



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

MODELOVÁNÍ PŘENOSU TEPLA POMOCÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

MODELLING OF THE HEAT TRANSFER BY DIFFERENTIAL EQUATIONS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

LENKA SKLENÁŘOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. LUDĚK NECHVÁTAL, Ph.D.

BRNO 2011

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2010/2011

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Lenka Sklenářová

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Modelování přenosu tepla pomocí diferenciálních rovnic

v anglickém jazyce:

Modelling of the heat transfer by differential equations

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Matematické modelování přenosu tepla v daném prostředí vede na parciální diferenciální rovnice. Jedná-li se o ustálený stav a je-li v daném prostředí významný pouze jeden směr, redukuje se rovnice na obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu. Náplní práce je, vedle analýzy zmíněných typů rovnic, aplikace ve vybraných úlohách přenosu tepla.

Cíle bakalářské práce:

Cílem je nastudování a zpracování následujících partií:

- 1) Základní principy v teorii přenosu tepla.
- 2) Odvození rovnice vedení (kondukce) tepla.
- 3) Vyšetření speciálních případů - stacionární případ, redukce dimenze.
- 4) Vybrané metody řešení.
- 5) Konkrétní příklady, aplikace (případná vizualizace Maple, Matlab)

Seznam odborné literatury:

- 1) D. Pitts, L. Sissom: Schaum's outline of theory and problems of heat transfer, 1998.
- 2) J. Franců: Parciální diferenciální rovnice, skripta FSI VUT 2003.
- 3) J.H. Lienhard IV, J. H. Lienhard V: A heat transfer textbook, 3rd ed., 2003.

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Luděk Nechvátal, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2010/2011.

V Brně, dne 23.11.2010

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

Abstrakt

Práce se zabývá základními principy přenosu tepla, odvozením parabolické rovnice vedení tepla jak v tyči, tak i ve vyšších dimenzích, včetně diskuse o okrajových a počátečních podmínkách. Řešením ustálených případů rovnic v daném prostředí, kde je významný pouze jeden směr.

Abstract

The thesis focuses on basic principals of heat transfer, on deduction of parabolic equation, on heat conduction in a rod, as well as in higher dimension, including discussion on boundary and initial conditions. The thesis deals with solving steady states in given environment where only one direction is significant.

klíčová slova

rovnice vedení tepla, stacionární případy, analýza LODR_n, parciální diferenciální rovnice

key words

heat equation, steady states, analysis of linear ordinary differential equation, partial differential equation

SKLENÁŘOVÁ, L.: *Modelování přenosu tepla pomocí diferenciálních rovnic*, Brno, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. Vedoucí bakalářské práce Ing. Luděk Nechvátal, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Řešení parciálních diferenciálních rovnic* vypracovala samostatně pod vedením Ing. Ludka Nechvátala, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Lenka Sklenářová

Děkuji svému školiteli Ing. Ludku Nechvátalovi, Ph.D. za četné rady a připomínky při vedení mé bakalářské práce.

Lenka Sklenářová

Obsah

| | |
|--|-----------|
| 1 Úvod | 9 |
| 2 Základní principy v teorii přenosu tepla. | 10 |
| 3 Rovnice vedení tepla | 12 |
| 3.1 Odvození rovnice tepla v tyči | 12 |
| 3.2 Odvození rovnice vedení tepla ve vyšších dimenzích | 15 |
| 3.3 Převod rovnice vedení tepla do polárních souřadnic | 17 |
| 4 Stacionární případy | 19 |
| 5 Apendix | 23 |
| 6 Závěr | 26 |

1 Úvod

Bakalářská práce se zabývá problematikou modelování přenosu tepla pomocí parciálních diferenciálních rovnic. Důraz bude kladen na rozřešení stacionárních případů.

Práce je členěna následovně: Ve druhé kapitole se zaměříme na základní principy v teorii přenosu tepla. Vědecká disciplína zabývající se šířením tepla v prostoru a čase se nazývá termokinetika. Přenos tepla je šíření (sdílení) tepelné energie, z jednoho místa do druhého, který může probíhat dvěma fyzikálně odlišnými způsoby, a to kondukcí, konvekcí, při nichž je nositelem energie látka a radiací, kde přenos tepelné energie zajišťují elektromagnetické vlny, které se šíří i ve vakuu.

Ve třetí kapitole budeme řešit odvození, základní úlohy vedení tepla v tenké tyči, což vede na rovnici parabolického typu. Včetně provedení diskuse o okrajových a počátečních podmínkách. Dále bude naznačeno odvození rovnice ve vyšších dimenzích (2D, respektive 3D). Uvedeme tvar rovnic převedených do polárních a sférických souřadnic.

Čtvrtá kapitola bude věnována rozboru stacionárních případů. Stacionární (ustálené) proudění nastává, pokud se uvažované veličiny (řešení) již nemění s časem, tím se nám rovnice zjednoduší na obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu.

Práce čerpá především ze zdrojů [3], [4], [5], [7], [9].

2 Základní principy v teorii přenosu tepla.

Konduktce

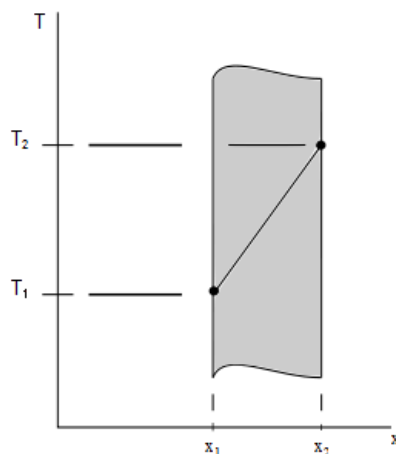
U konduktce neboli vedení částice s větší střední kinetickou energií předávají část své pohybové energie částicím s menší střední kinetickou energií a to pomocí vzájemných srážek. Tyto částice se nepřemísťují, pouze kmitají kolem svých rovnovážných poloh.

Při konduktci hraje významnou roli tepelný tok, což je množství tepla, které proteče plochou o jednotkovém obsahu za jednotku času. Uvažujeme-li homogenní desku tloušťky Δx na jejíchž čelech jsou udržovány teploty T_1 a T_2 , potom pro tepelný tok platí vztah

$$q = -K_0 \frac{\Delta T}{\Delta x}, \quad (2.1)$$

kde $\Delta T = T_1 - T_2$ a koeficient K_0 [W/mK] je tepelná vodivost, která je závislá na vlastnostech jako např. tlak, teplota... Znaménko minus vyplývá z Fourierova zákona (protože podle 2. zákona termodynamiky platí, že teplotní spád musí být z teplejšího prostředí do studenějšího), tím se podrobněji budeme zabývat později.

Příklad. Tenká stěna tloušťky 0,15 cm je z homogenního materiálu s tepelnou vodivostí a koeficientem tepelné vodivosti $K_0 = 0,40$ W/mK o stálých a rovnoměrných teplotách $T_1 = 20^\circ\text{C}$ a $T_2 = 70^\circ\text{C}$. Určete poměr tepelné výměny na metr čtvereční plochy v kladné ose x .



Podle (2.1) platí

$$q = -K_0 \frac{\Delta T}{\Delta x} = -K_0 \frac{(T_2 - T_1)}{\Delta x} = -0,40 \frac{(70 - 20)}{0,0015} = -13333 \text{ W/m}^2.$$

Konvekce

Konvekce neboli proudění tepla nastává, když je těleso vystaveno proudící kapalině (nebo vzduchu) s odlišnou teplotou. Energie proudí z nebo do kapaliny (teplota proudí z teplejší oblasti do studenější). Teplotní výměna je pak dána vztahem

$$q = hA(T_s - T_\infty), \quad (2.2)$$

který je také znám jako Newtonův zákon ochlazování, kde T_∞ je teplota okolního prostoru a T_s je teplota tělesa, h [W/m²K] je definován jako konvektivní součinitel přenosu tepla.

Jedná se o konstantu úměrnosti týkající se přenosu tepla za jednotku času a jednotku plochy k celkové změně teploty.

Příklad. Výměník tepla u domácího radiátoru má koeficient přestupu tepla $h = 1135,6 \text{ W/mK}$. Povrchovou teplotu výměníku tepla lze považovat za konstantní $65,5^\circ\text{C}$ a vzduch má teplotu $18,3^\circ\text{C}$. Určete plochu tepelného výměníku potřebnou pro vytápění při výkonu 8793 W .

Podle (2.2) odvodíme vztah pro výpočet plochy A

$$A = \frac{q}{h(T_s - T_\infty)} = \frac{8793}{1135,6 \cdot (65,5 - 18,3)} = 0,16 \text{ m}^2.$$

Radiace

Radiace (sálání) je přenos tepelné energie, který probíhá bez zprostředkující látky. Je způsobeno šířením elektromagnetických vln, kde látka vydává do prostoru část své energie nebo hmotu, po dopadu na povrch tělesa se část energie pohltí a další část odrazí. Radiace ideálního zářiče nebo černého tělesa je dána Stefan-Boltzmannovým zákonem

$$q = \sigma AT^4, \quad (2.3)$$

kde T je absolutní teplota, A plocha tělesa a σ je Stefanova-Boltzmannova konstanta, jejíž hodnota je $5,6697 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$. Ostatní povrchy jsou obecně dány vztahem

$$q = \epsilon \sigma AT^4,$$

kde ϵ je zářivost povrchu (emisivita), která se pohybuje od nuly do jedné. Jestliže $\epsilon = 0$, jedná se o bílé těleso. Naopak je-li $\epsilon = 1$, pak je těleso černé.

Příklad. V horkých letních dnech je povrch asfaltové vozovky vystavován teplotám kolem 50°C . Uvažujte takový povrch, aby se choval jako černé těleso a vypočítejte vyzařovanou sálavou energii na jednotku plochy.

Dosazením hodnot do rovnice (2.3) dostáváme

$$q = \sigma T^4 = 5,6697 \cdot 10^{-8} \cdot (50 + 273,15)^4 = 618,27 \text{ W/m}^2.$$

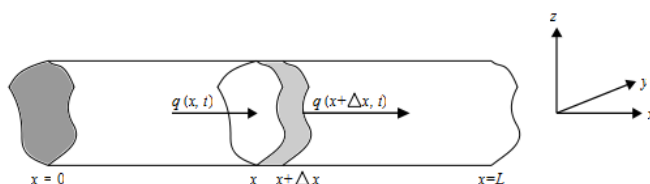
Podrobnosti o výše uvedených módech přenosu tepla lze najít [8], [9].

3 Rovnice vedení tepla

V této kapitole odvodíme podrobně rovnici vedení tepla v 1D, včetně diskuse okrajových podmínek a naznačíme řešení odvození ve vyšších dimenzích. Uvedeny budou také rovnice převedené do polárních souřadnic respektive sférických souřadnic.

3.1 Odvození rovnice tepla v tyči

Uvažujme, že tyč je konstantní v příčném řezu A a umístěna tak, že levý okraj je umístěn v bodě $x = 0$ a pravý v bodě $x = L$.



Obr 1. Proudící energie v tyči

Nejdříve zavedme množství tepelné energie na jednotku objemu jako neznámou, kterou nazveme hustota tepelné energie $e(x, t)$. Předpokládáme, že všechny teplotní veličiny jsou konstantní v každém kolmém řezu tyče. Toho může být dosaženo, jestliže povrch tyče bude dokonale izolován. Potom nedochází k žádným ztrátám tepelné energie přes povrch tyče.

Pro zjednodušení budeme uvažovat plochu A za jednotkovou. Jestliže je hustota tepelné energie konstantní v celém objemu „plátku“ (obecně tomu tak není), pak se celková energie rovná součinu hustoty tepelné energie a objemu. Výraz $e(x, t)\Delta x$ nazveme tepelnou energií, kde Δx je objem řezu.

Tepelná energie mezi x a $x + \Delta x$ se mění v závislosti na čase, což je způsobeno prouděním tepelné energie přes okraje (x a $x + \Delta x$) a tím, že se tepelná energie vytváří uvnitř (závislost na zdroji tepelné energie). Ke změně tepelné energie přes povrch nedochází. Rychlost změny tepelné energie v čase je rovna součtu tepelné energie proudící přes hranice a tepelné energie vytvořené uvnitř za jednotku času. Tento vztah se nazývá zachování tepelné energie. Rychlost změny tepelné energie v tenkém „plátku“ je dána vztahem

$$\frac{\partial}{\partial t}[e(x, t)\Delta x].$$

Tepelnou energii, která proudí doleva nebo doprava v tyči za jednotku času, nazýváme tepelným tokem $q(x, t)$, jak již bylo zmíněno v předchozí kapitole, jestliže $q(x, t) < 0$, pak tepelná energie proudí doleva, jestliže $q(x, t) > 0$ tak proudí doprava. Tepelná energie $q(x, t) - q(x + \Delta x, t)$ proudí za jednotku času přes hranice. Jestliže je $q(x, t) > 0$ a $q(x + \Delta x, t) > 0$ (jak je znázorněno na obr 1.), pak tepelná energie proudí přes x za jednotku času, přispívá ke zvýšení tepelné energie v „plátku“. Naopak teplo proudící přes $x + \Delta x$ ke snížení tepelné energie.

Tepelnou energii vyprodukovanou za jednotku času na jednotku objemu nazýváme tepelným zdrojem $Q(x, t)$. Tepelný zdroj $Q(x, t)$ lze považovat za konstantní v prostoru tenkého „plátku“, a proto celková tepelná energie v tenkém řezu za jednotku času je rovna $Q(x, t)\Delta x$.

Nyní se zaměříme na zákon zachování energie v tenkém „plátku“. Rychlost změny tepelné energie je způsobena tepelnou energií proudící přes hranice a vnitřními zdroji

$$\frac{\partial}{\partial t}[e(x, t)\Delta x] \approx q(x, t) - q(x + \Delta x, t) + Q(x, t)\Delta x. \quad (3.4)$$

Rovnosti můžeme dosáhnout jestliže $\Delta x \rightarrow 0$. Jestliže rovnici (3.4) podělíme Δx a položíme limitu $\Delta x \rightarrow 0$, pak dostáváme

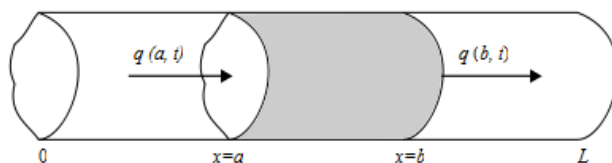
$$\frac{\partial e}{\partial t} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{q(x, t) - q(x + \Delta x, t)}{\Delta x} + Q(x, t).$$

Nakonec dostáváme vztah

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + Q(x, t). \quad (3.5)$$

Vztah (3.5) lze také získat z integrálního tvaru tepelné bilance. Celková tepelná energie je dána integrálem $\int_a^b e(x, t)dx$, ta se mění pouze v důsledku proudění tepelné energie přes konce ($x = a$ a $x = b$) a tepelnou energií uvnitř úseku

$$\frac{d}{dt} \int_a^b e dx = q(a, t) - q(b, t) + \int_a^b Q dx.$$



Tepelná energie proudící dovnitř a ven z konečného úseku tyče

Protože rozdíl $q(a, t) - q(b, t)$ lze psát jako $\int_a^b \frac{\partial q}{\partial x} dx$ a $\frac{d}{dt} \int_a^b e dx = \int_a^b \frac{de}{dt} dx$, dostáváme tvar

$$\frac{d}{dt} \int_a^b e dx = - \int_a^b \frac{\partial q}{\partial x} dx + \int_a^b Q dx.$$

Přepsáním máme

$$\int_a^b \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} - Q \right) dx = 0. \quad (3.6)$$

Protože a a b bylo voleno libovolně, rovnost (3.6) nastane pouze je-li integrand nulový, tj.

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + Q. \quad (3.7)$$

Tato rovnice se nazývá zákon zachování energie.

Materiály jsou obvykle charakterizovány podle teplotou $u(x, t)$ a ne tepelnou hustotou. Měrná tepelná kapacita c je množství tepla, které je potřebné k ohřátí jednotky délky tyče o 1°C . V případě, kdy tyč není homogenní, je měrná tepelná kapacita závislá na proměnné x , ($c = c(x)$).

Tepelná energie v tenkém „plátku“ se dá zapsat jako $e(x, t)\Delta x$, jedná se o energii potřebnou ke zvýšení z referenční teploty 0°C na skutečnou teplotu $u(x, t)$. Protože měrná tepelná energie je nezávislá na teplotě, je tepelná energie na jednotku hmoty dána vztahem $c(x)u(x, t)$. Celkový objem tenkého řezu $\rho\Delta x$ a celková tepelná energie v jakémkoliv tenkém „plátku“ je rovna $c(x)u(x, t)\rho\Delta x$, pak platí

$$e(x, t) = c(x)u(x, t)\rho(x). \quad (3.8)$$

Jedná se o rovnost tepelné energie na jednotku objemu a tepelné energie na jednotku hmotnosti za jednotku času.

Dosazením (3.8) do (3.7) získáme tvar

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + Q.$$

Zbývá nám objasnit vztah mezi teplotou a tepelným tokem. Podle Fourierova zákona platí

$$q = -K_0\frac{\partial u}{\partial x},$$

kde znaménko minus značí směr proudění tepelné energie doleva. Koeficient tepelné vodivosti K_0 vyjadřuje schopnost materiálu vést teplo. Tepelná vodivost je závislá na materiálu, čím větší je K_0 , tím větší je tok tepelné energie se stejnými teplotními rozdíly. Jestliže je tyč z nehomogenního materiálu, pak K_0 je funkcí x . Schopnost vést teplo se pro většinu materiálů liší v závislosti na teplotních intervalech, tj. $K_0(x, u)$. Jestliže Fourierův zákon dosadíme do rovnice zachování tepelné energie, dostáváme rovnici vedení tepla

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_0\frac{\partial u}{\partial x}\right) + Q.$$

Ve speciálních případech homogenní tyče, kde jsou všechny termální koeficienty ρ, c, K_0 konstantní, je parciální diferenciální rovnice ve tvaru

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = K_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q.$$

Jestliže nemáme žádné tepelné zdroje $Q = 0$, získáváme parabolickou, homogenní rovnici druhého řádu, rovnici vedení tepla bez zdroje

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

kde konstanta k se nazývá tepelná difusivita a je dána vztahem

$$k = \frac{K_0}{c\rho}.$$

Tato rovnice se také někdy nazývá rovnice difúze.

Pro modelování vedení tepla je potřeba popsat případ v čase $t = 0$, proto zavádíme počáteční podmínku

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Předepisujeme také okrajové podmínky v $x = 0$ a $x = L$. Rozlišujeme tři typy okrajových podmínek (ty napíšeme pro konec tyče $x = 0$)

- Dirichletova podmínka

$$u(0, t) = u_0(t),$$

kde $u_0(t)$ je předepsaná teplota.

- Neumannova podmínka

$$-K_0(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = q(t),$$

kde $q(t)$ je předepsaný tepelný tok.

- Newtonova podmínka

Jestliže kolem tyče proudí tekutina (nebo i plyn), pak tyč předává své teplo chladnější kapalině. Tento proces, jak jsme se dozvěděli v první kapitole, se nazývá konvekce. Teplota kapaliny se mění se vzdáleností od tyče (u tyče je teplejší). Tepelný tok je úměrný rozdílu teplot tyče a předepsané vnější teploty. Tomuto jevu se říká Newtonův zákon ochlazování

$$-K_0(L) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = -h[u(0, t) - u_\infty],$$

kde konstanta úměrnosti h je koeficient přenosu tepla a u_∞ je vnější teplota. Jestliže je tyč teplejší než okolí ($u(0, t) > u_\infty$), pak tepelný tok je veden z tyče ven. Teplo proudí doleva, a proto je tepelný tok záporný. Jestliže budeme předpokládat $x = L$, pak tepelný tok bude proudit doprava, a proto bude kladný, Newtonova podmínka bude mít tvar

$$-K_0(L) \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = h[u(L, t) - u_\infty].$$

3.2 Odvození rovnice vedení tepla ve vyšších dimenzích

Nyní naznačíme odvození rovnice vedení tepla ve 2D a 3D.

Tepelná energie ve dvourozměrné oblasti R je dána vztahem

$$\iint_R c\rho u \, dx dy.$$

Zákon zachování energie je dán vztahem, kdy rychlost změny tepelné energie je rovna součtu tepelné energie proudící přes hranici oblasti a tepelné energii vznikající uvnitř za jednotku času, což lze vyjádřit

$$\frac{d}{dt} \iint_R c\rho u \, dx dy = - \int_{\partial R} \vec{q} \cdot \vec{n} \, dx + \iint_R Q \, dx dy,$$

kde $\vec{q} \cdot \vec{n}$ je tepelný tok proudící přes celou hranici, která ohraničuje oblast R (jedná se o množství energie, která proudí z oblasti R , proto je zde znaménko minus) a $\iint_R Q \, dx dy$ je celková změna tepelné energie za jednotku času.

Použitím divergenčního tvaru Greenovy věty

$$\iint_R \operatorname{div} \vec{f} \, dx dy = \int_{\partial R} \vec{f} \cdot \vec{n} \, dx,$$

kde $\operatorname{div} \vec{f}$ je divergence definovaná jako

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

a \vec{n} je kladně orientovaný jednotkový normálový vektor. Po úpravě dostáváme tvar

$$\iint_R \left(c\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} - Q \right) dx dy = 0.$$

Protože integrál je roven nule, pak i integrand musí být roven nule. Odtud dostáváme

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{q} + Q. \quad (3.9)$$

V 1D případě je Fourierův zákon definován jako $q = -K_0 \frac{\partial u}{\partial x}$. Stejný princip platí i ve 2D

$$\vec{q} = -K_0 \nabla u, \quad (3.10)$$

kde \vec{q} je vektor tepelného toku, koeficient K_0 nazýváme tepelná vodivost a jako teplotní gradient označíme ∇u , který má tvar $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$.

Jestliže dosadíme rovnost z (3.10) do (3.9), dostáváme parciální diferenciální rovnici pro neznámou

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(K_0 \nabla u) + Q, \quad (3.11)$$

v případě, že nebudeme mít žádné tepelné zdroje ($Q = 0$), dostáváme rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \operatorname{div}(\nabla u), \quad (3.12)$$

kde k je opět definováno jako tepelná difusivita ($k = \frac{K_0}{c\rho}$). Dále z definice gradientu, získáváme vztah známý jako Laplaceův operátor

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

po dosazení do rovnice (3.12), dostáváme rovnici vedení tepla ve tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u. \quad (3.13)$$

Rovnice vedení tepla ve 3D se dá odvodit analogickým způsobem. Křivkový integrál $\int \dots dx$ nahradíme plošným integrálem $\iint \dots dx dy$, dvojný integrál $\iint_R \dots dx dy$ trojným integrálem $\iiint_R \dots dx dy dz$, přičemž využijeme Gaussovu-Ostrogradského větu $\iiint \operatorname{div} \vec{f} dV = \iint \vec{f} \cdot \vec{n} dS$. Rovnice vedení tepla ve 3D má potom tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u + Q,$$

kde

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

V následujícím odstavci převedeme tvar výše uvedených rovnic v polárních, resp. sférických souřadnicích.

3.3 Převod rovnice vedení tepla do polárních souřadnic

V této kapitole se budeme zabývat převodem rovnice vedení tepla $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy}$ do polárních souřadnic. Polární soustava souřadnic, je soustava, u které souřadnice ρ udává vzdálenost od počátku soustavy souřadnic a souřadnice φ označuje úhel, svírající s osou x . Transformace mezi kartézskými a polárními souřadnicemi má tvar

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi, \\y &= \rho \sin \varphi.\end{aligned}$$

Inverzní transformace je ve tvaru

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi &= \arctg \frac{y}{x} && \text{pro } x > 0, \\ \varphi &= \arctg \frac{y}{x} + \pi && \text{pro } x < 0.\end{aligned}$$

Derivace jsou ve tvaru

$$\begin{aligned}\rho'_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \varphi, & \rho'_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \varphi, \\ \varphi'_x &= \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{1}{x^2} = -\frac{\sin \varphi}{\rho}, & \varphi'_y &= \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{1}{x} = \frac{\cos \varphi}{\rho}.\end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}u'_x &= u'_\rho \rho'_x + u'_\varphi \varphi'_x = u'_\rho \cos \varphi + u'_\varphi \frac{-\sin \varphi}{\rho}, \\ u'_y &= u'_\rho \rho'_y + u'_\varphi \varphi'_y = u'_\rho \sin \varphi + u'_\varphi \frac{\cos \varphi}{\rho},\end{aligned}$$

dalšími derivacemi, získáme rovnice ve tvaru:

$$\begin{aligned}u''_{xx} &= (u''_{\rho\rho} \rho'_x + u''_{\rho\varphi} \varphi'_x) \rho'_x + u'_\rho \rho''_{xx} + (u''_{\varphi\rho} \rho'_x + u''_{\varphi\varphi} \varphi'_x) \varphi'_x + u'_\varphi \varphi''_{xx} \\ &= u''_{\rho\rho} (\rho'_x)^2 + 2u''_{\rho\varphi} \rho'_x \varphi'_x + u''_{\varphi\varphi} (\varphi'_x)^2 + u'_\rho \rho''_{xx} + u'_\varphi \varphi''_{xx}, \\ u''_{yy} &= (u''_{\rho\rho} \rho'_y + u''_{\rho\varphi} \varphi'_y) \rho'_y + u'_\rho \rho''_{yy} + (u''_{\varphi\rho} \rho'_y + u''_{\varphi\varphi} \varphi'_y) \varphi'_y + u'_\varphi \varphi''_{yy} \\ &= u''_{\rho\rho} (\rho'_y)^2 + 2u''_{\rho\varphi} \rho'_y \varphi'_y + u''_{\varphi\varphi} (\varphi'_y)^2 + u'_\rho \rho''_{yy} + u'_\varphi \varphi''_{yy},\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}\rho''_{xx} &= (\cos \varphi)'_x = -\sin \varphi \varphi'_x = -\sin \varphi \frac{-\sin \varphi}{\rho} = \frac{\sin^2 \varphi}{\rho}, \\ \varphi''_{xx} &= \left(-\frac{\sin \varphi}{\rho} \right)'_x = \left(-\frac{\sin \varphi}{\rho} \right)'_\rho \rho'_x + \left(-\frac{\sin \varphi}{\rho} \right)'_\varphi \varphi'_x = \frac{\sin \varphi}{\rho^2} \sin \varphi - \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{-\sin \varphi}{\rho} \\ &= \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2}, \\ \rho''_{yy} &= (\sin \varphi)'_y = \cos \varphi \varphi'_y = \cos \varphi \frac{\cos \varphi}{\rho} = \frac{\cos^2 \varphi}{\rho}, \\ \varphi''_{yy} &= \left(\frac{\cos \varphi}{\rho} \right)'_y = \left(\frac{\cos \varphi}{\rho} \right)'_\rho \rho'_y + \left(\frac{\cos \varphi}{\rho} \right)'_\varphi \varphi'_y = -\frac{\cos \varphi}{\rho^2} \sin \varphi - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\cos \varphi}{\rho} \\ &= -\frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2}.\end{aligned}$$

Po dosazení dostáváme do rovnice vedení tepla $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy}$

$$u''_{xx} = u''_{\rho\rho} \cos^2 \varphi + 2u''_{\rho\varphi} \frac{-\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} + u''_{\varphi\varphi} \frac{\sin^2 \varphi}{\rho^2} + u'_\rho \frac{\sin^2 \varphi}{\rho} + u'_\varphi \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2},$$

$$u''_{yy} = u''_{\rho\rho} \sin^2 \varphi + 2u''_{\rho\varphi} \frac{-\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} + u''_{\varphi\varphi} \frac{\cos^2 \varphi}{\rho^2} + u'_\rho \frac{\cos^2 \varphi}{\rho} + u'_\varphi \frac{-2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2}.$$

Konečný vztah je pak ve tvaru

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = u''_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u'_\rho + \frac{1}{\rho^2} u''_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\rho} (\rho u'_\rho)'_\rho + \frac{1}{\rho^2} u''_{\varphi\varphi}. \quad (3.14)$$

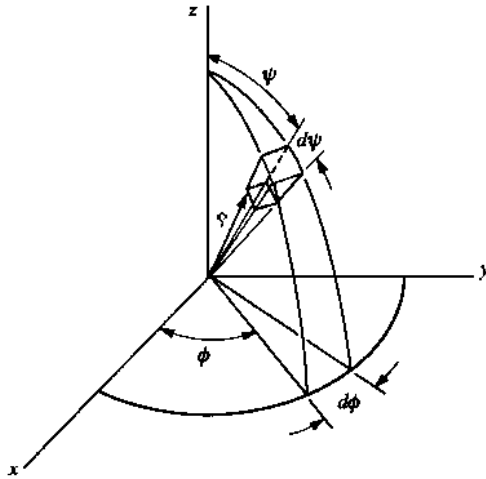
Pokud řešení nezávisí na φ , pak se rovnice (3.14) zjednoduší na tvar

$$\rho u''_{\rho\rho} + u'_\rho = 0. \quad (3.15)$$

Podobným způsobem jde i odvodit rovnici vedení tepla ve sférických souřadnicích, následně dostáváme vztah

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho^2} (\rho u) + \frac{1}{\rho^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2},$$

kde ρ je vzdálenost bodu od počátku souřadnic, ϕ úhel sklonu průvodiče bodu od osy x a ψ je úhel mezi průvodičem a osou z .



Podrobnější odvození rovnice vedení tepla, či převod do sférických souřadnic lze nalézt v [8], [4], [9].

4 Stacionární případy

O ustáleném neboli stacionárním vedení tepla mluvíme, jestliže v daném časoprostoru je významná pouze prostorová složka, pak se rovnice redukuje na obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu.

Nejdříve se budeme zabývat stacionárním případem homogenního tvaru rovnice (3.13), která vede na LODR2 ve tvaru

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0. \quad (4.16)$$

Jedná se o homogenní lineární ODR 2.řádu (viz Apendix) s charakteristickou rovnicí ve tvaru $\lambda^2 = 0$, odtud dostáváme dva kořeny $\lambda_{1,2} = 0$. Dvojice lineárně nezávislých řešení je ve tvaru $y_1 = 1$ a $y_2 = x$. Což dává

$$u(x) = c_1x + c_2. \quad (4.17)$$

Tento výsledek bychom dostali také přímou integrací rovnice (4.16), protože pravá strana neobsahuje hledanou funkci.

Tento případ budeme řešit pro různé okrajové podmínky:

a) Dvě Dirichletovy podmínky $u(0) = u_0$ a $u(L) = u_\ell$.

Dosazením okrajových podmínek do (4.17) dostáváme konstanty

$$c_1 = \frac{u_\ell - u_0}{\ell}, \quad c_2 = u_0,$$

po dosazení okrajových podmínek do rovnice (4.17) dostáváme lineární teplotní profil

$$u(x) = u_0 - \frac{u_0 - u_\ell}{\ell}x.$$

Z tohoto teplotního průběhu lze určit tepelný tok q (viz. Fourierův zákon). Po derivaci teplotního profilu platí

$$\frac{du}{dx} = -\frac{u_0 - u_\ell}{\ell}x,$$

teplotní gradient dosadíme do Fourierova zákona, pak pro velikost teplotního toku platí

$$q = \frac{K_0(u_0 - u_\ell)}{L},$$

kde K_0 je teplotní vodivost, L tloušťka stěny. Podobný vztah bude i v případě složených vrstev, které mají určitou tepelnou vodivost a jejichž tloušťky jsou L_1, L_2 . Jestliže je přiveden tepelný tok na levou stranu, pak musí přejít v nezměněném stavu každou vrstvou. Pak tedy platí:

$$q = -K_{0,1} \frac{u_2 - u_1}{L_1} = -K_{0,2} \frac{u_3 - u_2}{L_2}.$$

Po úpravě dostáváme vztah pro tepelný tok

$$q = \frac{u_1 - u_3}{\frac{\ell_1}{K_{0,1}} + \frac{\ell_2}{K_{0,2}}}.$$

obecně, pro n vrstev máme

$$q = \frac{u_1 - u_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{\ell_i}{K_i S}}.$$

Tento vztah má analogii v obvodě s odpory zapojenými sériově (Ohmův zákon).

$$i = \frac{u_1 - u_{n+1}}{\sum_{i=1}^n R_i}.$$

b) Neumannova a Dirichletova podmínka $-K_0 \frac{du}{dx} = q_0$, $u(0) = u_0$.

Po dosazení zadaných podmínek do rovnice (4.17) získáváme konstanty ve tvaru

$$c_1 = -\frac{q_0}{K_0}, \quad c_2 = u_0.$$

Po zpětném dosazení do (4.17) získáváme tvar teplotního průběhu

$$u(x) = -\frac{q_0}{K_0}x + u_0$$

c) Neumannova a Newtonova podmínka

$$\begin{aligned} -K_0 \frac{du(0)}{dx} &= q_0 \\ -K_0 \frac{du(L)}{dx} &= H[u(\ell) - u_\infty], \end{aligned}$$

Konstanty nám vychází

$$c_1 = -\frac{q_0}{K_0}, \quad c_2 = u_\infty + \frac{q_0}{H} + \frac{q_0}{k}\ell.$$

Po zpětném dosazení do (4.17) dostáváme tvar teplotního průběhu

$$u(x) = u_\infty + q_0 \left(\frac{\ell - x}{K_0} + \frac{1}{H} \right).$$

d) Dvě stejné Neumannovy podmínky $-K_0 \frac{du(0)}{dx} = q_0$ a $-K_0 \frac{du(L)}{dx} = q_0$.

Konstanta vychází ve tvaru $c_1 = -\frac{q_0}{K_0}$. Následné rozložení teploty se dá zapsat ve tvaru

$$u(x) = -\frac{q_0}{K_0}x + c_2.$$

Protože tepelný tok, který přivedeme do tyče z ní musí i vytéci, nám způsobuje, že nedostáváme konkrétní hodnotu pro integrační konstantu c_2 . Jedná se o lineární profil, představující přímkou se směrnici $-\frac{q_0}{K_0}$.

e) Dvě různé Neumannovy podmínky

$$\begin{aligned} -K_0 \frac{du(0)}{dx} &= q_0 \\ -K_0 \frac{du(L)}{dx} &= q_\ell \end{aligned}$$

Po dosazení okrajových podmínek do rovnice (4.17), dostáváme

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{q_0}{K_0}, \\ c_1 &= -\frac{q_\ell}{K_0}. \end{aligned}$$

Protože $q_0 \neq q_\ell$ a konstanta c_1 se nemůže rovnat dvěma různým výrazům, pak tato situace nemá řešení.

Dále se budeme zabývat případem nehomogenní rovnice, kdy uvažujeme konstantní zdroj tepla Q

$$-K_0 \frac{d^2u}{dx^2} = Q.$$

Použitím metody neurčitých koeficientů (podrobnější postup metody najdeme v Apendixu) dostáváme

$$u(x) = -\frac{Q}{2K_0}x^2 + c_1x + c_2. \quad (4.18)$$

Tento případ budeme řešit opět pro různé okrajové podmínky:

a) Dvě Dirichletovy podmínky $u(0) = u_0$ a $u(L) = u_\ell$.

Po dosazení okrajových podmínek do (4.18) dostáváme konstanty ve tvaru

$$c_1 = \frac{u_\ell - u_0}{L} + \frac{Q}{2K_0}L, \quad c_2 = u_0.$$

Po zpětném dosazení dostáváme teplotní profil

$$u(x) = \left(\frac{Q}{2K_0}(L-x) + \frac{u_\ell - u_0}{L} \right) x + u_0.$$

b) Neumannova a Dirichletova podmínka $u(0) = u_0$, $-K_0 \frac{du(0)}{dx} = q_0$.

Po dosazení okrajových podmínek do rovnic nám konstanty vyjdou $c_1 = -\frac{q_0}{K_0}$, $c_2 = u_0$.

Po zpětném dosazení do rovnice (4.18) dostáváme tvar

$$u(x) = -\frac{Q}{2K_0}x^2 - \frac{q_0}{K_0}x + u_0.$$

c) Nyní máme danu Neumanovu a Newtonovu okrajovou podmínku

$$\begin{aligned} -K_0 \frac{du(0)}{dx} &= q_0 \\ -K_0 \frac{du(L)}{dx} &= h[u(L) - u_\infty]. \end{aligned}$$

Po dosazení okrajových podmínek do rovnice (4.18) získáváme integrační konstanty

$$c_1 = -\frac{q_0}{K_0}$$

$$c_2 = u_\infty + \frac{q_0}{h} + \frac{QL}{h} + \frac{Q}{2K_0}L^2 + \frac{q_0}{K_0}L.$$

Opětným dosazením do rovnice (4.18) dostáváme tvar teplotního profilu

$$u(x) = u_\infty + \frac{q_0}{H} + \frac{QL}{h} + \frac{Q}{2k}(L^2 - x^2) + \frac{q_0}{k}(L - x).$$

Dále se budeme zabývat řešením rovnice (3.15), což je Eulerova diferenciální rovnice, tj. uvažujme rovnici

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) = 0.$$

Řešení je ve tvaru (viz Apendix)

$$u(\rho) = c_1 \ln \rho + c_2.$$

a) Tento případ budeme nejdříve řešit pro dvě Dirichletovy okrajové podmínky

$$u(\rho_1) = u_1, \quad u(\rho_2) = u_2.$$

Díky okrajovým podmínkám dostáváme integrační konstanty tvaru

$$c_1 = \frac{u_2 - u_1}{\ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)}$$

$$c_2 = u_1 - \frac{u_2 - u_1}{\ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)} \ln \rho.$$

Po dosazení konstant dostáváme tvar teplotního průběhu

$$u(\rho) = \left(\frac{\ln \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)}{\ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)} \right) (u_2 - u_1) + u_1$$

b) Dále použijeme dvě Neumannovy podmínky

$$\rho \frac{du(\rho_1)}{d\rho} = q_1,$$

$$\rho \frac{du(\rho_2)}{d\rho} = q_2.$$

Po úpravě a dosazení okrajových podmínek dostáváme teplotní průběh

$$u(\rho) = \frac{q_1}{\rho} \ln \rho + \frac{q_2}{\rho}$$

5 Apendix

Lineární homogenní ODRn

Uvažujme homogenní lineární ODRn s konstantními koeficienty ve tvaru

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y + a_0 = 0 \quad a_n \neq 0. \quad (5.19)$$

Budeme hledat řešení této rovnice ve tvaru $y(x) = e^{\lambda x}$. Derivováním dostáváme

$$y(x) = \lambda e^{\lambda x}, \dots, y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

Následním dosazením do rovnice (5.19) dostáváme

$$a_n \lambda^{(n)} e^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{(n-1)} e^{\lambda x} + \dots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0 \quad / \cdot e^{-\lambda x}.$$

Charakteristická rovnice dané homogenní rovnice je ve tvaru

$$a_n \lambda^{(n)} + a_{n-1} \lambda^{(n-1)} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

Základní věta algebry říká, že polynom stupně n má právě n kořenů (včetně násobnosti) $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$. Na základě jejich analýzy posupně nalezneme požadovaných n lineárně nezávislých řešení diferenciálních rovnic.

Věta. Nechť funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ tvoří n lineárně nezávislých řešení. Potom každé řešení $y(x)$ této rovnice lze zapsat ve tvaru

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x).$$

Nyní se budeme zabývat případem pro $n = 2$

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \text{pro } a_2 \neq 0.$$

Charakteristická rovnice je ve tvaru

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

kde λ_1, λ_2 jsou její kořeny. Dále se budeme zabývat různými typy řešení

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Odpovídající řešení ODR jsou rovny $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ a $y_2 = e^{\lambda_2 x}$. Obecné řešení je pak ve tvaru

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

V tomto případě jsou řešením dané ODR funkce $y_1 = e^{\lambda x}$ a $y_2 = x e^{\lambda x}$. Obecné řešení je dáno vztahem

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}.$$

3. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$

Naším úkolem je z nereálných řešení $\tilde{y}_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}$, $\tilde{y}_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}$ zkonstruovat reálná řešení. Úpravou dostáváme

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1 &= e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \\ \tilde{y}_2 &= e^{\alpha x - i\beta x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x).\end{aligned}$$

Reálná řešení jsou ve tvaru $y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

Lineární nehomogenní ODRn

Nehomogenní LODRn je ve tvaru

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x),$$

kde a_0, a_1, \dots, a_n jsou konstanty, přičemž $a_n \neq 0$ a $f(x)$ je spojitě na intervalu I .

Věta. Obecné řešení nehomogenní LODRn lze psát ve tvaru

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_p(x),$$

kde y_1, \dots, y_n je n lineárně nezávislých řešení homogenní LODRn a y_p je libovolné partikulární řešení nehomogenní rovnice.

Metoda neurčitých koeficientů

Tuto metodu lze užít v případě, jedná-li se o rovnici s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou $f(x)$, která může být typově polynom, exponenciála, popřípadě i sinus a kosinus. Jedná se o typy funkcí, které po derivování dají opět funkce stejného typu a proto je možné po dosazení do rovnice porovnat příslušné členy s pravou stranou a určit neznámé koeficienty. Metoda slouží k určení partikulárního řešení y_p . Pro dále uvedené tvary $f(x)$ jsou navrženy předběžné tvary y_p takto:

- $f(x) = P_m(x) \Rightarrow y_p = A_m x^m + \dots + A_1 x + A_0$
- $f(x) = e^{ax} \Rightarrow y_p = Ae^{ax}$
- $f(x) = \sin bx$ nebo $f(x) = \cos bx \Rightarrow y_p = A \cos bx + B \sin bx$.

Pokud tento předběžný tvar pro y_p má nějaký shodný člen s tvarem y_n , je celý tvar pro y_p nutno opakovaně násobit faktorem x , až nemá s y_n žádný společný člen.

Eulerova diferenciální rovnice

Homogenní Eulerova diferenciální rovnice je dána vztahem

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0, \tag{5.20}$$

Pro $x \neq 0$ můžeme rovnici přepsat

$$y'' + \frac{\alpha}{x} y' + \frac{\beta}{x^2} y = 0$$

Zavedeme substituci $x = e^t$, odkud dostáváme $t = \ln x$. Derivováním složené funkce máme

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \frac{1}{x} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \right) \frac{1}{x} + \frac{dy}{dt} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{dy}{dt} \left(-\frac{1}{x^2} \right)\end{aligned}$$

Po úpravě

$$\begin{aligned}x \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \\ x^2 \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}.\end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice (5.20) dostáváme LODR2

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + \alpha \frac{dy}{dt} + \beta y = 0,$$

Jestliže tuto rovnici upravíme, tak získáváme konečný tvar

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\alpha - 1) \frac{dy}{dt} + \beta y = 0.$$

Následné řešení je ve tvaru

$$\begin{aligned}y &= c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} && \text{pro } (\alpha - 1)^2 > 4\beta \\ y &= (c_1 + c_2 t) e^{\frac{1-\alpha}{2} t} && \text{pro } (\alpha - 1)^2 = 4\beta \\ y &= e^{\frac{1-\alpha}{2} t} [\cos(\sqrt{4\beta - (\alpha - 1)^2} t) + i \sin(\sqrt{4\beta - (\alpha - 1)^2} t)] && \text{pro } (\alpha - 1)^2 < 4\beta,\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}r_1 &= \frac{1}{2} [1 - \alpha + \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\beta}], \\ r_2 &= \frac{1}{2} [1 - \alpha - \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\beta}].\end{aligned}$$

Řešení s proměnnou x je rovno

$$\begin{aligned}y &= c_1 |x|^{r_1} + c_2 |x|^{r_2} && \text{pro } (\alpha - 1)^2 > 4\beta \\ y &= (c_1 + c_2 \ln |x|) |x|^{\frac{1-\alpha}{2}} && \text{pro } (\alpha - 1)^2 = 4\beta \\ y &= |x|^{\frac{1-\alpha}{2}} [\cos(\sqrt{4\beta - (\alpha - 1)^2} \ln |x|) + i \sin(\sqrt{4\beta - (\alpha - 1)^2} \ln |x|)] && \text{pro } (\alpha - 1)^2 < 4\beta.\end{aligned}$$

Podrobnější informace lze nalézt v [2], [6].

6 Závěr

Práce se zabývala matematickým modelováním přenosu tepla, které vede na parciální diferenciální rovnice. Důraz byl kladen na analytická řešení stacionárních případů rovnic, byly rozřešeny okrajové úlohy pro lineární obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádku s konstantními koeficienty pro různé kombinace okrajových podmínek a okrajové úlohy s Eulerovou diferenciální rovnicí .

Práci by bylo možné dále rozšířit o následující směry: analýza existence a jednoznačnosti řešení okrajových úloh pro lineární ODR2, řešení nestacionární úlohy v jedné dimenzi a stacionární úlohy ve vyšší dimenzi, slabá formulace úloh, numerická analýza vybraných úloh (včetně numerických experimentů).

Hlavním cílem práce bylo pochopení dané problematiky, sjednocení poznatků z více pramenů, jednak co se týče značení, tak logické struktury textu.

Reference

- [1] Cengel, Yunus A.: *Introduction To Thermodynamics and Heat Transfer*, McGraw-Hill, Santa Rosa, 1996.
- [2] Čermák, J.: *Matematická analýza III*, přednášky, 2010
- [3] Franců, J.: *Parciální diferenciální rovnice*, skripta, FSI VUT v Brně, 2003, ISBN 80-214-2334-X.
- [4] Haberman, R.: *Elementary applied partial differential equations*, Prentice-Hall, New Jersey, 1987.
- [5] Lienhard IV, John H., Lienhard V, John H.: *Heat transfer textbook*, Phlogiston-Press, Massachusetts, 2008.
- [6] Nechvátal, L.: *Matematika III*, přednášky, 2011
- [7] Pavelek, M.: *Termomechanika*, skripta, FSI VUT v Brně, 2003, ISBN 80-214-2409-5.
- [8] Pitts, Donald R., Sissom, Leighton E.: *Schaum's outline of Theory and problems of heat transfer*, McGraw-Hill, New York, 1997.
- [9] <http://cs.wikipedia.org/>, 3. 4. 2011.