JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
PEDAGOGICKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATIKY

Mgr. Jiří Blažek

# Vliv dynamické geometrie na dosažitelnost matematického zdůvodnění geometrických problémů u studentů učitelství matematiky

Dizertační práce

**Vedoucí práce:** prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.
**Studijní obor:** Teorie vzdělávání v matematice

ČESKÉ BUDĚJOVICE 2022

Poděkování

Děkuji svému školiteli prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc. za odborné vedení a konzultace v průběhu mého studia a paní doc. PhDr. Aleně Hošpesové, Ph.D. za rady, týkající se tématu mé práce.

Prohlašuji, že svoji disertační práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své disertační práce, a to v nezkrácené podobě fakultou elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 3. ledna 2022

Jiří Blažek

## Abstrakt

Programy třídy DGE (Dynamic Geometry Environment) se objevily již začátkem 80. let minulého století, avšak ve výuce se začaly používat až s počátkem nového milénia. V současné době jsou ve výuce matematiky značně rozšířené. Programy třídy DGE umožňují zprostředkovat studentům abstraktní svět euklidovské geometrie díky jejich vlastnostem jako je přesnost konstrukce, názornost a možnost konstrukci dynamicky měnit.

Je obecně přijímáno, že vhodná implementace softwaru DGE do výuky zlepšuje její kvalitu. S tím souvisí otázka, jaký je přínos tohoto softwaru, pokud bude student s jeho pomocí hledat řešení matematického problému. Tato otázka představuje obecný výzkumný problém této práce. Objektem výzkumu byli studenti učitelství matematiky na pedagogické fakultě.

Ve výzkumu byly zjištěny tyto skutečnosti: 1) Software významně ulehčuje objev relevantních hypotéz, a to i těch, u kterých ze zadání není zřejmé, že s řešením problému souvisejí. 2) Software významně napomáhá k tvorbě logického zdůvodnění. (Přesto, značná část studentů ve výzkumu nebyla schopna důkaz dokončit ani s maximální možnou nápovědou, kterou jim software mohl poskytnout.) 3) Nalezení relevantních hypotéz s pomocí nástrojů softwaru ve většině případů závisí na schopnosti studentů aplikovat formální matematické znalosti a na schopnosti logicky uvažovat. Fakta, která lze objevit s pomocí nástrojů softwaru náhodně, bez konkrétního záměru studenta, musejí pravděpodobně splňovat značně omezující kritéria.

Výzkum se také zabýval otázkou, proč někteří studenti nejsou schopni dokončit důkaz ani s pomocí softwaru.

Práce obsahuje sedm kapitol a přílohu. V prvních třech kapitolách je výzkumné téma práce popsáno na obecné úrovni, ve čtvrté kapitole jsou formulovány výzkumné otázky. V následující kapitole je prezentován model, jehož cílem je kategorizovat akce řešitele problému v DGE s ohledem na záměr, jaký sleduje. V šesté kapitole je uvedena metodologie výzkumu, získaná data a jejich interpretace. Výsledky jsou shrnuté v závěrečné kapitole.

Příloha obsahuje dva náročnější geometrické problémy, kterými se autor zabýval v průběhu svého studia, a při jejichž řešení sehrál software DGE zásadní roli.

**Klíčová slova:** dynamická geometrie, GeoGebra, deduktivní důkaz, problémy studentů, experimentální přístup k řešení, Toulminův model

## Abstract

Dynamic Geometry Environment (DGE) programs appeared in the early 1980s, but they did not begin to be used in education until the beginning of the new millennium. Today, they are widely used in teaching of mathematics. DGE class programs allow to mediate the abstract world of Euclidean geometry to students due to their features such as precision of construction, illustrativeness and the possibility to change the construction dynamically.

It is generally accepted that appropriate implementation of DGE software in teaching improves its quality. A related question is what is the benefit of this software if a student uses it in the process of finding a solution to a solution to a mathematical problem. This question represents the general research problem of this thesis. The objects of the research were prospective teachers of mathematics at the Faculty of Education.

The following findings were found in the research: 1) The software significantly facilitates the discovery of relevant hypotheses, even those for which their relationship to the solution of a problem is not evident from the assignment of the problem. 2) The software significantly helps in the development of logical justification. (Yet, a significant number of students in the research were unable to complete the proof even with the maximum help the software could provide.) 3) Finding relevant hypotheses using the software tools depends in most cases on students' ability to apply formal mathematical knowledge and to think logically. Facts that can be discovered with software tools by chance, without specific student intent, are likely strongly limited.

Research has also dealt with the question of why some students are unable to complete a proof even with the help of software.

The thesis contains seven chapters and an appendix. In the first three chapters, the research topic of the thesis is generally described. In chapter four, the research questions are formulated. In the following chapter, a model is presented to categorize the actions of the problem solver in the DGE with respect to the goal he/she pursues. Chapter six presents the research methodology, the data obtained and their interpretation. The results are summarized in the final chapter.

The appendix contains two challenging geometric problems author has worked on during his studies and in whose solutions the DGE software played a crucial role.

**Key words:** dynamic geometry, GeoGebra, deductive proof, difficulties of students, experimental approach to a solution, Toulmin model

# Obsah

# Úvod

V současné době se výuka matematiky po celém světě, hlavně v Evropě a Americe, silně inspiruje přístupem, který se označuje jako konstruktivistický. Pro něj je typické, že „zdůrazňuje potřebu využití metod, založených na aktivizaci a spolupráci žáka, tj. metod, které stimulují žáka, aby své znalosti získával aktivní činností a komunikací, nikoli aby je pasivně přijímal“ (KVD, 2021). Typickým představitelem tohoto směru je v Česku tzv. „Hejného metoda“ (Hejný, Kuřina, 2009).

Pod vlivem konstruktivistického přístupu se klade důraz na to, aby studenti aktivně řešili různé problémy, ne aby pouze reprodukovali naučené postupy, předvedené učitelem. To zdůrazňoval i vynikající matematik maďarského původu George Polya. Ve své knize „Jak to řešit?“, zabývající se heuristikou v matematice, napsal (Polya, 2016, str. XV):

*Matematika, jak vidíte, není divácký sport. Rozumět matematice znamená být schopen pracovat v matematice. A co to znamená pracovat v matematice? Na prvním místě to znamená být schopen řešit matematické problémy.*

Aby student chápal, co matematika je, a aby byl schopen se v jejím rámci orientovat, je nutné, aby získal zkušenosti s řešením matematických problémů. Tím nemyslíme pouze nalezení správné odpovědi, ale především její logické zdůvodnění v rámci matematické teorie. Jinými slovy, student by měl vědět, jak vypadá a jak se vytváří matematický důkaz.

Je sporné, zda pojem matematického důkazu patří na základní školu, do osnov středních škol však určitě patří a každý středoškolák by měl být schopen pochopit některé jednodušší důkazy. Nároky na budoucí učitele matematiky jsou v tomto směru větší – ti by měli být schopni důkazy nejen chápat, ale i aktivně nalézat. To je však nesrovnatelně náročnější úkol, k vytvoření důkazu nestačí jen teoretické znalosti, ty jsou pouze nutným předpokladem. Jsou nutné další faktory, z nichž většina úzce souvisí s kognitivními rysy studenta. Příkladem může být schopnost logicky uvažovat, talent, zkušenosti. Proto se práce studenta často neobejde bez intervence učitele, který ho „postrčí“ správným směrem. V úvodu své knihy (Polya, 2016, str. 3) píše:

*Žák by měl získat tolik zkušeností se samostatnou prací, nakolik je to možné. Když je ponechán sám se svou úlohou, bez jakékoliv pomoci nebo s nedostatečnou pomocí, může se stát, že nedosáhne žádného pokroku. Pokud mu ale učitel pomáhá příliš, na žáka už nic nezbude. Učitel by měl pomáhat, ale ne příliš mnoho ani příliš málo, aby žákovi zůstal rozumný podíl na práci.*

Teze, že je nutné podat žákovi pomocnou ruku a současně mu přitom nechat „rozumný podíl na práci“, stála u zrodu směru, nazývaného „Instructional scaffolding“. To je konstruktivistický směr, vytvořený v 80. letech pedagogem a psychologem Jerome Brunerem (Beed et al., 1991). Podle tohoto učení by měl učitel žákovi poskytnout jakési pomocné „lešení“, díky kterému žák překonává první kognitivní překážky. Poté může učitel lešení postupně rozebírat, až se nakonec (v ideálním případě) žák dostane do stavu, kdy si umí poradit bez něj.

V dnešní době však pomoc nemusí poskytovat jenom učitel. Moderní technologie umožňují stále chytřejší aplikace a ty studentům nabízejí příležitosti, které by ještě před padesáti lety byly nepředstavitelné.

Počátkem 80. let začala moderní technika pronikat k široké veřejnosti a také do výuky. Prvním stupněm byly kalkulátory. Ty podstatně ulehčily studentům výpočty. Vznikla ale obava, že jejich zařazení do výuky bude mít negativní vliv na výpočetní dovednosti studentů. To se však nepotvrdilo. Když se vzalo v úvahu, že významně šetří čas, byly kalkulátory doporučeny jako vhodná pomůcka do výuky (Květoň, 1983).

V 80. letech se také objevily první stolní počítače a ty v 90. letech začaly pronikat i do výuky (Robová, 2012). Nejdříve se – kvůli nepřipraveným didaktickým materiálům a špatné grafice – používaly k výuce základů programování a teprve později se z nich stal nástroj, který žáci používali při různých činnostech - k procvičování látky, jako zdroj informací, ke grafickému zprostředkování učiva apod.

Programy třídy Dynamic Geometry Environment (**DGE**[1], prostředí dynamické geometrie) se začaly vyvíjet již v 80. letech (Kortenkamp, 2000). Díky přesnému grafickému zobrazení, interaktivitě a dalším funkcím je dnes všeobecně uznáváno, že tyto programy mají velký potenciál nejen zpřístupnit studentům svět euklidovské geometrie (včetně prostorové), ale mohou jim výrazně pomoci při řešení problémů („problem solving“, např. Prusak et al., 2012).

Ohniskem této dizertace je výzkumný problém, který lze na obecné úrovni popsat otázkou:

*„Jak výrazně programy DGE usnadňují studentům dosažitelnost logického zdůvodnění řešení matematického problému ve srovnání s případem, kdy studenti software nepoužívají?“*

K formulaci uvedeme nejdříve dvě poznámky: 1) Termín „logické zdůvodnění řešení“ by mohl být zjednodušené chápán jako „důkaz“. To by však nebylo úplně přesné. Úlohy, které byly předložené studentům, neměly podobu „dokažte, že…“, ale „určete co je řešením (např. množina bodů) a toto řešení zdůvodněte“. Studenti tedy nevěděli předem, co je řešením, ale pokud měli k dispozici software DGE, rychle to zjistili. Teprve pak se problém z podoby „najděte řešení…“ změnil na „dokažte, že…“ 2) Samotný termín „důkaz“ je pojem, který v sobě zahrnuje určité nároky na rigoróznost a formálnost. Vzhledem k tomu, že objektem výzkumu v této práci nebyli matematikové, ale studenti, kteří se důkazům učí, nebyly nároky na formální správnost důkazu tak vysoké. Slovní nebo psané vyjádření, z něhož bylo jasné, že student odhalil klíčovou myšlenku a byl schopen správně uspořádat fakta do logického řetězce, pro účely práce stačilo.

[1] Jsou dvě široce používaná označení – DGE a DGS (Dynamic Geometry Software). To první je obecnější, neboť zahrnuje i aplikace na mobilu apod., zatímco to druhé označuje klasické počítačové programy v užším smyslu (jež jsou primárním objektem této práce). Ale vzhledem k tomu, že programy tohoto typu mají stále více funkcí a s tím i různá označení (například DGS se schopností provádět algebraické operace, se někdy nazývá DME – Dynamic Mathematical Environment), budeme v této práci používat obecnější pojem DGE.

Je zřejmé, že výše uvedený výzkumný problém má mnoho parametrů a je příliš obecný. Zmiňme tři důležité faktory, které je třeba specifikovat:

1) Na jakých studentech, s jakými zkušenostmi a za jakých podmínek budeme výzkumnou otázku zkoumat?
2) Jaké problémy jsou vhodné pro zodpovězení otázky?
3) Jakou zvolit metodologii? Z výše uvedené otázky je zřejmé, že je nutné srovnat dosažené výsledky studentů při řešení s klasickými prostředky (papír tužka) s výsledky, kdy budou využívat software DGE.

Tyto otázky zodpovíme poté, až v dalších kapitolách rozvineme teoretické pozadí dosavadních poznatků. Zde zdůrazněme, že uvedený výzkumný problém se z různých úhlů zkoumá od začátku tohoto století. Většina studií, která se na něj pokouší odpovědět, se však odlišuje od přístupu v této práci ve dvou ohledech:

- Většina ostatních prací se zaměřuje na středoškoláky, případně na žáky základních škol. V této práci jsou objektem vysokoškoláci. Ti řešili problémy, které jsou náročnější než „klasické" středoškolské problémy.
- Naprostá většina studií se soustředí na otázku, zda a jak software DGE zlepšuje výuku matematiky. Většina z nich potvrzuje, že žáci, do jejichž výuky je vhodně zakomponován software, skutečně dosahují lepších výsledků, než žáci, kteří software ve výuce používat nemohou. Naše studie se však nesoustředí na efektivitu výuky, ale na míru pomoci, jakou může software při hledání „logického zdůvodnění" problému poskytnout ve srovnání s případem, kdy je subjekt odkázán sám na sebe. Studií, které by se zabývaly touto otázkou, je mnohem méně a jejich výsledky nejsou jednoznačné (Mariotti M., 2006).

Názor, že míru pomoci softwaru DGE při hledání důkazu matematického tvrzení není snadné jednoznačně určit, se objevil již při prvních výzkumech, které se souvislostí DGE a dosažitelnosti důkazu u studentů zabývaly. To ilustruje i následující, přes 20 let starý výrok (Hoyles a Healy, 1999):

*Exploration of geometrical concepts using DGS helps the students to define and identify properties, but not necessarily leads to the construction of a proof.*

Stejnou nejistotu vyjadřuje ve svém článku Robová (Robová, 2013). Na základě zkušeností z praxe výuky budoucích učitelů na MFF UK poznamenává, že formulovat správné a relevantní domněnky jsou schopni pouze lepší studenti a samotný důkaz problému se obvykle neobejde bez pomoci vyučujícího. Podobně na konferenci UPVM (UPVM, 2015) zaznělo, že software DGE pomáhá žákům základních škol s objevem domněnek, ale použití softwaru nevede nutně k jejich důkazu.

Jedním z cílů práce bude verifikace těchto poznatků na základě kvantitativního vyhodnocení (relativně malého) vzorku studentů. Budeme zkoumat dvě těsně související otázky, které se úzce vztahují k výše uvedenému výzkumnému problému:

I.a. *Napomáhá použití softwaru DGE k objevu relevantních faktů, vztahujících se k řešení problému, ve srovnání s prostředím „papír – tužka"?*

*I.b.* *Napomáhá použití softwaru DGE k nalézání deduktivního zdůvodnění řešení ve srovnání s prostředím „papír – tužka“?*

Další otázka se týká konkrétních příčin, proč student problém nevyřeší navzdory pomoci softwaru:

*II* *Jaké jsou příčiny selhání studentů při hledání důkazu pomocí softwaru, proč jeho pomoc není v některých případech dostatečná?*

Nakonec budeme zkoumat problém, který lze na obecné úrovni popsat následovně:

*III* *Jakým způsobem studenti objevují relevantní hypotézy v prostředí softwaru dynamické geometrie? Stačí, pokud student používá nástroje programu mechanicky (tj. bez nějakého plánu), nebo se na hledání hypotéz významně podílí jeho znalosti a logické uvažování?*

K zodpovězení této otázky stanovíme nejdříve různé kategorie, které budou vystihovat způsoby, kterými řešitel může nalézat hypotézy v prostředí softwaru dynamické geometrie. Otázku zodpovíme na základě četnosti výskytu jednotlivých kategorií při testech. Odpověď bude mít především epistemologickou hodnotu – ukáže, zda se na objevu hypotéz významně podílí řešitelovy znalosti a logika, nebo zda je pomoc softwaru tak velká, že lze tyto hypotézy objevit pouze díky rutinnímu použití softwarových nástrojů.

Těmto třem otázkám odpovídají tři cíle práce:

- Určit, zda je použití softwaru při hledání řešení a důkazu matematického problému významně efektivnější ve srovnání s prostředím papír-tužka.
- Určit, zda je pomoc softwaru pro většinu studentů, účastnících se výzkumu, dostatečná, případně jaké překážky brání studentům v dosažení řešení.
- Zjistit, zda student musí k objevu hypotéz v prostředí softwaru aplikovat svoje předchozí znalosti a logiku, nebo zda lze nástroje softwaru efektivně použít způsobem, který je veden mechanickou činností a náhodně (tj. bez jasného plánu studenta).

Výzkumný problém zapojení DGE softwaru do procesu tvorby zdůvodnění je důležitý z několika hledisek. Tím prvním (již zmíněným) je, že budoucí učitelé by měli vědět, co obnáší „dělat matematiku“, totiž že na prvním místě jde o řešení matematických problémů. Druhé hledisko úzce souvisí s prvním. Aby se žáci naučili formulovat logické zdůvodnění v matematice, je potřeba jim pro to připravit vhodné podmínky a vhodné problémy. Pokud přijmeme rozšířenou tezi, že kognitivní vývoj poznání jedince kopíruje do určité míry historický vývoj poznání celého lidstva, tak první oblastí, v níž byly položeny základy moderní matematiky, je euklidovská geometrie. Proto by na geometrii měl být ve výuce matematiky kladen patřičný důraz.

Nakonec třetím hlediskem, díky kterému je výzkumný problém aktuální, je stále větší rozšířenost počítačů a s tím související využití DGE softwaru při výuce. Počítačový software má velký potenciál při výuce geometrie především díky snadnému ovládání, dostupnosti a především díky precizní vizualizaci geometrických vztahů. Výzkumy ukazují, že použití informačních technologií ve třídě usnadňuje různé aktivity žáků, zvyšuje jejich produktivitu a kvalitu výuky (např. Chrysanthou, 2008). Proto je důležité, aby budoucí učitelé byli s těmito technologiemi důvěrně obeznámeni a byli schopni je zahrnout do výuky. Zdůrazněme, že postoje učitele k matematice a k využívání technologií při její výuce se často přenášejí na žáka samotného (Daguplo, 2017). Proto je žádoucí, aby si k technologiím vytvořili budoucí učitelé matematiky pozitivní vztah.

Tato práce sestává ze sedmi kapitol a přílohy. Každá kapitola je členěna do několika sekcí.

První čtyři kapitoly uvádějí základní teoretický rámec. V první kapitole (*Důkaz v matematice*) je vymezen pojem důkaz, jeho význam v matematice jakožto vědě a jeho význam ve výuce. Druhá kapitola (*Řešení problémů a důkaz z hlediska pedagogiky a psychologie*) obsahuje charakteristiku základních kognitivních dovedností studentů, které jsou nutné pro práci v matematice a psychologický popis procesu řešení matematického problému s důrazem na tzv. heuristické strategie. V kapitole *Řešení geometrických problémů s podporou DGE* je uvedena základní charakteristika DGE softwaru, jeho typické nástroje a přehled literatury, zabývající se různými aspekty zapojení softwaru do výuky. Ty zahrnují jak praktický výzkum (v němž se srovnává klasická výuka s výukou podporovanou softwarem), tak výzkum čistě teoretický. V poslední čtvrté kapitole tohoto okruhu, s názvem *Formulace výzkumných otázek a jejich teoretický rámec*, formulujeme výzkumné otázky.

Další tematický okruh, zabývající se vlastním výzkumem, je tvořen pátou a šestou kapitolou. Pátá kapitola s názvem *Kategorizace způsobu objevu hypotéz v prostředí dynamické geometrie* uvádí autorův návrh modelu, klasifikujícího akce subjektu při řešení problému v prostředí, které umožňuje experimentální přístup (tzn. nástroje softwaru dynamické geometrie). Šestá kapitola s názvem *Výzkum* popisuje metodologii výzkumu, interpretuje získaná data.

Poslední kapitola získané výsledky stručně shrnuje a načrtává další možný směr výzkumu.

Práce obsahuje také *Přílohu*, v níž je ukázáno, jak konkrétně software napomáhal autorovi této práce při řešení některých náročnějších problémů z geometrie.

# 1 Důkaz v matematice

Na důkaz v matematice lze pohlížet z mnoha úhlů. V rámci této práce jsou důležitá tři hlediska. Tím prvním je účel a význam důkazu v matematice a ve výuce matematiky. Toto hledisko spadá pod filosofii vědy a kromě matematiků a filosofů se jím zabývají vědci z oblasti vzdělávání. Druhým hlediskem je popis procesu vytváření důkazu. Zde jde z větší části o psychologické hledisko. Pochopitelně se tímto přístupem nezabývají jenom psychologové, ale i mnozí elitní matematici, např. Hadamard (1945) či Poincare (1905). Třetí hledisko, pro tuto práci zásadní, je důkaz dosažený s pomocí počítače (obecněji s pomocí nějakého nástroje). To zahrnuje jak filosofické úvahy (zda se důkazem dosaženým takovým způsobem nemění podstata samotného pojmu „důkaz“), tak psychologicko-vzdělávací hledisko (jakým způsobem počítač používat, aby pomáhal k logickému zdůvodnění a lepšímu zpřístupnění abstraktního světa matematiky). V této kapitole rozebereme pouze první z výše uvedených hledisek – význam důkazu v matematice a ve výuce. Zbylým dvěma hlediskům se budeme věnovat v následujících dvou kapitolách.

**Význam důkazu v matematice a ve výuce matematiky**

Začneme definicí důkazu podle Oxford Dictionary of Mathematics (Clapham, 2009):

*A chain of reasoning, starting from axioms, usually also with assumptions on which the conclusion then depends, that leads to a conclusion and which satisfies the logical rules of inference.*

Matematický důkaz tedy vychází z axiomů a přijatých teorémů (které rovněž vycházejí z axiomů) a za pomoci všeobecně přijímaných pravidel usuzování vyvozuje platnost dokazovaného tvrzení. Pro úplnost dodejme, že axiomy jsou lidskou konvencí a jejich platnost se přijímá jako daná. Řekové ve starověku při tvorbě své „euklidovské geometrie“ měli svůj úkol těžší, než se na první pohled zdá, neboť museli axiomy, na nichž je tato geometrie založena, vhodně vybrat a uvědomit si jejich logickou nezávislost (Mariotti M., 2006). Tento vývoj byl završen Euklidem ve 3. století př. n. l. Ani v dnešní době není axiomatický systém matematiky uzavřený, například ve 20. století se objevila tzv. nestandardní analýza, jejíž axiomatický systém je odlišný od systému, na jehož základě stojí tradiční infinitesimální počet. Ukázalo se také, že řešení „problému kontinua“ nelze v tradičním axiomatickém rámci ani dokázat, ani vyvrátit a jeho (ne)platnost závisí na axiomatické volbě (Stewart, 2006).

Pojem „matematický důkaz“ primárně souvisí s matematikou jako vědou. Tento pojem je zcela zásadní pro pochopení toho, co matematika opravdu je a jak se v ní orientovat. Matematika se totiž od ostatních věd liší v jednom ohledu: Zabývá se abstraktními objekty, které v reálném světě bezprostředně neexistují, i když svůj původ mají většinou ve skutečném světě. Můžeme vidět „dvě jablka“, ale nemůžeme vidět číslo „dvě“. Můžeme vidět „rovný klacek“, ale nikdy neuvidíme skutečnou přímku. Současná psychologie považuje matematiku jako soubor mentálních modelů reality, nikoli za realitu samotnou (Stewart et al., 1977). V důsledku zvláštního ontologického statusu matematiky je nemožné, aby konkrétní experiment potvrdil matematický teorém.[2] K tomu, abychom se v matematice orientovali, je nutné spolehnout se na obecně platná pravidla uvažování a na definici souboru axiomů, ze kterých se vychází. Právě uvažování, díky kterému se orientujeme v matematickém světě, úzce souvisí s pojmem důkaz, který můžeme chápat jako nezvratné logické zdůvodnění daného tvrzení.

Pro matematiku jako vědu má důkaz dvě hlavní funkce (Hanna G. 2011, De Villieres 2004):

1) *Je kritériem pravdivosti tvrzení (jeho verifikací).*
   Všechny vědy sice mají vlastní kontext (systém poznatků), na základě kterého lze do značné míry verifikovat nové teorie. Tyto nové teorie jsou však alespoň z části založené na neúplné indukci. Uveďme příklad. Premisa: každé ráno vyšlo Slunce na východě. Závěr: zítra vyjde Slunce také na východě. V budoucnu se tak může ukázat, že v některých případech tyto teorie budou dávat špatné předpovědi a bude je potřeba nahradit. (Uveďme příklad z fyziky: Newtonův gravitační zákon byl nahrazen obecnou teorií relativity). V matematice toto neplatí: Důkaz Pythagorovy věty platil v antickém Řecku stejně, jako platí dnes a jak bude platit za dalších tisíc let. Zdá se, že matematika je jediná věda, poskytující epistemologickou jistotu.

2) *Důkaz slouží k orientaci v matematické krajině, díky tomu, že poskytuje porozumění, proč je dané tvrzení pravdivé, a tak vede často k objevu nové matematiky a novým souvislostem.*
   Porozumění má hodnotu samo o sobě. Subjekt je schopen díky němu lépe aplikovat matematickou teorii na konkrétní problémy, je schopen si teorémy lépe zapamatovat atd. Porozumění, proč je matematický teorém pravdivý, má však ještě jeden velký význam: Důkaz teorému má často za následek objevení nové, v některých případech revoluční matematiky. Zmiňme jeden slavný příklad. Velká Fermatova věta (ve skutečnosti se dříve jednalo o domněnku) byla nastolena vynikajícím „amatérským“ matematikem a soudcem Pierrem de Fermatem v 17. století. Více než 300 let odolával problém všem pokusům o řešení, až v roce 1994 dosáhl Brit Andrew Wiles důkazu v rámci moderní matematiky (Singh, 2002). Ačkoli Wilesovou hlavní motivací bylo řešení Fermatovy věty, vedlejší produkt tohoto důkazu – důkaz takzvané Tanija-Šimurovy domněnky – měl pro matematiku jako vědu mnohem větší význam. Matematici neřeší problémy pouze kvůli výsledkům nebo důkazům samotným, ale techniky použité při důkazu problému často vedou k tvorbě nové matematiky, novým souvislostem a novým pohledům.

Ve výuce matematiky jsou funkce a význam důkazu z větší části jiné než v matematické vědě. Oslabují se jeho funkce, jakými jsou verifikace tvrzení a cesta k objevování nové matematiky. Jak je uvedeno v publikaci (De Villieres, 2004), pro žáky a studenty mají větší

[2] Ohledně ontologického statusu matematiky se dodnes vedou spory. Jeden krajní názor je, že matematika je pouze výhodný lidský konstrukt (tzn. popisuje realitu ekonomicky a jednoduše, ale sama realitou není). Druhý krajní názor v duchu platonismu tvrdí, že matematika je reálná, na lidech nezávislá, a ti ji pouze objevují.

význam jiné funkce důkazu, než pouhé získání epistemologické jistoty. Uveďme jejich stručný přehled (Hanna G. 2012 a De Villieres 2004):

- **Systematizace**: Pochopení logických vztahů mezi matematickými objekty, zasazení výsledku do širšího kontextu. Pochopení struktury axiomatického systému, ze kterého byl důkaz odvozen.
- **Komunikace**: Je nutné důkaz formulovat takovým způsobem, aby ho ostatní mohli následovat a pochopit. U studentů je tak možné rozvíjet a pozorovat jejich vyjadřovací schopnosti a způsob jejich myšlení. Způsob a forma sdělování matematických poznatků v různých dobách má pak velký význam pro historii matematiky, neboť odráží matematické paradigma dané doby.
- **Potěšení**: Důkaz může vyvolat stejně hluboké emoce, jako umění. Ne každý důkaz je považován za krásný, obecně jsou výše ceněny důkazy, jejichž myšlenka je překvapivá, elegantní, objasňující jádro problému a relativně stručná.
- **Vysvětlení**: Ačkoli důkaz matematické věty vždy implikuje její pravdivost, ne vždy je z důkazu jasné, proč je věta pravdivá. V matematice i v její výuce je lepší, pokud důkaz toto vysvětlení pravdivosti poskytuje, mimo jiné i proto, že pak se lépe posuzuje důležitost a význam dokázané věty.
- **Intelektuální výzva a rozvoj vlastních schopností:** Matematické schopnosti mají samozřejmě široké uplatnění, stejně jako se fyzická zdatnost neomezuje pouze na prostor tělocvičny. U jistého zlomku studentů se může stát řešení problémů a hádanek zdrojem seberealizace a způsobem překonávání sebe sama.

Význam důkazu v matematice a ve výuce matematiky shrnuje Robová v článku (Robová, 2013):

*Z hlediska matematiky jako vědy spočívá hlavní role důkazu především v prokázání, resp. ověření, pravdivosti daného tvrzení. Současně důkazy významnou měrou přispívají k rozvoji matematické teorie i k systematizaci jejích poznatků. K hlavním funkcím důkazů zařazených do výuky matematiky patří rozvíjení deduktivních myšlenkových postupů studentů, rozvíjení jejich kritického myšlení a v případě vhodně volených situací i podpora motivace studentů. Pochopení důkazu ze strany studenta vede k jeho hlubšímu porozumění daným matematickým jevům i vzájemným souvislostem včetně logických vazeb. Tyto funkce činí z důkazu důležitou součást výuky matematiky, přičemž s rostoucím stupněm vzdělávání by měl být kladen na procesy zdůvodňování i dokazování větší důraz.*

Zdůrazněme poslední větu: Ačkoli na základních školách se důkaz naučí jenom někteří nadanější žáci, pro středoškoláky by měl být standardním prostředkem zdůvodňování. Budoucí učitelé matematiky by navíc měli umět alespoň některé důkazy sami vytvářet, ne je pouze reprodukovat.

Důkaz a logické zdůvodnění je zásadní pro orientaci v matematice, pro pochopení toho, jak se v matematice pracuje a co matematika je. Proto je nutné, aby s ním byli středoškoláci a nadanější studenti základních škol seznámeni. Citujme z RVP pro gymnázia (RVP, 2021). V sekci „Kompetence k řešení problémů“ se uvádí:

- vytváří hypotézy, navrhuje postupné kroky, zvažuje využití různých postupů při řešení problému nebo ověřování hypotézy;
- uplatňuje při řešení problémů vhodné metody a dříve získané vědomosti a dovednosti, kromě analytického a kritického myšlení využívá i myšlení tvořivé s použitím představivosti a intuice;
- kriticky interpretuje získané poznatky a zjištění a ověřuje je, pro své tvrzení nachází argumenty a důkazy, formuluje a obhajuje podložené závěry;
- je otevřený k využití různých postupů při řešení problémů, nahlíží problém z různých stran

Všechny tyto kompetence se využívají (zejména) při řešení matematického problému.

V sekci „Matematika a její aplikace – argumentace a ověřování", je mezi očekávanými výstupy:

- rozliší správný a nesprávný úsudek;
- vytváří hypotézy, zdůvodňuje jejich pravdivost a nepravdivost, vyvrací nesprávná tvrzení;
- zdůvodňuje svůj postup a ověřuje správnost řešení problému

Postoj žáka k matematickému zdůvodnění je však značně ovlivněn postojem učitele (Daguplo, 2017). Čím bude učitel v tomto směru kompetentnější, tím je větší šance, že student lépe pochopí podstatu matematické práce.

Na závěr této kapitoly ještě poznamenejme, že matematický důkaz má dva krajní póly – formální a neformální. Hlavní rozdíl mezi nimi spočívá v tom, že formální důkaz má podobu „správně uspořádaných" symbolů bez konkrétního významu, zatímco neformální důkaz ke konkrétnímu významu odkazuje.

Formální důkaz můžeme chápat jako hru se symboly, které nic nezastupují, a ze kterých můžeme uspořádávat řetězce (dokazované věty) podle daných syntaktických pravidel (Goldstein, 2005, s. 112). Jediné kritérium správnosti důkazu je, zda jsou tyto řetězce uspořádány dovoleným způsobem podle pravidel, která stanovují, jak je možné symboly skládat. Na význam symbolů se nehledí. Formální důkaz ve smyslu přístupu Davida Hilberta (van Heijenoort, 2002) je sekvence jasně formulovaných tvrzení, kterou uzavírá dokazovaná věta. Každé tvrzení v této sekvenci je buď axiom, nebo logický důsledek předchozích tvrzení. Postupy deduktivního vyvozování v důkazu by měly být natolik jasné, že ověření jejich správnosti by mělo být proveditelné (v principu) mechanicky, například pomocí počítačového programu nebo jiného algoritmu. Dawson (2006) poznamenává, že čistě formální důkazy se vyskytují zejména v matematické logice a v informatice.

Naproti tomu v neformálním důkazu jsou používány konkrétní modely, používají se prostředky, kterým je připisován intuitivní význam a k vyjádření myšlenek se používá běžný jazyk. Některé argumenty použité v tomto typu důkazu nemusí být dokázané „nade vší pochybnost", některé mohou mít dokonce pouze pravděpodobnostní charakter. Tyto argumenty mohou být užitečné zejména při tvorbě validního důkazu, v konečné podobě důkazu je ale použít nelze.

Čistě formální důkaz náleží do hřiště profesionálů a je nevhodné takový důkaz požadovat po studentech nebo po budoucích učitelích matematiky. Zároveň je nepřijatelné akceptovat jako důkaz něco, co obsahuje argumenty, které jsou pouze pravděpodobné, například otestované empiricky na několika příkladech. Je vhodné zvolit jakousi střední cestu mezi formálním a neformálním důkazem. V této práci budeme považovat jako uspokojivý takový důkaz, který obsahuje klíčovou myšlenku pro zdůvodnění problému, odkazuje k matematické teorii (axiomům, teorémům), a má deduktivní strukturu.

# 2 Řešení problémů a důkaz z hlediska pedagogického a psychologického

Jak bylo řečeno v předchozí kapitole, matematika má zvláštní ontologický status, neboť v reálném světě skutečné matematické objekty nenajdeme. Orientace v matematické krajině závisí na duševních procesech, a ty jsou hlavní doménou psychologie. V této kapitole uvedeme charakteristiky kognitivních vlastností, které jsou nutné (nebo žádoucí) při vytváření matematického zdůvodnění.

V první sekci, nazvané *Přípravné fáze studenta*, uvedeme stadia, která by si student měl projít předtím, než bude schopen vytvářet deduktivní důkaz. Sekce *Faktory a strategie, které se uplatňují při hledání řešení*, pojednává o teoretických znalostech, heuristickém uvažování a deduktivním uvažování. Poslední sekce, *Charakteristika práce v matematice a Toulminův model*, uvádí obecný popis řešení matematického problému a teoretický model, který bude v 5. kapitole sloužit jako východisko pro formulaci jedné z výzkumných otázek.

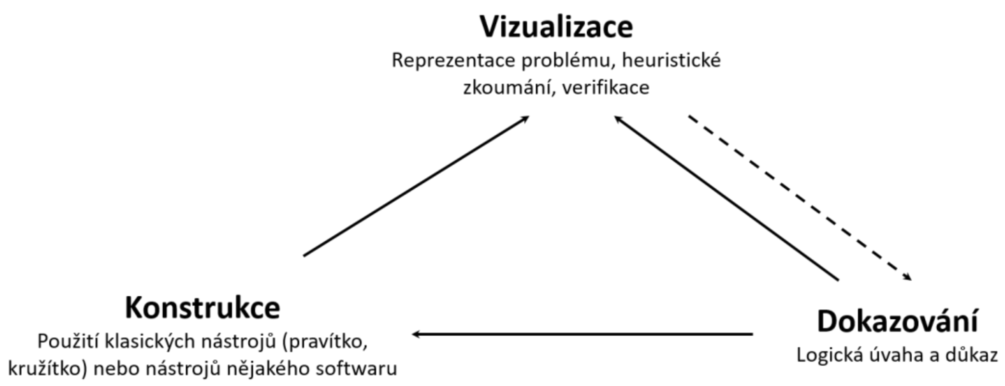
## 2.1 Přípravné fáze studenta

Francouzský psycholog Raymond Duval (Duval, 1998) se zabýval dokazováním v geometrii. Stanovil tři druhy kognitivních procesů, z nichž každý naplňuje specifické poznávací funkce. Jsou to:

- Proces vizualizace. Subjekt vytváří reprezentaci geometrické věty nebo heuristicky prozkoumává geometrickou situaci (pojem heuristika, viz dále).
- Proces konstrukce. Subjekt je schopen s pomocí nástrojů (ať už fyzických nebo počítačových) provést konstrukci.
- Proces dokazování. Subjekt používá logickou úvahu za účelem rozšíření znalostí, vysvětlení nebo za účelem sestavení důkazu.

Duval poznamenává, že každý z těchto procesů může fungovat odděleně, ale fakticky jsou úzce spjaty. Na obrázku 1 znázorňují šipky, jak jeden proces může podporovat druhý. Přerušovaná šipka znamená, že špatná reprezentace problému může mít negativní vliv na proces dokazování. Známý je v této souvislosti případ „důkazu“, že všechny trojúhelníky jsou rovnoramenné, viz (Kuřina, 1989, s. 144).

Podle Duvala je pro úspěšné chápání geometrie nutná souhra všech těchto procesů. Problémem však je, jak docílit, aby žáci dokázali tyto tři procesy propojit. Zavedl proto pro učitele tři zásady, které mají tomuto propojení napomáhat: 1) Každý z kognitivních procesů má být budován samostatně. 2) Rozvíjení procesu vizualizace a dokazování je nutné věnovat ve škole značnou pozornost. 3) Teprve pokud jsou všechny tři procesy dostatečně rozvinuty, může dojít k jejich spojení a synergii (celek je víc než soubor jeho částí).




*Obrázek 1 Duvalův model geometrického uvažování*

Manželé van Hieleovi vytvořili model geometrického myšlení, který vycházel z pozorování vlastních žáků při výuce geometrie. Jejich teorie definuje pět úrovní a popisuje vývoj geometrického myšlení od pouhého rozeznávání tvaru až ke schopnosti vytvořit formální důkaz. Tyto úrovně jsou (Mason 1998):

**0. úroveň – vizualizace:** Žáci posuzují geometrické útvary podle vzhledu, nikoli podle jejich vlastností.

**1. úroveň – analýza:** Žáci vidí jednotlivé geometrické útvary jako soubor vlastností. Tyto vlastnosti umí pojmenovat a určit, ale nedokáží rozpoznat, které soubory vlastností jednoznačně určují daný geometrický útvar.

**2. úroveň – abstrakce:** Žáci chápou vztahy mezi vlastnostmi (jestliže se úhlopříčky čtyřúhelníku půlí, protější strany jsou rovnoběžné). Žáci jsou schopni vytvářet smysluplné definice a dokáží je zdůvodnit neformálními argumenty. Význam přísně deduktivního uvažování jim na této úrovni ještě není jasný.

**3. úroveň – dedukce:** Žáci dokážou sestavit důkaz, chápou roli axiomů, vědí co je to nutná a postačující podmínka. Na této úrovni by měli být schopni nejen reprodukovat běžný středoškolský důkaz, ale měli by ho být schopni také vytvořit.

**4. úroveň – axiomatizace:** Žáci chápou formální stránku dedukce. Umí používat nepřímý důkaz a důkaz sporem.

Van Hiele uvádí vlastnosti tohoto modelu, které se vztahují k výuce (např. Crowley, 1987). Zde zmíníme pouze jednu vlastnost, a to postupnost. Ta vyjadřuje, že není možné jednotlivé úrovně přeskočit a že každý žák musí projít těmito úrovněmi postupně, v daném pořadí.

Jako samozřejmost lze brát fakt, že objekty studia této dizertace – studenti učitelství matematiky – dosáhli minimálně třetí úrovně Van Hieleho modelu a jsou tedy schopni chápat matematický důkaz a v určitém rozsahu ho i vytvářet.

## 2.2 Faktory a strategie, které se uplatňují při hledání řešení matematického problému

Není pochyb, že mezi schopnostmi řešit matematický problém a inteligencí řešitele je pozitivní korelace. Při řešení problému se uplatňuje také to, co lze označit jako matematická kreativita. Tu lze obtížně měřit, neboť částečně splývá s inteligencí a je ovlivněna znalostmi subjektu. Guilford (1950) ji definoval jako intelektuální aktivitu, která generuje nové myšlenky v neobvyklých matematických situacích. Guilfordův model uvádí, že ke generování nových myšlenek jsou nutné kognitivní atributy jako „fluency“ (plynulost, schopnost vytvářet velké množství nápadů, z nichž pouze některé se ukážou jako užitečné), „flexibility“(schopnost vytvářet různé druhy nápadů, patřících do různých kategorií), „originality“ (schopnost vytvářet netypické a originální nápady), „elaboration“ (rozpracování, schopnost předefinovat nebo přetvořit problém změnou jeho zadání).

Ačkoli kreativita a inteligence subjektu mají vliv na úspěšnost při řešení problému, v této práci se jimi zabývat nebudeme. Hlavním důvodem je to, že kognitivní faktory lze zlepšovat pouze v dlouhodobém horizontu a navíc v omezené míře, takže učitel je při výuce může chápat jako předem dané. V dalším textu se zaměříme na dovednosti pro řešení problémů, které lze zlepšovat efektivněji, nebo dovednosti, které se bezprostředně uplatňují při tvorbě důkazů. Máme na mysli zejména tyto dovednosti: heuristické uvažování, matematické znalosti a schopnost deduktivně uvažovat.

Začneme obecným popisem procesu řešení úlohy (ne nutně matematické) a objasníme pojmy „heuristická strategie“ a „doménově specifická heuristika“. Poté ukážeme příklady konkrétních heuristických strategií v matematice. Uvedeme také pár poznámek k důležitosti znalosti matematické teorie a k deduktivnímu uvažování. Tyto pojmy budou využity v následující sekci, kde na obecné úrovni charakterizujeme způsob práce v matematice.

**Teoretický popis procesu řešení problémů**

Základním východiskem pro popis řešení problému se v současnosti stala Newellova a Simonova teorie problémového prostoru (Eysenck, 2008). Při jejím popisu se často používá analogie s bludištěm: Na každém rozcestí při průchodu bludištěm máme několik možností (jít doleva, doprava nebo rovně) a každá z těchto možností se větví do dalších možností. Stejně lze pohlížet na řešení problému – při řešení jsou určité fáze, kdy musíme provést volbu, ačkoli ne vždy jsme si jisti, jaké bude mít důsledky. Také jsou fáze, kdy postupujeme přímočaře: Například prověřujeme na konkrétních případech nějakou hypotézu (analogie pohybu chodbičkou bludiště, než dojdeme na další rozcestí). Dovolené možnosti pohybu v problémovém prostoru (nebo v bludišti) označili Newell a Simon jako operátory. Používání operátorů vede k posunutí z jednoho stavu do druhého. V jakémkoli stavu může existovat několik různých operátorů, které lze použít (odbočení doleva, doprava, vrátit se apod.). Existuje tedy celý prostor stavů a cest tímto prostorem, ale jenom některé cesty vedou k cíli. Tento problémový prostor slouží k popisu abstraktní struktury problému.

Na model problémového prostoru navazují Newell a Simon představou, že lidé procházejí během řešení problému různými stavy vlastních znalostí o problému. Na začátku procesu řešení mají určitý počáteční stav svých znalostí a prohledávají prostor alternativních mentálních stavů. Tak pokračují, dokud nedosáhnou cílového stavu znalostí. Krok z jednoho stavu do dalšího se uskutečňuje aplikací mentálních operátorů. Tyto operátory jsou založeny na logice, znalostech subjektu a účelných strategiích – tzv. heuristických metodách, které subjekt používá. Právě znalosti mají vliv nejen na logiku, ale i na efektivitu heuristických metod. Uveďme příklad (Eysenck, 2008 s. 482):

*Jestliže je například vaším cílem „dostat se do obchodu, než ho zavřou", můžete pro jeho dosažení generovat tři podcíle – „najít mapu", „naplánovat nejkratší trasu" a „najít rychlejší způsob dopravy, než je chůze". Znalosti, které člověk vnáší do problému, jsou rozhodující; jeho pojetí problému (tj. jak reprezentuje počáteční stav) a znalosti, které do něj přináší (operátory a strategie, jež jsou mu dostupné), rozhodujícím způsobem určují pozorované chování při řešení problémů.*

To nejpodstatnější z výše uvedeného je:

- Na proces řešení problému lze pohlížet jako na proces vytváření stavů znalostí o problému, které získáváme aplikací mentálních operátorů.
- Mentální operátory můžeme chápat jako soubor dovolených kroků při řešení (jinými slovy, mentální operátory slouží k pohybu v problémovém prostoru).
- K efektivnímu pohybu v problémovém prostoru používají lidé své znalosti a heuristické strategie. Ty významně usnadňují dosažení cílového stavu.

**Heuristické metody a doménově specifická heuristika**

Analogie problémového prostoru a bludiště má jeden nedostatek – pokud procházíme bludištěm a ocitneme se na křižovatce, na které jsme ještě nebyli, obvykle aplikujeme operátory víceméně náhodně (jakákoli cesta může být teoreticky ta pravá). Při řešení hádanky nebo matematického problému je ale náhodné rozhodování zoufale neefektivní. Ilustrujme to na nejjednodušší verzi známého problému Hanojských věží[3]. Při řešení této úlohy máme v každém kroku až tři možnosti. Když ale předem vyloučíme ty, při jejichž aplikaci se stav disků po dvou krocích zopakuje, zůstanou možnosti dvě. K dosažení cílového stavu je potřeba minimálně sedmi kroků. Pokud bychom každý krok volili náhodně (ze dvou možností), mohli bychom dospět celkem ke $2^7 = 128$ stavům. Pouze jeden z nich by ale představoval řešení úlohy. Je zřejmé, že pravděpodobnost úspěšnosti strategie náhodného výběru operátorů je nesmírně malá i při tak jednoduchém problému, jako je Hanojská věž se třemi kolíky.

Proto, aby subjekt úlohu vyřešil, neměl by operátory používat náhodně, ale měl by sledovat určité strategie. Těmi jsou již zmíněné heuristické metody nebo heuristiky.

Heuristiky jsou obecná „pravidla od oka", která sice s úplnou jistotou nemusí vést k vyřešení problému, ale jsou k tomu velmi nápomocná. Jsou to pravidla, která jsou ve vztahu k řešení „slibná" a která obvykle ušetří spoustu času a úsilí, které bychom museli vynaložit, pokud bychom prověřovali každou možnost problémového prostoru jako rovnocennou. Moderní heuristika je obor patřící do psychologie, který se snaží odhalit typické mentální procesy,

[3] Problém Hanojské věže – viz např. Wikipedii. V textu uvažujeme verzi se třemi kolíky.

které se používají při řešení problémů. V příkladu Hanojských věží by heuristickou strategií mohlo být, že budeme větší pozornost věnovat stavům, které se více podobojí cílovému stavu (neboli rozdíl mezi současným a cílovým stavem se stane menším), případně že nebudeme uvažovat stavy, kterými už jsme si prošli v předchozích krocích.

Základní heuristické postupy jsou obecné a nezávislé na konkrétním obsahu problému – můžeme je použít jak při řešení matematické úlohy, tak při hledání ztracených klíčů od auta. Důležitým kritériem, které je třeba brát v úvahu při výzkumu procesu řešení problémů, je míra náročnosti, která je kladena na znalosti subjektu. Problém, kde se využívají pouze aritmetické operace, je na znalosti nenáročný (knowledge-poor), naopak problém, který vyžaduje pokročilé znalosti, se označuje jako „knowledge-rich“. Situace náročné na znalosti je mnohem těžší charakterizovat vzhledem k potřebnému rozsahu znalostí a rozmanitosti způsobů, jakými jsou využívány (Eysenck, 2008). Heuristické uvažování se stává efektivnějším, pokud při něm subjekt využívá konkrétní specifické znalosti, vztahující se k problému. Dostáváme se tak k pojmu „doménově specifická heuristika“.

Zkušenosti subjektu s řešením problémů mohou výrazně zlepšit efektivitu heuristických strategií. Zkušenosti také umožňují strukturovat problém do menší podcílů, jejichž postupným splněním je jeho řešení dosaženo. Pokud například subjekt vyřešil Hanojskou věž se třemi disky a následně řeší stejný problém se čtyřmi disky, může si na základě předchozí zkušenosti definovat hlavní podcíl: „Přesunout největší (spodní) disk na požadovaný kolík“. Vliv zkušeností na efektivní definování podcílů při řešení úlohy potvrzuje práce (Egan, Greeno, 1974). Tyto a další výzkumy ukazují, že člověk bez zkušeností prozkoumává problémový prostor náhodně a své kroky příliš neplánuje. Používá tzv. obecné *doménově nezávislé strategie* (Anzai, Simon, 1979). To jsou již zmíněné heuristické strategie, jako vyhýbání se smyčkám, míra podobnosti současného stavu se stavem cílovým atd.

V publikaci (Anzai, Simon, 1979) je dále ukázáno, že lidé s většími zkušenostmi jsou schopni vytvářet sofistikovanější strategie, které pak využívají při řešení podobných problémů. Z doménově nezávislé heuristiky se stává *doménově specifická heuristika.*

Doménově nezávislou heuristiku lze efektivně použít u problémů, které se vyznačují následujícími rysy:

- Nejsou náročné na znalosti.
- Veškeré informace, potřebné k řešení problému, jsou přítomné v jeho popisu. Jinými slovy, subjekt vybírá při řešení problému z konečného seznamu mentálních operátorů.
- Počáteční stav a cílový stav problému jsou jasně specifikovány.

Většina problémů, a to nejen těch „ze života“ (například když si zabouchneme klíče v autě), ale i těch matematických, tyto rysy postrádá. Matematické problémy jsou náročné na znalosti, informace, které jsou pro jejich řešení klíčové, nejsou obsaženy v zadání (člověk musí hledat v paměti, jaké poznatky použít, a v některých případech je musí sám částečně vyvinout) a ne vždy jde o problémy s jasně daným cílem. Proto se při jejich řešení musí použít doménově specifická heuristika. Citujme (Eysenck, 2008 s. 497):

*Expert na řešení problémů musí mít značné znalosti z daného oboru; expertství znamená z definice vynikající schopnost řešit specifické problémy v konkrétní oblasti…. Experti na řešení problémů mají správné druhy znalostí pro snadné kódování problémů a jejich optimální reprezentaci, zatímco nováčci tyto znalosti obvykle postrádají.*

Výzkumy, které se týkaly řešení problémů v šachu nebo ve fyzice, ukázaly, že díky svým znalostem je expert schopen předem vyloučit možnosti a úvahy, jejichž pravděpodobnost úspěšného použití při řešení je malá. Tytéž znalosti umožňují expertům předem odhadnout, které postupy jsou slibné. Konkrétně v šachu se ukázalo (Eysenck, 2008 s. 499), že co do kvantity nováčci i experti uvažovali přibližně stejný počet možností, ale experti brali do úvahy možnosti více relevantní, zatímco výběr nováčků byl spíše náhodný. Na základě výše uvedeného lze říci: Čím méně znalostí subjekt má, tím více se musí uchylovat k doménově nezávislé heuristice, tedy „obecným“ a „slabým“ metodám. Naopak rozsáhlé znalosti umožňují použití doménově specifické heuristiky, která je při řešení problému mnohem efektivnější. Zdůrazněme, že nadřazenost expertů je založena na jejich znalostech, nikoli na nějaké základní kapacitě (inteligenci).

**Heuristické uvažování v matematice**

Heuristickým uvažováním v matematice se věnovalo mnoho elitních matematiků, jako byli Pappus, Leibniz, Descartes nebo Bolzano. Ve 20. století se mu na vyšší úrovni věnovali například Hadamard nebo Polya. Známá je v této souvislosti kniha *Mathematical problem solving* (Schoenfeld, 1985). Její autor sice nebyl významný matematik, zato však byl seznámen s poznatky kognitivní psychologie. Tato sekce ale vychází z Polyovy knihy „Jak to řešit?“ (Polya, 2016), která je považována za klasický úvod do heuristických metod v matematice.

Polya uvádí, že heuristické uvažování je takové, které se nepovažuje za konečné a přesné, ale za předběžné a výhodné. Cílem heuristického uvažování je „uhádnout“ řešení úlohy. Jeho základem je jakýsi matematický odhad pro výběr prostředků a způsobu jejich použití. Polya poznamenává, že stejně jako je lešení užitečné při stavbě domu, jsou heuristické úvahy užitečné při vytváření matematického důkazu. Ale stejně jako je nutné odstranit lešení potom, co je stavba hotová, i konečná podoba důkazu by se v žádném případě neměla opírat o heuristické úvahy.

Uvedeme typické heuristické otázky a strategie, jak jsou v Polyově knize uvedené:

1. Znáte nějakou příbuznou úlohu? Znáte úlohu, která má stejnou nebo podobnou neznámou, jako úloha kterou řešíte? Jestli ano, snažte se ji využít.
2. Uvažujte jednodušší analogickou úlohu. Dokážete ji vyřešit? Jestli ano, snažte se použít její výsledek nebo metodu řešení při vašem postupu.
3. Jestliže nemůžete vyřešit předloženou úlohu, pokuste se vyřešit nějakou příbuznou úlohu.
4. Snažte se použít všechny údaje v zadání.
5. Pokud mají určité prvky v zadání problému nějakou symetrii, snažte se tuto symetrii využít a zacházejte s těmito prvky rovnocenně.

6. Při řešení můžeme matematický objekt (například geometrickou konstrukci) rozložit do jednotlivých detailů. Následně tento objekt z těchto detailů zase „poskládáme“ a to buď stejným způsobem, nebo mírně odlišným. První myšlenková operace se nazývá dekompozice a druhá rekombinace. Typickým příkladem aplikace těchto operací může být, pokud v řešené úloze změníme neznámou (cíl úlohy) za přístupnější objekt, který je snáze dosažitelný a o kterém doufáme, že nám pomůže při dosažení původního cíle. Nebo naopak, ponecháme neznámou, ale pozměníme základní údaje (předpoklady) úlohy a zkoumáme, zda se problém stal přístupnější.
7. Při hledání hypotéz používejte zobecňování (neúplnou indukci). Samozřejmě s vědomím, že poznatky získané neúplnou indukcí, nemůžou být částí matematické teorie a v důkazu se musí zdůvodnit deduktivně.

V předchozí stati, pojednávající o doménově specifické heuristice, jsme zdůraznili roli znalostí subjektu, které výrazně vylepšují efektivitu heuristických strategií. Když se podíváme na výše uvedený seznam typických strategií, efektivita prvních tří přímo souvisí se znalostmi řešitele, zbylé čtyři s nimi souvisí nepřímo.

Pokud se omezíme na oblast geometrie, mohou být příkladem doménově specifické heuristiky např. následující strategie:

- Nejsou nějaké tři body v přímce, která není zmíněna v zadání problému?
- Neleží nějaké čtyři body na kružnici?
- Nenabývají dva různé úhly dané konstrukce stejné velikosti?

Pro úplného začátečníka může být těžko pochopitelné, proč by při zdůvodnění geometrické úlohy měl hledat kružnici, procházející nějakými čtyřmi body. Důvodem je fakt, že je to matematicky výhodné a matematicky výhodné je to proto, že kružnice vystupuje v mnoha teorémech, které můžeme dále aplikovat. K tomu, aby si toto řešitel uvědomil, je potřeba především praxe.

**Role znalostí při hledání matematického zdůvodnění**

O roli znalostí jsme hovořili už v případě doménově specifické heuristiky, nyní k tomuto tématu uvedeme ještě několik úryvků z knihy *Jak to řešit?* (Polya 2016, str. 10):

*Je těžké se dopracovat k dobré myšlence, pokud víme málo o daném tématu. A je to zhola nemožné, pokud o něm nevíme nic. Dobré myšlenky jsou založeny na předchozích zkušenostech a předchozích znalostech. Pouhé vzpomínání nestačí k objevení dobrého nápadu, ale nemůžeme dostat dobrý nápad bez rozpomenutí se na relevantní fakta (sám materiál nestačí ke stavbě domu, ale nemůžeme postavit dům bez shromáždění všeho potřebného materiálu). Materiálem nutným pro vyřešení matematické úlohy jsou důležité detaily z dříve nabytých matematických znalostí, jako jsou dříve vyřešené úlohy nebo dříve dokázané věty.*

Na jiném místě své knihy Polya uvádí (Polya 2016, str. 91):

*Jestliže známe slovo parabola a máme nějakou mlhavou představu o tvaru křivky, ale jinak o ní nic nevíme, naše znalosti jsou zřejmě nedostačující k vyřešení úlohy z našeho příkladu.*

*Nebo k vyřešení jakékoliv jiné seriózní geometrické úlohy o parabole. Jaký druh znalostí je nutný k takovému účelu?*

*Geometrie může být považována za vědní obor skládající se z axiomů, definic a vět. Parabola není zmíněna mezi axiómy, které se týkají jen takových prvotních pojmů, jako jsou bod, přímka a podobně. Každá geometrická argumentace týkající se paraboly, řešení libovolné úlohy, která se jí týká, musí využít buďto definice, nebo vět o parabole. K řešení takové úlohy musíme znát přinejmenším definici, ale je lépe vědět také nějaké věty.*

*To, co jsme zde řekli o parabole, platí ovšem o každém odvozeném pojmu. Když začneme řešit úlohu, která obsahuje takový pojem, nemůžeme ještě vědět, co bychom měli užít přednostně, jestli definici pojmu nebo nějakou větu o něm. Je ale jisté, že musíme použít jedno nebo druhé.*

Znalosti a zkušenosti studenta významně usnadňují jeho práci. Pokud jich má málo, stává se pro něj problém výrazně těžší, pokud nemá žádné, je téměř nemožné problém vyřešit. Mariotti ve svém článku (Mariotti, 2006), zabývající se výukou důkazů, uvádí, že matematické zdůvodnění se odehrává v rámci matematické teorie a znalost matematických teorémů je nutnou podmínkou.

Jak už bylo řečeno, samotné znalosti nestačí. Jedna věc je mít nějakou znalost a druhá věc je schopnost ji aplikovat, a to třeba v ne úplně obvyklé situaci. Důležitá je schopnost propojovat různé druhy znalostí. Proto se rozlišuje mezi „konceptuální znalostí“ – „knowledge that is rich in connections“ (Hiebert & Lefevre, 1986, p. 3) – a souborem znalostí o izolovaných faktech. V druhém případě student nemusí být schopen své znalosti vzájemně propojit. Například znalost vzorce pro obsah trojúhelníka (základna krát výška děleno dvěma) se stane konceptuální znalostí teprve v případě, že student chápe vztah tohoto vzorce ke vzorci pro obsah obdélníka nebo rovnoběžníku.

V článku (Hiebert & Lefevre, 1986) se rozlišují dva druhy propojení: propojení základní úrovně („primary level“) a propojení hlubší úrovně („reflective level“). Zhruba řečeno, propojení základní úrovně jsou zřejmější svojí blízkostí pojmů a procedur (ilustrací může být, že trojúhelník má dvakrát menší obsah než obdélník o stejné základně a výšce), zatímco propojení hlubší úrovně vyžadují představivost a schopnost činit vzdálené asociace (například geometrická interpretace algebraického vzorce Pythagorovy věty $a^2 + b^2 = c^2$).

**Deduktivní a logické uvažování**

Lidé při dedukci určují, jaký závěr nutně vyplývá, pokud se považují jisté premisy jako pravdivé. Výzkum teorie usuzování se zabývá širokou paletou úloh, které sahají od sylogistického usuzování k usuzování s výrokovými spojkami. Je několik teorií, které vysvětlují jevy zaznamenané v těchto výzkumech, jako například teorie mentálních modelů nebo teorie doménově specifických pravidel (Eysenck, 2008). My zde zmíníme teorii dedukce abstraktních pravidel, která patří k nejběžnějším a která má blízko k matematickému pohledu na věc.

Podle této teorie lidé docházejí k platným závěrům tak, že aplikují abstraktní, na obsahu nezávislá inferenční pravidla způsobem, který se podobá odvozování důkazů v logice. Lidé vyvozují závěry z premis a při tom používají mentální logiku. Pokud dělají chyby v úvaze, je to proto, že některá vyvození jsou složitější než jiná (například zpracování informací přesahuje pracovní paměť subjektu), případně špatně porozuměli premisám daného deduktivního problému.

Korektní inferenční pravidla jsou založena na výrokové logice. Logika definuje různé druhy inferenčních pravidel, s jejichž pomocí lze z premis odvodit logicky platné závěry. Ukažme si typický příklad inferenčního usuzování používaného u podmínkových premis.

- Korektní úvaha:
  Premisy: Jestliže prší, pak je Petr mokrý. Prší.
  Závěr: Petr je mokrý.
- Nekorektní úvaha:
  Premisy: Jestliže prší, pak je Petr mokrý. Petr je mokrý.
  Závěr: Prší.

Poslední výrok je logicky neplatný, protože z premis nevyplývá, proč je Petr mokrý.

Ve výzkumech bylo zjištěno, že lidé často chybují při aplikaci inferenčních pravidel (Henle, 1962). Podle teorie abstraktních pravidel je tomu tak zejména proto, že špatně rozumějí úloze nebo si ji špatně reprezentují. Jinými slovy, počáteční porozumění je chybné a na základě tohoto chybného porozumění lidé vyvozují (vzhledem k premisám logicky platné) závěry.

Nemáme v úmyslu zde podat vyčerpávající rámec rozsáhlých teorií usuzování v psychologii. Podotkněme, že jedním z hlavních cílů těchto teorií je vysvětlit, proč se lidé dopouštějí chybných dedukcí. Některá tato vysvětlení mají konzervativní podobu (například že informací je příliš mnoho, aby je subjekt zpracoval), jiné sahají k čisté psychologii a subjektivním klamům. Pro účely práce pouze uveďme, že nejelementárnější poznatky psychologie týkající se teorie usuzování lze redukovat na správné aplikování klasické výrokové logiky.

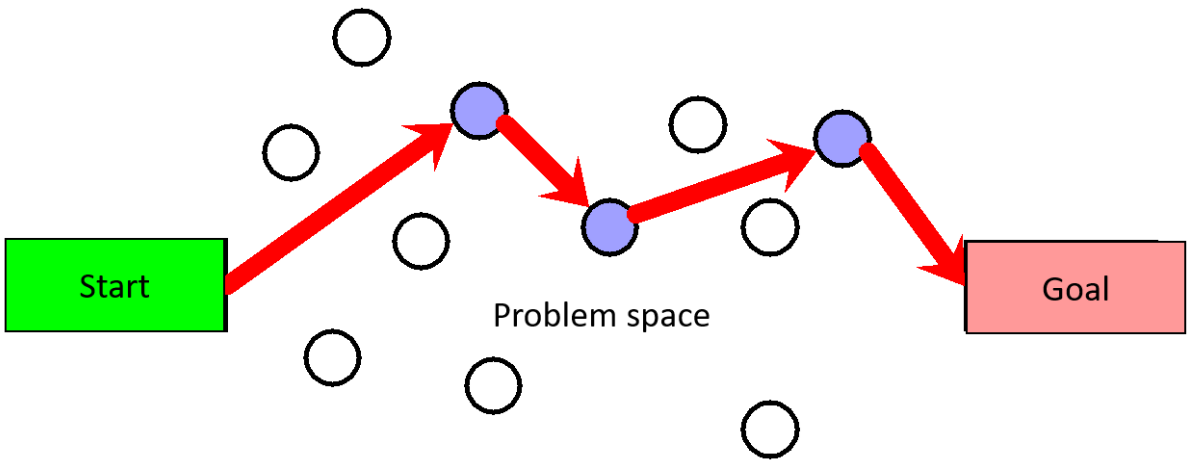
## 2.3 Charakteristika práce v matematice a Toulminův model

Polya (Polya, 2016) uvádí čtyři fáze, kterými si subjekt musí při řešení problémů projít:

1. fáze Porozumění problému: musíme přesně vědět, co se po nás žádá.
2. fáze Objevení plánu nebo strategie, která by k řešení mohla vést. Obvykle na tvorbu této strategie mají vliv řešitelovy zkušenosti, znalosti, dobré myšlenkové návyky. Hlavně ale k objevu správné strategie vede důkladný průzkum problému, který by měl napovědět, jak jsou základní údaje spojené s neznámou nebo cílem úlohy. Někdy ale ani to nemusí stačit a řešitel musí doufat v nějakou šťastnou souhru okolností, která mu pomůže problém vyřešit.
3. fáze Realizace plánu.
4. fáze Kontrola a rozbor řešení úlohy za účelem lepšího porozumění.

Nejtěžší z výše uvedených fází je fáze druhá. Ne vždy se objev plánu nebo strategie důkazu objeví náhle. Jak bylo uvedeno v sekci 2.2, při řešení problému prochází subjekt různými stavy znalostí o problému. Začíná v jistém základním stavu, ten postupně rozšiřuje a doufá, že nakonec dosáhne stavu cílového. Stavy mezi počátkem a cílem problému se mohou nazývat různě – lemmata, pomocné věty atd. Pokud tyto věty deduktivně dokážeme, můžeme je využít v dalších úvahách. Většinou však nemáme úplnou jistotu, zda lemma, které jsme právě objevili, skutečně lze využít v důkazu teorému. To se obvykle ukáže až v momentě, kdy dosáhneme cíle.

Celý proces řešení geometrické úlohy dobře vystihuje „**zjednodušený Toulminův model**“ (simplified Toulmin's Model, viz Pedemonte, 2007). Ten vychází z představy, že důkaz matematického problému lze chápat jako sekvenci deduktivních kroků od premis přes přechodná tvrzení až k tvrzení, které se má dokázat. Během procesu řešení mají tato přechodná tvrzení obvykle podobu nedokázané hypotézy. S ohledem na Newellovu a Simonovu teorii tvoří všechna možná tvrzení problémový prostor, charakterizující strukturu problému. Řešitel se snaží objevit vhodné hypotézy a lemmata, s jejichž pomocí hledá cestu v rámci problémového prostoru, která propojuje předpoklady úlohy s jejím závěrem. Celá situace je znázorněna na následujícím obrázku (obr. 2). Úkolem řešitele je 1) objevit řetězec hypotéz, který souvisí s řešením, 2) hypotézy zdůvodnit, logicky je propojit a dát důkazu deduktivní formu.

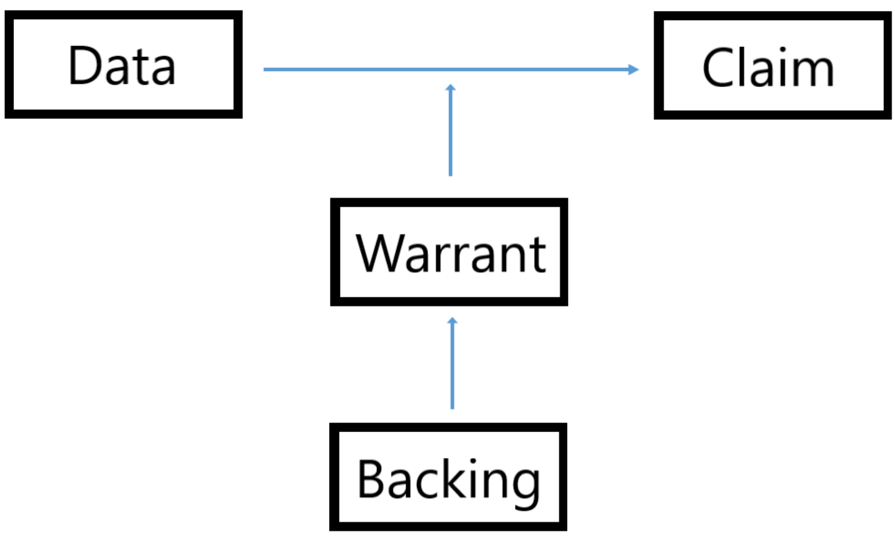



*Obrázek 2 V rámci problémového prostoru dané úlohy může řešitel přijít na mnoho hypotéz a tvrzení. Ne všechny lze ale v důkazu využít, subjekt musí nalézt cestu, která propojuje předpoklady se závěrem. Kroužky na obrázku představují tvrzení a lemmata, které se nacházejí "někde mezi" předpoklady a závěrem.*

„Zjednodušený Toulminův model“ bere v úvahu způsob nebo cestu, která řešitele vedla k objevu dané hypotézy nebo tvrzení. Pedemonte ho při svém výzkumu využila k tomu, aby srovnala strukturu argumentace, která některé žáky vedla k objevu relevantních domněnek (souvisejících s řešením problému), se strukturou validního deduktivního důkazu, kterého měli žáci dosáhnout. Došla k závěru, že mezi argumenty, podporujícími domněnku, a jejím deduktivním důkazem je v mnoha případech strukturální propast, kterou žáci (v případě jejího výzkumu středoškoláci) obtížně překonávají. Ukázala případ, kdy žáci vyšli z určitého faktu, který měli dokázat, a vyvozovali z něj důsledky. Tímto způsobem došli k předpokladům problému a svůj „důkaz“ dokončili. Nepodařilo se jim překonat strukturální propast mezi cestou, která je vedla k formulaci domněnek, a strukturou, jak by tyto domněnky měly být uspořádány v deduktivním důkazu směrem od předpokladů k závěru.

Zdůrazněme, že Pedemonte Toulminův model použila ke srovnání struktury dvou argumentací: vedoucích k objevu domněnky a vedoucích k deduktivnímu důkazu. V této práci se tímto tématem nebudeme hlouběji zabývat. Toulminův model zde prezentujeme hlavně proto, že zohledňuje různé způsoby a cesty, které vedou subjekt k formulaci a objevu relevantních domněnek. Proto bude tento model východiskem třetí výzkumné otázky, formulované ve 4. kapitole. Zde uvedeme některé podstatné aspekty tohoto modelu.

Než vezmeme nějaké tvrzení do úvahy, musí nás na něj něco navést, něco, co naznačuje jeho pravdivost. V takzvaném „zjednodušeném Toulminově modelu“ (obr. 3) tuto roli hraje takzvaný „**Warrant**“, česky „odůvodnění“. Další faktory, které v tomto modelu vystupují, jsou „**Data**“ (v matematickém kontextu empirická fakta, na jejichž základě lze formulovat hypotézy nebo verifikovat jejich pravdivost), „**Backing**“ („podpůrné argumenty tvrzení“, v našem kontextu je to exaktní matematické zdůvodnění), a již zmíněné „tvrzení“ neboli „**Claim**“ (zdůrazněme, že hypotetická tvrzení nemusí být nutně pravdivá). Rozvedeme tyto pojmy detailněji a pak uvedeme konkrétní příklad, ilustrující, jak lze z hlediska Toulminova modelu nahlížet na řešení problému.




*Obrázek 3: Zjednodušený Toulminův model*

- ***Data***

V případě geometrie můžeme za data označit libovolnou konstrukci, na jejímž základě lze rozhodnout o pravdivosti nějakého tvrzení a na jejímž základě lze formulovat hypotézy.

- *„Claim“ –* ***tvrzení***

Tvrzení, které se může nebo také nemusí dále zdůvodňovat. Při řešení matematického problému nemusíme odůvodňovat ta tvrzení, která jsou již zahrnuta do deduktivní stavby matematiky (např. že obvodový úhel je polovina středového) nebo ta, která jsou dána axiomaticky (Euklidův pátý postulát).

- „Warrant“ – **odůvodnění**

Abychom z dat vyvodili tvrzení, musí nás něco na toto tvrzení navést, „něco“, co naznačuje jeho pravdivost. Tento faktor má v Toulminově modelu název „warrant“.

Odůvodnění můžeme chápat jako informaci nebo cestu, která nás vedla k tomu, abychom dané tvrzení objevili a vzali ho do úvahy. Cesty, které vedou k objevu tvrzení, mohou být různé: od deduktivní úvahy, přes heuristickou úvahu po empirická a experimentální fakta. Je zřejmé, že DGE disponuje silnými nástroji, které významně ulehčují experimentální objev tvrzení (hypotézy). Jedná se například o možnost vizuálního vnímání dynamicky proměnné konstrukce, měření obsahů nebo délek atd.

Pro naše potřeby budeme rozlišovat mezi třemi druhy odůvodnění, z nichž první dvě korespondují s dovednostmi, uvedenými v předchozí sekci. Jde o deduktivní odůvodnění, heuristické odůvodnění a odůvodnění na základě empiricky zjištěného faktu.

I. *Deduktivní odůvodnění*
   Z premis vydedukujeme tvrzení. Pokud jsou platné premisy, je jistě platné i naše tvrzení. Citujme (Pedemonte 2007):
   *Deduction is an inference allowing the construction of a claim starting from some data and a rule. In Toulmin’s model a step appears as a deductive step: data and warrants lead to the claim.*
   Deduktivní argumentace předchází formulaci tvrzení a přispívá k jeho konstrukci (věty nebo domněnky).
   Příklad: Čtyři body leží na kružnici ⇒ aplikace věty o obvodových úhlech ⇒ spojnice dvou bodů je ze zbývajících dvou bodů vidět pod stejným orientovaným úhlem.

II. *Heuristické odůvodnění*
   Heuristickému uvažování jsme se důkladně věnovali v předchozí sekci, zde zopakujeme to nejpodstatnější: Heuristické metody jsou typické mentální procesy, které se využívají při řešení úloh. Jsou to pravidla „od oka“, která jsou slibná a která výrazně pomáhají při orientaci v problémovém prostoru (viz sekce 2.2). Efektivita heuristických postupů úzce závisí na zkušenostech řešitele s řešením problémů a také na jeho schopnosti logicky uvažovat. V této práci budeme považovat za heuristickou úvahu takovou, která je založena na odhadu a která nemá ryze deduktivní strukturu.

V matematice musíme výsledek, dosažený heuristickými metodami, podrobit deduktivnímu ověření. Uveďme dva příklady heuristického uvažování:

- Dva trojúhelníky mají shodný úhel ⇒ nemohly by být tyto trojúhelníky podobné?
- V průběhu řešení problému intuitivně hádáme, jak toto řešení vypadá. Na tomto základě se ho snažíme zdůvodnit a tak potvrdit jeho správnost. Tento heuristický postup je v jistém smyslu opačný k deduktivnímu postupu.

*III. Odůvodnění tvrzení na základě empiricky nebo vizuálně zjištěného faktu*

Na takto zjištěném tvrzení se nijak nemusí podílet logika nebo nějaká heuristická úvaha. Mohou to být fakta vypozorovaná na konkrétních příkladech, buď s pomocí počítačového programu (typu DGE nebo CAS), s pomocí konstrukce studenta nebo díky jeho náčrtku. Příkladem může být konstrukce nějakého problému počítačovým softwarem a vizuální zjištění, že jisté dvě přímky jsou pravděpodobně rovnoběžné.

- Backing – „podpora“, **přesné zdůvodnění**

Pokud hrají přechodná tvrzení důležitou roli v důkazu závěrečného tvrzení, je potřeba jejich přesného matematického zdůvodnění. Tedy všechna tvrzení a hypotézy, ke kterým jsme dospěli jinak než deduktivně (např. s pomocí indukce nebo abdukce), je nutné v důkazu zdůvodnit deduktivně.

Dalšími faktory TM jsou „Qualifiers“ a „Rebutttal“. První z nich vyjadřuje míru jistoty tvrzení a druhý dává do popředí protiargumenty. Tyto faktory však mají v kontextu matematického důkazu spíše okrajovou roli, proto se jimi nebudeme zabývat.

Zjednodušený TM se tedy skládá ze čtyř faktorů: *Data*, *Odůvodnění*, *Tvrzení* a *Přesné zdůvodnění*.

Argumentace, která operuje s empirickými nebo experimentálními fakty, se označuje jako **abdukce** a **indukce**. K definování těchto pojmů použijme citací (Pedomonte 2007):

*Abduction is an inference which allows the construction of a claim starting from an observed fact.*

*Induction is an inference which allows the construction of a claim generalizing from some particular cases.*

Na rozdíl od dedukce je v obou těchto případech argumentace, která vede k domněnce, založena zčásti nebo zcela na faktu, který má empirickou povahu, přičemž indukce tento fakt zobecňuje, abdukce z něho vyvozuje další důsledky.

V této práci budeme fakt, dosažený s pomocí abduktivní úvahy, považovat za druh deduktivního odůvodnění, neboť abdukce je dedukce, jenom s tím rozdílem, že vychází z předpokladů, které ještě nebyly dokázány.

Je nutné zdůraznit, že ačkoli abduktivní nebo induktivní argumentace může vést ke správným výsledkům, samotný matematický důkaz musí mít deduktivní strukturu. Pokud experimentálně zjištěná tvrzení hrají roli v důkazu problému, musí je student exaktně matematicky zdůvodnit, nikoli je pouze zahrnout do předpokladů.

Podotkněme, že je rozdíl mezi případem, kdy subjekt dospěje k tvrzení čistě empiricky (například vizuálním vnímáním), a případem, kdy k tomuto tvrzení dospěje s pomocí nějaké úvahy (deduktivní nebo heuristické). V druhém případě jsou subjektu známy nějaké argumenty, které svědčí pro platnost tvrzení a které přispěly k jeho konstrukci (které ale nemusí být využitelné v deduktivním důkazu). V prvním případě je před subjektem pouze „fakt“, pro jehož platnost mu nejsou známy žádné argumenty. Citujme (Pedemonte, 2007):

*Conjecture is not always the result of an argumentation, in which case it can be considered as a ‘fact’.*
*The argumentation can be related to the conjecture in two ways: the argumentation named constructive argumentation, contributes to the construction of a conjecture, thus it precedes the statement; on the other hand, the argumentation named structurant argumentation, justifies a conjecture, previously constructed as a ‘fact’, and so it comes afterwards.*

Při tvorbě důkazu se musíme často opírat o hypotézy, pro jejichž platnost máme pouze heuristické nebo experimentální důvody. Proto má tzv. neúplná indukce a experimentální přístup v matematické práci své nezastupitelné místo na všech úrovních. Jak je uvedeno v publikaci (Polya, 1954), matematik obvykle nepracuje tak, že by si nejdříve napsal axiomy a potom přemýšlel, co z nich lze odvodit. Ve většině případů matematik experimentuje, vyřeší několik vhodně zvolených případů a na jejich základě vysloví hypotézu. Teprve pak se tuto hypotézu snaží deduktivně dokázat. Citujme (Polya, 2016, s. 119):

*Matematika prezentovaná rigorózně je systematická deduktivní věda, ale matematika, jakou se zabýváme ve výzkumné praxi, je experimentální induktivní věda. V matematice, stejně jako ve fyzikálních vědách, můžeme používat pozorování a indukci k objevování obecných zákonitostí. Ale je tu jeden rozdíl. Ve fyzikálních vědách není vyšší autorita než pozorování a indukce, ale v matematice taková autorita existuje: přesný důkaz.*

Podobně se v publikaci (Villiers M., 2004) uvádí, že zatímco teoreticky by v matematice mělo platit pořadí tvorba validního důkazu – tvrzení je pravdivé, je tomu ve skutečnosti obvykle naopak: Subjekt je nejdříve přesvědčen o pravdivosti tvrzení a teprve pak se ho snaží deduktivně dokázat.

Ale ne vždy se lze na experiment a neúplnou indukci při hledání hypotéz spolehnout. Zmiňme alespoň dva důvody. Ten první je, že nekritická důvěra v zobecňování nás může svést špatným směrem. Druhým důvodem je, že matematický objekt může být tak abstraktní, že jeho experimentální zkoumání je téměř nemožné. Uvedeme k tomu dva konkrétní příklady z historie.

V 19. století byla objevena funkce, která udává přibližný počet prvočísel menších než proměnné číslo $x$. Panovalo všeobecné přesvědčení, že tato funkce trvale počet prvočísel trochu nadhodnocuje, nejen z toho důvodu, že tomu tak bylo pro všechna $x$, pro něž bylo možné poskytnout numerickou verifikaci, ale také proto, že se vzrůstajícím $x$ se toto nadhodnocení ještě zvětšovalo. V roce 1914 však Littlewood (Derbyshire, 2007) ukázal, že pokud bude proměnná $x$ růst nade všechny meze, musí nutně existovat oblasti, kde tato funkce bude počet prvočísel naopak podhodnocovat, a nejen to: Funkce bude střídavě nadhodnocovat a podhodnocovat počet prvočísel nekonečněkrát. Ačkoli Littlewood podal nevyvratitelný důkaz tohoto tvrzení, číslo, ve kterém poprvé dojde k podhodnocení počtu prvočísel touto funkcí, je tak obrovské, že ani dnešní počítače nejsou schopné tento fakt numericky ověřit.

Ilustrací druhého důvodu (nepřístupnost problému experimentálnímu zkoumání) může být objev neeuklidovské geometrie na začátku 19. století. Jelikož naše intuice spočívá na reálném světě, který se nám v běžných situacích jevil jako euklidovský, nebylo možné přijít na teorémy neeuklidovské geometrie intuitivně a ověřit je smyslovým názorem. Jediné, co mohlo vést trio Gauss, Lobačevskij, Bolyai k objevu této geometrie, byla dedukce[4].

Téma této práce – využití softwaru při řešení problémů – je zaměřeno na problémy, které v maximální možné míře umožňují experimentální přístup k řešení. Dva výše uvedené ilustrativní případy pouze ukazují, že deduktivní stavba matematické teorie je vyžadována z dobrého důvodu.

Sekci uzavřeme příkladem aplikace Toulminova modelu k problému, který autor této práce řešil s pomocí nástrojů GeoGebry.

**Ilustrativní příklad aplikace Toulminova modelu**

*Zadání:* Uvažujme trojúhelník $ABC$ takový, že $\sphericalangle MAC = 15°$, kde $M$ je střed úsečky $BC$. Určete maximální možnou velikost úhlu při vrcholu $B$ trojúhelníku. (Todev 2010, Japonská matematická olympiáda, 1994)

*Řešení:*

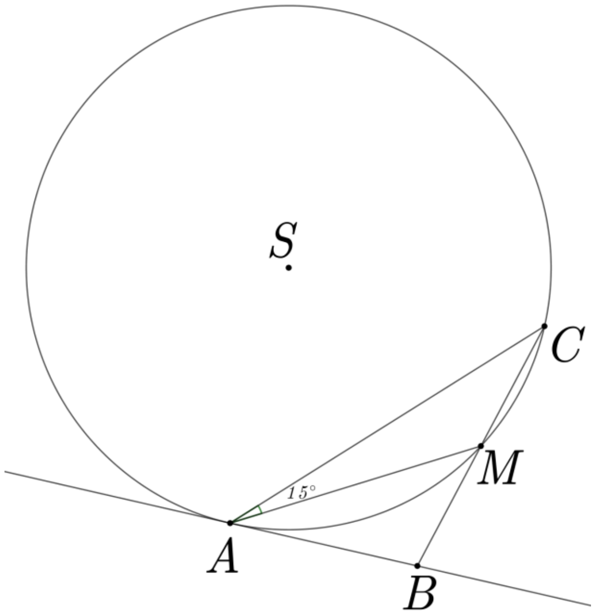
Následující řešení představuje autorův introspekční záznam. U každého tvrzení, ke kterému řešitel dospěl, je uvedeno v duchu Toulminova modelu jeho odůvodnění.

Přiřaďme úsečce $BC$ se středem $M$ libovolnou délku. Pak množina bodů $A$, ze kterých je vidět úsečka $MC$ pod úhlem $15°$, je kruhový oblouk $k$. Má-li být úhel $\sphericalangle B$ maximální, musí být přímka $AB$ tečnou ke kružnici $k$ (přísně vzato by se toto mělo zdůvodnit, ale z obrázku je tento fakt zřejmý). Tím jsme získali precíznější formulaci problému (obr. 4):

1. tvrzení (deduktivní odůvodnění)

Ekvivalentní formulace problému: Uvažujme úsečku $BC$ se středem $M$ a kruhový oblouk $k$, ze kterého je úsečka $MC$ vidět pod úhlem $15°$. Určete velikost $\sphericalangle ABC$, kde $A$ je bod dotyku tečny z bodu $B$ ke kružnici $k$.

[4] Detaily viz např. https://www.cut-the-knot.org/triangle/pythpar/Drama.shtml



*Obrázek 4 Výhodnější formulace problému*

Provedeme experiment: Spustíme kolmici z bodu $C$ na přímku $AB$ a její patu označíme $P$. Při pohledu na náčrtek se nabízí hypotéza, že $PC = PA$. (obr. 5).

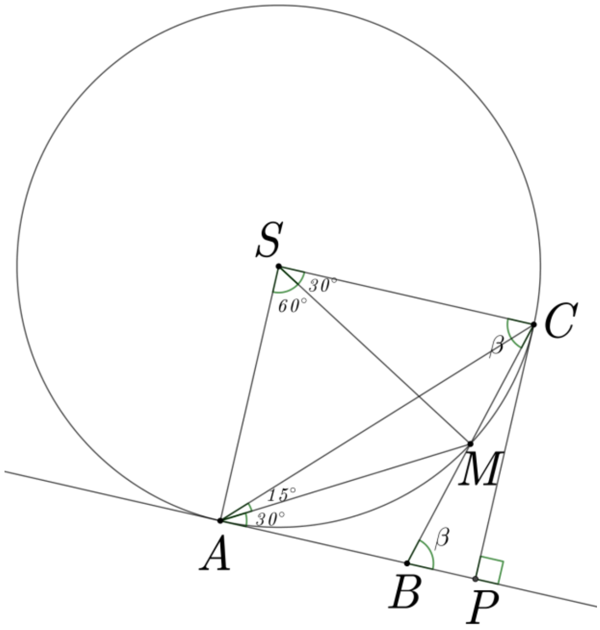
2. tvrzení (odůvodnění na základě vizuálně zjištěného faktu)

$|PC| = |PA|$. Jinými slovy, body $A, P, C$ jsou tři vrcholy čtverce

Předpokládejme platnost výše uvedené hypotézy a zkusme ji potvrdit nebo vyvrátit.

3. Backing (přesné zdůvodnění)

Platnost 2. tvrzení budeme předpokládat a na kružnici $k$, která se dotýká přímky $PA$ v bodě $A$ a prochází bodem $C$, zvolíme bod $M$ tak, že $\sphericalangle MAC = 15°$. Nechť bod $B$ je průsečík přímek $MC$ a $PA$. Dokážeme, že pak nutně $|MC| = |MB|$, čímž bude důkaz hotov (obr 5).




*Obrázek 5 Řešení problému*

Z předpokladů plyne, že $\sphericalangle PAC = 45°$. Tento úhel je úsekovým úhlem kružnice $k$, takže středový úhel, příslušející oblouku $AC$, je roven $90°$ a tedy střed kružnice $S$ je čtvrtým vrcholem čtverce. Zároveň $\sphericalangle BAM = 45° - 15° = 30°$ je úsekovým úhlem, příslušejícím oblouku $AM$, proto $\sphericalangle ASM = 60°$. Trojúhelník $SMA$ je tedy rovnostranný a bod $M$ leží na ose úsečky $SA$. Tato osa půlí každou příčku s krajními body na přímkách $SC$ a $AP$, půlí tedy i úsečku $CB$, tedy $|CM| = |MB|$.

Zbývá dopočítat velikost úhlu $\sphericalangle B$. Jelikož $\sphericalangle PBC = \sphericalangle MCS = (180° - 30°)/2 = 75°$, je $\sphericalangle B = 180° - \sphericalangle PBC = 180° - 75° = 105°$.

4. tvrzení (závěr)

$$\sphericalangle CBA = 105°$$

K řešení uvedeme dvě poznámky:

- 1. tvrzení bylo odvozeno deduktivně, ale 2. tvrzení bylo založeno na empirickém faktu, získanému na základě vizuálního vnímání. Takto získanou domněnku je nutné přesně zdůvodnit.
- Důkaz je založen na abdukci: Zkoumali jsme empiricky zvolený případ (že body $A, P, C$ jsou vrcholy čtverce) a logickou úvahou jsme došli k závěru, že splňuje zadání problému. Aby byl důkaz úplný, je nutné dokázat opačnou implikaci. V našem případě jsou dva způsoby, jak to provést: Buď důkaz přeformulovat do deduktivní podoby anebo dokázat, že žádný další případ nemůže zadání vyhovovat. První způsob není očividný, druhý ano: Zadání, které jsme formulovali v rámci 1. tvrzení, je jednoznačné a více řešení nepřipouští.

## 2.4 Shrnutí

Shrneme to podstatné, z čeho budeme vycházet v další části práce a v metodologii výzkumu.

- Matematické znalosti jsou nutnou, ale nikoli postačující podmínkou pro úspěšné řešení problému. Znalosti mají podstatný vliv na efektivitu heuristických strategií.
- Na proces důkazu lze pohlížet jako na sekvenci tvrzení od předpokladů přes přechodná tvrzení k závěru. Přechodná tvrzení mají obvykle podobu hypotéz.
- Subjekt může během procesu řešení postupovat přísně logicky (deduktivně), ale většinou je nutné využívat také heuristické strategie a experimentální metody průzkumu problému.
- Abychom tvrzení vzali do úvahy, je potřeba, aby nás na něj něco navedlo, něco, co naznačuje pravdivost tvrzení. Tento faktor, nazývaný v Toulminově „odůvodnění“, může mít podobu nějaké úvahy nebo empiricky vypozorovaných dat. Pro účely práce jsme v rámci TM vymezili tři obecné způsoby, které mohou vést subjekt k objevu hypotézy. Jsou to:
    - Deduktivní úvaha
    - Heuristická úvaha
    - Experimentálně nebo empiricky vypozorovaný fakt
- Heuristické metody jsou typické mentální procesy, které se využívají při řešení úloh. Tyto metody jsou efektivnější, pokud subjekt pracuje s konkrétními znalostmi a využívá logického uvažování. V této práci budeme považovat za heuristickou úvahu takovou, která je založena na odhadu a která nemá ryze deduktivní strukturu.

# 3 Řešení geometrických problémů s podporou DGE

Každý nástroj, který člověk ovládne, rozšiřuje jeho dosah a možnosti. Připomeňme si revoluci, kterou ve všech aspektech lidského života způsobil vynález počítače v polovině 20. století. Původně se mělo za to, že počítače lze využít pouze pro provádění komplikovaných mechanických výpočtů, ale s rozšířením programovatelných počítačů se ukázalo, že jejich dosah je mnohem hlubší.

Snad nejznámější použití počítače v matematickém důkazu bylo při řešení „Problému čtyř barev" v roce 1976 (Wilson, 2002). Role počítače zde nespočívala pouze v mechanických výpočtech, které člověk z časových důvodů nemůže realizovat, ale také v chytře napsaném programu, který jejich autory (Kenneth Apple a Wolfgang Hanken) překvapoval – jinými slovy, byl pro ně (alespoň zpočátku) nepředvídatelný. Citujme z jejich vzpomínek na klíčovou část jejich výzkumu (Singh, 2002, str. 176):
*V tomto momentě nás program začal překvapovat. Na počátku jsme jeho argumenty kontrolovali ručně a tak jsme vždycky mohli předpovědět, jakým směrem se v každé situaci vydá. Najednou se ale začal chovat jako stroj hrající šach. Začal vypracovávat smíšené strategie založené na všech tricích, které jsme jej „naučili", a tyto přístupy byly často mnohem šikovnější než ty, které bychom zkusili sami. Začal nás tak učit postupům, které by nás nikdy nenapadly. V jistém smyslu své tvůrce předčil v některých stránkách jak mechanických, tak „intelektuálních" částí úkolu.*

Námitky proti důkazu problému čtyř barev lze rozdělit do dvou kategorií (Wilson, 2002):

1. námitka: Důkaz vyžadoval tolik výpočetního času, že ho lidé nikdy nebudou moci beze zbytku překontrolovat.

Obvyklá reakce: Stejně jako může být chybný počítačový program, může udělat chybu i matematik. Pokud je program napsán dobře, je naopak spolehlivější než lidský faktor. A kód programu lze ověřit stejně jako klasický matematický důkaz[5]. A nakonec: Ačkoli všechny případy, které musel počítač projít, zkontrolovat nelze, u náhodně vybraných případů lze ověřit, zda program dává správné výsledky nebo ne.

2. námitka by se dala shrnout do otázky: „Rozumíme vlastně tomuto důkazu?"

Tato námitka je mnohem závažnější než námitka předchozí. Samotný důkaz spočíval na ověření více než tisíce komplikovaných konfigurací map. U každé této konfigurace se zjišťovalo, zda pro ni platí teorém čtyř barev (přesněji řečeno se zjišťovalo, zda má konfigurace vlastnost zvanou „reducibilita"). Kdyby neplatil jediný z těchto případů, důkaz teorému by nefungoval a musel by se opravit. Vzniká otázka: Je skutečně pouhou náhodou, že pro všechny tyto případy teorém platí? Nebo pro to existuje nějaký hlubší důvod? Pokud ano, pak důkazu teorému plně nerozumíme a hlubokou myšlenku nahrazujeme výpočetní silou. Citujme matematika Ronalda Grahama, který se k počítačovým důkazům, jako byl problému čtyř barev, vyjádřil takto (Singh S., 2002):

[5] Tato věta se stává, s ohledem na dnešní rozvoj umělé inteligence, spornou. Program může být tak složitý, že nemusí být vůbec zřejmé, zda se chová tak, jak jeho autor zamýšlel. Několik příkladů ze světa matematiky se už dostalo i do médií.

*Bylo by velmi neradostné, kdybyste se jen tak někde mohli zeptat počítače, jestli Riemannova hypotéza platí, a on by odpověděl: Ano, platí, ale důkazu bys neporozuměl.*

Nejen matematika jako věda, ale i výuka matematiky by se měla vyvarovat případu, kdy se počítač stane jakousi černou skříňkou, ze které padají správné odpovědi, ale u nichž plně nechápeme, proč jsou správné.

Roli počítače při vytváření matematického důkazu můžeme rozdělit do dvou kategorií:

1. *Počítač je podstatnou a nepostradatelnou částí důkazu.*
   V tomto případě je pomoc počítače v důkazu nezastupitelná. Může spočívat ve složitém numerickém výpočtu nebo v provedení jiného algoritmu, který by člověk nebyl schopen z časových důvodů provést. Pomoc počítače ale může být i sofistikovanější, než je pouhý numerický výpočet: Jak bylo uvedeno výše v souvislosti s problémem čtyř barev, ne vždy je lehké předpovídat kroky složitého programu a zcela mu rozumět. Může vzniknout dokonce dojem, že program má jakousi vlastní inteligenci, která v určitých ohledech předčí samotného programátora. S rozvojem umělé inteligence je stále naléhavější otázka, do jaké míry je při důkazu přípustná asistence počítače, aby ho bylo možné ještě považovat za správný a ověřitelný, a kdy už se z počítače stává černá skříňka, ze které padají odpovědi, které nemůžeme úplně ověřit a kterým nemusíme úplně rozumět.
2. *Počítač slouží jako experimentální nástroj, který nás vede k důkazu. Samotný důkaz, který poté vytvoříme, na něm nezávisí.*
   Díky počítačům můžeme numericky testovat své hypotézy, vytvářet složité vizuální reprezentace a grafy. To vše, abychom objevili nebo verifikovali fakta, která s důkazem souvisejí. Samotný důkaz jsme ale schopni vytvořit bez počítače.

V této kapitole uvedeme postupně čtyři hlediska, která s řešením problémů s podporou DGE úzce souvisejí. Nejdříve popíšeme psychologickou teorii tzv. „instrumentálního procesu“, což je proces, kdy se subjekt učí při nějaké činnosti používat nástroj. Následuje obecná charakteristika DGE softwaru, jeho popis a příklady konkrétních programů. Poté se zaměříme na GeoGebru a její nástroje. Tento program byl používán v průběhu celé práce. V poslední sekci uvedeme obecně přijímané poznatky, týkající se zapojení DGE do výuky.

## 3.1 Instrumentální teorie

V průběhu činnosti může subjekt používat vhodný nástroj. Způsob, jakým si subjekt tento nástroj osvojí a k jakým účelům ho použije, popisuje „instrumentální teorie“ (instrumentation theory). Ta je částečně založena na pracích Vygotského (Vygotsky, 1978) a dále na pracích Engestroma (1987) a Rabardela (1995). Rabardel zavedl rozlišení mezi pojmy instrument (nástroj) a artefakt. Artefakt je podle něj „věc sama o sobě“ a instrument je psychologický konstrukt (instrument je artefakt, jehož vlastnosti subjekt zná a ví, jakým způsobem ho používat). Jakýkoli stroj nebo technika nepředstavuje pro subjekt ihned nástroj, který je schopen používat. Citujme Hollebrandse a Strassera (Laborde et al. 2006, p. 279):

*It becomes an instrument when the subject has been able to appropriate it for himself and has integrated it with his activity*.

Proces přeměny artefaktu do smysluplného nástroje se nazývá instrumentální geneze (instrumental genesis). Artefakt se stane nástrojem po ukončení procesu instrumentální geneze. Během tohoto procesu se u subjektu vytváří různá mentální schémata využití artefaktu (Rabardel 1995; Trouche 2000).

Instrumentální geneze je komplexní proces, který závisí na vlastnostech artefaktu, jeho možnostech a omezeních, a také na předchozích znalostech a zkušenostech subjektu. Jelikož nástrojem, o který nám jde, je DGE software, budeme další výklad více zaměřovat na specifika, které jsou vlastní právě tomuto nástroji.

Proces instrumentální geneze má dvě dimenze: *instrumentaci* („instrumentation“) a *instrumentalizaci* („instrumentalization“). Možnosti a omezení DGE softwaru mají vliv na strategie studentů při řešení problémů a na koncepce, které si při práci se softwarem vytváří. *Instrumentace* zahrnuje vytváření schémat použití artefaktu, které představují opakovatelný a předvídatelný prostředek k vykonání určité akce (Verillon & Rabardel, 1995). Trouche (2004) uvádí, že instrumentace zahrnuje pravidla a heuristiku pro aplikování nástroje. *Instrumentalizace* závisí na uživateli nástroje (na řešiteli problému). Je to proces, při kterém dojde k psychologickému zvnitřnění („internalization”) způsobů použití artefaktu. Artefakt zůstává stejný bez ohledu na to, jak je subjektem instrumentalizován.

Pokud to shrneme, v průběhu instrumentální geneze si subjekt vytváří mentální schémata (ať již přizpůsobením známých schémat nebo vytvořením schémat zcela nových), která mu umožňují dosáhnout kognitivních cílů. White (2008) uvádí, že teprve instrumentální geneze dává artefaktu smysl.

DGE nabízí mnoho silných nástrojů, které mohou být subjektem důvtipně využity, pokud ovšem ví, jak. Osvojit si některé z nich není těžké, stačí k tomu chápat jejich matematický význam. Jako příklad můžeme uvést nástroje k měření úseček, obsahů nebo úhlů. Jiné vyžadují zvyk. Typickým příkladem je funkce tahání objektů (dragging). Více tuto funkci popíšeme v následujících dvou sekcí, zde pouze zmíníme, že ačkoli tahání objektů je významný nástroj DGE, který je jedním z největších benefitů tohoto softwaru, zvyknout si na něj není pro začátečníka vůbec jednoduché. Některé studie uvádějí, že studenti mají problém nebo je jim přímo nepříjemné vnímat pohybující se konstrukci (Olivero, 2003). Navíc při řešení problému lze použít funkci tahání objektu v mnoha různých formách, které nelze brát jako samozřejmé a pro studenty často představují těžkou úlohu (Sinclair, 2003). Jak uvádí (Verillon & Rabardel, 1995), instrumentální geneze různých způsobů použití nástroje tahání objektů v DGE vyžaduje značné množství času.

Aby student mohl požívat nástroje DGE, je nutné zvládnout dva jejich doplňující se rysy: vlastnosti daného nástroje a jeho matematický význam. Citujme (Laborde 2003, p. 2):

*Tools like those offered by information technology embed mathematical knowledge and the use of such tools requires the integration of both mathematical knowledge and knowledge about the tool*.

Objektem studia v této práci byli studenti učitelství na pedagogické fakultě, kteří se softwarem jako je GeoGebra pracují při výuce už několik let (2 až 4 roky ve vybraných předmětech). Jelikož s vlastnostmi DGE softwaru jsou předem obeznámeni, nebylo nutné vyhrazovat speciální čas k seznámení se softwarem.

## 3.2 Obecná charakteristika DGE softwaru, příklady

DGE programy (Dynamic Geometry Environment), mezi které zahrnujeme GeoGebru (Rakousko), Cabri (Francie), Cinderellu (Německo) a další, umožňují nejen nakreslit přesně konstrukci, ale také pohybovat nezávislými objekty konstrukce a okamžitě sledovat důsledky tohoto pohybu. Jsou interaktivní.

Robová (Robová, 2012) dynamickou geometrii charakterizuje takto:

*Jedna se o počítačový software, který umožňuje rychle a přesné rýsovaní geometrických útvarů podle zásad konstrukční geometrie, přičemž lze manipulovat s již narýsovanými objekty. Při pohybu některé volné entity v rysu se z pohledu uživatele vytvořena konstrukce dynamicky překresluje, a tak zprostředkovává uživateli v reálně krátkém čase náhled řady geometrických situaci.*

Pojem „dynamická geometrie“ byl zaveden už na začátku padesátých let minulého století pod heslem (Kortenkamp, 2000):

*By a dynamic geometry we simply mean a study of the parts of space and their relations to one another while they are in motion and changing.*

Uvedeme několik konkrétních příkladů programů dynamické geometrie:

**GeoGebra** a jí podobné programy: Detailním rysům GeoGebry a způsobům, jakými může pomoci subjektu, se budeme věnovat v další sekci, zde zmíníme pouze základní charakteristiky. Kromě obecného rysu dynamické změny konstrukce, kdy můžeme pohybovat nezávislými objekty a sledovat, jak se konstrukce mění, má GeoGebra zabudované i některé prvky, které mohou verifikovat hypotézu. Funkce **„Vztah mezi objekty“** prověří na základě numerických výpočtů, zda dva subjektem vybrané objekty mají nějaký vztah, například zda dvě přímky jsou kolmé či rovnoběžné, zda jistý bod leží na kružnici apod. Vlastnosti objektů, které program prověřuje, jsou před-programované (subjekt nemůže explicitně zadat, co chce, aby program prověřil) a ne vždy je odpověď programu správná, i když chybnou odpověď podává tento příkaz vzácně. Mnohem sofistikovanější jsou ty nástroje programu, které jsou typické pro třídu programů CAS (Computer Algebra System, programy pro počítání se symboly podle daných pravidel). Jedná se o příkaz **„Rovnice množiny bodů“**, který na základě tzv. Grobnerovy báze určí rovnici množiny bodů, které splňují libovolné podmínky, definované uživatelem, a pak o příkaz „**Dokázat**“, který, rovněž na základě Grobnerovy báze, je schopen analyticky a v plné obecnosti dokázat teorém. Dodejme však, že Grobnerova báze je výpočetně velmi náročná a ne vždy je pro ni zadání vhodné – obvykle se stává, že z dokazovaného teorému musíme předem vyloučit jisté speciální případy. Pokud bychom to opomněli, teorém by byl neplatný. Objevit tyto speciální případy a vyloučit je však nemusí být triviální. Nakonec, i kdybychom díky těmto dvěma příkazům teorém dokázali nebo určili hledanou množinu bodů, zjistíme sice správnou odpověď, ale vzhledem k tomu, že ta byla dosažena analyticky, neřekne nám to nic o syntetickém řešení nebo zdůvodnění. Proto mají tyto příkazy pro studenty spíše okrajový význam.

Zmiňme ještě dva zajímavé (byť z hlediska použití na školách okrajové) programy, které mají několik zajímavých funkcí.

**Java Geometry Expert** (JGE, 2012): Stejně jako v GeoGebře i v tomto programu je možné dokázat hypotézu analyticky. S počátkem 21. století se však vývojáři programů zaměřili na nový cíl – aby byl software schopen teorém nejen dokázat, ale také vytvořit syntetický důkaz (tzv. readable proof). Tento program měl v době svého vzniku jednu z prvních databází deduktivních metod, která byla schopna pár teorémů dokázat synteticky, například Simson-Wallaceův teorém. Jinak ale ve většině případů tato databáze selhávala. Přes slibný začátek se vývoj programu v roce 2012 zcela zastavil a nedávno mu byly zrušeny i oficiální stránky. Program tak mají k dispozici jenom ti, kteří si ho již dříve stáhli nebo kteří ho naleznou na internetu na neoficiálních stránkách.

**OK Geometry** (OK Geometry, 2021): Jsou dvě slibné cesty, jak může program subjektu při hledání syntetického řešení problému pomoci.

Tou první cestou je, že program řešení nejen najde, ale je schopen toto řešení zdůvodnit takovým způsobem, který může člověk pochopit (toho se týká již zmíněný pojem „readable proof“). Pokud by program měl takovou schopnost, bylo by ho možné přirovnat k interaktivní knize, kde si uživatel definuje problém a program mu poskytne syntetické řešení. Dosažení tohoto cíle by mělo velký význam nejen pro výuku matematiky, ale i pro matematiku jako vědu. Současné programy však zvládnou řešit pouze nejjednodušší teorémy a je zřejmé, že pokud bude tohoto cíle dosaženo, nestane se tak v dohledné době.

Druhá cesta není tak revoluční, ale lze ji mnohem snáze realizovat. K řešení geometrického problému potřebujeme nápad, který se často (ale ne vždy) skrývá v již nakreslené konstrukci, například že dvě přímky jsou kolmé, dva úhly jsou shodné, čtyři body leží na kružnici. Pokud nám program tento fakt „prozradí“, může to znamenat klíčový zlom, díky kterému problém vyřešíme. Právě touto cestou se vydal Zlatan Magajna se svým programem OK Geometry. Do programu můžeme narýsovat nebo importovat již narýsovanou konstrukci a zkoumat ji stejně jako v jiném DGE programu. Grafické zobrazení OK geometry sice není tak dobré jako má například GeoGebra, ale program má mnoho jiných funkcí, které konkurence postrádá. Tou nejpodstatnější je **„automatické pozorování“**, jehož mechanismus je popsaný například v článku (Magajna, 2017). Program narýsovanou konstrukci pozmění a na základě numerické analýzy vypíše všechny invarianty a vztahy mezi geometrickými objekty, které se při transformaci zachovaly. Tato funkce má pouze dvě stinné stránky. Především programem vypozorovaných faktů je často mnohem více, než kolik je jich k řešení skutečně třeba, subjekt se v nich tak může lehce „ztratit“. Druhou nevýhodou je, že občas je k řešení nutné sestrojit pomocný geometrický objekt, který ale není zmíněn v zadání. S tímto problémem nám funkce automatického pozorování nepomůže. Program má ale mnoho dalších funkcí, například má databázi, obsahující kolem

6 000 významných bodů trojúhelníku (ortocentrum, těžiště, Nagelův bod, …), je schopen hledat vztahy geometrických objektů vzhledem k danému trojúhelníku (například, že na dané kuželosečce leží těžiště daného trojúhelníku) apod. Čím více toho uživatel o euklidovské geometrii ví, tím více ocení funkce tohoto programu. Zda mohou být tyto funkce užitečné i pro začátečníka, je diskutabilní.

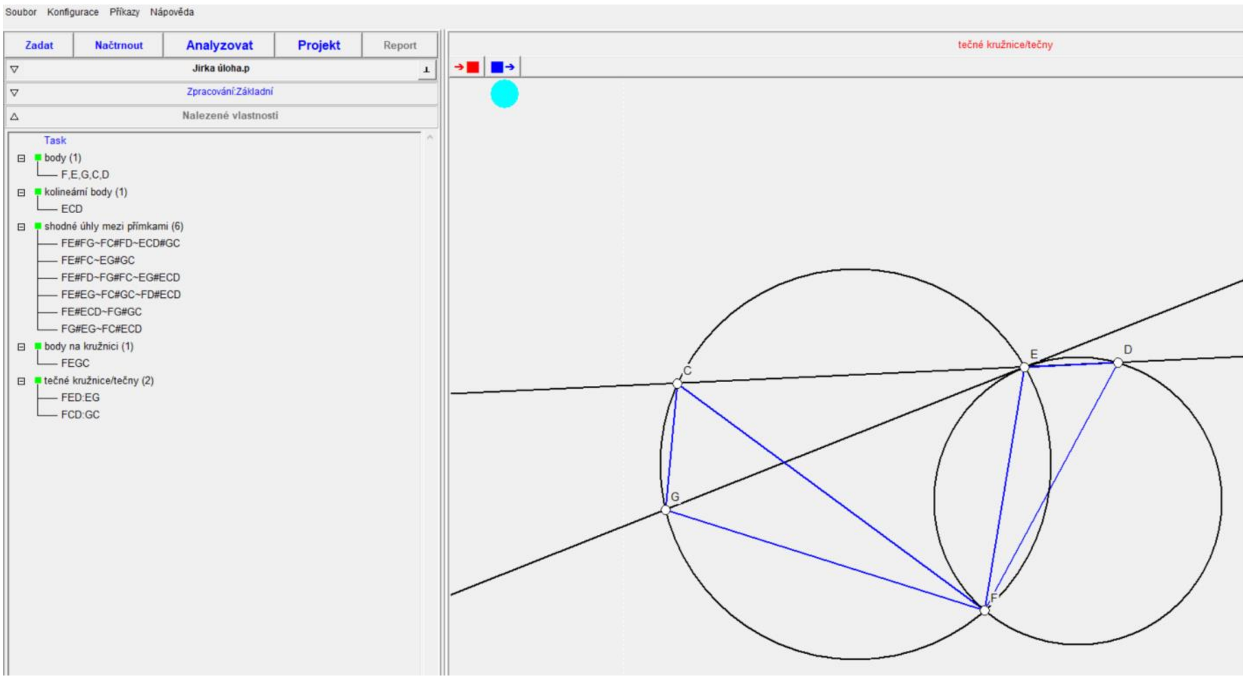
Ukážeme si na modelovém příkladu, jak lze tento program využít pro řešení problému.

Zadání problému (MO, 2016):

*V rovině jsou dány kružnice $k$ a $l$, které se protínají v bodech $E$ a $F$. Tečna ke kružnici $l$ sestrojená v bodě $E$ protíná kružnici $k$ v bodě $G$ $(G \neq E)$. Na oblouku $EG$ kružnice $k$, který neobsahuje bod $F$, zvolme bod $C$ $(E \neq C \neq H)$ a průsečík přímky $CE$ s kružnicí $l$ označme $D$ $(D \neq E)$. Dokažte, že trojúhelníky $DEF$ a $CGF$ jsou podobné.*

Řešení:

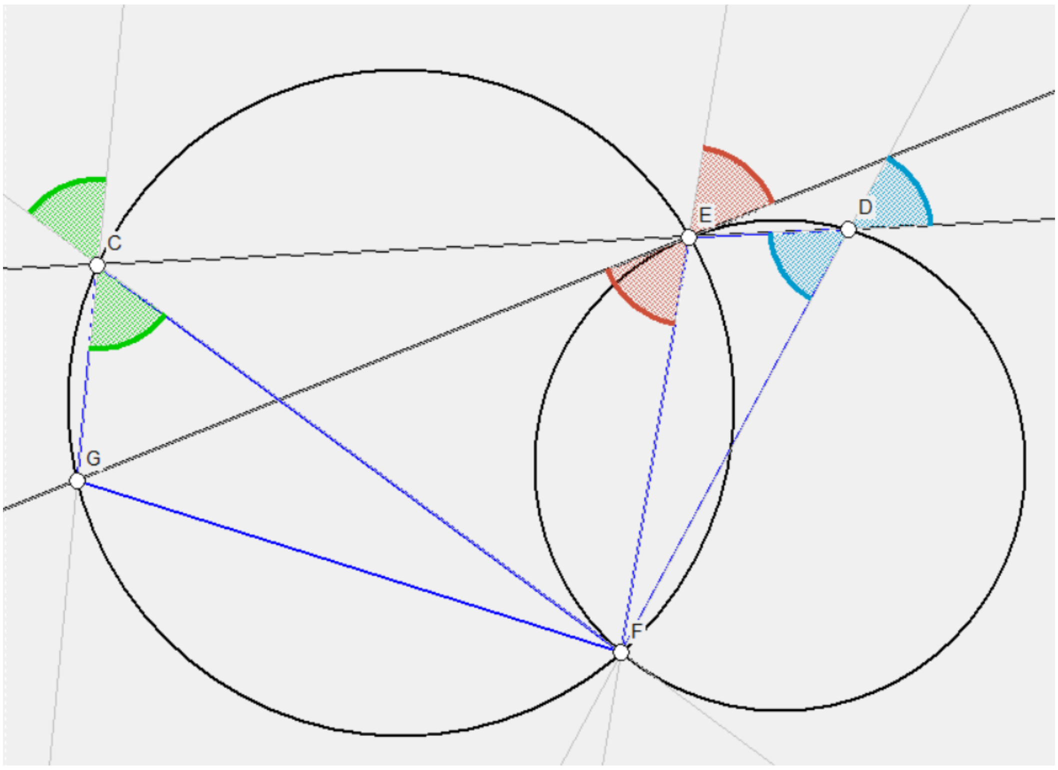
Stačí dokázat, že úhly trojúhelníků $DEF$ a $CGF$ jsou shodné. Narýsujeme zadání do programu a zapneme funkci „Analyzovat“. Na výběr máme čtyři stupně analýzy: Základní, Střední, Rozšířená a Kompletní. V tomto případě stačí stupeň Základní analýza. Program vypsal celkem 11 vlastností, z nichž 6 se týká úhlů (obr. 6).



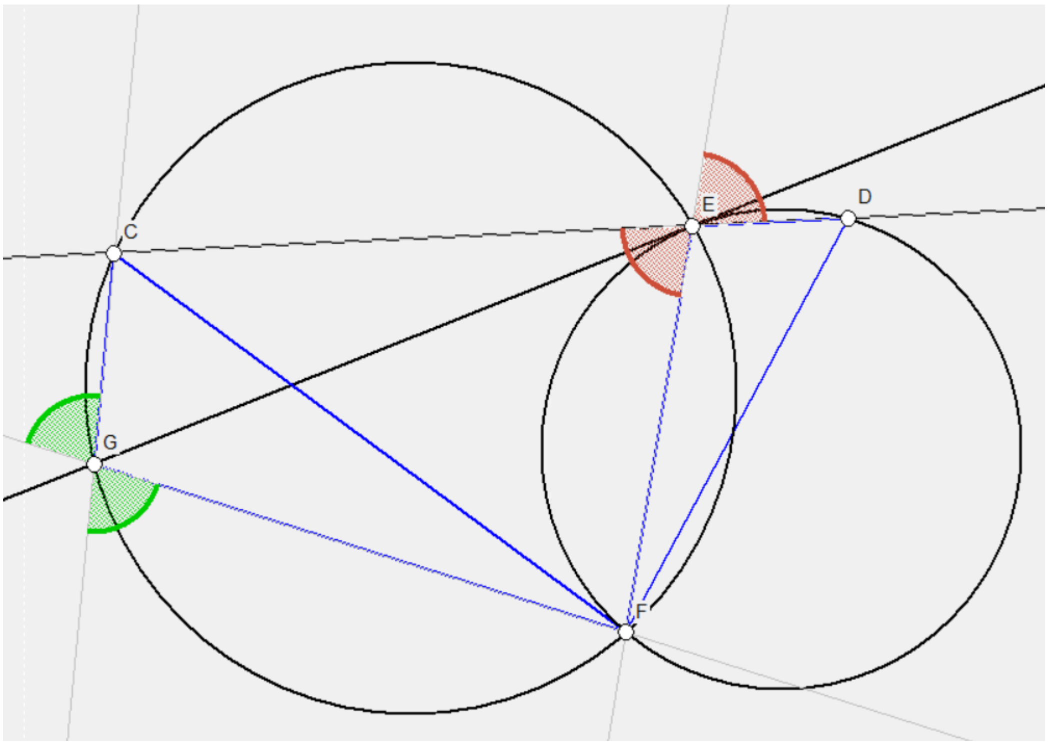

*Obrázek 6 V levém sloupci jsou vlastnosti vypsané programem*

Jelikož ze zadání víme, že trojúhelníky $DEF$ a $CGF$ jsou podobné, plyne z toho, že úhly $\sphericalangle FCG$ a $\sphericalangle FDE$ jsou shodné. Pokud to program potvrdí, nepůjde o příliš užitečnou informaci. Pokud však klikneme na jednu z vypozorovaných vlastností, zjistíme, že je zde ještě jeden úhel, který je stejně veliký. Platí (obr. 7) $\sphericalangle FCG = \sphericalangle FDE = \sphericalangle FEG$. Rovnost $\sphericalangle FCG = \sphericalangle FEG$ dokážeme snadno, jde o důsledek věty o obvodových úhlech. Jak ale dokázat $\sphericalangle FEG = \sphericalangle FDE$? Zde si musíme vybavit, že přímka $GE$ je tečna ke kružnici $l$. Nyní máme dvě možnosti postupu: buď si přímo vybavíme teorém o úsekovém úhlu (úhel mezi tečnou a tětivou je shodný s obvodovým úhlem, příslušejícím tětivě), nebo tento teorém odvodíme. Ve druhém případě budeme muset sestrojit nový objekt, který není zmíněn v zadání, totiž střed kružnice $l$, a celý problém se stane náročnějším.

Další vypozorovaná vlastnost je rovnost úhlů zobrazená na obr. 8. Tu lze lehce přeformulovat na rovnost $\sphericalangle CGF = \sphericalangle DEF$.




*Obrázek 7 Jedna z vlastností konstrukce vypozorovaných programem*




*Obrázek 8 Jedna z vlastností konstrukce, vypozorovaná programem*

Ke zdůvodnění této rovnosti je opět nutné vybavit si teorii. Úhly $\sphericalangle CGF$ a $\sphericalangle CEF$ jsou doplňkové (leží na opačných stranách tětivy), stejně jsou doplňkové úhly $\sphericalangle CEF$ a $\sphericalangle FED$, tedy platí $\sphericalangle CGF = \sphericalangle DEF$. Trojúhelníky CGF a DEF jsou podle věty uu podobné.

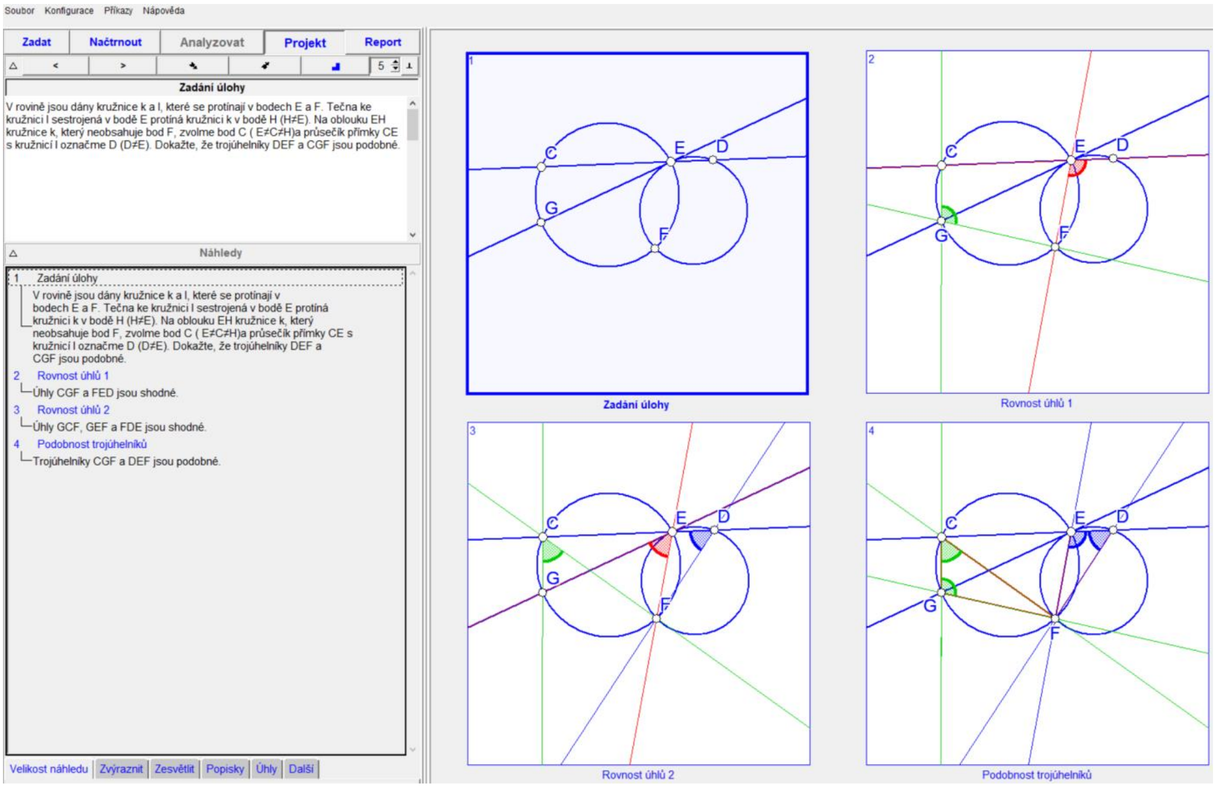
Na této ukázce řešení je dobře vidět několik faktorů, které jsou pro řešení s podporou počítače typické:

1. Řešitel musí provést selekci toho, na co zaměřit svou pozornost, která fakta mohou být vzhledem k řešení relevantní. (Připomeňme, že vypozorovaných faktů programem bylo jedenáct a my využili jen dvě.)
2. Dochází k neustálé interakci mezi empirickými fakty, zjištěnými pomocí programu, a subjektem (hlavně jeho znalostmi). Arzarello a kol. (2002) tento mechanismus nazývají „ascending process“ a „descending process“. Detailněji to bude popsáno v sekci 5.2.
3. Ne vždy jsou všechna fakta skrytá v konstrukci, sestrojené podle zadání, často je nutné sestrojit pomocný objekt, aby byl logický řetěz úplný.

Na závěr zmiňme ještě jednu důležitou funkci programu OK geometry: Jeho prostředí umožňuje učiteli připravit úlohu takovým způsobem, který pomáhá žákovi spojovat relevantní empirická fakta do deduktivního řetězce. Postup je následující: Učitel vybere několik faktů, vztahujících se k řešení, a tato fakta zobrazí jako sekvenci diagramů, kterou může doplnit o nějaký komentář. Žák pak musí určit správnou sekvenci těchto diagramů (logickou závislost) a propojit je matematickou teorií. Některé takto připravené materiály lze charakterizovat jako vizuální důkazy nebo „důkazy beze slov“. Při stažení programu z webových stránek (OK Geometry, 2021) uživatel získá i několik ukázkových příkladů.

Příklad řešený výše by se dal zpracovat způsobem, jak je uveden na obr. 9. První diagram odpovídá zadání, druhý rovnosti $\sphericalangle CGF = \sphericalangle FED$, třetí rovnosti $\sphericalangle GCF = \sphericalangle GEF = \sphericalangle EDF$, poslední reprezentuje závěr: podobnost trojúhelníků $GCF$ a $EDF$.

V České republice se popularizaci programu OK Geometry věnuje I. Štrausová. Ve své dizertaci (Štrausová, 2019) ho několikrát použila při tvorbě vizuálního důkazu. Kromě toho spolupracuje se Z. Magajnou na české verzi programu.




*Obrázek 9 Relevantní fakta zjištěná softwarem. Úkolem studenta je najít správnou posloupnost.*

## 3.3 Základní nástroje GeoGebry

Ačkoli téma této dizertace se vztahuje na DGE software obecně, autor této práce i studenti, kteří se výzkumu účastnili, používali při své práci software, který je v současnosti u nás nejrozšířenější, totiž GeoGebru. V této sekci se budeme věnovat konkrétním nástrojům tohoto programu.

GeoGebra je v této práci použita zejména proto, že se jedná o volně stažitelný program třídy DGE. Navíc je to program, který je poměrně vyspělý v integraci některých funkcí, typických pro programy třídy CAS. Samotný software DGE je založen na numerických výpočtech, zatímco software třídy CAS je určen k symbolickému počítání podle daných pravidel (je určen k provádění algebraických výpočtů). Zatímco DGE zprostředkovává konstrukci vizuálně, CAS může poskytnout analytické výpočty. Díky integrovaným funkcím programů CAS je i GeoGebra v některých případech schopna analyticky dokázat řešený problém v celé jeho obecnosti. GeoGebra, stejně jako většina ostatních konkurenčních programů, spojuje vizuální geometrické konstrukce (geometrické okno) s jejich analytickými rovnicemi, případně se souřadnicemi bodů. Podle (Hohenwarter, Preiner 2007) je tento program přístupný k intuitivnímu ovládání a nevyžaduje od subjektu pokročilé schopnosti k efektivnímu zacházení.

Zmiňme některé funkce softwaru, které umožňují, aby se řešení geometrického problému stalo do jisté míry experimentální záležitostí:

I. Přesnost konstrukce
Zobrazení geometrického problému s pomocí softwaru je mnohem přesnější než nejlepší konstrukce s pomocí pravítka a kružítka, o náčrtku od ruky nemluvě. To může výrazně usnadnit řešení problému. Student může na základě vizuálního vnímání zaregistrovat fakta, která by ho jinak nenapadla, například že čtyři body leží na kružnici nebo že dvě přímky jsou rovnoběžné. Ačkoli je přesnost grafiky programu nesrovnatelně větší než jakéhokoli náčrtku, studenti obecně preferují střídání obou prostředí – obrazovku DGE a současně nákresy na papíře.

II. Možnost dynamicky měnit konstrukci (dragging)
Provedená konstrukce v DGE má prvky, které jsou takzvaně volné, a prvky, které jsou na postupu konstrukce závislé. Subjekt může pohybovat volnými objekty a sledovat důsledky – pohyb na nich závislých objektů a změny celé konstrukce. Právě tento rys je u třídy DGE programů nejvíce oceňován, protože umožňuje zpozorovat vlastnosti konstrukce, které během tohoto pohybu zůstávají invariantní (a které by bylo obtížné, ne-li nemožné, zpozorovat ve statickém náčrtku).

III. Funkce „stopa objektu"
Konstrukci můžeme měnit zcela náhodně, ale i promyšleně (například když pohybujeme bodem po určité křivce), a přitom sledovat, jak se pohybují zbývající body nebo bod konstrukce. Abychom pohyb závislého bodu „zviditelnili", zapneme jeho stopu.

IV. Měření a funkce „vztah mezi objekty"
Díky softwarovému měření a dynamické změně konstrukce můžeme například zjistit, že délky dvou úseček jsou vždy shodné nebo že jsou v pevném poměru pro všechny konstrukce, vycházející z daných předpokladů. To samé se týká úhlů, obsahů atd. U takto zjištěných faktů ale nelze zcela vyloučit, že data, která považujeme za identická, se ve skutečnosti liší (dvě úsečky jsou „téměř" shodné, ale ve skutečnosti se jejich délka liší na čtvrtém desetinném místě). Proto zavedli vývojáři GeoGebry funkci „vztah mezi objekty". Ta na základě velmi přesné numerické analýzy prověří, zda mezi objekty není nějaký jednoduchý vztah – dva úhly jsou shodné, dvě přímky jsou rovnoběžné, tři přímky se protínají v jednom bodě atd.

V. Funkce „Locus“ a „LocusEquation“
   Nástroj Locus (český ekvivalent „MnozinaBodu“) umožňuje graficky sestrojit hledanou množinu, pokud známe způsob konstrukce jejího libovolného (náhodného) bodu. Ačkoli jsou zde menší rozdíly mezi různými DGE programy, obecně vypadá proces následovně (Botana a Valcarce 2003): Jeden bod (tracer) vykresluje hledanou množinu a přitom nějak závisí na bodě, zvaném mover, který představuje parametr. Jak se „mover“ pohybuje, vykresluje „tracer“ hledanou množinu.
   Funkce „LocusEquation“ (český ekvivalent „RovniceMnozinyBodu“) je vyspělejší forma předchozí funkce. Používá se tehdy, pokud chceme přesnou rovnici hledané množiny, nebo pokud nevíme, jak libovolný bod množiny sestrojit a pouze známe nějakou geometrickou podmínku, která ho určuje, například že paty kolmic spuštěné z hledaného bodu na čtyři přímky leží na kružnici. Tato funkce je značně pokročilá, a to nejen z hlediska výpočetní složitosti, která klade nezanedbatelné nároky na výkon procesoru počítače, ale také z hlediska teoretického: Matematická teorie (vycházející z tzv. Grobnerovy báze), na které je příkaz RovniceMnozinyBodu založen, se začala rozvíjet teprve v roce 1965 (Hora, Konigsmarková, 2018) a dodnes je tato oblast předmětem živého výzkumu s mnoha dosud nevyřešenými otázkami. Je proto pochopitelné, že ne vždy je tento příkaz GeoGebry spolehlivý a v současnosti funguje spíše u jednodušších problémů.

## 3.4 DGE software ve výuce

Je dobře známo, že výpočetní technologie mají silný dopad na matematiku jako vědu, jejich dopad na učení a vyučování je však předmětem stále pokračujícího výzkumu. Výzkum použití DGE ve výuce lze rozdělit do dvou základních větví – DGE jako prostředek k učení a DGE jako pomocný nástroj při hledání řešení nebo důkazu matematického problému. Na posledně jmenované téma se lze dívat z hlediska teoretického (jak lze pomoc DGE popsat teoreticky) nebo praktického (reálný dopad softwaru v rámci konkrétních studií). Stručně o těchto tématech pojednáme.

DGE jako prostředek k učení

DGE software slouží na školách a univerzitách především jako model abstraktního světa euklidovské geometrie. Matematika je abstraktní svět v mysli člověka, a každý model, který ho chce přiblížit, bývá často pouze nedokonalou napodobeninou. Např. každá zakreslená čára má šířku a tak nemůže být skutečnou úsečkou. Podobně průsečík dvou čar není přesně bod, ale malá plocha na papíru.

I software dynamické geometrie má podobná omezení. Pokud však budeme uvažovat vizuální zobrazení různých geometrických objektů, jsou tyto nedokonalosti pod hranicí lidské rozlišitelnosti. Navíc DGE software má mnoho nástrojů, které odkazují k podstatě abstraktního světa geometrie.

Potenciál DGE k přechodu od konkrétního k abstraktnímu se nejlépe ilustruje na duálním charakteru obrázků geometrických objektů, které modelují abstraktní entity. V této souvislosti se rozlišuje mezi „nákresem“ (drawing) a „obrazem“ (figure). Laborde (1993) rozlišovala mezi těmito pojmy následujícím způsobem: Nákres se vztahuje na konkrétní materiální entitu, zatímco obraz se týká teoretického objektu. V kontextu DGE může nákres představovat konkrétní překrývající se geometrické objekty na obrazovce, které se blízce podobají zamýšlené konstrukci. Obraz však odkazuje k platónskému světu idejí: Všechny nedokonalosti, jako nenulová šířka čar nebo nerovnoměrné zakřivení kružnice, jsou v něm nepřípustné. Navíc odkazuje k axiomatické stavbě dané konstrukce, odkazuje tedy ke všem konstrukcím, které splňují dané předpoklady, ne pouze k té konkrétní, kterou máme právě na obrazovce. Obraz zachycuje ideální vztahy mezi geometrickými objekty. Nástroje, které DGE nabízí, pomáhají trhlinu mezi obrazem a nákresem výrazným způsobem překonat. Důležitou roli v tomto procesu hraje nejen precizní vizualizace, ale hlavně možnost měnit konstrukci podle libosti uživatele. Strasser (1992) uvádí, že tahání objektů v DGE zprostředkovává vztah mezi nákresem na jedné straně a teoretickým obrazem na straně druhé.

První seriózní výzkumy, týkající se zapojení dynamické geometrie do výuky, se začaly objevovat v 90. letech (Hansen, 2004; Laborde et al., 2006). Nejdříve se věnovala pozornost interakci žáka se softwarem, pak se těžiště výzkumu zaměřilo na vliv softwaru na nabývání znalostí žáků a na způsob jejich učení. Většina těchto studií vycházela z konstruktivistického přístupu k výuce. V článku (Robová, 2012) se uvádí, že zkušenosti u nás i ve světě ukazují, že využití informačních a komunikačních technologií může přispívat ke zkvalitnění vyučovacího procesu, a to především z hlediska aktivizace žáků a zvýšení názornosti a efektivity výuky.

Většina výzkumů, které se zabývaly dopadem DGE na vědomosti a výkony studentů, měly kvantitativní charakter. Výuka během výzkumu probíhala v několika třídách, z nichž některé tvořily experimentální skupinu (výuka s podporou DGE) a některé kontrolní skupinu (klasická výuka). Po několikatýdenní výuce byl studentům předložen test, který měl obě skupiny porovnat. Většina studií (Funkhouser 2003, Hansen, 2004) dospěla k závěru, že výuka s podporou DGE byla (někdy výrazněji) efektivnější. Některé výzkumy však k závěru o výrazném zlepšení experimentální skupiny oproti skupině kontrolní nedošly, viz např. Gawlick (2002) a Hull a Brovey (2004). I tyto výzkumy ale konstatují, že software nevede k horším výsledkům žáků ve srovnání s žáky v kontrolní skupině.

Robová (2012) uvádí, že většina autorů se shoduje v názoru, že využívání programů dynamické geometrie rozvíjí geometrickou představivost žaků, a to zejména díky dynamickým atributům programů, vyššímu zajmu žaků o probírané téma a jejich aktivitě. Rovněž uvádí, že interaktivita softwaru, konkrétně nástroj tahání objektů, má pozitivní vliv na představivost žáků, neboť software v krátkém čase zprostředkuje studentům náhled mnoha geometrických situací a přispívá tak k jejich zkušenostem a modelům, které jsou zásadní pro rozvoj představivosti. Důsledkem rozvíjení geometrické představivosti za pomoci dynamické geometrie je větší kreativita žáků a rozvoj žákovských kompetencí, zejména těch, které souvisejí s logickým myšlením, úsudkem, vytvářením hypotéz na základě zkušenosti nebo pouhého odhadu a nakonec s rozvojem abstrakce a argumentace.

Hejný a Kuřina (2009) podotýkají, že DGE rozšiřuje u žáků spektrum izolovaných modelů a tak si studenti mohou snáze vytvořit generický model.

V několika studiích (Arzarello et al. 1998; Bussi a Boni 2003; Paola a Robutti 2004) bylo zdokumentováno, jak funkce tahání objektů zpřístupňuje studentům logickou závislost prvků konstrukce. Ve studii (Jones, K., 2000) se snažili žáci osmých tříd pochopit podmíněnost geometrických vlastností různých čtyřúhelníků. Narýsovali si čtyřúhelník do softwaru dynamické geometrie a s pomocí funkce tahání začali pohybovat nezávislými objekty konstrukce a sledovali chování závislých prvků. Tato závislost je sice dána konstrukčním postupem, ale odráží logickou vazbu mezi předpoklady a důsledky konstrukce. Žáci tak díky „pohybové závislosti“ objektů na obrazovce snáze odvodili jejich logickou závislost.

DGE tak žákům otvírá zcela nové cesty, jak se učit a jak chápat geometrické objekty. Citujme z publikace (Laborde et al., 2006, p. 296):

*Research on the use of technology in geometry not only offered a window on students' mathematical conceptions of notions such as angle, quadrilaterals, transformations, but also showed that technology contributes to the construction of other views of these concepts. Research gave evidence of the research and progress in student's conceptualization due to geometrical activities (such as construction activities or proof activities) making use of technology with the design of adequate tasks and pedagogical organization. Technology revealed how much the tools shape the mathematical activity and led researchers to revisit the epistemology of geometry*.

V článku (Furinghetti a Paola, 2003) se uvádí, že díky experimentování v DGE si studenti mohou konstruovat části matematické teorie a přestat se spoléhat na pouhé vizuální vnímání. DGE v takových případech zprostředkovává studentům význam abstraktní teorie. Experimentování s DGE zahrnuje podle článku různé úrovně, např. průzkum konkrétních případů, pozorování pravidelností konstrukce, vytváření domněnek, jejich zdůvodnění v rámci matematické teorie. Furinghetti a Paola dále poukazují na fakt, že při výuce nové látky nestačí samotné zapojení počítače, ale je nutná asistence učitele a pečlivě vybraná volba „pedagogické situace“ a problémů.

Ve stejném duchu upozorňují články (Barcelos et al., 2011) a (Novotná, Jančařík, 2011), že ačkoli nové technologie mají velký potenciál při výuce matematiky, samy o sobě nepředstavují řešení vzdělávacích problémů. Valentini a Soares, (2005) poukazují, že změna nenastává v samotné technologii, ale v nových vztazích a možnostech, které umožňuje. V tomto smyslu je důležité 1) nově vymezit či "restrukturalizovat" roli učitele a žáka, 2) zaměřit se na proces učení, nikoli vyučování, 3) provádět intervence, založené na pozorování sociálního a kognitivního chování studentů.

Pokud shrneme výše uvedené, pak DGE zlepšuje výuku matematiky jednak tím, že poskytuje model, který usnadňuje chápání abstraktní geometrie, a pak tím, že použití softwaru zvyšuje motivaci žáků při výuce a probouzí jejich zájem. Software však musí být zakomponován do výuky vhodným způsobem.

Popis pomoci DGE při řešení problémů – teoretické hledisko

Jak uvádí Arzarello (2008), proces důkazu může být ve většině případů rozdělen do dvou odlišných fází – fáze vytváření domněnek a fáze konstrukce důkazu. V první fázi musí subjekt detailně porozumět zadání problému a stanovit domněnky, o kterých předpokládá, že se vztahují k řešení. Druhá fáze, konstrukce důkazu, se skládá ze zdůvodnění domněnek a jejich propojení do logického řetězce. Edwards (1997) označuje fázi produkce domněnek jako ‘‘territory before proof’’, citujme (Edwards 1997, p. 190):

*It is during this exploratory and testing phase that learners and expert mathematicians alike apply their intuitions in seeking patterns, follow hunches, testing ideas, and formulating generalizations that may become conjectures.*

Pokud je subjekt při řešení problému odkázán pouze na „papír a tužku“, musí v průběhu první fáze spoléhat zejména na svůj důvtip a znalosti. Jestliže však může používat nástroje vhodného DGE softwaru, stává se produkce relevantních domněnek mnohem snazší. Hlavní výhodou DGE softwaru je, že mnoho otázek, které subjekt formuluje, může zodpovědět experimentálně a tak si výrazným způsobem usnadnit přechod od faktů k teoretickému zdůvodnění.

Případové studie (např. Baccaglini-Frank and Mariotti 2010; Hadas et al. 2000; Healy a Hoyles 2002; Hoyles a Jones 1998; Leung a Lopez-Real 2002; Olivero a Robutti 2007) ukazují, že proces důkazu začíná experimentálním průzkumem problému a končí jeho zdůvodněním.

Stejně jako při každém experimentálním zkoumání, i s pomocí softwaru DGE můžeme buď objevit zcela novou hypotézu, nebo verifikovat domněnku, kterou jsme formulovali již předtím. Objev nové hypotézy je obvykle cennější než její pouhá verifikace, bylo by ale chybou označit verifikaci za formalitu, bez které bychom se v krajním případě obešli. Pokud domněnka projde testem verifikace, získáme jistotu a můžeme napnout všechny síly směrem, o kterém víme, že je správný. Naopak, pokud se domněnka ukáže nepravdivá, ušetříme si spoustu času, který bychom jinak strávili dokazováním něčeho, co neplatí.

Z obecně přijímaného faktu, že deduktivní důkaz je jediným kritériem, které určuje pravdivost tvrzení, lze mylně vyvozovat, že pokud nemáme důkaz tvrzení, neměli bychom být přesvědčeni o jeho pravdivosti. V reálném procesu řešení úlohy je však pořadí „důkaz - přesvědčení o pravdivosti“ často opačné. Subjekt se nejdříve přesvědčí, že jistá domněnka je pravdivá, a teprve pak vyvine veškeré úsilí ji dokázat. Citujme (Polya 1954, p. 83-84):

*... having verified the theorem in several particular cases, we gathered strong inductive evidence for it. The inductive phase overcame our initial suspicion and gave us a strong confidence in the theorem. Without such confidence we would have scarcely found the courage to undertake the proof which did not look at all a routine job. When you have satisfied yourself that the theorem is true, you start proving it.*

Ve stejném duchu Villieres (2004) uvádí, že v matematickém výzkumu často důkazu předchází přesvědčení, které je založeno na kombinaci intuice, částečné empirické verifikace a logických argumentů, které ale nesplňují kritéria rigorózního důkazu. Studenti, kteří nemají tolik zkušeností, mohou s pomocí DGE verifikovat domněnku, aniž by museli tolik spoléhat na svoji intuici a logiku, a tak získat dodatečnou motivaci a sebedůvěru k důkazu. Jakmile jsou studenti přesvědčeni o pravdivosti domněnky, mohou napnout veškeré úsilí na zodpovězení otázky, proč je pravdivá.

V několika kvalitativních studiích se jejich autoři pokoušeli vymezit typické fáze práce studenta s DGE při řešení problému. V článku (Guven, 2008) je uveden velice obecný postup práce s DGE při řešení problému:

1. Experimentální výsledky
   Problém zkoumáme empiricky s použitím softwaru.
2. Postup k důkazu
   Identifikujeme klíčové části problému, logicky propojujeme empirická pozorování.
3. Důkaz
   Z premis deduktivně odvodíme závěr.
4. Případná zobecnění
   Otázky, co se stane, pokud od nějakého předpokladu zadání upustíme.

I v dalších studiích (De Villiers 2004; Edwards 1997; Furinghetti and Paola 2003; Marrades a Gutierrez 2000) se proces důkazu a dokazování v DGE dělí na několik fází. Například Furinghetti a Paola rozlišili při svém kvalitativním výzkumu celkem šest různých fází, kterými studenti projdou při dokazování problému:

1. Pochopení zadání a jeho překlad do vizuální podoby
   DGE v této fázi pomáhá interpretovat zadání správně.
2. Náhodné prozkoumávání problému
   S pomocí nástroje „tahání objektů“ hledají studenti relevantní domněnky. (Autoři poznamenávají, že nástroje DGE významně zesilují možnosti a kreativitu studentů.)
3. První moment „heuréka“: Studenti experimentálně objevují domněnku.
   Studenti se domněnku pokoušejí dokázat, k tomu využívají jak DGE, tak papír a tužku.

   Druhý moment „heuréka“: Studenti objevují cestu, jak domněnku zdůvodnit. Pro tuto fázi je typické, že opouštějí DGE a používají jenom papír a tužku
4. Nakonec studenti prezentují své zdůvodnění jako dedukci v rámci euklidovské geometrie.

Tento kvalitativní popis byl stanoven na základě pozorování několika středoškolských studentů při práci s „otevřeným problémem“.

Mnoho autorů uvádí, že řešení problémů s podporou DGE může mít pozitivní dopad na výuku deduktivního důkazu (např. Pursak et al., 2012), a to zejména z toho důvodu, že žáci mohou při formulaci hypotéz argumentovat sice neformálně, ale efektivně. Tak se mohou naučit nejenom chápat důkaz, ale také ho vytvářet. Výuka geometrie byla ještě v polovině 20. století prezentována v klasickém stylu, stavba důkazu směřovala od axiomů nebo již dokázaných vět směrem k dokazovanému tvrzení, přičemž každý krok byl přesně zdůvodněn a měl deduktivní podobu. Tato forma výkladu má ale hned několik nevýhod:

1) Student si je většinou vědom, že každé tvrzení této deduktivní stavby je pravdivé, nemusí však chápat, jak k němu autor řešení dospěl. Může mu tak uniknout klíčová myšlenka, která drží důkaz pohromadě. Student se tak často dostává do situace, kdy „pro stromy nevidí les“.
2) Motivace studenta zdůvodňovat něco, o čem je přesvědčen, že je pravdivé nebo dokonce zřejmé, výrazně klesá. Zdůvodňovat některá tvrzení až k samotným axiomům je demotivující.
3) Takovýto výklad ve většině případů vůbec neodpovídá tomu, jak řešitel nebo matematik reálně postupuje. Ten obvykle nejdříve používá argumenty, které se opírají o odhad a experiment, a teprve později se jim snaží dát deduktivní podobu.

Mnoho autorů, zabývajících se výukou matematického důkazu, klade důraz na poslední bod: Matematik při vytváření důkazu obvykle argumentuje neformálně, míchá logické argumenty a odhad, a i v samotném důkazu, který nakonec formuluje, se upřednostňuje stručnost a jasnost před naprostou logickou rigorózností. Mnoho výzkumníků poznamenává, že stejná forma – zdůraznění neformálního přístupu založeného na argumentaci a odhadu – by se měla aplikovat i při výuce matematiky a geometrie, konkrétně citujme (Boero, 2007, p. 9):

*Old teaching models (essentially based on learning and repetition of proofs of relevant theorems as they are written in textbooks) do not fit the current needs of students and teachers. Moreover, those models showed their inefficiency in the attempt to understand the role of proof in mathematics and the development of skills related to the production of conjectures and the construction of proofs by students.*

Právě software DGE umožňuje a zefektivňuje neformální argumentaci, která může nakonec vést k deduktivnímu důkazu. Dodejme však, že mezi výzkumníky není shoda, zda existuje kontinuita mezi neformální a formální argumentací (deduktivním důkazem). Jak už bylo řečeno v sekci 2.3, Pedemonte ukázala jednak příklady, kdy je mezi neformální argumentací a deduktivním důkazem plynulý přechod, a jednak příklady, kdy je mezi nimi strukturální propast. Je známo, že ne vždy pomoc softwaru stačí k vytvoření validního důkazu, a to navzdory tomu, že subjekt objeví hypotézy, které se k řešení problému vztahují.

Vedle problému, který se týká přechodu od neformální argumentace k deduktivnímu důkazu, je zde ještě jiný, totiž zda přesvědčivost, kterou je software schopen poskytnout, neutlumí u žáků potřebu logického zdůvodnění. Tato problematika se týká spíše začátečníků ve vedení důkazů, tedy žáků základních a středních škol, neměla by se týkat vysokoškolských studentů.

Studenti mohou mít problémy přeorientovat své chápání geometrie, založené na vizuálních vlastnostech objektů, na geometrii, založené na logickém porozumění vlastností těchto objektů. Občas se argumentuje, že DGE spíše podporuje empirické zdůvodnění a brání logickému zdůvodnění. Autoři jako Chazan (1993), Healy (2002) a Rodriguez & Gutierrez, 2006 uvádějí, že DGE může představovat překážku k důkazu díky „síle přesvědčení“ (*power of conviction*,), které její nástroje nabízejí.

Toho si všímá i Villieres (2004). Poznamenává, že ačkoli lze získat s pomocí softwaru vysoký stupeň přesvědčení o platnosti domněnky, neposkytuje to subjektu uspokojivé zdůvodnění, *proč* tomu tak je:

*It merely confirms that it is true, and even though considering more and more examples will increase one's confidence, it gives no psychological satisfactory sense of illumination - no insight or understanding into how or why the conjecture is the consequence of other familiar results.*

Proto, uzavírá Villieres, verifikace nebo přesvědčení o správnosti domněnky nemůže být hlavní motivací studentova snažení. Tím musí být otázka, proč je domněnka pravdivá a jaké (deduktivní) argumenty ji objasňují. Pokud studenti nebudou motivováni takovým způsobem, skutečně se může stát, že software bude bránit formálnímu zdůvodnění, o kterém si studenti budou myslet, že je nepotřebné.

Shrňme výše uvedené: Software DGE pomáhá při řešení geometrického problému především proto, že relevantní hypotézy a domněnky lze objevit nebo verifikovat na základě experimentu. Všechny případové studie, které popisovaly konkrétní pomoc softwaru, měly stejnou strukturu: Začínaly experimentálním zkoumáním a skončily logickým zdůvodněním řešení. Pomoc softwaru při formulaci přesného deduktivního zdůvodnění však nemusí být dostatečná: jedna věc je objevit hypotézy, které souvisejí s řešením, druhá věc je jejich logické zdůvodnění v rámci matematické teorie. U některých studentů může přesvědčivost, kterou DGE poskytuje, vést k tomu, že nebudou důkaz považovat za potřebný. Proto mají být studenti důsledně vedeni k tomu, aby hledali důvody, proč je tvrzení pravdivé, a ne zda je pravdivé.

Konkrétní výzkumy: Jak výrazně DGE usnadňuje důkaz?

V této části uvedeme několik výzkumů, zabývajících se konkrétním dopadem použití softwaru na studenty, kteří měli za úkol hledat logické zdůvodnění matematického problému.

Literaturu, zabývající se vlivem DGE na řešení problémů, lze rozdělit do tří kategorií (Robová, 2013): 1) vliv DGE na postoje a motivaci žáků a učitelů k dokazování, 2) vliv DGE na objevování a prověřování hypotéz, 3) vliv DGE na dokazování hypotéz. Tyto kategorie postupně projdeme.

Výzkumy, zabývající se vlivem softwaru na postoje a motivaci žáků, používaly kvalitativní metody, jako jsou dotazníky, rozhovory se studenty a učiteli a videonahrávky vyučovacích hodin. Jejich cílem bylo zaznamenat změnu postojů žáků před výukou a po výuce.

Hull a Brovey (2004) se zabývali otázkou, jak integrace DGE softwaru (konkrétně Geometer’s Sketchpad) ovlivní postoje žáků devátých tříd ke geometrii. Žáci dostali před experimentální výukou a po ní dotazník, který měl identifikovat jejich postoj k důkazům. Výzkum sice nezaznamenal významné rozdíly ve vědomostech studentů, ale vyplynulo z něj, že studenti po výuce s podporou DGE důkazům více věří, tj. jsou více přesvědčeni o pravdivosti matematického tvrzení díky tomu, že si ho mohli prověřit v softwaru DGE.

Podobný výzkum provedl Abdelfatah (2011), tentokrát na studentech učitelství matematiky. Výuka probíhala čtyři týdny, dotazníky byly studentům dány před výukou a po výuce. Abdelfatah dospěl k závěru, že studenti po experimentální výuce více oceňovali matematické důkazy z hlediska porozumění, tedy proč a z jakých důvodů je daná geometrická věta pravdivá.

Oba tyto výzkumy jsou v souladu s tezí, že DGE software jakožto jistý model euklidovského světa dodává abstraktním matematickým vztahům konkrétní význam a tím usnadňuje jejich chápání.

Druhá kategorie výzkumů DGE se zaměřuje na objevování a verifikaci hypotéz. Robová (2013), stejně jako další autoři (Leung, Baccaglini-Frank, Mariotti, 2013), uvádějí, že nejefektivnějším a nejpoužívanějším nástrojem softwaru pro vytváření a prověřování hypotéz je funkce tažení geometrického objektu po nákresně (dragging).

Dopadem této funkce na objevování a verifikaci hypotéz se zabývali další výzkumy, např. Gawlick (2002) provedl výzkum s pomocí experimentální výuky s DGE a kontrolní (klasické) výuky. Došel k závěru, že ačkoli experimentální skupina nedosáhla lepších výsledků z hlediska dovedností a vědomostí, byla významně lepší v úkolech, kdy se měl objevit vztah mezi geometrickými objekty. Závěrem bylo, že DGE významně usnadňuje vytváření hypotéz, ale ne jejich zdůvodnění.

Stejnou otázkou, tedy zda funkce tahání objektů usnadňuje formulaci hypotéz, se zabýval Gillis (2005). Experimentální skupina pracovala s DGE bez omezení, zatímco kontrolní skupina sice používala stejné softwarové prostředí, ale nemohla v něm pohybovat objekty, pracovala ve statickém prostředí. Gillis došel ke dvěma závěrům. První se týkal přímo jeho výzkumné otázky, totiž poznatku, že studenti v experimentální skupině dosáhli s pomocí nástroje tažení objektů lepších výsledků v produkci relevantních hypotéz než žáci, kteří měli pouze statickou reprezentaci konstrukce. Druhý závěr byl, že studenti neměli potřebu dokazovat své hypotézy, neboť byli díky softwaru přesvědčení o jejich správnosti. Toto nebezpečí jsme už zmínili v předchozí sekci. Jedno z možných řešení této situace je motivovat žáka k odpovědi, proč je domněnka pravdivá, nikoli k odpovědi, zda je pravdivá. Dodejme, že Gillis pracoval s žáky v matematice průměrnými nebo podprůměrnými a lze tedy předpokládat, že to jejich nízkou potřebu zdůvodnění částečně vysvětluje.

Třetí kategorie výzkumů se zabývala vlivem DGE na logické zdůvodnění (důkaz) hypotéz. Marrades a Gutierrez (2000) se zaměřili na otázku, zda experimentální činnost studentů s matematickými objekty v DGE vede k formálnímu deduktivnímu důkazu. Dospěli k závěru, že studenti jsou díky prostředí DGE více motivováni otázkou proč a z jakých důvodů dokazované tvrzení platí, potřebovali však značné množství času, než byli schopni přejít od empirické fáze k fázi deduktivní.

Studie (Kilic, 2013) se zabývala vlivem DGE na rozvoj geometrického myšlení. Kontrolní skupině (klasická výuka) a experimentální skupině (výuka s DGE) byl dán test před začátkem výzkumu a po jeho skončení. Podle závěrečného testu dosáhla experimentální skupina výrazného zlepšení oproti kontrolní zejména v testech dokazování. Ačkoli tento výzkum se týkal vlivu DGE na dokazování úloh (který je podle ní pozitivní), nekryje se s výzkumným problémem této dizertace, neboť zmiňovaný výzkum prokázal, že výuka s DGE je efektivnější (konkrétně, studenti po ní byli lepší v dokazování vybraných úloh), zatímco nás zajímá způsob využití DGE přímo při řešení geometrického problému. Objektem Kilicovi studie byli studenti středních škol.

Robová (2013) uvádí vlastní zkušenosti s použitím DGE u studentů MFF UK. Stejně jako jiní autoři i ona rozlišuje tři fáze práce s DGE 1) experimentální průzkum problému 2) formulování hypotézy a 3) důkaz. Robová poznamenává, že už druhá fáze, tedy nalezení relevantní hypotézy, je pro některé studenty náročná a často se neobejde bez pomoci učitele nebo vzájemné diskuze studentů. Dosažení plnohodnotného důkazu studenty (třetí fáze) je většinou možné jen s výraznou pomocí učitele, citujme:

*Poslední etapa – ověření a teoretické zdůvodnění objevených vztahů – má převážně deduktivní charakter a patří k nejobtížnějším fázím výuky, neboť vyžaduje od studentů nejen dobré znalosti, ale i vysokou úroveň jejich logického myšlení. Na základě zkušeností z výuky můžeme říci, že ke zdůvodnění, resp. důkazu, potřebují studenti výraznou pomoc učitele, který může důkaz rozdělit do dílčích kroků, umožňuje-li to podstata problému. Přechod od experimentální činnosti studentů k formulování deduktivního důkazu je časově velmi náročný, přičemž jen někteří studenti dospějí k důkazu vlastním úsilím, a to především jen v jednodušších matematických problémech. Výraznou roli v deduktivní fázi hraje souvislost řešeného problému s dosavadními znalostmi studentů i jejich matematický nadhled nad daným problémem.*

Robová uzavírá svůj článek poznámkou, že programy DGE pomáhají k osvojování a rozvíjení matematických poznatků a rovněž pomáhají k objevení a verifikaci matematické hypotézy. Jednoznačný závěr ohledně role DGE při (formálním) logickém zdůvodnění hypotézy však podle ní nelze zatím stanovit.

## 3.5 Shrnutí

DGE software je vybaven mnoha nástroji, které lze využít při hledání řešení problému a jeho logického zdůvodnění. Použití některých nástrojů není náročné, stačí znát jejich matematický význam, osvojení jiných si vyžaduje čas a zkušenosti. Například k úspěšnému používání funkce „tahání objektů" si subjekt musí projít tzv. instrumentální genezí, během níž se naučí, jak tento nástroj efektivně používat.

Panuje shoda, že výuka s podporou DGE je efektivnější než klasická výuka, neboť software zvyšuje motivaci žáků a vede k větší názornosti látky. Software však musí být do výuky vhodně a promyšleně zakomponován, jeho samotné zařazení bez zřejmého účelu ke zlepšení výuky nevede.

V rámci teorie by měl software usnadňovat dosažitelnost logického zdůvodnění geometrického problému, především proto, že na relevantní domněnky a hypotézy lze přijít experimentálně. V reálných situacích tomu tak vždy není. Hlavní překážkou je, že ne vždy se studentům povede logicky zdůvodnit hypotézy, které objevili s pomocí softwaru, případně z těchto hypotéz nejsou schopni vytvořit deduktivní řetěz. Proto pomoc, kterou DGE poskytuje studentům, kteří se učí vést deduktivní důkaz, není jednoznačná a je předmětem pokračujícího výzkumu.

Jestliže pomoc softwaru při hledání přesného důkazu není zřejmá a jednoznačná, je zde otázka, zda software alespoň usnadňuje objev relevantních hypotéz. Většina výzkumů se shoduje, že tomu tak opravdu je. Tyto výzkumy však nemůžeme pokládat za příliš průkazné, protože hypotézy, které v těchto výzkumech studenti hledali, nebylo těžké najít, stačila k tomu pouhá znalost softwaru. Touto problematikou se budeme více zabývat v následující kapitole.

# 4 Formulace výzkumných otázek a jejich teoretický rámec

V této kapitole shrneme nejpodstatnější informace z předchozích částí práce a na jejich základě pak zformulujeme tři otázky, na které se ve výzkumu zaměříme.

Z článků, zabývajících se řešením problémů s podporou DGE a uvedených v předchozí kapitole, plyne, že DGE usnadňuje formulaci hypotéz, a to především díky funkci tahání objektů (dragging). Objektem naprosté většiny těchto výzkumů byli středoškoláci (např. Marrades a Gutierrez, 2000), kteří neřešili příliš obtížné problémy, a navíc byly tyto problémy zvolené tak, aby šlo funkci tahání objektů efektivně a jednoduše využít. Jinými slovy, k použití této funkce zadání problémů přímo vybízelo a řešitel proto k aplikaci této funkce nemusel využívat nějakého důvtipu.

Ačkoli tyto výzkumy většinou potvrzují efektivitu softwaru s ohledem na formulaci hypotéz, vliv softwaru na dosažitelnost logického zdůvodnění není jednoznačný, např. (Gawlick, 2002) nebo (UPVM, 2015). Domněnky, formulované díky nástrojům softwaru, nejsou studenti často schopni využít tak, aby na jejich základě vytvořili deduktivní důkaz.

Výzkumy, jejichž objektem byli budoucí učitelé matematiky, tento jev potvrzují jenom s tím doplněním, že nejen logické zdůvodnění, ale i nalézání relevantních hypotéz s pomocí softwaru není pro studenty nijak snadné (Robová, 2013). Částečně to je jistě tím, že hypotézy u náročnějších problémů mají sofistikovanější podobu a proto na ně nelze přijít tak jednoduše, jako tomu bylo ve výzkumech, zaměřených na středoškoláky.

Prvním výzkumným cílem této dizertace bude tyto poznatky verifikovat na základě kvantitativních dat určitého vzorku studentů pedagogické fakulty. Poskytneme data ke dvěma úzce souvisejícím otázkám I.a a I.b, které budeme chápat jako dílčí části obecné **první výzkumné otázky**, totiž otázky, zda software pomáhá při hledání logického zdůvodnění geometrického problému. Otázky si připomeneme:

*I.a.* *Napomáhá použití softwaru DGE k objevu relevantních faktů, vztahujících se k řešení problému, ve srovnání s prostředím „papír – tužka“?*

*I.b.* *Napomáhá použití softwaru DGE k nalézání deduktivního zdůvodnění řešení ve srovnání s prostředím „papír – tužka“?*

**Druhá otázka** se zabývá příčinami, proč studenti nejsou schopni dosáhnout důkazu navzdory pomoci softwaru:

*II* *Jaké jsou příčiny selhání studentů při hledání důkazu, proč pomoc softwaru není v některých případech dostatečná?*

Odpověď na výše položenou otázku bude mít spíše kvalitativní charakter.

Třetí výzkumná otázka úzce souvisí s otázkou I.a. Jak jsme již uvedli, čím je problém náročnější, tím obtížnější je získat relevantní fakta a na jejich základě formulovat hypotézy, vztahující se k řešení. Citujme v této souvislosti z článku (Robová, 2013), který mimo jiné pojednává o efektivitě DGE při hledání důkazu u vysokoškoláků:

*… etapa objevení a zformulování hypotézy je pro některé studenty náročná, a proto zde hraje důležitou roli pomoc učitele opět ve formě vhodně formulovaných otázek, případně diskuze se spolužáky. K samostatnému objevení obtížnějšího poznatku dospějí především nadaní studenti.*

Vzniká zde proto otázka, jak náročné je objevit relevantní fakta v prostředí DGE a jaké nároky tato dovednost klade na předchozí znalosti a schopnosti řešitele:

*III* *Jakým způsobem studenti objevují relevantní hypotézy v prostředí softwaru dynamické geometrie? Stačí, pokud student používá nástroje programu mechanicky, tj. bez nějakého plánu, nebo se na hledání hypotéz významně podílí jeho znalosti a logické uvažování?*

**Třetí otázku** rozdělíme na tři podotázky. První podotázka zní:

*III.a.* *Jak lze kategorizovat různé způsoby objevování relevantních faktů a hypotéz v prostředí dynamické geometrie s přihlédnutím k tomu, jak výrazně se na těchto objevech podílí řešitelova invence a znalosti?*

K zodpovězení této podotázky vytvoříme model, na jehož základě budeme v rámci výzkumu sledovat výskyt a relativní četnost jednotlivých kategorií.

Druhá podotázka otázka zní:

*III.b.* *Jaká je četnost výskytu jednotlivých způsobů objevování? Konkrétně, jak výrazně se na objevu hypotézy podílí řešitelovy znalosti a logika?*

Třetí podotázka je:

*III.c.* *Existuje souvislost mezi způsobem objevu relevantních faktů a úspěšností při řešení problému?*

Poznamenejme, že pojmy jako „hypotéza“, „relevantní fakta“ a „domněnka“, které jsme použili při formulaci otázek a které budeme používat i nadále, chápeme jako synonyma. Jsou to příklady tvrzení, které se vyskytují v rámci logického řetězce úvah mezi zadáním problému a jeho vyřešením. Detaily byly uvedeny v sekci 2.3.

## 4.1 Teoretický rámec první výzkumné otázky

*I.a.* *Napomáhá použití softwaru DGE k objevu relevantních faktů, vztahujících se k řešení problému, ve srovnání s prostředím „papír – tužka“?*

*I.b.* *Napomáhá použití softwaru DGE k nalézání deduktivního zdůvodnění řešení ve srovnání s prostředím „papír – tužka“?*

Jak už bylo řečeno, podle mnohých výzkumů DGE usnadňuje produkci relevantních hypotéz. Naprostá většina těchto výzkumů se však vyznačovala dvěma rysy:

- Byly zaměřeny na středoškoláky (Marrades a Gutierrez, 2000) nebo základní školy (UPVM, 2015).

- K objevu relevantních hypotéz stačilo, aby student technicky zvládal nástroje softwaru.

V případě druhé podotázky (dosažitelnost deduktivního zdůvodnění) literatura zdůrazňuje především dva faktory:

- Deduktivní důkaz je velice obtížnou látkou, kterou zvládne bez pomoci jenom malá část středoškoláků.
- Ačkoli z teoretického hlediska by měla být pomoc softwaru velká, ve skutečnosti ve značné části případů není dostatečná. Nejde jen o to, že žáci nemusí být schopni nalézt hypotézy, vztahující se k řešení. Problémem je také to, že žáci musí překonat bariéru mezi neformálním zdůvodněním, opírajícím se o empirická fakta a pravděpodobnostní argumenty, a zdůvodněním, založeném na matematické teorii a přísně deduktivním uvažování. V článku (Pedemonte, 2007) lze nalézt několik ilustrací tohoto problému.

Výzkum prezentovaný v této práci se od zmiňovaných prací liší ve dvou ohledech: 1) Je zaměřen na vysokoškoláky – budoucí učitele matematiky, které nelze považovat za matematické začátečníky 2) Výzkum se zabývá pomocí, kterou software poskytuje, ve srovnání se situací, kdy studenti pomoc tohoto softwaru používat nebudou. Většina poznatků souvisejících s touto problematikou byla získávána tak, že výzkum probíhal celý v rámci DGE, případně, že studenti byli rozděleni do dvou skupin – experimentální a kontrolní, a ty byly porovnávány. V této dizertaci je experiment prováděn tak, že titíž studenti řeší stejné problémy ve dvou prostředích: nejdříve v klasickém (papír, tužka), a následně, pokud problém nevyřeší, s podporou DGE. Takové uspořádání experimentu má své výhody i nevýhody (viz sekce 6.1.2).

## 4.2 Teoretický rámec druhé výzkumné otázky

II Jaké jsou příčiny selhání studentů při hledání důkazu, proč pomoc softwaru není v některých případech dostatečná?

V této sekci uvedeme stručně některé poznatky, které pojednávají o potížích studentů s důkazy obecně. Na tomto základě poté zpřesníme výše uvedenou otázku tak, aby byly jasné faktory, které budeme sledovat s ohledem na to, jakou pomoc DGE software může studentům poskytnout.

Je všeobecně známým faktem, že matematický důkaz je těžkou látkou na všech úrovních vzdělávacího procesu. Například autoři studie (Maarif, et al., 2019) uvádějí, že v jejich výzkumu pouze 6,67% studentů učitelství matematiky bylo schopno dokončit nepřímý důkaz a 13,33% úspěšně dokončilo přímý důkaz. Hlavními příčinami neúspěchu studentů jsou podle této studie:

- Obtíže s geometrickou reprezentací problému (studenti nebyli schopni nakreslit správný náčrtek, na jehož základě se odvíjejí další úvahy)
- Obtíže v chápání podmínkové věty („Jestliže…, pak… . Dokažte")

- Obtíže s vytvářením relevantních domněnek
- Obtíže se správnou formulací domněnky
- Obtíže s logickou návazností hypotéz a s vytvořením (formálního) důkazu

Studie (Croy et al. 2007) vymezila problémy budoucích učitelů následovně:

- Studenti využívají v důkazu induktivní argumenty (neúplná indukce).
- Vycházejí z předpokladů, které nejsou dokázány.
- Předpoklady, na kterých stojí jejich zdůvodnění, nejsou korektní.

Mezi obecné a hlavní příčiny neúspěchu studentů při hledání důkazu patří nedostatečné znalosti, neschopnost je aplikovat, a nakonec nedostatek zkušeností. Citujme (Maarif, et al., 2019):

*The lack of experience and knowledge of geometrical proof with axiomatic system was a major cause of mathematics-teaching-students*.

Ve studii (Daguplo, 2017) je konstatováno, že mnoho středoškolských studentů není schopno dokázat ani jednoduché problémy. Studie rovněž poukazuje na problémy studentů při vytváření deduktivního řetězce, spočívajícího v logické návaznosti známých faktů za pomoci matematické teorie. Identifikuje čtyři obecné oblasti, do kterých spadají problémy studentů s prováděním důkazů. Jsou to:

- Geometrické základy studentů (znalost metod a strategií dokazování, teoretické znalosti).
- Postoj a zájem studenta, afektivní vztah k důkazu. (Studenti, kteří se o důkazy nezajímají nebo je považují za nepotřebné, dosahují horších výsledků, než studenti, kteří v důkazu vidí smysl.)
- Zkušenosti nebo příležitosti k vytváření důkazů. (Studenti, kteří jsou nezkušení ve vytváření důkazů, dosahují výrazně horších výsledků. Daguplo v této souvislosti poznamenává, že jedním z hlavních úkolů matematických kurzů na univerzitě je seznámit studenty s důkazy, včetně jejich tvorby.)
- Logické a deduktivní uvažování (Daguplo poznamenává, že jedním z důvodů nízké úrovně deduktivního uvažování studentů může být jejich nezkušenost s matematickými problémy.)

Data pro odpověď na naši druhou výzkumnou otázku jsme získali tak, že jsme studentům poskytovali odstupňovanou pomoc a sledovali, do jaké míry bude dostatečná. Jednotlivé fáze pomoci byly:

1. fáze: Student řeší problém samostatně v prostředí „papír, tužka“, bez pomoci DGE.

2. fáze: Student řeší problém samostatně s pomocí DGE.

3. fáze: Student řeší problém s podporou DGE, přičemž jsou mu prozrazena relevantní fakta, která souvisí s řešením problému.

4. fáze: Student dostane seznam teorémů, které se vztahují k řešení.

První a druhá fáze slouží k zodpovězení první výzkumné otázky, zbylé dvě fáze slouží k zodpovězení druhé otázky. Podle toho, v jaké fázi student svůj důkaz (ne)dokončil, určujeme, jaké byly jeho problémy.

## 4.3 Teoretický rámec třetí výzkumné otázky

*III.a.* *Jak lze kategorizovat různé způsoby objevování relevantních faktů a hypotéz v prostředí dynamické geometrie s přihlédnutím k tomu, jak výrazně se na těchto objevech podílí řešitelova invence a znalosti?*

*III.b.* *Jaká je četnost výskytu jednotlivých způsobů objevování? Konkrétně, jak výrazně se na objevu hypotézy podílí řešitelovy znalosti a logika?*

*III.c.* *Existuje souvislost mezi způsobem objevu relevantních faktů a úspěšností při řešení problému?*

Autorovi práce nejsou známy výzkumy, které by se tímto tématem zabývaly. Vzdáleně s ním souvisí otázka, zda DGE usnadňuje produkci relevantních hypotéz. Rozdílů mezi touto otázkou a otázkami zde prezentovanými je několik. Za prvé, naším cílem je vzít do úvahy i cestu, která vedla subjekt k objevu hypotézy. Většina výzkumů se touto otázkou nezabývala. Za druhé, hypotézy, které studenti hledali v rámci prezentovaných výzkumů, nebylo těžké objevit, neboť k tomu stačily znalosti nástrojů softwaru. Studenti pouze s pomocí softwaru hledali odpověď na otázku, položenou v zadání. Nakonec, většina studií zaměřených na tuto problematiku byla orientována na střední školy a studie se nevěnovaly náročnějším problémům.

Otázku III.a. zodpovíme a priori jako teoretický konstrukt, který nazveme „Upravený Toulminův Model“ (UTM). Tento model vychází z klasického Toulminova modelu (sekce 2.3) a z vlastní autorovy praxe. UTM uvedeme samostatně v následující kapitole.

# 5 Kategorizace způsobu objevu hypotéz v prostředí dynamické geometrie: Upravený Toulminův Model

V sekci 2.3 jsme představili Toulminův Model (TM), který nám sloužil k obecnému popisu řešení matematického problému, a uvedli jsme, že na matematické zdůvodnění lze pohlížet jako na sekvenci tvrzení. Úkolem řešitele je objevit tato tvrzení a deduktivně je propojit. Ne vždy vedou subjekt k objevu těchto tvrzení ryze deduktivní argumenty. V rámci TM jsme rozlišili tři kategorie argumentů, které mohou vést k objevu relevantního tvrzení:

- Deduktivní úvaha
- Heuristická úvaha
- Empiricky, experimentálně nebo vizuálně objevená fakta

Se softwarem dynamické geometrie může subjekt zodpovědět mnoho otázek experimentálně. Člověku, který má zkušenosti v jeho používání, se tak otvírají nové přístupy a strategie k řešení problémů. To vedlo některé autory, např. (Hohenwarter et al., 2019), k zavedení pojmu „kooperativní uvažovaní“ (cooperative reasoning). Tento pojem vyjadřuje, že schopnosti a efektivní strategie, které může řešitel použít při řešení s podporou DGE, jsou jiné, než strategie, které lze aplikovat v prostředí papír-tužka. Ne vždy jde o kladný přínos. Může se stát, že přesvědčivost a efektivita nástrojů softwaru sníží v očích studentů důležitost matematického zdůvodnění a jejich úsilí se zaměří pouze na objevování domněnek, které nebudou dále dokazovat. Zde však tento pojem budeme chápat pozitivně ve smyslu, že software usnadňuje dosažitelnost logického zdůvodnění.

Hlavním smyslem předkládaného UTM je více strukturalizovat poslední bod klasického TM, totiž *„Odůvodnění tvrzení na základě empiricky nebo vizuálně zjištěného faktu“.* UTM je založen jak na publikované literatuře, tak na autorově vlastní praxi ve využívání softwaru k řešení úloh.

Kapitola je rozdělena do čtyř sekcí. Nejdříve uvedeme teoretický popis interakce software – řešitel, který není jednosměrný. Následovat budou typické způsoby použití některých nástrojů softwaru. Poté detailně představíme UTM, jehož smyslem je kategorizovat akce subjektu v prostředí softwaru s ohledem na to, zda při jeho použití sledoval nějaký záměr, a pokud ano, jaký. Nakonec uvedeme tři ilustrativní případy, v nichž autor práce řešil s pomocí softwaru náročnější geometrické problémy. Na nich bude ukázáno, jak lze celý proces řešení popisovat v rámci UTM.

## 5.1 Popis interakce subjektu se softwarem

Na přelomu tisíciletí někteří autoři zdůrazňovali, že práce se softwarem není jednosměrná, např. (Arzarello, 2000; Olivero, 1999). Uveďme typický příklad. Student s pomocí softwaru prozkoumává konstrukci, to ho dovede k postřehnutí jistého detailu (například, že dvě přímky jsou kolmé), tento detail konfrontuje se svými znalostmi a na tomto základě odvodí hypotézu (například že jistý bod konstrukce se vždy pohybuje po kružnici). Tuto hypotézu s pomocí softwaru ověří, a pokud se ukáže správná, zahrne ji do předpokladů. Opět začne prozkoumávat konstrukci a celý proces se opakuje. Jinými slovy, jsou situace, kdy se těžiště práce odehrává v rámci softwaru a situace, kdy těžiště práce spočívá v matematické teorii a software slouží pouze jako prostředek ověřování. První situace jsou v článku (Arzarello et al, 2002) označovány jako „Ascending processes“, druhé jako „Descending processes“. Citujme:

*These computer-supported practises can be framed within a cognitive evolution back and forth from perceptions to abstract ideas; in fact, there are two main cognitive typologies, which can be differently faded according to the concrete situation (Saada-Robert, 1989; Arzarello, 2000; Olivero, 1999):*
*<u>Ascending processes</u>, from drawings to theory, in order to explore freely a situation, looking for regularities, invariants, etc.*
*<u>Descending processes</u> from theory to drawings, in order to validate or refute conjectures, to check properties, etc.*
*Ascending and descending processes shown by dragging practises in Cabri reveal cognitive shifts from the perceptual level to the theoretical one and back in students' mathematical activity. Ascending and descending modalities vary during the performance and mark also the way subjects look at what is considered as given and at what is supposed to be found.*

Jinými slovy, „Ascending process“ popisuje stav, kdy subjekt vychází od faktů, získaných s pomocí DGE, a konfrontuje je s vlastními myšlenkami, domněnkami a znalostmi. „Descending process“ pak označuje stav, kdy subjekt vychází od svých myšlenek a hypotéz a snaží se je s pomocí softwaru verifikovat. Ještě jednodušeji lze říct, že „Ascending process“ označuje hledání hypotéz v rámci softwaru a „Descending process“ jejich verifikaci.

Pro UTM je z výše uvedeného podstatné nejen to, že musíme rozlišovat mezi akcemi řešitele, které vedou k objevu domněnky, a akcemi, které slouží k její verifikaci, ale také, že mnoho faktů, ze kterých řešitel vyvozuje důsledky, může mít empirickou povahu. Typickým příkladem je abdukce (sekce 2.3).

## 5.2 Způsoby použití některých nástrojů DGE

Nástroje DGE může řešitel používat s různou úrovní důvtipu, promyšlenosti a účelnosti. Tato část pojednává o poznatcích z literatury, zabývající se typickými způsoby použití nástrojů dynamické geometrie – tzv. módů. Jde především o dvě funkce – tahání objektů (dragging) a měření objektů.

Funkce tahání objektů byla popsána v sekci 3.3. Zdůrazněme, že tato funkce je ve všech studiích pokládána za základní, definující, charakteristický rys softwaru DGE (Arzarello et al. 2002; Baccaglini- Frank and Mariotti 2010; Holzl 2001; Laborde 2002; Leung 2011). Je zřejmé, že pokud je konstrukce v pohybu, je mnoho jejích vlastností možné objevit vizuálně, na základě kontrastu a identifikace vlastností, které si v průběhu tohoto pohybu konstrukce ponechává. Objevit stejné vlastnosti ve statickém náčrtku na základě vizuálního vnímání není prakticky možné:

*In the context of dragging, certain characteristics change and other remain the same, and these behaviors are generally guided by the definition of the geometrical object. In static situation, one must know in advance which characteristics are unique to the geometrical object and will remain invariant according to its definition* (Hollebrands, 2007).

V případové studii (Furinghetti a Paola, 2003) bylo zkoumáno, jakým způsobem využívají tuto funkci studenti při řešení problému. Bylo pozorováno, že z počátku ji používali nahodile, ale poté, co objevili domněnku, používali tuto funkci promyšleněji a za konkrétním účelem. Holzl (2001) diskutoval dva odlišné způsoby, jak lze funkci tahání objektů použít: ke kontrole vlastnosti konstrukce („drag to check“) a za účelem objevení nové vlastnosti (hypotézy).

Arzarello v článku (Arzarello et al., 2002) způsoby použití funkce tahání objektů rozpracoval detailněji: Vytvořil různé kategorie použití tohoto nástroje, které se uplatňují v různých situacích. Například, pokud student prozkoumává problém bez jasného záměru, používá „wandering dragging“ (náhodné tahání). „Bound dragging“ (vázané tahání) představuje pohybování bodem, který je nějak omezen, například leží na přímce. Tento způsob může být použit jak při hledání hypotézy, tak při její verifikaci.

Kompletní seznam obecných modalit (kategorií) použití tohoto nástroje vypadá podle Arzarella takto:

- *Wandering dragging (náhodné tahání):* pohybování nezávislými body na obrazovce, bez plánu, za účelem objevení zajímavých konfigurací nebo vzorů v konstrukci
- *Bound dragging (vázané tahání): pohybování* bodu, který je vázaný na určitý objekt, například na přímku
- *Guided dragging (řízené tahání): tahání* nezávislými body za účelem dostat konkrétní tvar konstrukce. Tato modalita se používá nejčastěji při průzkumu problému.
- *Dummy locus dragging (tahání po skryté množině [6]): pohybování* nezávislým bodem tak, že konstrukce si zachovává jistou vlastnost zpozorovanou subjektem. Tento bod následuje obvykle určitou křivku, která je subjektu skrytá.
- *Linked dragging (propojené tahání):* spojení původně *nezávislého* bodu k danému objektu a posouvání tohoto bodu po objektu
- *Dragging test (test taháním):* pohybování nezávislých bodů (nebo částečně vázaných bodů) za účelem zjištění, zda konstrukce má vždy jistou vlastnost, nebo nemá. Pokud konstrukce tuto vlastnost vždy nemá (například ji měla pouze náhodně), je pravděpodobné, že testem neprojde.
- *Maintaining dragging model (model tahání, které udržuje vlastnost konstrukce)*: Tato modalita nebyla uvedena v článku (Arzarello et al, 2002), ale v článku (Santos-Trigo a Espinoza-Perez, 2002). Hlouběji se jí věnovali Baccaglini-Frank a Mariotti (2010) a byli to oni, kteří této modalitě dali jméno. Ve svém výzkumu se zaměřili na kognitivní procesy studentů, kteří prozkoumávali problém v DGE. Ti během řešení tahali body konstrukce takovým způsobem, aby se zachovala její jistá vlastnost. Při

[6] Doslovný překlad nedává autorovi smysl.

tom však měli zapnutou stopu pohybovaného bodu a tak se křivka, kterou tento bod opisoval, stala explicitní. V podstatě je tato modalita vylepšenou verzí modality „Dummy locus dragging“.

Autoři článku (Arzarello et al, 2002) se pokusili roztřídit tyto modality do dvou obecných procesů, které jsme popsali v předchozí sekci: „Ascending processes“ (orientace směrem od konkrétních faktů k teorii) a „Descending processes“ (konfrontace teorie s nástroji softwaru). Jak už bylo řečeno, první proces se používá při hledání hypotéz a druhý při jejich verifikaci. Tyto procesy jsou analogické k dělení z Holzlova článku.

Tak modalita „wandering dragging“, která označuje tahání bodů konstrukce bez zřejmého plánu a je používána při objevování a hledání hypotéz, spadá pod „ascending processes“. Naproti tomu „dragging test“ se používá k verifikaci jasně formulované hypotézy (zda hypotéza platí za všech okolností). Jde tedy o „descending processes“ – teoretická úvaha je vystavena experimentálnímu testu. Ostatní modality není možné předem jednoznačně zařadit, například „guided dragging“ (upravení konstrukce tak, aby měla určitou vlastnost) lze použít jak při hledání domněnek (ascending process), tak při jejich verifikaci (descending process).

Po nástroji tahání objektů se pozornost výzkumníků zaměřila na nástroj „měření (délek)“, konkrétně na otázku, jakým způsobem lze tento nástroj využít nebo jaké strategie mohou studenti s pomocí tohoto nástroje zvolit při řešení problému. Je to identický problém, jako byl řešen v článku (Arzarello et al, 2002), jenom jeho objektem je softwarové měření. Odpověď na tuto otázku byla proto vytvořena podle osnovy, kterou zvolili Arazrello a kol.

Konkrétně výzkumníci v článku (Olivero, F., & Robutti, O., 2007) vycházeli z procesů „Ascending processes“ a „Descending processes“, které použili k analýze různých způsobů použití funkce měření objektů. Pod „Ascending processes“ spadají tyto modality:

- *„Wandering measuring“ (náhodné měření):* Studenti při použití této modality nemají přesnou představu, co hledají, prozkoumávají konstrukci náhodně. Hledají invarianty, shodné úsečky a kvantitativní vztahy mezi prvky konstrukce. Pokud na základě měření identifikují nějaké invarianty a formulují (obecnou) domněnku, jedná se o modalitu Ascending processes.
- *„Guided measuring“ (řízené měření):* Měření student provádí za účelem dosažení určitého typu konstrukce, která má jisté (jím požadované) vlastnosti. Například obecný čtyřúhelníku student upraví na rovnoběžník a za tím účelem bude měřit jeho úhly nebo délky stran. Jak autoři článku poznamenávají, tato kategorie úzce souvisí s „guided dragging“, neboť měření a tahání objektů se v této modalitě téměř vždy vyskytují současně.
- *„Perceptual measuring“ (vizuální měření):* Motivací pro tato měření je vizuální vnímání. Například student pojme podezření, že jisté dvě úsečky mají stejnou délku, ale není si tím jistý. Změří je, zjistí, že tomu tak je a na tomto základě formuluje domněnku, která tento fakt vysvětluje. Sekvence vizuální vnímání – verifikace – formulace domněnky opět řadí tuto modalitu do Ascending processes.

Pod kategorii „Descending processes“ zařadili autoři tyto modality:

- *„Validation measuring“ (verifikační měření):* Tato modalita slouží hlavně k verifikaci (nebo zamítnutí) domněnky. Podle autorů je analogická k modalitě „Dragging test“.
- *„Proof measuring“ (vysvětlující měření):* Tato modalita byla pozorována u studentů, kteří už dosáhli důkazu své domněnky, ale snažili se jí lépe porozumět. Vyvozovali důsledky svého zdůvodnění a ty ověřovali pomocí měření. Autoři poznamenávají, že tato modalita se obvykle provádí se statickým náčrtkem.

Pokud shrneme výše uvedené, články (Arzarello et al, 2002) a (Olivero, F., & Robutti, O., 2007) se zabývají modalitami použití nástrojů tahání a měření v softwaru DGE při řešení problému. Modality jsou roztříděny podle toho, zda slouží k objevování domněnek nebo k jejich verifikaci.

## 5.3 Upravený Toulminův Model (UTM)

Popis výše uvedených modalit je v jednom ohledu nedostatečný – ne zcela vypovídá o tom, zda řešitel sledoval při jejich použití nějaký záměr, a jestliže ano, jak k němu přišel. Pokud například student s pomocí „guided dragging“ (modalita, při níž subjekt upraví konstrukci tak, aby měla určitou vlastnost) objeví domněnku, vyvstává otázka, proč tuto modalitu zvolil. Jaké důvody ho k tomu vedly? Proč chtěl, aby jeho konstrukce měla určitou vlastnost?

Obdobnou otázku je možné zopakovat v případě článku (Olivero, F., & Robutti, O., 2007), věnovanému měření. Pokud subjekt formuloval s pomocí nástroje měření nějakou hypotézu, je otázkou, jaké důvody ho k tomuto měření vedly, proč se rozhodl úsečky změřit.

Cílem zde prezentovaného UTM je tuto mezeru zaplnit, tedy vytvořit klasifikaci, která bere ohled i na to, s jakým záměrem studenti používají nástroje DGE, když hledají relevantní domněnky. Původní TM obsahoval tři cesty, které mohly subjekt navést k objevu relevantních faktů při řešení geometrické úlohy:

1) Deduktivní úvaha
2) Heuristická úvaha
3) Objev na základě empiricky nebo vizuálně zjištěného faktu

Tyto tři faktory budou v UTM obsaženy také, ale budou prezentovány v rámci experimentálního prostředí, proto každý z nich projde určitou proměnou.

Jaké jsou obecné způsoby, které charakterizují získání faktů a domněnek v prostředí dynamické geometrie?

Proces řešení problému se softwarem můžeme chápat jako dialog. Formulujeme otázku a software, pokud je tato otázka vhodně položena, nám ji zodpoví. Sekvenci „otázka-odpověď“ označíme slovem „experiment“. Hlavní rozdíl mezi prostředím papír-tužka a prostředím dynamické geometrie spočívá ve faktu, že zatímco v prvním případě musíme vedle otázky zformulovat i nějakou odpověď (hypotézu), kterou se následně snažíme ověřit, v prostředí dynamické geometrie nám stačí jenom vhodně položená otázka – odpověď (hypotézu) nám poskytne software.

Je tu další rozdíl: Hypotéza, zformulována v prostředí papír-tužka, může být značně nejistá. Argumenty, které subjekt přivedly k formulaci této hypotézy, mohou mít jenom heuristickou povahu nebo se dokonce může jednat o hádání. Pak je na subjektu, aby se svoji hypotézu pokusil nějak ověřit nebo vyvrátit, což ho může stát značné množství času, pokud se mu to vůbec podaří. V softwaru DGE tato starost odpadá – subjekt během několika chvil může zjistit, zda je jeho domněnka pravdivá nebo ne. (Zdůrazněme, že empirická pravdivost domněnky a její dokazatelnost v rámci matematické teorie jsou dvě různé věci.) Čím méně si je subjekt jist svojí domněnkou, tím přínosnější jsou pro něj nástroje softwaru, které mu k rozhodnutí pomohou.

Shrňme výše uvedené:

1) K formulaci domněnky v prostředí dynamické geometrie stačí znát „vhodnou“ otázku (otázku, na kterou nám nástroje softwaru mohou dát odpověď). Nemusíme formulovat samotnou hypotézu, např. že danou množinou bodů je kružnice – tu nám ve formě empirických dat zodpoví software.
2) Když zformulujeme domněnku předem (tedy s pomocí nějaké argumentace, která předchází její formulaci), nemusíme si být jisti ohledně její pravdivosti. Software nám tuto jistotu poskytne.

Tyto dva faktory představují hlavní rozdíl mezi klasickým a softwarovým prostředím a UTM je musí zohlednit.

K prvnímu bodu se vztahuje následující otázka: Co vede subjekt ke zformulování otázky, na základě které provedl experiment?

Pokud si je subjekt vědom argumentů, které svědčí o spojitosti otázky s řešením jeho problému a zvláště pokud mají tyto argumenty konkrétní matematickou formu, označíme takovou otázku jako konstruktivní a experiment provedený na jejím základě označíme jako *konstruktivní experiment*.

Pokud si naopak subjekt není jist, zda otázka, kterou si klade, má nějakou souvislost s řešením a pro její formulaci má jenom neurčité argumenty, jedná se o *heuristický experiment*.

Subjekt může provést i *náhodný experiment*, pro jehož provedení nemá žádné důvody, prostě náhodně prozkoumává konstrukci.

Druhý bod, totiž jistota, kterou software poskytuje, má malou (ale nezanedbatelnou) váhu v případě, že si je subjekt svojí hypotézou téměř jist, jinými slovy má pro ni velmi silné, většinou deduktivní, argumenty. Tento případ označíme v rámci UTM jako objev domněnky *konstruktivní argumentací*.

Pokud však subjekt domněnku alespoň zčásti hádal, nemůže si být jist, zda je domněnka skutečně pravdivá, a role softwaru tím dramaticky vzrůstá. Tento případ označíme jako *heuristický experiment*.

Nakonec, subjekt může objevit domněnku s pomocí *vizuálního vnímání dynamicky proměnné konstrukce.* Tento případ je hodně neurčitý, protože vizuální vnímání geometrické konstrukce (matematického objektu), je závislé na studentových znalostech a logice – to, co jeden student objeví na první pohled, zůstane druhému skryto, neboť neví, co by měl hledat. Bez ohledu na tuto skutečnost budeme objev faktu přikládat vizuálnímu vnímání, pokud subjekt tento fakt nijak předem nepředjímal (objevil ho až při pohledu na konstrukci) a při jehož objevu sehrálo vizuální vnímání zásadní roli.

Upravený Toulminův Model (UTM)

V rámci UTM rozlišujeme tři základní způsoby, které mohou vést k objevu hypotézy (tvrzení). První z nich, který nazýváme „konstruktivní argumentace“, je analogií deduktivního odůvodnění klasického TM. Druhý způsob je objev faktu na základě vizuálního vnímání a dynamické změny konstrukce. Třetí způsob je získání faktu pomocí experimentu, který subjekt nějakým způsobem vymyslí a realizuje. Na základě okolností, které subjekt k provedení experimentu vedly, rozlišujeme konstruktivní, heuristický a náhodný experiment. Jednotlivé případy modelu, jehož schéma je znázorněno na obr. 10, podrobně rozvedeme.

**1)** Objevení faktu pomocí úvahy. Tento případ nazveme „**konstruktivní argumentace**“.

Objevení faktu je výsledkem argumentace, která samotný objev předchází. Pedemonte (2007) takový případ označila jako *„constructive argumentation“*, odtud náš název.

Úvaha, která vedla subjekt k objevu domněnky, může nabývat různých podob: Od čisté dedukce přes abdukci až po heuristickou úvahu. Pokud subjekt objeví fakt tímto způsobem, pak mu jsou známy logické argumenty, které svědčí pro platnost objeveného tvrzení. Příkladem může být, když se subjekt snaží použít nějaký teoretický poznatek, což ho dovede k formulaci hypotézy.

Samotná přítomnost argumentace, která subjekt dovedla k objevu tvrzení, však není dostačující pro to, aby byl tento objev zařazen do kategorie konstruktivní argumentace. Důvodem je, že přínos softwaru se v jednotlivých případech může výrazně lišit. Pokud si je subjekt téměř jist správností své domněnky, je benefit softwaru malý, jeho role se omezuje na verifikaci. Pokud si subjekt jist není, role softwaru dramaticky vzrůstá. Pouze případ, kdy si je subjekt téměř jistý pravdivostí své domněnky, označíme jako objev s pomocí konstruktivní argumentace. Je zřejmé, že v takovém případě musí být subjektu známy nějaké logické argumenty, opírající se o matematickou teorii, které pro platnost domněnky svědčí. Tyto logické argumenty většinou mají deduktivní podobu, ale předpoklady, ze kterých vycházejí, nemusí být dokázané v matematickém smyslu, mohou být pouze pravdivé v empirickém smyslu. Vedle dedukce může být příkladem konstruktivní argumentace abdukce.

Pokud si subjekt svou domněnkou jistý není, zvyšuje se role softwaru a data, která mu poskytne, mají mnohem větší hodnotu. V takovém případě provádí subjekt „experiment“ (viz dále).

Shrneme-li to, „konstruktivní argumentace“ označuje objev hypotézy s pomocí úvahy, která se opírá o konkrétní logické argumenty. Subjekt má v tomto případě velkou důvěru ve správnost své domněnky a role softwaru se omezuje na dvě oblasti:

- Získání předpokladů (nebo obecněji dat) pro tuto úvahu
- Verifikace objeveného faktu

2) Objev faktu na základě **vizuálního vnímání a dynamické změny konstrukce**

Měníme konstrukci (víceméně náhodně) a pozorujeme důsledky. Podvědomě hledáme invarianty nebo vzory, které konstrukce má. Typickým příkladem může být modalita „wandering dragging“, zmíněná v předchozí části.

Tento případ je hodně neurčitý a lze ho obtížně oddělit od kategorie experimentu, neboť za prvé, vizuální vnímání může motivovat experiment, a za druhé, konstrukci můžeme měnit sice náhodně, ale přitom záměrně sledovat určitý její detail. Jinými slovy, provádíme selekci toho, co budeme pozorovat, v souladu s našimi zkušenostmi a logikou. Pak už se ale nejedná o pozorování konstrukce bez plánu, ale o akci, která je řízená v souladu s určitým záměrem a má blízko k tomu, co označujeme jako experiment.

Proto za hypotézu objevenou vizuálně budeme pokládat pouze takovou, pro jejíž platnost měl subjekt minimum argumentů a jejíž anticipace byla nízká nebo žádná.

- Ilustrace správného zařazení do této kategorie: Pozorujeme konstrukci a všimneme si, že dvě přímky jsou pravděpodobně rovnoběžné. Ověříme to.
- Nesprávné zařazení do této kategorie (jde o „experiment“): Stanovíme si cíl: zjistit, zda dva úhly konstrukce nemají stejnou velikost. V takovém případě sice používáme (mimo jiné) vizuální vnímání, ale ověřujeme vědomý záměr, formulovaný předem. Nejedná se tedy o pouhé vizuální vnímání (bez plánu).

3) Objev faktu **s pomocí experimentu**

Experimentem myslíme každou akci řešitele v rámci softwaru, která přesahuje pouhé vizuální vnímání. V tomto případě řešitel s pomocí nástrojů softwaru zkoumá konstrukci, ale více sofistikovaně než jen pouhým pohledem na pohybující se konstrukci. Elementárním příkladem může být nástroj měření: Student změří dvě úsečky, aby zjistil, zda mají stejnou délku. Komplikovanějším příkladem může být modalita „guided dragging“, v níž (jak jsme uvedli výše) student upraví konstrukci tak, aby měla jistý tvar.

K provedení experimentu mohou vést řešitele dva různé důvody:

1. Subjekt se experimentálně snaží zodpovědět nějakou otázku.
2. Subjekt se snaží potvrdit správnost své hypotézy.

V prvním případě subjekt může získat experimentem data, která buď neočekával (jsou pro něj úplně nová), anebo pro jejichž platnost neměl žádné matematické argumenty.

V druhém případě subjekt hypotézu zformuloval předem, tedy ho k ní dovedla nějaká argumentace, a software byl použit jako prostředek verifikace.

Podle povahy argumentů, na jejichž základě subjekt zformuloval domněnku (kterou ověřuje) nebo otázku (na níž hledá odpověď) rozlišujeme konstruktivní, heuristický a náhodný experiment.

a. **Konstruktivní experiment.** Rozlišujeme dva případy. V prvním případě subjekt používá nástroje softwaru s určitým záměrem, o němž si je vědom, že nějak souvisí s řešením problému – hledá odpověď na určitou otázku, jejíž relevanci vzhledem k řešení problému dokáže podpořit konkrétními argumenty. Ve druhém případě subjekt ověřuje domněnku, kterou zformuloval na základě úvahy opírající se o matematické argumenty (a ne třeba o prosté vizuální vnímání nebo hádání).

    - Pokud subjekt formuluje vhodnou otázku, může s pomocí nástrojů softwaru získat odpověď. Není přitom nutné, aby tuto odpověď jakkoli předjímal, může pro něj být zcela nová. Subjekt si ale je vědom souvislosti otázky, kterou zkoumá, s řešením problému. Jinak řečeno, důležitost jeho otázky je podpořena argumenty, které svědčí pro relevantnost experimentu ve vztahu k řešení problému.

      Jsou situace, kdy jsme si vědomi důležitosti experimentu pro řešení problému, ačkoli nevíme, jaký bude jeho výstup. Triviálním příkladem je určení a zdůvodnění množiny bodů. Obvykle tuto množinu s pomocí softwaru nejdříve určíme. Je to empirický fakt, který s řešením zjevně souvisí a který může být pro subjekt nový. Existují však méně triviální příklady, většinou se ale při nich používají pokročilejší nástroje softwaru, např. „RovniceMnozinyBodu“ apod.

    - Subjekt formuluje domněnku a tu se snaží s pomocí nástrojů softwaru verifikovat. Je si vědom konkrétních matematických argumentů, které svědčí pro její platnost, ale není si touto platností zcela jist.

      Hlavní rozdíl mezi tímto případem a kategorií „konstruktivní argumentace“ spočívá v míře jistoty subjektu. V obou případech je domněnka předem podpořená argumenty, ale v případě konstruktivního experimentu není jistota subjektu v pravdivost domněnky tak velká.

b. **Heuristický experiment**. I zde subjekt sleduje při použití softwaru určitý záměr (zkoumá otázku, na kterou nezná odpověď nebo domněnku, jejíž pravdivostí si není jistý), pro jeho provedení má však pouze heuristické argumenty:

    - Pokud subjekt verifikuje konkrétní hypotézu, ale nezná konkrétní matematické argumenty, proč by měla platit. Jeho domněnka se opírá o heuristické argumenty a je založena na odhadu.

    - Pokud se subjekt snaží zodpovědět určitou otázku, ale nemá jistu, že s řešením souvisí. Subjekt si je v tomto případě vědom určitých heuristických a obecných argumentů pro relevanci otázky, ale z části prostě hádá.

      Hlavní rozdíl mezi touto kategorií a přecházející spočívá v povaze argumentů, kterými je subjekt schopen podpořit relevantnost svého záměru. V tomto případě jsou argumenty heuristické, opírají se o obecné postupy a zkušenosti řešitele a nezávisejí na konkrétním obsahu problému. Naopak v předchozím případě si je subjekt vědom konkrétní souvislosti svého záměru s řešením problému.

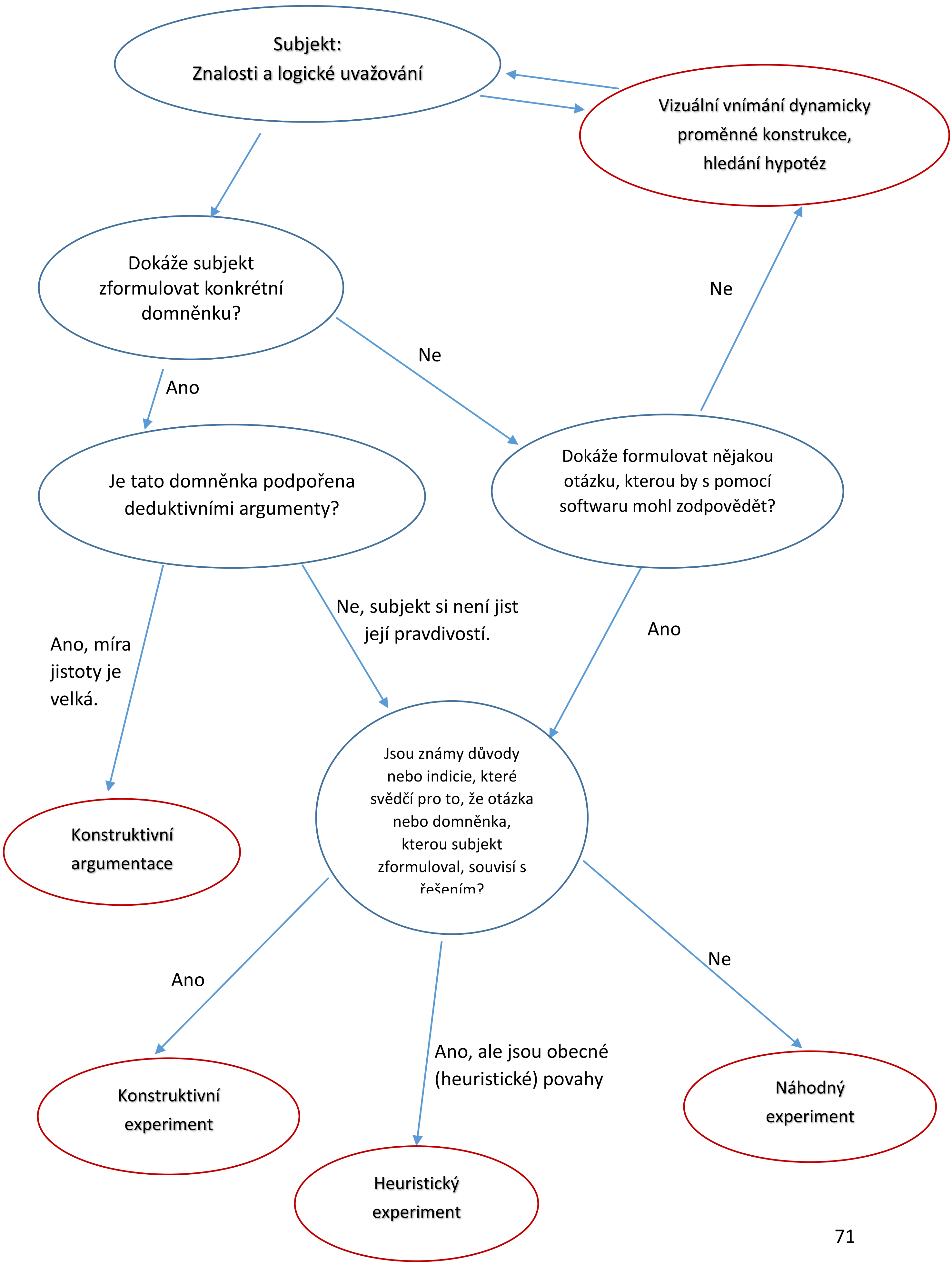
c. **Náhodný experiment**. S pomocí nástrojů DGE student provede experiment, který není schopen nijak zdůvodnit, nedokáže říct, s jakým záměrem ho dělá. Není si jist, zda výstup experimentu bude souviset s řešením problému.

   Do této kategorie lze zahrnout případy, kdy o domněnku takříkajíc „zakopneme“: s pomocí nástrojů DGE zjistíme určitý fakt, který nás předtím vůbec nenapadl. Typickým příkladem mohou být modality „wandering measuring“ (náhodné měření objektů), zmíněné v předchozí části.

Je evidentní, že mezi konstruktivním, heuristickým a náhodným experimentem nejsou jasně definované hranice. Obecně lze říci, že čím je subjekt zkušenější, tím pronikavější jsou jeho heuristické úvahy a ty se více blíží ke konstruktivní argumentaci. Naopak, pokud je začátečníkem, jeho heuristické úvahy splývají s těmi náhodnými.

Celé schéma modelu je uvedeno na obrázku 10.

# *UTM graficky*






*Obrázek 10 UTM graficky*

**Komentář k obrázku 10**: Šipky představují možné odpovědi na základní kritéria, podle kterých je klasifikace UTM vytvořena. Všechny jsou jednosměrné až na případ spojení buněk „Vizuálního vnímání dynamické konstrukce, hledání hypotéz“ a „Znalosti a logika subjektu“. Vizuální vnímání je totiž komplexní proces, jehož výstupem nemusí být formulace hotové hypotézy (v takovém případě subjekt objeví domněnku pouze vizuálním vnímáním), ale může vést pouze k některým indiciím, které, pokud je subjekt zpracuje a vyvodí z nich důsledky, vedou k formulaci konkrétní domněnky. V takovém případě vizuální vnímání není bezprostřední příčinou formulace domněnky, pouze slouží jako podpůrný prostředek pro tuto formulaci. Proto je ve schématu použita obousměrná šipka: Jeden směr značí, že subjekt objeví domněnku přímo vizuálním vnímáním, druhý směr značí, že vizuální vnímání poskytne jenom útržkovité informace, na jejichž základě subjekt s pomocí svých znalostí a logiky formuluje konkrétní hypotézu. Ta je v rámci schématu dále zařazena do jedné ze čtyř kategorií.

Můžeme provést ještě jedno dělení: Rozdělíme experiment v prostředí softwaru na otevřený a uzavřený. „Uzavřený experiment“ označuje případ, kdy předvídáme jeho výstup, nebo se snažíme rozhodnout mezi několika danými možnostmi. „Otevřený experiment“ pak označuje případ, kdy jeho výstup neočekáváme nebo nedokážeme odhadnout. Vymezme tyto pojmy:

- Uzavřený experiment: Subjekt má konkrétní nápad, který s pomocí softwaru ověřuje. Jinými slovy, subjekt ví, co hledá, nebo vyjádřeno ještě jinak, formuluje uzavřenou otázku, kterou mu software ve formě pravda/nepravda zodpoví.
- Otevřený experiment: Subjekt v tomto případě získá díky experimentu fakt, který nečekal a který je pro něj objevem. Můžeme říct, že student formuluje v řeči programu „otevřenou otázku“ a dostane na ni odpověď, která je pro něj nová.

Každý ze tří experimentů (konstruktivní, heuristický a náhodný) může být „uzavřený“ i „otevřený“. Verifikace domněnky je typickou ukázkou uzavřeného experimentu, ale i uzavřený experiment může sloužit k objevu domněnky, kterou jsme si buď nebyli jisti, nebo bylo příliš mnoho variant na to, abychom s každou počítali při naší úvaze jako s rovnocennou. V takovém případě je pomoc softwaru zásadní. Příkladem otevřeného experimentu, který je konstruktivní, může být právě již zmiňované nalezení množiny bodů, o níž sice nemusíme vědět, jak vypadá (proto je experiment otevřený), ale víme, že s řešením souvisí (proto je konstruktivní).

Ještě jednou zdůrazněme, že i vizuální vnímání závisí na znalostech a zkušenostech subjektu, který užívá software. Citujme:

*Observing is not just gazing at a geometric configuration. It means also looking for specific objects or relations in accordance the observers solving strategy, conceptual understanding, knowledge base and experience.* (Magajna, 2017)

Tedy i fakta, získaná vizuálním vnímáním, je možné rozdělit do dvou kategorií podle toho, zda subjekt sledoval určitý záměr, který se vztahoval k řešení, nebo problém náhodně prozkoumával. (V případě vizuálního vnímání se jedná o pouhé pozorování konstrukce a následnou asociaci s teoretickými znalostmi.) První případ má blízko ke konstruktivnímu experimentu, druhý k náhodnému. Objevem faktu s pomocí vizuálního vnímání máme na mysli především druhý případ.

Poznamenejme, že UTM není teoretickou kompilací ze známé literatury. Sice se opírá o TM (Simplified Toulmin's Model), který zavedla do výzkumu konstrukce důkazů italská didaktička Pedemonte (2007). Její článek se však přímo netýká použití DGE, ale různých pokusů studentů o matematický důkaz, z nichž některé vedly k validnímu důkazu a jiné ne. TM nesloužil jako prostředek ke klasifikaci způsobů objevování hypotéz, ale jako nástroj pro srovnání argumentace studentů, kteří se důkaz pokoušeli, a jeho korektní formou.

UTM je mj. postaven na četných autorových zkušenostech s prací se softwarem při řešení problémů. V další sekci je proto uvedeno několik konkrétních ukázek, v nichž je řešení problému prezentováno v rámci UTM. Komplikovanější příklady jsou uvedeny v příloze.

## 5.4 Ilustrativní příklady řešení v rámci UTM

Uvádíme ukázky tří relativně náročných problémů, které autor řešil s pomocí DGE. V průběhu každého řešení nebo těsně po něm si zaznamenal, jakým způsobem jej dosáhl, jakým způsobem v rámci UTM objevil relevantní domněnky. Jde tedy o introspekční záznam. Pojmy, které se v této sekci používají (např. „Tvrzení“ nebo „Backing“), mají stejný význam jako v TM (sekce 2.3). Řešení každé úlohy je interpretováno v rámci UTM, tzn. u každého tvrzení (relevantního faktu) je uvedeno, jak k němu subjekt došel.

První příklad je ilustrací aplikace konstruktivních experimentů, druhý příklad ilustruje sílu heuristických experimentů. Třetí příklad ukazuje řešení, v němž při objevování hypotéz byla použita směs konstruktivní argumentace, konstruktivního experimentu a náhodného experimentu.

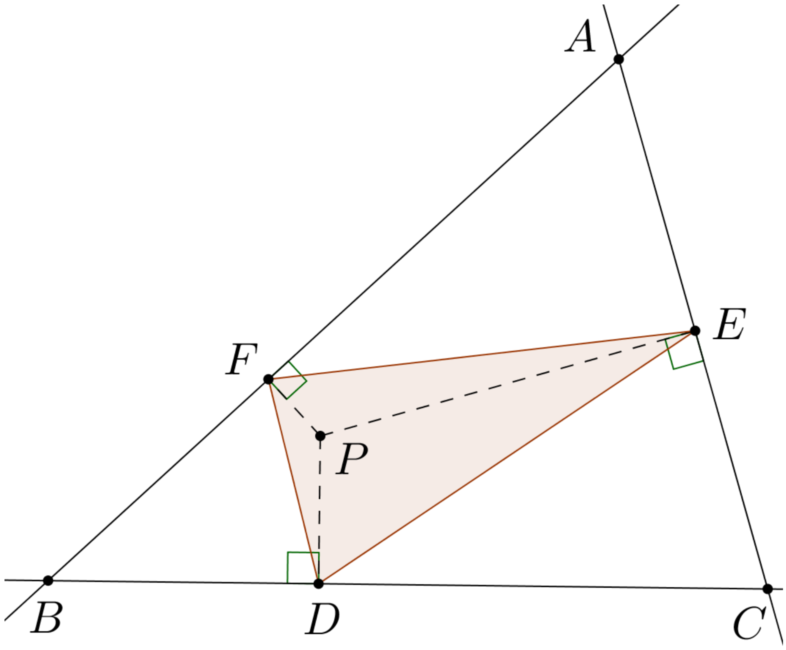
Řešení všech tří problémů bylo uvedeno (nebo bude uvedeno v případě článků již přijatých k publikaci) v odborných časopisech, zabývajících se buď geometrií, nebo výukou s důrazem na moderní technologie. První problém bude publikován v článku (Blažek, Pech, 2022), druhý problém byl publikován v článcích (Blažek, Leischner, 2019), (Blažek, 2019) a objeví se i v článku (Blažek, Pech, 2022) a (Blažek, 2022), kde je jeho řešení zobecněno na kartézské ovály. Třetímu problému jsou věnovány články (Blažek, Pech, 2016 a 2017).

#### 1. příklad: Konstruktivní experiment

Ukázalo se, že řešení tohoto problému je známo, což ale řešitel předem nevěděl.

*Zadání problému:*

Je dán ostroúhlý trojúhelník $ABC$. Nalezněte způsob, jak zkonstruovat v rovině trojúhelníku bod $P$ takový, že paty kolmic $D, E, F$ spuštěných z bodu $P$ na strany trojúhelníka $a, b, c$ jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka.




*Obrázek 11 Příklad trojúhelníku $DEF$ pro náhodně zvolený bod $P$*

*Postup řešení*

Pokud k řešení problému využíváme DGE, nabízí se otázka: Můžeme hledaný bod zkonstruovat s pomocí nástrojů softwaru analyticky?

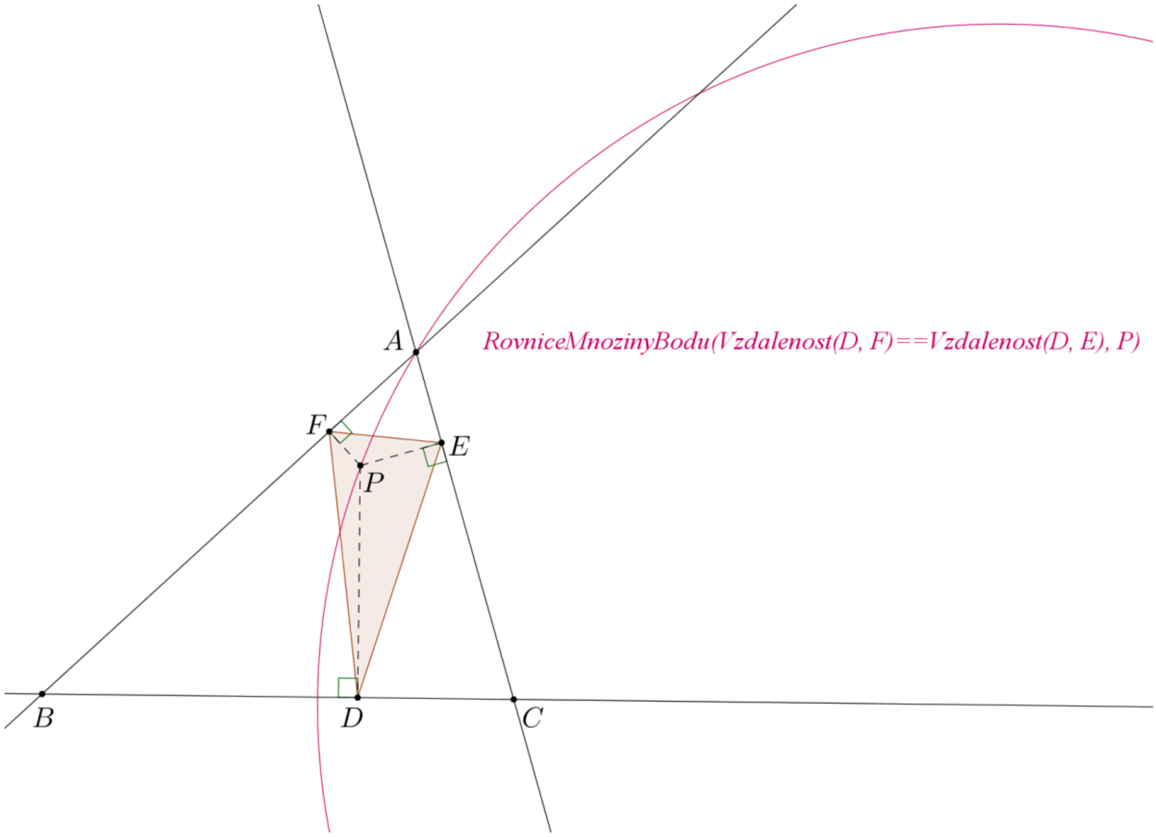
Moderní DGE softwary, např. GeoGebra, nabízejí některé nástroje, typické pro třídu programů CAS. Mezi nimi i funkci „RovniceMnozinyBodu“ (LocusEquation), která je schopna na základě daných podmínek určit rovnici hledané množiny bodů. (Jednodušší funkce „MnozinaBodu“ je schopna hledanou množinu zobrazit graficky, ale pouze za podmínky, že známe způsob, jak sestrojit libovolný bod množiny, což ale není tento případ).

Pokud zadáme příkaz k nalezení hledaného bodu, příkaz RovniceMnozinyBodu zde selže (což není tak výjimečný případ, viz poznámku v sekci 3.3). To však v tomto případě není nevýhodou, protože pokud bychom hledaný bod našli, nic by nám to neřeklo o tom, jak ho zkonstruovat. Subjekt proto provedl následující

*Experiment (otevřený, kategorie „Konstruktivní experiment“):* Jak vypadá množina bodů $P$, pokud upustíme od podmínky rovnostrannosti trojúhelníku $DEF$ a požadujeme pouze jeho rovnoramennost? Lze tuto množinu určit pomocí příkazu RovniceMnozinyBodu?

Výše uvedený experiment byl „otevřený“, protože řešitel netušil, jak by odpověď na danou otázku měla vypadat. Zároveň byl „konstruktivní“ neboť je evidentní, že odpověď na tuto otázku souvisí s řešením problému. Řešitel dospěl k tomuto tvrzení:

*1. tvrzení:* Množina bodů $P$, pro jejichž trojúhelník platí $DF = DE$, je kružnice $k$, procházející vrcholem $A$ (obr. 12).




*Obrázek 12 Množina bodů P s podmínkou $|DF| = |DE|$ je kružnice procházející bodem $A$.*

Otázkou je, jak tuto kružnici zkonstruovat. Při pohledu na grafické zobrazení se nabízela otázka: Kde leží střed této kružnice? Neleží na přímce $BC$?

*Na základě vizuálního vnímání* bylo získáno

*2. tvrzení:* Střed kružnice $k$ leží na přímce $BC$.

Protože stále není zřejmé, co je to za kružnici, pokusil se řešitel identifikovat průsečík kružnice s úsečkou $BC$. Jednalo se o uzavřený konstruktivní experiment. Uzavřený proto, že řešitel formuloval různé hypotézy a od programu dostával odpovědi platí – neplatí. Konstruktivní proto, že řešitel na jedné straně neznal logické argumenty pro platnost těchto hypotéz, ale na druhé straně věděl, že sleduje záměr, který úzce souvisí s řešením.

*Experiment (uzavřený, kategorie „Konstruktivní experiment“):* Řešitel se pokusil ztotožnit průsečík kružnice $k$ se stranou $BC$ s některým jejím význačným bodem. Patu kolmice z bodu $A$ mohl vyloučit ihned, zkusil neúspěšně střed úsečky $BC$ a nakonec zkonstruoval osu úhlu $BAC$. Ta procházela hledaným průsečíkem.

Z toho plyne

*3. tvrzení:* $k$ je Apolloniova kružnice, tj. množina bodů $P$, pro kterou platí $|PB|/|PC| = |BA|/|CA|$.

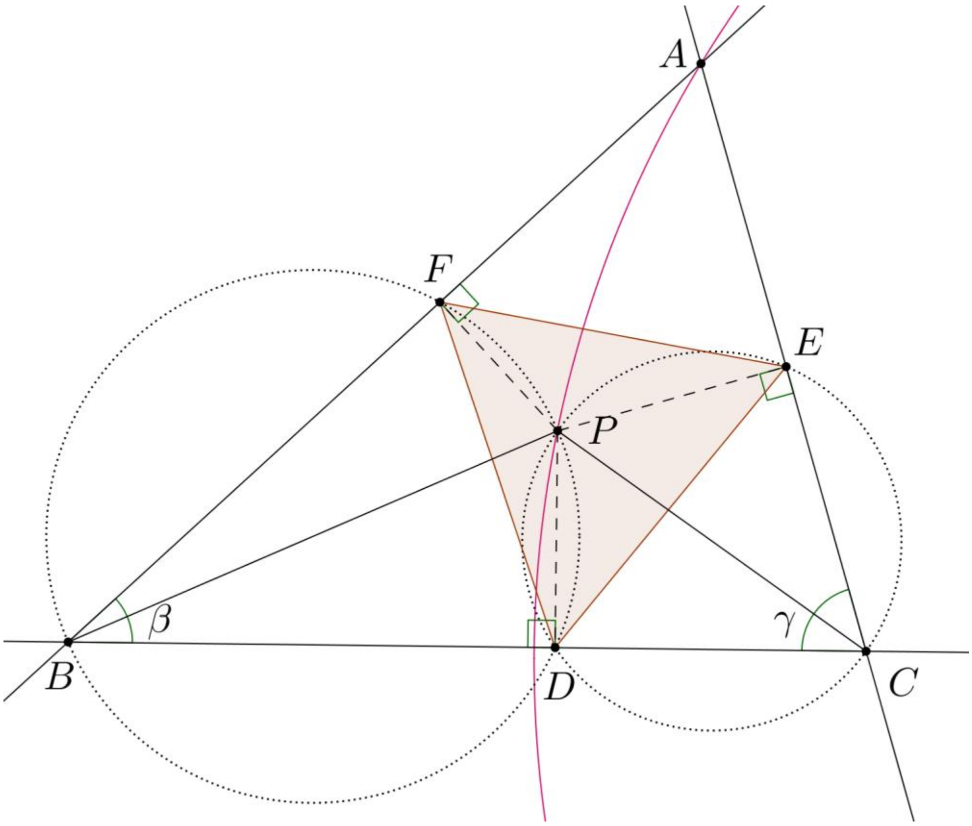
Nyní byla konstrukce zřejmá: Pro paty libovolného bodu $P$ Apollonoivy kružnice $k$ (která prochází bodem $A$), platí $|DF| = |DE|$. Pro Apolloniovu kružnici $l$, která prochází bodem $C$, platí $|DF| = |FE|$. Průsečíky těchto dvou kružnic jsou řešením problému, neboť $|DF| = |DE| = |FE|$. Zbývá zdůvodnit, proč pro Apolloniovu kružnici $k$ platí rovnost $|DF| = |DE|$.

S pomocí DGE tedy řešitel nasbíral potřebná fakta a nyní bylo na něm, zda je dokáže zdůvodnit a uspořádat do uceleného řetězce. Tato fáze je v klasickém Toulminově modelu nazvána „Backing".

*Přesné zdůvodnění (Backing):*

Nejdříve uvedeme bez důkazu pomocné

*Lemma*: Nechť je z dané kružnice vidět tětiva pod konstantním úhlem $\alpha$., Délka $d$ této tětivy je dána vztahem $2R \cdot \sin\alpha = d$, kde $2R$ je délka průměru dané kružnice.




*Obrázek 13 Zdůvodnění vlastnosti bodů Apolloniovy kružnice*

Dokážeme, že pokud $P$ leží na příslušné Apolloniově kružnici procházející bodem $A$, pak $|DF| = |DE|$. Všechny následující úvahy se vztahují k obr. 13.

Čtyřúhelník $DPFB$ je tětivový (součet protějších úhlů je 180°), navíc úsečka $BP$ je průměrem této kružnice. Podle výše uvedeného lemmatu tedy platí $|BP| \sin\beta = |FD|$, kde

$\beta$ je úhel u vrcholu $B$. Analogicky $|CP| \sin \gamma = |DE|$. Dáme pravé a levé strany rovnic do poměru:

$$\frac{|FD|}{|DE|} = \frac{|BP| \sin \beta}{|CP| \sin \gamma} = \frac{|BA| \sin \beta}{|CA| \sin \gamma} = \frac{v_a}{v_a} = 1$$

($v_a$ je délka výšky na stranu $a$ trojúhelníku).

(Poznámka: průsečík Apolloniových kružnic se v odborné literatuře nazývá „isodynamic point“.)

Lze rovněž ukázat, že každý bod $P$, pro který platí $|DF| = |DE|$, leží na Apolloniově kružnici, procházející vrcholem $A$. Důkaz je založen na reverzibilitě výše uvedených kroků.

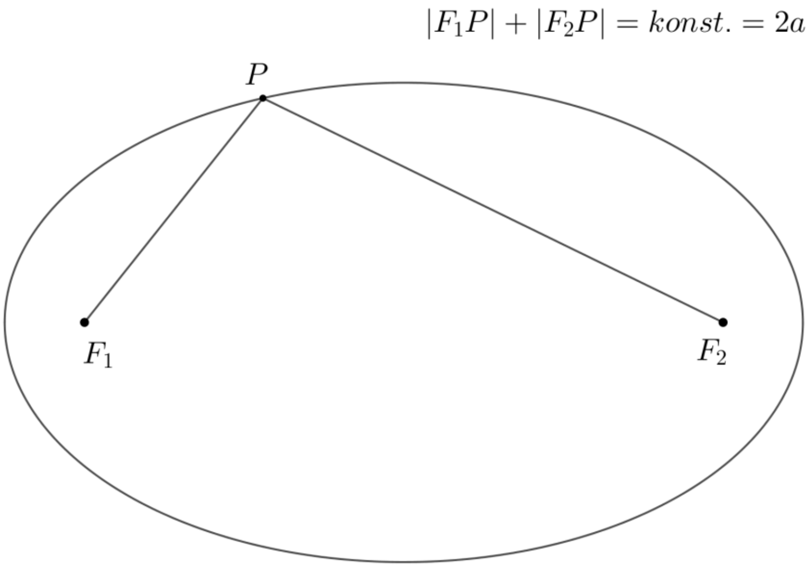
### 2. příklad: Heuristický experiment

Následující příklad ilustruje sílu heuristických experimentů. Může mít také jistou matematickou hodnotu – způsob jeho řešení by mohl být originální. Klasická řešení tohoto problému spočívají buď na *Quételet - Dandelinově* větě z roku 1822, nebo na analytickém výpočtu.

Nejdříve uvedeme některá fakta, nutná pro pochopení zadání problému.

Elipsa se na střední škole definuje dvěma způsoby. První způsob vychází z ohniskové definice elipsy, druhý způsob definuje elipsu s pomocí řídící přímky.

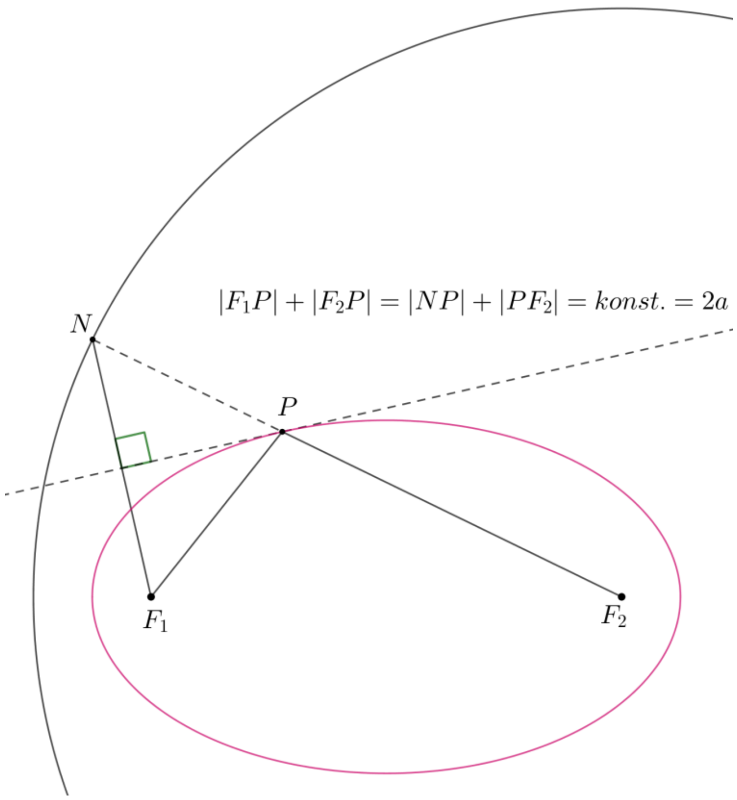
- Elipsa $\rho$ je množinou bodů $P$ s konstantním součtem vzdáleností $2a$ od dvou daných ohnisek $F_1, F_2$ (obr. 14).




*Obrázek 14 Ohnisková definice elipsy.*

Tuto definici je možné přeformulovat do definice pomocí tzv. řídící kružnice:

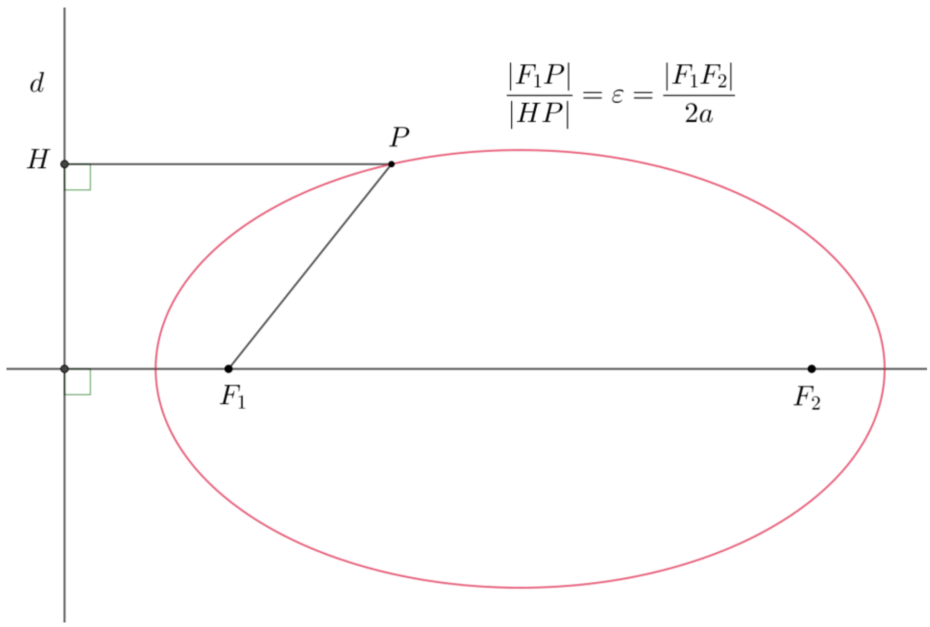
Uvažujme kružnici $k$ se středem v bodě $F_2$ o poloměru $2a$. Pak množina bodů $P$, které mají stejnou vzdálenost od daného ohniska $F_1$ a kružnice $k$, je elipsa (obr. 15).




*Obrázek 15: Definice pomocí řídící kružnice.*

- Definice pomocí řídící přímky

  Elipsa $\tau$ je množina bodů $P$ s konstantním poměrem vzdáleností $\varepsilon = \frac{|F_1F_2|}{2a} < 1$ od jednoho z ohnisek $F_1$ a řídící přímky $d$ (obr. 16).



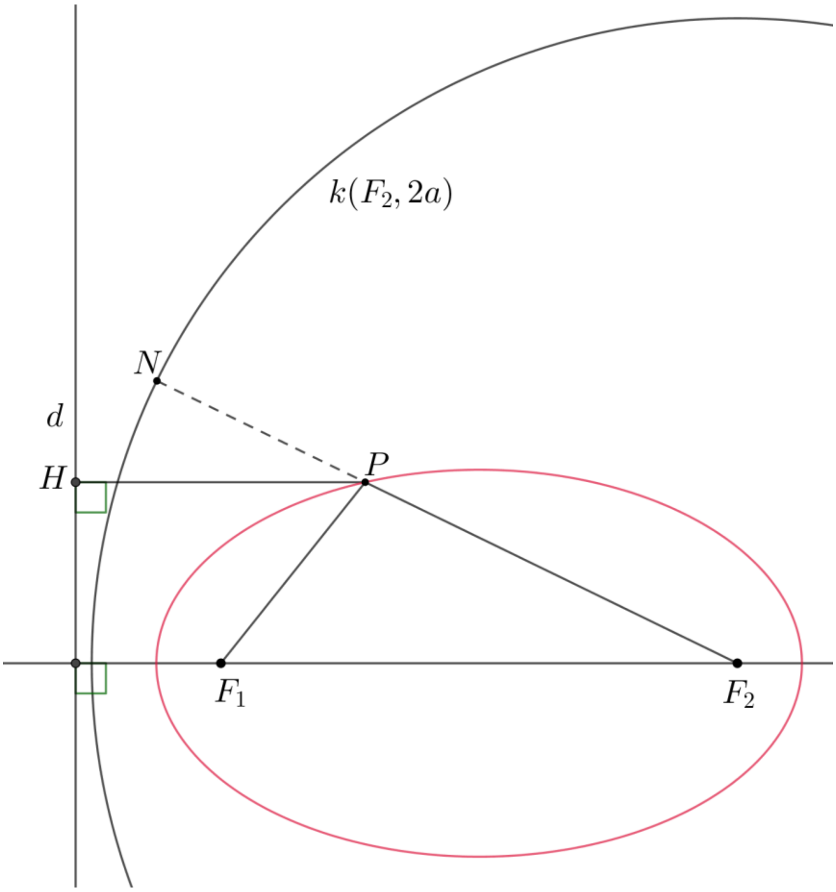

*Obrázek 16: Definice pomocí řídící přímky*

*Zadání problému:*

Jsou dána ohniska $F_1$, $F_2$ a konstanta $2a > |F_1F_2|$. Dokažte, že množina $\tau$ bodů $P$, definovaná pomocí řídící přímky, je identická s množinou $\rho$ bodů $P$, definovaných pomocí řídící kružnice.

<u>*Postup řešení*</u>

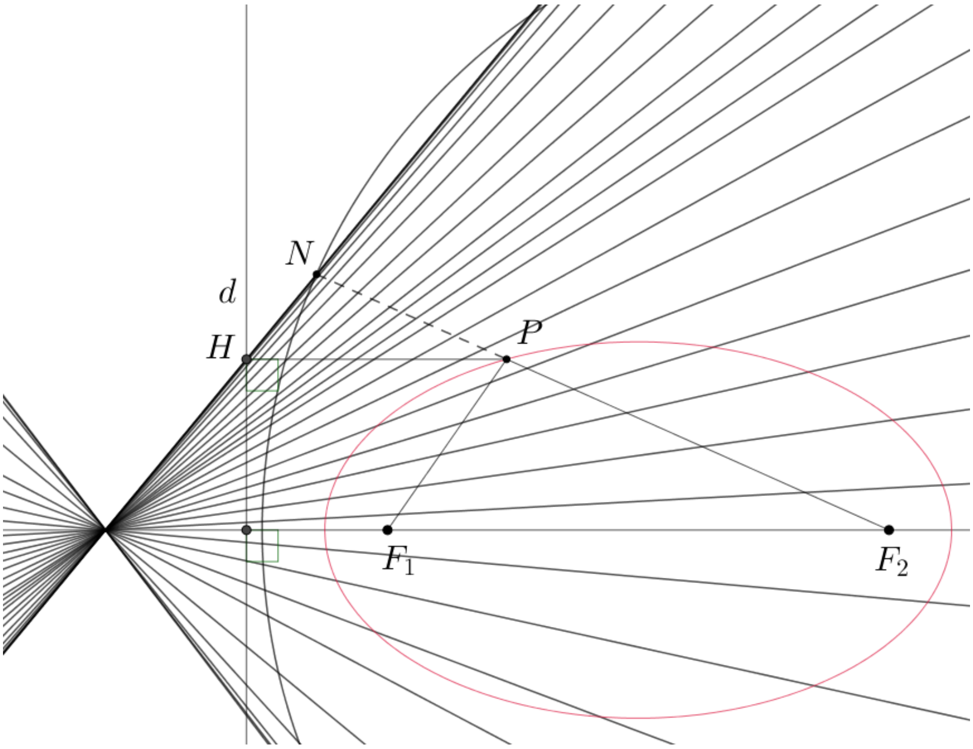
Řešitel začal tím, že si zadání problému (tedy obě konstrukce $\tau$ a $\rho$ elipsy) narýsoval do GeoGebry. Každému bodu $P$ elipsy odpovídá bod $N$ na řídící kružnici a bod $H$ na řídící přímce (obr. 17).




*Obrázek 17: Zadání problému*

Řešitel si poté položil otázku: V jakém vztahu jsou body $H$ a $N$? Otázka je neurčitá a není jasné, jak na ní odpovědět. Proto provedl následující

***Experiment (otevřený, kategorie „Heuristický experiment“):*** Sestrojme přímku $HN$ a zapněme její stopu. Pohybujme bodem $P$ elipsy. Co pozorujeme? (obr. 18)




*Obrázek 18 Variabilní přímka $HN$ prochází fixním bodem $E$*

*1. tvrzení:* Přímka $HN$ vždy prochází fixním bodem $E$, ležícím na přímce $F_1F_2$

Předchozí experiment byl heuristický, protože byl založen na otázce, na kterou subjekt neznal odpověď a jejíž souvislost s řešením nebyla jasná. Řešitel na základě odhadu hledal nějakou geometrickou souvislost bodů $H$ a $N$, tento odhad se však neopíral o hmatatelné matematické argumenty.

Konstruovat bod $E$ pomocí přímky $HN$ není z matematického hlediska elegantní, protože tato konstrukce postrádá symetrii. Vzniká otázka: Jak zkonstruovat bod $E$ přímo, bez přímky $HN$. Řešitel se s pomocí nástrojů softwaru pokoušel tuto otázku zodpovědět a proto provedl

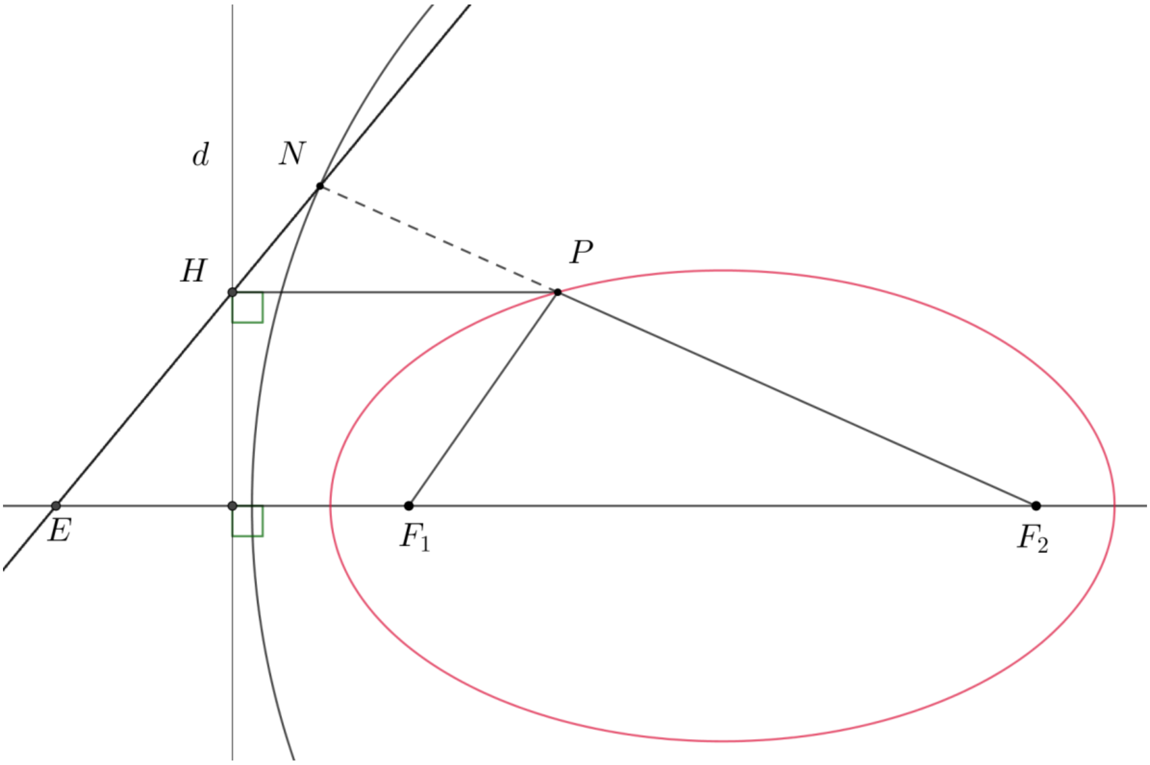
*Experiment (uzavřený, kategorie „Heuristický experiment"):* Po několika neúspěšných pokusech zkusil sestrojit obraz ohniska $F_1$ v inverzi kružnice $k$.

*2. tvrzení:* Bod $E$ je obrazem bodu $F_1$ v inverzi[7] kružnice $k$.

Experiment byl uzavřený, neboť subjekt testoval konkrétní domněnku a software poskytoval odpovědi ve formě „platí – neplatí". Byl také heuristický: Jednak subjekt neznal žádné matematické argumenty, které by platnost jeho domněnky podporovaly, a také neznal souvislost otázky, kterou zkoumal, s řešením problému. Experiment se opíral pouze o odhad a víru v matematickou jednoduchost hledaného řešení.

[7] Obraz $E$ bodu $F_1$ v inverzi kružnice se středem $F_2$ a poloměrem $R$ je bod, který splňuje vztah: $|EF_2||F_1F_2| = R^2$ a leží na polopřímce $F_2F_1$.

Obr. 19 ukazuje fázi, ve které se řešitel nyní nacházel. Při pohledu na obrázek se vnucuje otázka: Neleží střed úsečky $F_1E$ na řídící přímce $d$? Řešitel tuto domněnku ověřil.




*Obrázek 19 Situace po objevení fixního bodu $E$ přímky $HN$.*

*3. tvrzení:* Střed $S$ úsečky $F_1E$ leží na přímce $d$. Jinými slovy, přímka $d$ je osou úsečky $F_1E$.

Toto tvrzení bylo získáno s pomocí *vizuálního vnímání konstrukce*.

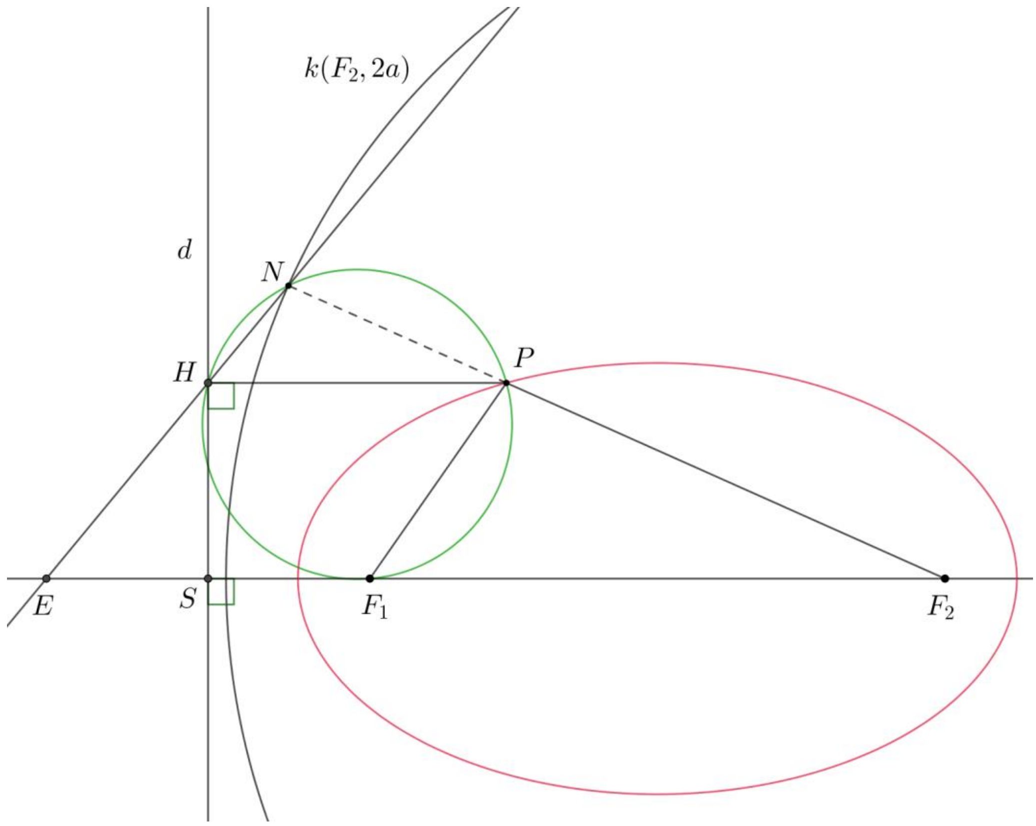
Nakonec řešitele napadla ještě jedna otázka, ačkoli ještě netušil, zda bude s řešením problému souviset:

*Experiment (uzavřený, kategorie „Heuristický experiment"):* Neleží nějaké význačné body konstrukce na kružnici? Co zkusit vést kružnici třemi body konstrukce a zjistit, zda na ní neleží další bod konstrukce?

*4. tvrzení:* Čtyřúhelníku $F_1HNP$ lze opsat kružnici.

Experiment byl uzavřený (řešitel zkoumal konečný seznam možností) a byl heuristický, protože jak důvod pro jeho platnost, tak souvislost experimentu s řešením problému byly neznámé. Nebyl to ale ani náhodný experiment, protože řešitel sledoval obecnou linku souvislostí, která se opírala o jeho zkušenosti.

Zde skončila experimentální fáze a nastala fáze deduktivní. Empirické poznatky shrnuje obrázek 20.




*Obrázek 20 Shrnutí experimentálních faktů*

*Přesné zdůvodnění (Backing):*

Vyjdeme z definice elipsy pomocí řídící kružnice a sestrojíme přímku $d$ podle vypozorovaných experimentálních faktů. Tedy:

1. Sestrojíme řídící kružnici $k$ se středem $F_2$ a poloměrem $R = 2a$.
2. Na polopřímce $F_2F_1$ sestrojíme bod $E$, pro který platí $|EF_2||F_1F_2| = R^2$ (2. tvrzení).
3. Sestrojíme osu $d$ úsečky $EF_1$ (3. tvrzení).

Dokážeme, že tato přímka $d$ má vlastnosti řídící přímky. Za tímto účelem zkonstruujeme:

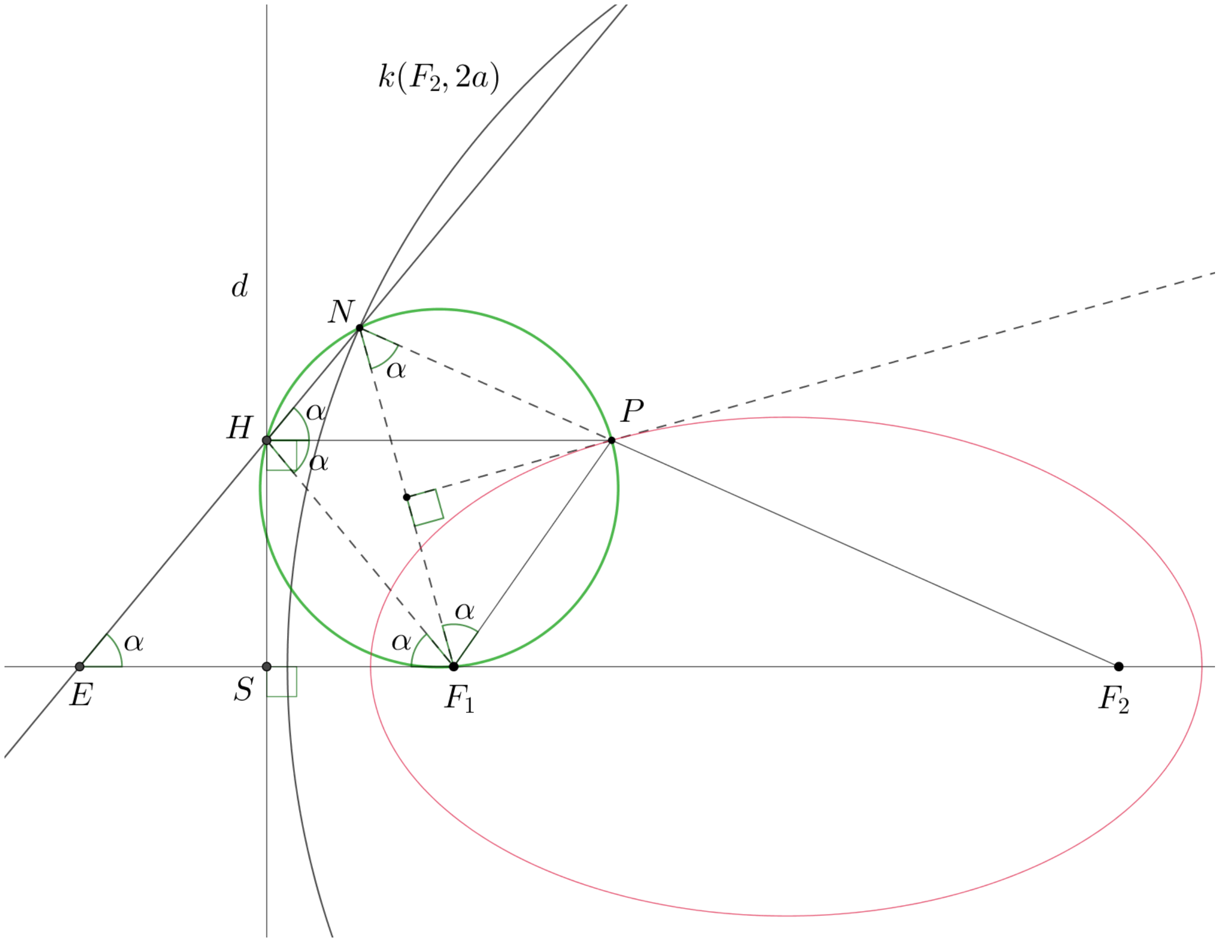
4. Libovolný bod $P$ elipsy a jemu odpovídající bod $N$ na řídící kružnici.
5. Průsečík $H$ přímky $NE$ s přímkou $d$.

Nyní je nutné dokázat:

(i) Úsečka $|HP|$ je vzdálenost bodu $P$ od přímky $d$ (jinými slovy, přímka $HP$ je kolmá na přímku $d$).

(ii) Pro poměr úseček platí $\frac{|F_1P|}{|HP|} = \varepsilon = \frac{|F_1F_2|}{2a}$.

Všechny následující úvahy se vztahují obr. 21.




*Obrázek 21: Postup důkazu*

Podle konstrukce bodu $E$ platí $|EF_2||F_1F_2| = R^2 = |F_2N|^2$. Tuto rovnici přepíšeme do tvaru $|EF_2|/|F_2N| = |F_2N|/|F_1F_2|$ a vezmeme v úvahu, že trojúhelníky $F_2F_1N$ a $F_2NE$ sdílejí úhel u vrcholu $F_2$ a jsou si tedy podobné: $\triangle F_2F_1N \sim \triangle F_2NE$. Z toho plyne rovnost úhlů $\sphericalangle F_1NF_2 = \sphericalangle NEF_2$. Trojúhelníky $NF_1P$ a $EHF_1$ jsou rovnoramenné (bod $H$ leží na ose $d$) a následující úhly jsou shodné: $\alpha = \sphericalangle NF_1P = \sphericalangle F_1NF_2 = \sphericalangle NEF_2 = \sphericalangle HEF_1 = \sphericalangle HF_1E$. Z toho vyplývá $\sphericalangle F_1HN = 2\alpha$ a $\sphericalangle F_1PN = 180° - 2\alpha$. Čtyřúhelníku $HNPF_1$ lze tedy opsat kružnici. Z věty o obvodových úhlech dostaneme $\alpha = \sphericalangle NF_1P = \sphericalangle NHP = \sphericalangle NEF_1$, tedy přímka $HP$ je rovnoběžná s přímkou $EF_1$, která je však kolmá k $d$. Dokázali jsme (i).

K důkazu druhého tvrzení stačí využít podobnosti trojúhelníků:

$$\triangle HNP \sim \triangle ENF_2 \sim \triangle NF_1F_2$$

První podobnost plyne z faktu, že přímka $HP$ je rovnoběžná s přímkou $EF_2$, druhou podobnost jsme dokázali na začátku předchozího odstavce. Platí rovnosti

$$\frac{|F_1P|}{|HP|} = \frac{|NP|}{|HP|} = \frac{|NF_2|}{|EF_2|} = \frac{|F_1F_2|}{|NF_2|} = \frac{|F_1F_2|}{2a} = \varepsilon$$

což je (ii).

Zdůrazněme, že jsme nedokázali ekvivalenci, ale pouze jednosměrnou implikaci, totiž že body splňující ohniskovou definici splňují rovněž definici pomocí řídící přímky. Dokončit plnou ekvivalenci však není těžké. Nejjednodušší je asi postupovat sporem – předpokládat existenci bodu $P$, splňujícího druhou definici, ale nikoli první.

Tento příklad je ukázkou toho, jak zásadní může být pomoc softwaru. Proto ještě shrňme, v čem přesně jeho pomoc spočívala.

Jak už bylo řečeno, práci se softwarem můžeme chápat jako dialog, kdy subjekt formuluje otázku a software na ni odpoví. Tato otázka musí být položena v řeči programu, proto ne každá otázka je přípustná. Ohlédněme se zpět za čtyřmi získanými fakty („tvrzeními").

- Prvnímu faktu předcházela „heuristická otázka" Získaná odpověď byla pro subjekt nová.
- Druhému faktu předcházela otázka, jak zkonstruovat bod $E$. Metodou pokus-omyl subjekt dospěl k odpovědi.
- Třetí fakt byl získán vizuálním vnímáním konstrukce.
- Čtvrtý fakt vycházel z otázky, zda některé body konstrukce neleží na kružnici. Byla to heuristická otázka, jejíž souvislost s řešením nebyla zřejmá.

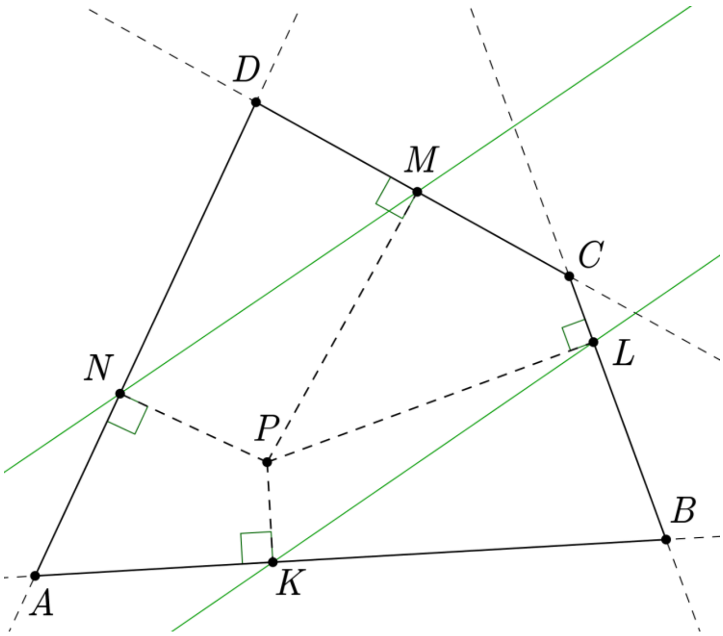
V době získání těchto faktů nebylo subjektu známo, zda s řešením skutečně souvisí. Také s formulací otázek, které předcházely získání faktů, software nijak nepomohl. Pomoc softwaru spočívala v poskytnutí odpovědí na tyto otázky. Kdyby byl subjekt odkázán sám na sebe, musel by hned u prvního tvrzení diskutovat dvě rovnocenné možnosti: 1) Přímka $HN$ má fixní bod. 2) Přímka $HN$ nemá fixní bod. Díky nástrojům softwaru se odpověď zredukovala na první možnost. To samé se týká druhé otázky: Bez softwaru by subjekt musel uvažovat o několika způsobech konstrukce hledaného bodu jako o rovnocenných a navíc by si nemohl být jist, zda nejsou všechny špatně. Otázka, která předcházela získání čtvrtého faktu, měla mnoho možných odpovědí: Sedmi bodům odpovídá celkem 35 čtveřic a uvažovat o všech čtveřicích jako o rovnocenných, je nemožné. I když předem vyloučíme čtveřice, ve kterých jsou tři body kolineární, zbyde jich 14, což je pořád příliš mnoho. Jak zdůrazňuje Polya, v matematické práci obvykle přesvědčení o platnosti nějakého tvrzení předchází jeho důkaz. V tomto případě určil software, co platí. Ukázal tím cestu, na jejímž konci bylo správné řešení. Je ale třeba říci, že ne vždy tomu tak musí být – někdy se mohou nalezená fakta a domněnky míjet se směrem, který vede k řešení problému.

### 3. příklad: Ukázka konstruktivní argumentace a náhodného experimentu

U následujícího problému uvedeme dvě různá řešení. První z nich ilustruje to, co v rámci UTM označujeme jako objev faktu s pomocí konstruktivní argumentace, druhé řešení pak ukazuje objev s pomocí „náhodného experimentu" a také „vizuálního vnímání dynamické konstrukce".

*Zadání problému:*

Je dán čtyřúhelník $ABCD$. Nalezněte a zdůvodněte množinu bodů $P$ v rovině čtyřúhelníku s následující vlastností: Pokud postupně označíme $K, L, M$ a $N$ paty kolmic, spuštěných z bodu $P$ na přímky $AB, BC, CD$ a $DA$, pak jsou přímky $KL$ a $MN$ rovnoběžné (obr. 22).




*Obrázek 22 Příklad bodu $P$ splňující zadání problému.*

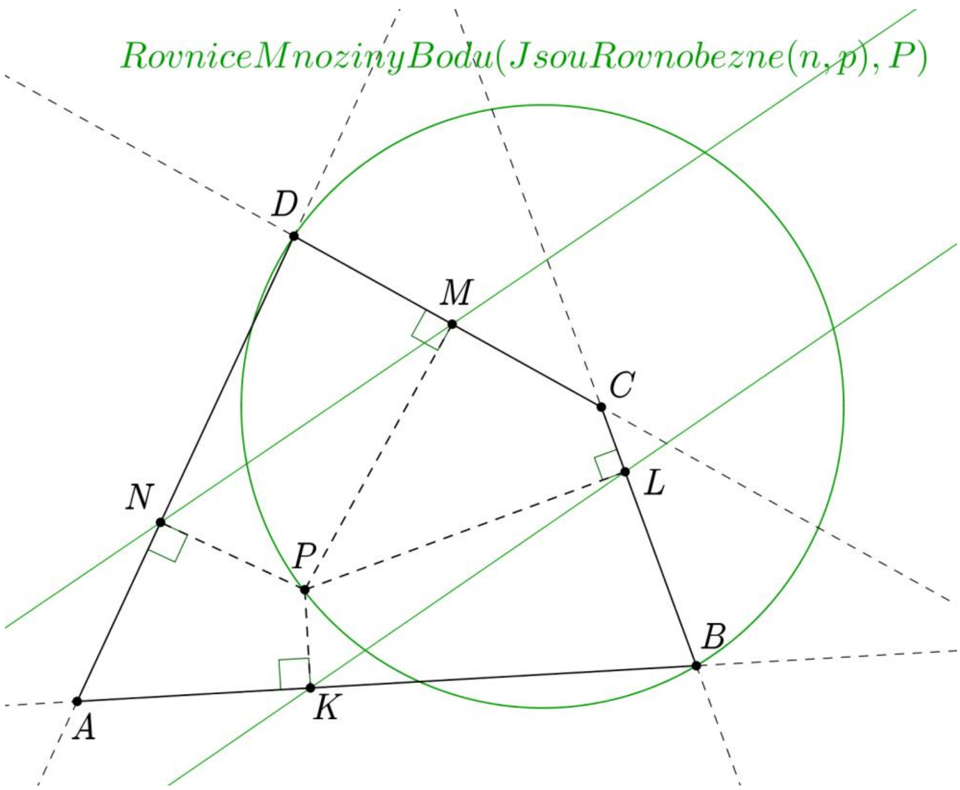
<u>*1. způsob řešení*</u>

Stejně jako v prvním příkladu, i zde nešlo aplikovat příkaz „Mnozina“. Příkaz sice graficky zobrazí hledanou množinu bodů, ale pouze za podmínky, že známe způsob konstrukce jejího libovolného bodu, což není tento případ.

Jiná situace je v případě příkazu „RovniceMnozinyBodu“. U něho stačí zadat geometrickou podmínku. Program ji přeloží do řeči rovnic a ty vyřeší. Ne vždy tento příkaz funguje (viz poznámku v sekci 3.3), ale zde hledanou množinu spočítat dokázal. Kroky k řešení byly následující.

*Experiment (otevřený, kategorie „Konstruktivní experiment“):* Dokáže příkaz RovniceMnozinyBodu spočítat hledanou množinu?

*1. tvrzení:* Hledaná množina bodů $P$ je jistá kružnice, procházející vrcholy $B, D$ čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 23).



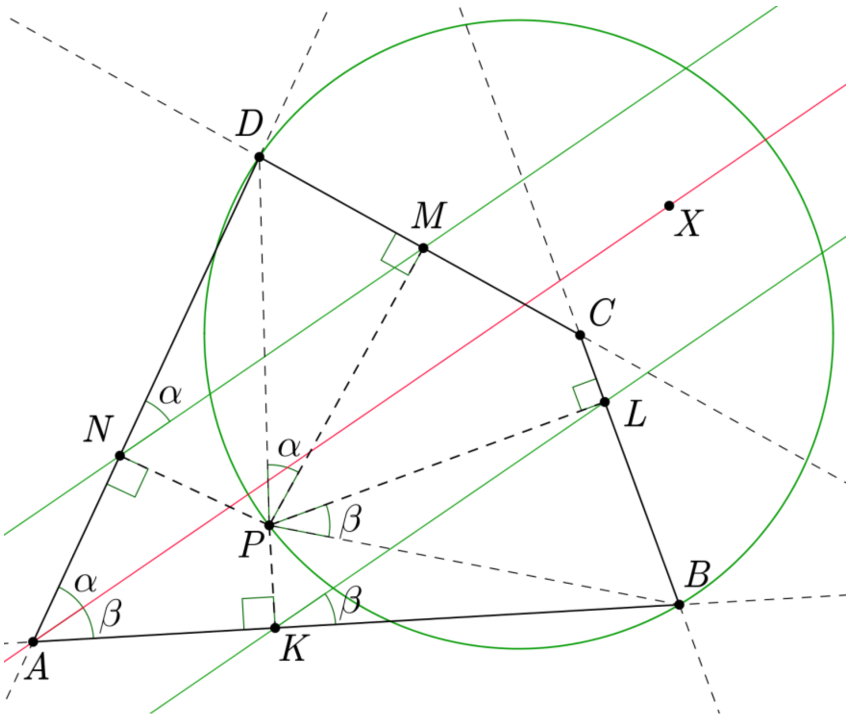

*Obrázek 23 Program spočítal, že hledaným řešením je jistá kružnice. Na obrázku je také příkaz, který k určení množiny vedl.*

Dva body jsou na určení kružnice málo, navíc řešitel neznal důvody, proč by hledanou množinou měla být kružnice. Co určuje kružnici, která prochází dvěma body? Např. to, že ze všech bodů kružnice je daná tětiva vidět pod stejným *orientovaným* úhlem. To znamená, že pokud zdůvodníme, že pro libovolný $P$ platí $\sphericalangle DPB = \mathrm{konstanta},$ zdůvodníme tím současně, že hledanou množinou je kružnice. Pokud se nám podaří tento úhel spočítat, můžeme pak kružnici jednoduše zkonstruovat. ***Na základě konstruktivní argumentace*** (abdukce) dospěl řešitel k následujícímu tvrzení.

*2. tvrzení:* Orientovaný úhel $DPB$ je konstantní.

*Zdůvodnění 2. tvrzení:*

Ačkoli k přesnému důkazu tvrzení by bylo nutné uvažovat orientované úhly, zde s nimi počítat nebudeme, jejich aplikace ale není obtížná. Budeme uvažovat nejjednodušší případ, kdy se bod $P$ nachází uvnitř konvexního čtyřúhelníku, jako tomu je na obr. 24.




*Obrázek 24 1. Způsob řešení problému*

Nechť bod $P$ splňuje zadání úlohy. Veďme bodem $A$ přímku $AX$, která je rovnoběžná s přímkami $NM$ a $KL$. Pak platí rovnosti:

$$\alpha = \sphericalangle DNM = \sphericalangle DAX$$

$$\beta = \sphericalangle BKL = \sphericalangle BAX$$

Proto

$$\alpha + \beta = \sphericalangle DAX + \sphericalangle BAX = \sphericalangle DAB = \text{konstanta}$$

Čtyřúhelník $DNPM$ je tětivový (protější úhly jsou pravé), z věty o obvodových úhlech tedy plyne $\alpha = \sphericalangle DNM = \sphericalangle DPM$. Analogicky dospějeme k rovnosti $\beta = \sphericalangle BKL = \sphericalangle BPL$. Nakonec spočítáme velikost úhlu $DPB$:

$$\begin{aligned}\sphericalangle DPB &= \sphericalangle DPM + \sphericalangle MPL + \sphericalangle BPL = \alpha + (180° - \sphericalangle DCB) + \beta \\ &= 180° + \sphericalangle DAB - \sphericalangle DCB\end{aligned}$$

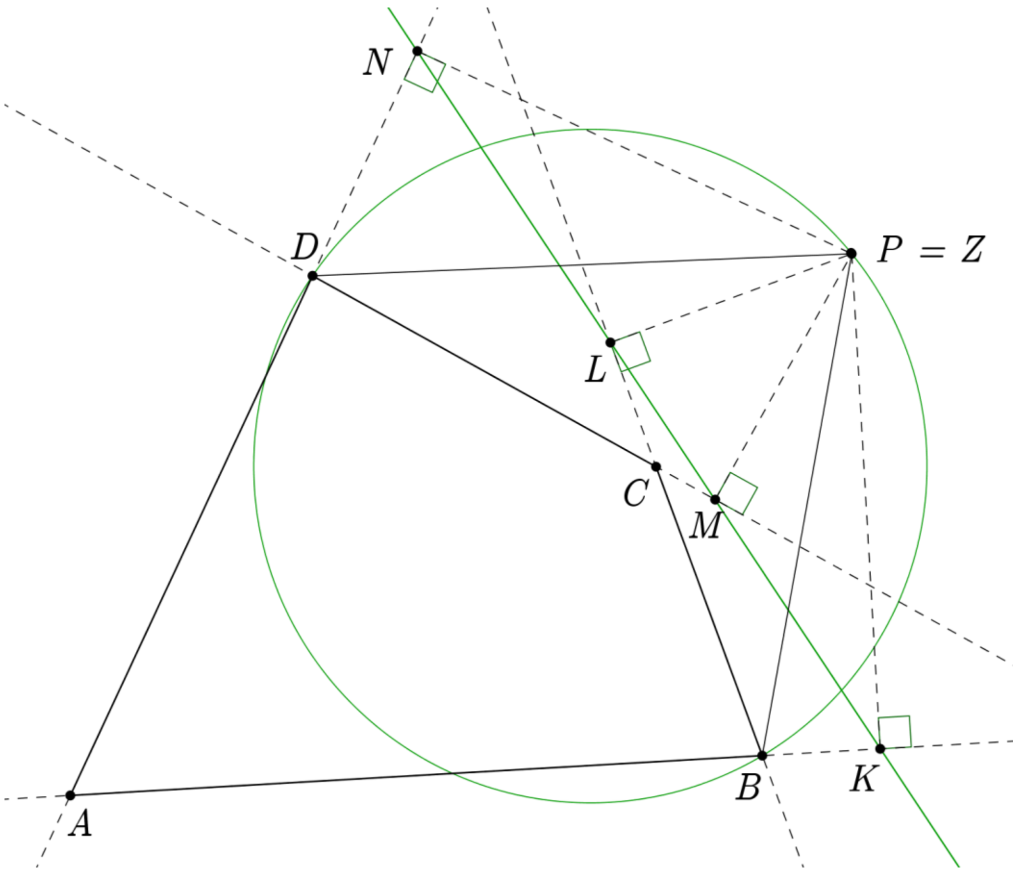
Výraz na levé straně je konstanta, protože závisí pouze na protějších úhlech čtyřúhelníku. Důkaz 2. tvrzení a celého problému je tím kompletní.

*<u>2. způsob řešení</u>*

Výše uvedené řešení je z určitého úhlu pohledu neuspokojivé: Nedá se aplikovat na obecnější problém, který byl řešen v článku (Blažek, Pech, 2021). (Znění tohoto obecného problému uvádět nebudeme). Hledáme proto jiné řešení.

Autor si „hrál“ s řešením, které mu poskytl software, přičemž zpozoroval zajímavou věc: V určitém bodě $Z$ hledané kružnice se přímky $MN$ a $KL$ stanou identickými: Jinými slovy, paty kolmic z bodu $Z$ na strany čtyřúhelníka leží v přímce. *Na základě vizuálního vnímání dynamické konstrukce* dospěl k následujícímu faktu (obr. 25).

*1. tvrzení:* Hledaná kružnice prochází bodem $Z$, pro který platí, že paty kolmic, spuštěné z tohoto bodu na strany čtyřúhelníku, leží v přímce. Kružnice je tedy jednoznačně určena třemi body $B$, $D$ a $Z$




*Obrázek 25 Kružnice je určena třemi význačnými body: D, B a Z*

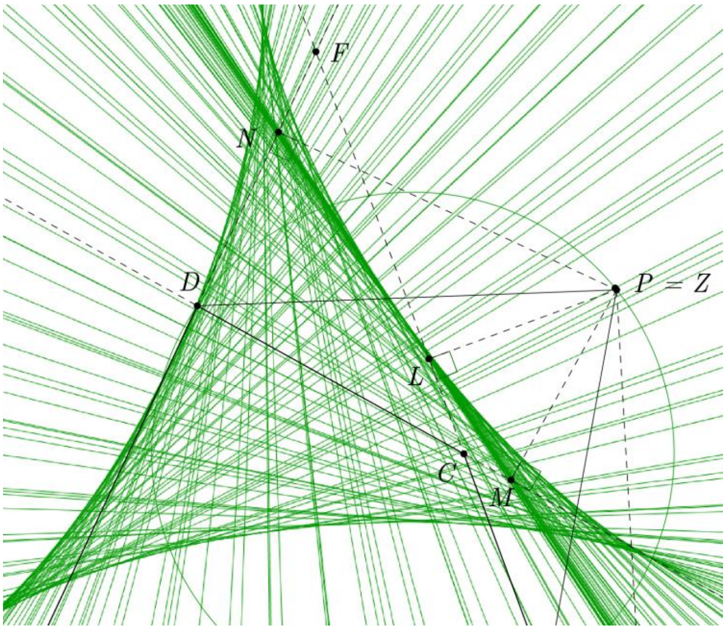
Přímým důsledkem předchozího tvrzení je, že pokud dokážeme sestrojit bod $Z$, dokážeme sestrojit i hledanou kružnici. Před řešitelem vyvstaly dva úkoly: 1) Sestrojit bod $Z$. 2) Zdůvodnit, proč kružnice procházející body $B$, $D$ a $Z$ vyhovuje zadání úlohy.

Řešení prvního úkolu najdeme v literatuře (např. Nathan 2007; o této problematice se však pojednává na mnoha webových stránkách). Bod $Z$ je takzvaný Miquelův bod čtyřúhelníku $ABCD$. Každý čtyřúhelník, jehož (alespoň jedna) dvojice protějších stran je různoběžná, má právě jeden Miquelův bod, jehož konstrukci lze zdůvodnit na základě Simsonovy-Wallaceovy věty, které se blíže věnujeme v příloze. Konstrukce je následující:

Označme $E$ průsečík přímek $AB$ a $DC$ a $F$ průsečík přímek $CB$ a $AD$. Pak všechny kružnice $(BCE)$, $(ADE)$, $(DCF)$ a $(ABF)$ procházejí bodem $Z$. Stačí tedy sestrojit dvě z těchto kružnic. Jejich druhý průsečík (jiný než $A, B, C, D, E, F$) je bod $Z$.

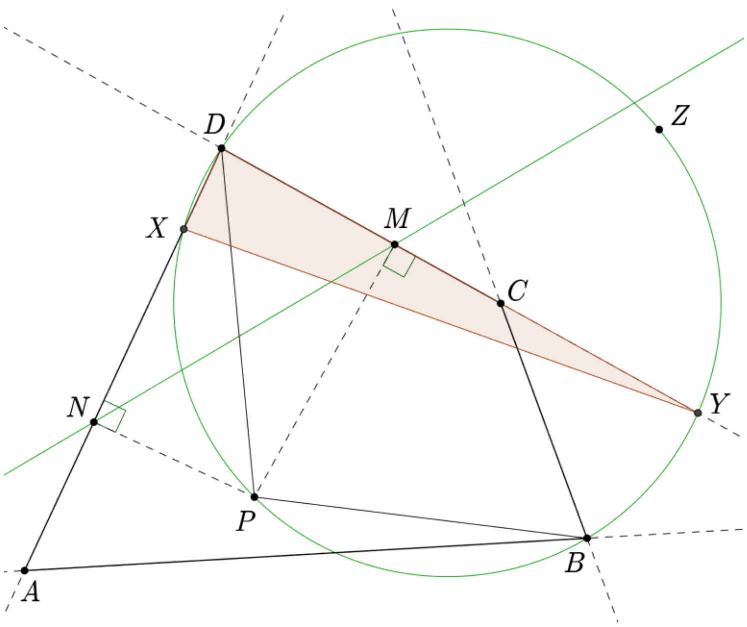
Zbývá tedy zdůvodnit, proč libovolný bod $P$ kružnice $(BDZ)$ splňuje zadání úlohy. Řešitel si s konstrukcí zpočátku hrál bez jakéhokoliv plánu, až dospěl k následujícímu experimentu. (K porozumění následujícího textu jsou nutné pokročilejší znalosti euklidovské geometrie, které lze nalézt např. v knize (Ostermann, Wanner, 2012).)

*Experiment (otevřený, kategorie „Náhodný experiment"):* Řešitel zapnul stopu přímky $MN$ a pohyboval bodem $P$ po kružnici $(BDZ)$. Zjistil, že stopa této přímky tvoří Steinerův deltoid (obr. 26). Pro ten je typické, že ho tvoří také stopa Simsonovy přímky. Vzniká proto otázka: Je možné nahlížet na přímku $MN$ jako na Simsonovu přímku nějakého trojúhelníku?




*Obrázek 26 Stopa přímky $MN$ tvoří Steinerův deltoid*

Řešitel zjistil, že tomu tak skutečně je: Přímka $MN$ je Simsonova přímka trojúhelníku $DXY$, kde $X$ je druhý průsečík kružnice $(BDZ)$ s přímkou $DA$ a $Y$ druhý průsečík této kružnice s přímkou $DC$ (obr. 27).



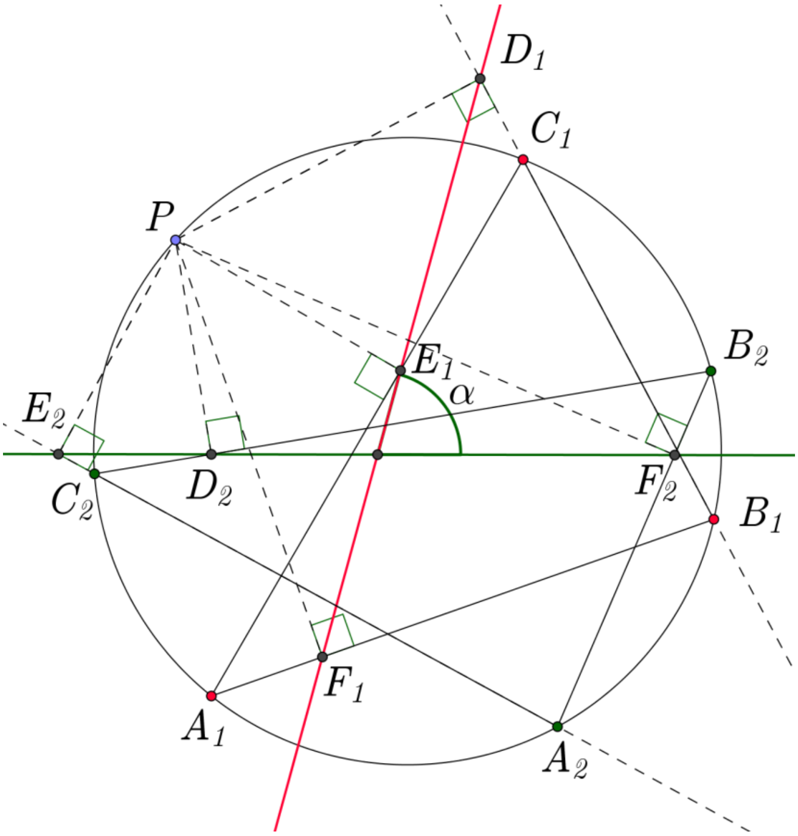

*Obrázek 27 Přímka $MN$ je Simsonova přímka trojúhelníku $DXY$*

Analogickou úvahu lze zopakovat pro přímku $KL$. S pomocí výše uvedeného experimentu tak dospíváme k následujícímu tvrzení.

*2. tvrzení:* Přímka $MN$ je Simsonovou přímkou jistého trojúhelníku, vepsaného do kružnice $(BDZ)$. Stejně tak, přímka $KL$ je Simsonovou přímkou (jiného) trojúhelníku, vepsaného do kružnice $(BDZ)$.

Teď už měl řešitel řešení na dosah, neboť si připomněl následující lemma (Nathan, 2007).

*Lemma:* Simsonovy přímky dvou trojúhelníků vepsaných do stejné kružnice, které příslušejí stejnému bodu $P$ této kružnice, svírají konstantní úhel, který nezávisí na volbě bodu $P$ na kružnici (obr. 28).




*Obrázek 28 Simsonova přímka $D_1E_1F_1$ svírá se Simsonovou přímkou $D_2E_2F_2$ stále stejný úhel $\alpha$, bez ohledu na to, jaký bod $P$ kružnice opsané dvěma daným trojúhelníkům zvolíme.*

Stačí proto pouze zdůvodnit, že existuje bod na kružnici $(BDZ)$, pro které jsou (Simsonovy) přímky $MN$ a $KL$ rovnoběžné. Jaký bod zvolit?

***Přesné zdůvodnění 1. tvrzení:***

Průsečíky kružnice $(BDZ)$ spolu se stranami čtyřúhelníku $ABCD$ tvoří dva trojúhelníky: $DXY$ (obr. 27) a $BX'Y'$ (zkonstruujeme jej stejným způsobem jako $\triangle DXY$). $MN$ je Simsonova přímka prvního trojúhelníku, $KL$ je Simsonova přímka druhého trojúhelníku. Pokud zvolíme $P = Z$, jsou tyto přímky totožné a tedy i rovnoběžné. V důsledku Lemmatu jsou rovnoběžné pro každý bod $P \in (BDZ)$.

Není těžké ověřit, že žádný jiný bod roviny úloze nevyhovuje. Tento důkaz zde uvádět nebudeme.

# 6 Výzkum

Kapitola se skládá ze tří sekcí. První sekce (*Metodologie výzkumu*) uvádí na obecné úrovni metodu, jakou byla získána data, vztahující se k výzkumným otázkám, a způsob jejich vyhodnocení. Druhá sekce (*Data výzkumu: první tři experimenty*) popisuje data, která byla získána ve vztahu k výzkumným otázkám. Podobný obsah má i následující sekce (*Data výzkumu: čtvrtý experiment*), prezentující výsledky posledního sběru dat. Ačkoli data v tomto experimentu jsou kvalitativně stejná jako v těch přecházejících, způsob jejich sběru byl jiný: 1) Byla získána pozorováním a rozhovorem, zatímco v předchozích experimentech byly zdrojem dat z velké části záznamy na papíře a dotazník. 2) Jelikož studenti byli pozorováni, bylo možno upravit a rozšířit jevy, které byly sledovány ve vztahu k výzkumným otázkám. V poslední sekci (*Interpretace a shrnutí dat*) jsou shrnuty závěry ve vztahu k výzkumným otázkám.

## 6.1 Metodologie výzkumu

V této sekci uvádíme obecnou podobu výzkumu, problémy, které studenti řešili a způsob vyhodnocení dat ve vztahu k výzkumným otázkám. Je rozdělena do čtyř částí: Objekt výzkumu, Obecná podoba výzkumu, Způsob vyhodnocení dat, Řešené problémy.

### 6.1.1 Objekt výzkumu

Výzkumný problém, kterým se tato práce zabývá, totiž jak výrazná je pomoc softwaru DGE při hledání důkazů v geometrii, nelze oddělit od výběru studentů, od nichž data získáváme. Tito studenti by na jedné straně neměli být vyspělými matematiky, neboť pak by nejspíše byli schopni dokončit důkaz bez pomoci softwaru, na druhou stranu nemohou ani být úplnými začátečníky.

Proto jsme zvolili studenty učitelství matematiky pro 2. stupeň základních škol, konkrétně z 2. a 3. ročníku bakalářského studia a 1. ročníku magisterského. Ti s obtížnějšími problémy nemají zkušenosti, takže software by pro ně mohl být výrazným přínosem. Zároveň to nejsou začátečníci, neboť se ve výuce setkali s potřebnými matematickými teorémy, jejichž znalost je nutnou podmínkou pro dosažení validních důkazů. Navíc jsou dobře obeznámeni s potřebnými nástroji DGE softwaru (GeoGebry), takže se před experimentem nemusí vyhradit čas na instrumentální genezi (sekce 3.1).

Studenti, kteří byli objektem výzkumu, splňovali následující kritéria:

- Studovali učitelství matematiky alespoň druhým rokem (a někteří čtvrtým)
- Setkali se při svém studiu s potřebnými teorémy.
- Tyto teorémy byly před výzkumem zopakovány.
- Z hlediska známek patřili k průměru až nadprůměru v ročníku (zejména 4. experimentu se účastnili studenti, kteří ve svém ročníku patřili k nejlepším)

### 6.1.2 Obecná podoba výzkumu

Výzkum proběhl celkem sedmkrát, pokaždé trval od 90 minut do dvou hodin. Studenti řešili obtížnější geometrické úlohy nejdříve s papírem a tužkou a – pokud nebyli úspěšní – mohli při řešení používat GeoGebru. Některá setkání byla identická jak podmínkami (čímž máme na mysli způsob sběru dat), tak úlohami. Proto máme pouze čtyři různé experimenty, které se v určitých ohledech lišily. V prvních třech experimentech byla všechna data získaná v psané podobě (dotazníky a záznam práce studenta na jeho papíře). V posledním experimentu, který se skládal ze tří různých setkání se studenty, byla snímána obrazovka počítače každého studenta a po každé experimentální fázi s ním následoval rozhovor. Fáze řešení každého problému byly následující:

*Prefáze*: Zopakování základních teorémů formou testu a jeho společné opravy

*1. fáze* (20 min): Řešení problému pouze s papírem a tužkou

*Dotazník*: Zda student vyřešil problém, zda přišel na nějaké domněnky, vztahující se k řešení, případně jak na tyto domněnky přišel.

*2. fáze* (20 až 40 min): Řešení problému s podporou GeoGebry pro ty, co nevyřešili problém v předchozí fázi.

*Dotazník*: Dotazy, zda student vyřešil problém, zda přišel na nějaké domněnky, vztahující se k řešení, případně jak na tyto domněnky přišel (viz text dále).

*3. fáze* (40 až 50 min): Řešení problému s nápovědou. Studentům byla prozrazena všechna fakta („hypotézy“), která s řešením souvisí.

*4. fáze* (50 až 60 min): Studentům jsou prozrazeny teorémy, které se vztahují k řešení.

Druhý dotazník obsahoval následující otázky:

1) Vyřešil/a jste problém (logicky zdůvodnil/a)? Pokud ano, řešení ještě jednou napište.
2) Objevil/a jste nějaké hypotézy, o kterých si myslíte, že souvisejí s řešením? Jestliže ano, jaké?
3) Objevil/a jste fakt A? [8]
4) Objevil/a jste fakt B?
5) Jak jste tyto hypotézy objevil/a? Příklady:
    - Vedla mě k ní úvaha. (Jaká?)
    - Objevil/a jsem ji na základě vizuálního vnímání.
    - Náhodně jsem měřil/a úhly geometrické konstrukce.

První dotazník byl podobný, ale neobsahoval třetí a čtvrtou otázku, u páté otázky nebyly zmíněny konkrétní příklady.

[8] Každá úloha obsahovala dvě tzv. „netriviální fakta“, která bezprostředně souvisela s řešením problému. Pod obecným označením „fakt A“, „fakt B“ si čtenář může představit konkrétní tvrzení, jako „úhel MPS je pravý“ nebo „čtyřúhelníku lze opsat kružnici“. Pojem „netriviální fakt“ je vysvětlen dále v textu.

U každého předloženého problému se fáze 1 až 4 opakovaly. Ne každý výzkumný experiment měl ale tuto podobu. Například první experiment se skládal pouze z prvních dvou fází, zbylé dvě se objevily až v těch následujících. Poslední experiment se lišil v tom, že ke sběru dat nebyl použit dotazník, ale rozhovor. Vzhledem k těmto odlišnostem proto u každého experimentu explicitně uvedeme, jakým způsobem probíhal.

Většina studentů řešila pouze dva tzv. „základní problémy“, pouze dva studenti řešili při posledním experimentu další dva „doplňkové“ problémy. Jejich znění uvedeme v další části této sekce.

Jelikož znalosti jsou nutnou podmínkou pro to, aby mohl student problém vyřešit, byl před každým výzkumným testem vyhrazen čas na zopakování některých teorémů (*prefáze*). Aby nedošlo k příliš velkému ulehčení úkolu, záměrně výzkumník připomněl více teorémů, než bylo k řešení potřeba. Byly to:

- Stejnolehlost (*)
- Mocnost bodu ke kružnici (*)
- Podmínky rovnoběžnosti přímek (*)
- Nutná a postačující podmínka pro to, aby byl čtyřúhelník tětivový
- Thaletova věta
- Věta o obvodovém a středovém úhlu

Věty označené (*) studenti nepotřebovali, byly uvedeny z důvodu zmíněného výše. Zdůrazněme ještě, že se pro studenty jednalo pouze o opakování, nikoli o něco nového.

Ve všech experimentech byly sledovány následující charakteristiky:

1. Zda student byl schopen problém vyřešit s podporou DGE (případně bez podpory softwaru).
2. Zda student objevil s pomocí DGE relevantní fakta.
3. Pokud je objevil, jakým způsobem na ně přišel (ve vztahu k UTM).
4. Zda byl student schopen problém vyřešit s nápovědou. Pokud ano, s jakou (3. fáze – prozrazení relevantních hypotéz, 4. fáze – explicitní zmínění teorémů, vztahujících se k řešení).

### 6.1.3 Způsob vyhodnocení dat

V každé z uvedených fází byly sledovány určité charakteristiky (např. zda student problém vyřešil nebo ne), které sloužily k zodpovězení výzkumných otázek. Konkrétně otázka

I.a. Napomáhá software DGE k objevu relevantních faktů, vztahující se k řešení problému, ve srovnání s prostředím papír - tužka?

byla zodpovězena dvěma páry údajů. První pár údajů představoval počet studentů, kteří byli schopni nalézt relevantní hypotézu bez pomoci softwaru v první fázi a počet studentů, kteří byli schopni nalézt hypotézu s pomocí softwaru ve druhé fázi. Druhý pár údajů vycházel z celkového počtu hypotéz objevených v první fázi a celkového počtu hypotéz objevených v druhé fázi.

Ještě připomeňme, že studenti řešili daný problém „klasicky“ a teprve poté s podporou softwaru. Takové uspořádání má vzhledem k vyhodnocení dat jednu výhodu a jednu nevýhodu.

Nevýhoda spočívá v tom, že získaná data, příslušející různým fázím (bez softwaru, se softwarem) nejsou zcela „disjunktní“ – nelze vyloučit, že to, co student objeví s podporou softwaru, by objevil i samostatně, a naopak. Rozeberme tuto problematiku detailně:

- Může nám například vyjít, že počet hypotéz, které studenti nalezli v prostředí papír-tužka, je vyšší než počet hypotéz, které nalezli s podporou DGE. Tak bychom mohli dojít k chybnému závěru, že prostředí papír-tužka je pro tvorbu hypotéz lepší než práce s asistencí softwaru. Proč je tento závěr chybný, vysvětluje uspořádání experimentu: Studenti nejdříve používali pouze papír a tužku a teprve poté mohli používat software. Pokud by pracovali se softwarem od začátku, je vysoká pravděpodobnost, že by našli ty samé hypotézy. *Tento jev v rámci uspořádání experimentu zvýhodňuje prostředí papír-tužka.*
- Studenti se dostanou k práci se softwarem později. V získaném čase mohou hlouběji proniknout do jádra problému, což může znamenat vyšší pravděpodobnost objevu hypotézy. Jinak řečeno, nelze vyloučit, že to, co student objeví s pomocí softwaru, by objevil i bez jeho asistence, měl-li by k dispozici více času. *Tento jev v rámci uspořádání experimentu zvýhodňuje prostředí s podporou DGE.*

Důležitost druhého jevu však není zdaleka tak velká jako důležitost jevu prvního. Důvodem je, že úlohy, které studenti řešili, nebyly až tak složité – zkušený člověk by je pravděpodobně vyřešil během několika minut – přesto měli na nalezení jejich řešení v každé fázi značný čas (20 minut). Je vysoká pravděpodobnost, že pokud student nedostal jediný konkrétní nápad během tohoto intervalu, nacházel se ve slepé uličce a za dalších 20 minut by se neposunul dál. Proto platí, že uspořádání experimentu výrazně zvýhodňuje fázi papír-tužka před fází, kdy mohli studenti využívat software.

Výhodou uspořádání výzkumu je, že v tradičně pojatém experimentu s kontrolní skupinou (prostředí papír tužka) a experimentální skupinou (podpora softwaru) by bylo nutné zajistit, aby studenti měli stejný výchozí potenciál, do něhož se řadí jak úroveň jejich matematických znalostí a zkušeností, tak i intelekt. To by však bylo vzhledem k počtu studentů, který byl ve výzkumu k dispozici, téměř nemožné. Stačilo by zařazení nejschopnějšího studenta do té či oné skupiny, aby došlo k vychýlení výsledků. V použitém uspořádání takové vychýlení nemůže nastat, neboť je se všemi studenty zacházeno stejně.

V počtu studentů, kteří (ne)objevili relevantní fakta, je několik z nich počítáno více než jednou – jsou to ti studenti, kteří řešili alespoň dvě úlohy. (Jeden student řešil dokonce čtyři úlohy.) Proto by se mělo spíše hovořit o „počtu případů“ nebo o „počtu jevů“. Jelikož je cílem výzkumné otázky srovnat různá prostředí a míru pomoci softwaru a jelikož se s každým studentem v tomto ohledu jednalo stejně, budeme situaci, kdy jeden student řešil dva problémy, interpretovat jako dva nezávislé případy.

Otázka I.b.

I.b. Napomáhá použití softwaru DGE tvorbě deduktivního zdůvodnění řešení ve srovnání s prostředím papír - tužka?

byla zodpovězena podobně srovnáním počtu studentů, kteří vyřešili problém samostatně (1. fáze) a počtu studentů, kteří vyřešili problém s DGE, ale bez nápovědy (2. fáze). Opět je nutné uvést poznámky, které se týkaly i předchozí otázky.

Uspořádání experimentu zvýhodňuje prostředí papír-tužka: Studenti, kteří vyřešili problém bez softwaru, by ho vyřešili i se softwarem. Opačné tvrzení, totiž že studenti, kteří vyřešili problém s pomocí softwaru, by ho vyřešili i bez softwaru, je mnohem méně pravděpodobné.

Co se týká pojmu „počet studentů“, i zde by bylo možné hovořit o „počtech případů“, protože ne každý student řešil pouze jednu úlohu a v kategoriích vyřešil/nevyřešil je zaznamenán tolikrát, kolik úloh řešil (nejčastěji dvakrát). Opět budeme pokus o řešení každé úlohy chápat jako nezávislý bez ohledu na to, zda student řešil i jiný problém.

Zodpovězení druhé výzkumné otázky:

II Jaké jsou příčiny selhání studentů při hledání důkazu, proč pomoc softwaru není v některých případech dostatečná?

závisí na tom, ve které ze čtyř fází výzkumu student (ne)dokončil své řešení. Za tímto účelem byli studenti rozděleni do kategorií, které odpovídají fázím, ve kterých důkaz dokončili. Za úspěšného jsme pokládali takového studenta, který byl zařazen do první nebo druhé kategorie. Je zřejmé, že jednotlivé kategorie hodně vypovídají o problémech studenta. Například pokud student nevyřešil problém ani ve čtvrté fázi (což ho řadí do 5. kategorie), lze předpokládat, že není schopen aplikovat matematické teorémy a vytvářet deduktivní důkazy. Příčiny neúspěchu studentů, kteří důkaz dokončili s nějakou pomocí (třetí a čtvrtá kategorie), nelze tak jednoznačné stanovit.

Třetí výzkumná otázka je složena ze tří podotázek. Dvě z nich byly zodpovězeny na základě dat, získaných z výzkumných testů:

III.b. Jaká je četnost výskytu jednotlivých způsobů objevování? Konkrétně, jak výrazně se na objevu hypotézy podílí řešitelovy znalosti a logika?

III.c. Existuje souvislost mezi způsobem objevu relevantních faktů a úspěšností při řešení problému?

V rámci UTM jsme vymezili pět způsobů, které mohou vést v prostředí dynamické geometrie k objevu hypotézy. Konkrétně jde o tyto způsoby:

1) Konstruktivní argumentace
2) Vizuálním vnímání dynamické konstrukce
3) Konstruktivní experiment
4) Heuristický experiment
5) Náhodný experiment
6) Neobjevená hypotéza (tato kategorie slouží pouze k zodpovězení otázky, v UTM nebyla)

Výše uvedených pět způsobů objevu hypotézy rozdělíme ještě do dvou obecnějších kategorií: První nazveme *Konstruktivní objev*, druhou *Náhodný objev*. První kategorie obsahuje všechny případy, kdy se na objevu hypotézy podílí řešitelův odhad, logika a matematické znalosti. Skládá se z těchto případů:

- Konstruktivní argumentace
- Konstruktivní experiment
- Heuristický experiment

Objevu hypotézy v tomto prvním případě předchází nějaká argumentace nebo záměr řešitele. Nástroje softwaru nejsou používány bez plánu.

Druhá kategorie obsahuje případy, kdy se na objevu podílí pouze nástroje softwaru a náhoda, řešitel nesleduje žádný konkrétní záměr. *Náhodný objev* se skládá z těchto případů:

- Vizuálním vnímání dynamické konstrukce
- Náhodný experiment

Otázku III.b. zodpovíme tak, že každou hypotézu zařadíme do jedné ze tří kategorií podle toho, jakým způsobem byla objevena. Jde o kategorie *Konstruktivní objev*, *Náhodný objev* a *Neobjevená fakta*. Poslední z těchto kategorií označuje případ, kdy na hypotézu student vůbec nepřišel.

Porovnání počtu případů ve třetí kategorie s počty případů v prvních dvou ukáže na náročnost objevu a přístupnost formulace hypotézy, vztahující se k řešení. Porovnání prvních dvou kategorií mezi sebou ukáže, jaký způsob objevu hypotéz je častější – zda objev, kterému předchází argumentace a konkrétní záměr, nebo zda hypotézy studenti objevují spíše náhodně – buď vizuálním vnímáním, nebo s pomocí nástrojů softwaru, které používají bez vědomého záměru.

Druhá část výzkumné otázky bude řešena podobně. Hypotézy budeme opět řadit do třech výše uvedených kategorií, tentokrát ale s ohledem na to, zda student problém vyřešil, ať samostatně nebo s podporou softwaru (skupina *V*), nebo nevyřešil, případně vyřešil až s nápovědou (skupina *N*[9]). Poté vyplníme následující tabulku:

[9] Je samozřejmé, že ti, kteří problém samostatně vyřešili, museli přijít na všechna fakta, související s řešením. Neplatí však nutně, že studenti, kteří problém nevyřešili, na tato fakta nepřišli. Přijít na relevantní hypotézy a na jejich základě vytvořit důkaz jsou dvě odlišné věci.

| | *Počet konstruktivně objevených fakt* | *Počet náhodně objevených fakt* | *Počet neobjevená fakt* |
|---|---|---|---|
| *Skupina V* | A | B | 0 |
| *Skupina N* | D | E | F |

Pokud budou počty A a B v tabulce zhruba stejné, znamená to, že studenti, kteří problém vyřešili, používají k objevu relevantních faktů se stejnou mírou pravděpodobnosti jak konstruktivní přístup, tak přístup, který spočívá na náhodném použití nástrojů softwaru. Pokud jedno z těchto čísel bude významně vyšší, bude to znamenat, že jeden ze způsobů je v praxi studentů preferován.

Stejným způsobem budeme zkoumat počty D a E u skupiny $N$. Získané rozdíly mezi skupinami $V$ a $N$ budou sloužit k zodpovězení otázky III. c.

### 6.1.4 Problémy, použité ve výzkumu

Úlohy bylo nutné vybrat tak, aby byly přizpůsobené výzkumnému problému, tj. aby umožňovaly porovnat práci v prostředí dynamické geometrie s prací v klasickém prostředí. Ne každý problém je vhodný, neboť ne každý umožňuje efektivní využití softwaru. Odborná literatura se touto otázkou zabývala, ale dospěla jen k obecným poznatkům. Zmiňme některé závěry článků (Fahlgren M. Brunstrom M. ,2014) a (Leung, 2011):

- Problém by měl být přístupný experimentálnímu zkoumání v softwaru. Měl by umožňovat aktivity jako průzkum problému, formulaci domněnek, verifikaci, vysvětlení a zdůvodnění objevených vlastností.
- Ideální je, když lze při průzkumu problému využít funkci tahání objektů. Jednak lze tento nástroj snadno a efektivně používat a jednak má potenciál překlenout propast mezi neformálními argumenty (založenými na empirii) a logickými argumenty, které lze použít v matematickém zdůvodnění.
- Problémy by neměly začínat formulí „Dokažte, že…“. Měly by to být buď otevřené problémy, nebo by jejich cílem mělo být něco najít, určit apod.
- Ideální jsou problémy, které umožňují „sémantický důkaz“, tedy důkaz, který je veden konkrétními příklady a modely.
- Nejvhodnější jsou příklady na určení množiny bodů, neboť ty obvykle splňují výše uvedená kritéria.

Problémy, které byly vybrány, většinu výše uvedených kritérií splňovaly: Byly to úlohy na množiny bodů, jejichž zadání zpravidla začíná formulí „Určete a zdůvodněte množinu bodů…“ (nikoli „Dokažte, že …“), byly přístupné experimentálnímu zkoumání v prostředí softwaru a při jejich řešení šlo efektivně využít funkci tahání. Přesto tu bylo několik odlišností: Ačkoli se v zadání problémů slovo důkaz nevyskytovalo, jeho dosažení bylo důležitým kritériem, které bylo při výzkumu sledováno. Také ne na všechny domněnky a hypotézy bylo možné přijít funkcí tahání objektů.

K správnému zdůvodnění řešení problémů bylo třeba vzít v úvahu určitá fakta, která nebyla explicitně zmíněna v zadání a jejichž relevanci musel řešitel odhalit. Tato fakta označujeme jako **netriviální.** Pouze (ne)objevení těchto faktů sloužilo k zodpovězení první a třetí výzkumné otázky. **Triviálním** faktem pak bylo určení hledané množiny. Důvodem je, že ke zjištění této množiny stačilo pouze použít nástroje softwaru jako je nástroj Stopa nebo MnozinaBodu, přičemž souvislost tohoto faktu s řešením problému byla zřejmá již ze zadání. Pouze u netriviálních faktů musel řešitel mobilizovat určité rozhodovací procesy, zjištění triviálních faktů bylo bráno jako samozřejmost.

Pokud bychom prezentovali řešení v duchu Toulminova modelu, řešení se skládalo ze třech deduktivních kroků (tvrzení), z nichž ten poslední byl závěr (zdůvodnění, proč je řešením jistá množina).

Většina studentů řešila pouze dva „základní problémy“, kterých se týká výše uvedená charakteristika. Pouze dva studenti řešili také dva „doplňkové problémy“.

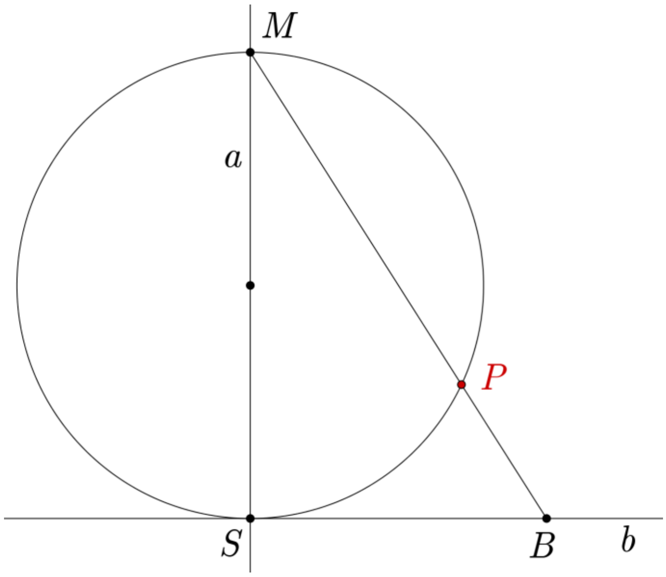
Uvedeme nyní zadání a řešení všech čtyř problémů, použitých ve výzkumu. Důraz bude kladen na první dva, neboť ty řešila většina studentů.

### Základní problémy

Cílem základních problémů bylo určit a matematicky zdůvodnit množinu bodů, která byla v zadání implicitně definována určitým způsobem konstrukce. Nejdříve uvedeme zadání problému, poté jeho idealizované řešení ve dvou formách – první ukazuje, jak by toto řešení mohlo probíhat bez softwaru, a druhá forma ilustruje možnou pomoc softwaru v průběhu řešení. Nakonec uvedeme u každého z problémů fakta („tvrzení“ nebo „hypotézy“), která bylo nutné objevit, aby byl důkaz kompletní.

*1. problém, zadání*

V rovině jsou dány dvě vzájemně kolmé přímky $a, b$. Jejich průsečík označme $S$. Na přímce $a$ zvolte bod $M$ a na přímce $b$ bod $B$. Zkonstruujte kružnici $k$ s průměrem $MS$ a dále přímku $BM$. Druhý průsečík přímky $BM$ s kružnicí $k$ označte $P$. Určete a zdůvodněte množinu bodů $P$ pokud bod $M$ „projde“ celou přímku $a$.




*Obrázek 29 Zadání 1. problému*

*Idealizované řešení 1. problému, provedené klasickým způsobem:*

Zaměříme pozornost na velikost úhlu $MPS$. Uvědomíme si, že je to úhel nad průměrem kružnice a vybavíme si Thaletův teorém.

- Tvrzení 1 (deduktivní odůvodnění): úhel $MPS$ je pravý.

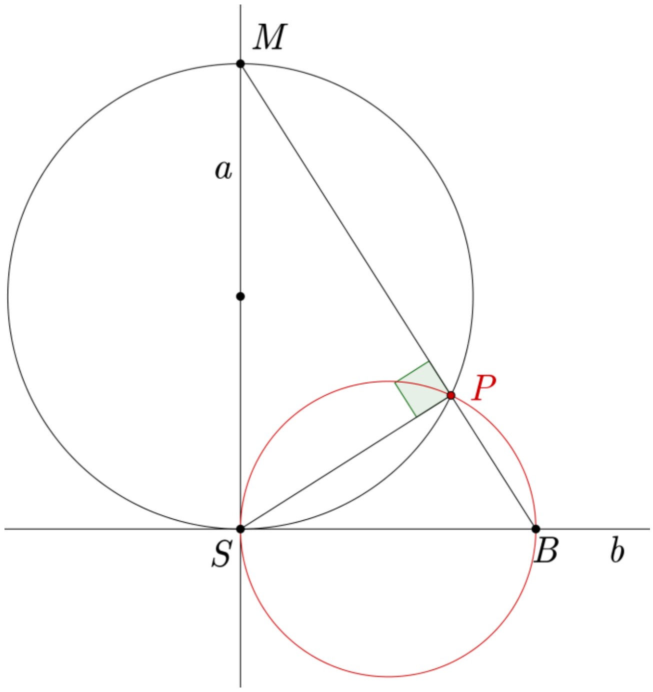
Zatím není jasné, zda má Tvrzení 1 k řešení nějaký vztah. Otázka je: má předchozí tvrzení nějaké důsledky? Odpověď: úhel $SPB$ je pravý.

- Tvrzení 2 (deduktivní odůvodnění): úhel $SPB$ je pravý.

Opět si vybavíme Thaletův teorém, tentokrát v opačném znění: Množina bodů, z nichž je úsečka vidět pod pravým úhlem, je kružnice, jejímž průměrem je daná úsečka. Docházíme k závěru:

- Tvrzení 3 (deduktivní odůvodnění): Řešením je kružnice s průměrem $SB$ s vyloučením bodu $B$ (tomuto bodu neodpovídá žádný bod $M$ na přímce $a$).

Jelikož všechna tři tvrzení máme deduktivně zdůvodněná (vychází od předpokladů k závěru), je důkaz dokončen.




*Obrázek 30 Řešení 1. problému*

<u>*Ilustrace pomoci softwaru při řešení 1. problému*</u>

Pokud student neobjeví, ať už s pomocí odhadu, intuice nebo čisté dedukce všechna tři tvrzení, problém nevyřeší. Je zde více cest, jak může GeoGebra pomoci. Každý kompetentní student, ovládající její nástroje, by měl být schopen objevit, že hledanou množinou je kružnice. Rovněž může změřit úhel $MPS$ a zjistit, že je pravý pro libovolnou polohu bodu $M$.

Uveďme idealizované řešení s podporou GeoGebry. Toto řešení budeme prezentovat v rámci modelu UTM:

Nejdříve určíme množinu bodů $P$ pomocí příkazu „Mnozina“: Bod $M$ je „mover“, bod $P$ je „tracer“. Množinou je kružnice s průměrem $BS$.

- Tvrzení 1 (Konstruktivní experiment, triviální experiment): Řešením je kružnice s průměrem $SB$.

Tento experimentální fakt pokládáme za triviální, čímž máme na mysli, že k zjištění tohoto faktu je nutná pouze znalost nástrojů softwaru, nepodílí se na něm řešitelovo rozhodování a invence.

Dále si všimneme na základě pouhého vizuálního vnímání, že úhel $SPB$ je pravý. Změříme tento úhel a dospějeme k druhému tvrzení.

- Tvrzení 2 (Fakt získaný s pomocí vizuálního vnímání): Úhel $SPB$ je pravý.

Jelikož je úhel $SPB$ je pravý, musí být pravý i úhel $MPS$, neboť jejich součet dává úhel přímý.

- Tvrzení 3 (Konstruktivní argumentace - abdukce): Úhel $MPS$ je pravý.

Vyvození třetího tvrzení je příklad abdukce: z empirického faktu vyvozujeme logické důsledky.

Nyní je na řešiteli, aby tato fakta matematicky propojil. Klíčovým faktorem pro řešení je Thaletův teorém, ale ten sám nestačí, fakta je nutné ještě uspořádat do správného logického řetězce. Například v 3. tvrzení jsme došli k závěru, ale ve skutečnosti se z tohoto tvrzení při důkazu vychází. Správná úvaha není $1.\,\text{tvrzení} \Rightarrow 3.\,\text{tvrzení}$, ale $3.\,\text{tvrzení} \Rightarrow 1.\,\text{tvrzení}$.

*Fakta (hypotézy, tvrzení) 1. problému, která souvisejí s řešením*

Jednotlivé kroky matematického zdůvodnění jsou tyto:

Tvrzení 1 :Úhel $MPS$ je pravý.
Tvrzení 2: Úhel $SPB$ je pravý.
Tvrzení 3: Řešením je kružnice s průměrem $SB$.

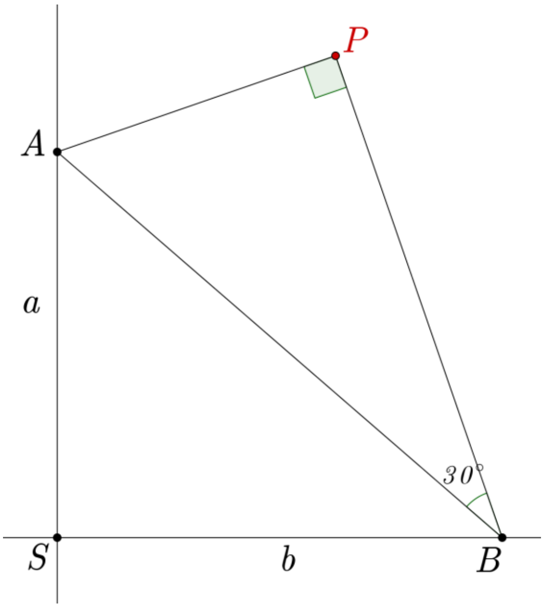
Ze tří faktů, které může GeoGebra poskytnout, jsou dvě „netriviální“ – jde o velikosti úhlů $MPS$ a $SPB$. U těchto faktů totiž není zřejmé, že souvisí s řešením úlohy. Způsob objevu těchto faktů studenty je předmětem první a třetí výzkumné otázky.

Naopak zjištění hledané množiny spadá do kategorie „triviálních faktů“.

Proto ve výzkumných testech ve druhé fázi řešení s podporou DGE kladně oceňujeme nalezení pouze netriviálních faktů, nalezení triviálního faktu pokládáme za samozřejmé.

*2. problém, zadání*

Jsou dány dvě kolmé přímky $a, b$ s průsečíkem v bodě $S$. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník $ABP$ s pravým úhlem při vrcholu $P$ a úhlem $PBA = 30°$ tak, že bod $A$ leží na přímce $a$, bod $B$ na přímce $b$ a délka úsečky $AB$ je rovna dané konstantě. Jakou množinu bodů tvoří bod $P$ za předpokladu, že se bod $A$ pohybuje po přímce $a$?




*Obrázek 31 Zadání 2. problému*

<u>*Idealizované řešení 2. problému, provedené klasickým způsobem:*</u>

Uvědomíme si, že bodům $A$, $P$, $B$ a $S$ lze opsat kružnici (Thaletova věta nebo vlastnost tětivového čtyřúhelníku).

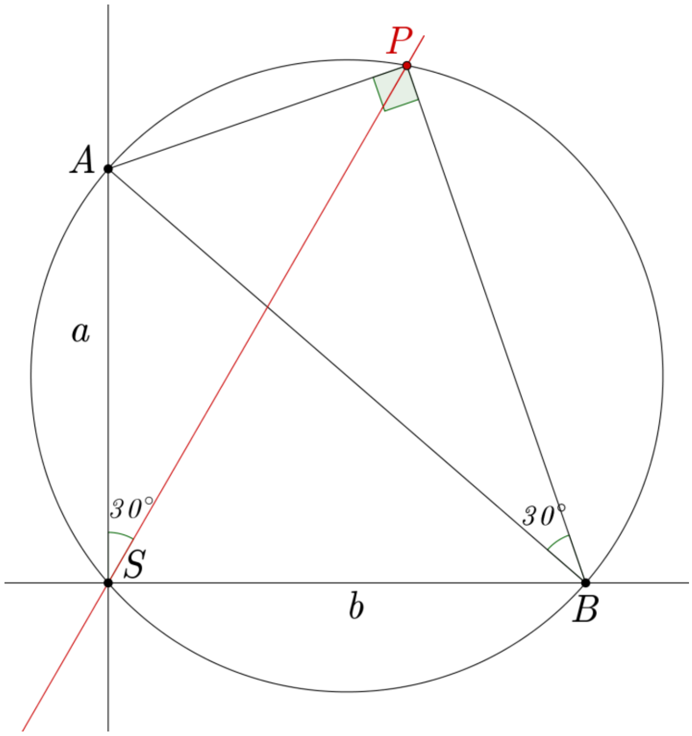
- Tvrzení 1 (deduktivní odůvodnění): body $A$, $P$, $B$, $S$ leží na kružnici.

Zkoumáme důsledky předchozího tvrzení: Podle věty o obvodovém úhlu je úhel $PBA$ roven úhlu $PSA$. Jinými slovy, úhel $PSA$ je konstantní a roven 30°.

- Tvrzení 2 (deduktivní odůvodnění): $\sphericalangle PSA = 30°$.

Bod $P$ tedy leží na přímce. Jelikož $PS < \text{průměr kružnice} = AB$, je nutnou podmínku pro polohu bodu $P$ na této přímce, aby jeho vzdálenost od bodu $S$ nepřesáhla vzdálenost $AB$. Není těžké ověřit, že tato nutná podmínka je současně i podmínkou postačující.

- Tvrzení 3 (deduktivní odůvodnění): Řešením je úsečka o délce $2|AB|$, se středem v bodě $S$, svírající s přímkou $a$ úhel 30°.




*Obrázek 32 Řešení 2. problému*

Komentář k řešení:

Tvrzení 1: body $A$, $P$, $B$, $S$ leží na kružnici.

Tento příklad je podstatně náročnější než předchozí. Pro nezkušeného řešitele může být představa, že zdůvodnění problému závisí na tom, že jistý čtyřúhelník je tětivový, překvapivá a neintuitivní.

Tvrzení 2: $\sphericalangle PSA = 30°$.

Aplikace věty o obvodových úhlech také není samozřejmostí, neboť v zadání není trojúhelník $ABP$ statický, ale dynamicky klouže po přímkách, tedy se mění kružnice samotná. Věta o obvodových úhlech patří do elementární geometrie, ale zde ji bylo třeba aplikovat v netypické situaci.

Tvrzení 3: řešením je úsečka.

Je překvapivé, že se v experimentech našly případy, kdy studenti sice dospěli k předchozímu poznatku, ale nebyli schopni udělat poslední krok, totiž odvodit z konstantní velikosti úhlu $\sphericalangle PSA$ fakt, že bod $P$ leží na přímce.

*Ilustrace pomoci softwaru při řešení 2. problému*

I zde je více cest, jak může DGE pomoci. Opět budeme idealizované řešení prezentovat v rámci modelu UTM.

Student okamžitě zjistí s pomocí funkce Mnozina, že hledanou množinou je část přímky.

- Tvrzení 1 (Konstruktivní argumentace, triviální experiment): Řešením je úsečka, procházející bodem $S$.

Dále změří velikost úhlu $\sphericalangle PSA$. Jeho důvody pro měření mohou být neurčité (modalita „wandering measuring“ viz sekce 5.2), jedná se tedy o náhodný experiment (studentovi není známa konkrétní souvislost experimentu s řešením problému) a otevřený experiment (student neví, jaký bude výstup experimentu). Po jeho provedení však zjistí, že platí rovnost $\sphericalangle PSA = \sphericalangle PBA = 30°$.

- Tvrzení 2 (náhodný experiment): Platí $\sphericalangle PSA = \sphericalangle PBA = 30°$.

Z tohoto faktu student odvodí za pomoci matematické teorie, že čtyřúhelník $APBS$ je tětivový. Tento fakt pak s pomocí softwaru verifikuje. Jedná se tedy o konstruktivní argumentaci, která vedla k objevení faktu.

- Tvrzení 3 (Konstruktivní argumentace - abdukce): Z předchozího tvrzení a věty o obvodových úhlech plyne, že čtyřúhelník $APBS$ je tětivový.

Ale i s použitím GeoGebry není samozřejmé, jak od těchto poznatků dospět k řešení úlohy. Především není zřejmé, jakou mají tyto poznatky hierarchii. Plyne z rovnosti úhlů $PSA$ a $PBA$, že je čtyřúhelník tětivový, nebo je tomu naopak? Dokončit důkaz vyžaduje ještě hodně důvtipu. Výše uvedený abduktivní postup dospěl k poznatku, jehož pozice v důkazu není závěrem, ale jde pouze o první krok směrem k dokazovanému tvrzení.

*<u>Fakta (hypotézy, tvrzení) 2. problému, která souvisejí s řešením</u>*

Jednotlivé kroky matematického zdůvodnění jsou tyto:

Tvrzení 1: Body $A$, $P$, $B$, $S$ leží na kružnici.
Tvrzení 2: $\sphericalangle PSA = \sphericalangle PBA = 30°$.
Tvrzení 3: Řešením je úsečka.

Ze tří faktů, které může GeoGebra poskytnout, jsou „netriviální“ Tvrzení 1 a Tvrzení 2. Není u nich zřejmé, že s řešením úlohy souvisí. Zjištění hledané množiny spadá do kategorie „triviálních faktů“, k jejímu určení stačí znalost nástrojů softwaru, jako je „Mnozina“ nebo „Stopa objektu“

*<u>Srovnání obtížnosti základních úloh</u>*

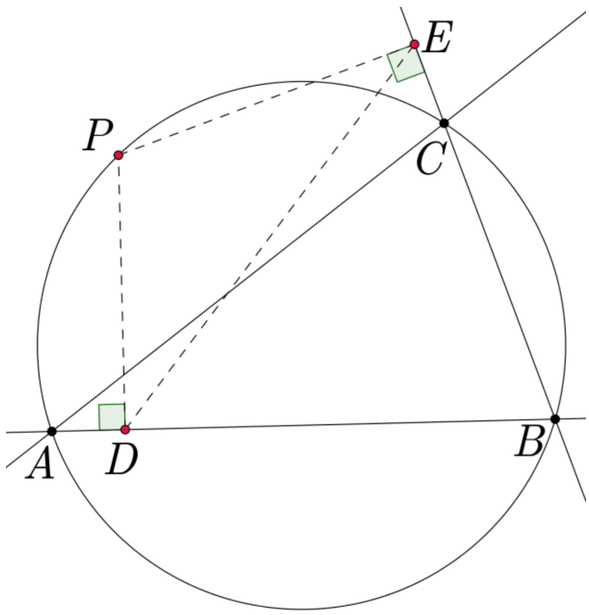
Z hlediska Toulminova modelu je potřeba třech deduktivních kroků, než dojdeme k řešení každé z obou úloh. Přesto tyto úlohy nejsou stejně obtížné. V druhé sekci druhé kapitoly (Řešení problémů a důkaz z hlediska pedagogického a psychologického) jsme rozlišovali dva druhy kognitivního spojení poznatků: „primary level“ (související poznatky jsou si bližší, používají se v nich stejné pojmy atd.) a „reflective level“ (subjekt aplikuje poznatky, které nejsou tak blízké a vytváří vzdálené asociace). K řešení první úlohy stačí znát pouze

Thaletovu větu v obou směrech, zatímco u druhé úlohy je nutné znát podmínky, kdy je čtyřúhelník tětivový, poté aplikovat větu o obvodových úhlech, a nakonec z poznatku, že jistý úhel je konstantní, vyvodit, že hledanou množinou je přímka. Tyto kroky souvisí s různými teoretickými oblastmi geometrie, proto vyřešit druhou úlohu je výrazně náročnější.

**Doplňkové problémy**

*3. problém, zadání*

Je dán obecný trojúhelník $ABC$. Na jeho opsané kružnici $k$ zvolme libovolný $P$. Označme $D$ a $E$ paty kolmic z bodu $P$ na strany $AB$ a $BC$. Uvažme kružnici $l$, opsanou trojúhelníku $PDE$. Určete, jakou množinu bodů opisuje střed $S$ kružnice $l$, pokud pohybujeme bodem $P$ po kružnici $k$.




*Obrázek 33 Zadání 3. problému*

*Idealizované řešení 3. problému, provedené klasickým způsobem:*

Nejdříve si všimneme, že body $D, E$ leží na Thaletově kružnici s průměrem $PB$. To znamená, že kružnice opsaná trojúhelníku $PDE$ prochází bodem $B$. Docházíme tak k prvnímu tvrzení:

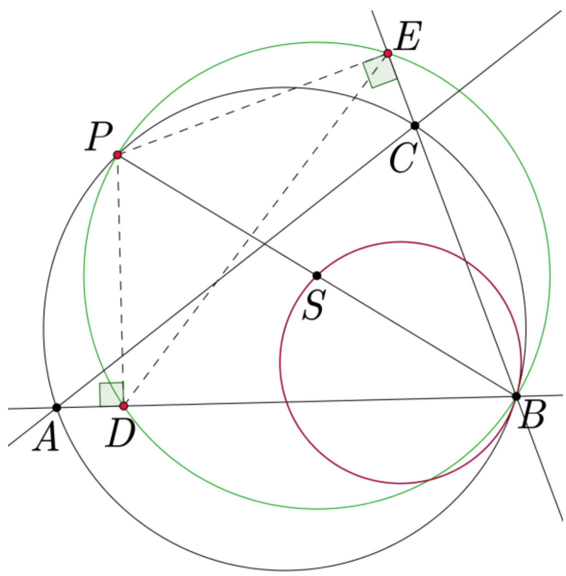
- Tvrzení 1 (deduktivní odůvodnění): Kružnice $l$ opsaná trojúhelníku $PDE$ je identická s Thaletovou kružnicí s průměrem $PB$.

Střed kružnice $l$ leží ve středu úsečky $PB$, neboť ta je průměrem této kružnice.

- Tvrzení 2 (deduktivní odůvodnění): Střed $S$ opsané kružnice $l$ je středem úsečky $PB$.

To znamená, že bod $S$ je obrazem bodu $P$ ve stejnolehlosti se středem $B$ a koeficientem ½. Ale bod $P$ leží na dané kružnici $k$, proto bod $S$ musí ležet na kružnici $m$, která je obrazem kružnice $k$ v dané stejnolehlosti.

- Tvrzení 3 (deduktivní odůvodnění): Bod $S$ leží na kružnici $m$, která je obrazem kružnice $k$ ve stejnolehlosti se středem $B$ a koeficientem ½.




*Obrázek 34 Řešení 3. problému*

<u>*Využití softwaru při řešení 3. problému*</u>

K hledané množině dospějeme okamžitě: Sestrojíme kružnici $l$, její střed $S$ a aplikujeme příkaz Mnozina. Dospějeme k triviálnímu tvrzení:

- Tvrzení 1 (konstruktivní argumentace, triviální experiment): Řešením je jistá kružnice $m$, procházející bodem $B$.

V průběhu konstrukce této množiny si všimneme, že kružnice opsaná trojúhelníku $PDE$ prochází bodem $B$. Tím se dostáváme ke druhému tvrzení:

- Tvrzení 2 (fakt, zjištěný na základě vizuálního vnímání konstrukce): Čtyřúhelník $PDBE$ je tětivový, kružnice opsaná tomuto čtyřúhelníku je kružnice $l$.

Vzniká otázka, proč je čtyřúhelník tětivový. Můžeme aplikovat Thaletův teorém, neboť úhly $PDB$ a $PEB$ jsou pravé. To znamená, že střed úsečky $PB$ je identický se středem kružnice $l$.

- Tvrzení 3 (konstruktivní argumentace - dedukce): Střed $S$ kružnice $l$ leží ve středu úsečky $PB$.

Přesné zdůvodnění (Backing):

V předchozím postupu jsme zdůvodnili, proč je čtyřúhelník tětivový, a jako důsledek jsme odvodili, že bod $S$ je středem úsečky $PB$. Zbývá zdůvodnit, proč bod $S$ vždy leží na jisté kružnici $m$. K tomuto zdůvodnění vede několik cest a i v nich může významnou roli sehrát software. Nejjednodušší cestou je však aplikace teoretických znalostí, konkrétně, že body $P$ a $S$ jsou svázány stejnolehlostí se středem $B$ a že obrazem kružnice v libovolné stejnolehlosti je opět kružnice. Proto body $S$ leží na kružnici $m$.

*Fakta (hypotézy, tvrzení) 3. problému, která souvisejí s řešením*

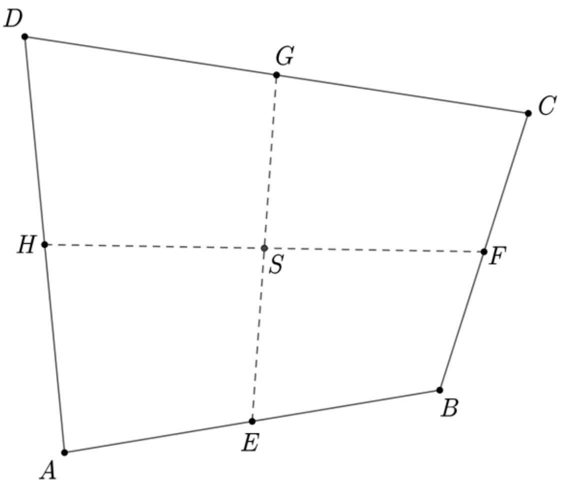
Jednotlivé kroky matematického zdůvodnění jsou tyto:

Tvrzení 1: Čtyřúhelník $DPEB$ je tětivový a kružnice jemu opsaná je $l$.
Tvrzení 2: Střed $S$ kružnice $l$ leží ve středu úsečky $PB$.
Tvrzení 3: Řešením je kružnice.

Netriviální jsou první dvě tvrzení, neboť u nich není předem zřejmé, že souvisí s řešením úlohy. Zjištění hledané množiny spadá do kategorie faktů triviálních.

*4. problém, zadání*

Mějme libovolný konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Označme středy jeho stran postupně $E, F, G, H$. Dokažte, že se úsečky $EG$ a $FH$ vzájemně půlí.




*Obrázek 35 Zadání 4. problému*

*Idealizované řešení 4. problému, provedené klasickým způsobem:*

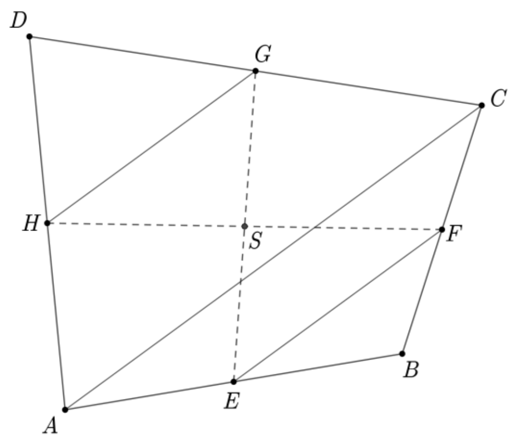
Předpokládejme pravdivost dokazovaného tvrzení a položme si otázku: Má tento předpoklad nějaké důsledky pro čtyřúhelník $EFGH$? Odpověď je jednoduchá: Čtyřúhelník musí být rovnoběžníkem.

- Tvrzení 1 (abdukce): Čtyřúhelník $EFGH$ je rovnoběžník, tzn. $EF \parallel HG$ a $EH \parallel FG$.

Jak dokázat rovnoběžnost přímek $EF \parallel GH$? Přímka $EF$ je střední úpříčkou trojúhelníku $ABC$ a je tedy rovnoběžná s přímkou $AC$. Podobně zdůvodníme, že přímka $HG$ je rovnoběžná s přímkou $AC$. Z toho plyne rovnoběžnost přímek $HG$ a $EF$.

- Tvrzení 2 (dedukce): Jelikož $EF \parallel AC \parallel HG$, jsou přímky $EF$ a $HG$ rovnoběžné. Podobně $EH \parallel FG$. $EFGH$ je tedy rovnoběžník

Ze závěru druhého tvrzení ($EFGH$ je rovnoběžník) plyne důkaz tvrzení ze zadání.




*Obrázek 36 Řešení 4. problému*

*Využití softwaru při řešení 4. problému*

Bez zřejmého záměru zkonstruujeme čtyřúhelník $EFGH$ a zjistíme, že je to rovnoběžník.

- Tvrzení 1 (náhodný experiment): Čtyřúhelník $EFGH$ je rovnoběžníkem.

Uvědomíme si, že tento fakt je ekvivalentní s dokazovaným tvrzením. Zbývá ho tedy zdůvodnit. Na základě vizuálního vnímáni formulujeme domněnku, že úsečky $HG$ a $EF$ jsou rovnoběžné s přímkou $AC$. Ověříme to.

- Tvrzení 2 (vizuální vnímání konstrukce): Platí $EF \parallel AC \parallel HG$.

Nyní je na subjektu, aby toto tvrzení zdůvodnil a tak dospěl k důkazu. I při hledání tohoto zdůvodnění může software napomoci (například si subjekt může všimnout, že délka úsečky $HG$ je polovinou délky úsečky $AC$). Nejjednodušší však je aplikace teoretických znalostí, totiž že střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná s jeho základnou.

*Fakta (hypotézy, tvrzení) 4. problému, která souvisejí s řešením*

Jednotlivé kroky matematického zdůvodnění jsou tyto:

Tvrzení 1: Platí $EF \parallel AC \parallel HG$ a $EH \parallel BD \parallel FG$.
Tvrzení 2: Čtyřúhelník $EFGH$ je rovnoběžník.
Závěr: Úhlopříčky $EG$ a $FH$ se půlí.

Obě tvrzení jsou netriviální.

## 6.2 Data výzkumu: první tři experimenty

V této sekci budeme prezentovat první tři experimenty. Čtvrtý experiment uvedeme samostatně, neboť sběr dat, který jsme při něm použili, se významně lišil od předchozích tří.

Před začátkem každého experimentu popíšeme, jak probíhal, poté uvedeme získaná data a nakonec tato data shrneme. Celkovou interpretaci dat vzhledem k výzkumným otázkám však provedeme na závěr v sekci 6.4.

### 6.2.1 První experiment

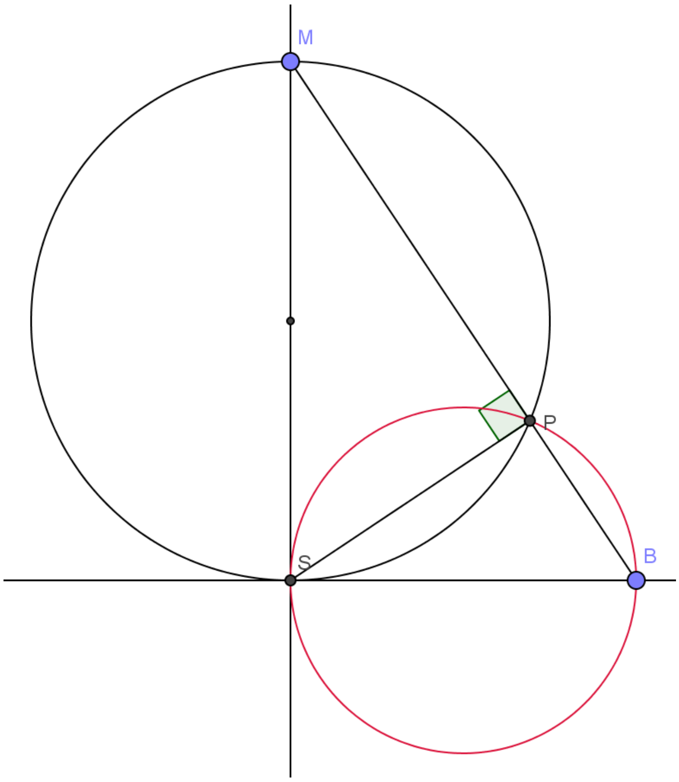
V prvním experimentu řešilo pět studentů obě základní úlohy. Experimentu předcházelo krátké opakování několika teorémů, které se v řešení předkládaných úloh vyskytovalo. Řešení každé úlohy se skládalo ze dvou fází:

**1. fáze** (bez počítače, 20 minut): Úkolem studentů bylo nalézt množinu bodů a matematicky ji zdůvodnit. Pokud toho nebyli schopni, měli zapsat všechny domněnky, o kterých se domnívali, že s řešením mohou souviset.

**2. fáze** (s počítačem, 20 minut): Stejně jako v předchozí fázi bylo úkolem studentů nalézt a zdůvodnit hledanou množinu bodů. Pokud toho nebyli schopni, měli zapsat všechny domněnky, které by podle nich mohly s řešením souviset.

**Dotazník**. Jeho cílem bylo zjistit, jaká fakta student skutečně znal (a která případně nezapsal), a jak k těmto faktům došel.

**1. experiment, 1. úloha**




*Obrázek 37 Řešení 1. problému*

Experimentu se zúčastnilo 5 studentů.

- Student **KKN**

*Řešení bez počítače:* Student se s pomocí náčrtku snažil empiricky zjistit hledanou množinu. Nakonec došel k chybnému závěru, že řešením by mohla být přímka.

Hypotéza (chybná): Na základě náčrtku je řešením přímka, kolmá na $SM$

*Řešení s pomocí GeoGebry:* Student našel hledanou množinu (kružnici). Snažil se ji zdůvodnit jakožto množinu bodů, které mají konstantní vzdálenost od daného bodu. Toho se pokusil dosáhnout analytickým výpočtem. Zdůvodnění této množiny jako množiny bodů, ze které je daná úsečka vidět pod pravým úhlem, ho nenapadlo.

Hypotéza: Student nalézá pouze triviální fakt.

*Dotazník (jaká fakta student objevil a jakým způsobem):* Student odpovídá, že

1) problém nevyřešil.
2) Není si vědom, že úhel $SPB$ je pravý.
3) Není si vědom, že úhel $SPM$ je pravý.
4) Fakt, že řešením je kružnice, nedokáže zdůvodnit. Tento fakt získal díky GeoGebře.

*Komentář:* Student nenachází řešení a nenachází žádný relevantní fakt, který by s řešením mohl souviset. S GeoGebrou zjišťuje pouze „triviální“ fakt – množinu, na kterou se ptáme v zadání. Klíčová myšlenka důkazu ho nenapadla.

- Student **BJM**

*Řešení bez počítače:* Student při interpretaci úlohy udělal hrubou chybu: Neuvědomil si, s pohybem bodu $M$ se mění i průměr kružnice ($MS$). Všechny jeho domněnky proto byly chybné.

Hypotéza: Žádná, student špatně pochopil zadání.

*Řešení s pomocí GeoGebry:* Student objevuje pouze triviální fakt – hledanou množinu.

Hypotéza: Student objevuje pouze triviální fakt.

*Dotazník (jaká fakta student objevil a jakým způsobem):* Student odpovídá, že

1) Problém nevyřešil.
2) Není si vědom, že úhel $SPM$ je pravý.
3) Není si vědom, že úhel $SPB$ je pravý.
4) Fakt, že řešením je kružnice, nedokáže zdůvodnit. Tento fakt získal díky GeoGebře.

*Komentář:* Student nenachází řešení a nenachází žádný relevantní fakt, který by s řešením mohl souviset. S GeoGebrou zjišťuje pouze „triviální" fakt (množinu, na kterou se ptáme v zadání). Klíčová myšlenka, jak provést důkaz, ho nenapadla.

- Studentka **MBA**

*Řešení bez počítače:* Studentka dochází na základě náčrtku k chybné hypotéze, že řešením je parabola.

Hypotéza (chybná): Na základě náčrtku je řešením parabola.

*Řešení s pomocí GeoGebry:* Studentka zjistila obě netriviální fakta (že úhly $MPS$ a $SPB$ jsou pravé). Druhý fakt ($\sphericalangle SPB = 90°$) odvodila na základě znalosti hledané množiny bodů a aplikací Thaletova teorému (abduktivní úvaha). K objevu prvního faktu poté použila stejný postup (tentokrát se jednalo o deduktivní úvahu). Problém byla schopna zdůvodnit.

Hypotézy: Studentka objevuje obě netriviální fakta.

*Dotazník (jaká fakta student objevil a jakým způsobem):* Studentka odpovídá, že

1) Problém vyřešila.
2) Je si vědoma, že úhel $MPS$ je pravý. Tento fakt zjistila v důsledku aplikace Thaletovy věty (dedukce).
3) Je si vědoma, že úhel $SPB$ je pravý. Tento fakt odvodila na základě znalosti řešení a aplikaci Thaletovy věty (abdukce).

*Komentář:* Studentka objevila jeden netriviální fakt s pomocí dedukce, druhý fakt odvodila na základě znalosti řešení (abdukce). Důkaz byla schopna dokončit.

- Studentka **RPP**

*Řešení bez počítače:* „Možná parabola nebo hyperbola“.

Hypotéza (neurčitá a chybná): Na základě náčrtku neurčitá hypotéza kuželoseček.

*Řešení s pomocí GeoGebry:* Studentka napsala přesné řešení.

Hypotéza: Studentka problém vyřešila.

*Dotazník (jaká fakta student objevil a jakým způsobem):* Studentka odpovídá, že

1) Problém vyřešila.
2) Na fakt, že úhel $SPB$ je pravý, přišla s pomocí Thaletovy věty (abdukce).
3) Úhel $MPS$ dopočítala (abdukce).

*Komentář:* Bez počítače studentka tápala, s pomocí GeoGebry však dokázala vytvořit bezchybný důkaz. Na obě fakta přišla s pomocí konstruktivní argumentace.

- Studentka **XYZ**

*Řešení bez počítače:* Studentka se snažila nalézt hledanou množinu s pomocí náčrtku. Její hypotéza (parabola) byla chybná.

Hypotéza (chybná): Na základě náčrtku je řešením parabola.

*Řešení s pomocí GeoGebry:* Zjistila obě netriviální fakta a k tomu navíc, že trojúhelníky $MPS$ a $SPB$ jsou si podobné. Z těchto faktů však nedokázala vytvořit důkaz.

Hypotéza: Studentka zjistila obě netriviální fakta

*Dotazník (jaká fakta student objevil a jakým způsobem):* Studentka odpovídá, že

1) Problém nevyřešila.
2) Je si vědoma, že úhel $MPS$ je pravý. Tento fakt zjistila v GeoGebře díky náhodnému experimentu, měření provedla bez konkrétního záměru.
3) Je si vědoma, že úhel SPB je pravý. Tento fakt zjistila v GeoGebře díky náhodnému experimentu, měření provedla bez konkrétního záměru.
4) Fakt, že řešením je kružnice, nedokáže zdůvodnit. Tento fakt získala díky GeoGebře.

*Komentář:* Studentka s pomocí počítače zjistila obě netriviální fakta. K faktům dospěla díky náhodnému měření (v rámci UTM náhodný experiment) a ani po jejich objevení jí nebylo jasné, jak lze jimi řešení zdůvodnit. Na základě těchto faktů „zdůvodnila“, že trojúhelníky $SPB$ a $MPS$ jsou podobné, ale to se k důkazu použít nedalo. Nezdůvodnila ani, proč jsou úhly $SPB$ a $SPM$ pravé.

Výsledky experimentu přehledně shrnuje následující tabulka.

**Tabulka (1. experiment, 1. úloha), shrnutí dat**:

| **1. (zákl) úloha** | Bez GeoGebry (I. Fáze) | | S Geogebrou (II. Fáze) | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Student | **Objevil student relevantní hypotézy?** | **Vyřešil student problém?** | **Objevil student, že MPS=90°? Jakým způsobem?** | **Objevil student, že SPB=90°? Jakým způsobem?** | **Vyřešil student problém?** |
| **KKN** | **Ne** (Hypotéza byla, že řešením je přímka) | **Ne** | **Ne** | **Ne** | **Ne** (kružnici se snaží zdůvodnit pomocí konstantnosti poloměru, zdůvodnit ji pomocí úhlů ho nenapadá) |
| **BJM** | **Ne** (Hypotéza byla, že řešením je část kruhu se středem S. Student asi špatně pochopil zadání). | **Ne** | **Ne** | **Ne** | **Ne** (problém se snaží zdůvodnit analyticky, ale nikam se nedostává) |
| **MBA** | **Ne** (Hyptéza: řešením je parabola. Následuje jakýsi neformální pokus o zdůvodnění) | **Ne** | **ANO** (Způsob objevu: **konstruktivní argumentace** - aplikace Thaletova teorému) | **ANO** (Způsob objevu: **konstruktivní argumentace** - aplikace Thaletova teorému) | **ANO** |
| **RPP** | **Ne** (Hypotézy nebyly správné a byly neurčité: "Možná parabola nebo hyperbola".) | **Ne** | **ANO** (Způsob objevu: **konstruktivní argumentace** - abdukukce za pomoci druhého tvrzení) | **ANO** (Způsob objevu: **konstruktivní argumentace** - aplikace Thaletova teorému) | **ANO** |
| **XYZ** | **Ne** (Hypotéza byla "půlka paraboly") | **Ne** | **ANO** (Způsob objevu: **náhodný experiment,** náhodné měření úhlu) | **ANO** (Způsob objevu: **náhodný experiment,** náhodné měření úhlu) | **Ne** (studentka počítá spoustu úhlů, zjišťuje podobnost dvou trojúhelníků, klíčová myšlenka důkazu ji nenapadá) |

**Data ke druhé otázce**

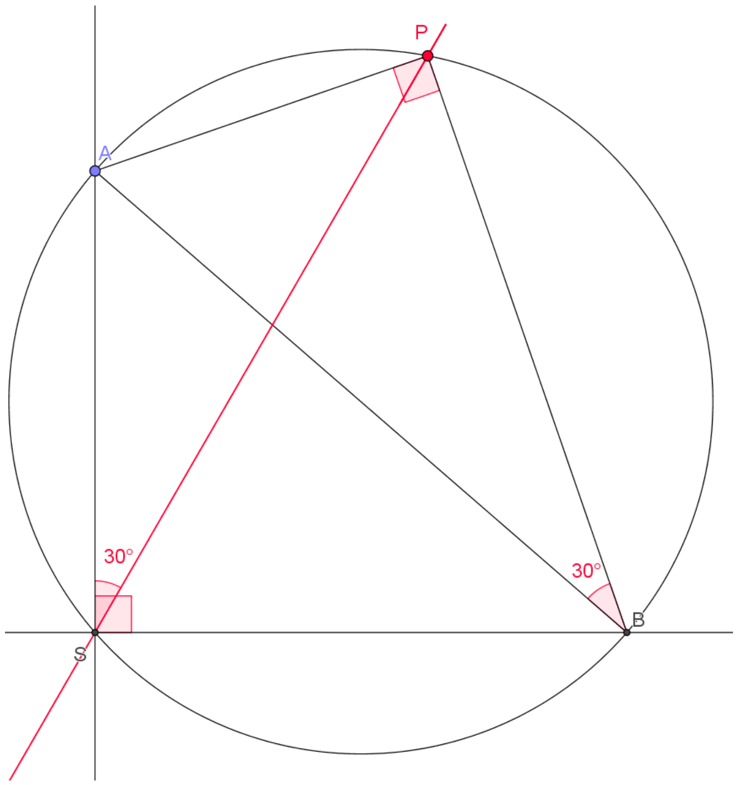
II Jaké jsou příčiny selhání studentů při hledání důkazu, proč pomoc softwaru není v některých případech dostatečná?

Klíčovým faktorem, proč studentky MBA a RPP uspěly, byla znalost hledané množiny, kterou jim poskytla GeoGebra. Díky tomu si mohly vybavit klíčovou matematickou teorii (Thaletovu větu) a všechna fakta objevit pomocí úvahy. Konkrétně to, že $\measuredangle SPB = 90°$, objevily obě s pomocí abdukce (ze znalosti hledaného řešení). Rovnost $\measuredangle MPS = 90°$ objevila studentka MBA deduktivně, studentka RPP s pomocí abdukce z předchozího faktu. V obou případech se role GeoGebry omezila na získání hledaného řešení a verifikaci hypotéz.

Studenti BJM a KKN vůbec neobjevili, že k zdůvodnění množiny by mohly vést úhly – a to jak bez softwaru, tak s ním. Student KKN se snažil dokázat, že hledanou množinou je kružnice, pomocí analytického výpočtu vzdálenosti jejích bodů od středu úsečky $SB$, ale to se mu nepodařilo. Student BJM se problém pokoušel vyřešit také analyticky a také řešení nedosáhl. Oba neodhalili klíčovou myšlenku – možnost aplikovat Thaletovu větu.

Studentka XYZ obě netriviální fakta objevila, přesto se jí důkaz nepodařilo vytvořit. Nenapsala ani náznak zdůvodnění, proč jsou oba relevantní úhly pravé. Stejně jako v případě studentů zmíněných výše ani ji nenapadla možnost aplikovat Thaletovu větu.

**1. experiment, 2. úloha**




*Obrázek 38 Řešení 2. problému*

- Student **KKN**

*Řešení bez počítače:* Student hádal, že množinou by mohla být přímka, což je shodou okolností správně. (Množinou je úsečka, ale k tomuto rozdílu nebudeme přihlížet.) Dále v náčrtku počítal nějaké úhly, ale na základě těchto výpočtů nevyvodil žádné závěry. Pravděpodobně prováděl tyto výpočty bez zřejmého cíle.

Hypotéza: Student správně uhádl hledanou množinu bodů.

*Řešení s pomocí GeoGebry:* Student kromě verifikace faktu, že řešením je přímka, zjistil i jeden netriviální empirický fakt, totiž že $\measuredangle ASP = 30°$. Ze zápisu je zřejmé, že se problém snažil řešit analyticky a také složitým dopočítáváním různých úhlů. Tyto postupy k výsledku nevedly.

Hypotéza: Student objevil jeden netriviální empirický fakt.

*Dotazník (jaká fakta student objevil a jakým způsobem):* Student odpovídá, že

1) Problém nevyřešil.
2) Je si vědom, že platí rovnost $\measuredangle ASP = \measuredangle APB = 30°$. Objevil to s pomocí GeoGebry a vizuálního vnímání během dynamické změny konstrukce (konkrétně s pomocí

funkce tahání objektů tak, že ztotožnil bod $B$ s bodem $S$). Jedná se o modalitu „wandering dragging“ (sekce 5.2).

3) Není si vědom faktu, že čtyřúhelník je tětivový.
4) Fakt, že řešením je úsečka, nedokáže zdůvodnit. Tento fakt získal díky GeoGebře.

*Komentář:* Student uhádl relevantní hypotézu (hledanou množinu) i bez softwaru. S pomocí GeoGebry objevil navíc jeden netriviální empirický fakt, který získal s pomocí náhodného experimentu díky tahání objektů. Problém nevyřešil.

- Student **BJM**

*Řešení bez počítače:* Student má hodně originální, ale špatnou hypotézu. Řešením je podle něj kubická parabola ($y = x^3$).

Hypotéza (chybná): Na základě náčrtku student formuluje domněnku, že řešením je kubická parabola.

*Řešení s pomocí GeoGebry:* Student zjišťuje pouze triviální fakt, dál se nedostává.

Hypotéza: Student objevil triviální fakt.

*Dotazník (jaká fakta student objevil a jakým způsobem):* Student odpovídá, že

1) Problém nevyřešil.
2) Není si vědom, že platí rovnost $\measuredangle ASP = \measuredangle APB = 30°$.
3) Není si vědom faktu, že čtyřúhelník je tětivový.
4) Fakt, že řešením je úsečka, nedokáže zdůvodnit. Tento fakt získal díky GeoGebře.

*Komentář:* Student nebyl schopen objevit žádný netriviální fakt.

- Studentka **MBA**

*Řešení bez počítače:* Studentka uhádla hledanou množinu (úsečka), navíc dokázala deduktivně zdůvodnit, že hledaná množina musí procházet bodem $S$.

Hypotéza: Studentka uhádla hledanou množinu bodů.

*Řešení s pomocí GeoGebry:* Kromě verifikace hledané množiny bodů studentka zjišťuje i jeden netriviální experimentální fakt: velikost úhlu $PSB$. Tento fakt odvodila na základě následujícího experimentu: Pokud je řešením přímka, upravme trojúhelník $APB$ tak, aby body $A, P, B, S$ tvořily vrcholy obdélníka. Pak je úsečka $AB$ úhlopříčkou tohoto obdélníka a tedy úhlopříčkou je i úsečka $SP$. Z toho plyne $\measuredangle ASP = 30°$ a tedy $\measuredangle PSB = 60°$. Tato úvaha sice využívá částečně abdukce (že řešením je přímka), hlavně ale její objev vychází z funkce tahání objektů: Studentka pohybovala trojúhelníkem $APB$ tak, až čtyři body konstrukce tvořily vrcholy obdélníka a tomto základě učinila závěr. Jedná se o příklad objevu na základě „vizuálního vnímání a dynamické změny konstrukce“, modality „wandering dragging“.

Hypotéza: Studentka objevila jeden netriviální fakt. Na druhý nepřišla.

*Dotazník (jaká fakta student objevil a jakým způsobem):* Studentka odpovídá, že

1) Problém nevyřešila.
2) Rovnost úhlů $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PSB = 60°$ objevila na základě dynamické změny konstrukce (modalita „wandering dragging“).
3) Není si vědoma faktu, že čtyřúhelník je tětivový.
4) Fakt, že řešením je úsečka, nedokáže zdůvodnit. Tento fakt získala díky GeoGebře.

*Komentář:* Studentka objevuje jeden netriviální fakt (s pomocí dynamické změny konstrukce). Druhý fakt neobjevila a problém nevyřešila.

- Studentka **RPP**

*Řešení bez počítače:* Studentka neuvedla žádná fakta, která by se vztahovala k řešení.

Hypotéza: žádná.

*Řešení s pomocí GeoGebry:* Studentka si všimla, že sklon hledané množiny (přímky) s přímkou $b$ je $60°$, což je stejný úhel jako $\sphericalangle BAP$. Z toho vyvodila, že čtyřúhelníku lze opsat kružnici. Jedná se o ryze abduktivní úvahu. Že je čtyřúhelník tětivový pak dokázala z Thaletovy věty a nakonec se dopracovala k logickému zdůvodnění hledané množiny.

Hypotéza: Studentka objevila obě netriviální fakta.

*Dotazník (jaká fakta student objevil a jakým způsobem):* Studentka odpovídá, že

1) Problém vyřešila.
2) Objevila rovnost úhlů $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PSB = 60°$, a to s pomocí funkce tahání objektů. Tím, že ztotožnila vrchol $A$ „pohyblivého“ trojúhelníka s bodem $S$, měla úsečka $AP$ stejný sklon jako hledaná množina.
3) Je si vědoma, že čtyřúhelník je tětivový. Objevila to na základě rovnosti úhlů (abduktivní úvaha).

*Komentář:* Studentka s GeoGebrou objevila obě netriviální fakta. První fakt objevila s pomocí tahání objektů, druhý fakt s pomocí abduktivní (tedy konstruktivní) úvahy. Zdůvodnění pak dala deduktivní podobu.

- Studentka **XYZ**

*Řešení bez počítače:* Tato studentka nezaznamenala žádnou hypotézu.

Hypotéza: žádná.

*Řešení s pomocí GeoGebry:* Studentka zjistila rovnost $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PSB = 60°$, což je ekvivalent druhého netriviálního faktu. Dále deduktivně zdůvodnila, proč lze čtyřúhelníku $APBS$ opsat kružnici. Ke kompletnímu zdůvodnění se nedostala.

Hypotéza: Studentka objevila obě netriviální fakta.

*Dotazník (jaká fakta student objevil a jakým způsobem):* Studentka odpovídá, že

1) Problém nevyřešila.
2) Rovnost úhlů $\measuredangle PAB = \measuredangle PSB = 60°$ objevila na základě vizuálního vnímání a dynamické změny konstrukce (ztotožnila bod $B$ trojúhelníku s bodem $S$).
3) S pomocí Thaletovy věty odvodila, že čtyřúhelníku $APBS$ lze opsat kružnici. GeoGebra jí posloužila jako prostředek verifikace. Jedná se o objev s pomocí konstruktivní argumentace.
4) Fakt, že řešením je úsečka, nedokázala zdůvodnit. Tento fakt získala díky GeoGebře.

*Komentář:* Studentka s pomocí GeoGebry objevila obě netriviální fakta. Druhý fakt (rovnost úhlů) objevila pomocí vizuálního vnímání a dynamické změny konstrukce, první fakt (čtyřúhelníku lze opsat kružnici) pomocí deduktivní (tedy konstruktivní) úvahy. Ke kompletnímu zdůvodnění se studentka nedostala.

**Tabulka (1. experiment, 2. úloha), shrnutí dat:**

| **2. (zákl.) úloha** | Bez GeoGebry (I. Fáze) | | S Geogebrou (II. Fáze) | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Student | **Objevil student relevantní hypotézy?** | **Vyřešil student problém?** | **Objevil student, že čtyřúhelník je tětivový?** | **Objevil student rovnost úhlů PSA=PBA=30°** | **Vyřešil student problém?** |
| **KKN** | **Ano**, uhádl, že hledanou množinou je přímka. | **Ne** | **Ne** | **ANO** (Způsob objevu: **dynamická změna konstrukce,** náhodné tahání) | **Ne** (Neobjevil první tvrzení) |
| **BJM** | **Ne**, (hypotéza byla špatná: řešením je parabola) | **Ne** | **Ne** | **Ne** | **Ne** |
| **MBA** | **Ano**, uhádla, že hledanou množinou je přímka a že prochází průsečíkem S. | **Ne** | **Ne** | **ANO** (Způsob objevu: **dynamická změna konstrukce,** náhodné tahání) | **Ne** (Neobjevila druhé tvrzení) |
| **RPP** | **Ne** | **Ne** | **ANO** (Způsob objevu: **konstruktivní argumentace** - na základě abdukce, ze znalosti druhého tvrzení) | **ANO** (Způsob objevu: **dynamická změna konstrukce,** náhodné tahání) | **ANO** |
| **XYZ** | **Ne** | **Ne** | **ANO** (Způsob objevu: **konstruktivní argumentace** - dedukce, apl. Thaletovy věty) | **ANO** (Způsob objevu: **dynamická změna konstrukce,** náhodné tahání) | **Ne** (studentka objevila obě fakta, přesto nebyla schopna důkaz dokončit) |

**Data ke druhé otázce**

II Jaké jsou příčiny selhání studentů při hledání důkazu, proč pomoc softwaru není v některých případech dostatečná?

Studentce, která problém vyřešila, pomohla modalita „Náhodné tahání objektů“, díky které objevila rovnost $\measuredangle PSA = \measuredangle PBA = 30°$. Na základě toho odvodila abdukcí, že čtyřúhelníku lze opsat kružnici. To pak dokázala odvodit i z původních předpokladů a dokončit důkaz. Nástroje GeoGebry jí pomohly ve dvou ohledech – zjistila hledanou množinu bodů a rovnost dvou úhlů.

Tři ze čtyř studentů, kteří problém nevyřešili, neobjevili první fakt (čtyřúhelník je tětivový). Tři z těchto neúspěšných studentů objevili druhý fakt, ale žádný z nich ho nedokázal zdůvodnit. Studentka XYZ věděla, že čtyřúhelníku lze opsat kružnici, nebyla ale schopna aplikovat tuto větu v netypické situaci. Zbylí studenti pak tento fakt nemohli zdůvodnit, protože nevěděli, že čtyřúhelník je tětivový. Tito studenti tedy neobjevili první krok, ze kterého důkaz vycházel.

### 6.2.2 Druhý experiment

Experimentu se zúčastnilo celkem šest studentů. I tomuto experimentu předcházelo opakování znalostí, ale jeho provedení se poněkud od toho předchozího lišilo: Studenti řešili pouze první úlohu (tu jednodušší, v níž klíčovou myšlenkou byla aplikace Thaletova teorému) a celý experiment se skládal ze čtyř fází:

**1. fáze** (bez počítače, 20 minut): Úkolem studentů bylo nalézt množinu bodů a matematicky ji zdůvodnit. Pokud toho nebyli schopni, měli zapsat všechny domněnky, o kterých se domnívali, že s řešením mohou souviset.

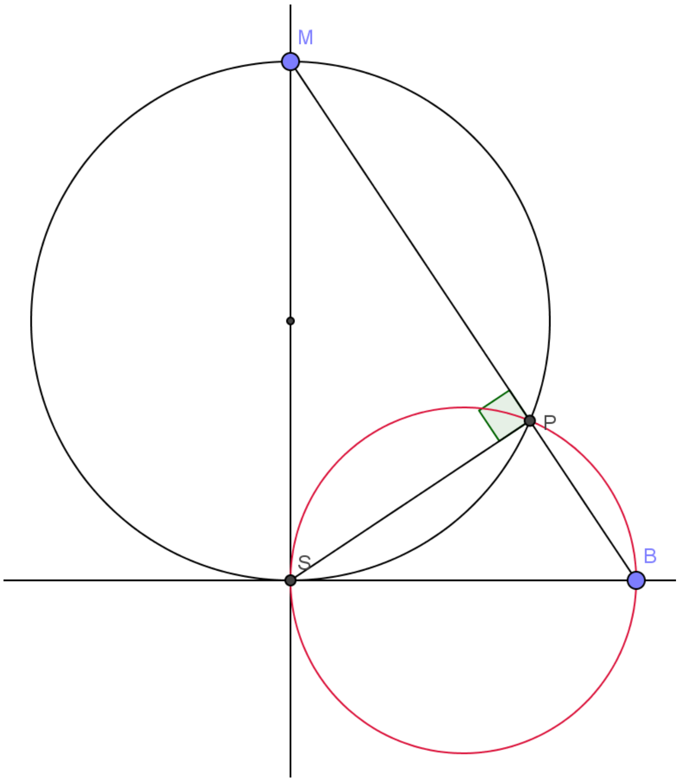
**2. fáze** (s počítačem, 20 minut): Úkolem studentů bylo nalézt a zdůvodnit hledanou množinu bodů. Pokud toho nebyl schopni, měli zapsat všechny domněnky, které by podle nich mohly s řešením souviset.

**Dotazník 1**: Jeho cílem bylo zjistit, jaká fakta student skutečně znal (a která možná nezapsal), a jak k těmto faktům došel.

**3. fáze** (s počítačem, 10 minut): Studentům byl předložen soubor v GeoGebře, ve kterém byla zvýrazněna všechna relevantní fakta, vztahující se k řešení. Úkolem studentů bylo řešení dokončit.

**4. fáze** (10 minut): Studentům bylo řečeno, že řešení úzce souvisí s aplikací Thaletova teorému. Jejich úkolem bylo fakta propojit do logického řetězce.

**Dotazník 2**: Zde student mohl zapsat vlastní (subjektivní) důvody, proč si myslí, že problém nevyřešil, nebo co mu přišlo na úloze nejtěžší.




*Obrázek 39 Řešení 1. problému*

- Studentka **DI4**

*Řešení bez počítače:* Chybná hypotéza. Studentka se domnívala, že řešením je přímka.

Hypotéza: chybná (řešením je přímka)

*Řešení s pomocí GeoGebry:* Studentka kromě triviálního faktu (množinou je kružnice) nenašla žádný fakt.

Hypotéza: Pouze triviální fakt.

*Dotazník (jaká fakta student objevil a jakým způsobem):* Studentka odpovídá, že

1) Problém nevyřešila.
2) Nevzala do úvahy, že úhel $MPS$ je pravý.
3) Nevzala do úvahy, že úhel $SPB$ je pravý.
4) Fakt, že řešením je kružnice, nedokáže zdůvodnit. Tento fakt získala díky GeoGebře.

*Řešení se souborem Geogebry, v němž byla zvýrazněna důležitá fakta:* Studentka uváděla izolovaná empirická fakta bez logického propojení.

*Řešení se zdůrazněním Thaletova teorému:* Studentka nebyla schopna vytvořit validní důkaz. Uváděla jednotlivá fakta, ale již nebyla schopna uspořádat je do logického řetězce.

*Komentář:* Studentka s pomocí GeoGebry objevila pouze triviální fakt. Důkaz nebyla schopna dokončit, ani když jí byla prozrazena obě fakta, a to navzdory tomu, že Thaletův teorém znala.

- Studentka **KJL**

*Řešení bez počítače:* Kromě náčrtků studentka nenapsala žádnou domněnku, která by s řešením mohla souviset.

Hypotéza: žádná

*Řešení s pomocí GeoGebry:* Studentka došla ke správnému řešení.

*Dotazník (jaká fakta student objevil a jakým způsobem):* Studentka odpovídá, že

1) Problém vyřešila.
2) Na obě fakta přišla pomocí Thaletova teorému.

*Komentář:* Tato studentka objevila obě fakta díky aplikaci Thaletovu teorému. Obě fakta objevila „konstruktivní argumentací“ (první tvrzení deduktivně, druhé abduktivně). Fakta dokázala uspořádat do uceleného deduktivního řetězce.

- Studentka **BFL**

*Řešení bez počítače:* I tato studentka zůstala u náčrtků, žádné hypotézy nenapsala.

Hypotéza: žádná

*Řešení s pomocí GeoGebry:* Došla pouze k triviálnímu faktu (hledanou množinou je kružnice).

Hypotéza: Kromě triviálního faktu nic dalšího nenapsala.

*Dotazník (jaká fakta student objevil a jakým způsobem):* Studentka odpovídá, že

1) Problém nevyřešila.
2) Není si vědoma, že úhel $MPS$ je pravý.
3) Není si vědoma, že úhel $SPB$ je pravý.
4) Fakt, že řešením je kružnice, nedokáže zdůvodnit. Tento fakt získala díky GeoGebře.

*Řešení se souborem Geogebry, v němž byla zvýrazněna důležitá fakta:* Studentka nebyla schopna problém vyřešit.

*Řešení se zdůrazněním Thaletova teorému:* Studentka nedokázala důkaz dokončit. Poznamenala, že „ví, že důkaz souvisí s Thaletovým teorémem, ale tuto souvislost nevidí“.

*Komentář:* Studentka nebyla schopna s pomocí GeoGebry objevit netriviální fakta. Důkaz nebyla schopna dokončit ani ve třetí fázi, kdy jí tato fakta byla prozrazena. Studentka nebyla schopna důkaz dokončit, ani když jí bylo řečeno, že by měla využít Thaletův teorém.

- Studentka **KOK**

*Řešení bez počítače:* Studentka na základě náčrtku došla k chybné hypotéze, že řešením je přímka.

Hypotéza (špatná): Řešením je přímka.

*Řešení s pomocí GeoGebry:* Studentka zjistila pouze triviální experimentální fakt. Pokusila se o jakési zdůvodnění, ale to mělo charakter pouhého zopakování empirického zjištění.

Hypotéza: triviální fakt

*Dotazník (jaká fakta student objevil a jakým způsobem):* Studentka odpovídá, že

1) Problém nevyřešila.
2) Nevzala do úvahy, že úhel $MPS$ je pravý.
3) Nevzala do úvahy, že úhel $SPB$ je pravý.
4) Fakt, že řešením je kružnice, nedokáže zdůvodnit. Tento fakt získala díky GeoGebře.

*Řešení se souborem Geogebry, v němž byla zvýrazněna důležitá fakta:* Studentka objevila klíčovou myšlenku – použití Thaletova teorému – a dochází k přesnému zdůvodnění.

*Komentář:* Studentka objevila s pomocí GeoGebry pouze triviální empirický fakt. Důkaz byla schopna dokončit teprve v okamžiku, když jí byla sdělena zbývající fakta. Poznamenává, že ji „na začátku nenapadlo použít Thaletův teorém".

- Studentka **DUB**

*Řešení bez počítače:* Studentka došla na základě náčrtku k chybné hypotéze, že množinou je přímka. Pokusila se to zdůvodnit s pomocí mocnosti bodu ke kružnici, což k ničemu nevedlo.

Hypotéza: chybná (řešením je přímka)

*Řešení s pomocí GeoGebry:* Studentka objevila obě netriviální fakta a hledanou množinu přesně zdůvodnila.

*Dotazník (jaká fakta student objevil a jakým způsobem):* Studentka odpovídá, že

1) Problém vyřešila.
2) Fakt, že úhel $BPS$ je pravý, získala na základě logické úvahy – aplikací Thaletova teorému.
3) Fakt, že úhel $MPS$ je pravý, odvodila jako důsledek předchozího zjištění.

*Komentář:* Na základě znalosti hledané množiny objevila studentka všechna fakta, vztahující se k řešení, a dokázala je logicky spojit. Její postup byl nejdříve abduktivní (vycházela z empirického faktu – množinou je kružnice), ale v závěru podala přesné zdůvodnění.

- Studentka **MAT**

*Řešení bez počítače:* Studentka zůstala u náčrtků, nezaznamenala žádnou domněnku.

Hypotézy: žádná

*Řešení s pomocí GeoGebry:* Studentka kromě triviálního faktu nezaznamenala žádnou hypotézu.

Hypotézy: žádná

*Dotazník (jaká fakta student objevil a jakým způsobem):* Studentka odpovídá, že

1) Problém nevyřešila.
2) Není si vědoma, že úhel $MPS$ je pravý.
3) Není si vědoma, že úhel $SPB$ je pravý.
4) Fakt, že řešením je kružnice, nedokáže zdůvodnit. Tento fakt získala díky GeoGebře.

*Řešení se souborem Geogebry, v němž byla zvýrazněna důležitá fakta:* Studentka si vybavila větu o obvodových úhlech (jíž je Thaletova věta speciálním případem). Po značném úsilí, které odráží dlouhý zápis, důkaz dokončila.

*Komentář:* Studentku nenapadlo, že by s řešením mohly souviset úhly. Teprve po prozrazení tohoto faktu byla schopna důkaz dokončit.

**Tabulka (2. experiment, 1. úloha), shrnutí dat**:

| **1. (zákl) úloha** | Bez GeoGebry (I. Fáze) | | S Geogebrou (II. Fáze) | | | S Geogebrou (III. Fáze) | S Geogebrou (IV. Fáze) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Student | **Objevil student relevantní hypotézy?** | **Vyřešil student problém?** | **Objevil student, že MPS=90°? Jakou** | **Objevil student, že SPB=90°? Jakou motivací?** | **Vyřešil student problém?** | **Vyřešil student problém?** | **Vyřešil student problém, příp. jaké byly jeho problémy při řešení?** | **Proč student problém nevyřešil ve II. fázi?** |
| **DI4** | **NE** (domnívala se, že řešením je přímka) | **NE** | **NE** | **NE** | **NE** | **NE** | **NE** (Studentka uvádí jednoltlivá fakta, ale není schopna vytvořit logický řetězec, vycházející od předpokladů k závěru) | Studentka nebyla schopna odhalit relevatní fakta. Když ji tato fakta byla prozrazena, nebyla schopna vytvořit deduktivní řetězec. |
| **KJL** | **NE** | **NE** | **ANO** (Způsob objevu: **konstruktivní argumentace** - apl. Thaletova teorému, dedukce) | **ANO** (Způsob objevu: **konstruktivní argumentace** - apl. Thaletova teorému, abduckce) | **ANO** | | | |
| **BFL** | **NE** | **NE** | **NE** | **NE** | **NE** | **NE** | **NE** (Studentka poznamenává, že ví, že řešení souvisí s Theltovým teorémem, ale nevidí logické souvislosti.) | Studentka nebyla schopna odhalit relevatní fakta. Když ji tato fakta byla prozrazena, nebyla schopna vytvořit deduktivní řetězec. |
| **KOK** | **NE** (domnívala se, že řešením je přímka) | **NE** | **NE** | **NE** | **NE** (studentka zjišťuje pouze triviální fakt, hledanou množinu, dále se snaží využít mocnost bodu) | **ANO** | | Neobjevila fakta vztahující se k řešení. "Nenapadlo mě použít Thaletovu větu". Studentka sledovala chybnou myšlenku: aplikaci mocnosti bodu. |
| **DUB** | **NE** (domníval se, že řešením je přímka) | **NE** | **ANO** (Způsob objevu: **konstruktivní argumentace** - apl. Thaletova teorému, dedukce) | **ANO** (Způsob objevu: **konstruktivní argumentace** - dedukce předchozího tvrzení) | **ANO** | | | |
| **MAT** | **NE** | **NE** | **NE** | **NE** | **NE** | **ANO** | | Studentka neobjevila relevantní fakta, neodhalila klíčovou myšlenku. Měla rovněž problémy se zápisem důkazu. |

## Data ke druhé výzkumné otázce

II Jaké jsou příčiny selhání studentů při hledání důkazu, proč pomoc softwaru není v některých případech dostatečná?

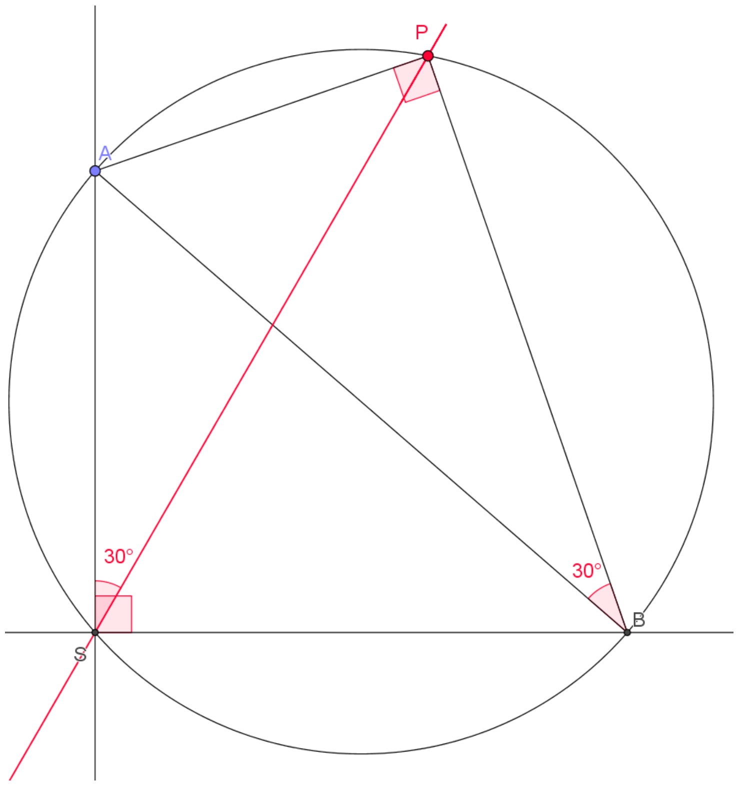
Co se týká studentů, kteří problém vyřešili ve druhé fázi, hlavním faktorem, proč se jim to podařilo, byla znalost hledané množiny. Řešení zobrazené GeoGebrou fungovalo jako „spouštěcí mechanismus“ pro asociaci s teoretickými znalostmi, které byly klíčové pro řešení problému.

Dvě studentky vyřešily problém ve třetí fázi. Důvodem, proč nevyřešily problém dříve, bylo, že neodhalily klíčovou myšlenku – zaměřit se na úhly a aplikovat Thaletovu větu. Když jim byl tento fakt napovězen, dokázaly důkaz dokončit.

Dvě studentky problém nevyřešili ani ve čtvrté fázi, kdy jim byl explicitně sdělen význam Thaletova teorému. Tyto studentky měly problém vytvořit deduktivní řetězec, vycházející od předpokladů k závěru.

### 6.2.3 Třetí experiment

Třetí experiment měl stejně jako ten druhý čtyři fáze, přičemž v té poslední byla studentům prozrazena všechna fakta, vztahující se k řešení, a všechny teorémy, které bylo nutné použít. Rozdíl byl v tom, že tentokrát řešili studenti mnohem obtížnější úlohu. Experimentu opět předcházelo opakování.




*Obrázek 40 Řešení 2. problému*

- Student **XY**

*Řešení bez počítače:* Student měl pouze velice neurčitou domněnku, že se hledaná množina nachází v „1. a ve 3. kvadrantu“.

Hypotézy: žádná

*Řešení s pomocí GeoGebry:* Student objevil triviální experimentální fakt. Dále zdůvodnil, proč lze čtyřúhelníku $APBS$ opsat kružnici (součet protilehlých úhlů je $180°$). Tento fakt však nebyl schopen dále využít.

Hypotézy: hledaná množina bodů a jeden netriviální fakt (tětivový čtyřúhelník)

*Dotazník (jaká fakta student objevil a jakým způsobem):* Student odpovídá, že

1) Problém nevyřešil.
2) Je si vědom, že čtyřúhelník je tětivový. Odvodil to na základě logické úvahy.
3) Neobjevil rovnost úhlů $\sphericalangle PSA = \sphericalangle PBA = 30°$ (netriviální fakt).
4) Fakt, že řešením je úsečka, nedokázal zdůvodnit. Fakt získal díky GeoGebře.

*Řešení se souborem Geogebry, v němž byla zvýrazněna důležitá fakta:* Student našel řešení.

*Komentář:* Student ve druhé fázi objevil první netriviální fakt na základě konstruktivní argumentace. Druhý fakt nenašel ani s GeoGebrou. Teprve když mu byla všechna fakta prozrazena, byl schopen důkaz dokončit.

- Studentka **SDP**

*Řešení bez počítače:* Studentka zkoumala problém na základě náčrtku několika bodů $P$. Došla k chybné hypotéze, že řešením je parabola nebo kružnice.

Hypotéza (chybná): řešením je parabola nebo kružnice

*Řešení s pomocí GeoGebry:* Studentka objevila triviální experimentální fakt – hledanou množinou je přímka. Dále objevila rovnosti $\measuredangle PSA = \measuredangle PBA = 30°$. Na základě tohoto faktu (abdukce) vyvodila, že čtyřúhelníku lze opsat kružnici. Získala tedy obě fakta a důkaz dokončila.

Hypotéza: Objevila obě netriviální fakta.

*Dotazník (jaká fakta student objevil a jakým způsobem):* Studentka odpovídá, že

1) Problém vyřešila.
2) Na rovnost $\sphericalangle PSA = \sphericalangle PBA$ přišla v GeoGebře náhodným experimentem (náhodné měření).
3) Uvědomila si, že čtyřúhelník je tětivový. Na to přišla s pomocí věty o obvodových úhlech, aplikované na předchozí empiricky zjištěný fakt (abdukce).

*Komentář:* Studentka objevila rovnost úhlů náhodně, bez záměru. Na základě tohoto faktu však dokázala odvodit, že čtyřúhelníku lze opsat kružnici. Poté byla schopna vytvořit deduktivní důkaz.

- Studentka **ANO**

*Řešení bez počítače:* Studentka na základě náčrtku uhádla, že řešením je úsečka. Žádné další hypotézy a úvahy nezmínila.

Hypotézy: Hledaná množina bodů je část přímky.

*Řešení s pomocí GeoGebry:* Studentka objevila pouze triviální fakt (množinu bodů).

Hypotézy: žádná

*Dotazník (jaká fakta student objevil a jakým způsobem):* Studentka odpovídá, že

1) Problém nevyřešila.
2) Není si vědoma, že čtyřúhelník je tětivový.
3) Neobjevila rovnost úhlů $\measuredangle PSA = \measuredangle PBA = 30°$.
4) Fakt, že řešením je úsečka, nedokázala zdůvodnit. Fakt získala v GeoGebře.

*Řešení se souborem Geogebry, v němž byla zvýrazněna důležitá fakta:* Studentka se o důkaz pokoušela, ale uváděla jenom izolovaná fakta, dále se nedostala.

*Řešení se zdůrazněním Thaletova teorému a věty o obvodových úhlech:* Studentka nakonec s maximální možnou nápovědou dokázala problém vyřešit.

*Komentář:* Studentka samostatně neobjevila žádná netriviální fakta. Byla schopna důkaz dokončit teprve v poslední fázi, kdy jí byly prozrazeny všechny teorémy, vztahující se k řešení. Uvedla, že si nedokázala uvědomit, že z rovnosti $\measuredangle PSA = 30° = \text{konstanta}$ plyne, že bod $P$ musí ležet na přímce. Zmiňuje nezkušenost s aplikací věty o obvodových úhlech.

- Studentka **KK**

*Řešení bez počítače:* Studentka došla k chybné hypotéze, že bod $P$ opisuje oblouk. Tato hypotéza se odvolává na deduktivní zjištění, že čtyřúhelníku $APBS$ lze opsat kružnici, na což studentka přišla díky aplikaci Thaletovy věty (konstruktivní argumentace v rámci UTM).

Hypotézy: špatná hypotéza, že řešením je oblouk, a správné zjištění, že čtyřúhelníku lze opsat kružnici.

*Řešení s pomocí GeoGebry:* Studentka zjistila triviální fakt, že řešením je část přímky, dále nepostoupila.

Hypotézy: Hledaná množina je přímka.

*Dotazník (jaká fakta student objevil a jakým způsobem):* Studentka odpovídá, že

1) Problém nevyřešila.
2) Je si vědoma, že čtyřúhelník je tětivový. Odvodila to na základě logické úvahy.
3) Neobjevila rovnost úhlů $\sphericalangle PSA = \sphericalangle PBA = 30°$ (netriviální experimentální fakt).
4) Fakt, že řešením je úsečka, nedokázala zdůvodnit. Tento fakt získala díky GeoGebře.

*Řešení se souborem Geogebry, v němž byla zvýrazněna důležitá fakta:* Ani v této fázi studentka problém nevyřešila.

*Řešení se zdůrazněním Thaletova teorému a věty o obvodových úhlech:* Studentka nebyla schopna deduktivního zdůvodnění.

*Komentář:* Studentka objevila první netriviální fakt ryze deduktivně, aniž pro něj potřebovala pomoc GeoGebry. Druhý fakt neobjevila ani s pomocí GeoGebry. Zdůvodnění nedosáhla ani ve fázi s vyznačenými fakty. Sledovat logickou návaznost jednotlivých kroků pro ni bylo obtížné, včetně interpretace faktu, že z $\measuredangle PSA = 30°$ plyne řešení úlohy.

- Studentka **PES**

*Řešení bez počítače:* Studentka hádala, že řešením by mohla být elipsa.

Hypotézy (chybné): Řešením je elipsa.

*Řešení s pomocí GeoGebry:* Studentka s pomocí GeoGebry zjistila, že hledanou množinou bodů je část přímky, nic více.

Hypotézy: Hledanou množinou bodů je přímka (triviální fakt).

*Dotazník (jaká fakta student objevil a jakým způsobem):* Studentka odpověděla, že

1) Problém nevyřešila.
2) Neobjevila, že čtyřúhelník je tětivový.
3) Neobjevila rovnost úhlů $\measuredangle PSA = \measuredangle PBA = 30°$ (druhý netriviální fakt).
4) Fakt, že řešením je úsečka, nedokázala zdůvodnit. Fakt získala díky GeoGebře.

*Řešení se souborem Geogebry, v němž byla zvýrazněna důležitá fakta:* Studentka zopakovala empirická fakta, ale neuvedla žádné teoretické argumenty, které by vedly k důkazu.

*Řešení se zdůrazněním Thaletova teorému a věty o obvodových úhlech:* Studentka nakonec důkaz dokončila.

*Komentář:* Tato studentka samostatně neobjevila žádný netriviální fakt, a to ani s pomocí GeoGebry. Problém nevyřešila ani ve třetí fázi, kdy jí byla prozrazena obě klíčová fakta. Teprve v poslední fázi důkaz dokončila.

- Student **M**

*Řešení bez počítače:* Student chybně hádal, že řešením je parabola.

Hypotéza (chybná): Řešením je parabola.

*Řešení s pomocí GeoGebry:* Student zjistil triviální fakt, že řešením je přímka. Dále objevil rovnost úhlů $\measuredangle PSA = \measuredangle PBA$, ale tento fakt zřejmě nepokládal za relevantní, protože ho zmínil až v následném dotazníku.

Hypotézy: Triviální fakt (množina je přímka) a rovnost úhlů $\measuredangle PSA = \measuredangle PBA$.

*Dotazník (jaká fakta student objevil a jakým způsobem):*

1) Problém nevyřešil.
2) Nebyl si vědom, že čtyřúhelník je tětivový.
3) Objevil rovnost úhlů $\measuredangle PSA = \measuredangle PBA = 30°$ (netriviální experimentální fakt). Tento fakt získal s pomocí vizuálního vnímání dynamické konstrukce a měřením.
4) Fakt, že řešením je úsečka, nedokázal zdůvodnit. Tento fakt získal díky GeoGebře.

*Řešení se souborem Geogebry, v němž byla zvýrazněna důležitá fakta:* Student nedokázal problém vyřešit, pouze zopakoval zjištěná fakta.

*Řešení se zdůrazněním Thaletova teorému a věty o obvodových úhlech:* Student nebyl schopen vytvořit důkaz. Z poznámky v závěrečném dotazníku plyne, že nebyl schopen odvodit z faktu $\measuredangle PSA = 30°$, že bod $P$ musí náležet přímce.

*Komentář:* Student ve druhé fázi objevil kromě triviálního faktu i jeden fakt netriviální ($\measuredangle PSA = 30°$). Druhý netriviální fakt nebyl schopen objevit. Student nebyl schopen důkaz dokončit ani v závěrečné fázi: Unikla mu úvaha, že z konstantnosti úhlu $PSA$ plyne, že řešením je přímka.

**Tabulka (3. experiment, 2. úloha), shrnutí dat**:

| **2. (zákl) úloha** | Bez GeoGebry (I. Fáze) | | S Geogebrou (II. Fáze) | | | S Geogebrou (III. Fáze) | IV. Fáze | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Student | **Objevil student relevantní hypotézy?** | **Vyřešil student problém?** | **Objevil student, že čtyřúhelník je tětivový?** | **Objevil student rovnost úhlů PSA=PBA=30°** | **Vyřešil student problém?** | **Vyřešil student problém?** | **Vyřešil student problém, příp. jaké byly jeho problémy při řešení?** | **Proč student problém nevyřešil ve II. fázi?** |
| **SDP** | **NE** (hypotéza byla chybná) | **NE** | **ANO** (Způsob objevu: **konstruktivní argumentace** - abdukce na základě druhého faktu) | **ANO** (Způsob objevu: **náhodný experiment** - studentku úhel nejspíš upoutal vizuálně) | **Ano** | | | |
| **ANO** | **Ano** (Studentka vyslovila správnou hypotézu, že hledanou množinou je úsečka.) | **NE** | **NE** | **NE** | **NE** | **NE** | **Ano.** Studentku nenapadlo aplikovat větu o obvodových úhlech, měla také potíže logickou intrpretací dat (z konstatnosti úhlu plyne, že řešením je přímka). | Problémy s aplikací matematické teorie, studentka neobjevila fakta, vzathující se k řešení. |
| **XY** | **NE** | **NE** | **ANO** (Způsob objevu: **konstruktivní argumentace** - apl. Thaletova teorému) | **NE** | **NE** | **Ano** | | Neobjevil všechna fakta vztahující se k řešení. |

| 2. (zákl) úloha | Bez GeoGebry (I. Fáze) | | S Geogebrou (II. Fáze) | | | S Geogebrou (III. Fáze) | IV. Fáze | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Student | **Objevil student relevantní hypotézy?** | **Vyřešil student problém?** | **Objevil student, že čtyřúhelník je tětivový?** | **Objevil student rovnost úhlů PSA=PBA=30°** | **Vyřešil student problém?** | **Vyřešil student problém?** | **Vyřešil student problém, příp. jaké byly jeho problémy při řešení?** | **Proč student problém nevyřešil ve II. fázi?** |
| **PES** | NE (Studentka se domnívá, že řešením je elipsa) | **NE** | **NE** | **NE** | **NE** | **NE** | **Ano** | Studentka měla dva problémy: neobjevila relevatní fakta a nebyla schopna aplikovat matematickou teorii. |
| **M** | NE (Student se domnívá, že řešením je parabola) | **NE** | **NE** | **ANO** (Způsob objevu: **náhodný experiment**) | **NE** | **NE** | **NE** (Student nepochopil, že z konstatnosti úhlu PSA vyplývá, že řešením je přímka.) | Student neobjevil relevatní fakta a měl potíže s logickou interpretací dat. |
| **KK** | **ANO** (Studentka objevila tětivovost čtyřúhelníku. Způsob objevu: **konstruktivní argumentace**) | **NE** | Tento fakt objevila v předchozí fázi | **NE** | **NE** | **NE** | **NE** | Neschopnost vytvořit deduktivní řetězec, nedostatky v logické interpretaci dat. |

## Data ke druhé otázce

II Jaké jsou příčiny selhání studentů při hledání důkazu, proč pomoc softwaru není v některých případech dostatečná?

Studentka SDP, která vyřešila problém s podporou DGE, objevila rovnost úhlů $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PSA = 30°$ náhodným měřením v GeoGebře. Motivací k měření úhlů bylo nejspíše zjištění, že hledanou množinou je přímka. Za pomoci tohoto faktu dokázala studentka konstruktivně odvodit druhý fakt a poté dokončit důkaz. Tedy klíčová pro ni byla obě fakta, která získala s pomocí GeoGebry (množina a rovnost úhlů).

Studentka XY, která vyřešila úlohu ve třetí fázi, měla problém se zjištěním druhého netriviálního faktu. Teprve pak byla schopna důkaz dokončit.

Studentky PES a ANO důkaz dokončily, až když jim byly prozrazeny vedle klíčových faktů také teorémy, které přímo souvisely s řešením.

Studentka KK a student M nedokončili důkaz ani ve čtvrté fázi. Problém jim činilo vytvoření logického řetězce, který by sdělená fakta propojil.

### 6.2.4 Shrnutí dat z prvních tří experimentů

V této části shrneme všechna dosud uvedená dílčí data. Jejich interpretaci vzhledem k výzkumným otázkám uvedeme v závěrečné sekci této kapitoly. Předtím budeme ještě prezentovat data čtvrtého experimentu, který byl sice zaměřen na stejné otázky jako ty předchozí, ale sběr dat byl přesnější a umožňoval tak sledovat cíle výzkumu detailněji.

**1. problém**

I.a. Napomáhá použití softwaru DGE k objevu relevantních faktů, vztahujících se k řešení problému, ve srovnání s prostředím papír - tužka?

Problém řešilo 11 studentů:

- Počet případů, kdy student byl schopen zformulovat relevantní hypotézu bez softwaru: **0/11**
- Celkem bylo objeveno domněnek: **0/22**
- Počet případů, kdy student byl schopen zformulovat relevantní hypotézu s DGE: **5/11**
- Celkem bylo objeveno domněnek: **10/22**

I.a. Napomáhá použití softwaru DGE k tvorbě deduktivního zdůvodnění řešení ve srovnání s prostředím papír - tužka?

Problém řešilo 11 studentů. Počet úspěšných řešení byl:

- Bez GeoGebry **0/11**
- S GeoGebrou **4/11** (Byli to: MBA,RPP,KJL, DUB)

II Jaké jsou příčiny selhání studentů při hledání důkazu, proč pomoc softwaru není v některých případech dostatečná?

Studenty rozdělíme do kategorií podle toho, ve které fázi problém vyřešili. Úspěšné studenty, kteří problém vyřešili v první nebo druhé fázi, zahrneme do kategorie 2[10]. Studenty, kteří problém vyřešili ve třetí fázi, řadíme do kategorie 3. Analogicky vymezíme kategorii 4. Kategorie 5 značí studenty, kteří problém nevyřešili ani s maximální možnou nápovědou.

[10] Kategorie 1, která by zahrnovala studenty, kteří problém vyřešili samostatně bez softwaru, je v tomto výzkumu prázdná.

| Kategorie | Studenti | Počet studentů, kteří objevili všechny domněnky | Počet studentů, kteří objevili jednu domněnku. | Počet studentů, kteří neobjevili žádnou domněnku. |
|---|---|---|---|---|
| Kategorie 2 | 2 (DUB, KJL) | 2 | - | - |
| Kategorie 3 | 2 (KOK, MAT) | - | - | 2 |
| Kategorie 4 | 0 | - | - | - |
| Kategorie 5 | 2 (DI4, BFL) | - | - | 2 |

Ze sedmi studentů, kteří problém nevyřešili, dvěma stačilo prozradit relevantní fakta, vztahující se k řešení. Žádný student nevyřešil problém ve 4. fázi (v níž byly explicitně zdůrazněny teorémy, vztahující se k řešení). Dva studenti problém nevyřešili ani s maximální možnou pomocí. U zbylých tří studentů nelze říci, jaká pomoc by pro ně byla dostatečná, neboť první experiment se skládal pouze ze dvou fází, nikoli ze čtyř.[11]

Zdůrazněme, že za příčinu neúspěchu nelze považovat neznalost matematické teorie, která byla nutná k vyřešení problému. Studenti byli s touto teorií seznámeni v průběhu předchozího studia a před samotným experimentem jim byla navíc zopakována.

III.b. Jaká je četnost výskytu jednotlivých způsobů objevování? Konkrétně, jak výrazně se na objevu hypotézy podílí řešitelovy znalosti a logika?

11 studentů mohlo objevit celkem 22 netriviálních faktů. Jednotlivé četnosti jsou

| *Počet konstruktivně objevených fakt* | *Počet náhodně objevených fakt* | *Počet relevantních fakt, která studenti neobjevili* |
|---|---|---|
| **8** | **2** | **12** |

[11] V tabulce nejsou zahrnuti studenti, kteří se účastnili prvního experimentu, neboť ten se skládal pouze ze dvou fází.

III.c. Existuje souvislost mezi způsobem objevu relevantních faktů a úspěšností při řešení problému?

Studenti jsou rozděleni do dvou skupin podle toho, zda problém vyřešili nebo nevyřešili.

| *Počty studentů (vyřešili / nevyřešili)* | *Počet konstruktivně objevených fakta* | *Počet náhodně objevených fakt* | *Počet relevantních fakt, která studenti neobjevili* |
|---|---|---|---|
| **4** | **8** | **0** | **0** |
| **7** | **0** | **2** | **12** |

**2. problém**

I.b. Napomáhá použití softwaru DGE k objevu relevantních faktů, vztahujících se k řešení problému, ve srovnání s prostředím papír - tužka?

Problém řešilo celkem 11 studentů:

- Bez GeoGebry bylo schopno zformulovat správnou (netriviální) hypotézu **1/11** studentů.
- S GeoGebrou bylo schopno zformulovat správnou hypotézu **7/11** studentů.
- Celkem byla bez GeoGebry objevena pouze **1 hypotéza z 22** možných. S podporou softwaru bylo objevenou **10 hypotéz z 22** možných.

I.a. Napomáhá použití softwaru DGE k tvorbě deduktivního zdůvodnění řešení ve srovnání s prostředím papír - tužka?

Problém řešilo celkem 11 studentů. Podíl úspěšných řešení je:

- Bez GeoGebry **0/11**
- S GeoGebrou **2/11** (studenti SDP, RPP)

II Jaké jsou příčiny selhání studentů při hledání důkazu, proč pomoc softwaru není v některých případech dostatečná?

Stejně jako v případě 1. úlohy rozdělíme studenty do kategorií podle toho, ve které fázi problém vyřešili.

| Kategorie | Studenti | Počet studentů, kteří objevili všechny domněnky | Počet studentů, kteří objevili jednu domněnku. | Počet studentů, kteří neobjevili žádnou domněnku. |
|---|---|---|---|---|
| Kategorie 2 | 1 (SDP) | 1 | - | - |
| Kategorie 3 | 1 (XY) | - | 1 | - |
| Kategorie 4 | 2 (ANO, PES) | - | - | 2 |
| Kategorie 5 | 2 (KK, M) | - | 2 | - |

Z devíti studentů, kteří problém nevyřešili, pouze jednomu stačilo prozradit relevantní fakta, vztahující se k řešení. Dvěma musely být ještě prozrazeny dva klíčové teorémy, vztahující se k řešení. Dva studenti nebyli schopni zformulovat řešení ani s touto pomocí. U zbylých čtyř studentů nelze vyhodnotit, jaká pomoc by pro ně byla dostatečná, neboť první experiment se skládal pouze ze dvou fází. [12]

III.b. Jaká je četnost výskytu jednotlivých způsobů objevování? Konkrétně, jak výrazně se na objevu hypotézy podílí řešitelovy znalosti a logika?

11 studentů mohlo objevit celkem 22 (netriviálních) faktů. Jednotlivé četnosti jsou:

| *Počet konstruktivně objevených fakt* | *Počet náhodně objevených fakt* | *Počet relevantních fakt, která studenti neobjevili* |
|---|---|---|
| **5** | **6** | **11** |

III.c. Existuje souvislost mezi způsobem objevu relevantních faktů a úspěšností při řešení problému?

Rozdělíme studenty do dvou skupin podle toho, zda problém vyřešili, nebo ne.

| *Počty studentů (vyřešili / nevyřešili)* | *Počet konstruktivně objevených fakt* | *Počet náhodně objevených fakt* | *Počet relevantních fakt, která studenti neobjevili* |
|---|---|---|---|
| **2** | **2** | **2** | **0** |
| **9** | **3** | **4** | **11** |

[12] Stejně jako v předchozím případě, i zde nejsou zařazeni studenti, kteří se účastnili prvního experimentu.

## 6.3 Data výzkumu: čtvrtý experiment

Čtvrtý experiment se od těch předchozích nelišil svými cíli – byly sledovány stejné otázky – ale provedením. Dotazník byl nahrazen nahrávaným rozhovorem s výzkumníkem, navíc byly akce studentů v DGE zaznamenány snímáním obrazovky. Bylo proto možné vzít v potaz i akce a záměry studentů, které nevedly k formulaci relevantních domněnek.

Výzkum se uskutečnil během tří setkání, zúčastnili se ho tři studenti. Všichni tři řešili dva základní problémy, které jsme již dříve uvedli. Dva z těchto tří studentů řešili navíc dva doplňkové problémy, takže celkem byly řešeny čtyři problémy. Zadání a řešení těchto doplňkových problémů je uvedeno v sekci 6.1.4.

Stejně jako v předchozích experimentech i v tomto případě předcházelo samotnému řešení opakování. Tentokrát však studenti dostali také seznam teorémů, zmíněných v sekci 6.1.2, do kterého mohli během řešení nahlížet. Z tohoto důvodu experiment neobsahoval čtvrtou fázi (explicitní zdůraznění relevantních teorémů), neboť studenti měli situaci předem značně ulehčenou. Zdůrazněme však, že počet teorémů, uvedených v seznamu, byl záměrně širší.

Proces řešení každého problému se skládal z těchto fází:

**1. fáze** (bez počítače, 20 minut): Úkolem studentů bylo nalézt množinu bodů a matematicky ji zdůvodnit. Pokud toho nebyli schopni, měli zapsat všechny domněnky, o kterých se domnívají, že s řešením mohou souviset.

**1. rozhovor**: Cílem rozhovoru bylo s jistotou určit, zda student/ka vyřešil/a problém a zda objevil/a nějaké domněnky, o kterých si myslí, že souvisí s řešením. Pokud nějaké domněnky dokázal/a zformulovat, zajímal nás způsob nebo úvaha, která ho/ji k nim vedla.

**2. fáze** (s počítačem, 20 minut): Stejně jako v předchozí fázi bylo úkolem studentů nalézt a zdůvodnit hledanou množinu bodů. Pokud toho nebyli schopni, měli zapsat všechny domněnky, které by podle nich mohly s řešením souviset.

**2. rozhovor**: Cílem rozhovoru bylo s jistotou určit, zda student/ka vyřešil/a problém a zda objevil/a nějaké hypotézy, které se vztahují k řešení. Pokud ano, pak jakým způsobem na ně přišel/la.

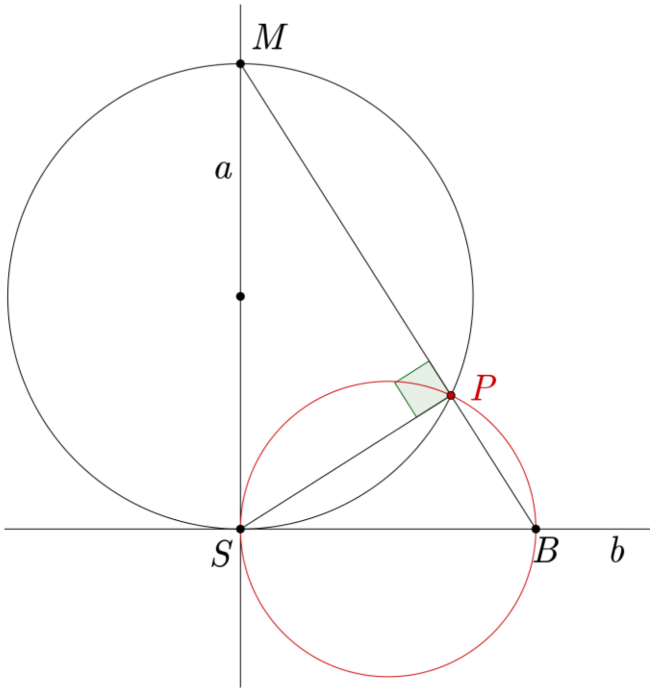
**3. fáze** (s počítačem, 20 minut): Pokud student nevyřešil problém v předchozí fázi, byl mu předložen soubor v GeoGebře, ve kterém byla zvýrazněna všechna relevantní fakta, vztahující se k řešení.

**3. rozhovor:** Cílem bylo určit, zda student/ka problém vyřešil/a a pokud ne, tak proč.

Získaná data prezentujeme podle úloh 1 až 4, ke kterým vztahují.

Poznámka: U přepisů rozhovorů výzkumníka se studenty jsou občas vynechány některé pasáže – buď kvůli přehlednosti (opakování slov a hledání správné formulace, dlouhé pomlky) nebo proto, že se nevztahují k tématu.

### 6.3.1 První problém




*Obrázek 41 Řešení 1. Problému.*

- Studentka **XYZ**

***Řešení bez počítače XYZ*** *(poznámky na papíře):* Studentka se experimentálně pokoušela zjistit hledanou množinu tak, že zkonstruovala několik bodů, patřících do hledané množiny. K žádné hypotéze nedospěla.

*1. rozhovor:*

Výzkumník (**V**): Vyřešila jsi problém?
Studentka (**S**): Myslím si, že ne.
**V:** Máš nějaké domněnky nebo hypotézy, o kterých si myslíš, že s řešením souvisí? Třeba, co si myslíš, že je tou hledanou množinou?
**S:** No, podle toho, jak jsem si to snažila rozkreslit, tak ty body musí ležet, ty průsečíky musí ležet… [studentka ukazuje na pár zkonstruovaných bodů na papíře] když si představím ty přímky [měla na mysli přímky MB], ty se budou posouvat a budou směřovat k přímce… nevím jak je označená tahle přímka…
**V: J**o, SB. Ale teda, nezformulovala jsi žádnou hypotézu?
**S:** Ne, ne.

**V:** Jsi schopná zformulovat nějakou otázku, která by tě ohledně tohoto problému zajímala, ale neznáš na ni odpověď? Zjevnou otázkou je, jaká je ta množina. Máš ještě nějakou?
**S:** …
**V:** Asi ne
**S:** Ne

**Shrnutí rozhovoru:** Studentka neobjevila žádný relevantní fakt. Nenapadla ji ani žádná otázka, která by s řešením mohla souviset.

Hypotézy: žádná

***Řešení s pomocí GeoGebry XYZ*** *(poznámky na papíře):* Studentka objevila hledanou množinu (triviální fakt). K jejímu zdůvodnění se snažila dopracovat s pomocí mocnosti bodu ke kružnici, ale sama netušila, jak.

*2. rozhovor:*

**V**: Vyřešila jsi problém?
**S**: mmm…
**V**: Pravděpodobně ne nebo spíš si myslíš, že ne…
**S**: No, spíš ne.
**V**: Fajn, přišla jsi na nějaké domněnky nebo hypotézy, které s tím řešením souvisí?
**S**: No, tady podle toho teorému… Já jsem se snažila podívat, co z toho bych mohla využít [Drží seznam teorémů, který dostali před výzkumným testem a do kterého mohli kdykoli nahlížet.]
**V**: Co ses snažila využít?
**S**: Snažila jsem se využít ten třetí teorém, fakt, že by podle mě mělo platit, že ten bod B, ten je vlastně vždycky ve stejné vzdálenosti od toho bodu S a tady podle toho teorému by podle mě mělo platit, že vzdálenost mezi body S a B na druhou, by se měla rovnat vzdálenosti vždycky od toho konkrétního průsečíku [ukazuje na bod P] k bodu B krát vzdálenost průsečíku P k bodu M.
**V**: Takhle, $SB^2$ se rovná $BP$ krát… ?
**S**: Krát $BM$.
**V**: $BS^2$ je teda $BP$ krát $BM$. Snažila ses využít tohoto teorému [mocnost bodu ke kružnici]?
**S**: Jo.
**V**: A přišla jsi na něco?
**S**: Snažila jsem si tam udělat obsah, vlastně vytvořit si čtverec [o straně délky] $SB$, pak obdélník…
**V**: Jo, takže jsi sledovala …
**S**: Abych dokázala, že platí ten součin…
**V**: Jo! Ty jsi ho chtěla dokázat, ty jsi chtěla dokázat, že $SB^2$ je $BP$ krát $BM$… a k čemu by to vedlo?... To jsi nevěděla?
**S**: Ne.
**V**: Dobře, měřila jsi nějaké úhly tady?

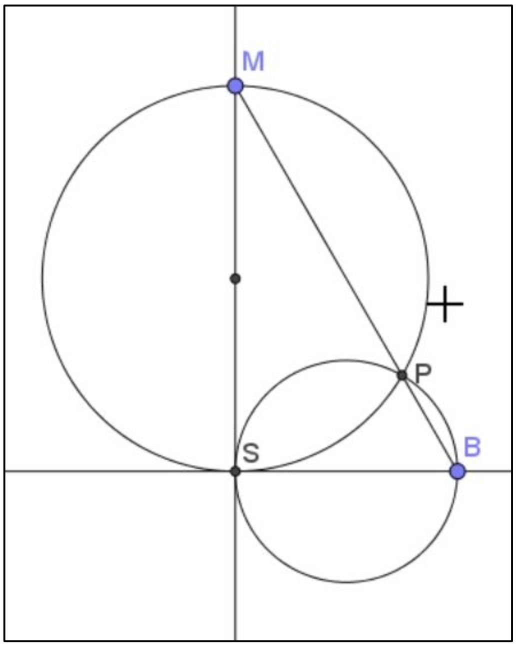
**S**: Vůbec.
**V**: Vůbec. Takže, ani jsi nepřišla na to, že úhel $MPS$ je pravý, že ano?
**S**: Ne.
**V**: Ani jsi nepřišla na to, že úhel $SPB$ je pravý? … Vůbec tě nenapadlo měřit úhly?
**S**: Ne.

**Shrnutí rozhovoru:** Studentka se pokoušela aplikovat mocnost bodu ke kružnici. Za tím účelem prováděla v GeoGebře experimenty. Měřit úhly ($MPS$ a $SPB$) ji vůbec nenapadlo.

Hypotézy: Studentka objevila triviální fakt (hledanou množinu). Žádný jiný neobjevila.

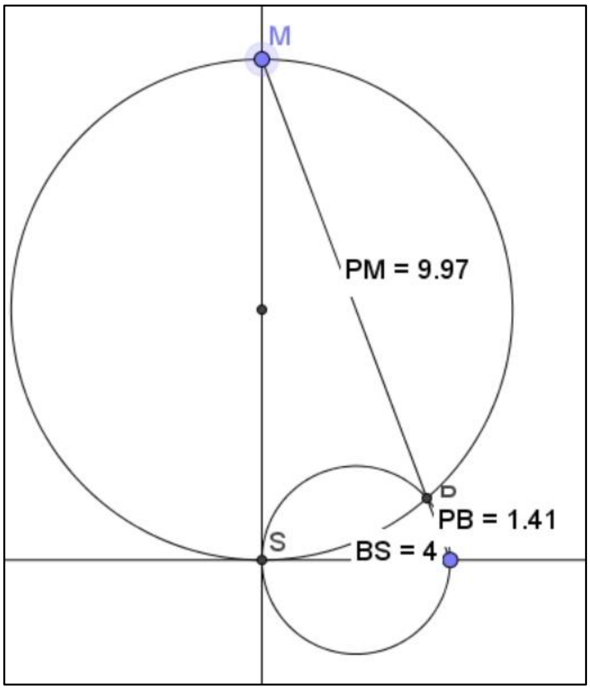
*Akce **XYZ** provedené v DGE (screenshoty obrazovky):*

- Studentka nejdříve určila hledanou množinu bodů:



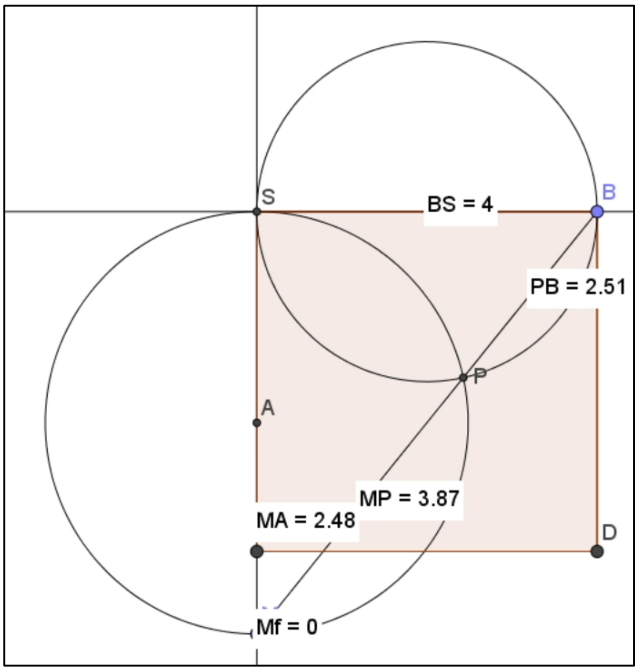

*Obrázek 42*

– Dále změřila několik úseček, zřejmě se záměrem (jak plyne z rozhovoru) nějak aplikovat větu o mocnosti budu ke kružnici:




*Obrázek 43*

– Poté použila modalitu „wandering dragging“ (sekce 5.3.): Tahala objekty konstrukce bez zřejmého záměru s vírou, že něco objeví.
– Opět se snažila využít mocnosti bodu ke kružnici, ale bez jakéhokoli tušení, jakou roli by v řešení mohla hrát:




*Obrázek 44*

***Řešení s pomocí souboru, v němž byla zvýrazněna důležitá fakta*** *(poznámky na papíře):* Studentka pochopila, že ve zdůvodnění budou roli hrát úhly a Thaletova věta.

- Nejdříve s pomocí Thaletovy věty zdůvodnila 2. tvrzení (fakt, že úhel $BPS$ je pravý), a to na základě předpokladu, že bod $P$ leží na kružnici s průměrem $SB$. Jedná se o abduktivní úvahu, neboť stojí na empiricky vypozorovaných faktech.
- Dále zdůvodnila 1. tvrzení (úhel $SPM$ je pravý). Toto zdůvodnění vycházelo z předpokladů a je tedy deduktivní.
- Studentka však nebyla schopna vytvořit z těchto faktů deduktivní řetězec, který by vycházel ze známých faktů a dospěl k dokazovanému tvrzení.

*3. rozhovor:*

**V**: Už víme, že řešením je kružnice s průměrem $BS$. A teď nám jde o to, jak to zdůvodnit. Zkusila bys říct, jak nejlépe bys to zdůvodnila ty?
**S**: … to $P$ se musí posouvat… vlastně ať je to $P$ kdekoli, ať je ta kružnice jakkoliv velká [kružnice s průměrem $MS$], tak vždycky platí, že ten úhel $MPS$ je 90°, protože je to obvodový úhel. A zároveň, když si tam představíme tu kružnici…
**V**: Takhle, ty nemůžeš brát [hledanou] kružnici jako předpoklad…
**S**: jo
**V**: … ale jako důsledek. Takže jsme u toho, že tenhle úhel $MPS$ je 90°, a co dál…
**S**: No, zároveň tedy platí, že ten bod $P$ se pohybuje někde nad tou úsečkou $SB$… zatím nevíme, že je to na kružnici a musíme dokázat, že je to kružnice… no, tak si můžeme představit úsečku $SP$.
**V**: No, víme, že úsečky $MP$ a $SP$… jsou kolmé a co dál?
**S**: No takže tím pádem, když víme, že ten úhel $SPM$ je 90° a ty úsečky jsou kolmé, tak ten úhel $SPB$ musí být taky 90° a teď už tedy můžeme vycházet z toho, že je to bod na Thaletově kružnici…
**V**: … a to je řešení.

**Shrnutí rozhovoru:** Studentka znala potřebnou teorii a všechna fakta, vztahující se k řešení, navzdory tomu dokázala dospět k důkazu teprve s vnější pomocí. Na základě výše prezentovaných dat se lze domnívat, že jejím hlavním problémem ve finální fázi bylo vytváření logického řetězce.

- Student **ABC**

***Řešení bez počítače*** *(poznámky na papíře):* Student se domníval, že úhel $SPB$ je pravý. Na základě toho vyvodil, že bod $P$ leží na Thaletově kružnici s průměrem $SB$. Chybělo zdůvodnění, proč je tento úhel pravý. Lze se oprávněně domnívat, že studenta k tomuto faktu dovedl záměr aplikovat Thaletovu větu (kterou jsme před experimentem opakovali) a poté vizuálně ověřil, že je tato domněnka správná. Za deduktivní důkaz to však pokládat nelze.

*1. rozhovor:*

**V**: Takže…
**S**: Můžu říct svoji myšlenku… ten bod $P$ by se mohl pohybovat po Thaletově kružnici …
**V**: Jo… výborně, proč si myslíš, že tenhle úhel [$BPS$] je pravý?
**S**: … když povedu [bodem $P$] kolmici [k přímce $BM$], tak $P, S$ na ni leží a tenhle úhel [$BPS$] musí být určitě pravý…
**V**: Takže… co je teda řešením té úlohy, jsi schopen to řešení formulovat nebo ne?
**S**: Ta Thaletova kružnice s průměrem $SB$?
**V**: Jo, jenom si tím nejsi úplně jistý?
**S**: nejsem si tím úplně jistý, potřeboval bych to ještě víc promyslet. Nejsem si jistý, jestli je to správně, byla to první myšlenka, která mě napadla. Jsem si téměř jistý, že když tím bodem $M$ půjdu dolů [po přímce $SM$], tak se to tam bude držet, ale nejsem si jistý, jestli to tak bude, když tím bodem půjdu nahoru [po přímce $SM$]. Je jasné, že když projdu [bodem $M$] přes ten bod $S$, tak se mi to překlopí. Takže jsem si jistý, že z části to bude patřit kružnici [Thaletově] a odhadnul bych, že [celá množina bodů $P$] bude na Thaletově kružnici.
**V**: Výborně, tak jo. Teď se na to koukni s GeoGebrou.

**Shrnutí rozhovoru:** Rozhovor potvrdil to, co již bylo patrné ze studentových poznámek, totiž že odhalil klíčovou myšlenku (úhel $SPB$ je pravý a bod $P$ leží na Thaletově kružnici), ale nebyl schopen vytvořit úplné logické zdůvodnění, vycházející od předpokladů k závěru. Především chybělo zdůvodnění, proč je úhel $SPB$ pravý.

Hypotézy: Student se správně domníval, že řešením je kružnice. Zároveň odhalil klíčovou myšlenku řešení problému – aplikovat Thaletovu věty. To znamená, že si byl vědom, že úhel $SPB$ je pravý. Není však jisté, že věděl, jak to zdůvodnit.

***Řešení s pomocí GeoGebry*** *(poznámky na papíře):* Student věděl, že přímka $SP$ je kolmá na přímku $MB$. Z toho vyvodil, že bod $P$ leží na Thaletově kružnici. Chybělo však matematické zdůvodnění, proč je přímka $SP$ kolmá na přímku $MB$.

*2. rozhovor:*

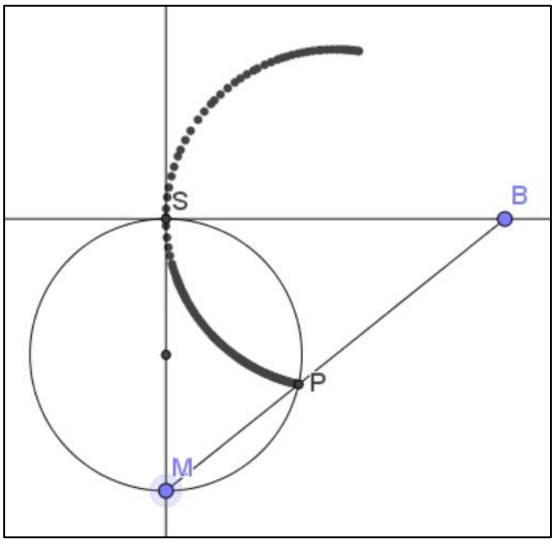
**V**: Když vezmeme to tvé řešení… tady si došel [k tvrzení] že úhel $SPB$ je pravý. Proč je pravý?
**S**: Já jsem si tohle [přímku $SP$] rovnou zkonstruoval jako kolmici.
**V**: Takhle, já vím, ale o kolmici se v zadání té úlohy nemluví. Tam se mluví o tom, že se vlastně vede přímka k pevnému bodu $B$ a s tím bodem $M$ pohybujeme. Takže otázka je, proč je tenhle úhel $SPB$ pravý.
**S**: Jo, tak na to jsem možná přišel náhodou… ale potom jsem taky uvažoval, že [úhel] $MSB$ je na Thaletově kružnici, ale to není důležitá informace … to bych ještě potřeboval pořádně … no, protože vlastně, že ten bod $P$ leží na Thaletově [kružnici], tohle je vlastně Thaletova kružnice…

**V**: Přesně tak, takže tenhle úhel [$MPS$]…
**S**:… musí být pravý a [vezmu] doplněk potom do $180°$ stupňů
**V**: a proto kružnice … ten bod $P$ leží na Thaletově kružnici.
**S**: Jasně.
**V**: Na úhel $MPS$ jsi přišel s GeoGebrou nebo bez ní?
**S**: Počítal jsem s tím, už když jsem kreslil [náčrtek na papír].
**V**: To samé, že úhel $SPB$ je pravý?
**S**: Jo.
**V**: A měl jsi rovněž hypotézu, že [řešením je kružnice]
**S**: jo, tu jsem měl
**V**: takže, dalo by se říct, že GeoGebra tě jenom utvrdila v řešení [které jsi nalezl bez ní]?
**S**: jo, já jsem si jenom nebyl jistý, co se bude dít, když ten bod budu posouvat nahoru, tušil jsem, že se bude furt pohybovat po Thaletově kružnici, ale nebyl jsem schopný si to představit.
**V**: Vlastně pro tebe byla těžká konkrétní představa, ale tušil jsi, že to bude Thaletova kružnice?
**S**: Jo, já jsem si to i s otazníkem zapsal.
**V**: Dobrý, fajn.

**Shrnutí rozhovoru:** Student se díky GeoGebře utvrdil ve faktech, která získal před ní. Navzdory zjištěným faktům byl schopen dokončit důkaz až při rozhovoru s výzkumníkem. Předtím při důkazu vycházel z předpokladu, který byl sice pravdivý, ale nedokázaný: Totiž že přímka $SP$ je kolmá na přímku $MB$.

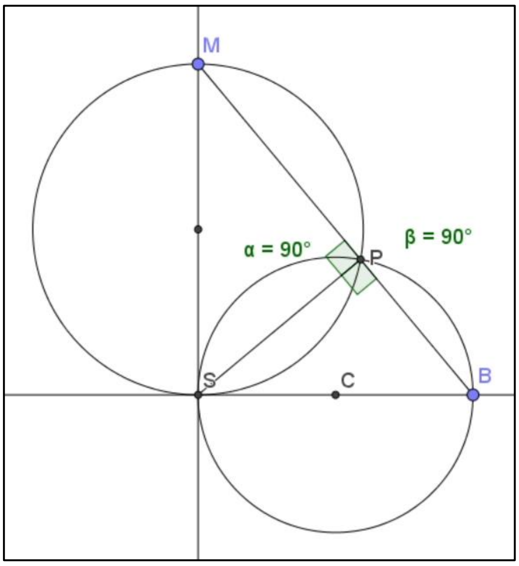
*Akce **ABC,** provedené v DGE (screenshoty obrazovky):*

- Student se nejdříve utvrdil, že hypotéza, kterou dokázal zformulovat zcela samostatně, je správná.




*Obrázek 45*

– Dále vyznačil do konstrukce oba úhly (netriviální fakta). Student si tedy byl vědom klíčové myšlenky důkazu. Zdůrazněme, že důležitosti úhlů si byl student vědom už v předchozí fázi a právě na základě znalosti těchto úhlů formuloval správnou hypotézu, že řešením je kružnice.




*Obrázek 46*

- Studentka **RIRI**

***Řešení bez počítače*** *(poznámky na papíře):* Studentka zkonstruovala několik bodů $P$. Hádala, že řešením je část hyperboly nebo kružnice a poznamenala, že je zde určitě „zaoblení“, tedy že řešením není přímka.

*1. rozhovor:*

**V**: Myslíš si, že jsi problém vyřešila?
**S**: Jo (smích) … něco mě napadlo, tak asi něco mám.
**V:** Dobře, tak co je tvým řešením? Nebo takhle, myslíš si, že je to spíš hypotéza nebo že to [řešení] umíš zdůvodnit?
**S:** Hypotéza.
**V:** Hypotéza. A co je tedy tou hypotézou?
**S:** No, že vlastně to $MP$ mi tvoří nějaký poloměr kružnice, na ní mám nějaký fixní bod [ukazuje, na jistou kružnici se středem $M$ a procházející bodem $P$].
**V:** Ta kružnice prochází bodem $S$ tady? Když pohybuješ tím bodem $M$?
**S:** Ne, $M$ je pro mě středem té kružnice.
**V:** Jo! Ty hledáš tu množinu?
**S:** No
**V:** Jo, ale tady je problém, že pokud je středem [hledané množiny] bod $M$, tak přece ten bod $M$ není fixní? [podle zadání]
**S:** Jo, ta kružnice je jenom taková náznaková.
**V:** Jo, takže předpokládáš, že je to kružnice …

**S:** Nebo nějaký zaoblený tvar, část hyperboly. A pak mě tady napadla druhá věc, já znám tuhle polohu [bodu $P$], kterou mám jako primární [ukazuje na náčrtek] a pak znám ještě druhý bod [ukazuje na bod $S$]
**V**: Výborně, takže máš dva body té množiny.
**S**: [dále] to bude souměrné [hledaná množina bude souměrná podle přímky $SB$]. Tady mi to začíná [ukazuje na bod $P$] a tady mi to končí [ukazuje na bod $S$] a teď odhaduju jenom tu středovou část [množiny mezi body $P$ a $S$] na tomto intervalu.
**V**: Dobře, takže řešením je spíš tato kružnice nebo tato kružnice [studentka načrtla dvě kružnice spojující body $P$ a $S$, obě nakreslila od ruky a žádná z nich nebyla identická se správným řešením].
**S**: Já si myslím, že takhle nějak [ukazuje na jednu z nich].
**V**: Dobře, to by bylo všechno a teď to zkus s GeoGebrou

**Shrnutí rozhovoru:** Studentka na základě dvou bodů (jednoho bodu *P* a daného bodu *S*) hádala, že by hledanou množinou mohla být kružnice. Její návrh však nebyl tou kružnicí, která je řešením problému. Navíc pro svůj odhad neměla žádné argumenty, které by ho podporovaly – je to prostě odhad, založený na představě, jak se asi body $P$ budou měnit, pokud budeme pohybovat bodem $M$.

Hypotézy: špatné

***Řešení s pomocí GeoGebry*** *(poznámky na papíře):* Studentka objevila triviální fakt, který se pokoušela zdůvodnit pomocí mocnosti bodu ke kružnici a poté pomocí definice kružnice jako množiny bodů s konstantní vzdáleností od středu úseky $SB$. Klíčová myšlenka využití úhlů ji nenapadla.

*2. rozhovor:*

**V**: Tak, první otázka: vyřešila jsi problém?
**S**: Určitě je to kružnice.
**V**: Je to kružnice … jaká kružnice?
**S**: Se středem ve středu úsečky $SB$ a s poloměrem…
**V**: Jasně, je to prostě kružnice s průměrem $SB$
**S**: Přesně tak.
**V**: Fajn, dokázala bys to nějak zdůvodnit?
**S**: No, ten bod… bude to souviset s mocností [bodu ke kružnici]?
**V**: Myslíš?
**S**: No, protože … tohleto je vlastně tětiva [ukazuje na přímku $BP$]. Když já ji budu takhle posouvat po přímce [má na mysli posun bodu $M$ po přímce $MS$], tak se dostanu do bodu, kdy mi vytvoří tečnu k té kružnici… tohleto je pohyblivý bod, který se…
**V**: Takhle, dobře. Ty ten bod $M$ budeš posouvat [nahoru po přímce $SM$] to znamená, že poloměr té kružnice se bude zvětšovat a ty tvrdíš, že tady $MB$ bude tečna.
**S**: Můžu se vrátit k té GeoGebře, abych vám to ukázala……[studentka se přesouvá k počítači]… ta přímka [$MB$] je tětivou kružnice která nám vzniká [hledaná množina bodů] a pokud mi bod $P$ splyne s bodem $B$, pak by se to [přímka $MB$] měla stát tečnou [kružnice s průměrem $MB$, hledané množiny].

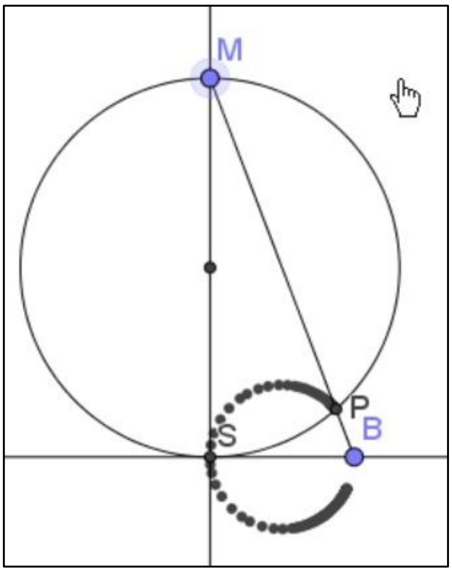
**V**: Dobře, to sice jo, ale ten bod $M$ vlastně bude v nekonečnu, bude prostě „strašně daleko"…
**S**: a to je z toho důvodu, že tady je jako pravý úhel [má na mysli úhel $BSM$], tohleto je tečna, to $MS$ je tečna ke kružnici [s průměrem $BS$], no a potom … já nevím, jak to přesně bylo …
**V**: Takhle, nám jde o to zdůvodnit, proč tedy hledanou množinou je kružnice s průměrem $SB$ a ne jiná kružnice, která prochází body $S$ a $B$, třeba tato kružnice [ukazuje na jinou kružnici v náčrtku], to je otázka.
**S**: No a potom ještě jedna věc [úsměv], já jsem si kreslila… [studentka v GeoGebře pohybuje bodem $B$ a bod $M$ nechává pevný. Zjišťuje, že množinou bodů $P$ je v takovém případě kružnice s průměrem $MS$]
**V**: No, to je duální problém, ale vlastně teď jsi prohodila osy. Řešíš tu samou úlohu, jenom fixní je bod $M$ a bodem $B$ pohybuješ…
**S**: Jo.
**V**: Takže, když to shrnu, uměla bys nějak zdůvodnit, když teda pohybuješ tím bodem M, tak ten bod P ti vykresluje kružnici s průměrem SB?
**S**: Tady je konstantní vzdálenost, která se musí udržovat, aby mi to vykreslilo kružnici [studentka má na mysli poloměr].
**V**: Konstantní vzdálenost čeho?
**S**: $C$ a $P$ [jako bod $C$ si studentka označila střed úsečky $BS$].
**V**: Ale tak musíš ukázat, že ta vzdálenost je konstantní.
**S**: Když budu mít spojnici středu na kružnici … [Studentka dál uvádí jakési argumenty, proč je řešením kružnice. Ty ale mají povahu opakování empirických faktů nebo definic.]
**V**: … dobře, nevadí, sedni si zase sem, jenom ještě několik otázek. Já teda… To tvé řešení, popis toho řešení je správně, ale to zdůvodnění se mi nelíbí, jo. A teď se tě zeptám na několik otázek … Takhle, ty jsi teda určila, že řešením je kružnice s průměrem $SB$ a teď otázka: změřila jsi tento úhel? $MPS$?
**S**: Ne.
**V**: Vůbec tě to nenapadlo, že by tam mohl hrát roli?
**S**: Až teď.
**V**: Až teď. A tenhle úhel tím pádem jsi taky nezměřila [úhel $SPB$]?
**S**: Ne.
**V**: Ten je taky $90°$. Já ti teď řeknu, že tenhle úhel je pravý a tenhle úhel je taky pravý [úhly $SPB$ a $SPM$] a zkusíš to teď zdůvodnit, jak nejlépe umíš, jo?

**Shrnutí rozhovoru:** Z rozhovoru bylo patrné, že studentka je ctižádostivá a nechce se smířit s nevyřešením. Bohužel kromě triviálního faktu nezjistila s pomocí GeoGebry žádná fakta, která by šlo v důkazu použít. Nezměřila žádný z úhlů, které jsou pro řešení klíčové, a rovněž ji nenapadlo, že v řešení může hrát roli Thaletova věta. Snažila se aplikovat mocnost bodu ke kružnici, ale to k ničemu nevedlo.

Hypotézy: Studentka objevila pouze triviální fakt (hledanou množinu).

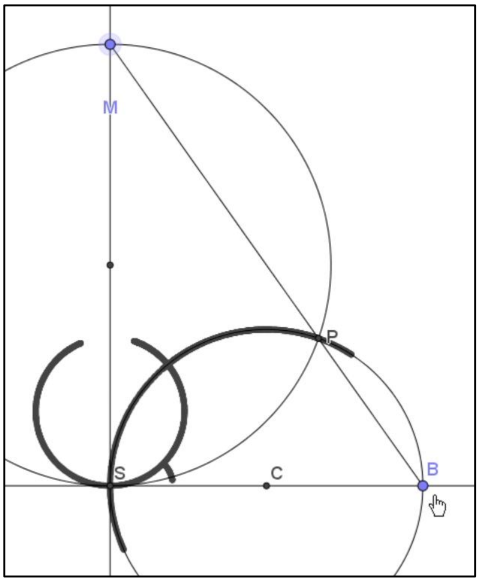
*Akce **RIRI,** provedené v DGE (screenshoty obrazovky):*

– Studentka nejdříve určila hledanou množinu bodů:




*Obrázek 47*

– Poté použila modalitu „wandering dragging“ (sekce 5.3): Tahala objekty konstrukce bez zřejmého záměru s vírou, že něco objeví.




*Obrázek 48*

***Řešení s pomocí souboru, v němž byla zvýrazněna důležitá fakta** (poznámky na papíře):* Poznámky studentky byly hodně kusé. Bylo z nich patrné, že odhalila klíčovou myšlenku, tedy že úhel $MPS$ je pravý v důsledku Thaletovy věty. Dále si však nevěděla rady.

*3. rozhovor:*

**V**: Tak, vyřešila jsi problém teď, jako myslím zdůvodnila?

**S**: Pokusím se to zdůvodnit. No prostě jsou tady dvě Thaletovy kružnice… Tady to jenom načrtnu, tady je pravý úhel a tady je pravý úhel [studentka vyznačuje úhly $SPB$ a $SPM$]….
**V**: Takže první otázka: proč je úhel $MPS$ pravý?
**S**: $MPS$ pravý? Ne $MPS$ ne… $SPB$… $MSB$? [je vidět, že studentka tápe a neví, čím má začít]
**V**: Tak, dokázala bys nějak zdůvodnit proč je řešením kružnice s průměrem $SB$?
**S**: …[studentka přemýšlí]… Tady ten úhel se bude vždycky zachovávat [úhel $MPS$]
**V**: Jo, je 90 stupňů, proč?
**S**: Protože jakýkoli bod, pohybující se po téhle kružnici [s průměrem $MS$] bude svírat …
**V**: …90 stupňů
**S**: s těmi úsečkami [$MP$ a $PS$] 90 stupňů, protože je to Thaletova kružnice, která je sestrojená nad tím průměrem [$MS$].
**V**: Takže, víme, že tento úhel je 90° vždycky pro libovolnou polohu bodu $M$
**S**: Zároveň, $MB$ je přímka, to znamená, že tento úhel [$SPB$], musí být taky pravý.
**V**: A vyplývá z toho něco, že tento úhel, $SPB$, je pravý?
**S**: No, pokud budu chtít najít tu množinu, tak z ní vidím [úsečku $SB$] po úhlem 90°, tak to může být jedině kružnice.
**V**: Takže jsi to teď vyřešila. To je řešení. Takže já to jenom shrnu [dochází k rekapitulaci řešení]. Teď teda několik otázek. V první fázi tě nenapadlo změřit tyto úhly [$MPS$ a $SPB$]? Netušila jsi, že s řešením mohou souviset, předpokládám.
**S**: Ne.
**V**: A snažila ses spíše aplikovat tu mocnost bodu ke kružnici?
**S**: Nejdříve [jsem použila] představivost, abych věděla, co to asi bude.
**V**: Takhle, určila jsi tu množinu, a pak ses to pokoušela zdůvodnit pomocí mocnosti bodu ke kružnici, nebo…
**S**: Jo, ano, protože… já jsem se snažila dokázat, že tato vzdálenost se bude zachovávat [poloměr kružnice s průměrem $SB$] a pustila jsem se do té mocnosti, protože tam jsou vztahy délek.. takže nějak takhle jsem to směřovala.
**V**: Jo, dobrý, chápu.

**Shrnutí rozhovoru:** Studentka nakonec řešení v průběhu rozhovoru dokončila. Bylo patrné, že při důkazu nevěděla, čím má začít, ale nakonec našla správnou sekvenci myšlenek prakticky bez pomoci. Z rozhovoru je také patrné, že na mocnost bodu ke kružnici se v předchozí fázi upnula proto, aby dokázala, že poloměr kružnice je konstantní. Z toho je patrná její nezkušenost: Ačkoli mocnost bodu ke kružnici s délkami souvisí, asi jen zřídka ji lze využít k důkazu konstantnosti jistého poloměru.

**Tabulka (4. experiment, 1 úloha), shrnutí dat:**

| **1. (zákl) úloha** | Bez GeoGebry (I. Fáze) | | S Geogebrou (II. Fáze) | | | S Geogebrou (III. Fáze) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Student | **Objevil student relevantní hypotézy?** | **Vyřešil student problém?** | **Objevil student, že úhel MPS=90°?** | **Objevil student, že úhel SPB=90°?** | **Vyřešil student problém?** | **Vyřešil student problém?** | **Jaké byly jeho problémy při řešení?** | **Proč student problém nevyřešil ve II. fázi?** |
| **ABC** | Ano (Student objevil klíčovou myšlenku: Aplikaci Thaletova teorému) | NE (zdůvodnění nebylo přesné) | **Ano** (Tento fakt student objevil v předchozí fázi) | **Ano** (Tento fakt student objevil v předchozí fázi) | Ano (Student nakonec s mírnou pomocí dochází k přesnému zdůvodnění) | | Implicitně předpokládal něco co se mělo dokázat (totiž že úsečka SP je kolmá na MB) | |
| **XYZ** | NE | NE | NE | NE | NE (Studentka se snažila aplikovat mocnost bodu ke kružnici, ale ta zde k ničemu není) | Ano | Studentka měla problémy, přestože znala fakta i potřebnou teorii. Měla problém vytvořit logický řetězec. V jejích úvahách se objevily abduktivní úvahy na místo deduktivních. | Studentku vůbec nenapadlo, že by v řešení mohly hrát roli úhly. Neodhadla správnou strategii důkazu |
| **RIRI** | NE | NE | NE | NE | NE (Studentka se snažila aplikovat mocnost bodu ke kružnici. Myšlenka, že s řešením by mohly souviset úhly, ji nenapadá) | Ano | I tato studentka měla problémy vytvořit logický řetěz. | I tato studentka zvolila chybnou strategii: chtěla aplikovat mocnost bodu ke kružnici. |

## Data ke druhé otázce

II Jaké jsou příčiny selhání studentů při hledání důkazu, proč pomoc softwaru není v některých případech dostatečná?

U studenta ABC je nutné podotknout, že by problém úplně vyřešil už v první fázi bez počítače, pokud by výzkumník naléhal na to, aby své kroky přesně zdůvodnil. Jediné, v čem mu GeoGebra pomohla, byla konkrétní vizualizace řešení, které bylo obtížné si představit. Lze říci, že GeoGebra pouze utvrdila studenta, že jeho myšlenka byla správná. Jeho hlavním problémem při vytváření důkazu bylo, že do předpokladů zahrnul fakt, který opomněl zdůvodnit. Když na to byl upozorněn, dokázal důkaz dokončit.

Příčiny selhání studentek XYZ a RIRI ve druhé fázi lze spatřovat v tom, že neodhalily klíčovou myšlenku – tedy, že s řešením souvisí Thaletova věta a že je nutné zaměřit se na úhly. Pomoc GeoGebry tak nedokázaly využít. Místo toho sledovaly jiný (chybný) záměr – aplikaci věty o mocnosti bodu ke kružnici. Ačkoli obě studentky důkaz dokončily ve třetí fázi, stalo se tak po značné době. Z rozhovoru bylo patrné, že oběma dělalo potíže vytvořit ucelený logický řetězec, vycházející z předpokladů a směřující k závěru. Studentka XYZ navíc brala do svých úvah jako předpoklad nedokázané tvrzení (že množinou je kružnice s průměrem $SB$).

Problémy studentek shrňme:

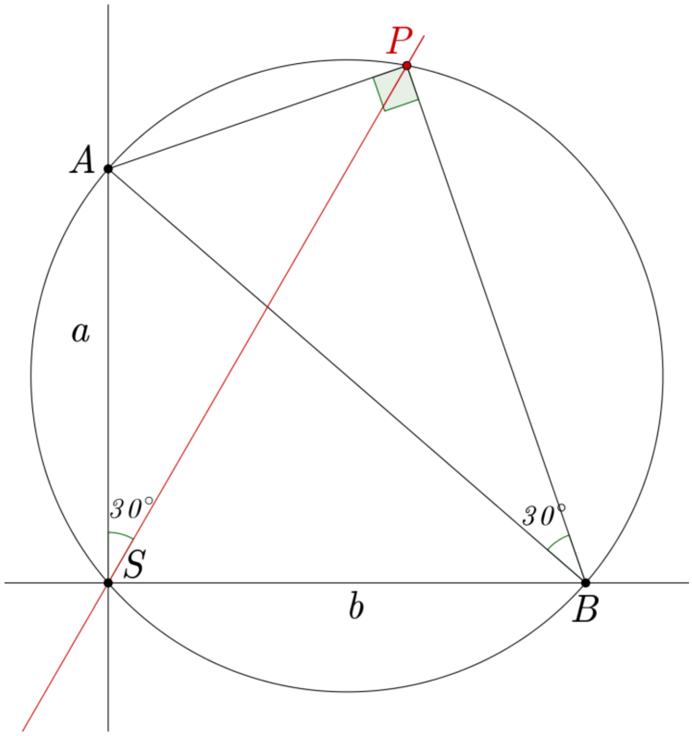
- Obtíže s výběrem správných teorémů (správný cit pro vedení důkazu).
- Obtíže s vytvořením deduktivního řetězce, vycházejícího od předpokladů k závěru.
- Nepodařilo se jim objevit klíčovou myšlenku důkazu.

**Jakým způsobem studenti nástroje DGE využívají?**

Tuto otázku jsme v předchozích třech experimentech nekladli jednoduše proto, že dotazník byl zaměřen pouze na relevantní fakta, vztahující se k řešení. Avšak v tomto experimentu jsme studentům snímali obrazovku a spolu s následným rozhovorem jsme tak mohli zjistit, jaké strategie studenti využívali a s jakým záměrem.

- Studentka XYZ
  Používala modalitu „wandering dragging“ – tahání bez plánu za účelem objevení domněnek. Tato modalita jí však nic nepřinesla.
  Dále používala nástroj „měření úseček“, a to za účelem aplikace teorému mocnosti bodu ke kružnici. Jinými slovy, studentka používala nástroje softwaru s konkrétním záměrem, který však s řešením problému nesouvisel. V rámci UTM to spadá pod „náhodný“ nebo „heuristický“ experiment.
- Studentka RIRI
  I tato studentka, kromě toho, že určovala hledanou množinu, zůstala u modality „náhodné tahání“. V rámci UTM se jedná o kategorii „vizuální vnímání a dynamická změna konstrukce“.
- Student ABC
  Tento student používal GeoGebrou pouze jako prostředek k verifikaci svých hypotéz, na které přišel dříve.

### 6.3.2 Druhý problém




*Obrázek 49 Řešení 2. problému*

- Studentka **XYZ**

***Řešení bez počítače*** *(poznámky na papíře):* Studentka se experimentálně pokoušela identifikovat hledanou množinu konstrukcí několika bodů $P$. Nedošla k žádnému závěru. Díky aplikaci Thaletovy věty objevila první netriviální fakt – že čtyřúhelníku $ASBP$ lze opsat kružnici. Postoupit dále v řešení však nedokázala.

*1. rozhovor:*

Výzkumník (**V**): Vyřešila jsi problém?
Studentka (**S**): Nevyřešila.
**V:** Máš nějaké domněnky nebo hypotézy?
**S:** No, hypotézy asi úplně ne… spíš jenom domněnky z náčrtků, ale …
**V:** Takže žádné hypotézy nemáš?
**S:** Ne, ne.
**V:** Máš nějakou otázku, o které si myslíš, že s řešením souvisí?
**S:** No, napadlo mě, jestli s tím nesouvisí, že i ten trojúhelník, $SAB$, je vlastně pravoúhlý. Snažila jsem se zkusit, jak by vypadaly… kde by se nacházely středy Thaletovy kružnice, na které musí ležet ten bod $P$ [jinými slovy, studentka se ptá na množinu středů kružnic opsaných čtyřúhelníku $SAPB$, pokud pohybujeme trojúhelníkem $APB$ po daných přímkách]… a ty taky půjdou nahoru stejně jako [když pohybujeme] bodem $A$ nahoru… [úsměv]… no…
**V:** No, takže nemáš nic konkrétního… prostě experimentálně jsi se snažila…

**S:** … využít toho trojúhelníku $SBA$ nebo najít tam nějaké vztahy.
**V:** Dobrý, teď to zkusíš s GeoGebrou.

**Shrnutí rozhovoru:** Studentka objevila první netriviální fakt, že čtyřúhelník $APBS$ je tětivový. Z rozhovoru je patrné, že si nebyla jistá, zda tento fakt s řešením souvisí. Dále její pozornost zaujala množina středů kružnic, opsaných čtyřúhelníku $APBS$. Tato otázka však s řešením nesouvisí.

Hypotézy: Čtyřúhelník $APBS$ je tětivový.

***Řešení s pomocí GeoGebry*** *(poznámky na papíře):* Studentka objevila s pomocí GeoGebry i druhý netriviální fakt, rovnost úhlů $\measuredangle ASP = \measuredangle ABP = 30°$. Logické zdůvodnění tohoto faktu však chybělo. Z následujícího rozhovoru bude patrné, že tento fakt objevila s pomocí funkce tahání objektů. Klíčovou teorii, totiž větu o obvodových úhlech, studentka nebyla schopna aplikovat.

*2. rozhovor:*

**V**: Myslíš, že jsi problém vyřešila nebo ne?
**S**: No, jestli jsem to správně pochopila, tak řešením by měla být úsečka…
**V**: Jo, a máš nějaké zdůvodnění pro to?
**S**: No podle toho, jak jsem si to vykreslila v GeoGebře, tu stopu… tak myslím, že by to šlo zdůvodnit… teda jestli je to dostatečně silné zdůvodnění … když si představím čtyřúhelník $ASBP$ … před tím jsem říkala, že to souvisí s tím trojúhelníkem $SBA$ … pro ten čtyřúhelník by teda mělo platit, že je tětivový… ty protější úhly by měly být stejně velké a když …
**V**:… součet protějších úhlů je $180°$
**S**: Ano a když úhel $ASB$ má $90°$ a tenhle [úhel $APB$] taky, tak $PS$ je vlastně úsečka…
**V**: Takže přišla jsi na to, že řešením je úsečka… nebo jakási úsečka $PS$, přišla jsi na to, že čtyřúhelník $APBS$ je tětivový. Na to jsi přišla v důsledku aplikace Thaletova teorému nebo spíš vizuálním vnímáním?
**S**: Spíš podle té GeoGebry…
**V**: Prostě jsi zkusila opsat tomu čtyřúhelníku kružnici a…
**S**: To jsem nezkusila … [úsměv]
**V**: Jo, dobrý, takže spíš to byl Thaletův teorém, že součet protějších úhlů je $180°$?
**S**: Jo, tady je $90°$ [$ASB$] a tady je $90°$ [$APB$], takže jsem předpokládala, že všechny čtyřúhelník [$APBS$] jsou tětivové.
**V**: Jo… to, že je ten čtyřúhelník tětivový, je dobře, nicméně k úplnému zdůvodnění to nestačí… máš ještě nějaký fakt?
**S**: Pak ještě některá fakta, která nevím, jestli k něčemu jsou. Například, že úhly mezi tou přímkou $SP$ a mezi přímkami $a$ a $b$ jsou $30$ a $60$ stupňů.
**V**: A na to si přišla jak?
**S**: Protože, když jsem si tam zkusila představit ten trojúhelník… když to $B$ se bude hodně blížit k tomu $S$…
**V**: To znamená, ty jsi ten úhel nejdříve změřila a pak si to zdůvodnila větou o obvodových úhlech, nebo naopak? [Výzkumník špatně pochopil vyjádření studentky. Pod formulací „$B$

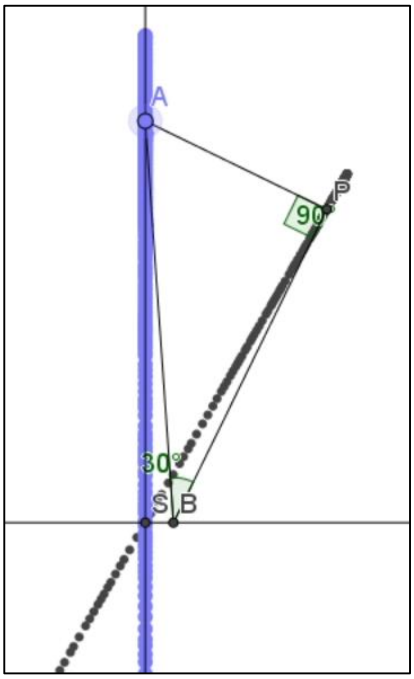
se bude blížit k bodu $S$“ chápal pohyb bodu $B$ po kružnici opsané čtyřúhelníku $APBS$. Tak to ale studentka nemyslela, větu o obvodových úhlech vůbec neuvažovala a měla na mysli pohyb bodu $B$ po přímce $SB$, když bude využívat nástroj tahání objektů.]
**S**: Ne, tu větu jsem nepoužívala. Já jsem si tenhle trojúhelník [$APB$] představila takhle [bod $B$ je identický s bodem $S$ a přepona $AB$ trojúhelníku leží na přímce $a$], tak tady je těch 30 stupňů
**V**: Takhle, mě teď zajímá jedna věc: Jak zdůvodníš, že úhel $PSA$ je 30 stupňů?
**S**: To nestačí, když si to posunu?
**V**: Myslíš jako, že tenhle trojúhelník je shodný s tímto trojúhelníkem? [Opět posouváme trojúhelník $APB$ takovým způsobem, aby jeho přepona byla totožná s přímkou $a$.]
**S**: V té GeoGebře to tak vypadalo… když jsem si to posunula, tak v té GeoGebře se mi to tam prolnulo.
**V**: Dobře, počkat, takže aby bylo jasno, ty jsi tenhle úhel změřila a zjistila, že je 30 stupňů, souhlasí to nebo jsi na to přišla jinak? [Výzkumník stále tápe a nechápe, že studentka odkazuje k experimentu v GeoGebře s pomocí tahání objektů.]
**S**: Neměřila. Jenom tím, že jsem si to tam takhle přenesla, tak jsem to viděla. [Studentka posunula trojúhelník $ABP$ tak, že přepona $AB$ byla totožná s přímkou $a$. Odvěsna $BP$ takového trojúhelníku se pak kryla s hledanou množinou. Z toho studentka odvodila, že úhel $PSA$ je vždy roven úhlu $PBA$, tedy 30 stupňům.]
**V**: Jo, už to chápu. Ty jsi posunula bod $A$ a ten bod $B$ se ti ztotožnil s bodem $S$… a to bylo 30 stupňů.
**S**: A stejně by šlo zdůvodnit těch 60 stupňů.
**V**: Dobře, takže zjistila jsi posunutím bodu $A$, že úsečka $PS$ svírá s úsečkou $AS$ 30 stupňů. Dokázala jsi to nějak zdůvodnit? Dokázala bys to nějak teoreticky zdůvodnit? Vlastně, dalo by se říct, že jsi na to přišla takovým experimentem. A dalo by se to nějak teoreticky zdůvodnit?
**S**: Já jsem se snažila hledat nějakou souvislost. Úhly – vedlejší, vrcholové – něco takového, ale nenašla …
**V**: Dobře, když si to shrnu, na to, že řešením je přímka, jsi přišla s GeoGebrou, na to, že kružnice opsaná trojúhelníku $APB$ prochází bodem $S$, jsi přišla v důsledku Thaletova teorému a přišla jsi na to, že úhel $ASP$ je 30 stupňů, a na to jsi přišla [tak], že jsi bod $B$ posouvala [po přímce $b$], až se ztotožnil s bodem $S$. Souhlasí to?
**S**: Jo, jo.
**V**: Fajn, to je tady trochu problém: Ty jsi přišla na všechna fakta, která ti GeoGebra mohla dát…
**S**: Ale neumím to zdůvodnit…
**V**: Zkus se na to ještě jednou krátce podívat s vědomím, že tato fakta problém řeší.

**Shrnutí rozhovoru:** Studentka přišla na obě netriviální fakta. První z nich (že čtyřúhelníku lze opsat kružnici) odvodila už v předchozí fázi díky aplikaci Thaletova teorému. Druhý fakt, rovnost $\measuredangle ABP = \measuredangle ASP = 30°$, získala s pomocí nástrojů GeoGebry. Tyto nástroje však používala bez jakéhokoli záměru nebo plánu, prostě pohybovala trojúhelníkem $APB$ a určitý případ upoutal její pozornost. Tento fakt tedy získala s pomocí „vizuálního vnímání a dynamické změny konstrukce“.

Hypotézy: Studentka objevila obě fakta. První z nich objevila konstruktivně a bez pomoci GeoGebry, druhý fakt odvodila s pomocí dynamické změny konstrukce.

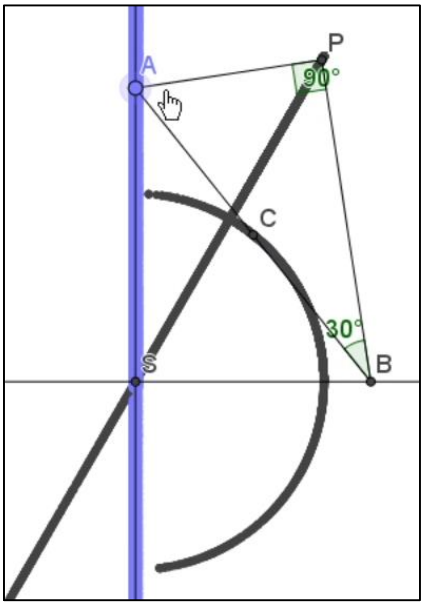
*Akce **XYZ,** provedené v DGE (screenshoty obrazovky):*

- Studentka nejdříve určila hledanou množinu bodů.



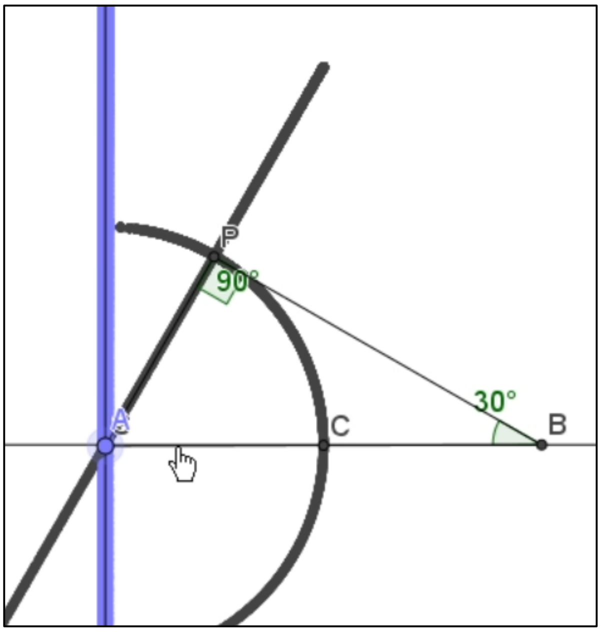

*Obrázek 50*

- Poté určila množinu středů $C$ úsečky $AB$ (a kružnice opasné čtyřúhelníku $APBS$). Jedná se o „náhodný experiment“, který však nemá s řešením přímou souvislost.




*Obrázek 51*

– S pomocí modality „náhodné tahání“ zjistila, že úhly $BSP$ a $ASP$ jsou konstatní a rovny $60$ respektive $30$ stupňům.




*Obrázek 52*

***Řešení s pomocí souboru, v němž byla zvýrazněna důležitá fakta*** *(poznámky na papíře):* Studentka nenapsala žádné poznámky.

*3. rozhovor:*

**V**: Myslíš, že jsi vyřešila problém?
**S**: Využila jsem teorému o obvodových úhlech…
**V**: To znamená, víme, že tento čtyřúhelník je tětivový…
**S**: Jo.
**V**: A teď jsi využila teorém o obvodových úhlech. Jak?
**S**: Dokázala jsem, proč je tady těch $30$ stupňů, a to je protože úhel $ASP$ je obvodový úhel [kružnice opsané čtyřúhelníku] a zároveň je obvodový úhel $ABP$, o kterém víme, že má 30 stupňů.
**V**: To znamená, úhel $PSA$ je konstantní…
**S**: Jo.
**V**: A plyne z toho něco?
**S**: No, všechny ty úhly jsou konstantní…
**V**: Všechny ty úhly $PSA$ jsou konstantní, takže lze z toho vyvodit, že bod $P$ leží na přímce nebo ne?
**S**: Jo [úsměv], jo jde.
**V**: Takže víme, že bod $P$ leží na přímce, která svírá s přímkou $a$ $30$ stupňů. Takže kdyby jsi to měla nějak shrnout, napadá tě něco, co bylo na téhle úloze nejtěžší? Nebo proč si myslíš, že jsi to před tím nevyřešila v těch předchozích fázích?
**S**: Protože jsem to neuměla zdůvodnit….

**Shrnutí rozhovoru:** Studentka problém nakonec vyřešila. V přechozí fázi ji nenapadlo použít větu o obvodových úhlech. Lze se domnívat, že tomu tak z části bylo proto, že kružnice opsaná čtyřúhelníku není statická, ale mění se spolu se samotným čtyřúhelníkem.

- Student **ABC**

***Řešení bez počítače** (poznámky na papíře):* Student nic nenapsal.

*1. rozhovor:*

**V**: První otázka, jako obvykle, myslíš, že jsi problém vyřešil?
**S**: Myslím, že ne.
**V:** Přišel jsi na nějaké domněnky nebo hypotézy, o kterých si myslíš, že s řešením souvisí?
**S**: Je na první pohled jasné, že ten bod $P$ leží na Thaletově kružnici s průměrem $AB$, což jsem zatím nijak nevyužil, a pak mě napadlo, že [v zadání] mám čtyřúhelník $APBS$ a ta Thaletova kružnice je vlastně opsaná tomu čtyřúhelníku. S tím jsem se snažil taky nějak pracovat, ale už se mi to nepodařilo rozvinout dál.
**V:** Dobrý. Máš nějakou otázku, kterou jsi schopný zformulovat a na kterou neznáš odpověď? Samozřejmě jedna otázka je, jaká je [hledaná] množina bodů $P$… a napadá tě ještě nějaká jiná otázka?
**S:** Ne. Jsem si jenom skoro jistý, že ta množina nebude kružnice… ty body $A$ a $B$ se nemůžou pohybovat do nekonečna…
**V:** Jasně, dobrý no. A teď to zkus s GeoGebrou.

**Shrnutí rozhovoru:** Student objevil s pomocí Thaletovy věty (konstruktivní argumentace) první netriviální fakt, že čtyřúhelník $APBS$ je tětivový. Dále nebyl schopen postoupit.

Hypotézy: čtyřúhelník $APBS$ je tětivový.

***Řešení s pomocí GeoGebry** (poznámky na papíře):*

*2. rozhovor:*

**V**: Myslíš, že jsi problém vyřešil? A jestli ano, tak mi to řešení popiš.
**S**: Myslím, že s pomocí GeoGebry už se mi to podařilo potom vyřešit. Z GeoGebry jsem vyčetl, že se ten bod pohybuje po přímce, která je totožná s přímkou $PS$ [na daném náčrtku] do doby, dokud se zachovává konstantní délka úsečky $AB$. [Student chce vyjádřit, že řešením je pouze část přímky neboli úsečka.] A tady máme ten tětivový čtyřúhelník. Když jsem to řešil bez GeoGebry, tak jsem úplně nevěděl, k čemu ta informace je, ale potom mi došlo, že můžu využít teorém o obvodovém a středovém úhlu. Snažil jsem se ho tam napasovat.
**V**: Nejdřív jsi měřil tenhle úhel [$SAB$]?
**S**: Ano, nejdřív $SAB$ a potom $SPB$.

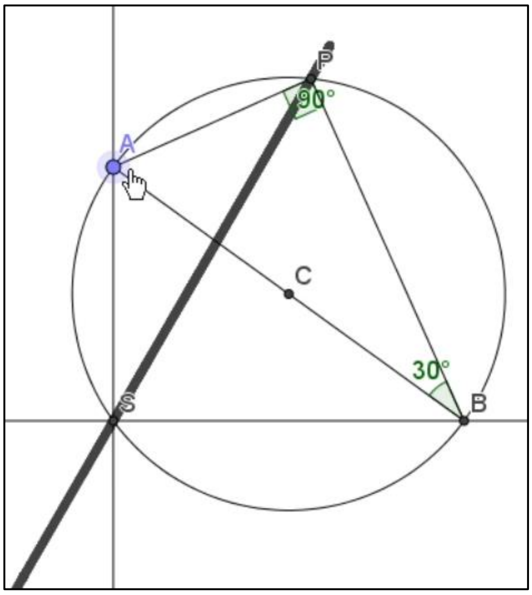
**V**: Snažil ses prostě využít větu o obvodovém úhlu, zjistil jsi, že tyto dva úhly jsou shodné, ale…
**S**: To mi nepomohlo vůbec, protože se ty úhly pořád měnily, takže mi to nepomohlo. Tak jsem zkusil zjistit… nebo přemýšlel jsem nad tím, že potřebuji nějaký konstantní úhel a zjistil jsem, že když použiju ty druhé úhly, tak ten třicetistupňový musí být stejný jako tenhle úhel [$PSA$]… ale myslím, že bez GeoGebry bych na to nepřišel…
**V**: To znamená úhel $PSA$ je konstantní a to znamená, že bod $P$ je na přímce?
**S**: Ano.
**V**: Co bys řekl, subjektivně, že byla hlavní pomoc GeoGebry tady?
**S**: Určitě, že jsem věděl tu přímku, že řešením je přímka $PS$, to určitě. Předtím jsem si myslel, že řešením bude parabola nebo nějaký půlkruh.
**V**: A poté ses prostě snažil využít větu o obvodovém úhlu?
**S**: Já jsem se ji snažil využít už předtím, ale nenapadlo mě to [ztotožnit velikosti úhlů $PBA$ a $PSA$], až potom mě to napadlo s tou GeoGebrou, že řešením je přímka $PS$.
**V**: Dobrý, tak jo.

**Shrnutí rozhovoru:** Jak už bylo řečeno, první netriviální fakt objevil student už v předchozí fázi, a to za pomoci úvahy. Druhý fakt, rovnost úhlů $ASP$ a $ABP$, objevil s pomocí GeoGebry. Klíčovými faktory pro objev tohoto faktu byla 1) znalost řešení (hledané množiny) 2) vědomý záměr aplikovat větu o obvodových úhlech. Student tedy používal GeoGebru heuristicky – sledoval záměr, o kterém doufal, že se vztahuje k řešení. Byl pak schopen důkaz dokončit.

Hypotézy: Student objevil první fakt již v předchozí fázi s pomocí úvahy, druhý fakt objevil s pomocí GeoGebry díky heuristickému experimentu. Student problém vyřešil.

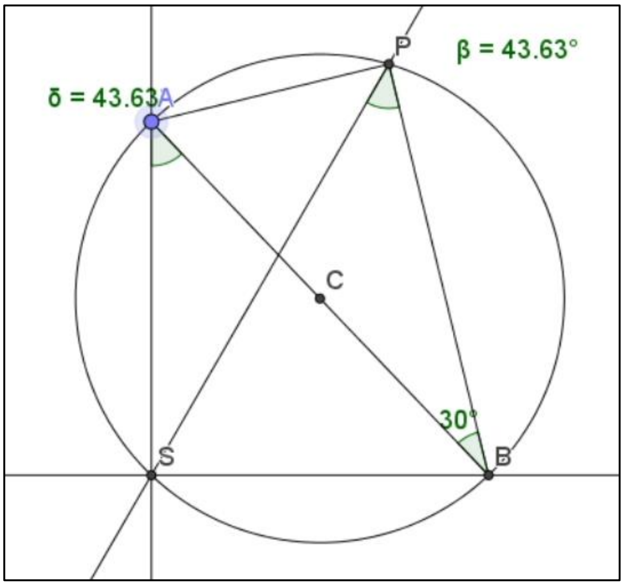
*Akce **ABC,** provedené v DGE (screenshoty obrazovky):*

- Student zjistil hledanou množinu bodů a verifikoval fakt, že čtyřúhelníku lze opsat kružnici.



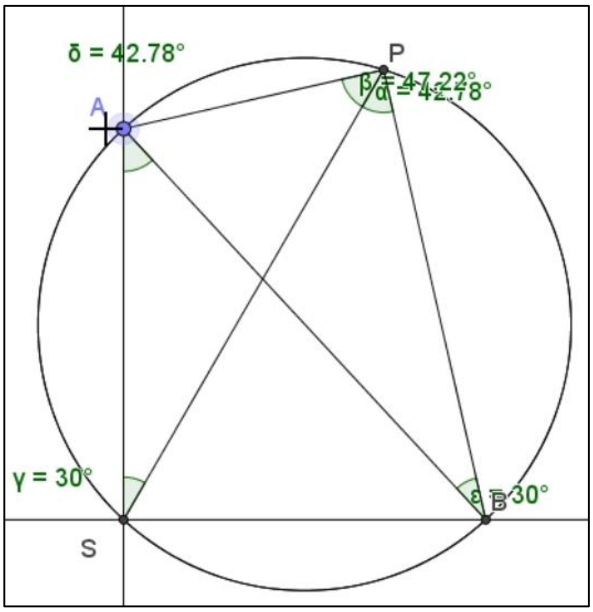

*Obrázek 53*

- Dále se snažil aplikovat větu o obvodových úhlech, nevěděl ale jak. Prováděl tedy heuristický experiment (v rámci UTM), při kterém měřil úhly a hledal, zda by je při řešení šlo využít. Experiment neřadíme pod náhodný, protože sleduje konkrétní záměr – aplikovat větu o obvodových úhlech.




*Obrázek 54*

– Nakonec s pomocí DGE zjistil, že úhly, které lze využít, jsou $ASP$ a $APB$.




*Obrázek 55*

- Studentka **RIRI**

***Řešení bez počítače*** *(poznámky na papíře):* Studentka usilovně pracovala s různými náčrtky situace. Nakonec hádala, že řešením by mohla být parabola nebo kružnice. Tyto hypotézy se však nijak nepokoušela zdůvodnit.

*1. rozhovor:*

**V**: Vyřešila jsi problém?
**S**: Já si myslím, že ta množina bude parabola.
**V:** Parabola? Ale je to tedy domněnka?
**S:** Ano, je to domněnka.
**V:** Nevím… zajímá tě nějaká otázka, kterou umíš zformulovat, ale neznáš na ni odpověď? Jedna zřejmá otázka je, co je tou množinou. Napadá tě ještě něco?
**S: …**
**V:** Dobře, jinak. [Tvoje] hypotéza je parabola. Jak jsi postupovala, o co ses snažila?
**S:** Mám vlastně vstupní, primární polohu toho bodu [ukazuje na bod na náčrtku]…
**V:** Ano, a kloužeš tím trojúhelníkem po těch přímkách [$a$ a $b$].
**S:** Ano, já jsem si pohybovala bodem $A$ a podle něj jsem si posunovala celý ten trojúhelník. Položila jsem si $A$ do $S$…
**V:** Aha, prostě sis načrtla pár poloh bodů toho trojúhelníku a připadá ti to jako parabola.
**S:** Tak, přesně….Pak jsem si načrtla „thaletovku“ [nad úsečkou $AB$]…
**V:** Dobrý.

**Shrnutí rozhovoru:** Studentka postupovala klasicky: Na základě náčrtku hádala, co by mohlo být hledanou množinou. K žádné relevantní hypotéze se ale nepropracovala, ačkoli uvažovala Thaletovu kružnici nad úsečkou $AB$. Uvažovala však pouze polovinu této kružnice, tu druhou, která prochází bodem $S$, ignorovala. Nedošla tak k „prvnímu netriviálnímu faktu“.

Hypotézy: žádná

***Řešení s pomocí GeoGebry*** *(poznámky na papíře):* žádné

*2. rozhovor:*

**V**: …
**S**: Tak, není to parabola, je to přímka [úsměv].
**V**: Jo, je to přímka nebo část přímky, což je detail. Tak, vyřešila jsi problém – myslím ve smyslu zdůvodnila?
**S**: No ono tady dochází k tomu, že v určitých bodech… pokud posouvám ten trojúhelník [$APB$], tak tady dostávám nějaký pravoúhlý čtyřúhelník…
**V**:… myslíš čtyřúhelník $APBS$?
**S**: $APBS$, přesně tak, s tím, že $PS$ je jeho úhlopříčka a $PS$ je zároveň tou množinou, kterou ten bod $P$ vytváří. [Studentka v GeoGebře posunula „proměnný“ trojúhelník $APB$ tak, aby se čtyřúhelník $APBS$ stal obdélníkem.]
**V**: Takže, jenom když to shrnu, co jsi v té GeoGebře dělala? Pohybovala jsi tím trojúhelníkem?
**S**: Ano.
**V**: Přišla jsi na to, že řešením je přímka.
**S**: Ano.
**V**: A přišla si ještě na něco?
**S**: Pak jsem si tam dělala Thaletovu kružnici…
**V**: Výborně. Motivace pro kružnici byla, že tady [úhel $APB$] je 90 stupňů, nebo ta motivace byla náhodná?
**S**: Já jsem chtěla zjistit, jak je to se vzdáleností a jestli mi ta kružnice protne bod $S$, což se stalo.
**V**: Dalo by se říct, že tvá motivace byla, zda lze čtyřúhelníku $APBS$ opsat kružnici?
**S**: Ano, ale ono to bylo logické.
**V**: A přišla jsi ještě na nějakou domněnku nebo hypotézu, o které si myslíš, že s řešením může souviset?
**S**: My hledáme důvod proč je to [řešení] přímka? A já vůbec nevím, jak by se to dalo dokázat.
**V**: Dobře, takhle, změřila jsi tento úhel – $PSA$?
**S**: Zabývala jsem se jím.
**V**: A kolik teda byl?
**S**: Já jsem si ho všimla, abych si tady udělala obdélník. [Jinými slovy, studentka upravila čtyřúhelník $APBS$ tak, aby se stal obdélníkem. Z této konfigurace bylo zřejmé, že $\measuredangle PSA = \measuredangle PBA = 30$ stupňů.]
**V**: Čili ty jsi určila tento úhel, $PSA$, ale nepamatuješ si jeho hodnotu?

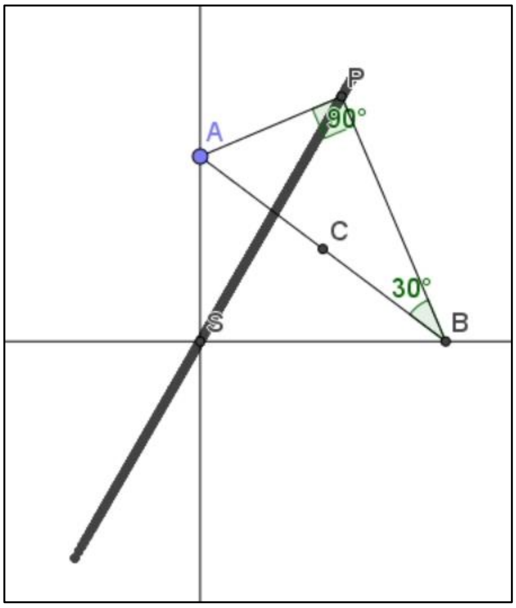
**S**: [Studentka provádí nějaké výpočty v náčrtku.]
**V**: Dobře, takhle, dostala ses docela daleko. Já ti řeknu ještě jeden fakt. Za prvé, tomu čtyřúhelníku lze opsat kružnici, a za druhé, ten úhel, $PSA$, je pořád roven $30$ stupňům. Zkus se nad tím ještě jednou zamyslet.

**Shrnutí rozhovoru:** Studentka objevila pouze jeden netriviální fakt, a to, že čtyřúhelníku $APBS$ lze opsat kružnici. Vodítkem jí byla aplikace Thaletovy věty, sledovala tedy úvahu, opírající se o teorii. Domněnku objevila „konstruktivní argumentací" a software využila pro její verifikaci. Dál se však nedostala. Ačkoli upravila čtyřúhelník $APBS$ na obdélník (s pomocí modality „wandering dragging", tahání bez plánu za účelem průzkumu), nenapadlo ji, že úhel $ASP$ hraje v řešení klíčovou roli. Nakonec z rozhovoru je patrné, že ji nenapadla jakákoliv idea, která by vedla ke zdůvodnění, že řešením je přímka.

Hypotézy: Studentka objevila první netriviální fakt za pomoci konstruktivního experimentu.

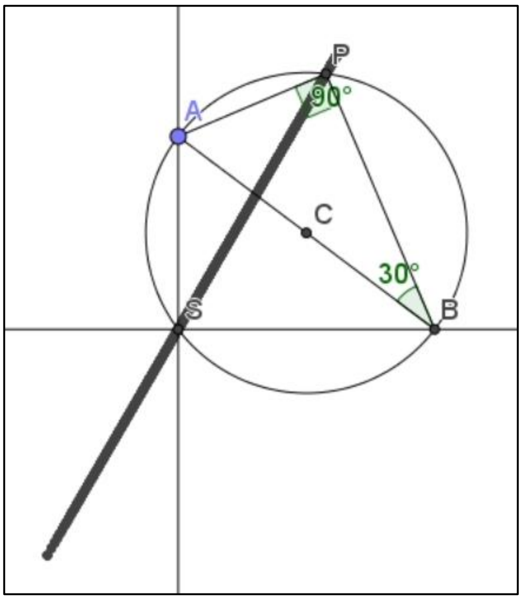
*Akce* ***RIRI,*** *provedené v DGE (screenshoty obrazovky):*

- Studentka zjistila hledanou množinu bodů.



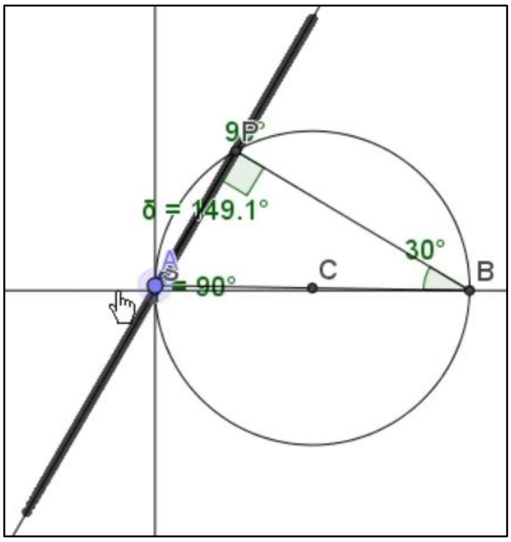

*Obrázek 56*

– Studentka sestrojila Thaletovu kružnici nad úsečkou $AB$ a zjistila, že prochází bodem $S$. V rámci UTM se jedná o objev faktu na základě konstruktivní argumentace, software sloužil k verifikaci tvrzení.



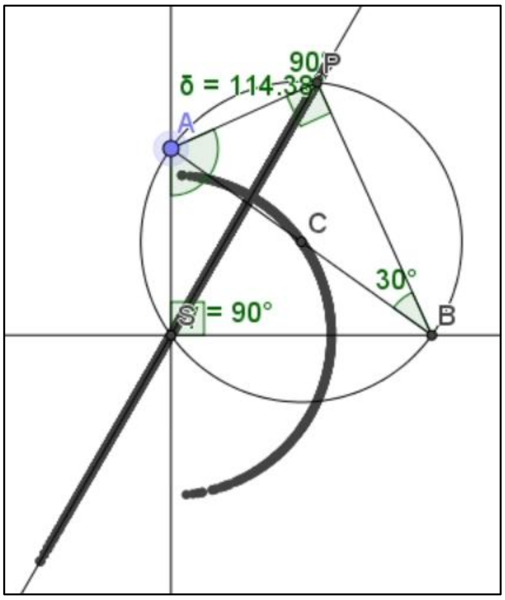

*Obrázek 57*

– Studentka dále aplikovala modalitu „náhodné tahání“ a zkoumala některé speciální polohy trojúhelníku (jako na následujícím obrázku). Velikosti úhlů $PSB$ nebo $PSA$ ale nevzala do úvahy a nezměřila je.




*Obrázek 58*

– Prováděla ale různé „náhodné experimenty“ (experimenty bez zřejmého záměru). Například zjistila, že bod $C$ (střed kružnice opsané) se pohybuje po jisté kružnici a změřila úhel u vrcholu $A$. To zřejmě za účelem, aby věděla, kdy se z čtyřúhelníku $APBS$ stane obdélník. Úhel $ASP$ ji ale změřit nenapadlo.




*Obrázek 59*

***Řešení s pomocí souboru, v němž byla zvýrazněna důležitá fakta*** *(poznámky na papíře):* Studentka si vyznačila hodnotu určitých úhlů v náčrtku. Všimla si, že některé z nich se mění a jiné zůstávají konstantní. K zdůvodnění, proč bod $P$ leží na přímce, však nedospěla.

*3. rozhovor:*

**V**: Tak vyřešila jsi ten problém nějak? Takhle, já začnu jinak, daly ti ta fakta, co byly v GeoGebře, něco, co jsi nevěděla před tím? Myslím ta fakta, která jsem ti prozradil, to znamená kružnice opsaná tomu čtyřúhelníku – to jsi věděla už před tím [k tomu studentka došla v předchozí fázi] – a pak jsem ti řekl, že tenhle úhel [$PSA$] je $30$ stupňů. To jsi taky věděla už předtím?
**S**: Hm. [Studentka odpovídá citoslovcem, které vyjadřuje souhlasné stanovisko. Fakt, že čtyřúhelníku lze opsat kružnici, byl studentce skutečně znám už v předchozí fázi. Druhý fakt, že platí rovnost $\sphericalangle PSA = \sphericalangle PBA = 30°$, však studentka v předchozí fázi nevzala do úvahy. Jak je patrné z předchozího rozhovoru, studentka na přímý dotaz, jaká je hodnota tohoto úhlu, nebyla schopna odpovědět. Proto můžeme říci, že tento fakt v předchozí fázi neobjevila.]
**V**: Takže jestli to dobře chápu, ta fakta ti nedala nic nového, co bys nevěděla?
**S**: Ne. [Jak plyne z předchozí poznámky, tato odpověď není úplně přesná.]
**V**: Dobře, tak zkus tedy říct, jestli jsi k něčemu došla… jestli tě teď, v této fázi, napadlo něco, co tě nenapadlo v předchozí.
**S**: Použila jsem větu o obvodovém a středovém úhlu.
**V**: To znamená co konkrétně?

**S**: Tady mám střed $C$ [úsečky] $AB$ [Studentka v rozhovoru označila tento bod jako $S$, protože však $S$ je také označení pro průsečík přímek $a$ a $b$, budeme ho v přepisu označovat jako $C$.], to je střed i té kružnice [opsané].
**V**: Jo, jasně.
**S**: [Úhel] $ACP$ bude mít $60$ stupňů, protože tady je úhel $30$ stupňů. [Studentka ukazuje na úhel $ASP$.]
**V**: Takhle, proč je tady [úhel $ASP$] třicet stupňů?
**S**: To je obvodový úhel.
**V**: Obvodový úhel? A proč se rovná právě třiceti a ne třeba dvaceti stupňům?
**S**: Tady je $60$ stupňů [úsměv].[Studentka ukazuje na úhel $PSB$. Její zdůvodnění je však kruhem.]
**V**: $60$ [stupňů] je tady, za předpokladu, že tady je $30$ [stupňů] a já se teď ptám, proč je tady $30$ stupňů? Dokázala bys to nějak zdůvodnit?
**S**: No tak, tady to [úhel $PBA$] je obvodový?
**V**: Jo, tady je třicet stupňů, čili úhel $PSA$ je třicet stupňů.
**S**: Ano, taky je roven $30°$
**V**: Takže vím, že úhel $PSA$ je roven $30°$, vyplývá z toho něco pro polohu bodu $P$? Když víme, že úhel $PSA$ je $30°$?
**S**: … $PSA$ je $30$ stupňů…
**V**: Jinými slovy, úhel $PSA$ je konstantní, souhlasíš?
**S**: Ano, takže použiji další obvodový úhel …
**V**: Počkej, úhel $PSA$ je konstantní, vyplývá z toho něco pro polohu bodu $P$?
**S**: Tady ten úhel [$PSA$] se nikdy nebude měnit … já to tu mám … mění se, mění se, konstantní… přemýšlela jsem nad tím [Studentka ukazuje na své zápisky, ve kterých si u úhlů vyznačovala, zda se pohybem trojúhelníku $APB$ tyto úhly mění nebo nabývají stále stejné hodnoty.] … já můžu měnit tento a tento úhel…
**V**: Tak ještě jinak: Vyplývá z toho, že úhel $ASP$ je konstantní, že ten bod $P$ leží na přímce nebo ne?
**S**: No, tak nasvědčuje to tomu [úsměv].
**V**: Já ti řeknu, já v téhle úloze mám se studenty problém, že oni si neuvědomí, že z toho, že tento úhel [$PSA$] je konstantní, vyplývá, že ten bod $P$ musí ležet na přímce
**S**: Já jsem o tom přemýšlela … tady musí být stále $150$ stupňů, já můžu hýbat s touto úsečkou…takže tohle bylo řešení?
**V**: Jo, přesně tak. Kdyby ten bod neležel na přímce, tak by se tento úhel [$PSA$] měnil. Když to teda shrneme, co myslíš, že bylo u této úlohy nejtěžší?
**S**: Jak říkám, já jsem si tohle uvědomila jako první [že úhel $PSA$ je konstantní], ale nepřišlo mi to jako dostatečný důkaz. [Zde by bylo vhodnější použít slovo argument, neboť důkaz vedle toho, že daný úhel je konstantní, by měl rovněž vysvětlit, proč je konstantní.]
**V**: Prostě nepodařilo se ti interpretovat z toho, že tento úhel je konstantní, že bod $P$ leží na přímce?
**S**: Ano.

**Shrnutí rozhovoru:** Studentka problém nevyřešila ani v poslední fázi, řešení jí bylo prozrazeno. Jejím hlavním problémem byla logická úvaha, že z konstantnosti úhlu $PSA$ vyplývá, že body $P$ leží na přímce, procházející bodem $S$. V závěru rozhovoru sice studentka poznamenala, že konstantnosti úhlu si všimla hned poté, co zjistila hledanou množinu, a že tomu jenom nepřikládala důležitost, lze ale předpokládat, že její výpověď byla ovlivněna již odhaleným řešením problému. Navíc v rozhovoru v předchozí fázi sice studentka poznamenala, že úhel je konstantní, ale jeho hodnotu nebyla schopna určit. Tato hodnota je však klíčem k tomu, proč je daný úhel konstantní. Proto lze vyvodit závěr, že studentka tento druhý „netriviální fakt“ samostatně nezjistila.

**Tabulka (4. experiment, 2. úloha), shrnutí dat:**

| **2. (zákl) úloha** | Bez GeoGebry (I. Fáze) | | S Geogebrou (II. Fáze) | | | S Geogebrou (III. Fáze) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Student | **Objevil student relevantní hypotézy?** | **Vyřešil student problém?** | **Objevil student, že čtyřúhelník je tětivový?** | **Objevil student rovnost úhlů PSA=PBA=30°?** | **Vyřešil student problém?** | **Vyřešil student problém?** | **Jaké byly jeho problémy při řešení?** | **Proč student problém nevyřešil ve II. fázi?** |
| **ABC** | ANO (Student objevuje s pomocí **konstruktivní argumentace**, že čtyřúhelníku lze opsat kružnici) | NE | **Ano** (Tento fakt student objevil v předchozí fázi) | ANO (Způsob objevu: **heuristický experiment** - snaha o aplikaci věty o obvodovém úhlu) | Ano | | | |
| **XYZ** | ANO (Studentka objevuje s pomocí **konstruktivní argumentace**, že čtyřúhelníku lze opsat kružnici) | NE | **Ano** (Tento fakt studentka objevila v předchozí fázi) | ANO (Způsob objevu: **dynamická změna konstrukce**) | NE (Studentka si neuvědomuje, že fakta, která objevila, problém řeší.) | Ano | | Příčiny byly dvě: 1) Neuvědomila si, že z konstantnosti úhlu PSA vyplývá, že bod P leží na přímce, 2) Nedokázala aplikovat větu o obvodových úhlech v netypické situaci. |
| **RIRI** | NE | NE | ANO (Způsob objevu: **konstruktivní argumentace** - DGE sloužilo k verifikaci) | NE | NE (Studentku nenapadá jakákoliv strategie, která by mohla vést ke zdůvodnění nalezeného řešení) | NE | Studentka neodhalila klíčovou myšlenk: že z rovnosti PSA=30° plyne, že body P tvoří přímku. Snažila se aplikovat větu o obvodových úhlech, ale neplodným způsobem. | |

**Data ke druhé otázce**

II Jaké jsou příčiny selhání studentů při hledání důkazu, proč pomoc softwaru není v některých případech dostatečná?

Klíčové faktory, které zapříčinily, že student ABC ve druhé fázi problém vyřešil, byly 1) znalost hledané množiny, 2) empirický fakt, který získal díky nástroji „měření“ (heuristický experiment). Pak dokázal důkaz dokončit.

Studentka XYZ dokončila důkaz, teprve když jí bylo zdůrazněno, že fakta, která objevila, problém řeší. Důvody, proč studentka důkaz nedokončila samostatně, jsou dva: 1) Studentku nenapadla klíčová myšlenka důkazu, totiž že z konstantnosti úhlu PSA vyplývá řešení úlohy. 2) Studentku nenapadlo aplikovat větu o obvodových úhlech.

Studentka RIRI důkaz nedokončila ani ve třetí fázi. Pokoušela se aplikovat větu o obvodových úhlech, ale neplodným způsobem. I jí unikla klíčová myšlenka, že z konstantnosti úhlu $PSA$ plyne řešení úlohy.

Problémy studentek byly:

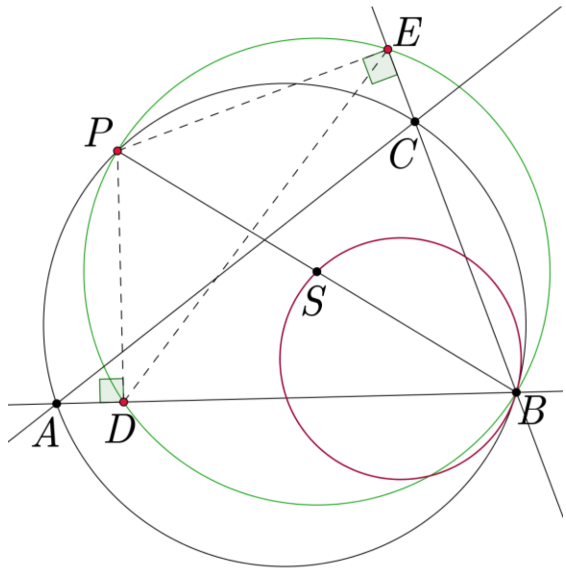
- Neschopnost aplikovat matematickou teorii (konkrétně větu o obvodových úhlech) v netypické situaci.
- V případě studentky RIRI nedostatky v logickém uvažování (neuvědomila si, že z konstantnosti úhlu plyne dokazované tvrzení).

**Jakým způsobem studenti nástroje DGE využívají?**

- Studentka XYZ
  Studentka, vedle zjištění hledané množiny, prozkoumávala problém bez jasného plánu: Nejdříve určila množinu středů kružnic opsaných čtyřúhelníku (náhodný experiment), poté používala modalitu „wandering dragging“. Díky ní objevila rovnost úhlů (druhý netriviální fakt). V rámci UTM se jedná o objev na základě vizuálního vnímání a dynamické změny konstrukce.
- Studentka RIRI
  Studentka zjišťovala hledanou množinu a poté s pomocí softwaru verifikovala svoji hypotézu, že čtyřúhelníku lze opsat kružnici. Dále postupovala stejně jako její kolegyně: Používala modalitu „wandering dragging“ a pak „náhodný experiment“, aby zjistila množinu středů kružnic. Žádná z těchto akcí ji ale nevedla k objevu druhého netriviálního faktu (rovnost úhlů).
- Student ABC
  Student nejdříve zjišťoval hledanou množinu a verifikoval svoji hypotézu, na kterou přišel v předchozí fázi. Dále měřil úhly (v rámci UTM se jednalo o „experiment“), ale nedělal to bez plánu: Sledoval záměr, zda by se nějak nedal použít teorém o obvodových úhlech. Jednalo se tedy o „heuristický experiment“. Student byl nakonec úspěšný.

### 6.3.3 Třetí problém

Pro připomenutí zadání a řešení problému viz sekci 6.1.4.




*Obrázek 60 Řešení třetího problému.*

- Studentka **XYZ**

***Řešení bez počítače*** *(poznámky na papíře):* Studentka se experimentálně pokoušela identifikovat hledanou množinu konstrukcí několika bodů $S$. Nedošla však žádné hypotéze.

*1. rozhovor:*

Výzkumník (**V**): Vyřešila jsi problém?
Studentka (**S**): Nevyřešila.
**V:** Přišla jsi na nějaké domněnky nebo hypotézy, o kterých si myslíš, že s řešením souvisí?
**S:** Ne, nepřišla.
**V:** Co si tady [v náčrtku] zkoušela dělat?
**S:** Zkoušela jsem si to [zkonstruovat].
**V:** Jo jasně, [zkonstruovat] různé body $S$…
**S:** Kdybych měla rýsovací potřeby, tak si myslím, že bych na nějakou hypotézu přišla, jenomže … [úsměv] … takže vůbec nevím.
**V:** Jo…
**S:** Tady mám nějaké středy [$S$], ale to může být cokoli. Ta přesnost je … [nízká]
**V:** dobrý… Napadá tě nějaká otázka, na kterou bys chtěla znát odpověď, a na kterou teď odpověď neznáš? Samozřejmě, zjevná otázka je, co je ta množina, napadá tě ještě jiná?

**S:** Nedokážu si představit, jak to souvisí s tím trojúhelníkem, jak ta kolmost [přímek z bodu $P$ na strany trojúhelníka] mi to jakoby mění… [Tato formulace je hodně neurčitá a značí, že studentku nenapadá nějaká konkrétní otázka.]
**V:** Takhle… uvažujeme opsanou kružnici tomuhle trojúhelníku … a hledáme množinu středů té opsané kružnice [trojúhelníku $PDE$] … a ty ses je [středy $S$] pokoušela získat pomocí os [stran trojúhelníku $PDE$]… myslím?
**S:** Jo, vždycky jsem si udělala kolmice… Zvolila jsem si nedříve teda bod $P$, našla body $D$ a $E$…
**V:** Jo, jasně, chápu, a tohle jsou ty středy, že ano? [Ukazuji na několik zkonstruovaných bodů S v náčrtku.]
**S:** Jo, jo…
**V:** Dobrý, tak fajn.

**Shrnutí rozhovoru:** Studentka postupovala jako obvykle: Snažila se experimentálně určit hledanou množinu (sestrojila několik bodů $S$). Taková strategie je však obtížně realizovatelná i s rýsovacími potřebami - počet sestrojených bodů by musel být dostatečně velký na to, aby bylo možné formulovat hypotézu s vysokou mírou jistoty, navíc se studentka opírala o náčrtek od ruky. Nedošla k žádné hypotéze.

Hypotézy: žádná.

***Řešení s pomocí GeoGebry*** *(poznámky na papíře):* Studentka na papír kromě několika náčrtků nenapsala nic.

*2. rozhovor:*

**V**: Vyřešila jsi problém? Myslíš, že jsi problém vyřešila?
**S**: Myslím si, že asi jo…
**V**: Jo?
**S**: Nebo ne? [úsměv] Podle mě ty středy té kružnice $l$ leží na takové menší kružnici, ta má poloviční poloměr než kružnice $k$....
**V**: Výborně. Na to jsi přišla s GeoGebrou?
**S**: Na to jsem přišla s GeoGebrou. A pak jsem si uvědomila, že ta kružnice $k$… když jsem si ten bod $P$ posunula tak, že bod $D$ splynul s bodem $A$, tak vlastně kružnice $l$ byla totožná s kružnicí $k$…
**V**: Ano…opsanou
**S**: [ty kružnice] byly stejné a je vlastně vidět, že když obvodový úhel $PEB$ je 90 stupňů, tak tady musí být mezi $PB$ úsečka, musí tam být $180°$ [Studentka chce touto formulací vyjádřit, že body $P, S, B$ leží v přímce.] a v GeoGebře bylo vidět, že ta kružnice [množina bodů $S$, která představuje řešení problému] prochází i tím středem té původní opsané kružnice trojúhelníku $ABC$. Takže když to [bod $S$] leží vždycky na té úsečce [$PB$], protože tady je vždycky 90°…. Tak tam vždycky musí být $180°$. [Tato neohrabaná formulace vyjadřuje fakt, že body $P, S, B$ jsou v přímce pro jakýkoliv bod $P$.]
**V**: Takhle… dobře, takže na ten fakt, že řešením je kružnice, jsi přišla s GeoGebrou?
**S**: Jo.

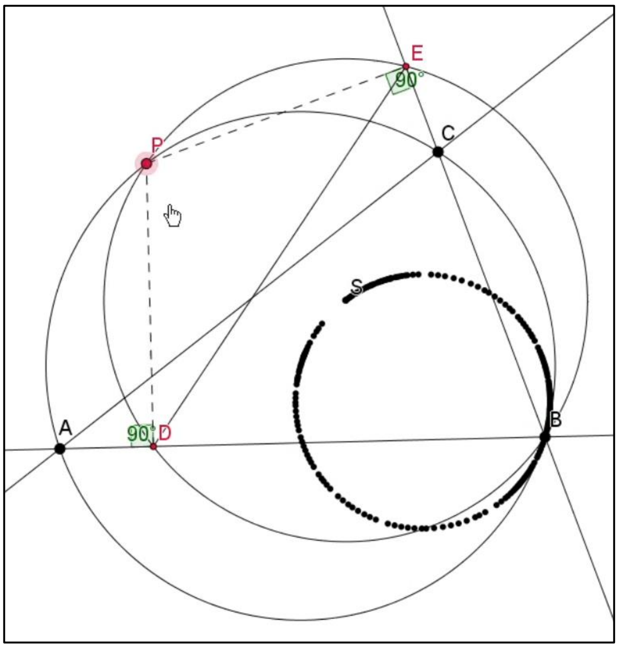
**V**: Tak další otázka, bylo pro tebe překvapením, že kružnice opsaná trojúhelníku $PDE$ prochází bodem $B$?
**S**: Ne, asi…
**V**: Dokázala bys zdůvodnit teoreticky, proč kružnice opsaná trojúhelníku $PED$ prochází bodem $B$?
**S**: ….
**V**: Nebo zkus mi teda říct to tvoje řešení.
**S**: Mně to přišlo už předtím, než jsem to řešila s GeoGebrou, že když tady ty úsečky [$PD$ a $PE$] jsou na přímky [$AB$ a $BC$] kolmé, tak mi přišlo, že v určitý okamžik ty kružnice mohou splývat…
**V**: Jo, dobře, víš co? Já tě teď nechám mluvit a zkus vysvětlit, jak nejlépe umíš, že střed té kružnice $PED$, na který se ptáme, opisuje kružnici s polovičním poloměrem.
**S**: Takže, když si tam představím úsečku $PB$, tak ta je tam vždycky, protože vždycky platí, že $PEB$ je 90 stupňů, ten středový úhel musí být $180°$, to znamená, že je to vždycky úsečka. [Opět, tato kostrbatá formulace má za cíl vyjádřit, že body $P, S, B$ leží vždy v přímce.]
**V**: Jo, chápu, už to chápu…
**S**: a tedy, když je to vždycky úsečka…
**V**: to znamená, spojnice mezi $B$, středem $S$ a bodem $P$ je úsečka
**S**: Ano, ten střed leží na té úsečce…ty úsečky procházejí bodem $B$ a to znamená, že i ten střed se pohybuje [úsměv].
**V**: Využila jsi někde nějakou stejnolehlost?
**S**: Ne.
**V**: Ne, dobře, a dokázala bys zdůvodnit, proč kružnice opsaná trojúhelníku $PED$ prochází bodem $B$?
**S**: Protože vlastně ta původní opsaná [kružnice $k$] prochází body $A, B, C$ a ty nové body $D, E$ leží na přímkách ….
**V**: Jako kroužíš kolem toho, ale není to přesné. Ale dobře, ještě jednou to shrnu: Přišla jsi na to, že řešením je kružnice, přišla jsi na to, že kružnice $PDE$ prochází bodem $B$, ale nijak tě to nezaujalo, jestli to dobře chápu? Fajn, rovněž jsi zjistila, s pomocí GeoGebry, že tahle kružnice [hledaná množina] má poloviční poloměr než tato [kružnice $k$ opsaná trojúhelníku], souhlasí to?
**S**: Ano.
**V**: A přišla jsi na to, že bod $S$ leží ve středu úsečky $PB$?
**S**: Ano.
**V**: Dobrý, fajn.

**Shrnutí rozhovoru:** Studentka přišla na obě netriviální fakta (čtyřúhelník $PEBD$ tětivový a bod $S$ leží ve středu úsečky $PB$). První fakt zjistila náhodou (náhodný experiment). Tento fakt jí GeoGebra takříkajíc vnutila a studentka ho pak brala jako samozřejmost, kterou ale nedokázala zdůvodnit. Co se týče druhého faktu, z rozhovoru není patrné, jak ho studentka objevila, pouze je zřejmé, že ho dokázala zdůvodnit na základě abdukce – vycházela z empirického předpokladu, že čtyřúhelník je tětivový, a použila teorém o obvodovém a středovém úhlu. Ze záznamu obrazovky se jeví jako pravděpodobné, že tento fakt zjistila opět náhodným experimentem, který ale poté dokázala podpořit konkrétními argumenty (zmíněná abdukce). Přímku $PB$, na které leží bod $S$, totiž sestrojila až po šesti minutách práce se softwarem (předtím konstruovala jiné úsečky) a poté použila nástroj „vztah mezi objekty“, aby se ujistila, že bod $S$ skutečně leží na přímce $PB$. Studentka nedokázala podat uspokojivé zdůvodnění řešení.

Hypotézy: Studentka objevila obě fakta, obě s pomocí náhodného experimentu. Pouze druhý z nich dokázala zdůvodnit na základě úvahy – abdukce.

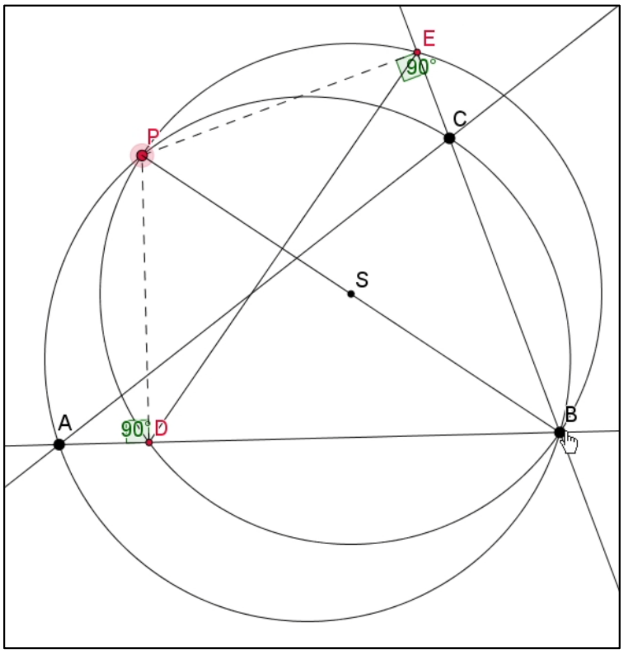
*Akce **XYZ,** provedené v DGE (screenshoty obrazovky):*

– Studentka zkonstruovala kružnici $l$ a pak pomocí příkazu stopa načrtla množinu středů $S$:



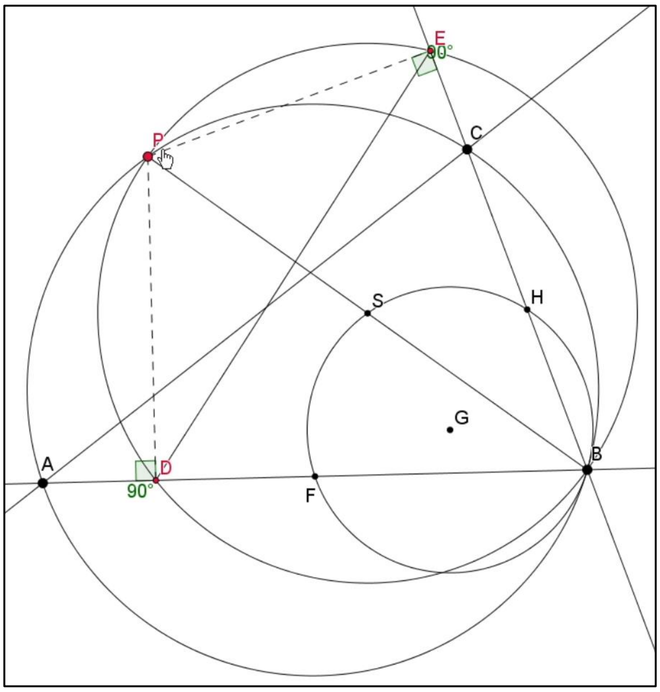

*Obrázek 61*

– V průběhu sedmé minuty ji napadlo sestrojit úsečku $PB$, ta prochází bodem $S$. Tento fakt studentka ověřila s pomocí funkce „vztah mezi objekty“.




*Obrázek 62*

– Pak ještě přišla na to, jak zkonstruovat hledanou kružnici přímo. Tato kružnice totiž prochází třemi body: bodem $B$, středem úsečky $AB$ (když ztotožníme bod $P$ s bodem $A$) a, analogicky, středem úsečky $BC$.




*Obrázek 63*

***Řešení s pomocí souboru, v němž byla zvýrazněna důležitá fakta*** *(poznámky na papíře):* Studentka napsala, že střed $S$ leží ve středu úsečky $PB$, a protože se bod $P$ pohybuje po kružnici, musí se pohybovat bod $S$ po kružnici poloviční velikosti. Ačkoli studentka explicitně nepoužila slovo „stejnolehlost“, je zřejmé, že měla na mysli právě toto, a své řešení chtěla předat slovně.

*3. rozhovor:* Rozhovor se kvůli chybně nastavenému zařízení nenahrál.

**Shrnutí rozhovoru:** Studentka ještě jednou prošla teorémy, které byly opakovány před zahájením výzkumného testu, a došla ke zdůvodnění problému. Uvědomila si, že je nutné aplikovat Thaletovu větu a že lze využít stejnolehlost. Rozhovor se kvůli chybě nenahrál, ale výzkumník si následně jeho hlavní body poznamenal.

- Student **ABC**

***Řešení bez počítače*** *(poznámky na papíře):* Student zaznamenal hypotézu: „Čtyřúhelníku $DBEP$ lze opsat kružnici a ta by mohla být stejná jako kružnice, opsaná trojúhelníku $PDE$“. Tato domněnka je správná, ale student si nebyl úplně jist – napsal tuto myšlenku s otazníkem a nakonec jí přeškrtl.

*1. rozhovor:*

**V**: Vyřešil jsi problém?
**S**: Nevyřešil.
**V:** Přišel jsi na nějaké domněnky nebo hypotézy, o kterých si myslíš, že s řešením souvisejí?
**S:** Jo, tak já jsem se spíš dvakrát zavedl do slepých uliček. Nejdříve jsem přemýšlel nad tím, že tenhle čtyřúhelník $PDBE$ má určitě kružnici opsanou a myslel jsem si, že bude určitě stejná jako kružnice, opsaná trojúhelníku $PDE$, což jsem … došlo mi, že je to nesmysl. Tedy myslím, že je to nesmysl… jsem si tím jistý, je to nesmysl, a pak se zabýval, že tyhle dva úhly, $DPE$ a úhel $DBE$, že jsou stejné, což je také nesmysl.
**V:** Jaký úhel jsi řekl?
**S:** $DPE$ a $ABC$, což je to samé jako $DBE$… takže jsem se zavedl dvakrát do slepých uliček a další myšlenky už jsem nevyplodil.
**V:** Dobrý, tak jo. Zajímalo by tě něco, nějaká otázka, na kterou neznáš odpověď? Nemusí být žádná, jenom se ptám. Máš tedy hypotézu, co by mohlo být řešením?
**S:** Nemám, nemám. Podle mě kružnice, ale nemám to vůbec ničím podložené.
**V:** Jo, jenom hádáš.
**S:** Jo.
**V:** Fajn, tak jo…

**Shrnutí rozhovoru:** Z rozhovoru je zřejmé, že student objevil za pomoci konstruktivní argumentace – součet protějších úhlů čtyřúhelníku dá přímý úhel – první hypotézu (že čtyřúhelník $PEBD$ je tětivový nebo, jinak řečeno, že kružnice opsaná trojúhelníku $PDE$

prochází bodem $B$). Kvůli nezkušenosti tento fakt nakonec zavrhl a označil za nesmysl. Dále v rozhovoru uvedl fakt, který na základě pouhého vizuálního vnímání vypadá absurdně, totiž že úhly $DPE$ a $DBE$ by mohly být shodné. Je jasné, jak na tento „absurdní“ fakt student přišel: aplikací věty o obvodovém úhlu na tětivový čtyřúhelník, tedy konstruktivní argumentací. Tyto úhly skutečně shodné jsou, ale jenom pro specifické polohy bodu $P$. Z toho je patrné, že student prozkoumával konstrukci s pomocí úvahy a nikoli jen vizuálním vnímáním: Musel vybírat různé teorémy a sledovat, zda by je nešlo vhodně aplikovat.

Hypotézy: žádná. (Napadlo ho, že čtyřúhelníku $PEDB$ lze opsat kružnici, ale následně to zavrhl jako nesmysl.)

***Řešení s pomocí GeoGebry*** *(poznámky na papíře):* Student napsal korektní důkaz: řešením je kružnice, která je obrazem kružnice $k$ v jisté stejnolehlosti.

*2. rozhovor:*

**V**: Takže, vyřešil jsi problém, a jestli ano, tak mi ho zkus popsat.
**S**: Myslím, že s tou GeoGebrou jsem ho na konec vyřešil. První věc, kterou bylo třeba zjistit, bylo, že ten střed [$S$ kružnice, opsané trojúhelníku $PDE$] opisuje kružnici… zjistil jsem, že střed té kružnice opsané leží ve středu úsečky $PB$. Protože tady jsou pravé úhly, tak vlastně ta opsaná kružnice je Thaletovou kružnicí trojúhelníků $PEB$ a $PDB$, takže [střed kružnice opsané čtyřúhelníku] leží ve středu [úsečky $PB$]. Tam jsem se zasek, protože jsem nevěděl, jak z toho dostat tu kružnici [hledané řešení]. Zkoušel jsem nějaké úhly, to mi nepomohlo, a pak tedy [mě napadlo přijít] s tou stejnolehlostí, že vlastně [bod $P$ přímky] $PB$ opisuje opsanou kružnici a ten bod $S$, který leží ve středu přímky $PB$, musí taky opisovat kružnici.
**V**: Výborně, to řešení je správně, jenom tedy kdybys řekl, co bylo tím klíčovým faktorem ze subjektivního hlediska, proč jsi to vyřešil s GeoGebrou, a co ti bránilo to vyřešit v předchozí fázi? [s papírem a tužkou]
**S**: Hlavně v té předchozí fázi, já jsem vlastně říkal, že ten trojúhelník $PED$ má stejnou opsanou kružnici…
**V**: Ty jsi říkal, že kružnice opsaná čtyřúhelníku $PEBD$…
**S**: je stejná a potom jsem řekl, že není, což byla první chyba, kterou jsem si potom v GeoGebře uvědomil. Tam jsem zjistil, že ta kružnice [opsaná trojúhelníku $PED$] je stejná [jako kružnice opsaná čtyřúhelníku $PEBD$] Nemohl jsem si to pořádně představit, než jsem si to nenakreslil [do GeoGebry]. To byl hlavní zádrhel, si myslím…
**V**: Dalo by se tedy říct, že kružnice, opsaná trojúhelníku $PED$, prochází bodem $B$, bylo pro tebe mírným překvapením?
**S**: Já myslím, že kdybych to lépe promyslel, tak by mi to nakonec asi došlo, ale jo, dalo by se říct, že to bylo mírné překvapení, protože jsem přesvědčil sám sebe. Kdybych nad tím přemýšlel déle, možná by mi to došlo [bez GeoGebry], ale nezaručuju to.
**V**: Ten střed [$S$ kružnice opsané trojúhelníku $PDE$], kdy jsi přišel na to, že leží ve středu úsečky $PB$?
**S**: Až s GeoGebrou jsem na to přišel. Tam jsem měl narýsovanou tu kružnici a došlo mi, že je to Thaletova kružnice…

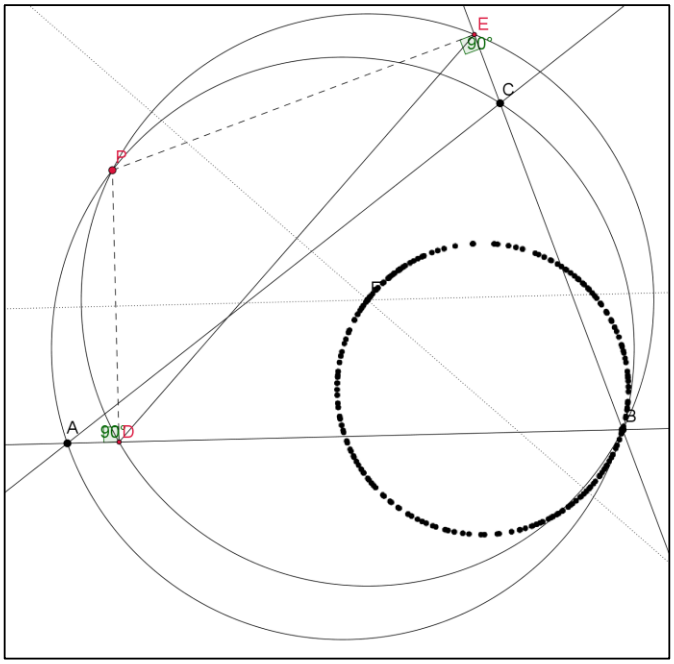
**V**: To znamená, že spíš než měření nebo vizuální vnímání to byla aplikace Thaletova teorému? Že ten střed je střed úsečky $PB$?
**S**: Jo, ale samozřejmě ten bod [$S$] jsem tam viděl taky, protože jsem si zkontroloval v GeoGebře [že leží na přímce $PB$], tak možná mě to napadlo rychleji [díky GeoGebře].
**V**: Dobrý, tak jo.

**Shrnutí rozhovoru:** Student problém vyřešil, a tedy objevil obě hypotézy. První z nich (čtyřúhelník je tětivový) objevil konstruktivní argumentací, která spočívala na faktu, že součet protějších úhlů je $180°$. V předchozí fázi si pravdivostí hypotézy nebyl jist, ale GeoGebra ho ujistila, že pravdivá je. Druhý fakt (střed opsané kružnice leží ve středu úsečky $PB$) byl objeven na základě vizuálního vnímání. Student sice věděl, že čtyřúhelník $DPEB$ je tětivový, ale nevěděl nebo nevzal do úvahy, že jemu opsaná kružnice je Thaletova kružnice s průměrem $PB$. Tento fakt získal až na základě vizuálního vnímání konstrukce a následné verifikace v programu.

Hypotézy: Student objevil obě fakta. První fakt objevil díky konstruktivní argumentaci, druhý s pomocí vizuálního vnímání konstrukce.

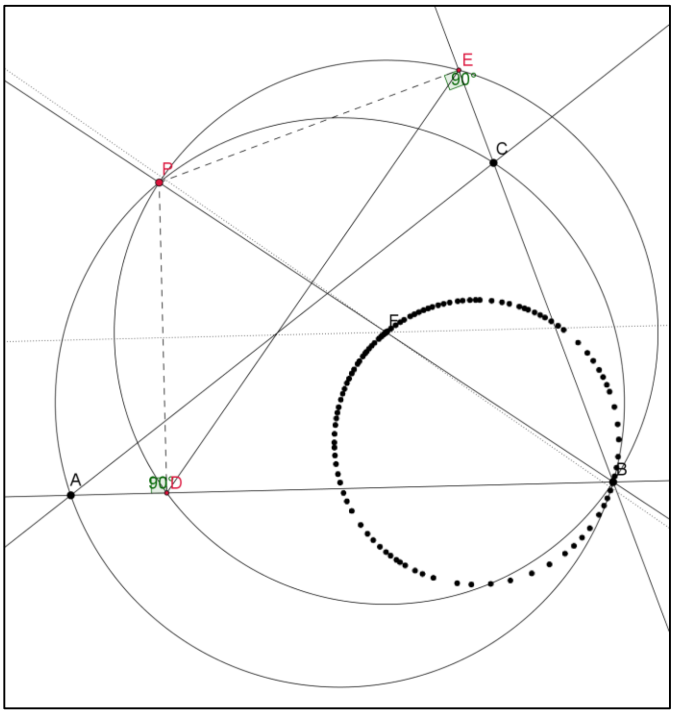
*Akce **ABC,** provedené v DGE (screenshoty obrazovky):*

- Student zkonstruoval kružnici $l$ a pomocí příkazu „stopa" načrtnul množinu středů $S$:




*Obrázek 64*

– Dále student tápal (přidával do konstrukce přímky, které však s řešením nesouvisely). Kolem desáté minuty přišel na druhý netriviální fakt: Body $P$, $S$ a $B$ jsou vždy v přímce.




*Obrázek 65*

## Tabulka (4. experiment, 3. úloha), shrnutí dat:

| **3. (dopl) úloha** | Bez GeoGebry (I. Fáze) | | S Geogebrou (II. Fáze) | | | S Geogebrou (III. Fáze) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Student | **Objevil student relevantní hypotézy?** | **Vyřešil student problém?** | **Objevil student, že čtyřúhelník je tětivový?** | **Objevil student, že bod S leží ve středu úsečky PB?** | **Vyřešil student problém?** | **Vyřešil student problém?** | **Jaké byly jeho problémy při řešení?** | **Proč student problém nevyřešil ve II. fázi?** |
| **ABC** | NE (studenta napadla na základě konstruktivní argumentace správná hypotéza, ale nakonec ji mylně zavrhnul) | NE | ANO (Student objevuje s pomocí **konstruktivní argumentace**, že čtyřúhelníku lze opsat kružnici) | Ano (Objev faktu s pomocí **náhodného experimentu**, založeném na vizuálním vnímání) | Ano | | | |
| **XYZ** | NE | NE | Ano (**Náhodný experiment.** Pro studentku se jednalo nečekané zjištění, které ale nedokázala zdůvodnit) | Ano (Objev faktu s pomocí **náhodného experimentu**, založeném na vizuálním vnímání) | NE (Studentka si neuvědomuje, že fakta, která objevila, problém řeší.) | Ano | | Studentka měla problémy s aplikací matematické teorie (stejnolehlost, Thaletova kružnice) |

**Data ke druhé otázce**

II Jaké jsou příčiny selhání studentů při hledání důkazu, proč pomoc softwaru není v některých případech dostatečná?

Pro studenta ABC spočívala pomoc GeoGebry ve dvou faktorech: 1) Software byl nástroj verifikace jeho (správné) myšlenky, že čtyřúhelníku lze opsat kružnici. Zejména pro nezkušené studenty má taková verifikace velký význam. 2) Díky precizní vizualizaci softwaru mohl student vizuálně objevit, že body $P, S$ a $B$ leží v přímce.

Studentka XYZ dokončila důkaz teprve tehdy, když jí bylo zdůrazněno, že fakta, která objevila, problém řeší. Příčiny jejího neúspěchu lze hledat v neschopnosti aplikovat klíčové matematické teorémy, možná lze mluvit i o jejich částečné neznalosti, a to navzdory tomu, že se s nimi v průběhu studia musela mnohokrát setkat.

Příčiny neúspěchu studenty XYZ:

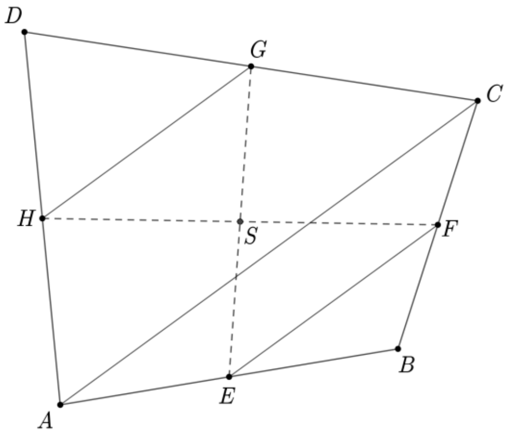
- Neschopnost aplikovat matematickou teorii (stejnolehlost, Thaletova věta)

**Jakým způsobem studenti nástroje DGE využívají?**

– Studentka XYZ
  Studentka použila modalitu „wandering measuring“ (náhodné měření), v jejímž rámci měřila některé úhly konstrukce. Dále také modalitu „wandering dragging“ (náhodné tahání). Díky této modalitě byla schopna zkoumat některé speciální případy konstrukce (když bod $P$ ztotožnila s body $A$ a $C$ trojúhelníku). Tak přišla na to, jak kružnici (hledanou množinu) zkonstruovat přímo, bez použití nástroje MnozinaBodu.
– Student ABC
  Kroky, které student udělal, většinou souvisely s řešením: Pomocí funkce „stopa“ načrtnul hledanou množinu a po chvíli sestrojil úsečku $PB$. Stejně jako studentka XYZ i tento student za pomoci funkce tahání zkoumal některé speciální případy konstrukce.

### 6.3.4 Čtvrtý problém

Tento problém řešil pouze jeden student. Pro připomenutí problému viz sekci 6.1.4.




*Obrázek 66 Řešení 4. problému*

- Student **ABC**

***Řešení bez počítače*** *(poznámky na papíře):* Student načrtnul zadání problému a do něj zakreslil čtyřúhelník $EFGH$. Ze záznamu na papíře nebylo jasné, zda si byl vědom, že je tento čtyřúhelník rovnoběžník. V rozhovoru, který bezprostředně následoval, ho nezmínil vůbec. Také si zapsal tuto otázku: „Můžu nějak využít Thaletovu větu?“ Z toho je patrné, že student zkoumal, zda by některý z teorémů, zopakovaných před výzkumným testem, nešlo využít. Právě tento teorém ale k řešení nevede.

*1. rozhovor:*

Výzkumník (**V**): Takže, vyřešil jsi problém?
Student (**S**): Ne.
**V:** A máš nějaké domněnky nebo hypotézy, o kterých si myslíš, že s řešením souvisejí?
**S:** No, hypotézy… mám takové základní poznatky, nad kterými jsem přemýšlel. Říkal jsem si, když znám středy stran tak zkusím nějakým způsobem využít Thaletovu větu, což mě zatím na nic nezavedlo.
**V:** Tady je problém, v tomto příkladu, že ten čtyřúhelník je obecný…
**S:** Jo, že nemusí mít opsanou kružnici.
**V:** Právě… nemusí být tětivový.
**S:** Právě, já jsem si řek‘, že první a druhý teorém [ze seznamu sedmi teorémů, které jsme zopakovali před samotným experimentem] nemohu vůbec použít, protože libovolný čtyřúhelník tu kružnici nemusí mít. Tím pádem mi možná padá i ta mocnost bodu ke kružnici… tam nemusí být opsaná kružnice. A zatím jsem se nikam nedostal. Potom mě napadlo využít rovnoběžnost, že $GE$ by mohla být rovnoběžná s $DA$… což si nakonec nejsem jistý, ale myslím si, že spíš to nemusí být pravda. [Skutečně toto tvrzení pravdivé není.]
**V:** Uvidíme v GeoGeobře….
**S:** V trojúhelníku nebo ve čtverci by to pravda byla, ale to není libovolný čtyřúhelník. Takže tak. Možná mi v tom GeoGebra trošku pomůže.
**V:** Uvidíme.

**Shrnutí rozhovoru:**

Hypotézy: žádná (Student vychází z teorémů, které v tomto případě nelze použít. Zmiňuje jedinou hypotézu, o které správně pochybuje, totiž že přímka $DA$ je rovnoběžná s $GE$).

***Řešení s pomocí GeoGebry*** *(poznámky na papíře):* Student si je vědom, že čtyřúhelník $EFGH$ je rovnoběžník. Zároveň zapsal rovnost úhlů $HSG$ a $ESG$. Jak plyne z následného rozhovoru, student postupoval za pomoci abdukce: Vyšel z nedokázaného předpokladu, že se přímky $GE$ a $HF$ půlí, z toho odvodil, že jsou trojúhelníky $HSE$ a $FSG$ shodné a z toho již vyplynula rovnoběžnost přímek $GF$ a $HE$.

*2. rozhovor:*

**V**: Takže problém jsi asi…
**S**: …ne, nevyřešil.
**V**: Tak, přišel jsi na nějaké domněnky a hypotézy?
**S**: Myslím si, že ty… můžu to načrtnout?...Když mám takhle ten obecný konvexní čtyřúhelník, tady mám středy [jejich stran], tak tyhle protilehlé [strany čtyřúhelníku, který tvoří středy stran] budou rovnoběžné.
**V**: To znamená… plyne z toho, že ty úhlopříčky toho čtyřúhelníku se půlí?
**S**: Úhlopříčky?
**V**: Chceme zdůvodnit, že ty spojnice těch středů se půlí, takže jestli to dobře chápu, tak pokud je tohle rovnoběžník …
**S**: … jo, tak vlastně se musí půlit ty úhlopříčky… nemusí, teď nevím…
**V**: Takhle, otázka: Ty jsi přišel na to, že tohle je rovnoběžník…
**S**: Ale řekl jsem si to trochu jinak. Já jsem si řekl, že tyhle úhly, protilehlé, jsou stejné [$\measuredangle HSG = \measuredangle ESG$], takže když povedeme ve stejných vzdálenostech ty úsečky, které je spojí [měl na mysli úsečky $HG$ a $EF$], tak musí být rovnoběžné… no jo, to jsem ale předpokládal, že to [dokazované tvrzení] je pravda.
**V**: Jo, přesně, ty jsi předpokládal, že ty úhlopříčky se půlí… Takhle, v GeoGebře jsi přišel na to, že tenhle čtyřúhelník [$EFGH$] je rovnoběžník, a teď já se ptám, jak jsi na to přišel? Jako třeba sis ty body náhodně spojil a zjistil, na základě vizuálního vnímání, že je to rovnoběžník? Nebo jak jsi zjistil, že tenhle čtyřúhelník je rovnoběžník?
**S**: Jenom na základě toho, co jsem říkal, pak jsem si to ověřil tedy v GeoGebře, tou metodou „vztah mezi objekty“, ale moje úvaha byla v tom, že tady ty úhly jsou stejné a tahle část je stejná a tahle je stejná…
**V**: To znamená, předpokládáš to, co máš dokázat…
**S**: Jo, právě… nevím, jestli to je v pořádku.
**V**: Ne, ne v pořádku, já se jenom ptám… Došel jsi, že tohle je stejné jako tohle a tohle je stejné jako tohle, tak tohle musí být rovnoběžník [touhle komplikovanou formulací se vyjadřovala skutečnost, že trojúhelníky $ESF$ a $GSH$ jsou středově souměrné], to je jakoby v uvozovkách tvé zdůvodnění…
**S**: Dál jsem se nedostal.
**V**: Dobře, a jak tě napadlo spojit středy těch stran?
**S**: Protože ty kružnice mě nikam nevedly.
**V**: A ty kružnice si zkoušel proč? Snažil ses aplikovat nějakou Thaletovu větu?

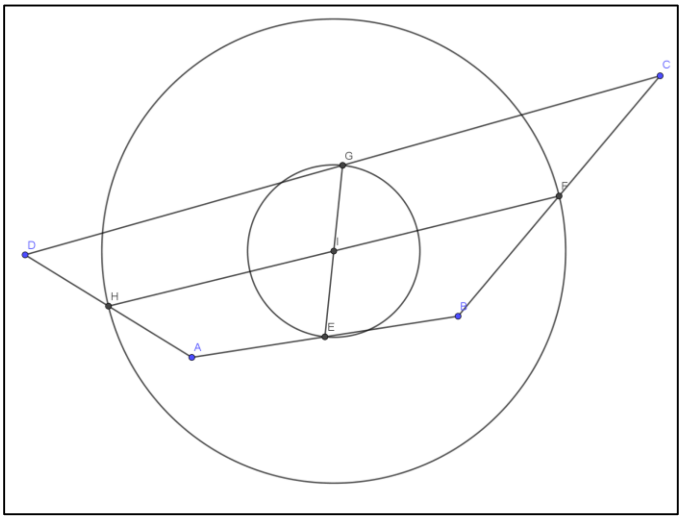
**S**: Jo, určitě, říkal jsem si, že když znám středy, tak se pokusím využít Thaletovu kružnici, což mě nikam nedovedlo, pak jsem si řek‘, že když se středy těch kružnic půlí, tak vlastně tam taky můžu napasovat Thaletovu kružnici, ale taky to k ničemu moc nevedlo…
**V**: A pak jsi to zahodil a zkusil jsi spojit…
**S**: a pak, jak v těch papírech byl pátý teorém [studenti si během řešení mohli ponechat seznam sedmi teorémů, které jsme před začátkem experimentu zopakovali], tak jsem se k tomu dopracoval. Já jsem to měl vlastně v náčrtu, když jsem to řešil bez té GeoGebry, tak jsem si to zkusil spojovat, ale pak jsem to opustil, zamotal jsem se do těch kružnic…
**V**: Takže s GeoGebrou jsi zjistil, že [ty strany] jsou rovnoběžné, a dál nevíš, jak to zdůvodnit.
**S**: Přesně tak.

**Shrnutí rozhovoru:** Z rozhovoru je patrné, že student dál pokračoval v neplodném pokusu využít teorémy, týkající se kružnic (Thaletova věta, mocnost bodu ke kružnici). Pak tento přístup opustil a zkusil něco nového: Spojil středy stran a všiml si, že ty tvoří rovnoběžník. Dospěl tak k druhému tvrzení úlohy a netriviálnímu faktu. Z rozhovoru se zdá pravděpodobné, že student přišel na hypotézu s pomocí abdukce: Jeho úvaha byla založena na dokazovaném tvrzení, z něhož odvodil, že čtyřúhelník $EFGH$ je rovnoběžník. Student rovněž řekl, že ho napadlo spojit tyto středy už v předchozí fázi, ale nakonec to opustil. Z toho je patrná role, kterou hrála GeoGebra při objevu tohoto tvrzení: Poskytla studentovi jistotu, kterou bez ní (kvůli svým nedostatečným zkušenostem), neměl.

Hypotézy: Student objevil druhé tvrzení (čtyřúhelník tvořený středy je rovnoběžník), a to na základě abdukce. První tvrzení ho nenapadlo.

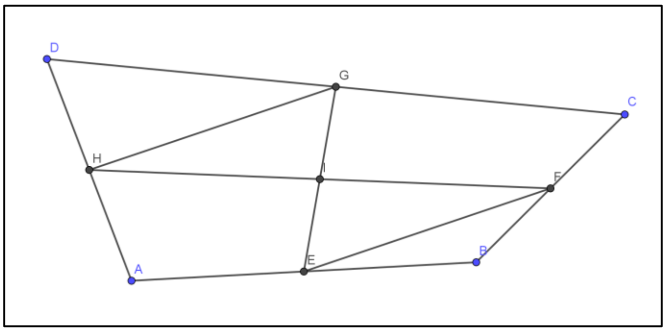
*Akce **ABC**, provedené v DGE (screenshoty obrazovky):*

- Student se nejdříve snažil využít teorémy, které se týkaly kružnic (Thaletova věta). Ty ale v tomto případě k ničemu nevedly.




*Obrázek 67*

– Po čtvrt hodině student výše uvedenou strategii opustil a zkonstruoval úsečky $EF$ a $GH$. Pomocí nástroje „vztah mezi objekty“ verifikoval jejich rovnoběžnost. Krátce nato zkonstruoval kompletní čtyřúhelník $EFGH$. Dál se nedostal – nenapadlo ho sestrojit úsečky $AC$ a $DB$.




*Obrázek 68*

***Řešení s pomocí souboru, v němž byla zvýrazněna důležitá fakta*** *(poznámky na papíře):* Student napsal korektní zdůvodnění, proč jsou přímky $AC, HG$ a $EF$ rovnoběžné. To spolu s faktem, který byl zmíněn v předchozí fázi (úhlopříčky rovnoběžníku se půlí), vedlo k řešení problému.

*3. rozhovor:* Rozhovor se z časových důvodů nenahrával.

**Shrnutí rozhovoru:** Z velmi krátkého rozhovoru bylo jasné, že student znal kompletní řešení problému.

**Tabulka (4. experiment, 4. úloha), shrnutí dat:**

| **4. (dopl) úloha** | Bez GeoGebry (I. Fáze) | | S Geogebrou (II. Fáze) | | | S Geogebrou (III. Fáze) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Student | **Objevil student relevantní hypotézy?** | **Vyřešil student problém?** | **Objevil student, že přímka AC je rovnoběžná s přímkami EF a GH?** | **Objevil student, že čtyřúhelník tvořený středy stran je rovnoběžník?** | **Vyřešil student problém?** | **Vyřešil student problém?** | **Jaké byly jeho problémy při řešení?** | **Proč student problém nevyřešil ve II. fázi?** |
| **ABC** | NE (studenta pravděpodobně napadla správná domněnka, ale nakonec ji zavrhnul) | NE | NE | ANO (Student objevuje s pomocí **konstruktivní argumentace**, že čtyřúhelník je rovnoběžníkem) | NE | Ano | | Studenta nenapadla klíčová myšlenka, že k důkazu rovnoběžnosti je nutné využít přímku AC. |

**Data ke druhé otázce**

II Jaké jsou příčiny selhání studentů při hledání důkazu, proč pomoc softwaru není v některých případech dostatečná?

Student ABC za pomoci abdukce objevil, že čtyřúhelník, tvořený středy stran, je rovnoběžník. Nebyl však schopen tento fakt zdůvodnit, neodhalil, že klíčovou myšlenkou důkazu je využít úhlopříček původního čtyřúhelníku.

Příčiny neúspěchu studenta ABC

- Neobjevil klíčovou myšlenku důkazu.

**Jakým způsobem studenti nástroje DGE využívají?**

– Student ABC
  Student zpočátku prozkoumával konstrukci náhodně: Bez plánu měřil úhly a pohyboval objekty konstrukce. Dále se snažil využít teorémy, které se týkají kružnic, zejména Thaletovu větu. Konstruoval různé kružnice s nadějí, že něco objeví. Lze říci, že jeho jednání bylo motivováno heuristickým záměrem, který však – bohužel – s řešením nesouvisel. Po abduktivním objevu druhého tvrzení přidával do konstrukce různé přímky se zřejmou snahou zdůvodnit rovnoběžnost úseček. Zkonstruovat tu správnou přímku ($AC$) ho nenapadlo.

### 6.3.5 Shrnutí dat čtvrtého experimentu

V této části uvedeme souhrnně fakta, která byla získána v průběhu čtvrtého experimentu.

**Data k první výzkumné otázce**

I.a. Napomáhá použití softwaru DGE k objevu relevantních faktů, vztahujících se k řešení problému, ve srovnání s prostředím papír - tužka?

Bylo zkoumáno 9 nezávislých případů:

- Bez GeoGebry byl schopen student zformulovat správnou (netriviální) hypotézu ve 3 z 9 případů.
- S GeoGebrou byl schopen student zformulovat správnou hypotézu v 6 z 9 případů.
- V kumulativním hodnocení, bez GeoGebry, byly objeveny 4 hypotézy z 18 možných. S podporou softwaru pak bylo objevenou 8 hypotéz z 18 možných.

I.a. Napomáhá použití softwaru DGE k nalézání deduktivního zdůvodnění řešení ve srovnání s prostředím papír - tužka?

Získaná data:

- Bez GeoGebry 0/9
- S GeoGebrou 3/9 (případy ABC 1. úloha, ABC 2. úloha, ABC 3. úloha.)

**Data ke druhé otázce**

II Jaké jsou příčiny selhání studentů při hledání důkazu, proč pomoc softwaru není v některých případech dostatečná?

Stejně jako v případě prvních tří experimentů, rozdělíme studenty do kategorií, podle toho, ve které fázi problém vyřešili.

V případě tohoto experimentu však chyběla 4. fáze, protože studenti u sebe od začátku měli seznam relevantních teorémů, do kterého mohli nahlížet. Aby byla zachována určitá jednotnost ve vyhodnocení dat, držíme se následující konvence: Pokud student zjistil všechna fakta ve druhé fázi, ale řešení dosáhl až ve fázi třetí, byl zařazen do čtvrté kategorie (tedy kategorie, která v předchozích experimentech odpovídala případu, kdy subjektu byly prozrazeny jak relevantní fakta, tak teorémy). Pokud student neobjevil všechny relevantní teorémy, ale po jejich prozrazení byl schopen důkaz dokončit, byl zařazen do třetí kategorie. Pokud problém nevyřešil, byl zařazen – stejně jako v předchozích případech – do páté kategorie.

Získaná data:

| Kategorie | Studenti | Počet případů, v nichž byly objeveny všechny domněnky. | Počet případů, kdy byla objevena jedna domněnka. | Počet případů, kdy nebyla objevena žádná domněnka. |
|---|---|---|---|---|
| Kategorie 2 | 3 (3×ABC) | 3 | - | - |
| Kategorie 3 | 3 (ABC, XYZ, RIRI) | - | 1 | 2 |
| Kategorie 4 | 2 (2×XYZ) | 2 | - | - |
| Kategorie 5 | 1 (RIRI) | - | 1 | - |

Níže uvádíme potíže každého studenta/studentky v souvislosti s řešenými problémy.

<u>Studentka XYZ</u>

1. problém:

– Studentka neobjevila klíčovou myšlenku důkazu (nenapadlo ji, že řešení může souviset s úhly).
– Měla špatný cit pro výběr teorémů. Snažila se aplikovat mocnost bodu ke kružnici, ta se však v této situaci nedala použít.

- Studentka měla obtíže s vytvořením logického řetězce, vycházející od předpokladů k závěru (zahrnula do předpokladů něco, co nebylo dokázáno).

2. problém: Neschopnost aplikovat matematickou teorii (větu o obvodových úhlech).

3. problém: Neschopnost aplikovat matematickou teorii (Thaletovu větu a stejnolehlost).

<u>Student ABC</u>

1. problém: Student problém nakonec vyřešil, ale měl problémy s tvorbou deduktivního řetězce.

2. problém: Student problém vyřešil.

3. problém: Student problém vyřešil.

4. problém: Studenta nenapadla klíčová myšlenka, jak zdůvodnit rovnoběžnost přímek $EF$ a $GH$ (totiž konstrukce přímky $AC$).

<u>Studentka RIRI</u>

1. problém:

- Studentka neobjevila klíčovou myšlenku důkazu (nenapadlo ji, že řešení může souviset s úhly).
- Měla špatný cit pro výběr teorémů. Snažila se aplikovat mocnost bodu ke kružnici, ta se však v této situaci nedala použít.
- Obtíže s vytvořením logického řetězce.

2. problém:

- Neschopnost aplikovat matematickou teorii (větu o obvodových úhlech) v netypické situaci.
- Logické nedostatky (studentka si neuvědomila, že z konstantnosti úhlu $PSA$ plyne, že řešením je přímka).

**Data ke třetí otázce:**

III.b. Jaká je četnost výskytu jednotlivých způsobů objevování? Konkrétně, jak výrazně se na objevu hypotézy podílí řešitelovy znalosti a logika?

| *Počet konstruktivně objevených fakt* | *Počet náhodně objevených fakt* | *Počet relevantních fakt, která studenti neobjevili* |
|---|---|---|
| **8** | **4** | **6** |

III.c. Existuje souvislost mezi způsobem objevu relevantních faktů a úspěšností při řešení problému?

| *Počty případů (vyřešili / nevyřešili)* | *Počet konstruktivně objevených fakt* | *Počet náhodně objevených fakt* | *Počet relevantních fakt, která studenti neobjevili* |
|---|---|---|---|
| **3** | **5** | **1** | **0** |
| **6** | **3** | **3** | **6** |

## 6.4 Shrnutí a interpretace dat vzhledem k výzkumným otázkám

V této sekci shrneme a interpretujeme data, která jsme získali v rámci jednotlivých experimentů.

Zabývali jsme se otázkou, jak výrazná je pomoc softwaru při hledání zdůvodnění matematického problému (první výzkumná otázka). Dále jsme se ptali, jaké jsou problémy studentů při hledání řešení (druhá výzkumná otázka), jak lze charakterizovat úspěšné studenty a jakým způsobem studenti objevují relevantní fakta, která s řešením souvisejí (třetí výzkumná otázka). K výzkumu byli zvoleni studenti učitelství na pedagogické fakultě ve druhém až čtvrtém roce studia.

Při prezentaci výzkumu budeme postupovat podle pořadí jednotlivých výzkumných otázek. Nejdříve uvedeme otázku a pak odpověď, zformulovanou na základě interpretace získaných dat. Odpověď na třetí otázku rozšíříme o něco více, než bylo původním záměrem. Budeme se zabývat i tím, jakým způsobem studenti software nástroje DGE využívají, a okrajově se dotkneme toho, zda existují různé kategorie relevantních faktů (hypotéz souvisejících s řešením), které se liší svoji přístupností – tzn. předpokládaným způsobem objevu daného faktu subjektem.

**I.a. Napomáhá použití softwaru DGE k objevu relevantních faktů, vztahujících se k řešení problému, ve srovnání s prostředím papír - tužka?**

Získaná data:

I.a. Počet případů, kdy student byl schopen zformulovat relevantní hypotézu bez softwaru: **4/31**
Celkem objeveno domněnek: **5/62**

Počet případů, kdy student byl schopen zformulovat relevantní hypotézu s DGE: **18/31**
Celkem objeveno domněnek: **28/62**

Pokud výsledky shrneme slovně: Z 31 případů (záměrně neříkáme studentů, protože někteří jsou v tomto počtu zahrnuti více než jednou, viz sekci 6.1.3) pouze ve 4 z nich byli studenti schopni nalézt *netriviální experimentální fakt* bez softwarových nástrojů. Jde o necelých **13 % případů**.

Z celkového počtu 62 domněnek, které souvisely s řešením, bylo bez softwaru objeveno pouze 5, tedy **8 %**.

Pokud studenti používali software, objevili netriviální domněnku v **58 % případech**, což představuje výrazný nárůst.

Z celkového počtu 62 domněnek, které souvisely s řešením, jich bylo objeveno s podporou softwaru 28, tedy **45 %**.

Lze tedy podloženě přijmout hypotézu, že *nástroje softwaru významně usnadňují formulaci relevantních hypotéz* – a to nejenom těch triviálních, které jsme ze svého zkoumání předem vyloučili, ale *těch netriviálních*, o *jejichž relevanci musel rozhodnout sám řešitel*. Otázkou, proč tomu tak je, se zabýváme v rámci druhé otázky.

### I.b. Napomáhá použití softwaru DGE k nalézání deduktivního zdůvodnění řešení ve srovnání s prostředím papír - tužka?

Získaná data:

I.b. Počet správných řešení bez pomoci počítače: **0/31**
Počet správných řešení s pomocí GeoGebry: **9/31**

Z dat vyplývá, že *pomoc GeoGebry byla významná, přesto ale ve většině případů nebyla dostatečně velká*.

### II Jaké jsou příčiny selhání studentů při hledání důkazu, proč pomoc softwaru není v některých případech dostatečná?

Celkem ve 22 případech z 31 studenti problém nevyřešili. V rámci prvního experimentu jsme příčiny neúspěchu studentů nezkoumali, ale v rámci dalších experimentů jsme studentům poskytli odstupňovanou pomoc. Na tomto základě se pokusíme vymezit problémy, které studenti s důkazy měli.

V experimentech, které byly odstupňované, bylo zkoumáno celkem 21 případů, z toho v patnácti z nich byl student neúspěšný. Souhrnná data vypadají následovně:

| Kategorie | Počet případů | Počet případů, v nichž byly objeveny všechny domněnky. | Počet případů, kdy byla objevena jedna domněnka. | Počet studentů, kteří neobjevili žádnou domněnku. |
|---|---|---|---|---|
| Kategorie 2 | 6 (29%) | 6 | - | - |
| Kategorie 3 | 6 (29%) | - | 2 | 4 |
| Kategorie 4 | 4 (19%) | 2 | - | 2 |
| Kategorie 5 | 5 (24%) | - | 3 | 2 |

*Souhrnné počty případů v závislosti na tom, v jaké fázi student dokončil řešení problému.*

K tomu, aby subjekt vyřešil problém s podporou DGE, jsou nutné dva faktory:

I. Subjekt musí objevit relevantní fakta, vztahující se k řešení.
II. Subjekt musí být schopen spojit tato fakta do logického řetězce.

Studenti, kteří byli zařazeni do 2. kategorie, byli schopni obojího. Studenti, zařazení do 3. kategorie, měli problém s nalezením relevantních faktů, ale nikoli s tvorbou logického řetězce. Většina studentů, zařazených do 4. a 5. kategorie, měla problém s nalezením relevantních faktů a všichni tito studenti nebyli schopni tato fakta využít při tvorbě deduktivního řetězce. Studentům, kteří byli zařazeni do 4. kategorie, stačilo prozradit nutné teorémy, studenti 5. kategorie problém nevyřešili ani s touto nápovědou. Problémy studentů v jednotlivých kategoriích podrobně rozebereme.

I Případy, kdy student vyřešil problém ve 3. kategorii, měly společný jmenovatel: *Studenti neodhalili všechna netriviální fakta, která se vztahovala k řešení*. Jak plyne z dat uvedených výše, z celkového počtu studentů, kteří problém samostatně nevyřešili, čtyřiceti procentům stačilo, když jim tato fakta byla sdělena.
Vzniká otázka, proč studenti tato fakta sami neodhalili. V experimentech byly v této souvislosti vypozorovány dva jevy:

1. ***Špatný odhad pro výběr teorémů.*** To bylo pozorováno zejména v 1. úloze čtvrtého experimentu: Studentky RIRI a XYZ se snažily aplikovat mocnost bodu ke kružnici, která ale s řešením nesouvisela. V rámci 2. experimentu stejnou chybu udělaly studentky MAT a KOK. Ve čtvrtém experimentu se student ABC při řešení 4. úlohy dlouho pokoušel aplikovat Thaletovu větu, tu však v tomto případě efektivně použít nešlo. Tento student dokázal tuto nikam nevedoucí ideu nakonec sám opustit.
2. ***Neodhalení klíčové myšlenky, jak důkaz provést.*** Student ABC sledoval v případě 4. úlohy zcela správnou strategii (zdůvodnění rovnoběžnosti úseček), ale nedokázal ji dovést až do konce, protože nedostal ten správný nápad (zkonstruovat přímku $AC$). V případě 2. úlohy bylo takovou klíčovou myšlenkou zjištění, že úhel $PSA$ nabývá stále stejné hodnoty. Tento fakt nebyl schopen nalézt student XY v rámci 3. experimentu, a teprve po jeho prozrazení byl schopen důkaz dokončit.

*Ve všech těchto případech však stačilo, pokud studentům byla relevantní fakta prozrazena. Pak si byli schopni vybavit klíčovou matematickou teorii a důkaz zkonstruovat.*

II Pro studenty ve čtvrté kategorii nebyla samotná fakta dostatečná k tomu, aby si vybavili klíčovou matematickou teorii a důkaz dokončili. Teorie jim musela být prozrazena. Z našeho vzorku se to týkalo 4 studentů, tj. 27 % z počtu studentů, kteří problém nedokázali vyřešit samostatně.

Tito studenti znali potřebnou teorii a – jelikož důkaz dokončili – byli schopni vytvořit deduktivní řetězec. Samotná fakta v těchto případech nestačila k vytvoření asociace s klíčovou teorií. Důvody byly:

3. *Nezkušenost s aplikací teorémů v matematicky běžných situacích*. Studentka XYZ v případě 3. úlohy objevila všechna fakta, přesto byla schopna důkaz dokončit teprve s pomocí. Hlavní příčinou byla její nezkušenost s aplikací stejnolehlosti.
4. *Neschopnost aplikovat teorém v nestandardní situaci*. Někdy je konkrétní použití matematických teorémů mechanické, subjekt si vystačí s prostou zkušeností. V netypické situaci je ale nutný vlastní nápad. To je zejména případ 2. úlohy, vyžadující aplikaci věty o obvodovém úhlu. Tato věta sice patří mezi základní geometrické teorémy, ale zde ji bylo třeba použít ve zcela netypické situaci, neboť samotná kružnice, k níž se věta vztahovala, byla v „pohybu“. To byl zejména problém u studentek XYZ (4. experiment) a ANO (3. experiment) při řešení 2. úlohy.
5. *Nedostatky v logickém uvažování*. Uvědomění si logických důsledků daných faktů významně usnadňuje aplikaci teorie. Když si např. student při řešení 2. úlohy uvědomí, že z konstantnosti úhlu $PSA$ plyne řešení, může se zaměřit na konkrétní cíl – proč je daný úhel konstantní. Pokud si tuto myšlenku neuvědomí, jeho možnosti se řešení významně redukují. Studentka ANO uvedla, že si neuvědomila, že z konstantnosti úhlu $PSA$ plyne řešení druhého problému.

*Všechny tyto případy byly charakteristické tím, že samotná fakta nevedla k tomu, aby si studenti vybavili potřebnou matematickou teorii, přestože ti byli schopni vytvořit deduktivní důkaz.*

III Studenti v páté kategorii problém nevyřešili ani s maximální možnou nápovědou. Z našeho vzorku se to týkalo 5 studentů (33 procent).

Příčiny jejich neúspěchu bylo možno rozdělit do dvou faktorů:

6. *Neschopnost vytvořit deduktivní řetězec*. K schopnosti vytvořit matematický důkaz je nutné mít rozvinuté logické uvažování a také jistou praxi. Pokud se studentu nedostává ani jednoho, není schopen důkaz dokončit, i když jsou mu známy potřebné matematické teorémy a fakta, vztahující se k řešení. V experimentu byl tento jev pozorován několikrát – v prvních třech experimentech u studentů DI4, BFL (2. experiment) a KK (3. experiment).

V případě čtvrtého experimentu bylo ve většině případů pozorováno, že student dokončil důkaz teprve po upozornění a nápovědě výzkumníka v rozhovoru. Častým jevem bylo, že subjekt zahrnoval do předpokladů něco, co mělo být teprve dokázáno.

7. *Nedostatky v logickém uvažování*. Tento jev se již vyskytuje v předchozí kategorii studentů. V tomto případě však byla neschopnost logicky interpretovat získaná fakta tak velká, že student problém nevyřešil, ani když mu byla prozrazena jak fakta, tak teorémy, vztahující se k řešení. V rámci 3. experimentu se tento případ vyskytl u studenta M, ve čtvrtém experimentu pak u studentky RIRI. Oběma nedošlo, že z konstantnosti úhlu PSA plyne, že hledaná množina leží na přímce.

*Tito studenti nebyli schopni důkaz dokončit ani se znalostí relevantních faktů a s explicitním zdůrazněním relevantních teorémů. Jejich problémy byly hlubší povahy a GeoGebra jim nemohla nijak pomoci.*

**III.b. Jaká je četnost výskytu jednotlivých způsobů objevování? Konkrétně, jak výrazně se na objevu hypotézy podílí řešitelovy znalosti a logika?**

Data získaná k hypotéze:

| *Konstruktivně objevená fakta* | *Počet náhodně objevených fakt* | *Počet relevantních fakt, která studenti neobjevili* |
|---|---|---|
| **21 (34 %)** | **12 (19 %)** | **29 (48 %)** |

V souhrnu všech zkoumaných případů byla objevena zhruba polovina relevantních hypotéz. Z tohoto počtu byla většina (65 %) objevena s pomocí logické (konstruktivní) argumentace. Zbytek byl objeven s pomocí nástrojů softwaru a vizuálního vnímání, ale bez konstruktivního záměru studenta. Proto můžeme konstatovat:

*I s podporou softwaru se student při objevování hypotéz musí spoléhat na logickou úvahu a teoretické znalosti. Pouze menší část hypotéz je možné objevit jen s pomocí nástrojů softwaru, jejichž použití není vedeno konkrétním záměrem, ale je dáno pouze náhodou a vizuálním vnímáním.*

*Konstruktivní objev faktu znamená, že jeho objevu předchází argumentace, opírající se o logické uvažování a předchozí znalosti studenta. Proto i s použitím softwaru je ve většině případů nutné hledaný fakt předjímat, nelze se spoléhat pouze na náhodu a mechanické prozkoumávání. Případů, kdy student objeví relevantní fakt zcela náhodně, je menšina.*

### III.c. Existuje souvislost mezi způsobem objevu relevantních faktů a úspěšností při řešení problému?

Získaná data:

| *Počty studentů (vyřešili / nevyřešili)* | *Počet konstruktivně objevených fakt* | *Počet náhodně objevených fakt* | *Počet relevantních fakt, která studenti neobjevili* |
|---|---|---|---|
| **9** | **15 (83 %)** | **3 (17 %)** | **0** |
| **22** | **6 (14 %)** | **9 (20 %)** | **29 (67%)** |

Jak z dat vyplývá, studenti, kteří problém vyřešili samostatně, většinu faktů objevili konstruktivně, tedy s pomocí úvahy nebo s pomocí nástrojů softwaru, jejichž použitím sledovali konkrétní záměr. Studenti, kteří problém nevyřešili, ve velké většině nepřišli na všechna fakta, související s řešením. Pokud na některá fakta přišli, stalo se tak většinou bez podpůrné argumentace, tzn., používali software bez vědomého záměru a problém prozkoumávali jen vizuálně a náhodně.

*Na základě získaných dat můžeme formulovat obecný závěr: Studenti, kteří problém nakonec vyřeší, používají v průzkumu problému v rámci softwaru i logiku a matematické znalosti. Studenti, kteří problém nevyřeší, používají nástroje softwaru většinou bez plánu a náhodně nebo sledují záměr, který není vzhledem k řešení problému relevantní. Takové prozkoumávání je značně neefektivní a tak tito studenti na většinu faktů, vztahujících se k řešení, nepřijdou.*

Na získaná data jsme aplikovali zatím jedno kritérium, totiž zda problém byl nebo nebyl vyřešen. Nabízí se i jiné dělení, spočívající v roztřídění dat podle toho, jakého faktu se týkají. Pro tento účel je možné fakta řadit do různých kategorií. Například kategorie „konstrukce nového objektu" by označovala případy, kdy je objev domněnky svázán s novým geometrickým objektem, který nebyl zmíněn v zadání. Kategorie „měření" by označovala případy, kdy je objev faktu svázán s délkami úseček nebo velikostmi úhlů. Kategorie „vztah mezi objekty" by označovala případy, kdy subjekt musí mezi danými objekty objevit nějakou souvislost, například že tři body leží v přímce.

My tímto způsobem postupovat nebudeme, neboť za prvé je obtížné tyto kategorie uzpůsobit tak, aby byly disjunktní, a za druhé není jednoduché vytvořit kritéria, na jejichž základě by se vytvořilo dělení s ohledem na cíle, které sledujeme, totiž jakým způsobem lze daný fakt objevit.

Zde proto vytvoříme zjednodušené dělení: Obě fakta v první úloze (dva úhly konstrukce jsou pravé) budeme chápat jako rovnocenná. Uváděna data se budou týkat pouze těchto faktů. U druhé úlohy obě fakta, už za rovnocenná považovat nemůžeme: Jeden z nich se týká úhlů (úhel $PSA$ je konstantní), druhý se týká přidání nového objektu (čtyřúhelníku $APBS$ lze opsat kružnici). Proto data k těmto faktům uvedeme zvlášť.

Souhrnná data, vztahující se k první úloze:

| *Počet konstruktivně objevených fakt* | *Počet náhodně objevených fakt* | *Počet relevantních fakt, která studenti neobjevili* |
|---|---|---|
| **10** | **2** | **16** |

Data, vztahující se k prvnímu faktu druhé úlohy (čtyřúhelníku $APBS$ lze opsat kružnici):

| *Počet konstruktivně objevených fakta* | *Počet náhodně objevených fakt* | *Počet relevantních fakt, která studenti neobjevili* |
|---|---|---|
| **8** | **0** | **6** |

Data, vztahující se k druhému faktu druhé úlohy (rovnost $\measuredangle PSA = \measuredangle PBA = 30°$):

| *Konstruktivně objevená fakta* | *Náhodně objevená fakta* | *Počet relevantních faktů, které studenti neobjevili* |
|---|---|---|
| **1** | **7** | **6** |

Jak tato data ukazují, fakta byla ve všech případech (ne)objevena zhruba v polovině případů. Ale způsob objevu posledního faktu se výrazně liší od předchozích dvou případů – byl objeven s pomocí nástrojů softwaru bez podpůrné argumentace, tedy náhodně, kdežto předchozí fakta byla většinou objevena s pomocí vědomého záměru nebo znalostí studenta. *V prostředí softwaru panují rozdíly mezi různými fakty, spočívající v nejčastějších způsobech jejich objevu. Některá fakta jsou méně přístupná vizuálnímu vnímání a lze je proto možné objevit především díky argumentaci a teoretickým znalostem. Fakta vizuálnímu vnímání dobře přístupná lze snadno objevit s pomocí nástrojů softwaru náhodně.*

V literatuře, zabývající se problematikou DGE, se objevuje názor, že největší výzvu pro studenty v průběhu řešení problému představuje konstrukce nových objektů, které nebyly zmíněné v zadání (bod, kružnice atd.). Například (Holzl, 2001) zdůrazňuje, že je nepravděpodobné, že pouze s pomocí funkce tahání je možné objevit všechna fakta, vztahující se k řešení. Náš výzkum tento poznatek potvrzuje a také rozšiřuje. Přidání kružnice do konstrukce v případě druhé úlohy bylo u všech studentů výsledkem argumentace a teoretických znalostí, ani jednou nebyl tento fakt objeven náhodně. Fakta první úlohy však také byla ve většině případů přístupná studentům, kteří nalezli vhodnou teoretickou argumentaci. Nejen přidání nových objektů do konstrukce, ale i měření úhlů může spadat do kategorie, která je přístupná pouze těm studentům, kteří jsou v průběhu řešení schopni využít své znalosti a logickou úvahu. Naopak poslední fakt byl objeven zejména díky vizuálnímu vnímání dynamické změny konstrukce.

Zodpověděli jsme třetí otázku. V průběhu posledního (čtvrtého) experimentu jsme však mohli sledovat postup studentů mnohem detailněji, než tomu bylo při předchozích sběrů dat. Na základě dat, získaných z tohoto experimentu, se proto pokusíme zodpovědět ještě jednu otázku, která s třetí otázkou těsně souvisí:

***III.d. Jakým způsobem studenti nástroje DGE využívají a v čem spočívá jeho pomoc?***

Začněme druhou částí této otázky: V čem především spočívá pomoc softwaru u úspěšných studentů?

U první úlohy spočívala ve dvou faktorech:

- Získání hledané množiny. To fungovalo jako „spouštěcí mechanismus“ pro vybavení si matematické teorie (Thaletovy věty).
- Pomoc softwaru spočívala i ve verifikaci domněnky. Zejména v případě studenta ABC je vidět, že si svojí myšlenkou nebyl jist a potřeboval ujištění, že je správná.

U druhé úlohy se role softwaru neomezovala jenom na verifikaci.

- V případě druhé úlohy byla pomoc softwaru ještě významnější. V převažujícím počtu případů studenti díky softwaru získali fakt ($\measuredangle PSA = 30°$), o jehož důležitosti neměli předtím žádné ponětí, proto jej nepředjímali. Pro tento jev se nabízí dvě vysvětlení: 1) Fakt byl přístupný vizuálnímu vnímání (stačilo vhodně posunout proměnlivý trojúhelník $APB$). 2) Tento fakt se anticipuje mnohem snáze, pokud je známo, že hledanou množinou je přímka, procházející bodem $S$. Pokud to studentovi známo není, je obtížné na tuto hypotézu přijít.
  V objevu tohoto faktu tedy sehrály roli dva faktory: Znalost řešení a přístupnost objevu hypotézy nástrojem tahání objektů.

To samé lze říci v případě třetí úlohy. Pokud vše shrneme, pomoc softwaru spočívala v těchto bodech:

*1) Získání hledané množiny*. To fungovalo jako spouštěcí mechanismus pro vybavení si potřebné teorie a podnítilo vyhledávání dalších hypotéz. Jev byl pozorován u základních úloh ve všech provedených experimentech, zejména u první úlohy.

*2) Ověření hypotéz, formulovaných na základě konstruktivní argumentace*. Software dodal studentům jistotu a tak kompenzoval jejich nezkušenost. Tento jev byl pozorován v rámci 4. experimentu:

- U studenta ABC v první úloze, kdy si nebyl jistý, zda je jeho aplikace Thaletovy věty korektní. S podporou softwaru tuto jistotu získal. Ve třetí úloze student nejistě formuloval hypotézu, že čtyřúhelník $PDBE$ je tětivový, ale hned ji zavrhnul. Software mu opět poskytl jistotu. Ve čtvrté úloze (kterou ale nevyřešil) se můžeme domnívat, že student ve fázi bez podpory softwaru byl schopen formulovat fakt, že čtyřúhelník $EFGH$ je rovnoběžník, ale touto hypotézou si nebyl jistý a nakonec ji zavrhnul.
- U studentky RIRI v případě druhé úlohy: Věděla, že bod $P$ leží na Thaletově kružnici s průměrem $AB$, ale nebyla si jistá, zda na ni leží i bod $S$, neboť ten byl ve druhé polorovině. Software ji ujistil, že tomu tak je.

Dodejme, že právě v důsledku nezkušenosti studentů se spíš než o objev faktů na základě konstruktivní argumentace jednalo o konstruktivní experimenty v rámci softwaru. Detailně je celá problematika uvedená v rámci UTM v sekci 5.3.

*3) Objevení nových faktů, většinou na základě vizuálního vnímání a dynamické změny konstrukce.*

Vizuální vnímání bylo hlavním zdrojem formulace nových hypotéz, ale nebylo tomu tak vždy. Opět zmiňme příklady ze 4. experimentu:

- Student ABC objevil rovnost úhlů ($\measuredangle PSA = \measuredangle PBA = 30°$) nikoli na základě vizuálního vnímání, ale heuristického záměru, spočívajícího ve snaze aplikovat větu o obvodových úhlech. Na zjištění tohoto faktu se tak podílela znalost hledané množiny (část přímky) a vědomý záměr řešitele, vizuální vnímání bylo až sekundární. V případě třetí úlohy však studentův objev faktu (kružnice opsaná čtyřúhelníku $PDBE$ je zároveň Thaletovou kružnicí nad úsečkou $PB$) spočíval na vizuálním vnímání dynamické konstrukce.
- Studentka XYZ objevila rovnost úhlů ve druhé úloze na základě vizuálního vnímání proměnné konstrukce. Ve třetí úloze rovněž objevila obě fakta (čtyřúhelníku lze opsat kružnici a body $P, S$ a $B$ leží v přímce) na základě vizuálního vnímání.

Přejdeme k první části výše uvedené otázky III.d: Jakým způsobem studenti nástroje DGE využívají.

Jak jsme uvedli v sekci 5.3, autoři v řadě článků popisovali typické způsoby použití některých nástrojů softwaru, jako je tahání objektů (např. Arzarello et al., 2002) nebo měření délek (Olivero, F., & Robutti, O., 2007). Zde se kategoriemi „použití nástroje“ nebudeme zabývat a místo toho budeme hodnotit akce studentů z hlediska jejich záměru – zda při použití softwaru sledovali nějaký záměr, a pokud ano, jaký. Je to pohled blízký prezentovanému modelu UTM, tentokrát je však rozšířený na všechny pozorované akce, včetně těch, které nevedly k objevu relevantního faktu.

*Slepé nebo náhodné prozkoumávání* se objevuje v případech, kdy subjekt nemá žádný nápad a software používá bez zřejmého plánu. Typickou ukázkou jsou akce provedené studentkou RIRI v rámci první i druhé úlohy. Ta pohybovala různými body konstrukce, ale nevěděla, co přesně hledá. Při řešení první úlohy pohybovala bodem $B$, který ale měl být podle zadání fixní, takže je pravděpodobné, že při tomto pohybu nesledovala žádný konkrétní záměr. Ve druhé úloze pak označila střed $C$ Thaletovy kružnice nad průměrem $AB$ a sledovala jeho stopu v závislosti na pohybu trojúhelníku $APB$ po daných přímkách. Zjistila, že se střed pohybuje po kružnici. Z tohoto faktu bychom řešení problému zřejmě hledali jenom obtížně. Stejnou otázku, tedy určení stopy bodu $C$ při pohybu trojúhelníku $APB$, zkoumala studentka XYZ.

Mód slepého prozkoumávání často spočívá na něčem, co bychom mohli označit za „heuristicky slabou strategii“ (Eysenck, 2008, s. 486). To je strategie, která je velmi obecná a která v sobě nemá konkrétní matematický obsah. Typickým příkladem je zkoumání speciálních případů konstrukce. Studentky RIRI a XYZ v průběhu řešení druhé úlohy pohybovaly trojúhelníkem $APB$ tak, aby zaujal různé speciální polohy (například, aby body $APBS$ tvořily obdélník nebo aby strana $AP$ trojúhelníku byla totožná s hledanou množinou). Studentka XYZ stejný mód využila i v případě třetí úlohy, kdy ztotožnila bod $P$ s body $A$ a $C$. To jí umožnilo sestrojit hledanou množinu přímo, takže se nemusela uchylovat k nástrojům softwaru, jako jsou Stopa nebo MnozinaBodu.

*Heuristické prozkoumávání.* V případě první úlohy se studentky RIRI a XYZ snažily využít mocnosti bodu ke kružnici. Proto měřily úsečky a počítaly obsahy určitých obdélníků, jejichž obsah reprezentoval právě mocnost bodu ke kružnici. Mocnost bodu ke kružnici v dané úloze ale použít nešlo. Nicméně tyto studentky nepoužívaly nástroje softwaru náhodně. Stejný případ nastal u studenta ABC v případě čtvrté úlohy: Ten se na začátku snažil aplikovat Thaletovu větu, nevěděl ale jak a proto prostě zkoušel konstruovat kružnice nad stranami čtyřúhelníku. Ačkoli tento postup nikam nevedl a student ho později (správně) opustil, jeho akce byly motivovány heuristickým záměrem, formulovaným předem.

Že tato strategie může vést k výsledkům, ukázal student ABC v případě druhé úlohy, v níž se snažil využít větu o obvodových úhlech. Měřil úhly, až narazil na dvojici úhlů, které byly shodné a konstantní. To ho přímo dovedlo k řešení. I tento student nepoužíval nástroje softwaru úplně náhodně, ale vedl ho jistý záměr.

*Použití softwaru k verifikaci domněnek.* V těchto případech subjekt formuluje domněnku na základě úvahy a software mu na ni poskytne odpověď. V rámci UTM tedy subjekt provádí spíše konstruktivní experimenty než mechanickou verifikaci. Tento přístup bylo možné pozorovat u studenta ABC v první úloze (využití Thaletovy věty), ve třetí úloze (kružnice opsaná trojúhelníku $PDE$ prochází bodem $B$) a ve čtvrté úloze (rovnoběžné přímky $EF$ a $GH$).

Dodejme, že výše uvedené tři způsoby použití softwaru jsou plně v souladu s UTM. Přestože tento model byl vytvořen na základě introspekčního pozorování autora, byly zmíněné tři způsoby použití softwarových nástrojů pozorovány na studentech. „Náhodné prozkoumávání“ odpovídá v rámci UTM buď „náhodnému experimentu“ nebo „vizuálnímu vnímání dynamické konstrukce“. „Heuristické prozkoumávání“ odpovídá „heuristickému experimentu“ a „použití softwaru k verifikaci domněnek“ odpovídá „konstruktivnímu experimentu“ a „Konstruktivní argumentaci“.

Pozorované způsoby použití softwaru u studentů tedy můžeme brát i jako částečné ověření UTM.

# 7 Závěry práce

Práce měla tyto tři hlavní cíle:

- Určit, zda je použití softwaru při hledání řešení a důkazu matematického problému významně efektivnější ve srovnání s prostředím papír-tužka.
- Určit, zda je pomoc softwaru pro studenty dostatečná, případně jaké překážky jim brání v dosažení řešení.
- Třetí cíl měl epistemologickou povahu: Zjistit, zda student musí k objevu hypotéz v prostředí softwaru aplikovat svoje znalosti a logiku, nebo zda lze nástroje softwaru efektivně použít způsobem, který je veden mechanicky a náhodně, tj. bez jasného plánu studenta.

1) Co se týká prvního cíle, z našeho vzorku je zřejmé, že software ve srovnání s klasickým prostředím významně napomáhá jak k formulaci relevantních domněnek, tak k tvorbě samotného důkazu. Ze vzorku 31 studentů, pouze 13 % bylo schopno objevit netriviální domněnku bez pomoci softwaru, kdežto s jeho pomocí objevilo některou netriviální domněnku 45 % studentů.
   Kompletního zdůvodnění nedosáhl bez softwaru žádný student, se softwarem skoro 30 %.
   To, že software pomáhá při řešení problémů a hledání domněnek, je v souladu s poznatky, zjištěnými již dříve. Jako jejich rozšíření lze brát skutečnost, zjištěnou v tomto výzkumu, totiž že studenti díky softwaru byli schopni častěji zjistit i tzv. netriviální fakta[13], na která se předchozí literatura explicitně nezaměřovala.

2) Otázku, zda je pomoc softwaru dostatečná pro většinu studentů, účastnících se výzkumu, musíme zodpovědět negativně. V testech, které měly strukturu odstupňované pomoci, pouze 29 % studentů vyřešilo problém samostatně, 29 % ho dokončilo tehdy, když jim byla prozrazena některá fakta, a 19 % studentů vyřešilo problém, až když jim byly zdůrazněny fakta a teorémy, vztahující se k řešení. Zbylých 24 % problém nevyřešilo ani s touto pomocí.

   Studenti, kteří byli objektem výzkumu, splňovali následující kritéria:
   – Studovali učitelství matematiky alespoň druhým rokem (někteří čtvrtým rokem).
   – Setkali se při svém studiu s potřebnými teorémy.
   – Tyto teorémy byly před výzkumem zopakovány.
   – Z hlediska známek patřili k průměru až nadprůměru v ročníku. (Zejména 4. experimentu se účastnili studenti, kteří ve svém ročníku patřili k nejlepším.)

   Byly identifikovány následující problémy, se kterými se studenti při řešení potýkali:

[13] Fakta, jejichž souvislost s řešením problému není zřejmá ze zadání.

- Na hledání relevantních faktů se významně podílí předchozí znalosti a důvtip řešitele. Ne každý fakt lze jednoduše objevit vizuálním vnímáním, případně použitím nástrojů softwaru vedenými pouze doménově nezávislou heuristikou (slabými heuristickými metodami).
- Ani znalost relevantních faktů, vztahujících se k řešení, a potřebné teorie, ještě neimplikuje, že student problém vyřeší. Tato fakta nemusí stačit na to, aby subjekt odhalil klíčovou myšlenku důkazu a vybavil si matematickou teorii, potřebnou ke zdůvodnění. Tento případ v našem výzkumu nastával poměrně často.
  Část studentů ve výzkumu vyřešila problém teprve tehdy, když jim kromě těchto faktů byly prozrazeny také teorémy, vztahující se k řešení.
- Nakonec, část studentů problém nevyřešila navzdory maximální možné nápovědě. Mezi hlavní důvody patřily neschopnost vytvořit deduktivní řetězec, nedostatky v logickém uvažování a povrchní znalost matematické teorie. Některé z těchto faktorů lze podstatně zlepšit praxí, jiné – zejména logické nedostatky – lze zlepšit obtížněji pouze v dlouhodobějším horizontu.

3) Nakonec bylo zjištěno, že netriviální fakta lze spíše získat s pomocí argumentace, opírající se o matematickou teorii, případně díky nástrojům softwaru, které jsou ale aplikovány s konkrétním záměrem. Způsob, kdy subjekt používá nástroje náhodně, bez vhodného plánu a se spoléháním na prosté vizuální vnímání, je méně efektivní. Pokud označíme první způsob jako konstruktivní objev a druhý jako náhodný objev, pak první z nich byl zaznamenán v prezentovaném výzkumu téměř dvakrát častěji než druhý. Lze proto vyslovit podloženou hypotézu[14], že mnohá fakta nelze zjistit jinak, než za přispění úvahy a vědomého záměru. Jedná se o případy, kdy subjekt nějakým způsobem předjímá to, co následně ověří s pomocí softwaru. Fakta, která lze objevit náhodně, musejí splňovat značně omezující kritéria. Domníváme se, že to jsou taková fakta, která lze snadno vizuálně identifikovat, nejčastěji tehdy, když lze konstrukci upravit taháním objektů na jistý speciální případ.

V průběhu výzkumu bylo formulováno i několik postranních otázek. Jejich znění a odpovědi ještě jednou stručně uvedeme.

Otázka:

*Existuje souvislost mezi způsobem objevu relevantních faktů a úspěšností při řešení problému?*

Odpověď:

Úspěšní studenti objevili 83 % relevantních faktů konstruktivně, pouze 17 % náhodně. Neúspěšní studenti objevili pouze 14 % faktů konstruktivně, 20 % náhodně, 67 % faktů neobjevili vůbec. Studenti, kteří dosáhli řešení, byli úspěšní proto, že dokázali při práci se softwarem aplikovat své matematické znalosti a logickou úvahu. Ti, kteří problém

[14] Která by samozřejmě měla být verifikována na větším vzorku studentů.

nevyřešili, používali nástroje softwaru buď bez záměru, nebo se záměrem, který nesouvisel s řešením. To ve většině případů nevedlo k výsledkům.

Otázka:

*Jaké jsou příčiny selhání studentů při hledání důkazu, proč pomoc softwaru není v některých případech dostatečná?*

Odpověď:

U studentů byly identifikovány tyto obtíže:

- Špatný cit pro výběr teorémů, které se studenti snažili aplikovat. (Studenti se snažili aplikovat teorémy, které použít nešlo.)
- Neodhalení klíčové myšlenky, jak důkaz provést. (Každé řešení vyžaduje nápad a určitou míru důvtipu, který se však, z různých důvodů, nemusí dostavit.)
- Nezkušenost s aplikací teorémů v matematicky běžných situacích. (Povrchní znalost matematických teorémů často znamená, že je student není schopen efektivně použít.)
- Neschopnost aplikovat teorém v nestandardní situaci. (V určitých situacích je nutný nový pohled, aby bylo možné rozeznat dobře známé vzory.)
- Nedostatky v logickém uvažování. (Logika pomáhá identifikovat cíle, na které je žádoucí se při řešení zaměřit. Pokud student tyto cíle neidentifikuje, často v řešení nijak nepostoupí.)
- Neschopnost vytvořit deduktivní řetězec. (K tvorbě deduktivního řetězce je nutné vyspělé logické uvažování a zkušenost. Pokud student postrádá obé, není schopen důkaz dokončit ani s velmi velkou nápovědou.)

Otázka:

*Jsou mezi způsobem objevu různých faktů významné rozdíly?*

Odpověď:

Ano, přidání kružnice do konstrukce v případě druhé úlohy bylo studenty objeveno výhradně s pomocí konstruktivní argumentace, změření dvou pravých úhlů v první úloze bylo také zjištěno v drtivé většině případů s pomocí konstruktivní argumentace. Naproti tomu změření úhlu $PSA$ v případě druhé úlohy bylo většinou zjištěno s pomocí nástroje tahání, bez konkrétního záměru studenta (náhodný objev).

Otázka:

*Jakým způsobem studenti nástroje DGE obvykle používali?*

Odpověď:

Byly pozorovány tři způsoby použití nástrojů:

- Slepé nebo náhodné prozkoumávání. Subjekt prozkoumával problém náhodně nebo s pomocí velice obecných a heuristicky slabých strategií, například zkoumal speciální případy konstrukce.
- Heuristické prozkoumávání. Subjekt sledoval záměr, který měl matematickou podobu. Konkrétní souvislost tohoto záměru s řešením však nebyla studentovi zřejmá, byla založena na odhadu nebo hádání. Někdy tato strategie vedla k úspěchu, někdy k úspěchu nevedla.
- Použití softwaru k verifikaci domněnek. Student za pomoci argumentace dospěl k domněnce. Ale v důsledku nezkušenosti si nebyl jist, že je korektní. Software mu tuto jistotu poskytl.

Tato zjištění jsou v souladu s UTM, který autor vytvořil.

Otázka:

*V čem spočívala obvykle pomoc softwaru?*

Odpověď:

Role softwaru u úspěšných studentů spočívala v těchto faktorech:

- Znalost hledaného řešení (triviální fakt), zprostředkovaná softwarem, fungovala jako spouštěč pro vybavení si matematické teorie a pro formulaci dalších otázek.
- Software kompenzoval nedostatečné zkušenosti studentů při aplikaci matematické teorie.
- Software umožňoval, zejména na základě vizuálního vnímání a dynamické změny konstrukce, objev některých faktů, které část studentů nepředjímala.

## 7.1. Další možné směry výzkumu

Zmíníme alespoň tři hlediska, která by bylo možné hlouběji zkoumat a která těsně souvisí s výše uvedenými výsledky a výzkumem.

První hledisko. V této práci studenti řešili specifický druh problémů, které nazýváme problémy se spouštěcím mechanismem[15]. Ty se vyznačují tím, že obsahují alespoň jeden triviální fakt, který studenti s pomocí nástrojů softwaru vždy zjistí. Tak se dostanou do nové situace a mohou snadněji formulovat nové otázky. Je otevřeným problémem, zda je pomoc softwaru stejně efektivní i v případě, že úloha nebude obsahovat žádná triviální fakta. Jistě taková situace bude na subjekt klást větší nároky. Jak velký ale bude rozdíl mezi prostředím bez softwaru a se softwarem, pokud by studenti řešili tento typ problémů? Autor práce se domnívá, že tento rozdíl bude významný, ale nemá žádná jednoznačná data, která by to potvrzovala.

[15] Pojem „ problém se spouštěcím mechanismem“ není v odborné literatuře zavedený.

Druhé hledisko. V rámci získaných dat bylo zjištěno, že existují velké rozdíly mezi způsobem objevu různých faktů. Některá fakta byla objevena studenty výhradně s pomocí konstruktivní argumentace, jiná byla zjištěna s pomocí nástrojů softwaru a bez jakékoliv podpůrné argumentace. Nabízí se otázka, jaké kritéria musí „fakt“ splňovat, aby ho bylo možné objevit „náhodně“. Autor práce se domnívá, že takovéto kritérium je jediné: Musí být na něj možné přijít s pomocí tahání objektů a vizuálním vnímáním. Toto kritérium je však značně omezující, například velikosti úhlů v případě první úlohy ho zřejmě nesplňují. Na všechna ostatní fakta je možné přijít (ve většině případů) pouze s pomocí nějaké podpůrné úvahy, která objevu faktu předcházejí.

Třetí hledisko. Studenti, kteří se účastnili výzkumu, splňovali následující předpoklady:

- Studovali učitelství matematiky alespoň druhým rokem (někteří čtvrtým).
- Setkali se při svém studiu s potřebnými teorémy.
- Tyto teorémy byly před výzkumem zopakovány.
- Z hlediska známek patřili k průměru až nadprůměru v ročníku.

Na základě tohoto vzorku samostatně důkaz dokončilo pouze 30 % studentů. Vzniká otázka, jaké předpoklady musí studenti splňovat, aby důkaz dokončili a aby pro ně byla asistence softwaru přínosem (tzn., aby problém nebyl tak triviální, že by k němu software nebyl třeba). Lze předpokládat, že pro každého studenta existují jisté meze – pod dolní mezí student problém vyřeší bez asistence softwaru, nad horní mezí vyjde pomoc softwaru naprázdno. Otázka je, jak tyto individuální meze u studentů stanovit a jak volit problémy, jejichž řešení s pomocí softwaru by pro ně byla přínosem.

## 7.2. Shrnutí

Tato práce si nekladla za cíl odpovědět na otázku, jak lépe učit tvorbě matematického důkazu. Zaměřila se na to, jak studenti využívají nástroje DGE a jak výraznou pomoc jim tyto nástroje poskytují při hledání řešení.

Potvrdilo se, že logika a znalosti studenta se podílí nejenom na konstrukci důkazu, ale i při samotné práci se softwarem. V jistém smyslu není role softwaru tak zásadní, jak by se mohlo zdát, neboť úspěch studentů bude stále záviset na jejich znalostech a schopnostech aplikovat teoretické znalosti.

Ne vždy jsou fakta, která software může poskytnout, dostatečnou nápovědou pro to, aby student vyřešil problém. V našem výzkumu přibližně 20 % studentů dokončilo důkaz teprve tehdy, když jim byla prozrazena jak relevantní fakta, vztahující se k řešení, tak teorémy, jaké mají použít. Tito studenti tedy byli schopni nakonec vytvořit správný důkaz, ale samotná fakta pro ně nebyla dostatečnou nápovědou pro to, aby odhalili klíčovou myšlenku a aplikovali vhodné teoretické poznatky.

Někteří studenti nebyli schopni vytvořit důkaz ani po velké nápovědě, kdy znali jak fakta, tak klíčovou teorii. Mezi příčiny patřily nedostatky v logické úvaze a neschopnost fakta logicky propojit. Tento jev nastal přibližně ve čtvrtině ze zkoumaných případů.

Nicméně výzkum ukázal, že software skutečně ulehčuje dosažitelnost řešení: Bez jeho pomoci problém nevyřešil žádný student, s jeho asistencí bylo zaznamenáno úspěšné řešení ve 30 % případů. To je sice výrazný nárůst, na druhé straně v 70 % případů vyšla pomoc softwaru na prázdno.

Lze předpokládat, že účastníci výzkumu byli co do matematických znalostí a zkušeností dost vyrovnaní, všichni patřili ke studijnímu nadprůměru. Například čtvrtého experimentu se zúčastnili studenti, kteří v daném ročníku patřili k nejlepším. Přesto pomoc softwaru stačila jenom části z nich. Většina studentů se potýkala s problémy, které nedokázali překonat ani s využitím softwaru. Bylo identifikováno několik důvodů, proč studenti problém nedokázali vyřešit:

- neschopnost aplikovat matematickou teorii
- neschopnost vytvořit deduktivní řetězec
- nedostatky v logickém uvažování (z faktu A vyvodit fakt B)
- neschopnost odhalit klíčovou myšlenku

První i druhý faktor lze významně zlepšit praxí studentů, nicméně aplikace matematické teorie k řešení úloh se nikdy nestane pouhou rutinou. Eliminace posledních dvou faktorů je podstatně obtížnější.

Otázkou je, jaké obecné předpoklady musí být splněny, aby pomoc softwaru byla ve většině případů dostatečná a zároveň aby byla pro studenty přínosem, tj. aby řešení problému nebylo pro studenty triviální. Odpověď na ni nemůže být jednoduchá, neboť souvisí jak se studenty, tak s předkládanými problémy.

# Použitá literatura

Abdelfatah, H. (2011): A Story-based Dynamic Geometry Approach to Improve Attitudes toward Geometry and Geometric Proof. The International Journal on Mathematics Education 43 (3), s. 441–450.

Anzai, Y., Simon, H. A. (1979): The theory of learning by doing. Psychological Review 86(2), s. 124–140. Dostupné na https://doi.org/10.1037/0033-295X.86.2.124

Arzarello, F., Gallino, G., Micheletti, C., Olivero, F., Paola, D., Robutti, O. (1998): Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, s. 32–39). Stellenbosh, South Africa.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., Robutti, O. (2002): A cognitive analysis of dragging practices in cabri environments. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 34,s. 66-72.

Arzarello, F. (2008): The proof in the 20th century. In P. Boero (Ed.), Theorems in schools: From history epistemology and cognition to classroom practices, s. 43–64. Rotterdam: Sense Publishers.

Baccaglini-Frank, A., Mariotti, M. (2010): Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. International Journal of Computers for Mathematical Learning 15. s. 225-253.

Baccaglini-Frank, A. (2010): Conjecturing in dynamic geometry: A model for conjecture-generation through maintaining dragging. Doctoral Dissertations. Dostupné na https://scholars.unh.edu/dissertation/529

Barcelos, G., Batista, S., Passerino, L. (2011): Mediation in the Construction of Mathematical Knowledge: A Case Study Using Dynamic Geometry. Creative Education 2. doi: 10.4236/ce.2011.23034.

Beed, P., Hawkins, M., Roller, C. (1991): Moving learners towards independence: the power of scaffolded instruction. The Reading Teacher 44(9), s. 648–655.

Blažek, J., Pech, P. (2016): Simsonova-Wallaceova věta MFI 25, č. 3, s. 173-184. Dostupné na: http://mfi.upol.cz/files/25/2503/mfi_2503_173_184.pdf

Blažek, J., Pech, P. (2017): Searching for loci using GeoGebra. International Journal for Technology in Mathematics Education 24. s. 143-147.

Blažek, J., Pech, P. (2018): On the curve related to the locus of foci of a conic if its four tangents are given. In: Proceeding of Slovak - Czech Conference on Geometry and Graphics 2018, s. 41-50. ISBN 978-80-214-5652-5

Blažek, J., Pech, P. (2019a): On One Locus in the Plane. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 809. Springer, Cham, s. 184-196.

Blažek, J., Pech, P. (2019b): Focal curve and its properties. In: Proceeding of Slovak - Czech Conference on Geometry and Graphics 2019, s. 57-62. ISBN 978-80-8208-024-0

Blažek, J., Leischner, P. (2019): Jak souvisí Apolloniovy kružnice s elipsou? MFI 28, č. 2, s. 81-91. Dostupné na: http://mfi.upol.cz/files/28/2802/mfi_2802_081_091.pdf

Blažek, J. (2019): Důkaz ekvivalence dvou definic elipsy. South Bohemia Mathematical Letters 27, s. 1–9.

Blažek, J., Pech, P. (2021): A Spatial Generalization of Wallace–Simson Theorem on Four Lines. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 1296, s. 103-114. Dostupné na https://doi.org/10.1007/978-3-030-63403-2_10

Blažek, J., Pech, P. (2022): Interaction between subject and DGE by solving geometric problems In: Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence can Serve Mathematical Human Learning, Eds Philippe R. Richard, M. Pilar Vélez, Steven Van Vaerenbergh, Springer International Publishing, ISBN 978-3-030-86908-3, to appear.

Blažek, J. (2022): On a Chasles construction of Cartesian ovals. Proceedings ATCM 2021, December 13-15, Radford Univ. USA, and Suan Sunandha Univ. Thailand, Eds. Wei-Chi Yang, D. Meade, M. Majewski. Published by Mathematics and Technology, LLC, ISSN 1940-4204 (online version), to appear.

Boero, P., Garuti, R., Mariotti, M., A., (1996): Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. Proceedings of the 20th PME Conference, Valencia, Spain, s. 121 – 128

Boero, P. (2007): Theorems in school: An introduction. In P. Boero (Ed.), Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practices (s. 3–8). Rotterdam: Sense Publishers.

Botana, F., Valcarce, J., L. (2003): A software tool for the investigation of plane loci. Mathematics and Computers in Simulation 61, s. 139–152. doi:10.1016/S0378-4754(02)00173-8.

Bussi, B., M., Boni, M. (2003): Instruments for semiotic mediation in primary school classrooms. For the learning of mathematics 23(2), s. 15–22.

Chazan, D. (1993): High school geometry student's justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. Educational Studies in Mathematics 24(4), s. 359-387.

Chrysanthou, I. (2008): The use of ICT in primary mathematics in Cyprus: The case of GeoGebra (Master's Thesis). University of Cambridge, UK.

Clapham, C., Nicholson, J., N. (2009): The Concise Oxford Dictionary of Mathematics, Fourth edition.

Crowley, M. (1987): The van Hiele model of development of geometric thought. In Learning and Teaching Geometry , K-12, 1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Edited by Mary Montgomery Lindquist, 1-16. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Croy, M., Barnes, T., Stamper, J. (2007): Towards an Intelligent Tutoring System for Propositional Proof Construction. Frontiers in Artificial Intelligence and Applications 175. 145-155.

Daguplo, M. (2017): The determination of students' difficulties in proving geometrical propositions using exploratory factor analysis. Project: Problem Solving and Proving in Mathematics Education

Dawson, J. (2006): Why Do Mathematicians Re-prove Theorems?. Philosophia Mathematica 14. s. 269-286. doi: 10.1093/philmat/nkl009.

Derbyshire, J. (2007): Posedlost prvočísly, Academia

Duval, R. (1995): Sémiosis et pensée humaine. Edition: Peter Lang, Suisse.

Duval, R. (1998): Geometry from a cognitive point a view. In Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century, (Ed.), C. Mammana and V. Villani Dordrecht/Boston: Kluwer Academic Publishers, s. 37-52.

Edwards, L., D. (1997): Exploring the territory before proof: Student's generalizations in a computer microworld for transformation geometry. International Journal of Computers for Mathematical Learning 2 (3), s. 187–215.

Egan, D., E., Greeno, J., G. (1974): Theory of rule induction: Knowledge acquired in concept learning, serial pattern learning, and problem solving. In L. W. Gregg (Ed.), Knowledge and cognition. Lawrence Erlbaum.

Engestrom, Y. (1987): Learning by expanding: An activity-theoretical approach to developmental research. Helsinki, Finland: Orienta-Konsultit.

Eysenck, M., Keane, M. (2008): Kognitivní psychologie. Přeložil Radovan Šikl. Praha: Academia. ISBN 978-80-200-1559-4.

Fahlgren, M., Brunstrom, M. (2014): A Model for Task Design with Focus on Exploration, Explanation, and Generalization in a Dynamic Geometry Environment. In: Tech Know Learn

Funkhouser, C. (2003): The Effects of Computer Augmented Geometry Instruction on Student Performance and Attitudes. Journal of Research on Technology in Education., vol. 35, no. 2, s. 163–175. ISSN 1539-1523.

Furinghetti, F., Olivero, F., Paola, D. (2001): 'Students approaching proof through conjectures: snapshots in a classroom', International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol.32, s. 319-335.

Furinghetti, F., Paola, D. (2003): To produce conjectures and to prove them within a dynamic geometry environment: A case study. Proceedings of the Twenty Seventh Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2.

Gawlick, T. (2002): On Dynamic Geometry Software in the Regular Classroom. The International Journal on Mathematics Education, vol. 34, no. 3, s. 85–92. ISSN 1863-9704.

Gillis, J., M. (2005): An Investigation of Student Conjectures in Static and Dynamic Geometry Environments. Auburn: Auburn University. Dissertation.

Goldstein, R. (2005): Neúplnost: důkaz a paradox Kurta Gödela. Přeložil Martin Weiss. Praha: Argo. Velké objevy, sv. 3. ISBN 80-7203-766-8.

Guilford, J., P. (1950): Creativity. American Psychologist 5, s. 444-454

Guven, B. (2008): Using dynamic geometry software to gain insight into a proof. International Journal of Computers for Mathematical Learning 13(3), s. 251–262

Hadamard, J. (1945): The psychology of invention in the mathematical field. Princeton University Press.

Haddas, N., Hershkowitz, R. (1999): The role of uncertainty in constructing and proving in computerized environment. Proceedings of the 23rd PME Conference, Haifa, Israel, s. 57-64.

Hadas, N., Hershkowitz, R., Schwarz, B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. Educational Studies in Mathematics 44(1), s. 127–150.

Hanna, G., De Villieres, M. (2011): Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI Study. New York: Springer, ISBN 978-940-0721-289.

Hanna, G., Barbeau, E. (2012): Proof in Mathematics. [online]. Dostupné z: http://www.math.toronto.edu/barbeau/hannajoint.pdf

Hansen, H., B. (2004): The Effects of the Use of Dynamic Geometry Software on Student Achievement and Interest. Minnesota: Bemidji State University, Research paper. Dostupné z: http://faculty.bemidjistate.edu/grichgels/MastersPapers/MastersList.htm

Healy, L., Hoyles, C. (2002): Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls. International Journal of Computers for Mathematical Learning 6(3), s. 235–256.

van Heijenoort, J. (2002): From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931 (Source Books in the History of the Sciences). Harvard University Press. ISBN: 0674324498

Hejný, M., Kuřina, F. (2009): Dítě, škola a matematika: Konstruktivistické přístupy k vyučování. Praha: Portál. 232 s. ISBN 978-80-7376-397-0.

Henle, M. (1962): On the relation between logic and thinking. Psychological Review 69(4), s. 366–378.

Hiebert, J., Lefevre, P. (1986): Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics. s. 1-27. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hohenwarter, M., Preiner, J. (2007): Dynamic Mathematics with GeoGebra. Journal of Online Mathematics and its Applications ID 1448 7(1), s. 2-12.

Hohenwarter, M., Kovacs, Z., Recio, T. (2019): Using GeoGebra Automated Reasoning Tools to explore geometric statements and conjectures. In Hanna, G., de Villiers, M., Reid, D. (Eds.), Proof Technology in Mathematics Research and Teaching, Series: Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 14, s. 215–236.

Hollebrands, K. (2007): The role of a dynamic software program for geometry in the strategies high school mathematics students employ. Journal for Research in Mathematics Education 38. s. 164-192. 10.2307/30034955.

Holzl, R. (2001): Using dynamic geometry software to add contrast to geometric situations—a case study. International Journal of Computers for Mathematical Learning 6(1), s. 63–86.

Hora, J., Konigsmarková S. (2018): Buchberger algorithm and systems of polynomial equations for MO problem solvers. South Bohemia Mathematical Letters 26, s. 23–30.

Hoyles, C., Jones, K. (1998): Proof in dynamic geometry contexts. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century (s. 121–128). Dordrecht: Kluwer.

Hoyles, C., Healy, L. (1999): Linking informal argumentation with formal proof through computer integrated teaching experiments. Proceedings of the 23rd PME Conference, Haifa, Israel, s. 105-112.

Hull, A., N., Brovey, A., J. (2004): The Impact of the Use of Dynamic Geometry Software on Student Achievement and Attitudes towards Mathematics. Action Research Exchange [online]. vol. 3, no. 1, 7 s. Dostupné z: https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.587.961&rep=rep1&type=pdf

JGE – (2012): dostupné online: https://github.com/yezheng1981/Java-Geometry-Expert

Jones, K. (2000): Providing a Foundation for Deductive Reasoning: Students' Interpretations when Using Dynamic Geometry Software and Their Evolving Mathematical Explanations. Educational Studies in Mathematics 44, s. 55–85. https://doi.org/10.1023/A:1012789201736

Kilic, H. (2013): The effects of dynamic geometry software on learning geometry. In Proceedings of CERME 8, Antalya, Turkey, 10 s. Dostupné z: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/wg15_papers.html.

Kortenkamp, U. (2000): Foundations of Dynamic Geometry. Journal für Mathematikdidaktik 21. s. 161-162.

Kuřina, F. (1989): Umění vidět v matematice. SPN Praha. ISBN 80-04-23753-3

Květoň, P. (1983): Možnosti použiti mini kalkulátorů ve vyučovaní matematice na základní škole. Spisy Pedagogické fakulty v Ostravě. Praha: SPN, 114 s.

KVD – Katedra Výpočetní a Didaktické techniky, Západočeská univerzita, 2021 [online], Dostupné z
https://www.kvd.zcu.cz/cz/materialy/itv_kurz/itv1/itv1/HTML/87/default.htm

Laborde, C. (1993): The Computer as Part of the Learning Environment: the case of geometry. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), Learning from Computers: mathematics education and technology. Berlin: Springer-Verlag. s. 48-67.

Laborde, C. (2002): Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri geometry. International Journal of Computers for Mathematical Learning 6(3), s. 283–317.

Laborde, C. (2003): Technology used as a tool for mediating knowledge in the teaching of mathematics: The case of Cabri-Geometry. Paper presented at the ATCM 2003.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., Strasser, R. (2006): Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, Present and Future. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers. s. 275–304.

Leung, A., Lopez-Real, F. (2002): Theorem justification and acquisition in dynamic geometry: A case of proof by contradiction. International Journal of Computers for Mathematical Learning 7(2), s. 145–165.

Leung, A. (2011): An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. ZDM the International Journal on Mathematics Education 43(3), s. 325–336.

Leung, A., Baccaglini-Frank, A., Mariotti, M., A. (2013): Discernment of invariants in dynamic geometry environments. Educational Studies in Mathematics 84(3), s. 439–460.

Lee, H., Hollebrands, K. (2008): Preparing to teach mathematics with technology: An integrated approach to developing technological pedagogical content knowledge. Contemporary Issues in Technology and Teacher Education 8(4), s. 326-341.

Maarif, S., Perbowo, K., Subali N., M., Harisman, Y,. (2019): Obstacles in Constructing Geometrical Proofs of Mathematics-Teacher-Students Based on Boero’s Proving Model. Journal of Physics: Conference Series. doi: 1315. 012043. 10.1088/1742-6596/1315/1/012043.

Magajna, Z. (2017): Automated Observation of Dynamic Constructions, International Journal for Technology in Mathematics Education 24(3), s. 115-120.

Mariotti, M., A. (2006): Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), Handbook of research on the psychology of mathematics education (s. 173–204). Rotterdam: Sense Publishers.

Marrades, R., Gutierrez, A. (2000): Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. Educational Studies in Mathematics 44(1), s. 87–125.

Mason, M. (1998): The van Hiele levels of geometric understanding. Professional Handbook for Teachers, Geometry: Explorations and Applications, MacDougal Litteil Inc., ISBN: 0395836026

MO – (2016): 66. ročník Matematické Olympiády, kat. B. Dostupné online: http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-stredni-skoly/66-rocnik-16-17

Nathan, A. (2007): College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle, Dover Publications; 2nd Revised ed. Edition

Novotná, J., Jančařík, A. (2011): “For show” or efficient use of ICT in mathematics teaching? Enhancing Mathematics Education Through Technology. Proceedings of the 10th International Conference on Technology in Mathematics Teaching.

OK Geometry – (2021): Dostupné online: https://www.ok-geometry.com/

Olivero, F. (2003): The proving process within a dynamic geometry environment. Unpublished Doctoral Dissertation. Bristol, UK: University of Bristol.

Olilvero, F., Robutti, O. (2001): Measure in Cabri as bridge between perception and theory, Proceedings of the 25th PME Conference, Utrecht. 4, s. 9-16.

Olivero, F., Robutti, O. (2007): Measuring in dynamic geometry environments as a tool for conjecturing and proving. International Journal of Computers for Mathematical Learning 12(2), s. 135–156.

Ostermann, A., Wanner, G. (2012): Geometry by Its History.  Springer; 2012th edition.

Paola, D., Robutti, O. (2004): Experimenting and explaining quantity variations to learn functions with Cabri-Geometre. Paper presented at the Cabriworld 2004, Rome.

Pedemonte, B., (2001): Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics, Proceedings of the 25th PME Conference, Utrecht. 4, s. 33-40.

Pedemonte, B., (2002): Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration, co-tutelle Università di Genova and Université Joseph Fourier, Grenoble

Pedemonte, B., (2007): How can the relationship between argumentation and proof be analyzed?, Educational Studies in Mathematics 66, s. 23-41.

Pech, P., Skříšovský, E. (2013): On the Simson-Wallace theorem. South Bohemia Mathematical Letters 21, s. 59-66.

Poincare, H. (1905): Science and hypothesis. (G.B. Halsted, Trans.). Science Press.

Polya, G. (1954): Mathematics and Plausible Reasoning. Induction and Analogy in Mathematics. Vol 1. Princeton: Princeton University Press.

Polya, G. (1957): How to solve it (2nd edition). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Polya, G. (2016): Jak to řešit?. MatfyzPress. ISBN 978-80-7378-325-9.

Prusak, N., Hershkowitz, R., Schwarz, B. (2012): From visual reasoning to logical necessity through argumentative design. Educational Studies in Mathematics 79. s. 19-40. doi: 10.1007/s10649-011-9335-0.

Rabardel, P. (1995): Les homes et les technologies-approche cognitive des instruments contemporains. Paris, France: Armand Colin.

Rodriguez, F., Gutierrez, A. (2006): Analysis of proofs produced by university mathematics students, and the influence of using Cabri software. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, N. Stehlikova (Eds.), Proceedings of the 30th International Conference of the Group for the Psychology of Mathematics (vol. 4, s. 433-440). Prague, Czech Republic: PME.

Robová, J. (2012): Výzkumy vlivu některých typů technologií na vědomosti a dovednosti žaků v matematice. Scientia in educatione 3(2), s. 79–106, ISSN 1804-7106

Robová, J. (2013): Role programů dynamické geometrie při objevování a dokazování hypotéz. Sborník příspěvků 6. konference Užití počítačů ve výuce matematiky. Katedra matematiky, Pedagogická fakulta Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. 2013.

RVP – Rámcový Vzdělávací Program pro gymnázia. Národní ústav pro vzdělávání, 2021 [online]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/t/rvp-pro-gymnazia

Santos-Trigo, M., Espinosa-Perez, H. (2002): Searching and exploring properties of geometric configurations using dynamic software. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 33(1), s. 37–50.

Schoenfeld, A., H. (1985): Mathematical problem solving. New York: Academic Press.

Singh, S. (2002): Velká Fermatova věta. Academia. ISBN 80-200-0394-0

Sinclair, M. (2003): Some implications of the results of a case study for the design of preconstructed, dynamic geometry sketches and accompanying materials. Educational Studies in Mathematics 52(3), s. 289-317.

Stewart, I., Tall, D. (1977): The Foundations of Mathematics. Oxford University Press.

Stewart, I. Nyklová, H. (2006): Odsud až do nekonečna: průvodce moderní matematikou.

Strasser, R. (1992): Didaktische Perspektiven auf Werkzeug-software in Geometrie-Unterricht der Secundarstufe I. Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik 24(5), s. 197-201.

Štrausová, I. (2019): Vizualizace důkazů pomocí software dynamické geometrie [online]. České Budějovice. Dostupné z: https://theses.cz/id/q3ntv7/. Disertační práce.

Todev, R. (2010): Geometry Problems and Solutions from Mathematical Olympiads. Matholymps ISBN 978-0-9827713-2-7.

Trouche, L. (2000): La parabole du gaucher et de la casserole a bec verseur: Etude des processus d'apprentissage dans un environement de calculatrices symboliques. Educational Studies in Mathematics 41(3), s. 239-264.

Trouche, L. (2004): Environments informatises et mathematiques: Quells usages pour quells apprentissages? Educational Studies in Mathematics 55(1-3), s. 181-197.

UPVM (2015). Sborník příspěvků 7. konference Užití počítačů ve výuce matematiky. Katedra matematiky, Pedagogická fakulta Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~upvvm/2015/sbornik/Sbornik_UPVM_2015.pdf

Valentini, C., B., Soares, E., M., S. (2005): Fluxos de Interação: uma experiência com ambiente de aprendizagem na Web (Interaction flows: An experience with the learning environment on the Web). In C. B. Valentini, & E. M. S. Soares, (Org.), Aprendizagem emambientes virtuais: compartilhando idéias e construindo cenários vol. 1 (s. 77-86). Caxias do Sul: EDUCS.

Verillon, P., Rabardel, P. (1995): Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. European Journal of Psychology of Education 10(1), s. 77-101.

Villiers, M. (2004): Proof in Dynamic Geometry: More than Verification. Dostupné z http://math.unipa.it/~grim/21_project/21_charlotte_deVilliersPaperEdit.pdf

Vygotsky, L., S. (1978): Mind in society: The development of higher psychological processes. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wilson, R. (2002): Four colors suffice: How the map problem was solved. Princeton University Press.

White, T. (2008): Debugging an artifact, instrumenting a bug: Dialectics of instrumentation and design in technology-rich learning environments. International Journal of Computers for Mathematical Learning 13(1), s. 1-26.

# Seznam publikací autora

Blažek, J., Pech, P. (2016): Simsonova-Wallaceova věta. Matematika – fyzika – informatika 25, č. 3, 173-184.  Dostupné na:  ttp://mfi.upol.cz/files/25/2503/mfi_2503_173_184.pdf

Blažek, J., Pech, P. (2016): Geometrická místa bodů – zobecnění Mongeovy kružnice a možnosti současného softwaru. South Bohemia Mathematical Letters 24, 1–9.

Blažek, J., Pech, P. (2017): Vyšetřování množin bodů daných vlastností s podporou počítače. Učitel matematiky 25, č. 5. s. 261-271.

Blažek, J. (2017): Syntetické řešení v geometrii a možnosti současného softwaru. South Bohemia Mathematical Letters 25, 1–8.

Blažek, J., Pech, P. (2017): Searching for loci using GeoGebra. International Journal for Technology in Mathematics Education 24, 143-147.

Blažek, J., Pech, P. (2018): On the curve related to the locus of foci of a conic if its four tangents are given. In: Proceeding of Slovak - Czech Conference on Geometry and Graphics 2018, 41-50. ISBN 978-80-214-5652-5

Blažek, J., Pech, P. (2019): On One Locus in the Plane. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 809. Springer, Cham, 184-196. https://doi.org/10.1007/978-3-319-95588-9_14

Blažek, J., Pech, P. (2019): Focal curve and its properties. In: Proceedings of Slovak - Czech Conference on Geometry and Graphics 2019, 57-62. ISBN 978-80-8208-024-0

Blažek, J., Leischner, P. (2019): Kuželosečky a Apolloniovy kružnice. Matematika – fyzika – informatika 28, č. 3, 175-185. Dostupné na: http://mfi.upol.cz/files/28/2803/mfi_2803_175_185.pdf

Blažek, J., Pech, P. (2019): Locus computation in dynamic geometry environment. Mathematics in Computer Science  13(1), 31-40.

Blažek, J., Pech, P. (2019): Synthetic proof with the support of dynamic geometry. International Journal for Technology in Mathematics Education, 26(3), s. 107-112. https://doi.org/10.1564/tme_v26.3.01

Blažek, J., Leischner, P. (2019): Jak souvisí Apolloniovy kružnice s elipsou? Matematika – fyzika – informatika 28, č. 2, 81-91. Dostupné na: http://www.m_.upol.cz/index.php/m_/article/view/445

Blažek, J. (2019): Důkaz ekvivalence dvou definic elipsy. South Bohemia Mathematical Letters 27, 1–9.

Blažek, J. (2020): (In)equalities in a triangle proved by synthetic way. South Bohemia Mathematical Letters 28, 1–12.

Blažek, J., Pech, P. (2021): A Spatial Generalization of Wallace–Simson Theorem on Four Lines. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 1296, 103-114. https://doi.org/10.1007/978-3-030-63403-2_10

Blažek, J. (2021): Čtyři důkazy Heronova vzorce. Matematika – fyzika – informatika 30, č. 1, 18-26. Dostupné na: http://mfi.upol.cz/files/30/3001/mfi_3001_018_026.pdf

Blažek, J., Pech, P. (2021): Chord of Conics. Slovak Journal for Geometry and Graphics, Volume 18, to appear.

Blažek, J., Pech, P. (2022): Interaction between subject and DGE by solving geometric problems In: Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence can Serve Mathematical Human Learning, Eds Philippe R. Richard, M. Pilar Vélez, Steven Van Vaerenbergh, Springer International Publishing, ISBN 978-3-030-86908-3, to appear.

Blažek, J. (2022): On a Chasles construction of Cartesian ovals. Proceedings ATCM 2021, December 13-15, Radford Univ. USA, and Suan Sunandha Univ. Thailand, Eds. Wei-Chi Yang, D. Meade, M. Majewski. Published by Mathematics and Technology, LLC, ISSN 1940-4204 (online version), to appear.

## Prezentace výsledků na kongresech, sympoziích apod.

P. Pech, J. Blažek: 200 let od Wallace-Simsonovy věty. JČMF Č. Budějovice, 29. 2. 2016, přednáška.

J. Blažek, P. Pech: Computer-aided investigation of locus of points in geometry, Romania, 2016, talk.

P. Pech, J. Blažek: Searching for loci using DGS and CAS. In: Thierry Dana-Picard, Ilias Kotsieras, Aharon Naiman. (eds): Applications of Computer Algebra ACA 2017, Book of Abstracts, pp. 25. Jerusalem College of Technology, Jerusalem (2017).

P. Pech, J. Blažek: Investigation of geometric loci using DGS and CAS. In: Thierry Dana-Picard, Ilias Kotsieras, Aharon Naiman. (eds): Applications of Computer Algebra ACA 2017, Book of Abstracts, pp. 206-207. Jerusalem College of Technology, Jerusalem (2017).

J. Blažek: DGS a syntetické řešení problémů. Konference Užití počítačů ve výuce matematiky 2017, JU Č. Budějovice.

J. Blažek, P. Pech: Geometric problems and benefits of DGS, Linz STEM Education Research Seminars, Linz, 2017, talk.

P. Pech, J. Blažek: On One Locus in the Plane. International Conference on Geometry and Graphics (ICGG), Milano, 2018, talk.

J. Blažek, P. Pech: GeoGebra and one locus in a plane. Conference on Digital Tools in Math. Education (CADGME), Coimbra 2018, talk.

J. Blažek: Synthetic solution in geometry and GeoGebra. Conference on Digital Tools in Math. Education (CADGME), Coimbra 2018, talk.

J. Blažek, P. Pech: Syntetické řešení v geometrii a DGS software, CSGG, Skalní Mlýn 2018, Česká Republika, talk.

P. Pech, J. Blažek: On the curve related to the locus of foci of a conic if its four tangents are given. In: Proceeding of Czech - Slovac Conference on Geometry and Graphics 2018, Czech Society for Geometry and Graphics, Blansko, 2018, 41-50, talk.

J. Blažek: Problem solving in DGS. Vystoupení na semináři projektu Matematické nadání: Modelování, diagnóza, podpora, Univ. Bayreuth a JU, Písek, 2019.

J. Blažek, P. Pech: Focal curve and its properties. In: Proceeding of Slovak - Czech Conference on Geometry and Graphics 2019, Czech Society for Geometry and Graphics, Trenčianske Teplice, 2019, 57-62, talk. ISBN 978-80-8208-024-0

J. Blažek: DGS a experimentální přístup k řešení problémů. Konference Užití počítačů ve výuce matematiky 2019, JU Č. Budějovice.

J. Blažek, P. Pech: Discovering in Dynamic Geometry Environment – a Case Study. Conference Applications of Computer Algebra (ACA), Montreal 2019, talk.

J. Blažek: Problem solving and DGE. Vystoupení na semináři projektu Matematické nadání: Modelování, diagnóza, podpora, Univ. Bayreuth a JU, 2020.

J. Blažek: Influence of dynamic geometry software on finding solutions of geometric problems, Celouniverzitní konference doktorandů JCU, České Budějovice, 2021, talk.

J. Blažek: On a Chasles construction of Cartesian ovals. ATCM conference, 2021, talk.

# Příloha

V průběhu svého studia řešil autor této práce značné množství geometrických problémů, z nichž některé byly publikovány, jiné ne. V některých úlohách byla pomoc dynamického softwaru zcela klíčová, v dalších spíše okrajová. V této příloze uvádíme výběr dvojice problémů s introspekčním záznamem jejich řešení.

Cílem je ukázat, jak se experimentální výsledky, získané s pomocí nástrojů softwaru, proplétají s logickou úvahou řešitele a jeho znalostmi, a jak dochází k jejich synergii. V sekci 5.1 jsme citovali článek (Arzarello et al, 2002), který do výzkumu softwaru ve vztahu k řešení problémů zavedl teoretické pojmy „ascending processes" a „descending processes". První z nich označuje děj, jehož těžiště se odehrává v rámci softwaru (hledání hypotéz), druhý označuje děj, jehož těžiště se odehrává v mysli řešitele (formulace hypotéz a jejich verifikace). Záznamy zde prezentované tyto procesy názorně ukazují, ale na problémech podstatně těžších než těch, uvedených ve zmíněné publikaci. Proces řešení budeme interpretovat v rámci UTM, uvedeném v sekci 5.3. O druhém problému bylo pojednáváno v článcích (Blažek, Pech, 2019a), (Blažek, Pech, 2019b) a (Blažek, Pech, 2018). Jeho řešení má snad i jistou matematickou hodnotu.

## 1. problém: Role vizuálního vnímání a dynamické změny konstrukce při řešení

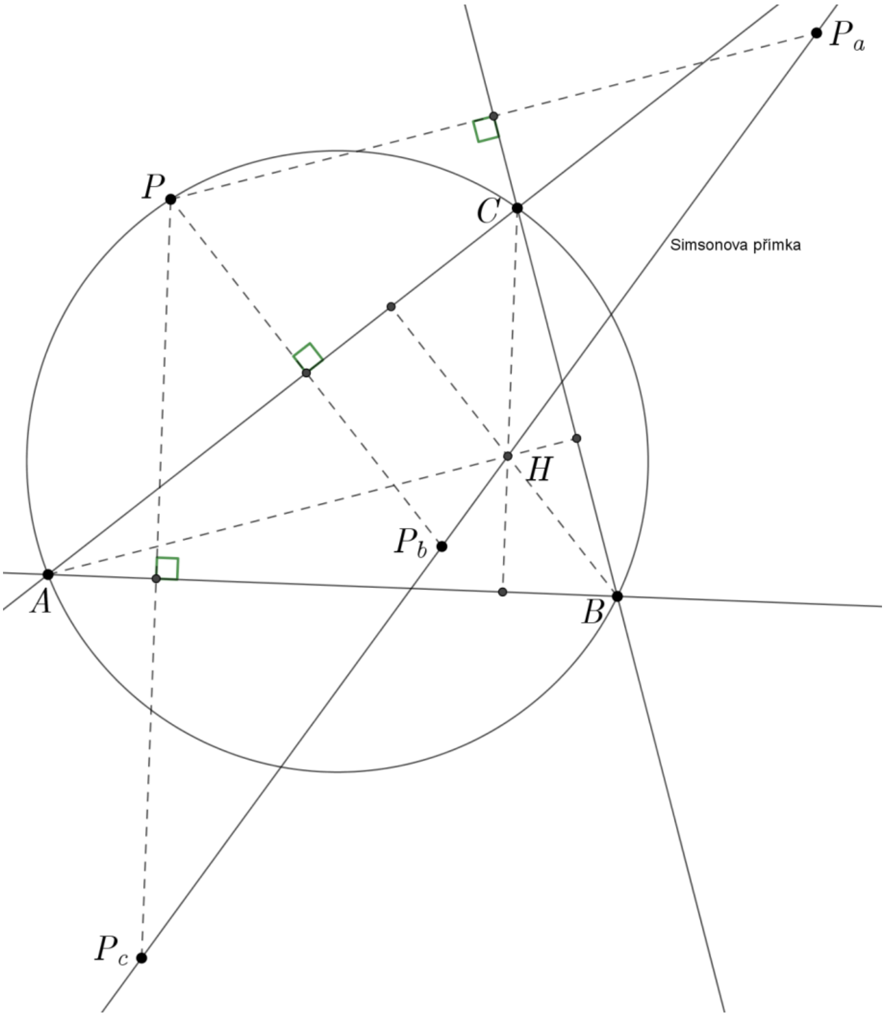
Než uvedeme samotný problém, vraťme se k UTM. Poté, co jsme ho schematicky znázornili v sekci 5.3, uvedli jsme i následující poznámku:

*Šipky představují možné odpovědi na základní kritéria, podle kterých je klasifikace UTM vytvořena. Všechny jsou jednosměrné až na případ spojení buněk „Vizuální vnímání dynamické konstrukce, hledání hypotéz" a „Znalosti a logika subjektu". Vizuální vnímání je totiž velice komplexní proces a jeho výstupem nemusí být formulace hotové hypotézy, ale může pouze vést k jistým indiciím, které, pokud je subjekt zpracuje a vyvodí z nich důsledky, vedou k formulaci konkrétní domněnky. V takovém případě vizuální vnímání není přímou příčinou formulace domněnky, pouze slouží jako podpůrný prostředek a pozadí pro tuto formulaci. Proto je ve schématu obousměrná šipka: jeden směr značí, že subjekt objeví domněnku přímo vizuálním vnímáním a druhý, že vizuální vnímání poskytne jenom útržkovité informace, na jejichž základě subjekt s pomocí svých znalostí a logiky formuluje konkrétní hypotézu.*

Tento příklad je ilustrací výše uvedené poznámky: Vizuální vnímání zde sehrálo roli především jako podpůrný prostředek pro heuristické úvahy řešitele.

**<u>Úvodní fáze</u>**

Takzvaná Simson-Wallaceova věta může být formulována následujícím způsobem: Uvažujme trojúhelník $ABC$ a kružnici $k$ jemu opsanou. Dále uvažujme libovolný bod $P$ kružnice $k$. Označme $H$ ortocentrum trojúhelníka a $P_a$, $P_b$ a $P_c$ osově souměrné obrazy bodu $P$ podle stran $a, b, c$ trojúhelníku. Pak tyto tři body a ortocentrum $H$ leží v přímce, tzv. Simsonově přímce (obr. 69). (Běžnější formulace této věty uvažuje paty kolmic z bodu $P$ na strany trojúhelníka, nikoli osově symetrické obrazy.)

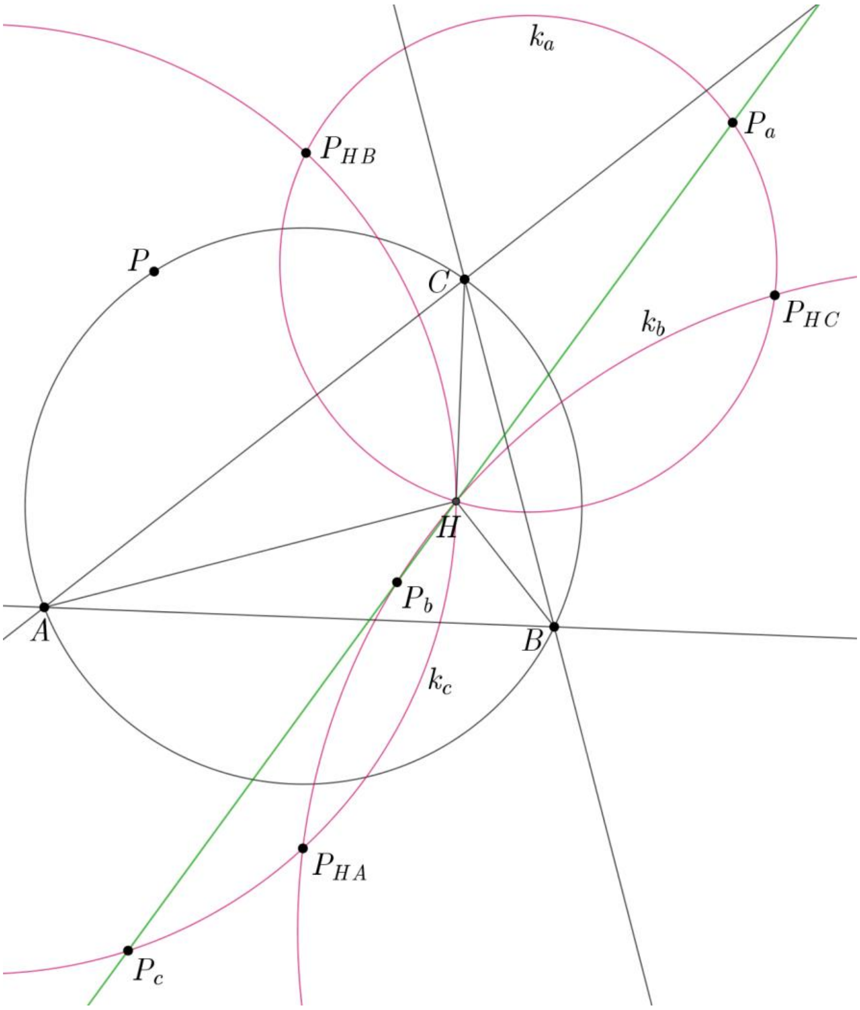



*Obrázek 69 Simson-Wallaceova věta, pokud uvažujeme osově symetrické obrazy bodu $P$.*

Větu zde nebudeme dokazovat, čtenář se může podívat do článku (Blažek, Pech, 2016) nebo publikace (Pech, Skříšovský, 2013), případně ji vyhledat na webu.

Výše uvedený teorém byl výchozím bodem problémové situace. Subjekt napadla tato otázka:

Experiment 1: V Simson-Wallaceově teorému se mluví o osově symetrických bodech podle stran trojúhelníku. Co kdybychom také uvažovali osově symetrické obrazy $P_{HA}$, $P_{HB}$, $P_{HC}$ bodu $P$ podle výšek $HA, HB, HC$ trojúhelníku? Co dostaneme? (obr. 70)



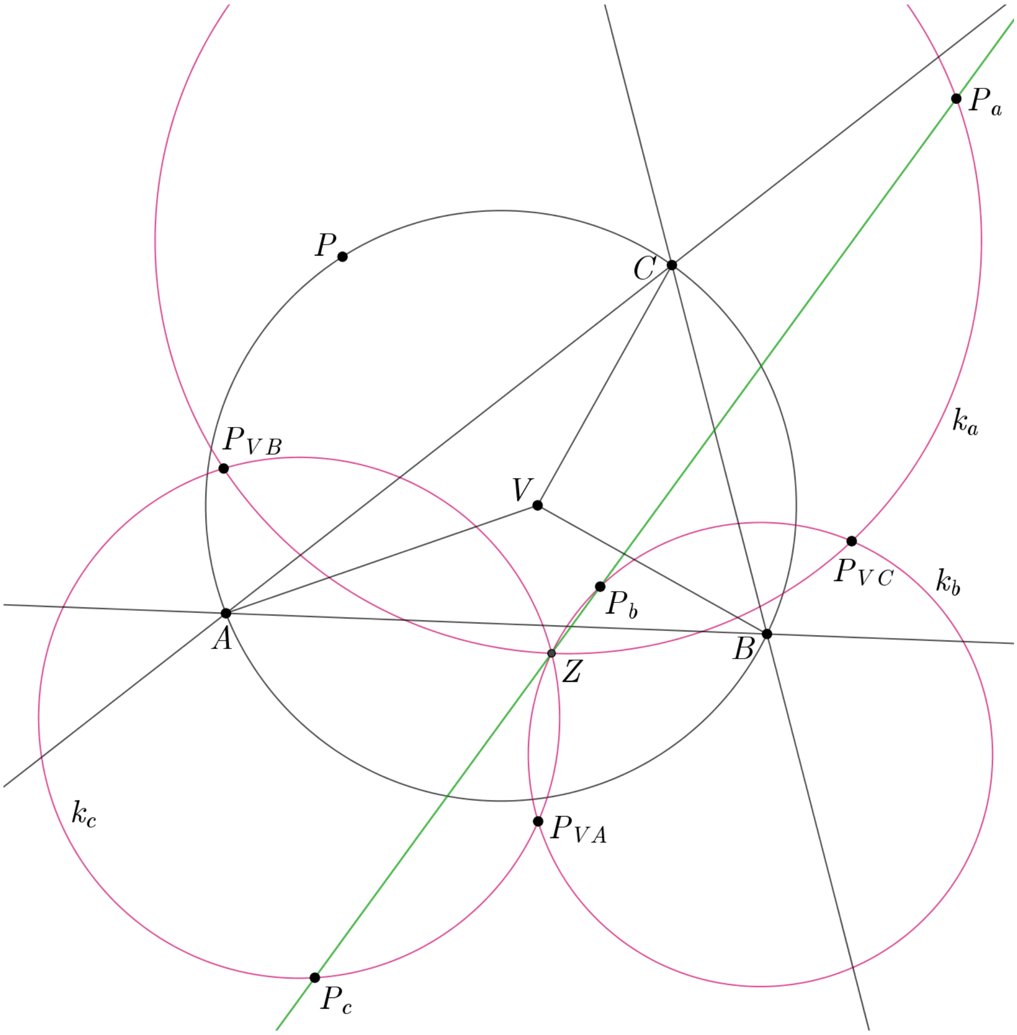

*Obrázek 70 Kružnice určené body $(P_{HB}P_{HA}P_c)$, $(P_{HA}P_{HC}P_b)$ a $(P_{HC}P_{HB}P_a)$ procházejí všechny ortocentrem $H$ trojúhelníku.*

Tvrzení T1: Kružnice $k_a$, určená body $(P_{HB}P_{HC}P_a)$, prochází ortocentrem $H$. Stejně tak kružnice $k_b$, určená body $(P_{HC}P_{HA}P_b)$, prochází bodem $H$. Analogicky definovaná kružnice, $k_c$ prochází bodem $H$.

Výše uvedený experiment byl na pomezí heuristiky a náhody. Řešitele k němu vedla touha po jisté symetrii, neznal ale žádné matematické argumenty, které by naznačovaly, jaký bude výstup experimentu.

Než se řešitel pokusil tvrzení T1 zdůvodnit, napadla ho ještě jedna, obecnější otázka:

Experiment 2 (otevřený, kategorie: „heuristický experiment"): Co kdybychom upustili od toho, že bod $H$ má být ortocentrem trojúhelníka? Co zopakovat první experiment s libovolným bodem $V \neq H$? (obr. 71)

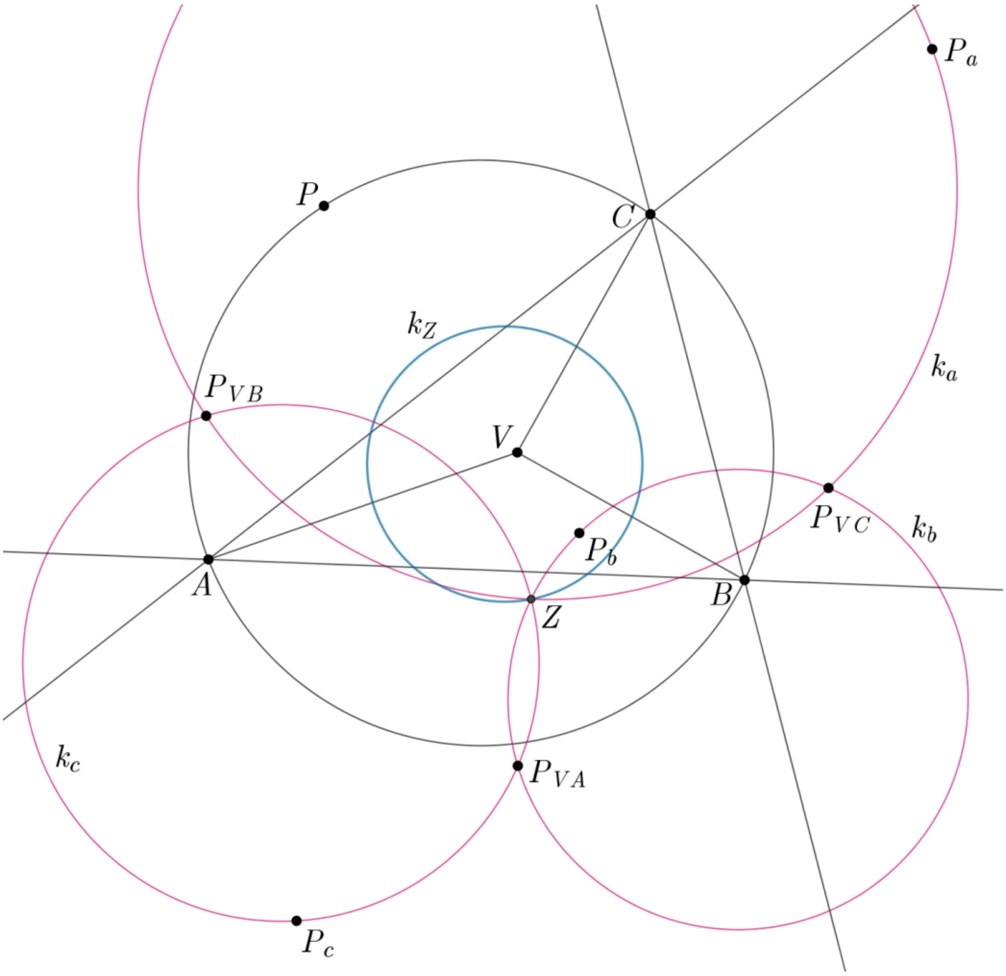



*Obrázek 71 Obecnější formulace problému*

Tvrzení T2: Nechť je dán trojúhelník $ABC$ a bod $V$. Nechť bod $P$ leží na kružnici $k$ opsané trojúhelníku $ABC$. Označme $P_a$, $P_b$, $P_c$ osově souměrné obrazy bodu $P$ podle stran $a, b, c$ trojúhelníku. Dále označme $P_{VA}, P_{VB}$ a $P_{VC}$ osově souměrné obrazy bodu $P$ podle přímek $VA$, $VB$ a $VC$. Pak tři kružnice – $k_a$ určená body $(P_{VB}P_{VC}P_a)$, $k_b$ určená body $(P_{VC}P_{VA}P_b)$ a $k_c$ určená body $(P_{VA}P_{VB}P_c)$ – procházejí společným bodem $Z$. Tímto bodem rovněž prochází Simsonova přímka $(P_a, P_b, P_c)$.

Řešitel provedl ještě jeden experiment, kterým chtěl prozkoumat problém detailněji, ale pro jehož důležitost ani možný výstup neměl žádné argumenty:

Experiment 3 (otevřený, kategorie: „náhodný experiment“): Jakou množinu vytvoří společný průsečík kružnic $Z$, pokud budeme pohybovat bodem $P$ po kružnici $k$? (obr. 72)




*Obrázek 72 Množina bodů $Z$ tvoří jistou kružnici $k_Z$.*

Tvrzení T3: Pokud pohybujeme bodem $P$ po kružnici $k$, leží bod $Z$ vždy na jisté kružnici $k_Z$.

Řešitel si stanovil dokázat tvrzení T1, T2 a T3.

**Fáze důkazu:**

Jako první krok si řešitel stanovil provést důkaz tvrzení T2 (kružnice $k_a$, $k_b$ a $k_c$ a Simsonova přímka procházejí bodem $Z$).

Jak dokázat, že tři kružnice procházejí společným průsečíkem? Existuje jedna standardní strategie, která využívá teorém o obvodovém úhlu: Pokud na kružnici zvolíme tětivu, pak ta je vidět ze všech bodů kružnice pod stejným (orientovaným) úhlem. Obvodový úhel příslušející tětivě $P_{VB}P_{VC}$ kružnice $k_a$ je roven $\measuredangle P_{VB}P_aP_{VC}$, a platí rovnost orientovaných úhlů $\measuredangle P_{VB}P_aP_{VC} = \measuredangle P_{VB}ZP_{VC}$, kde $Z$ je libovolný bod kružnice $k_a$. Pokud bod $Z$ náleží všem třem kružnicím, musí také platit $\measuredangle P_{VC}P_bP_{VA} = \measuredangle P_{VC}ZP_{VA}$ a $\measuredangle P_{VA}P_cP_{VB} = \measuredangle P_{VA}ZP_{VB}$. Z toho plyne, že průsečík $Z$ dvou kružnic (například $k_a$ a $k_b$) náleží také třetí kružnici $k_c$ právě tehdy, pokud platí rovnost:

$$\begin{aligned}\measuredangle P_{VB}P_aP_{VC} + \measuredangle P_{VC}P_bP_{VA} + \measuredangle P_{VA}P_cP_{VB} &= \measuredangle P_{VB}ZP_{VC} + \measuredangle P_{VC}ZP_{VA} + \measuredangle P_{VA}ZP_{VB} \\ &= \measuredangle P_{VB}ZP_{VB} = 0\end{aligned}$$

Pokud dokážeme, že platí vztah mezi orientovanými úhly

$$\measuredangle P_{VB}P_aP_{VC} + \measuredangle P_{VC}P_bP_{VA} + \measuredangle P_{VA}P_cP_{VB} = 0, \qquad \textbf{(1)}$$

jsme hotovi.

Dokázat výše uvedený vztah ale znamená nějakým způsobem spočítat úhly, které v něm figurují. To by nemuselo být složité v jednom konkrétním případě, totiž pokud by tyto úhly byly konstantní a nezávisely na poloze bodu $P$ na kružnici $k$. Řešitel ověřil tuto hypotézu s pomocí GeoGebry:

Experiment 3 (uzavřený, kategorie: „konstruktivní experiment"): Uvažujme kružnici $k$ a její tětivu $AB$. Dále zvolme v rovině libovolný bod $V$ (na kružnici nemusí ležet). Zvolme libovolný bod $P$ kružnice $k$ a sestrojme osově symetrické obrazy $P_{AB} = P_c$, $P_{VA}$ a $P_{VB}$ bodu $P$ podle přímek $AB$, $VA$ a $VB$. Je úhel $P_{VA}P_cP_{VB}$ konstantní pro libovolnou polohu bodu $P$ na kružnici? (obr. 73)

Hypotéza se ukázala jako správná a tak řešitel dospěl k prvnímu tvrzení:

1. tvrzení: Úhel $P_{VA}P_cP_{VB}$ je konstantní pro libovolně zvolený bod kružnice $k$.

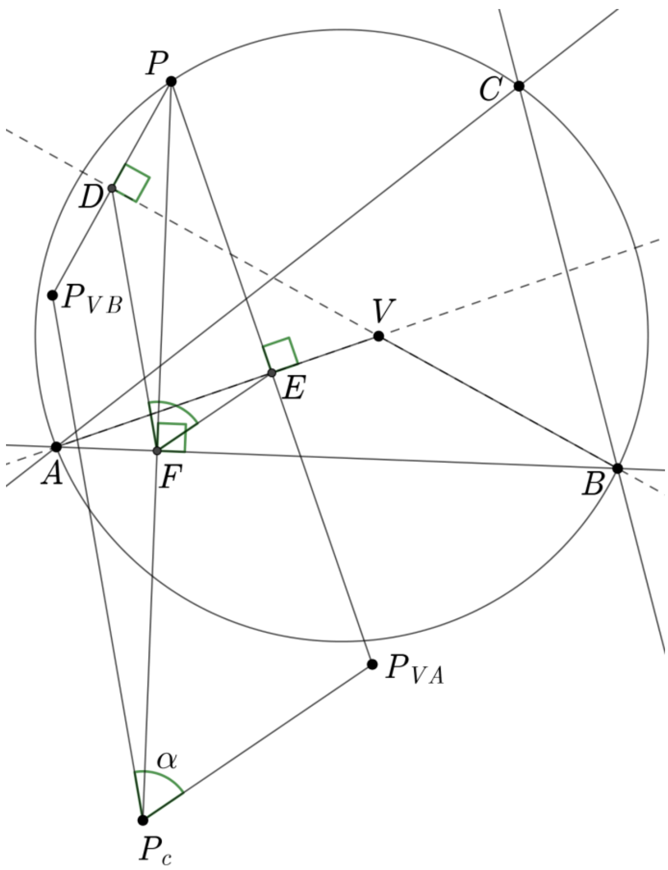
Zbývalo tento úhel spočítat.

Backing – důkaz 1. tvrzení

Označme paty kolmic z bodu $P$ na strany $VA, AB$ a $VB$ jako $D, F, E$. Pak je zřejmé $\measuredangle EFD = \measuredangle P_{VA}P_cP_{VB}$ (obr. 73). Dále budeme počítat s orientovanými úhly a využijeme faktu, že čtyřúhelníky $EFAP$ a $PDFB$ jsou tětivové:

$$\begin{aligned}\measuredangle P_{VA}P_cP_{VB} &= \measuredangle EFD = \measuredangle EFP + \measuredangle PFD = \measuredangle VAP + \measuredangle PBV = (\measuredangle BAP + \measuredangle PBA) - \\ &(\measuredangle BAV + \measuredangle VBA) = \measuredangle BPA - \measuredangle BVA \qquad \textbf{(2)}\end{aligned}$$

Pokud bod $P$ leží na kružnici $k$, je výraz na pravé straně výše uvedené rovnosti konstantní, tím je důkaz hotov. Rovnost (2) je však platná obecně (tzn., platí pro libovolný bod $P$ roviny).




*Obrázek 73 Velikost úhlu $P_{VB}P_cP_{VA}$ nezávisí na poloze bodu $P$.*

Backing – důkaz tvrzení T2

Do dokazované rovnosti (1) dosadíme výrazy z levé strany rovnice (2) a dostaneme:

$$\begin{aligned}\measuredangle P_{VB}P_aP_{VC} + \measuredangle P_{VC}P_bP_{VA} + \measuredangle P_{VA}P_cP_{VB} \\ &= \measuredangle CPB - \measuredangle CVB + \measuredangle APC - \measuredangle AVC + \measuredangle BPA - \measuredangle BVA \\ &= (\measuredangle CPB + \measuredangle BPA + \measuredangle APC) - (\measuredangle CVB + \measuredangle BVA + \measuredangle AVC) \\ &= \measuredangle CPC - \measuredangle CVC = 0\end{aligned}$$

Tímto jsme dokázali, že kružnice $k_a$, $k_b$ a $k_c$ procházejí společným bodem $Z$. Jako vedlejší produkt jsme získali jeden důležitý poznatek: Nikde v důkazu jsme nemuseli využít faktu, že bod $P$ náleží opsané kružnici $k$. To znamená: kružnice $k_a$, $k_b$ a $k_c$ se protínají ve společném bodě i v případě, že bod $P$ nenáleží kružnici $k$, ale je libovolným bodem roviny.

2. tvrzení (konstruktivní argumentace): Mějme trojúhelník $ABC$ a libovolný bod $V$ roviny. Pak pro libovolný bod $P$ roviny se kružnice $k_a$, $k_b$ a $k_c$ protínají ve společném průsečíku $Z$.

K úplnému důkazu T2 zbývá dokázat, že bodem $Z$ prochází i Simsonova přímka.

Je známo, že přímku lze chápat jako speciální případ kružnice, totiž jako kružnici, ze které je vidět daná tětiva pod nulovým orientovaným úhlem. Proto lze při důkazu využít symetrii – znovu využít již dokázané 2. tvrzení.

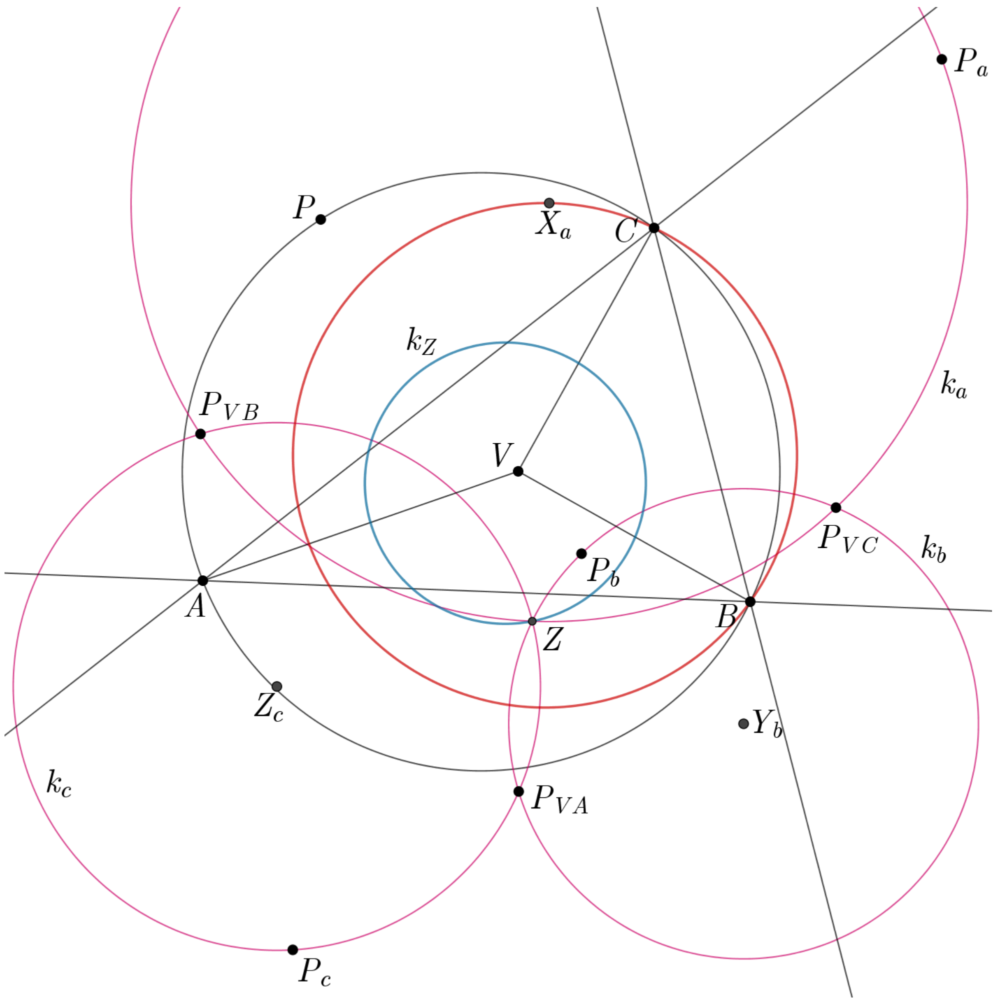
Nechť je dán trojúhelník $ABV$ a jistý bod $C$ roviny. Pak z 2. tvrzení plyne, že kružnice, které určují osově symetrické obrazy bodu $P$ podle stran trojúhelníků $ABC$ (Simsonova přímka), $AVC$ (kružnice $k_b$) a $BVC$ (kružnice $k_a$) mají společný průsečík. Jelikož kružnice $k_a$ a $k_b$ mají dva průsečíky ($Z$ a $P_{VC}$), musí Simsonova přímka procházet jedním z nich. Úvahou, která opět vychází ze symetrie, lze ukázat, že bod $P_{VC}$ to být nemůže, a tak to musí být bod $Z$.

Tím je důkaz T2 hotov.

Nyní se řešitel zaměřil na tvrzení T3. Bez zřejmého záměru sestrojil středy kružnic $k_a$, $k_b$ a $k_c$ a označil je postupně $X_a, Y_b, Z_c$. Pak vykonal následující

Experiment 4 (otevřený, kategorie: „náhodný experiment“): Jak vypadá množina bodů $X_a$, pokud pohybujeme bodem $P$ po kružnici $k$?

Odpověď: Je to jistá kružnice (obr. 74).




*Obrázek 74 Množina bodů $X_a$ tvoří kružnici.*

Předchozí výsledek zde nemáme v úmyslu zdůvodňovat a ani s naším cílem přímo nesouvisí. Je to však střípek, který vedl k otázce: Nepohybují se všechny body $P_a$, $P_b$, $P_c$, $P_{VA}$, $P_{VB}$, $P_{VC}$ po kružnicích? Na několika příkladech řešitel ověřil, že tomu tak opravdu je. Pak ho na základě vizuálního vnímání napadla následující otázka:

Experiment 5 (náhodný experiment a vizuální vnímání): Nemá trojúhelník $X_aY_bZ_c$ stále stejný tvar? Nejsou jeho úhly konstantní?

Odpověď: Trojúhelník $X_aY_bZ_c$ má stále stejný tvar pro všechny polohy bodu $P$, pouze se mění jeho velikost a poloha.

Zdůvodnit tento fakt není příliš obtížné, lze ukázat, že mezi orientovanými úhly platí $\measuredangle Z_cY_bX_a = \measuredangle P_{VA}P_bP_{VC}$. Tento fakt uvádíme proto, že sloužil jako motivace pro další otázku: Pokud je trojúhelník $X_aY_bZ_c$ fixní, proč by nemohly být fixní také trojúhelníky $X_aY_bZ$ nebo $X_aZ_cZ$ ?

Experiment 6 (uzavřený, kategorie „heuristický experiment“): Není poloha bodu $Z$ vzhledem k trojúhelníku $X_aY_bZ_c$ fixní? Jinými slovy, není relativní poloha $Z$ vůči tomuto trojúhelníku stále stejná?

Tento fakt je možné ověřit jednoduše: Stačí změřit úhly $X_aZY_b$, $X_aZZ_c$ a $Y_bZZ_c$ a sledovat, zda se mění nebo zůstávají konstantní.

Odpověď: Bod $Z$ má ve vztahu k trojúhelníku $X_aY_bZ_c$ stále stejnou polohu.

To však vedlo k další otázce: Pokud je bod $Z$ fixní ve vztahu k trojúhelníku $X_aY_bZ_c$, není také fixní ve vztahu k trojúhelníku $P_{VA}P_{VB}P_{VC}$ ? Nemá trojúhelník $P_{VA}P_{VB}P_{VC}$ také stále stejný tvar?

Experiment 7 (uzavřený, kategorie „heuristický experiment“): Má trojúhelník $P_{VA}P_{VB}P_{VC}$ stále stejný tvar? Není poloha bodu $Z$ fixní ve vztahu k trojúhelníku $P_{VA}P_{VB}P_{VC}$ ?

3. tvrzení – Trojúhelník $P_{VA}P_{VB}P_{VC}$ má stále stejný tvar. Bod $Z$ má ve vztahu k trojúhelníku $P_{VA}P_{VB}P_{VC}$ stále stejnou polohu.

Řešitel tedy došel k poznatku, že celý soubor bodů $P_a$, $P_b$, $P_c$, $P_{VA}$, $P_{VB}$, $P_{VC}$ a $Z$ má stále stejný tvar, pouze se mění jeho velikost a poloha. Zaměřil se proto na otázku, jak přesně se tento tvar mění, pokud pohybujeme bodem $P$ po kružnici. Během pohybu bodu $P$ po kružnici $k$ ve směru hodinových ručiček si povšiml, že se celý soubor bodů otáčí o stejný, opačně orientovaný úhel kolem bodu $V$. Na základě vizuálního vnímání řešitel ověřil následující hypotézu.

Experiment 8 (heuristická úvaha a vizuální vnímání): Pokud otočíme bodem $P$ o určitý úhel kolem bodu $V$, otočí se množina bodů $P_a$, $P_b$, $P_c$, $P_{VA}$, $P_{VB}$, $P_{VC}$ a $Z$ kolem bodu $V$ o stejný úhel v opačném směru. To lze ověřit následujícím pokusem: Sestrojíme osu úhlu $PVZ$. Pokud je fixní pro všechny polohy bodu $P$, je domněnka uvedená výše (empiricky) pravdivá.

4. tvrzení: Osa úhlu $PVZ$ je fixní.

U předchozího experimentu se zastavme: Fakt, ke kterému tento experiment vedl, byl objeven zejména na základě vizuálního vnímání subjektu. Jenomže toto vizuální vnímání bylo vedeno zcela určitým záměrem: Totiž určit závislost pohybu pevného „útvaru“ $P_aP_bP_cP_{VA}P_{VB}P_{VC}Z$ na poloze bodu $P$. Tento záměr se opíral jak o fakta, zjištěná dříve, tak o heuristické strategie řešitele, v jejichž rámci hledal ty nejslibnější cesty k řešení problému.

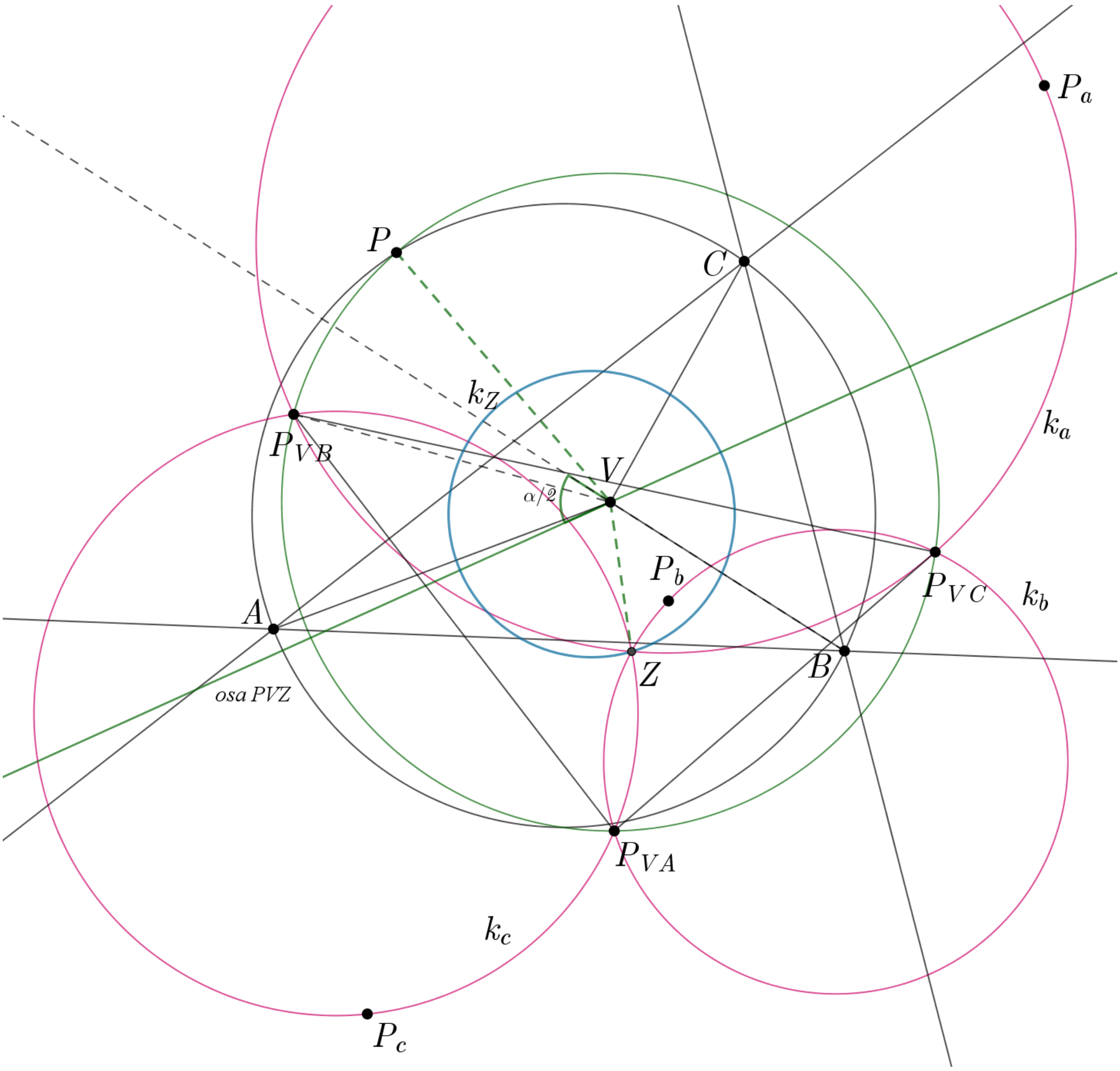
Nemůžeme tedy říci, že by 8. experiment byl založen pouze na základě vizuálního vnímání a už vůbec ne náhody.

Experiment 9 (otevřený, kategorie „heuristický experiment“): Subjekt sestrojil kružnici opsanou trojúhelníku $P_{VA}P_{VB}P_{VC}$. K provedení toho experimentu ho vedla obecná úvaha: Všechny kružnice, určené třemi významnými body konstrukce, procházely ještě dalším významným bodem konstrukce. Co lze v tomto směru říci o kružnici $(P_{VA}P_{VB}P_{VC})$?

5. tvrzení – Čtyřúhelníku $PP_{VA}P_{VB}P_{VC}$ lze opsat kružnici.

### Backing – důkaz tvrzení T3

Experimentální fáze skončila. Nyní měl subjekt dostatek informací, aby dokázal tvrzení T3. Všechny následující úvahy se vztahují k obrázku 75.




*Obrázek 75 Důkaz tvrzení T3*

Nejdříve subjekt zdůvodnil 5. tvrzení.

Důkaz 5. tvrzení:

Jelikož bod $P_{VB}$ je obrazem bodu $P$ v osové souměrnosti přímky $VB$, platí $|P_{VB}V| = |PV|$. Stejně dospějeme k rovnostem $|PV| = |P_{VA}V|$ a $|PV| = |P_{VC}V|$. Dokázali jsme tak, že čtyřúhelníku $PP_{VA}P_{VB}P_{VC}$ lze opsat kružnici a k tomu, že bod $V$ je středem této kružnice.

Důkaz 3. tvrzení:

Nejdříve dokážeme, že trojúhelník $P_{VA}P_{VB}P_{VC}$ má stále stejný tvar. Začněme otázkou: V jakém vztahu jsou body $P_{VA}$ a $P_{VB}$? Bod $P_{VA}$ dostaneme tak, že sestrojíme osově souměrný obraz bodu $P_{VB}$ podle přímky $VB$ (dostaneme bod $P$) a na ten opět aplikujeme osovou souměrnost, tentokrát podle přímky $VA$. To ale znamená, že platí vztah

$$\measuredangle P_{VA}VP_{VB} = 2 \cdot \measuredangle AVB \tag{3}$$

Výraz na pravé straně je konstantní. Výraz na levé straně je středový úhel kružnice, opsané trojúhelníku $P_{VA}P_{VB}P_{VC}$. Proto je obvodový úhel $P_{VA}P_{VC}P_{VB}$ také konstantní.

Analogicky dospějeme ke konstantnosti úhlů $\measuredangle P_{VA}P_{VB}P_{VC}$ a $\measuredangle P_{VB}P_{VA}P_{VC}$. Dokázali jsme tak, že úhly trojúhelníku $P_{VA}P_{VB}P_{VC}$ se nemění a ten má tedy stejný tvar.

Nyní se zaměříme na druhou část 3. tvrzení: bod $Z$ má ve vztahu k trojúhelníku $P_{VA}P_{VB}P_{VC}$ stále stejnou polohu.

Z důkazu tvrzení T2 víme, že úhly $\measuredangle P_{VB}ZP_{VC} = \measuredangle P_{VB}P_aP_{VC}$, $\measuredangle P_{VC}ZP_{VA} = \measuredangle P_{VC}P_bP_{VA}$, $\measuredangle P_{VA}ZP_{VB} = \measuredangle P_{VA}P_cP_{VB}$ jsou konstantní. Těmito úhly je však bod $Z$ v rovině trojúhelníku $P_{VA}P_{VB}P_{VC}$ jednoznačně určen, proto má vůči tomuto trojúhelníku stále stejnou polohu.

Důkaz 4. tvrzení:

V předchozím tvrzení jsme dospěli k faktu, že bod $Z$ má vůči trojúhelníku $P_{VA}P_{VB}P_{VC}$ stále stejnou polohu. Tu samou vlastnost má ale bod $V$: Dokázali jsme, že je středem kružnice opsané trojúhelníku $P_{VA}P_{VB}P_{VC}$. Z toho plyne, že (například) úhel $ZVP_{VB} = \alpha$ je konstantní. Z konstrukce je zřejmé, že osa úhlu $P_{VB}VP$ je přímka $VB$. Proto osa úhlu $ZVP$ musí svírat s přímkou $VB$ úhel $\alpha/2$ a je tedy fixní.

Důkaz tvrzení T3 je už přímočarý.

Jelikož jsou body $V$ a $Z$ fixní ve vztahu k trojúhelníku $P_{VA}P_{VB}P_{VC}$, platí

$$\frac{|ZV|}{|P_{VB}V|} = K,$$

kde $K$ je konstanta.

Jelikož bod $V$ je středem kružnice opsané čtyřúhelníku $PP_{VA}P_{VB}P_{VC}$, platí $|P_{VB}V| = |PV|$ a tedy

$$\frac{|ZV|}{|PV|} = K.$$

Jelikož je osa úhlu $ZVP$ rovněž fixní (svírá s přímkou $VB$ konstantní úhel), existuje jednoduchá konstrukce bodu $Z$, pokud je dán bod $P$:

- Sestrojíme osově symetrický obraz $P'$ bodu $P$ podle fixní osy úhlu $ZVP$ (kterou můžeme předem zkonstruovat)
- Na bod $P'$ aplikujeme stejnolehlost se středem $V$ a koeficientem $K$. Dostaneme bod $Z$.

Jelikož se bod $P$ pohybuje po kružnici $k$, musí se bod $Z$ pohybovat po kružnici $k_z$, která je obrazem $k$ v zobrazení, které vznikne složením dvou výše uvedených transformací. Tím je důkaz T3 hotov.

Zbývá důkaz tvrzení T1. To je speciální případ T2, při jehož důkazu jsme vyšli z rovností (2):

$$\measuredangle P_{VB}ZP_{VC} = \measuredangle P_{VB}P_aP_{VC} = \measuredangle CPB - \measuredangle CVB$$

$$\measuredangle P_{VC}ZP_{VA} = \measuredangle P_{VC}P_bP_{VA} = \measuredangle APC - \measuredangle AVC$$

$$\measuredangle P_{VA}ZP_{VB} = \measuredangle P_{VA}P_cP_{VB} = \measuredangle BPA - \measuredangle BVA$$

Nyní chceme dokázat, že pokud $V = H$ (kde $H$ je ortocentrum trojúhelníku), pak $Z = H$. Chceme tedy dokázat, že pokud

$$\measuredangle P_{HB}P_aP_{HC} = \measuredangle CPB - \measuredangle CHB$$

$$\measuredangle P_{HC}P_bP_{HA} = \measuredangle APC - \measuredangle AHC$$

$$\measuredangle P_{HA}P_cP_{HB} = \measuredangle BPA - \measuredangle BHA$$

pak

$$\measuredangle P_{HB}HP_{HC} = \measuredangle P_{HB}P_aP_{HC}$$

$$\measuredangle P_{HC}HP_{HA} = \measuredangle P_{HC}P_bP_{HA}$$

$$\measuredangle P_{HA}HP_{HB} = \measuredangle P_{HA}P_cP_{HB}$$

První tři rovnosti jsou dokázané v rámci tvrzení T2 (vztah (2)). Jelikož je bod $P$ j bodem kružnice $k$ opsané trojúhelníku, můžeme tyto rovnosti přepsat do tvaru

$$\measuredangle P_{HB}P_aP_{HC} = \measuredangle CAB - \measuredangle CHB$$

$$\measuredangle P_{HC}P_bP_{HA} = \measuredangle ABC - \measuredangle AHC$$

$$\measuredangle P_{HA}P_cP_{HB} = \measuredangle BCA - \measuredangle BHA$$

Nyní se zaměříme na druhé tři rovnosti. Na základě vztahu (3), který jsme odvodili v rámci důkazu T3, platí

$$2 \cdot \measuredangle BHC = \measuredangle P_{HB}HP_{HC}$$

$$2 \cdot \measuredangle CHA = \measuredangle P_{HC}HP_{HA}$$

$$2 \cdot \measuredangle AHB = \measuredangle P_{HA}HP_{HB}$$

K důkazu T1 tedy stačí, pokud jsou platné rovnosti

$$2 \cdot \measuredangle BHC = \measuredangle CAB - \measuredangle CHB$$

$$2 \cdot \measuredangle CHA = \measuredangle ABC - \measuredangle AHC$$

$$2 \cdot \measuredangle AHB = \measuredangle BCA - \measuredangle BHA$$

Dokážeme první z nich, důkaz zbylých dvou by byl stejný:

$$2 \cdot \measuredangle BHC = \measuredangle CAB - \measuredangle CHB \iff \measuredangle BHC = \measuredangle CAB \iff \measuredangle BHC + \measuredangle BAC = 0$$

Jelikož pracujeme s orientovanými úhly, je poslední rovnost pravdivá, neboť součet orientovaných hodnot těchto úhlů je buď 0° nebo 180°.

### Závěr k 1. problému

Uvedeme ještě pár poznámek k pomoci, kterou software řešiteli poskytl.

- V průběhu důkazu T2 spočívala role softwaru ve verifikaci hypotézy. Jak bylo ukázáno, řešitel se při snaze dokázat vztah (1) uchýlil k neurčité hypotéze „pokud by měl být tento vztah snadno dokazatelný, měl by být jistý úhel konstantní“. Poté, co se ukázala tato hypotéza pravdivá, se už řešitel obešel bez softwaru. Je pravděpodobné, že by řešitel dokázal T2 i bez této verifikace, prostě by se svou domněnku pokusil zdůvodnit logickými argumenty. Přesto by neměla být role verifikace podceňována. Jakmile řešitel zjistí, že má pravdu, dodá mu to sebedůvěru a může se zcela soustředit na jasně definovaný cíl. Získá jistotu, kterou by jinak neměl. Navíc případy, kdy subjekt zjistí, že jeho domněnka není pravdivá, nejsou tak vzácné. Sice je pravděpodobné, že i v těchto případech by na chybu ve své domněnce přišel, ale trvalo by mu to podstatně déle. Lze tedy říci: *verifikace softwaru významně šetří čas, protože subjekt během chvilky zjistí, na co se zaměřit nebo čím se naopak nezabývat. Provést stejná rozhodnutí bez softwaru vyžaduje mnohonásobně více času.*
- Při důkazu T3 sehrál software mnohonásobně větší roli. Tvrzení tři až pět byla objevena v důsledku experimentů, pro které měl subjekt buď heuristické argumenty, nebo se opíraly o vizuální vnímání dynamické konstrukce. Zatímco páté tvrzení by řešitel pravděpodobně objevil i bez softwaru, třetí a čtvrté ne nebo s velkými obtížemi. Konkrétně třetí tvrzení bylo objeveno na základě heuristických argumentů, těm ale předcházela série tří experimentů, které byly založeny na slepém prozkoumávání problému (náhodný experiment), vizuálním vnímání dynamické konstrukce a heuristické úvaze. Tyto předchozí experimenty přímo nesouvisely s řešením problému, pouze motivovaly subjekt k otázkám, které ho postupně dovedly k těm správným experimentům. *Proto, ačkoli za objevem třetího tvrzení stála heuristická úvaha, této úvaze předcházel dlouhý průzkum problému, který se opíral o vizuální vnímání dynamické konstrukce a náhodu. Nelze proto objev tohoto tvrzení oddělit od předchozího průzkumu, byť výsledky tohoto průzkumu bezprostředně nesouvisely s řešením problému.*

Čtvrté tvrzení bylo objeveno zejména na základě vizuálního vnímání dynamické konstrukce, rozhodně ale nelze říci, že by toto pozorování bylo prováděno náhodně a bez plánu. Za prvé, objevené tvrzení by bylo velmi obtížné vůbec vzít do úvahy bez znalosti třetího tvrzení. Za druhé, subjekt pozorování prováděl se zcela jasným záměrem – určit závislost pohybu množiny bodů na pohybu bodu $P$. Řešitel tedy provedl selekci – sledoval zcela konkrétní rys konstrukce a ten poté dokázal matematicky identifikovat.

Je to ukázka, že znalosti a strategie subjektu tvoří optiku, kterou se subjekt dívá na konstrukci, a které nelze oddělit od pozorovacích dovedností subjektu. Zopakujme ještě jednou citaci ze strany 72:

*„Observing is not just gazing at a geometric configuration. It means also looking for specific objects or relations in accordance the observers solving strategy, conceptual understanding, knowledge base and experience. “*

(Magajna, 2017)

## 2. problém: „Focal curve“ a efektivita heuristických experimentů

Následující ukázka demonstruje, že mnoho vlastností konstrukce lze uhádnout na základě heuristických argumentů. Subjekt začal zkoumat určitou konstrukci v softwaru a všiml si jistého detailu. Tento detail stál na počátku série experimentů, které sloužily k verifikaci hypotéz, pro jejichž platnost měl řešitel pouze heuristické argumenty. Ty se opíraly o odhad a o víru, že vlastnosti konstrukce mají v sobě jednoduchost a symetrii. Znalosti subjektu také hrály jistou roli, stejně jako jeho zkušenosti. Síla heuristických argumentů je větší, pokud se opírá o zkušenosti a znalosti subjektu.

Poznatky o zde uvedeném problému byly publikovány v článcích (Blažek, Pech, 2019) a (Blažek, Pech, 2018).

**Úvodní fáze:**

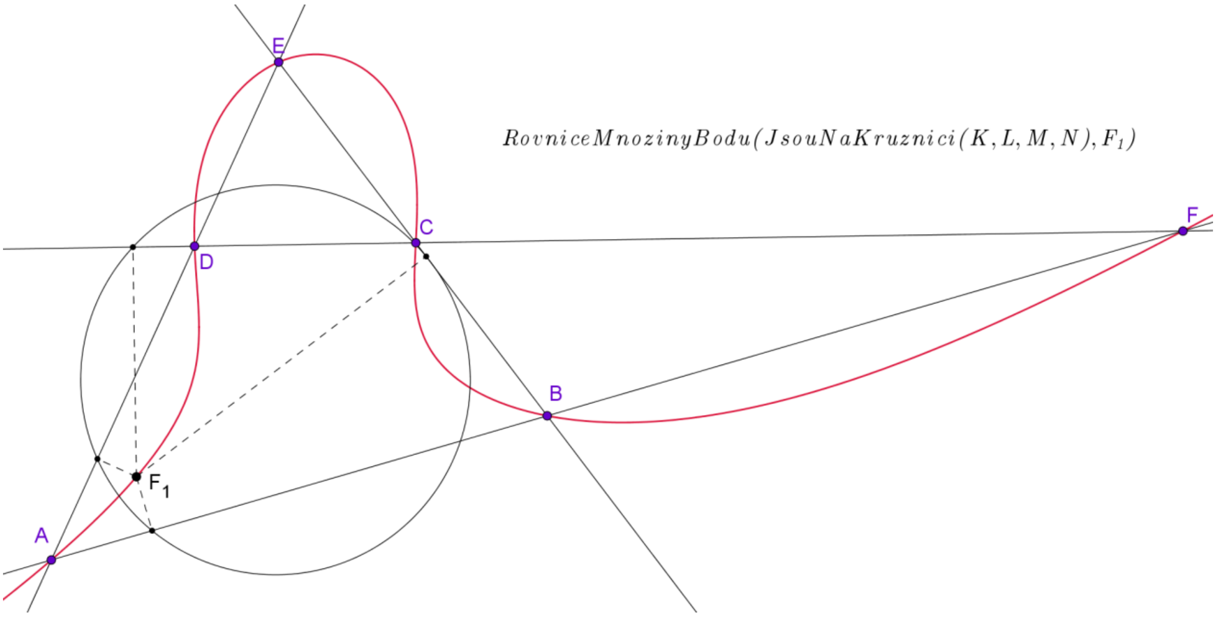
V rámci předchozího problému jsme uvedli Simson-Wallaceovu větu. Řekli jsme, že osově symetrické obrazy $P_a$, $P_b$ a $P_c$ bodu $P$ podle stran $a, b, c$ daného trojúhelníku leží v přímce právě tehdy, když bod $P$ leží na kružnici opsané danému trojúhelníku.

Tuto větu lze přeformulovat následujícím způsobem: Množina ohnisek $P$ všech parabol, které jsou tečné ke stranám daného trojúhelníku $ABC$, je kružnice opsaná trojúhelníku $ABC$.

Přirozeně vzniká otázka: Proč neuvažovat ohniska i jiných kuželoseček? Hyperbol a elips? K tomu, aby byl jakýkoli bod ohniskem kuželosečky, tečné k daným přímkám, je nutné a stačí, aby paty kolmic, spuštěné z tohoto bodu na dané přímky, ležely na kružnici (nebo přímce v případě paraboly). Je zřejmé, že v případě trojúhelníku tuto podmínku splňuje každý bod roviny (třemi body vždy prochází přímka nebo kružnice) a tak výše položená otázka není v tomto případě zajímavá. Co zopakovat otázku pro obecný čtyřúhelník? Jak vypadá množina ohnisek všech kuželoseček, které jsou tečné ke stranám daného čtyřúhelníku?

Obecný problém: Uvažujte libovolný čtyřúhelník $ABCD$ a určete křivku, kterou tvoří ohniska kuželoseček, k níž jsou strany čtyřúhelníku tečné.

Problém je možné analyticky vyřešit v GeoGebře. Narýsujeme čtyřúhelník $ABCD$, sestrojíme libovolný bod $F_1$, zkonstruujeme paty kolmic spuštěné z tohoto bodu na strany čtyřúhelníku a zadáme příkaz: $RovniceMnozinyBodu(JsouNaKruznici(\,K, L, M, N\,), F_1\,)$. Zobrazí se nám křivka třetího stupně, která prochází všemi průsečíky přímek, které tvoří čtyřúhelník (viz následující obrázek).




*Obrázek 76 Množina ohnisek kuželoseček (vyznačených červeně), které jsou tečné ke stranám daného čtyřúhelníku $ABCD$. Jedná se o křivku třetího stupně, která prochází všemi průsečíky stran čtyřúhelníku.*

Dostaneme také rovnici této křivky. Ta může vypadat, v závislosti na poloze bodů čtyřúhelníku v kartézské rovině, také takto:

$$2x^3 - 11x^2y + 2xy^2 - 11y^3 + 27x^2 + 30xy + 59y^2 - 124x - 155y + 211 = 0$$

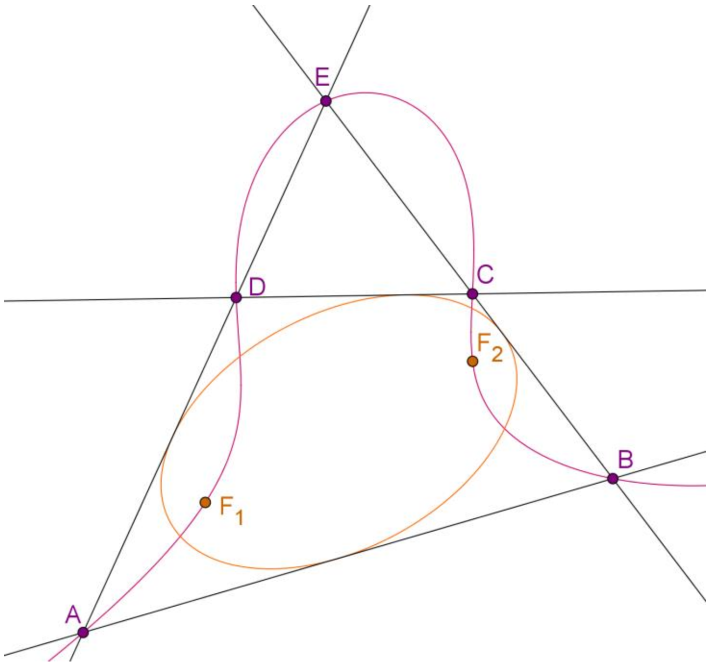
Při pohledu na tuto rovnici upoutá každého zkušenějšího řešitele rovnost dvou párů koeficientů. V GeoGebře lze lehce ověřit, že tato rovnost je vlastní každé křivce, bez ohledu na to, jaký zvolíme čtyřúhelník. Dostali jsme se tak k zadání problému:

*Zadání:*

Prozkoumejte vlastnosti „ohniskové křivky“ $K$ a pokuste se je zdůvodnit. Zdůvodněte, proč má analytická rovnice křivky dva páry koeficientů totožné.

**Průzkum problému:**

Řešitel zpočátku nevěděl, co hledat. Zformuloval následující obecnou otázku: Jaký je vztah mezi ohnisky $F_1, F_2$, které náleží stejné kuželosečce? Narýsoval do konstrukce tečnou elipsu a obě její ohniska (obr. 77):




*Obrázek 77 Elipsa tečná ke stranám čtyřúhelníku. Konstrukce druhého ohniska kuželosečky je možné provést následovně: sestrojíme osově souměrné obrazy bodu $F_1$ podle tří libovolných stran čtyřúhelníku. Pak střed kružnice, která je těmito třemi body určena, je druhé ohnisko $F_2$.*

Pohyboval ohniskem $F_1$ a sledoval přitom pohyb ohniska $F_2$. Všiml si, že pokud ztotožnil ohnisko $F_1$ s bodem $A$, bylo ohnisko $F_2$ totožné s bodem $C$. Pokud ztotožnil ohnisko $F_1$ s bodem $D$, ohnisko $F_2$ bylo identické s bodem $B$. Ačkoli řešitel nedospěl okamžitě k žádné hypotéze, tento fakt byl pro další průzkum tak zásadní, že ho vypíšeme:

Experiment E: Pokud ztotožníme jedno ohnisko s průsečíkem dvou přímek, bude se druhé ohnisko nacházet v průsečíku zbylých dvou přímek.

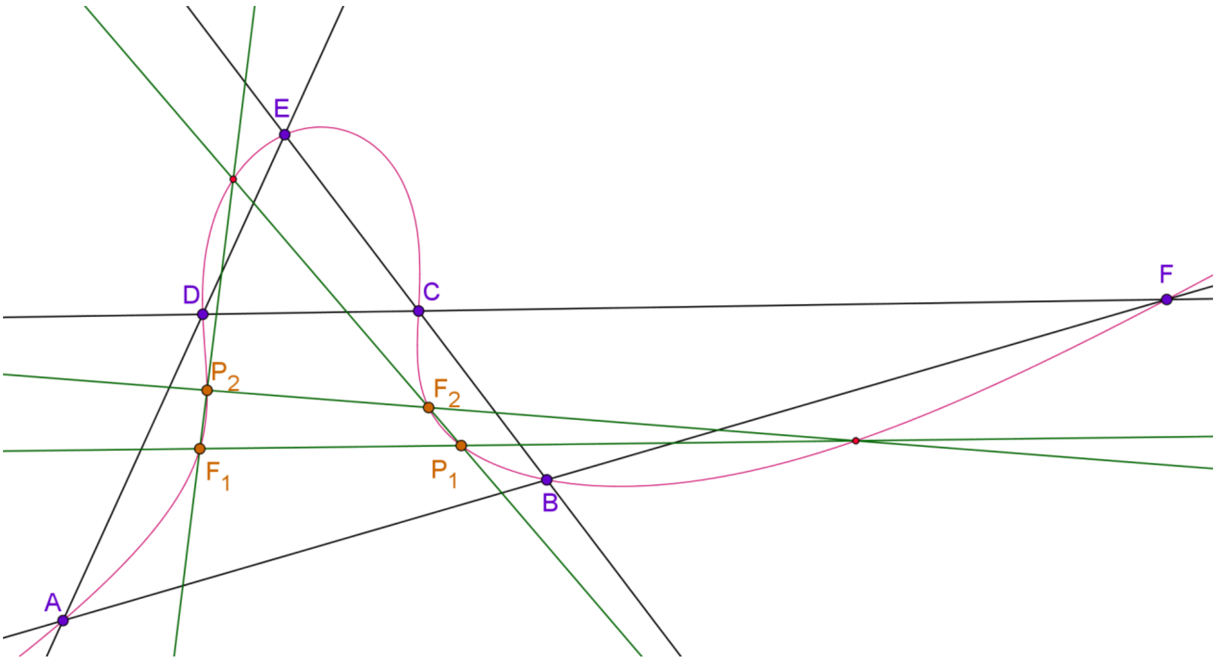
Na základě výše uvedeného experimentu řešitele napadla úvaha: Pokud páry průsečíků přímek ($A$ a $C$, $D$ a $B$, $E$ a $F$) můžeme chápat jako dvojice ohnisek na dané křivce, pak z hlediska symetrie by bylo hezké (což je samozřejmě nematematické vyjádření), kdyby tyto páry měly v definici křivky stejnou váhu jako jakákoli jiná dvojice ohnisek $F_1, F_2$. Pokud ale body $A$ a $C$, a $D$ a $B$ mají stejnou váhu jako jakákoli jiná dvojice ohnisek $F_1, F_2$ a $P_1, P_2$, pak by čtyřúhelník, určený vrcholy $F_1P_1F_2P_2$, měl generovat stejnou ohniskovou křivku $K$ jako čtyřúhelník $ABCD$. Řešitel tak dospěl k hypotéze, která byla zčásti založena na faktu vypozorovaném v experimentu E a zčásti se opírala o heuristickou úvahu - víru v symetrii problému:

*Hypotéza H1:* Uvažujme čtyřúhelník $ABCD$, jeho ohniskovou křivku $K$ a tři páry ohnisek $F_1F_2$ $P_1P_2$ a $G_1G_2$, kde každý pár náleží k jakékoliv kuželosečce, tečné k přímkám čtyřúhelníku $ABCD$. Pak čtyřúhelník $F_1P_1F_2P_2$ určuje stejnou křivku $K$ jako

$ABCD$. Navíc zachovává vztahy mezi ohnisky. Tedy pokud dvojice ohnisek $G_1G_2$ náleží kuželosečce, která je tečná ke stranám čtyřúhelníku $ABCD$, pak stejná dvojice bodů $G_1G_2$ představuje ohniska (jiné) kuželosečky, která je tečná ke stranám čtyřúhelníku $F_1P_1F_2P_2$.

K tomu, aby tuto hypotézu řešitel podpořil deduktivními argumenty, ještě neměl dostatek znalostí o křivce, proto se ji snažil potvrdit s pomocí nástrojů softwaru. Nabízí se přímočará cesta, jak to udělat: sestrojit libovolný čtyřúhelník $F_1P_1F_2P_2$ a analyticky spočítat křivku určenou tímto čtyřúhelníkem. Pokud by tato křivka byla totožná s tou, kterou jsme získali v předchozí fázi, byli bychom hotovi. Tento postup je však výpočetně náročný, řešitel si ale myslel, že jiným způsobem to udělat nelze. Poté, co zkonstruoval čtyřúhelník $F_1P_1F_2P_2$, ale zjistil, že počítat rovnici „nové“ křivky $K$ není ani nutné.

Experiment 1 (uzavřený, kategorie: „heuristický experiment“): Řešitel sestrojil libovolný čtyřúhelník $F_1P_1F_2P_2$ a zjistil, že zbylé dva průsečíky přímek čtyřúhelníku se protínají na křivce $K$. To je však vlastnost, kterou má i „základní“ čtyřúhelník $ABCD$. Proto je velice pravděpodobné, že hypotéza H1 je pravdivá (viz obr. 78).




*Obrázek 78 Průsečíky stran čtyřúhelníku $F_1P_1F_2P_2$ se protínají na křivce $K$. Proto je velice pravděpodobné, že tento čtyřúhelník určuje stejnou křivku $K$, jako čtyřúhelník $ABCD$.*

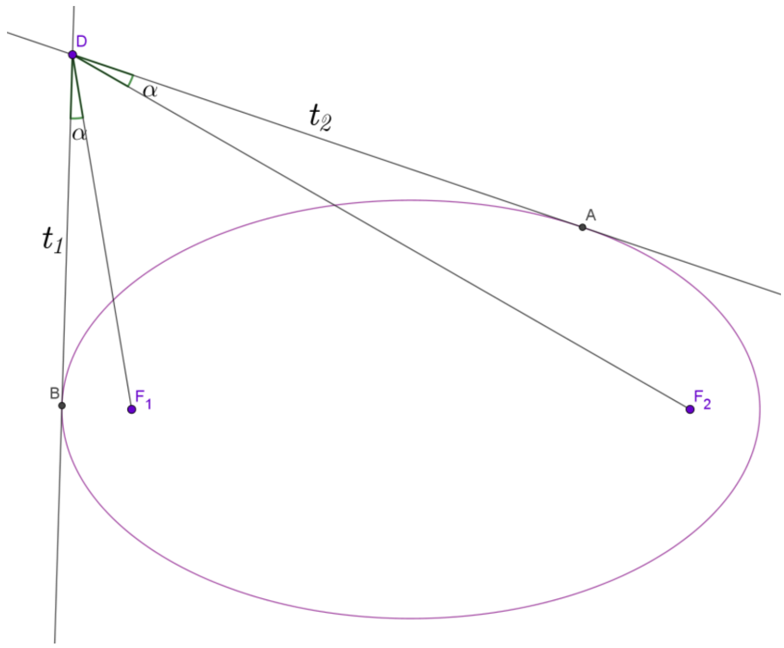
Předchozí experiment byl uzavřený, neboť řešitel chtěl s jeho pomocí potvrdit konkrétní hypotézu. Zároveň byl heuristický, neboť tato hypotéza byla založena na obecných argumentech (víra v symetrii problému).

Dále řešitele dovedla úvaha, založená na tzv. Ponceletově teorému. Tento teorém zde uvedeme v plném znění, ale bez důkazu (detaily např. Ostermann, Wanner, 2012).

*Ponceletův teorém*

*Mějme libovolnou kuželosečku $c$ s ohnisky $F_1F_2$ a bod $D$. Nechť je bod $D$ takový, že z něho lze vést k $c$ dvě tečny $t_1$ a $t_2$. Pak platí rovnost úhlů $\sphericalangle t_1DF_1 = \sphericalangle t_2DF_2$. (obr. 79)*

Pokud bychom použili orientované úhly, jsou výše uvedené úhly stejně velké ale opačně orientované. Celá situace je znázorněna na následujícím obrázku.




*Obrázek 79 Ponceletů teorém.*

Úvaha řešitele byla následující: Podle Ponceletova teorému je osa úhlu $F_1DF_2$ totožná s osou úhlu $ADC$ (přímky $AD$ a $DC$ jsou tečné ke kuželosečce), osa úhlu $ADC$ je ale pevná, proto je pevná i osa úhlu $F_1DF_2$ bez ohledu na to, jakou dvojici ohnisek $F_1F_2$ zvolíme. Nyní uvažujme další libovolnou dvojici ohnisek $P_1P_2$. Podle H1 existuje kuželosečka s ohnisky $F_1F_2$, která je tečná ke čtyřúhelníku $\mathrm{A}P_1\mathrm{C}P_2$. Podle Ponceletova teorému je osa úhlu $F_1P_1F_2$ totožná s osou úhlu $AP_1C$. Ta ale na volbě ohnisek $F_1F_2$ nezávisí. Proto je osa úhlu $F_1P_1F_2$ pevná bez ohledu na to, jakou dvojici ohnisek $F_1F_2$ zvolíme.

*Hypotéza H2*: Uvažujme libovolný bod $P_1 \in K$ a dvojici ohnisek $(F_1F_2) \in K$. Pak osa úhlů $F_1P_1F_2$ je pevná, bez ohledu na to, jakou dvojici $(F_1F_2)$ zvolíme.

Experiment 2 (uzavřený, kategorie: „konstruktivní experiment“): Řešitel ověřil hypotézu H2.

Předchozí experiment byl uzavřený (byla testována konkrétní hypotéza) a konstruktivní (byl podpořen konkrétními matematickými argumenty).

Nyní řešitele napadla otázka: Není mezi úsečkami $F_1P_1$ a $P_1F_2$ ještě nějaký vztah, než jenom ten, že mají pevnou osu? Není například součin jejich délek číslo, které je konstantní pro libovolnou dvojici ohnisek $(F_1F_2)$?

Experiment 3 (uzavřený, kategorie: „heuristický experiment“): Řešitel vynásobil délky úseček $|F_1P_1|$ a $|F_2P_1|$ a měnil polohu ohnisek $F_1F_2$ (pohyboval jedním ohniskem, druhé se pohybovalo v závislosti na něm). Zjistil, že se součin délek nezachovává.

Tohle byl příklad experimentu, který nedopadl tak, jak subjekt doufal. Řešitel se však výše položenou otázkou zabýval dále, musel ji ale pozměnit. Pohyboval ohnisky $P_1P_2$ a všiml si, že v určité poloze bodu $P_1$ bod $P_2$ „zmizí z obrazovky“. Řešitel věděl, co to znamená: kuželosečka se pro tuto polohu bodu $P_1$ stává parabolou a druhé ohnisko se nachází na ose paraboly „v nekonečnu“. Věděl i jak tento bod zkonstruovat přímo, bez znalosti křivky $K$.

*Miquelův bod čtyřúhelníku*

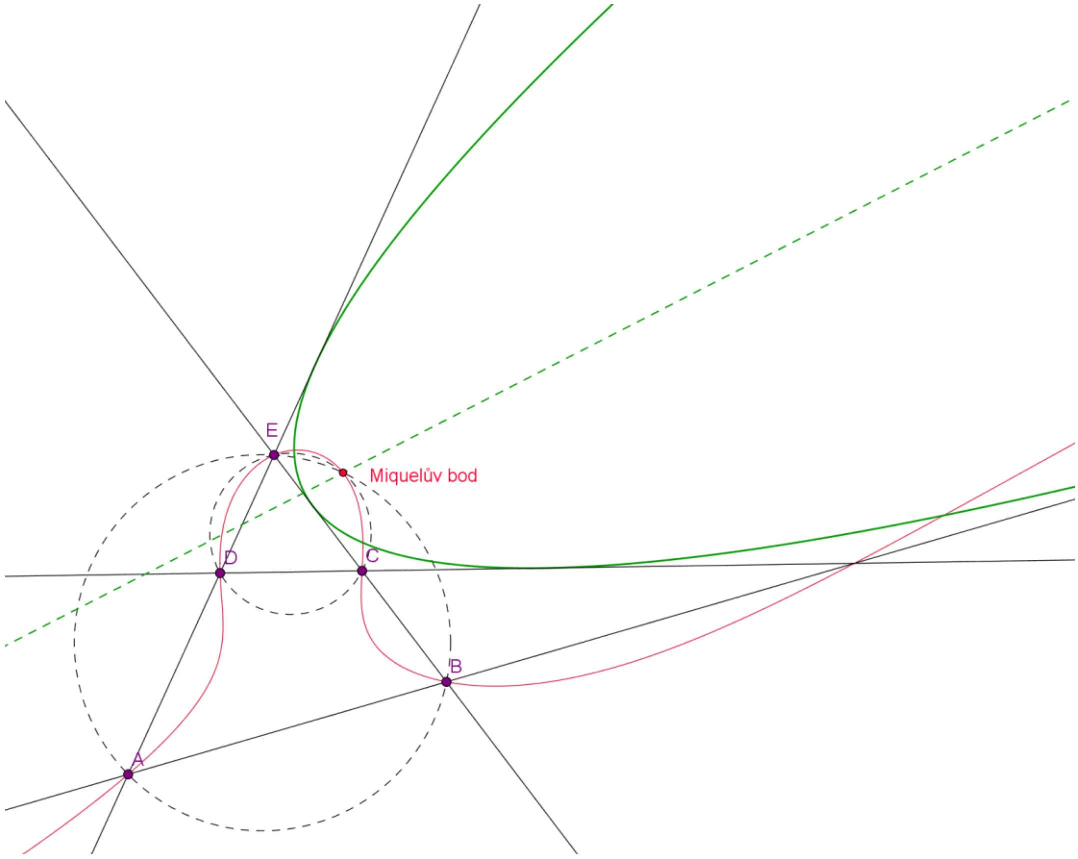
*Paty kolmic, spuštěné z Miquelova bodu na (prodloužené) strany čtyřúhelníku, leží v přímce. Lze ukázat, že každý čtyřúhelník, který není rovnoběžníkem, má právě jeden Miquelův bod. Lze ho také definovat tak, že je to ohnisko paraboly, která je tečná ke stranám čtyřúhelníku. (viz obr. 80).*

Nejjednodušší způsob konstrukce spočívá na aplikaci Simson-Wallaceovy věty. Na jejím základě lze zdůvodnit, že Miquelův bod je společným průsečíkem libovolných dvou kružnic z množiny $\{(ECD),(EAB),(BCF),(ADF)\}$

Miquelův bod budeme značit $M_\mathrm{i}$, druhé, nevlastní ohnisko, které přísluší tečné parabole, budeme značit $M_\infty$ Pár ohnisek $(M_\mathrm{i},M_\infty)$ náleží jedné kuželosečce (parabole) stejně jako kterýkoli jiný pár ohnisek $(F_1F_2)$.

Řešitele napadla otázka: Nešlo by celý předchozí experiment provést speciálně pro bod $M_\mathrm{i}$? Jeho charakter se liší od ostatních ohnisek, a tak by mohl mít vlastnost, kterou jiná ohniska nemají.

Experiment 4 (uzavřený, kategorie: „heuristický experiment“): Řešitel vynásobil délky úseček $|F_1M_\mathrm{i}|$ a $|F_2M_\mathrm{i}|$ a měnil polohu ohnisek $F_1F_2$ (jedním pohyboval, druhé bylo závislé). Zjistil, že se součin délek zachovává. Tento součin označil $S$.




*Obrázek 80 Miquelův bod je ohniskem paraboly, která je tečná ke čtyřúhelníku $ABCD$. Každý čtyřúhelník má nejvýše jeden Miquelův bod.*

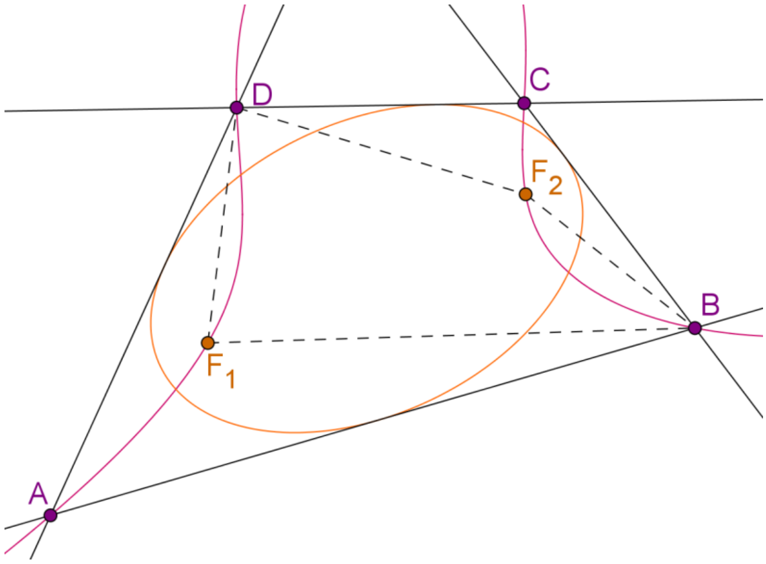
*Hypotéza H3*: Pro libovolnou dvojici ohnisek $(F_1F_2) \in K$ platí $|F_1M_\mathrm{i}| \cdot |F_2M_\mathrm{i}| = S$, kde $S$ je číslo, nezávislé na volbě dvojice $(F_1F_2)$.

Empiricky ověřená hypotéza H3 v sobě nese určitou nesymetrii: Proč je tento součin konstantní v případě $M_\mathrm{i}$ a nikoli v případě libovolného bodu $P_1$? Nešlo by najít nějakou obecnější vlastnost, která by byla vlastní všem ohniskům $P_1 \in K$ a z níž by H3 plynula jako speciální případ?

Experiment 5 (uzavřený, kategorie: „heuristický experiment“): Řešitel sestrojil kuželosečku s ohnisky $(F_1F_2)$ a hledal nějaký vztah, ve kterém by vystupoval bod $D$ a který by se zachovával (bod $D$ je možné, pokud bychom přijali platnost H1, považovat za libovolné ohnisko $P_1$ křivky $K$). Jak plyne z experimentu 3, součin $|F_1D| \cdot |F_2\mathrm{D}|$ se nezachovává. Co však do hledaného vztahu zapojit i druhé ohnisko, které přísluší k bodu $D$ – tedy bod $B$? Řešitel utvořil výraz

$$\frac{|F_1D| \cdot |F_2\mathrm{D}|}{|F_1B| \cdot |F_2\mathrm{B}|} = V_D$$

a zjistil, že se zachovává. Tedy pro libovolnou volbu $(F_1F_2)$ je $V_D$ konstantní.




*Obrázek 81 Číslo $V_D$ je konstantou pro libovolnou volbu dvojice $F_1F_2$*

Dopěl tak následující hypotéze

*Hypotéza H4*: Nechť jsou dány ohniska $(P_1P_2) \in K$, pak výraz

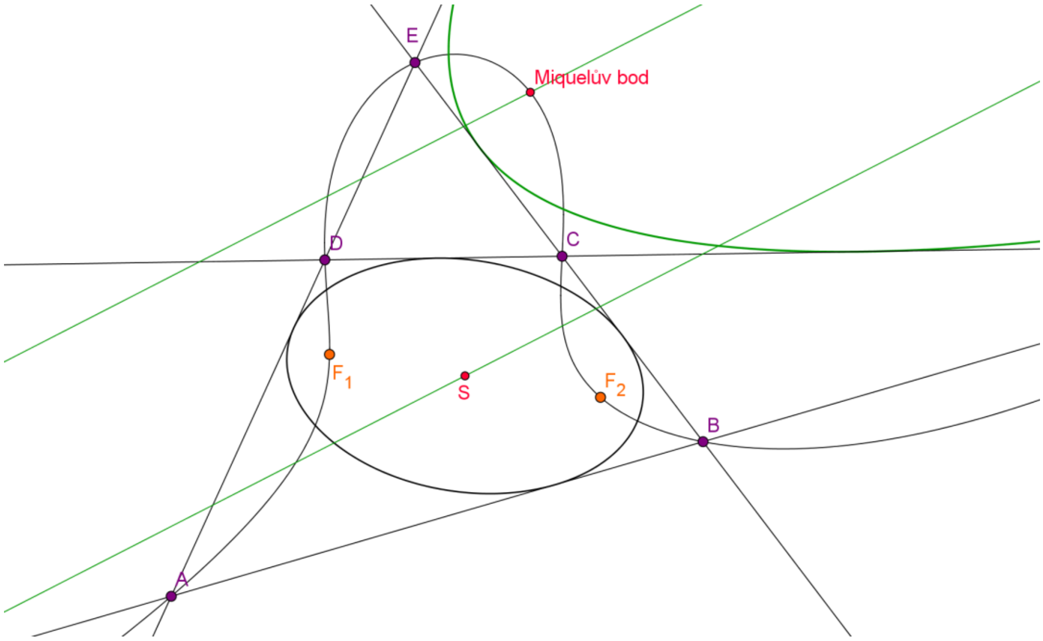
$$\frac{|F_1P_1| \cdot |F_2P_1|}{|F_1P_2| \cdot |F_2P_2|} = V_{P_1}$$

je konstantní pro libovolnou dvojici $(F_1F_2) \in K$.

Nakonec řešitel provedl poslední experiment.

Experiment 5 (otevřený, kategorie: „náhodný experiment“): Řešitel graficky zobrazil množinu středů všech kuželoseček, které jsou tečné ke čtyřúhelníku $ABCD$ (tzn. středů úseček $F_1F_2$). Zjistil, že je to přímka, která je rovnoběžná s osou tečné paraboly.

*Hypotéza H5*: Množina středů kuželoseček je přímka, která je rovnoběžná s osou paraboly (obr. 82).




*Obrázek 82 Množina středů kuželoseček tvoří přímku, která je rovnoběžná s osou tečné paraboly.*

**Fáze zdůvodnění hypotéz:**

Řešitel si nyní stanovil dokázat všechny hypotézy H1 až H5 a současně s tím dokázat, proč analytická rovnice $K$ vypadá tak zvláštně. Začal krokem, který se neopíral fakta, vypozorovaná s pomocí softwaru, ale vycházel z čisté dedukce. Dokázal následující větu:

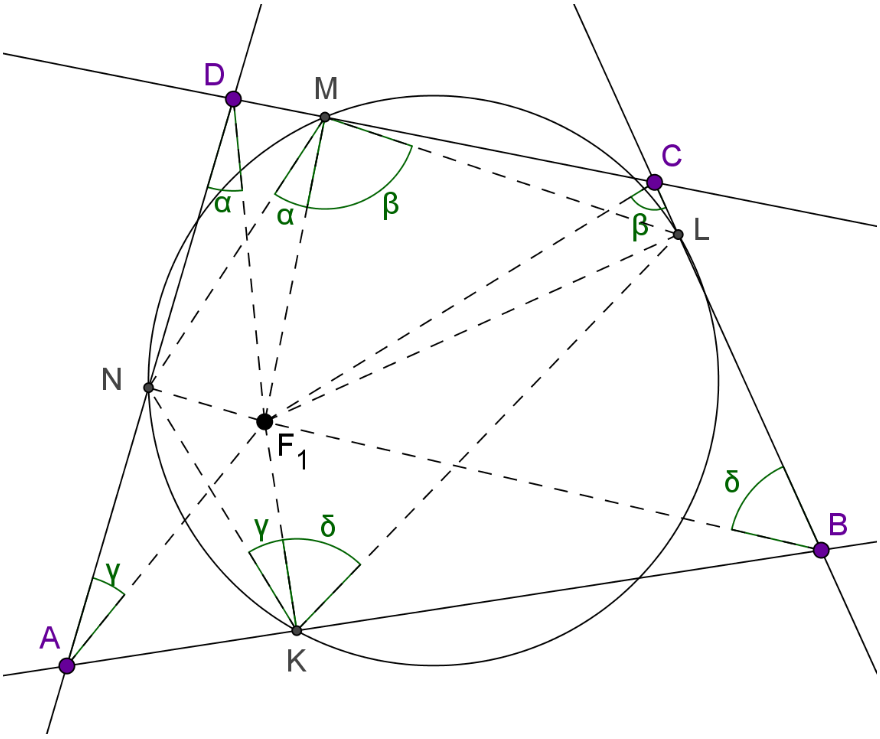
*Věta V1*

Bod $F_1$ je ohnisko kuželosečky, která je tečná ke čtyřúhelníku $ABCD$ právě tehdy, když jsou z tohoto bodu vidět protější strany čtyřúhelníku pod stejným orientovaným úhlem. Zapsáno symbolicky: $\sphericalangle AF_1D + \sphericalangle CF_1B \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_1 \in K.$

*Důkaz V1*

Vyjdeme z předpokladu: Pokud je $F_1$ ohnisko kuželosečky, která je tečná k danému čtyřúhelníku, leží paty $K, L, M, N$ kolmic spuštěných z bodu $F_1$ na strany $AB, BC, CD, DA$, na kružnici $k$. Z toho faktu dokážeme V1. Budeme počítat s orientovanými úhly. Všechny následující úvahy se vztahují k obrázku 83.

Podle věty o obvodových úhlech platí $\sphericalangle NML = \sphericalangle NKL$.




*Obrázek 83 K důkazu, že protější strany čtyřúhelníku $AD$ a $CB$ je z ohniska tečné kuželosečky vidět pod stejným orientovaným úhlem.*

Zároveň

$$\sphericalangle NML = \sphericalangle NMF_1 + \sphericalangle F_1ML = \sphericalangle NDF_1 + \sphericalangle F_1CL \qquad \textbf{(1)}$$

Rovnost (1) plyne z věty o obvodových úhlech a faktu, že čtyřúhelníky $NDMF_1$ a $F_1MCL$ jsou tětivové.

Analogicky dospějeme k rovnosti $\sphericalangle NKL = \sphericalangle NAF_1 + \sphericalangle F_1BL$. Platí tedy následující rovnosti:

$$\sphericalangle AF_1D = \sphericalangle F_1AN + \sphericalangle NDF_1 = (\sphericalangle LKN + \sphericalangle F_1BL) + (\sphericalangle NML + \sphericalangle LCF_1) = \sphericalangle F_1BL + \sphericalangle LCF_1$$

V úpravě jsme využili vlastnosti orientovaných úhlů (např. $\sphericalangle F_1AN = -\sphericalangle NAF_1$) a předpokladu $\sphericalangle NML = \sphericalangle NKL = -\sphericalangle LKN$. Dospěli jsme tak k rovnosti $\sphericalangle AF_1D = \sphericalangle F_1BL + \sphericalangle LCF_1 = \sphericalangle BF_1C$. Zapsáno jinak:

$$\sphericalangle AF_1D + \sphericalangle CF_1B \equiv 0 \bmod 180°, \qquad \textbf{(2)}$$

což je znění V1. (Opačná implikace je založená na reverzibilitě výše uvedených kroků.)

S důkazem této věty byl schopen řešitel dokázat, proč má rovnice křivky zvláštní formu.

***Rovnice křivky K***

Spočítáme rovnici křivky nikoli s pomocí kartézských souřadnic, ale v komplexní rovině. Nechť jsou souřadnice bodů $A, B, C, D$ postupně $[a_1, a_2], [b_1, b_2], [c_1, c_2]$ a $[d_1, d_2]$.

Přiřadíme těmto souřadnicím komplexní čísla, které označíme stejně jako body, které reprezentují, tedy

$[a_1, a_2] \to a_1 + ia_2 = A,\ [b_1, b_2] \to b_1 + ib_2 = B$ atd.

Pak výraz $(F_1 - C) \cdot \overline{(F_1 - B)}$ je komplexní číslo, jehož argument je úhel $\sphericalangle BF_1C$.

Stejně tak výraz $(F_1 - A) \cdot \overline{(F_1 - D)}$ je komplexní číslo, jehož argument je velikost úhlu $\sphericalangle DF_1A$.

Rovnost (2) říká, že argument komplexního čísla $(F_1 - A) \cdot \overline{(F_1 - B)} \cdot (F_1 - C) \cdot \overline{(F_1 - D)}$ je nula nebo 180 stupňů, jinými slovy je to reálné číslo. Jelikož imaginární složka tohoto čísla je nulová, platí:

$$\mathrm{Im}\left\{(F_1 - A) \cdot \overline{(F_1 - B)} \cdot (F_1 - C) \cdot \overline{(F_1 - D)}\right\} = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Pokud budeme značit body hledané křivky jako $X = x + iy$, dostaneme

$$\mathrm{Im}\left\{(X - A) \cdot \overline{(X - B)} \cdot (X - C) \cdot \overline{(X - D)}\right\} = 0$$

Po vypsání imaginární složky výše uvedeného výrazu dostaneme rovnici:

$$\begin{aligned} y^3 \cdot \mathrm{Re}\left\{A - \overline{B} + C - \overline{D}\right\} + x^2 y \cdot Re\left\{A - \overline{B} + C - \overline{D}\right\} - x^3 \cdot Im\left\{A + \overline{B} + C + \overline{D}\right\} - y^2 x \\ \cdot Im\left\{A + \overline{B} + C + \overline{D}\right\} + x^2 \cdot Im\left\{C\overline{D} + \overline{B}C + \overline{B}A + \overline{D}A + AC + \overline{BD}\right\} + y^2 \\ \cdot Im\left\{C\overline{D} + \overline{B}C + \overline{B}A + \overline{D}A - AC - \overline{BD}\right\} + 2xy \cdot Re\left\{\overline{BD} - AC\right\} - x \\ \cdot Im\left\{\overline{B}C\overline{D} + A\overline{BD} + \overline{B}AC + \overline{D}AC\right\} + y \cdot Re\left\{AC\overline{D} + AC\overline{B} - \overline{BD}C - \overline{BD}A\right\} \\ + Im\left\{A\overline{B}C\overline{D}\right\} = 0 \end{aligned}$$

Z rovnice je zřejmé, že koeficienty u $y^3$ a $x^2y$ jsou shodné. Stejně tak jsou shodné koeficienty u $x^3$ a $y^2x$. Jeden z cílů byl dosažen.

Je pravdou, že v předchozí fázi se pomoc softwaru omezila pouze na vymezení problému a nikoli na jeho řešení, to se však později změnilo. Řešitel si vytkl za cíl dokázat hypotézu H1. Při tom využil přímo nebo nepřímo většinu hypotéz, které objevil.

***Věta V2 (hypotéza H1)***

Čtyřúhelník $F_1P_1F_2P_2$ určuje stejnou křivku $K$ jako původní čtyřúhelník $ABCD$. Navíc zachovává vztahy mezi ohnisky, tedy dvojice ohnisek $G_1G_2$ která náležela k tečné kuželosečce v případě čtyřúhelníku $ABCD$, náleží k tečné kuželosečce v případě čtyřúhelníku $F_1P_1F_2P_2$.

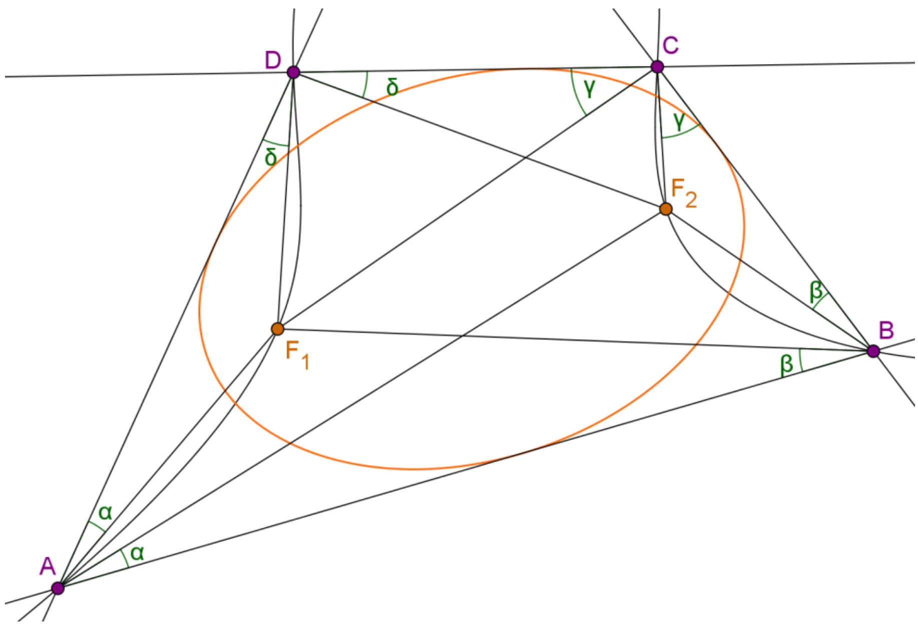
***Důkaz V2***

Nejdříve zvolíme vhodnou strategii. Dokážeme, že věta V2 je pravdivá v případě, že čtyřúhelník $ABCD$ nahradíme čtyřúhelníkem $BF_1DF_2$. Symbolicky zapsáno $K(ABCD) = K(BF_1DF_2)$. Pak budeme hotovi, protože analogický důkaz by ukázal, že platí $K(BF_1DF_2) = K(P_1F_1P_2F_2)$.

Než se pustíme do samotného důkazu, uvedeme jedno důležité lemma

*Lemma 1:* Jsou-li body $(F_1F_2)$ ohniska kuželosečky, která tečná ke čtyřúhelníku $ABCD$, pak jsou body $(BD)$ ohniska kuželosečky, která je tečná ke čtyřúhelníku $AF_1CF_2$. Zapsáno symbolicky

$$(F_1F_2) \in K(ABCD) \Leftrightarrow (BD) \in K(AF_1CF_2)$$




*Obrázek 84 K důkazu Lemmatu 1, využití Ponceletova teorému*

*Důkaz Lemmatu 1:* Z věty V1 plyne, že bod $D$ je ohniskem kuželosečky, která je tečná ke čtyřúhelníku $AF_1CF_2$, právě tehdy, když platí $\sphericalangle ADF_1 + \sphericalangle CDF_2 \equiv 0$. To je však důsledek Ponceletova teorému, který jsme uvedli v předchozí fázi (neboť přímky $AD$ a $CD$ jsou tečny ke kuželosečce s ohnisky $F_1F_2$). Stejný závěr odvodíme v případě bodu $B$. Zbývá dokázat, že body $(DB)$ patří ke stejné kuželosečce. K tomu je nutná – opět podle Ponceletova teorému – platnost vztahů $\sphericalangle F_1AD = \sphericalangle BAF_2$, $\sphericalangle F_1CD = \sphericalangle BCF_2$.

Tyto rovnosti však plynou z předpokladů a Ponceletova teorému, jenom s tím rozdílem, že neuvažujeme bod $D$ čtyřúhelníku, ale body $A$ a $C$. Důkaz lemmatu je kompletní.

Uvažujme tedy čtyřúhelník $BF_1DF_2$ a libovolnou dvojici ohnisek $G_1G_2$, takových, že $(G_1G_2) \in K(ABCD)$. Pokud dokážeme, že pak nutně je $(G_1G_2) \in K(BF_1DF_2)$, jsme hotovi. (Opačná implikace by se provedla stejným postupem, jaký využijeme v tomto případě.) Pak bude V2 dokázána.

Nejdříve uvedeme jedno pozorování: Z bodu $D$ jsou protější strany čtyřúhelníku $F_1G_1F_2G_2$ vidět pod stejným orientovaným úhlem. (I tento důkaz vychází z Ponceletova teorému.) To ale znamená, že bod $D$ je ohniskem kuželosečky, která je tečná ke čtyřúhelníku $F_1G_1F_2G_2$. K analogickému závěru dospějeme v případě bodu $B$. Zdá se, že bychom mohli důkaz dokončit následovně:

*Body $(BD)$ jsou ohniska kuželosečky, která je tečná ke čtyřúhelníku $F_1G_1F_2G_2$. Podle Lemmatu 1 jsou tedy body $(G_1G_2)$ ohniska kuželosečky, tečné ke čtyřúhelníku $BF_1DF_2$, a důkaz je hotov.*

Předchozí úvaha je správná, ale opomněla zdůvodnit jeden důležitý detail: Víme, že body $B$ a $D$ jsou ohniska kuželoseček, které jsou tečné ke čtyřúhelníku $F_1G_1F_2G_2$, ale nedokázali jsme, že náleží ke stejné kuželosečce. Dokud toto nezdůvodníme, nebude důkaz kompletní.

K důkazu tohoto faktu přistoupíme oklikou: Nejdříve zdůvodníme speciální případ hypotézy H4. Dokážeme, že platí

$$\frac{|F_1D|\cdot|F_2D|}{|F_1B|\cdot|F_2B|}=V_D,$$

kde $V_D$ je konstanta a $F_1, F_2$ je libovolná dvojice ohnisek $(F_1F_2)\in K$. (Podotkněme, že hypotéza H4 byla mnohem obecnější, týkala jakéhokoli bodu křivky $P_1 \neq D, B, A, C$.)

<u>*Lemma 2*</u> Pro libovolnou dvojici ohnisek $(F_1F_2)\in K(ABCD)$ platí

$$\frac{|F_1D|\cdot|F_2D|}{|F_1B|\cdot|F_2B|}=\frac{|AD|\cdot|CD|}{|AB|\cdot|CB|}=V_D$$

*Důkaz Lemmatu 2:* Úvahy se vztahují k obrázku 84. S pomocí sinové věty postupně upravíme levou stranu výše uvedené rovnice:

$$\frac{|F_1D|\cdot|F_2D|}{|F_1B|\cdot|F_2B|}=\frac{\dfrac{|F_1D|}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{|F_2D|}{\sin\sphericalangle DCF_2}}{\dfrac{|F_1B|}{\sin\sphericalangle F_1CB}\cdot\dfrac{|F_2B|}{\sin\alpha}}=\frac{\dfrac{|AD|}{\sin\sphericalangle AF_1D}\cdot\dfrac{|DC|}{\sin\sphericalangle DF_2C}}{\dfrac{|BC|}{\sin\sphericalangle BF_1C}\cdot\dfrac{|AB|}{\sin\sphericalangle BF_2A}}$$

Jelikož podle věty V1 je $\sin\sphericalangle AF_1D=\sin\sphericalangle BF_1C$, $\sin\sphericalangle DF_2C=\sin\sphericalangle BF_2A$, platí:

$$\frac{\dfrac{|AD|}{\sin\sphericalangle AF_1D}\cdot\dfrac{|DC|}{\sin\sphericalangle DF_2C}}{\dfrac{|BC|}{\sin\sphericalangle BF_1C}\cdot\dfrac{|AB|}{\sin\sphericalangle BF_2A}}=\frac{|AD|\cdot|CD|}{|AB|\cdot|CB|}=V_D$$

Tím je důkaz hotov.

Uvedený důkaz lze snadno zopakovat pro libovolný vrchol čtyřúhelníku.

Podle Lemmatu 1 jsou body $B, D$ ohniska kuželosečky, která je tečná k čtyřúhelníku $AF_1CF_2$, tedy $(BD)\in K(AF_1CF_2)$. Podle Lemmatu 2 platí:

$$\frac{|BF_1|\cdot|DF_1|}{|BF_2|\cdot|DF_2|}=\frac{|AF_1|\cdot|CF_1|}{|AF_2|\cdot|CF_2|}$$

Výše uvedenou rovnici přepíšeme do tvaru

$$\frac{|BF_1|\cdot|DF_1|}{|AF_1|\cdot|CF_1|}=\frac{|BF_2|\cdot|DF_2|}{|AF_2|\cdot|CF_2|}\qquad(4)$$

Zdůrazněme, že výše uvedený vztah platí pro libovolnou dvojici bodů $(F_1F_2)\in K(ABCD)$.

Nyní opět přejdeme ke komplexním číslům. V důsledku dokázaného vztahu (3) platí:

$$\pm\frac{|BF_1|\cdot|DF_1|}{|AF_1|\cdot|CF_1|}=\frac{(F_1-B)\cdot(F_1-D)}{(F_1-A)\cdot(F_1-C)},$$

jinými slovy, výraz na pravé straně je reálné číslo. Lze ukázat, že ať už je argument tohoto výrazu 180° (výraz je záporný) nebo 0 (výraz je kladný), druhé ohnisko $F_2$ má stejný argument. Tento fakt nebudeme dokazovat, ale plyne z něj důležitý důsledek. Jelikož jsou argumenty stejné pro obě ohniska, můžeme rovnici (4) napsat jako rovnost výrazů, složených z komplexních čísel. Pro libovolnou dvojici $(F_1F_2) \in K(ABCD)$ platí

$$\frac{(F_1-B)\cdot(F_1-D)}{(F_1-A)\cdot(F_1-C)} = \frac{(F_2-B)\cdot(F_2-D)}{(F_2-A)\cdot(F_2-C)} \tag{5}$$

*<u>Lemma 3</u>.* Uvažujme komplexní rovinu. Pokud ohnisko $F_1$ náleží $K(ABCD)$, pak existuje jediný bod v rovině $F_2 \neq F_1$, který splňuje rovnici (5), a ten je druhým ohniskem tečné kuželosečky, ke které náleží ohnisko $F_1$.

*Důkaz.* Uvažujme rovnici

$$\frac{(F_1-B)\cdot(F_1-D)}{(F_1-A)\cdot(F_1-C)} = \frac{(X-B)\cdot(X-D)}{(X-A)\cdot(X-C)}$$

kde $X$ je komplexní neznámá, všechny ostatní hodnoty jsou dány. Je zřejmé, že se jedná o kvadratickou rovnici s komplexními koeficienty. Ze vztahu (5) plyne, že jeden kořen je $X = F_2$, kde $F_2$ je druhé ohnisko kuželosečky. Dále je zřejmé, že kořen $X = F_1$ také vyhovuje. Žádné jiné řešení tato rovnice nemůže mít. Tím je důkaz hotov.

Nyní se vraťme k důkazu V2. Již víme, že $B \in K(F_1G_1F_2G_2)$ a $D \in K(F_1G_1F_2G_2)$. Chceme dokázat, že tyto body náleží ke stejné kuželosečce. Podle Lemmatu 3 je tomu tak tehdy, a pouze tehdy, pokud platí:

$$\frac{(B-F_1)\cdot(B-F_2)}{(B-G_1)\cdot(B-G_2)} = \frac{(D-F_1)\cdot(D-F_2)}{(D-G_1)\cdot(D-G_2)} \tag{6}$$

Jelikož $(BD) \in K(AF_1CF_2)$ a $(BD) \in K(AG_1CG_2)$, podle (5) platí:

$$\frac{(B-F_1)\cdot(B-F_2)}{(B-A)\cdot(B-C)} = \frac{(D-F_1)\cdot(D-F_2)}{(D-A)\cdot(D-C)}$$

$$\frac{(B-A)\cdot(B-C)}{(B-G_1)\cdot(B-G_2)} = \frac{(D-A)\cdot(D-C)}{(D-G_1)\cdot(D-G_2)}$$

Vynásobením levých a pravých stran dvou výše uvedených rovnosti dostaneme vztah (6). Dokázali jsme tedy, že platí $(BD) \in K(G_1F_1G_2F_2)$. Podle věty V1 pak platí $(G_1G_2) \in K(BF_1DF_2)$ a důkaz věty V2 (hypotézy H1) je hotov.

Zdůvodnění dalších hypotéz již není tak obtížné.

### *<u>Důkaz hypotézy H2</u>*

Uvažujme páry ohnisek $(F_1F_2) \in K(ABCD)$ a $(P_1P_2) \in K(ABCD)$. Pak, podle V2 je $(F_1F_2) \in K(AP_1CP_2)$ a tedy, podle Ponceletova teorému, je osa úhlu $F_1P_1F_2$ stejná, jako osa úhlu $AP_1C$, která však na volbě ohnisek $(F_1F_2)$ nezávisí. Tato osa je tedy společná všem dvojicím $(F_1F_2)$.

### *Důkaz hypotézy H3*

V souladu s označením, zavedeným výše, ohniska tečné paraboly jsou $M_{\mathrm{i}}$ (Miquelův bod čtyřúhelníku) a nevlastní ohnisko $M_\infty$. Podle V2 platí pro libovolnou dvojici $(F_1F_2) \in K(AB\mathrm{C}D)$ a $(P_1P_2) \in K(AB\mathrm{C}D)$, že $(Mi, M_\infty) \in K(F_1P_1F_2P_2)$, podle (5) platí:

$$\frac{(Mi - F_1) \cdot (Mi - F_2)}{(Mi - P_1) \cdot (Mi - P_2)} = \frac{(M_\infty - F_1) \cdot (M_\infty - F_2)}{(M_\infty - P_1) \cdot (M_\infty - P_2)}.$$

Na základě limitních úvah je však zřejmé, že pravá strana této rovnice je rovna jedné, proto

$$(Mi - F_1) \cdot (Mi - F_2) = (Mi - P_1) \cdot (Mi - P_2),$$

což je dokonce silnější tvrzení, než jsme chtěli dokázat (pokud jsou si dvě komplexní čísla rovna, jsou si rovny jak jejich absolutní hodnoty – toho se týkala H3 – tak argumenty).

### *Důkaz hypotézy H4*

Chceme dokázat pro dané $(P_1P_2) \in K(ABCD)$ a libovolně zvolené $(F_1F_2) \in K(ABCD)$, že výraz

$$\frac{|F_1P_1| \cdot |F_2P_1|}{|F_1P_2| \cdot |F_2P_2|} = V_{P_1}$$

je konstantou.

V rámci lemmatu 2 jsme dokázali, že pokud $(F_1F_2) \in K(ABCD)$, pak

$$\frac{|F_1D| \cdot |F_2D|}{|F_1B| \cdot |F_2B|} = \frac{|AD| \cdot |CD|}{|AB| \cdot |CB|} = V_D.$$

V důsledku V2 je však $(F_1F_2) \in K(AP_1CP_2)$, proto

$$\frac{|F_1P_1| \cdot |F_2P_1|}{|F_1P_2| \cdot |F_2P_2|} = \frac{|AP_1| \cdot |CP_1|}{|AP_2| \cdot |CP_2|} = V_{P_1},$$

a konstanta $V_{P_1}$ nezávisí na volbě dvojice $(F_1F_2)$. Tím je důkaz hotov.

### *Důkaz hypotézy H5*

V rámci H2 jsme dokázali, že osa libovolného úhlu $F_1P_1F_2$ nezávisí na volbě ohnisek $(F_1F_2) \in K(ABCD)$. Na základě limitních úvah se můžeme ptát, jak vypadá osa „úhlu“ $F_1M_\infty F_2$. Je možné říci:

- Tato osa je podle H2 pevná, společná všem ohniskům $(F_1F_2)$
- Jelikož bod $M_\infty$ je nevlastním bodem – bodem který je nekonečně daleko – musí tato osa procházet středem $S$ úsečky $F_1F_2$.
- Jelikož bod $M_\infty$ je nevlastním bodem osy paraboly, musí být osa „úhlu“ $F_1M_\infty F_2$ rovnoběžná s osou paraboly.

Tato přímka středů kuželoseček je známa, jedná se o tzv. Gaussovu přímku (někdy také Newton-Gaussovu). Standardní syntetické zdůvodnění, proč se jedná o přímku, je založeno na prostředcích projektivní geometrie. Zdůvodnění zde prezentované není rigorózní (používat pojem limity ve výše uvedené souvislosti je problematické), ale mohlo by představovat nový pohled na tuto problematiku.

Jednu vlastnost, která se týká tečen ke křivce $K$ v daném bodě, jsme zde neuvedli. Čtenář, kterého by zajímala, může nahlédnout do článku (Blažek, Pech, 2019).

### Závěr ke 2. problému

Čtyři z pěti hypotéz, které řešitel nakonec dokázal, byly objeveny na základě úvahy (heuristické ve třech případech a v jednom případě konstruktivní). Zdálo by se tedy, že software sloužil hlavně k verifikaci hypotéz a k rychlejšímu rozhodování, co je správné a co má smysl dokazovat. Tento pohled by byl však zavádějící. Jako první totiž řešitel provedl experiment $E$. Jeho bezprostředním výstupem nebyla žádná hypotéza, ale stal se podkladem, který částečně přispěl k formulaci H1. Po jejím potvrzení už software fungoval hlavně jako skříňka, která na všechny uzavřené otázky odpovídala ano – ne. Je to opět ukázka toho, že ne vždy k objevu domněnky vede pouze nějaká úvaha nebo pouze vizuální vnímání.

Tento příklad byl ilustrací také toho, že objev relevantních hypotéz je pouze jednou částí. Jejich důkaz může být ještě hodně složitý.