC Press, pp. 3–12.
- [9] HULL, T. C. A note on ”impossible” paper folding. *The American Mathematical Monthly* 103, 3 (1996), 240–241.
- [10] HULL, T. C. *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics*. A K Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts, 2006.

- [11] HULL, T. C. Constructing pi via origami. from:<http://mars.wne.edu/~thull/papers/constpi.pdf>, 2007.
- [12] HULL, T. C. Solving cubics with creases: The work of Beloch and Lill. *The American Mathematical Monthly* 118, 4 (2011), 307–315.
- [13] HUZITA, H. Drawing regular heptagon (7) and regular nonagon (9) by origami. *Symmetry: Culture and Science* 3, 1 (1992), 32–33.
- [14] KOUTECKÁ, L. Prostorové origami jako didaktické prostředí v matematickém vzdělávání. Diplomová práce, Západočeská univerzita v Plzni, Pedagogická fakulta, Plzeň, 2013.
- [15] LANG, R. J. Airbag folding. [online], dostupné z: <http://www.langorigami.com/article/airbag-folding>.
- [16] LANG, R. J. *Origami Design Secrets: Mathematical Methods for an Ancient Art*. CRC Press, 2003.
- [17] LANG, R. J. Origami and geometric constructions. Dostupné z: http://www.langorigami.com/files/articles/origami_constructions.pdf, 2010.
- [18] MARTIN, G. E. *Geometric Constructions*. Springer New York, 1998, ch. Paperfolding, pp. 145–159.
- [19] MIURA, K. Triangles and quadrangles in space. In *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures* (Valencia, 2009), pp. 27–38.
- [20] PECH, P. *Kuželosečky*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2004, ch. Tečna a polára kuželosečky, pp. 113–121.

Seznam obrázků

2.1	Příklady tradičních evropských modelů, ptáček <i>pajarita</i> ve 2. řádku, 3. sloupci [8]	4
2.2	Německý křestní list z 18. století [8]	5
2.3	Příklady tradičních japonských modelů z počátku 19. století [8]	5
2.4	Vzor, <i>základ</i> a konečná podoba hřebce, z [16]	6
4.1	Dělení strany čtverce na poloviny, čtvrtiny a osminy	11
4.2	Dělení strany čtverce pomocí křížících se diagonál	11
4.3	Dělení strany čtverce s použitím Hagovy věty	12
4.4	Tečna k parabole sestrojena přeložením	14
4.5	Tečny vytvořené opakovaným překládáním P k l	15
4.6	Postup při skládání rovnostranného trojúhelníku	16
4.7	Postup při skládání pravidelného šestiúhelníku	17
4.8	Postup při konstrukci pravidelného sedmiúhelníku pomocí skládání	19
5.1	f je společná tečna parabol p_1 a p_2 , pomocí (O6) ji umíme najít	21
5.2	Konstrukce $\sqrt[3]{2}$ pomocí skládání papíru podle Belochové [12]	22
5.3	Postup při Abeho trisekci ostrého úhlu [17]	24
5.4	Důkaz trisekce	24
5.5	Vzor pro konstrukci π [11]	25
5.6	Konstrukce π pomocí kružnicového přehybu [11]	26

Seznam tabulek

3.1 Huzita-Justinovy Axiomy	9
---------------------------------------	---