UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Teorie grafů v matematice na 1. stupni základní školy

Alžběta Kolaříková

Olomouc 2024 doc. PhDr. Radka Dofková, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem celou práci včetně příloh vypracovala samostatně za použití pouze zdrojů citovaných v textu práce a uvedených v seznamu literatury.

V Olomouci dne 17. dubna 2024 Alžběta Kolaříková

Poděkování

Děkuji vedoucí mé diplomové práce doc. PhDr. Radce Dofkové, Ph.D. za odborné vedení, za její připomínky a cenné rady.

Anotace

Jméno a příjmení:	Alžběta Kolaříková
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	doc. PhDr. Radka Dofková, Ph.D.
Rok obhajoby:	2024

Název práce:	Teorie grafů v matematice na 1. stupni základní školy
Název v angličtině:	Graph theory in primary school mathematics
Zvolený typ práce:	Výzkumná práce – zpracování primárních dat
Anotace práce:	Diplomová práce se zabývá integrací teorie grafů do výuky matematiky na 1. stupni ZŠ. V teoretické části vymezujeme některé základní pojmy z teorie grafů, stručnou historii a některé vybrané známé problémy. Dále analyzujeme, jaké úlohy z teorie grafů se objevují ve vybraných pracovních sešitech matematiky pro 1. stupeň ZŠ a uvádíme, jaké postavení má teorie grafů v současném kurikulu. Praktická část popisuje výzkum, který jsme provedli ve všech ročnících 1. stupně ZŠ a analyzuje strategie a úspěšnost žáků při řešení úloh z teorie grafů. V příloze přikládáme didaktické testy, které vznikly v rámci výzkumu a další úlohy využitelné ve výuce.
Klíčová slova:	teorie grafů, jednotažka, skóre grafu, bludiště, Hejného matematika, rozšířená výuka matematiky
Anotace v angličtině:	Master's thesis focuses on the integration of graph theory into the teaching of mathematics at primary school. In the theoretical part we define some basic concepts from graph theory, a brief history and some selected well-known problems. We also analyse which problems from graph theory appear in selected mathematics workbooks for primary school and describe the position of graph theory in the current curriculum. The practical part describes the research we conducted in all grades of primary school and analyses student's strategies and success in solving graph theory problems. In the appendix we attach didactic tests that were developed in the framework of the research and other tasks that can be used in teaching.
Klíčová slova v angličtině:	graph theory, single-stroke task, degree sequence, maze, Hejný's mathematics, extended mathematics education
Přílohy vázané v práci:	Příloha 1: Didaktické testy Příloha 2: Ukázka dalších úloh z teorie grafů
Rozsah práce:	82 stran
Jazyk práce:	čeština

Obsah

Úvod **1**

Teoretická část **2**

1 Teorie grafů **3**

1.1 Vymezení základních pojmů 3

1.1.1 Graf 3

1.1.2 Některé jednoduché grafy 4

1.1.3 Vzdálenost v grafu 6

1.1.4 Orientovaný a neorientovaný graf 7

1.1.5 Ohodnocený graf 10

1.1.6 Teorie stromů 12

1.2 Historie teorie grafů 13

1.3 Vybrané známé problémy 15

1.3.1 Sedm mostů města Královce 15

1.3.2 Minimální cesta v grafu 16

1.3.3 Minimální kostra grafu 17

1.3.4 Problém obchodního cestujícího 19

1.3.5 Problém čtyř barev 20

1.3.6 „Handshaking problem“ 22

1.3.7 Toky v sítích 23

1.4 Některé aplikace teorie grafů 24

2 Teorie grafů ve výuce matematiky **27**

2.1 Teorie grafů v kurikulu 27

2.2 Úlohy ve vybraných pracovních sešitech matematiky 27

2.2.1 Cyklické grafy 28

2.2.2 Stromy 30
2.2.3 Hadi 34
2.2.4 Spojování údajů 36
2.2.5 Hledání cesty 37
2.2.6 Délka trasy 39
2.2.7 Bludiště 42
2.2.8 Využití teorie grafů při řešení slovních úloh 44
2.2.9 Další zajímavé úlohy 45
2.3 Výhody integrace teorie grafů do výuky matematiky 46

Praktická část **48**

3 Charakteristika výzkumu **49**
3.1 Cíle výzkumu 49
3.2 Výzkumné otázky 49
3.3 Výzkumný vzorek 49

4 Fáze výzkumu a výzkumné nástroje **51**
4.1 Předvýzkum: Interview s učiteli 51
4.2 Didaktické testy 52
4.2.1 Úloha 1: Jednotažky 52
4.2.2 Úloha 2: Délka trasy 53
4.2.3 Úloha 3: Skóre grafu 53
4.2.4 Úloha 4: Orientace v mapě 54
4.2.5 Úloha 5: Sčítací grafy 55
4.2.6 Úloha 6: Bludiště 56
4.3 Reflexe žáků 57

5 Prezentace výsledků výzkumného šetření **58**
5.1 Vyhodnocení interview s učiteli 58
5.2 Vyhodnocení didaktických testů 59
5.2.1 Úloha 1: Jednotažky 59
5.2.2 Úloha 2: Délka trasy 61
5.2.3 Úloha 3: Skóre grafu 63

5.2.4 Úloha 4: Orientace v mapě 65
5.2.5 Úloha 5: Sčítací grafy 66
5.2.6 Úloha 6: Bludiště 67
5.3 Vyhodnocení reflexe žáků 69
5.4 Shrnutí 69

6 Diskuze **73**

Závěr **74**

Literatura **76**

Pracovní sešity pro výuku matematiky 80

Úvod

Teorie grafů má mnoho aplikací v široké škále oborů, například v informatice, ekonomice, genetice, sociologii a jiných. Přesto je jí věnována malá pozornost v kurikulu našeho vzdělávacího systému. Vzdělávání v oblasti matematiky na základních školách hraje klíčovou roli ve formování matematického myšlení a rozvoji analytických dovedností u dětí již od útlého věku. Věříme, že teorie grafů je užitečná pro orientaci v mnoha situacích reálného života a může žáky naučit modelování reálných situací i abstraktních problémů. Tento obor diskrétní matematiky nabízí mnoho konceptů, které lze dobře integrovat do výuky na různých úrovních. Poskytuje jedinečný rámec pro vizualizaci a analýzu vztahů mezi prvky, což může pomoci dětem lépe porozumět abstraktním matematickým konceptům a rozvíjet jejich matematické myšlení.

Diplomová práce si klade za cíl analyzovat, jaké úlohy z teorie grafů můžeme efektivně začlenit do výuky matematiky na 1. stupni ZŠ a jaká je současná situace teorie grafů v matematice. Cílem integrace teorie grafů do výuky matematiky je poskytnout žákům základy z oblasti teorie grafů, podnítit jejich zájem o matematiku a rozvíjet jejich kritické a analytické myšlení prostřednictvím praktických a zábavných aktivit.

V teoretické části práce vymezíme některé základní pojmy, stručně popíšeme historii této mladé disciplíny a uvedeme vybrané známé problémy a možné aplikace teorie grafů. Zaměříme se především na pojmy a problémy, které využijeme při analýze vybraných pracovních sešitů matematiky pro 1. stupeň ZŠ a v praktické části. Teoretickou část práce zakončíme popisem pozice teorie grafů v našem kurikulu.

V rámci praktické části jsme analyzovali strategie a úspěšnost žáků při řešení úloh z teorie grafů. Pro tyto účely jsme vytvořili didaktické testy pro všechny ročníky na 1. stupni ZŠ. Tyto testy jsme reflektovali s učiteli a dále jsme zjišťovali, jak často zařazují teorii grafů do výuky matematiky. Po vypracování didaktického testu žáky jsme porovnávali úspěšnost jejich řešitelských strategií a provedli jsme analýzu jejich chyb. Ve výzkumném vzorku byli zastoupeni žáci běžných tříd a zároveň žáci ze tříd s rozšířenou výukou matematiky, proto jsme srovnávali i úspěšnost těchto dvou skupin.

V přílohách uvádíme kromě vytvořeného didaktického testu i další úlohy z teorie grafů, které je možné využít ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ.

Teoretická část

1 Teorie grafů

Pod pojmem graf si lidé často představí nástroj pro znázornění údajů, případně graf funkce. My se ale budeme zabývat diskrétními strukturami, které jsou tvořené vrcholy a hranami, které tyto vrcholy spojují. Využitím grafů můžeme řešit problémy z téměř všech představitelných disciplín. (Rosen 2019, s. 673)

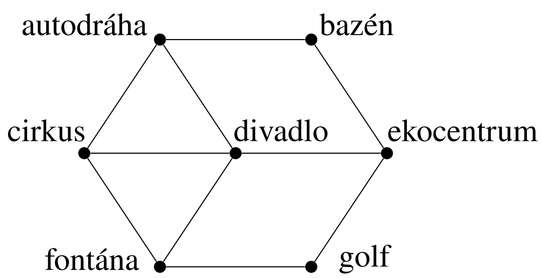
1.1 Vymezení základních pojmů

1.1.1 Graf

*„**Graf** G je uspořádaná dvojice (V, E), kde V je neprázdná množina **vrcholů** (někdy také **uzlů**) a E je množina **hran**. Každá hrana je spojena se dvěma vrcholy.“* (Cioabă 2022, s. 1)

Do definice se někdy přidává, že množina vrcholů V je *konečná* (například Demel 2002, s. 11; Gross a kol. 2023, s. 2; Yadav 2023, s. 2). Je to z toho důvodu, že množina vrcholů může být i nekonečná. Takový graf, který má nekonečnou množinu vrcholů nebo nekonečný počet hran nazýváme **nekonečný graf**, a naopak graf s končeným počtem vrcholů a hran je **konečný graf**. (Rosen 2019, s. 673) V této práci se budeme věnovat výhradně konečným grafům.

Představme si zábavní park, na jehož plánku jsou vyznačené atrakce a cesty spojující tyto atrakce. Atrakce můžeme znázornit body a cesty čarou jako na Obrázku 1. Když kreslíme graf, snažíme se, aby se hrany nekřížily, ale není to nezbytně nutné. Grafy, které je možné tímto způsobem nakreslit nazýváme **rovinné** (nebo také **planární**).



Obrázek 1: Plánek zábavního parku

Jak uvádí Hliněný (2008, s. 2) často se můžeme setkat s grafy zadanými formou obrázků, avšak můžeme je definovat i výčtem vrcholů a hran. Například:

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g\},$$
$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, g\}, \{f, g\}\}.$$

Další možností, jak definovat graf je formou matice. Podle Jirovského (2008, s. 26) jsou matice matematické schéma, které se používá především v algebře. My se zde zápisem grafů pomocí matic zabývat nebudeme. Na Obrázku 2 je definován graf parku pomocí matice.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obrázek 2: Graf definovaný maticí

Pokud jsou vrcholy u a v spojené hranou e, označujeme je jako **koncové vrcholy** dané hrany. Můžeme také říct, že vrchol u (nebo vrchol v) je **incidentní** s hranou e a stejně tak hrana e je incidentní s vrcholem u (vrcholem v). Vrcholy u a v jsou **sousední** (nebo **závislé**). Na Obrázku 1 jsou sousedními vrcholy například „autodráha“ a „bazén“, stejně tak je vrchol „autodráha“ sousedním vrcholem „cirkusu“.

Poznamenejme, že každá cesta na plánku spojuje dvě rozdílné atrakce. Tedy každá hrana spojuje dva rozdílné vrcholy a žádné dvě hrany nespojují stejnou dvojici vrcholů. Takovýto graf se nazývá **jednoduchý**.

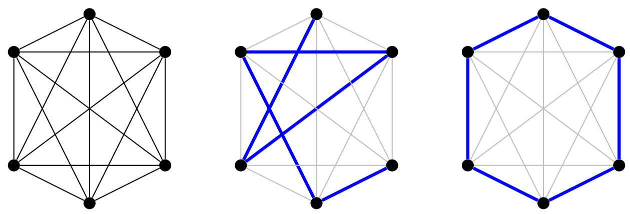
1.1.2 Některé jednoduché grafy

Nyní představíme některé jednoduché grafy, které dále v textu používáme. Tyto grafy se také často využívají v praxi.

- V **úplném grafu** (nebo také **kompletním grafu**) jsou každé dva vrcholy spojené hranou (vlevo na Obrázku 3).

- Jednoduchý graf, kde je alespoň jeden pár rozdílných vrcholů, které nejsou spojené, se nazývá **neúplný**. (Rosen 2019, s. 688)

- **Sled** je posloupnost vrcholů a hran, které tyto vrcholy spojují. **Délka sledu** je počet hran ve sledu.
- Pokud je délka sledu 0 pouze s jedním vrcholem a žádnou hranou, nazýváme jej **triviální sled**.
- **Uzavřený sled** je sled, který začíná a končí ve stejném vrcholu.
- **Otevřený sled** začíná a končí v rozdílných vrcholech. (Gross 2023, s. 12)
- **Tah** je sled, který může obsahovat každou hranu nejvýše jednou.
- **Cesta** je sled, ve kterém se vzájemně liší každé dva vrcholy (uprostřed na Obrázku 3).
- **Kružnice** (nebo také **cyklus**) je uzavřený sled, kde se liší každé dva, kromě prvního a posledního, které jsou totožné. Kružnice musí mít alespoň 3 vrcholy, z toho vyplývá, že nejmenší kružnice je úplný graf se třemi vrcholy. Graf, který obsahuje kružnici se nazývá **cyklický** (vpravo na Obrázku 3). (Kovář 2022, s. 47–49)
- **Eulerovský tah** v grafu G je tah obsahující všechny hrany grafu G právě jednou. **Eulerovská kružnice** v grafu G je kružnice obsahující každou hranu e grafu G. (Gross 2023, s. 18)
- V případě, že máme takový sled, kdy je každý vrchol v v grafu G navštívený právě jednou, pak takovou cestu nazýváme **hamiltonovská cesta**. Termín **hamiltonovská kružnice** označuje hamiltonovskou cestu, která tvoří kružnici. (Barnett 2009, s. 3)



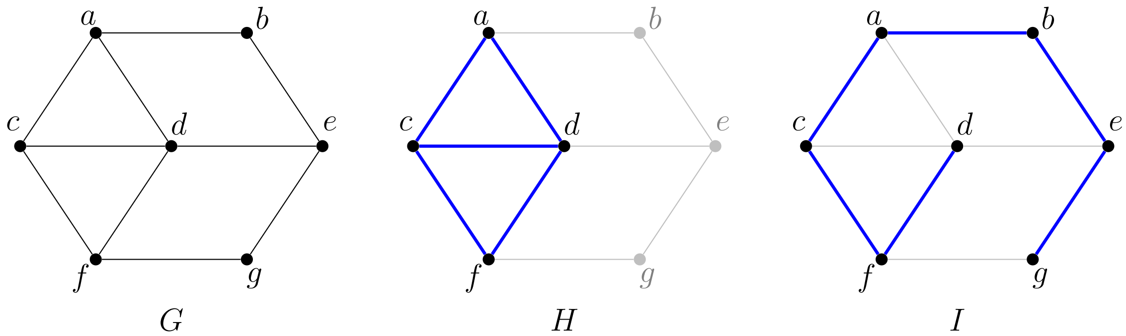
Obrázek 3: Úplný graf, cesta, kružnice

Uvedené jednoduché grafy můžeme nahlížet také jako podgrafy.

*„Mějme graf $G = (V, E)$, potom **podgraf** $H = (W, F)$ je graf získaný odebráním některých vrcholů a některých hran z G. Podgraf H nazýváme **indukovaný**, právě když vznikl z G tak, že jsme odebrali pouze vrcholy a incidentní hrany s těmito vrcholy. Z této definice vyplývá, že*

graf G je sám sobě indukovaným podgrafem." (Cioabă 2022, s. 8) Na Obrázku 4 je graf H indukovaným podgrafem grafu G.

Vzhledem k předchozí definici graf G označujeme jako **nadgraf** (nebo **supergraf**) grafu H. Říkáme, že podgraf je **obsažen** ve svém původním grafu, a naopak graf **obsahuje** všechny své podgrafy. Podgraf, který je se svým nadgrafem totožný, nazýváme **nevlastní**. Pokud se v podgrafu nevyskytuje alespoň jedna hrana nebo vrchol původního grafu, pak podgraf označujeme jako **vlastní**. Podgraf, který má všechny vrcholy původního grafu se nazývá **faktor** (nebo také **hranový podgraf**). Na Obrázku 4 je graf I faktorem grafu G. **Klika** je podgraf, který je tvořen úplným grafem. (Kovář 2022, s. 36; 43)



Obrázek 4: Graf G a jeho podgrafy H a I

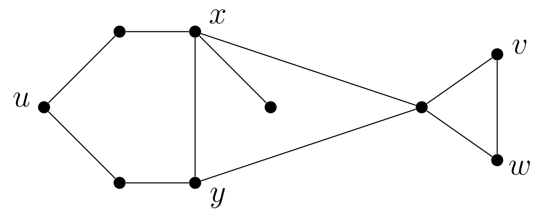
1.1.3 Vzdálenost v grafu

Vzdálenost $d(u, v)$ z vrcholu u do vrcholu v v grafu G je délka nejkratšího sledu z u do v v případě, že existuje. Pokud sled neexistuje, pak $d(u, v) = \infty$. Nejkratší sled je vždy cestou, proto můžeme v uvedené definici tato dvě slova zaměnit a význam zůstane stejný. Když řešíme praktické problémy, často se zaměřujeme na extrémní vzdálenosti v grafu.

- **Výstřednost** (nebo také **excentricita**) vrcholu v je vzdálenost z vrcholu v do vrcholu, který je od něj nejdál. Výstřednost značíme $ecc(v)$. Grafy s vysokou výstředností mají „prořídlé hrany".

- **Průměr** grafu G je největší výstřednost vrcholu v G nebo maximální vzdálenost mezi dvěma vrcholy v G. Průměr značíme $diam(G)$. Vrcholy s velkou výstředností bývají umístěny po stranách grafu.

- **Poloměr** grafu G je nejmenší výstřednost. Poloměr značíme $rad(G)$. Vrcholy s malou výstředností jsou většinou umístěny ve středních částech grafu.



Obrázek 5: Graf G, kde $diam(G) = 4$ a $rad(G) = 2$ (Gross 2023, s. 282)

- **Centrální vrchol** v je vrchol s minimální výstředností.
- **Centrum** grafu G je podgraf indukovaný na množině centrálních vrcholů grafu G. V kružnici mají všechny vrcholy stejnou výstřednost, což znamená, že kružnice je totožná se svým centrem.
- **Periferie** grafu G je „opak“ centra, tedy podgraf indukovaný na množině vrcholů s maximální výstředností. (Gross 2023, s. 282–283)

Graf G na Obrázku 5 má průměr $diam(G) = 4$. Vrcholy s největší výstředností jsou u, v, w, protože $d(u, v) = d(u, w) = 4$. Poloměr $rad(G) = 2$, neboť centrální vrcholy grafu G jsou x, y a platí, $ecc(x) = 2$ a $ecc(y) = 2$. Vrcholy x, y tvoří centrum grafu G. Naopak periferie grafu G je tvořena vrcholy u, v, w.

1.1.4 Orientovaný a neorientovaný graf

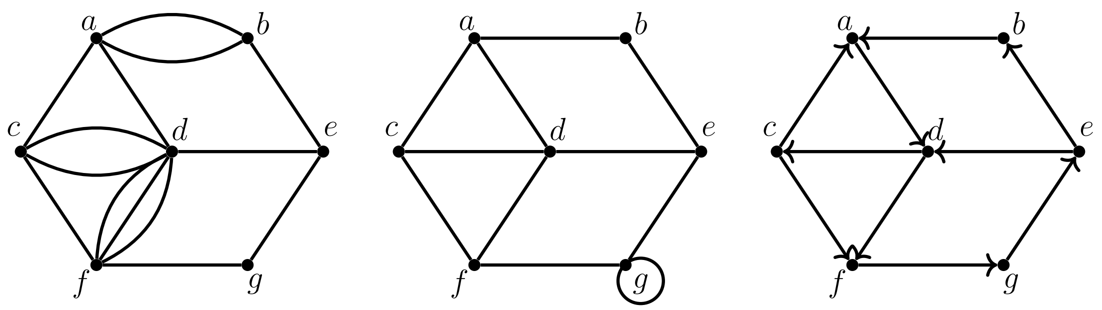
U grafů, které jsme si zatím představili nezáleželo na orientaci jejich hran, takovým grafům říkáme **neorientované grafy**. Hranu mezi vrcholy u a v v neorientovaném grafu můžeme reprezentovat dvouprvkovou množinou $\{u, v\}$. (Bělohlávek 2020, s. 81) Někdy je zapotřebí, určit směr hran. Například, když v zábavním parku jezdí autobus pouze jedním směrem. Takový plánek zakreslíme prostřednictvím **orientovaného grafu**, kde hrany jsou zakončeny šipkou určující směr hrany. (Rosen 2019, s. 675)

*„Orientovaný graf (nebo **digraf**)* (V, E) *je tvořen neprázdnou množinou vrcholů* V *a množinou **orientovaných hran*** E*. Každá orientovaná hrana spojuje uspořádanou dvojici vrcholů* (u, v)*.“* (Rosen 2019, s. 675) Orientované hrany někdy stručně nazýváme **šípy**. Říkáme, že orientovaná hrana **vychází** z vrcholu u a tento vrchol nazýváme **výchozí** nebo **počáteční** a vrchol v, kde hrana **končí** nazýváme **koncový**. **Orientovaná smyčka** je orientovaná hrana, která má stejný výchozí i koncový vrchol. Hrany (u, v) a (v, u) označujeme jako **opačně orientované**. (Kovář 2022, s. 156)

Nechť (u, v) je hrana v orientovaném grafu, pak vrchol u je **počáteční** vrchol této hrany a vrchol v je **koncový** vrchol. V případě smyčky je počáteční vrchol totožný s koncovým.

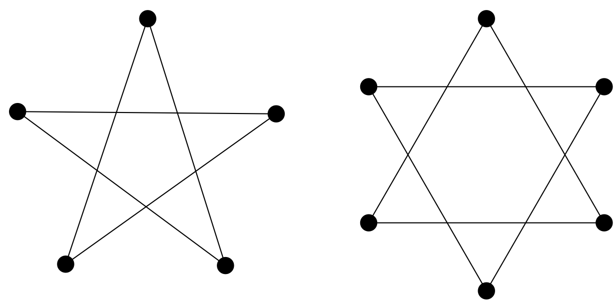
Je možné, že mezi dvěma atrakcemi povede více rozdílných cest. V takovém plánku využijeme **násobné hrany,** což jsou hrany, které spojují stejný pár vrcholů. Graf, který obsahuje násobné hrany nazýváme **multigraf** (vlevo na Obrázku 6).

Na místě atrakce můžeme narazit na okruh, který začíná i končí na stejném místě a nejde na něm odbočit z cesty. Pro zakreslení takovéto trasy jsme využili **smyčku**. Na Obrázku 6 je v prostředním grafu smyčka incidentní s vrcholem g. Graf, který obsahuje smyčky (a může obsahovat i násobné hrany), označíme jako **pseudograf**. (Rosen 2019, s. 673–675)



Obrázek 6: Multigraf, pseudograf, orientovaný graf

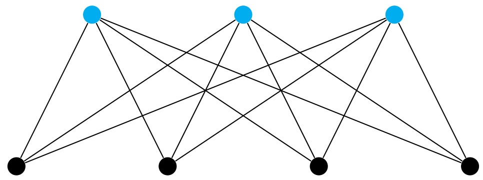
Neorientovaný graf se nazývá **souvislý**, právě když existuje cesta mezi každými dvěma různými vrcholy v grafu. **Komponenty souvislosti** jsou souvislé podgrafy nesouvislého grafu. (Rosen 2019, s. 717) Na Obrázku 7 je vlevo zobrazen souvislý graf a vpravo nesouvislý. Komponentami zobrazeného nesouvislého grafu jsou dva podgrafy se třemi vrcholy ve tvaru trojúhelníků.



Obrázek 7: Souvislý a nesouvislý graf

*„**Bipartitní graf** (někdy také **sudý graf**) G je neorientovaný graf, jehož množina vrcholů V může být rozdělena do dvou disjunktních podmnožin T a U takových, že každá hrana z G má*

jeden koncový vrchol v T a jeden koncový vrchol v U.“ (Gross a kol. 2023, s. 7) V bipartitním grafu neexistuje kružnice, která by měla lichý počet hran. (Zelinka 1977, s. 39) Stejně tak nemůže tento typ grafu obsahovat smyčky.

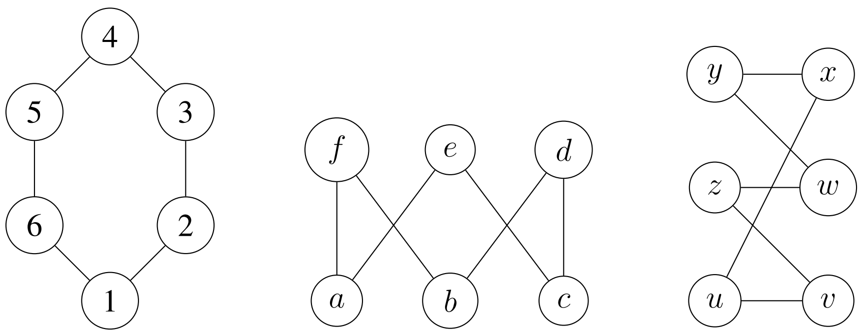


Obrázek 8: Úplný bipartitní graf $K_{3,4}$

Úplný bipartitní graf je jednoduchý bipartitní graf, kde každý vrchol z množiny T je spojený hranou ke každému vrcholu z množiny U. Každý úplný bipartitní graf, který má m vrcholů v podmnožině T a n vrcholů v podmnožině U, značíme $K_{m,n}$ (Obrázek 8).

Někdy je dobré poznat, zda je možné dva grafy nakreslit stejným způsobem. To znamená, že musíme zjistit, zda mají grafy stejnou strukturu, přestože jejich vrcholy mají jiná jména a na obrázku jsou rozmístěny různým způsobem. Například v chemii se grafy používají pro modely chemických sloučenin. Rozdílné sloučeniny mohou mít stejný molekulární vzorec, ale mohou se lišit ve struktuře. Takové sloučeniny můžeme modelovat pomocí grafů, které nelze zakreslit stejným způsobem. Grafy reprezentující dříve známé sloučeniny mohou být použity k určení, zda byla daná (údajně nová) sloučenina zkoumána už dříve.

„Jednoduché grafy $G = (V, E)$ a $H = (W, F)$ jsou ***izomorfní****, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení f z V do W takové, že každé dva vrcholy u a v jsou sousední v G právě tehdy, když $f(u)$ a $f(v)$ jsou sousední v H.“* (Rosen 2019, s. 706) Na Obrázku 9 můžeme vidět ukázku tří grafů, které jsou vzájemně izomorfní.

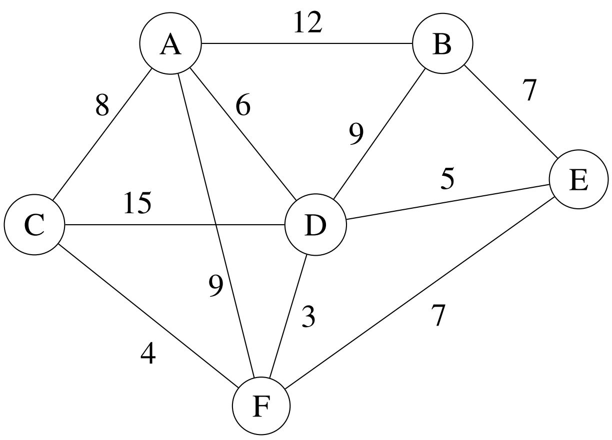


Obrázek 9: Izomorfní neorientované grafy (Bělohlávek 2020, s. 84)

1.1.5 Ohodnocený graf

Ohodnocený graf je jednoduchý graf, ve kterém má každá hrana přidělenou hodnotu (typicky kladné číslo). Této hodnotě říkáme **ohodnocení** hrany. (Yadav 2023, s. 47) Ohodnocený graf může znázorňovat délku cesty mezi dvěma městy, ale také časovou náročnost trasy, cenu za stavbu silnice, kapacitu spojení atp. Na Obrázku 10 můžeme vidět ukázku ohodnoceného grafu.

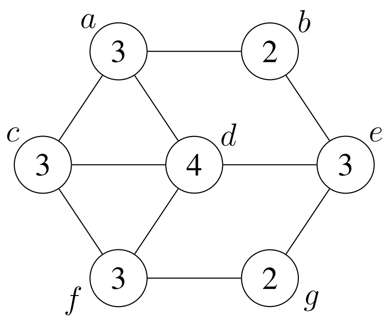
Když mluvíme o ohodnocených grafech, máme na mysli grafy s ohodnocenými hranami. Ale můžeme se setkat i s tzv. **vrcholově ohodnocenými grafy**, kde každý vrchol má přidělenou hodnotu. Knisley a Knisley (2014) uvádí, že v bioinformatice a matematické biologii se hojně využívají grafové modely biomolekulárních struktur jako jsou struktury bílkovin, které potřebují využívat i ohodnocení vrcholů.



Obrázek 10: Ohodnocený graf

Stupeň vrcholu v je počet hran, které jsou incidentní s daným vrcholem v. Značíme jej $deg(v)$. Vrchol může mít **sudý** nebo **lichý** stupeň, podle toho, zda je počet hran sudý nebo lichý. V grafu na Obrázku 11 platí $deg(a) = 3$, tedy stupeň vrcholu a je 3, tento vrchol má lichý stupeň. Naopak sudý stupeň má například vrchol g, protože platí, že $deg(g) = 2$. (Cioabă 2022, s. 3) Jednoduchý graf se dvěma a více vrcholy musí přirozeně mít alespoň jeden pár vrcholů, jejichž stupně jsou si rovny. (Gross 2023, s. 4) **Izolovaný vrchol** je vrchol, jehož stupeň je roven nule. (Sengoku 2023, s. 7)

Když zapíšeme všechny stupně vrcholů do posloupnosti $(deg(v_1), deg(v_2), ..., deg(v_n))$, vznikne **skóre grafu**. (Kovář 2022, s. 40) Dvě skóre grafu jsou stejná, pokud jedno můžeme pomocí permutací změnit na druhé. Stejné skóre grafu je jednou z podmínek pro izomorfismus, naopak to ovšem neplatí. To znamená, že pokud mají dva grafy stejné skóre grafu, nemusí být nutně izomorfní. (Yadav 2023, s. 23) Pro skóre grafu platí Eulerova věta o součtu stupňů vrcholu, která říká, že součet všech stupňů vrcholu je roven dvojnásobku počtu hran. Z toho vyplývá, že pokud je v grafu vrchol s lichým stupněm, pak takových vrcholů musí být sudý počet. (Gross 2023, s. 4)

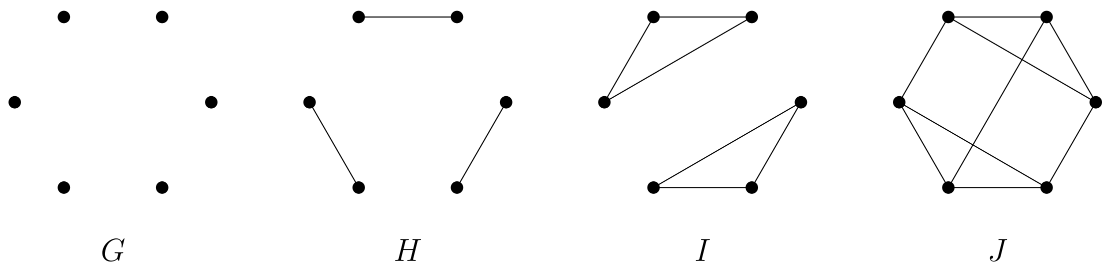


$(3, 2, 3, 4, 3, 3, 2)$

Obrázek 11: Stupně vrcholů a skóre grafu

Skóre grafu se využívá při analýze grafu, jelikož pomáhá identifikovat strukturu sítě. Vyšší stupně vrcholů mohou indikovat významnější vrcholy v síti, naopak nízké stupně nás mohou informovat o chybějících spojeních nebo slabinách grafu. Velké rozdíly mezi jednotlivými stupni mohou znamenat nerovnoměrné zatížení sítě. Konkrétně při plánování dopravních sítí může skóre grafu pomoci identifikovat důležité dopravní trasy a znalost skóre grafu dopravní sítě může vést k lepší optimalizaci spojení.

Pro **regulární graf** G platí, že všechny vrcholy mají stejný stupeň. Graf, jehož každý vrchol má stupeň k se nazývá k-regulární. Skóre regulárního grafu je $(k, k, k, ..., k)$. Každý úplný graf s počtem vrcholů n je $(n-1)$-regulární. (Gross 2023, s. 5) Na Obrázku 12 jsou zobrazeny čtyři reguální grafy. Graf G je 0-regulární, graf H je 1-regulární, graf I je 2-regulární a graf J je 3-regulární.



Obrázek 12: Regulární grafy

1.1.6 Teorie stromů

Souvislé neorientované grafy, které neobsahují kružnice se nazývají **stromy**. Stromy se běžně používají v informatice a jsou využitelné v široké řadě algoritmů. Můžeme je použít například pro model postupu ve hrách, kde pomáhají vybrat výherní strategie. Známým využitím stromů jsou rodokmeny, které zobrazují genealogické schéma.

Ve stromu lze najít jedinečnou cestu mezi každými dvěma jeho vrcholy. V případě, že graf neobsahuje kružnice, ale zároveň je nesouvislý, nazývá se **les**. Každá jednotlivá komponenta souvislosti lesu je strom. (Rosen 2019, s. 781–784) Grafy na Obrázku 13 dohromady tvoří les.

Kořenový strom je strom, kde je jeden vrchol označen jako **kořen**. Kořen může být libovolný vrchol, ale zpravidla se jedná o vrchol, který je významný v hierarchii daného grafu. (Bělohlávek 2020, s. 108)

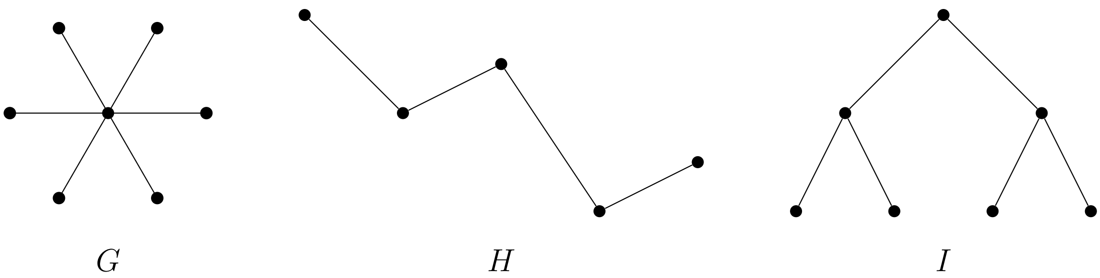
Jestliže strom má n vrcholů, pak **hvězdou** nazýváme strom, který má jeden vrchol stupně $(n-1)$ a dalších $(n-1)$ vrcholů má stupeň 1. Strom, který označujeme jako **hada** má 2 vrcholy stupně 1 a ostatní vrcholy stupně 2. (Vejmola 1989, s. 142–143) Graf G na Obrázku 13 je hvězda a graf H je had.

Terminologie pro stromy má botanický a genealogický původ. Nechť G je kořenový strom.

- **Potomek** je vrchol v a **předek** je vrchol u takový, že cesta z kořene r do vrcholu v má tvar $r, ..., u, ..., v$.
- **Následovník** (nebo **přímý potomek**) je vrchol v a **předchůdce** (nebo **rodič** je vrchol u, jestliže cesta z kořene r do vrcholu v má tvar $r, ..., u, e, v$.
- **List** je vrchol v, který nemá žádného následovníka.
- Vrchol v, který má potomky se nazývá **vnitřní vrchol**.
- **Hloubka** (nebo **úroveň**) vrcholu v je vzdálenost od kořene r do vrcholu v. (Bělohlávek 2020, s. 108)

Kořenový strom nazýváme **n-ární strom** v případě, že každý vnitřní vrchol nemá více než n dětí. V **úplném n-ární stromu** má každý vnitřní vrchol právě n dětí. N-ární strom, kde $n = 2$ nazýváme **binární strom** (graf I na Obrázku 13). (Rosen 2019, s. 783–784)

Kostra grafu je podgraf, který hranami spojuje všechny vrcholy původního grafu a je stromem. V ohodnoceném grafu se můžeme zajímat o nalezení podgrafu, který bude mít spojené



Obrázek 13: Stromy

všechny vrcholy a zároveň hodnoty hran, které je spojují, budou mít co nejnižší ohodnocení. Pokud takový graf obsahuje kružnici, můžeme odstranit hrany s vyšším ohodnocením, neboť hledáme kostru grafu, jejíž hodnota bude minimální. Takový podgraf nazýváme **minimální kostra** grafu. Tento podgraf nemusí být jedinečný. (Cioabă 2022, s. 58; 61)

1.2 Historie teorie grafů

Teorie grafů byla mnohokrát objevována v různých vědách nezávisle na sobě, například jako model chemických vazeb, elektrických sítí nebo jako součást aplikované matematiky. I v tomto století stále probíhají významné objevy.

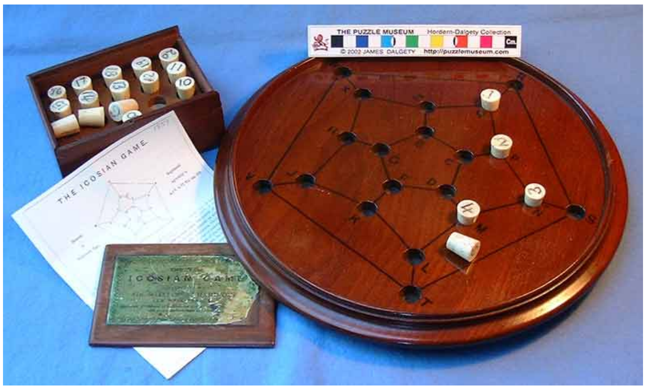
Pokud se zaměříme na obrázky grafů, tak se dostaneme do dávné historie. Za nejranější formy grafu považují Kruja a kol. (2002, s. 285) hru Mlýn, přičemž nejstarší pozůstatky pochází ze starověkého Egypta. Další starověké příklady kreseb grafů jsou rodokmeny, které zdobily římská sídla. Kromě stromů se ve středověku kreslily i jiné grafy za účelem reprezentace a vizualizace abstraktních informací. Například tzv. logické čtverce se využívaly jako nástroj pro výuku logiky.

Za počátek teorie grafů jako vědy je považován rok 1736, kdy Euler publikoval svůj článek [11] o řešení známého problému o sedmi mostech města Královce. *Leonard Euler* je známý jako otec teorie grafů. (Yadav 2023, s. 1–2) Kromě zmíněného problému mostů se zabýval i „úlohou jezdce“, která z našeho pohledu spočívá v hledání hamiltonovské kružnice v grafu. Teorie grafů tedy začala vznikat v 18. století jako nástroj pro řešení úloh z oblasti tzv. rekreační matematiky. Samotný Euler, ale ve své práci graf nenakreslil (Obrázek 15). Mosty v Královci zpracoval do podoby grafu až *Walter William Rouse Ball* (Obrázek 16) v roce 1892 v knize zaměřující se právě na zmíněnou rekreační matematiku. (Kruja a kol. 2002, s. 277–281)

Další publikace byla vydána až více než sto let po Eulerovi, a to v roce 1847, kdy se *Gustav*

Kirchhoff zabýval otázkami teorie stromů, které využíval při výpočtu proudů v elektrických sítích. Stromy se pak dále rozvíjely především v rámci praktických úloh v chemii, kde je zkoumal například *Arthur Cayley*. Problematikou stromů se zabývali také *James Joseph Sylvester* nebo *Camille Jordan*. Právě J. J. Sylvester ve svém článku z roku 1878 poprvé použil pojem graf v dnešním slova smyslu.

Další významný matematik byl *William Rowan Hamilton*, který roku 1859 vymyslel hru (Obrázek 15), jejímž cílem je nalézt hamiltonovské kružnice. Tuto hru nazval „Icosian game“ podle řeckého slova znamenajícího dvacet. Úkolem je umístit 20 kamenů s čísly na vrcholy grafu, který je izomorfní s vrcholy a hranami dvacetistěnu. Podmínkou je, že kameny se musí umístit tak, aby tvořily hamiltonovskou kružnici. (Barnett 2009)



Obrázek 14: Icosian game (Dalgety 2017)

První kniha, která se věnovala výhradně teorii grafů, vznikla v roce 1936 z pera maďarského matematika *Dénese Königa* [25]. Šišma (1996) tento rok označuje za konec období „prehistorie“ teorie grafů. Po roce 1945 pak nastává rozvoj oboru a stoupá počet matematiků, kteří se jím zabývají a výsledky z teorie grafů se začínají aplikovat do různých oborů lidské činnosti.

V Československu se grafy poprvé zabýval *Otakar Borůvka*, který v roce 1926 vydal článek „O jistém problému minimálním“ [5], kde představil algoritmus pro hledání minimální kostry. Borůvku pro tuto práci inspiroval jeden jeho známý, pracovník firmy budující elektrorozvodné sítě, který ho poprosil o pomoc s tímto problémem. Nejen, že Borůvka problém vyřešil, ale také výsledek zobecnil a zapsal se tak do dějin diskrétní matematiky. (Fuchs 1996)

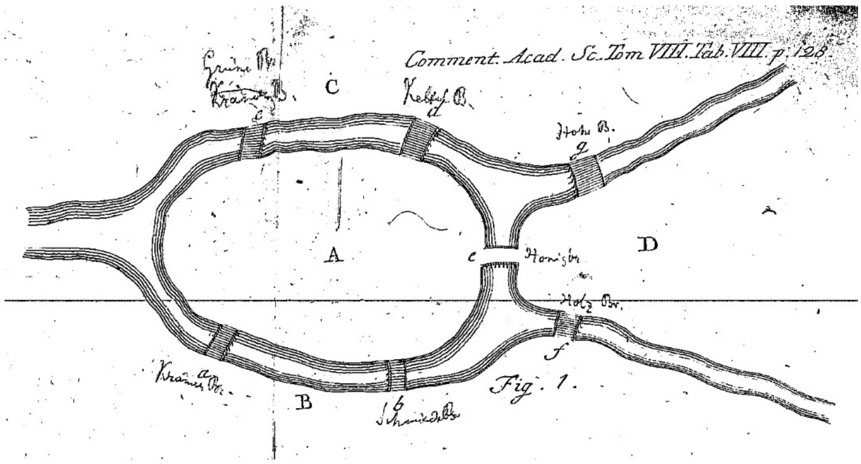
Dnes už se Borůvkův algoritmus moc nepoužívá. Nahradili ho Kruskalův algoritmus a Jarníkův algoritmus. *Vojtěch Jarník* vydal 4 roky po Borůvkovi článek, který se jmenoval stejně jako článek původní. Popsal v něm jednodušší způsob nalezení minimální kostry grafu. Oba čeští matematici tím předběhli svou dobu zhruba o čtvrt století. Velký zájem o tento optimalizační problém propukl až v 50. letech minulého století s rozvojem počítačové vědy. (Milková 2000)

Kostrami grafu se zabýval také *Jiří Sedláček*, který je autorem první české knihy o teorii grafů s názvem „Kombinatorika v teorii a praxi: úvod do teorie grafů“ (1964) [35]. Tato monografie měla úspěch, o čemž svědčí i její překlad do německého a bulharského jazyka. Byl průkopníkem tohoto oboru v Československu, zasloužil se o pravidelný seminář a organizoval mnoho konferencí. (Fiedler 1984)

1.3 Vybrané známé problémy

Nyní si představíme některé vybrané známé problémy z teorie grafů.

1.3.1 Sedm mostů města Královce



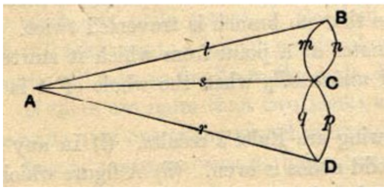
Obrázek 15: Obrázek z původního článku (Euler 1741, s. 128)

Město Königsberg, česky Královec, je dnes součástí Ruska a protéká jím řeka Pregola, přes kterou v Eulerově době vedlo sedm mostů (Obrázek 15). Otázka zní, zda je možné, abychom všechny tyto mosty přešli během jediné procházky tak, aniž bychom po jednom mostě přešli dvakrát a zároveň naše procházka musí končit na stejném místě jako začala. V jazyce teorie grafů otázka zní: existuje v multigrafu, který je na Obrázku 16, se čtyřmi vrcholy a sedmi hranami eulerovský tah? Na tento problém odpověděl záporně Leonard Euler roku 1736.

Euler dokázal, že pokud hledáme sled, který prochází všemi hranami grafu, musí být splněn alespoň jeden z následujících předpokladů:

- všechny vrcholy grafu jsou sudého stupně,

- dva vrcholy jsou lichého stupně a všechny ostatní stupně sudého, přičemž tah začíná v jednom vrcholu lichého stupně a ve druhém končí. (Vejmola 1986, s. 153)



Obrázek 16: Historicky první zpracování úlohy do podoby grafu (Kruja a kol. 2002, s. 280)

Již výše jsme definovali eulerovskou kružnici a tah, o kterých můžeme říct, že jsou užitečné při řešení mnoha praktických problémů. Například mnoho aplikací vyžaduje cestu nebo okruh, který projde každou ulicí v dané oblasti nebo každou silnicí v dopravní síti právě jednou. Pokud si pošťák najde eulerovský tah v grafu, který reprezentuje ulice, které musí projít, tato cesta vytvoří trasu, která projde každou ulicí právě jednou.

Pokud neexistuje žádná eulerovská cesta, některé ulice budou muset být projety více než jednou. Takový problém je znám jako **problém čínského poštovního doručovatele** na počest Guan Meigu, který ho formuloval v roce 1962.

Mezi další oblasti, kde jsou aplikovány eulerovy kružnice a tahy, patří návrh okružních cest nebo molekulární biologie, kde jsou eulerovy cesty používány při sekvenování DNA. (Rosen 2019, s. 729–734)

1.3.2 Minimální cesta v grafu

Jak můžeme najít nejkratší cestu z našeho domu na libovolné místo ve městě? Tento problém můžeme převést na graf a hledat nejkratší cestu z jednoho vrcholu do druhého v ohodnoceném grafu. Hledání minimální cesty je jeden z nejčastějších optimalizačních problémů, který se v praxi řeší. Například navigační systémy řeší tento problém tak, že hodnotí hrany na základě vzdálenosti mezi jednotlivými vrcholy nebo můžou k ohodnocení použít jiný parametr, třeba časovou náročnost jednotlivých cest. Dnes velice populární doručovací služby, ale i přenos dat v síti je řízen programy, které řeší tento problém. Uvedeme dva nejznámější algoritmy, které se využívají při hledání minimálních cest v grafu.

Dijkstrův algoritmus

Dijkstrův algoritmus najde nejkratší cesty pro všechny vrcholy v grafu z požadovaného vrcholu. Pro nalezení nejkratší cesty z vrcholu u do vrcholu v v ohodnoceném grafu G, kde hodnoty hran jsou kladné, budeme postupovat následovně.

Krok 1: Přiřadíme vrcholu u označení (–, 0). Podobné značení budeme používat i u ostatních vrcholů, kde na prvním místě zaznamenáváme předchozí vrchol a na druhém vzdálenost od počátečního vrcholu u do vrcholu v.

Krok 2: Dokud není vrchol v označen nebo nejsou žádné možnosti pro přiřazení dalších označení, postupujeme podle následujících kroků.

(i) Pro každý označený vrchol $x(w, d)$ a pro každý neoznačený vrchol y, který je sousední s x vypočítáme $d + z(e)$, kde e je hrana incidentní s vrcholy x a y a $z(e)$ značí délku této hrany.

(ii) Pro každý označený vrchol x a sousední neoznačený vrchol y, do kterého vede minimální vzdálenost $d' = d + z(e)$, označíme vrchol y značkou (x, d').

Vrchol může být označen (w, d') pro rozdílné vrcholy w, vybereme ten s minimální cestou. (Yadav 2023, s. 78)

Floyd-Warshallův algoritmus

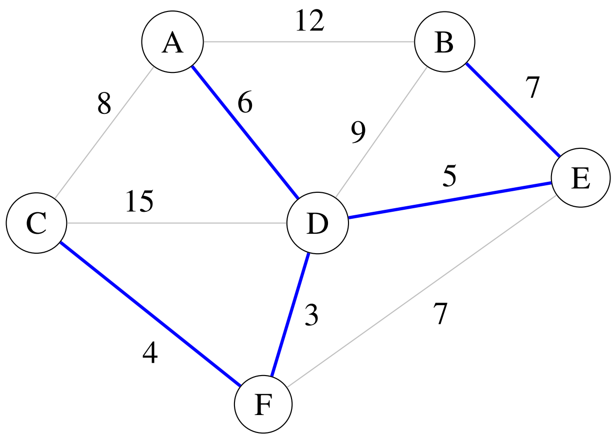
Algoritmus s poněkud pomalejším výpočtem, ale za to jednodušší implementací je Floyd-Warshallův algoritmus. Výhodou je, že tento algoritmus najde cestu mezi každými dvěma vrcholy a určí jejich vzdálenost. Také umožňuje i hledání cest v grafu se zápornými hodnotami hran (narozdíl od algoritmu Dijkstrova). Pokud bude cesta kratší přes třetí vrchol, použije tuto kratší cestu, jelikož prochází všechny možné cesty.

Algoritmus nejprve zapíše známé hodnoty, které může později vylepšovat. K hranám sousedních vrcholů zapíše jejich hodnotu, k vrcholům identickým nulu a vrcholy, kde hrana neexistuje mají ohodnocení ∞. V dalším kroku algoritmus hledá cestu z vrcholu u do vrcholu v přes vrchol w a porovnává délku této cesty se vzdáleností, kterou má již zapsanou. Jestliže $d(u, v) > d(u, w) + d(w, v)$, pak původní vzdálenost změní za kratší, v opačném případě vzdálenost ponechá. Takhle algoritmus postupuje, dokud neprověří všechny cesty mezi dvěma vrcholy v grafu G a nezapíše ty nejkratší. (Jirovský 2008, s. 41–42)

1.3.3 Minimální kostra grafu

Představme si, že máme několik měst v oblasti a chceme postavit cesty, které by nám umožnili mezi těmito městy cestovat. Když plánujeme stavbu silnic, předpokládejme, že cesty budou křížit ve městech. Abychom minimalizovali cenu stavby silnic, najděme způsob, jak je postavit tak, abychom mohli cestovat mezi dvěma libovolnými městy a zároveň zaplatili co nejméně za stavbu silnic. Budeme tedy hledat minimální kostru grafu (Obrázek 17). (Sengoku 2023, s. 206)

Představíme si nyní nejpoužívanější algoritmy pro hledání kostry grafu. Algoritmy jsou seřazeny podle doby jejich publikace. U Borůvkova algoritmu, jako u jediného, předpokládáme, že žádné dvě hrany nemají stejné ohodnocení.



Obrázek 17: Minimální kostra grafu

Borůvkův algoritmus

Borůvkův algoritmus prochází postupně všechny vrcholy a pro každý z nich vybere incidentní hranu s nejmenším ohodnocením. Tím většinou vznikne nesouvislý graf, proto algoritmus znovu hledá hrany s nejmenším ohodnocením mezi jednotlivými podgrafy, dokud nespojíme všechny vrcholy v jeden souvislý strom.

U tohoto algoritmu může nastat problém, jelikož při stejném ohodnocení dvou rozdílných hran může dojít k vytvoření kružnice. Proto má jako jediný z uvedených algoritmů počáteční požadavek navzájem různého ohodnocení hran.

Jarníkův algoritmus

Postupujeme od libovolného vrcholu a vybíráme z hran s ním incidentních tu, která má nejmenší ohodnocení. Tím nám vzniká strom, pro který opět najdeme hranu s nejmenším ohodnocením z množiny hran, které se tohoto stromu dotýkají. Tzn. z hran, jejichž jeden vrchol je součástí stromu a druhý nikoli. Takto postupujeme, dokud nebudou všechny vrcholy grafu součástí stromu.

Ve světě je Jarníkův algoritmus známější pod názvem **Primův algoritmus** podle Roberta Prima, který ovšem algoritmus objevil 27 let po Jarníkovi.

Kruskalův algoritmus

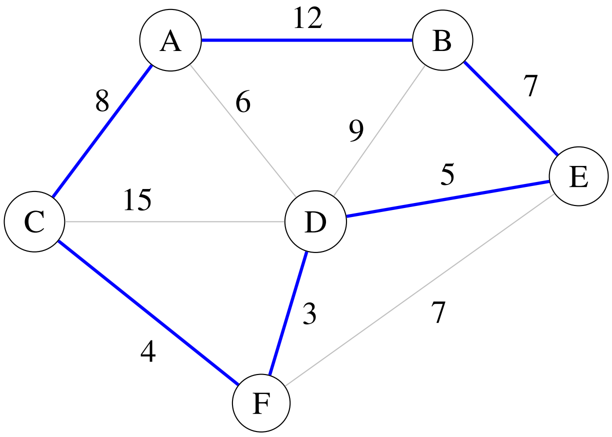
Kruskalův algoritmus nejprve vezme všechny hodnoty hran a uspořádá je neklesajícím způsobem. Potom postupně bere hrany podle tohoto uspořádání a v případě, že s již vybranými hranami netvoří kružnici, přidá je do grafu. Algoritmus opět končí se vznikem stromu, který je minimální kostrou daného grafu.

Odborníci mají snahu algoritmus stále vylepšovat, aby byl co nejrychlejší, případně aby dokázal najít minimální kostru, která splňuje i další podmínky. (Milková 2000)

1.3.4 Problém obchodního cestujícího

Problémem obchodního cestujícího se zabývá především informatika, a přestože se ním zabývalo už velké množství matematiků a informatiků, stále nebyl problém úplně vyřešen. Tato úloha by mohla být aplikovaná pro vyřešení řady problémů, které nás trápí v běžném životě. Mluvíme však o problému, který jde současnými algoritmy řešit pouze s tzv. exponenciální složitostí. (Zambito 2006)

Obchodník musí během své cesty navštívit řadu měst. Jestliže známe vzdálenost mezi městy, v jakém pořadí je má navštívit tak, aby cestoval do každého města právě jednou a vrátil se zpět na start s minimálním počtem najetých kilometrů? V matematické reprezentaci hledáme nejkratší hamiltonovskou kružnici v úplném ohodnoceném grafu. Města reprezentujeme pomocí vrcholů a cesty mezi nimi pomocí hran, které jsou ohodnoceny vzdáleností mezi městy (Obrázek 18). (Yadav 2023, s. 37)



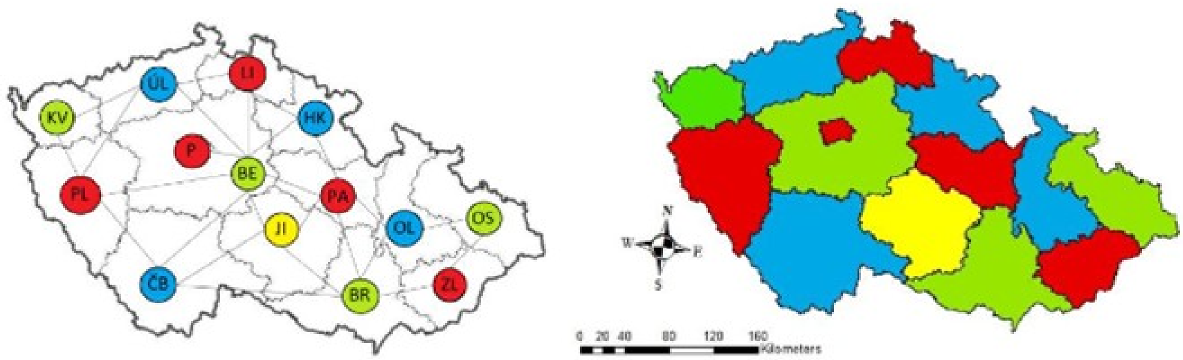
Obrázek 18: Problém obchodního cestujícího

Základem pro zkoumání tohoto optimalizačního problému vytvořili již zmínění matematici Leonard Euler a William Rowan Hamilton. Obecnou formulací problému obchodního cestujícího se ve 30. letech minulého století publikoval Karl Menger. (Cook 2012)

1.3.5 Problém čtyř barev

Představme si politickou mapu států, kde každý stát je souvislá oblast. Na takové mapě jsou sousední státy ty, které mají společnou hraniční čáru (nestačí jen společné izolované body). Když chceme obarvit mapu, pak tyto sousední státy nesmí mít stejnou barvu, podobně jako na Obrázku 19. Otázka zní, zda můžeme libovolnou mapu v rovině nebo na kouli obarvit pomocí čtyř barev. Takovou mapu můžeme převést na rovinný graf, kde státy jsou reprezentovány vrcholy a hrany jsou spojené s vrcholy právě tehdy, když jsou příslušné státy sousední.

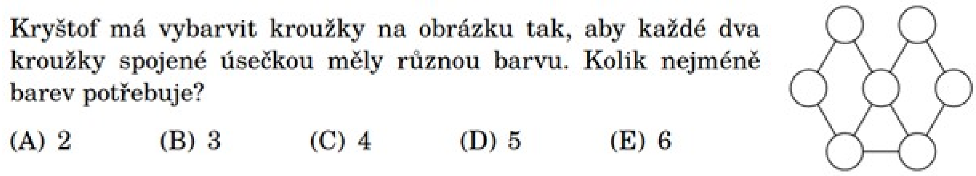
Francis Guthrie roku 1850 vybarvil hrabství na mapě Anglie čtyřmi barvami. Představil tento problém svému bratrovi Frederikovi, který v tu dobu studoval u Augusta De Morgana. De Morgan nedokázal odpovědět na otázku, zda stačí k obarvení libovolné politické mapy čtyři barvy a obrátil se v dopise na Hamiltona. Ten však odpověděl, že se problémem nebude zabývat a De Morgan začal otázku šířit mezi další matematiky. Důkaz byl nakonec formulován za pomoci počítače v roce 1976. (Šišma 1997, s. 169–170)



Obrázek 19: Barvení mapy (Kravarová 2016, s. 42)

Nejmenší počet barev, který potřebujeme k obarvení grafu G tak, aby neexistovala hrana, která spojuje dva vrcholy stejné barvy, nazýváme **chromatické číslo** grafu G a zapisujeme jej $\chi(G)$. Pokud je v grafu G alespoň jedna hrana, pak $\chi(G) \geq 2$, protože vrcholy, které jsou sousední musíme obarvit rozdílnou barvou. Chromatické číslo úplného grafu K s n vrcholy je rovno n, jelikož každé dva vrcholy v K jsou spojeny hranou. Pokud pro graf G platí, že $\chi(G) = 2$, pak je bipartitní. Pro rovinný graf G platí, že $\chi(G) \leq 4$, čímž se dostáváme zpět k problému čtyř barev. (Zelinka 1977, s. 38–39; 81)

Nyní si ukážeme algoritmus, který hledá chromatické číslo na úloze ze soutěže Matematický klokan (Obrázek 20). Tato úloha byla v kategorii Klokánek, která je určena pro žáky 4. a 5. ročníků.



Kryštof má vybarvit kroužky na obrázku tak, aby každé dva kroužky spojené úsečkou měly různou barvu. Kolik nejméně barev potřebuje?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Obrázek 20: Zadání úlohy 15 z kategorie Klokánek v roce 2023 (Hátle 2023b, s. 19)

Pro barvení grafů je známa řada postupů, jak dosáhnout optimálního řešení. Uvedeme si jeden, který popisuje Večerka (2007, s. 34–36).

Krok 1: Na začátku nastavíme $B = 0$. Proměnná B zaznamenává zatím nejvyšší počet barev, které jsme v grafu použili pro obarvení vrcholů. V tomto kroku jsou zatím všechny vrcholy neobarvené. Vrcholy označíme dvěma čísly: *počet barev, kterými jsou obarveny sousední vrcholy / počet neobarvených sousedních vrcholů.*

Krok 2: Hledáme neobarvené vrcholy.

i V případě, že jich je v grafu více, vybereme vrchol, jehož obarvené sousední vrcholy mají nejvyšší počet různých barev (nikoli nejvyšší počet obarvených sousedních vrcholů).

ii V případě, že je takových vrcholů více, vybereme vrchol s nejvíce neobarvenými sousedními vrcholy. V případě, že i takových vrcholů je více, vybereme libovolný z nich.

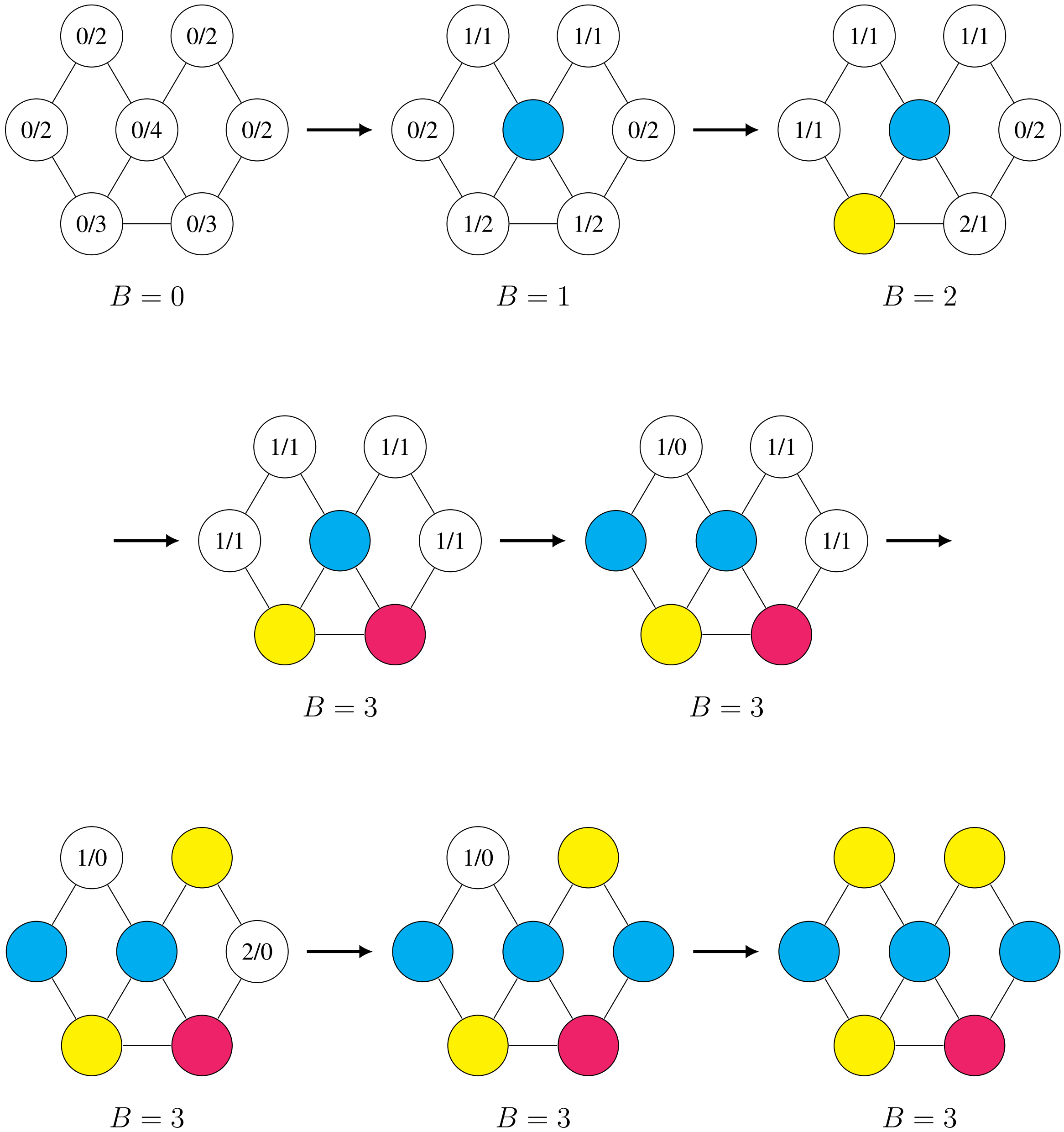
Krok 3: Vybranému vrcholu přiřadíme nejnižší barvu, kterou není obarven žádný sousední vrchol. Pokud taková barva neexistuje, použijeme novou barvu a k proměnné B přičteme 1.

Nyní algoritmus aplikujeme na úlohu na Obrázku 20. Vlevo nahoře vidíme graf před začátkem algoritmu, jehož vrcholy jsme označili podle Kroku 1.

Poté začneme v prostředním vrcholu, protože má nejvyšší počet neobarvených sousedních vrcholů. Obarvíme ho první barvou (modrou) a proměnnou B nastavíme na hodnotu 1.

V dalším kroku máme na výběr mezi dvěma „dolními“ vrcholy. Vybereme „levý“ vrchol a obarvíme ho jinou barvou než modrou, třeba žlutou.

Další postup podle algoritmu můžeme vidět na Obrázku 21. Všimněme si, že k výslednému chromatickému číslu se dostaneme poměrně brzy.



Obrázek 21: Algoritmus pro barvení grafu

1.3.6 „Handshaking problem“

„Handshaking problem“ nebo taky „Party problem“ je klasický problém z kombinatoriky, který říká, že pokud máme v pokoji n lidí a všichni si potřesou rukou, kolik potřesení rukou proběhne?

Problém s konkrétním počtem lidí můžeme řešit prostřednictvím zakreslení do grafu. Kde vrcholy reprezentují lidi a hrany představují potřesení rukou. V takovém případě nám vznikne úplný graf. Úplný graf s n vrcholy má právě $\frac{n(n-1)}{2}$ hran, protože každý vrchol je spojen se všemi ostatními, tj. $(n-1)$ tudíž každý vrchol je incidentní s $(n-1)$ hranami, které ovšem musíme vydělit 2, abychom je nepočítali dvakrát. Tím známe i odpověď na zadaný problém: proběhne $\frac{n(n-1)}{2}$ potřesení rukou. (Blanco 2021, s. 13–14)

Tento problém má také jinou podobu, který uvádí Kovář (2022, s. 42) *„Máme skupinu n lidí $(n \geq 2)$ z nichž někteří si podali ruce. Ukažte, že ve skupině jsou alespoň dva lidé, kteří podali ruku stejnému počtu lidí ve skupině.“*

V grafu budou vrcholy zastupovat lidi a jsou spojeni hranami, jestliže si podali ruce. Takový graf bude symetrický, protože si lidé musí podat ruce vzájemně, zakreslíme ho tedy jako neorientovaný. A bude taky antireflexivní (tzn. nebude obsahovat smyčky), jelikož předpokládáme, že si člověk nepodá ruku sám se sebou. Neuvažujeme ani multigraf, kde by si dva lidé mohli ruku podat dvakrát. Z toho vyplývá, že každý z n vrcholů může být spojen s maximálně $n-1$ vrcholy a minimálně s 0 vrcholy.

Při řešení problému můžeme použít větu o skóre grafu:
„Nechť $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq ... \geq d_n$ jsou nezáporná celá čísla a $1 \leq d_1 \leq n-1$. Pak $d_1, d_2, d_3, ..., d_n$ je skóre nějakého grafu, právě když $d_2 - 1, d_3 - 1, ..., d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, ..., d_n$ je skóre nějakého grafu.“ (Bělohlávek 2020, s. 92)

Uvedená věta říká, že určitá posloupnost nezáporných celých čísel je skóre grafu G právě tehdy, když určitá jiná posloupnost odvozená od této původní posloupnosti splňuje stejnou vlastnost, tedy je také skóre grafu.

Kdyby si každý mohl podat ruku s rozdílným počtem lidí, pak by skóre grafu mělo stupňovou posloupnost $(n-1, n-2, ..., 0)$. Po úpravě podle věty o skóre grafu dostaneme posloupnost $(n-2, n-3, ..., 0, -1)$, která není grafová. To vede k tomu, že musí existovat dvojice vrcholů se stejným stupněm, a tedy je možné najít dva lidi ve skupině, kteří by podali ruku stejnému počtu lidí.

1.3.7 Toky v sítích

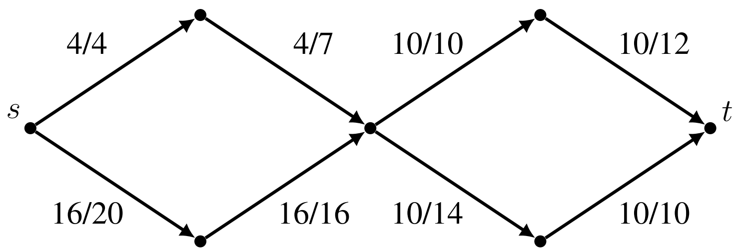
Jednou z nejvíce aplikovaných částí z teorie grafů jsou **toky v sítích**. Takové grafy se často přirovnávají k síti vodovodnímu potrubí. Orientace hrany určuje směr toku a záporné hodnoty symbolizují tok v protisměru (Demel 2002, s. 129)

Představme si orientovaný graf, kde každé ohodnocení hrany představuje maximální množství toku, které může projít touto hranou. Tok ve vrcholu je omezen kapacitami hran, které jsou s ním incidentní. Jinými slovy vrchol může přenášet jen tolik toku, kolik mu umožní hrany. Nejobvyklejším úkolem je najít maximální možný tok mezi určeným párem vrcholů. (Sengoku 2023, s. 111)

Jirovský (2010, s. 42–46) upozorňuje na to, že maximálním tokem rozumíme výsledný tok, který projde celým grafem. Představme nyní některé důležité pojmy:

- **zdroj** je vrchol s, kde začíná tok;
- **stok** (někdy také **cíl** nebo **spotřebič**) je vrchol t, kde tok končí, zdrojů i stoků může být v grafu více;
- **vnitřní vrchol** je každý vrchol v grafu, kromě zdroje a stoku;
- **kapacita** je ohodnocení hrany, která udává, kolik (tekutiny) může daným místem protéct;
- **tok** je hodnota, která hranou opravdu protéká, velikost toku získáme součtem všech toků ze zdroje;
- **maximální tok** je největší možná hodnota tekutiny, která může grafem protéct.

Některé z uvedených pojmů využijeme v definici sítě. **Síť** je čtveřice $S = (G, s, t, w)$, kde G je orientovaný graf ve kterém jsou určeny zdroj s, stok t a kapacita hran w. (Hliněný 2008, s. 58) Na Obrázku 22 můžeme vidět příklad sítě, jejíž maximální tok je 20. Ohodnocení hran udává hodnotu, která hranou protéká / kapacitu hrany.



Obrázek 22: Maximální tok v síti

1.4 Některé aplikace teorie grafů

Teorie grafů poskytuje vhodný nástroj pro modelování a analýzu z široké škály oborů, jen je třeba položit si otázku, jakou strukturu by graf, který situaci znázorňuje, měl mít. Zaměříme se nyní na aplikace teorie grafů v praktických situacích, kde jsou grafy využívány k reprezentaci různých sítí.

- **Sociální sítě**

  Grafy jsou hojně využívány k modelování sociálních struktur založených na různých typech vztahů mezi lidmi nebo skupinami lidí. Můžeme pomocí nich zkoumat například vzájemnou známost a přátelství, vliv, spolupráci (tzv. Hollywoodský graf znázorňuje, kteří herci se spolu objevili ve filmu).

- **Komunikační sítě**

  Sem patří například síť telefonních hovorů, které využívají orientované hrany.

- **Informační sítě**

  Grafy webových stránek, které znázorňují jejich propojení. Hrana vede z vrcholu a do vrcholu b, když na stránce a existuje odkaz na stránku b. Protože nové webové stránky se vytvářejí a jiné odstraňují, tak i webový graf se neustále mění. Tyto grafy využívají například weboví roboti, které vyhledávače používají k vytváření indexů webových stránek.

  Grafy lze použít k reprezentaci citací v různých typech dokumentů, včetně odborných článků nebo právních předpisů. Graf obsahuje hranu, když se v dokumentu, který je znázorněn počátečním vrcholem, vyskytuje citace dokumentu, který je znázorněn vrcholem koncovým.

- **Dopravní sítě**

  Grafy se využívají pro modelování velkého množství různých dopravních sítí jako jsou silniční, vzdušné, vlakové a také lodní sítě. Kupříkladu letadlovou síť znázorníme orientovaným multigrafem, kde vrcholy budou znázorňovat letiště a orientované hrany jednotlivé lety mezi nimi. Prostřednictvím dopravních sítí můžeme také řešit různé optimalizační problémy, které jsme zmiňovali výše.

- **Biologické sítě**

  Mnoho aspektů biologických věd můžeme modelovat využitím grafů. Interakce různých druhů zvířat, jako je pozorování konkurence mezi druhy v ekosystému. Vzájemné vztahy proteinů v buňce, které jsou klíčové pro většinu biologických funkcí, jsou zkoumány skrze grafy řadou vědců, kteří pracují na objevování nových proteinů.

- **Turnaje**

  Sportovní výsledky turnajů se značí do grafů. Pro turnaj typu „každý s každým“ použijeme úplný graf a orientací hran můžeme zaznačit vítěze (tým a porazil tým b, v případě remízy nakreslíme dvě orientované hrany, kdy jedna povede do vrcholu a a druhá povede z něj). Naopak turnaj, ve kterém se vyřazuje bude modelován pomocí kořenového stromu. (Rosen 2019, s. 676–682)

2 Teorie grafů ve výuce matematiky

2.1 Teorie grafů v kurikulu

Teorie grafů sice není v kurikulu základní školy explicitně zmíněna, ale v Rámcovém vzdělávací programu pro základní vzdělávání (2023) se vyskytují cíle a výstupy, na jejichž naplňování se může podílet. Prostřednictvím teorie grafů můžeme žáky *podněcovat k tvořivému myšlení, logickému uvažování a k řešení problémů*, jak je uvedeno v cílech základního vzdělávání (s. 8). Grafy jsou také vhodným prostředkem pro osvojování *třídění, propojování a systematizaci informací* a dalších kompetencí k učení a k řešení problémů (s. 10–11). V rámci vzdělávacího oboru **Informatika** se od žáků očekává, aby *vyčetli informace z daného modelu*, v učivu tohoto oboru jsou pak přímo zmíněny myšlenkové a pojmové mapy, schémata a diagramy. Žáci se dále učí *sestavovat a testovat symbolické zápisy postupů*, pro což jsou rovněž grafy vhodné (s. 39–41). Práci s mapou a s rodokmeny se žáci učí v rámci vzdělávacího oboru **Člověk a jeho svět** již v 1. období (s. 47–48). Oba tyto modely se často prezentují formou grafů.

Naše práce se zabývá aplikací teorie grafů do výuky matematiky, a tak se nabízí otázka, jaké cíle a očekávané výstupy z oblasti a oboru **Matematika a její aplikace** můžeme naplňovat prostřednictvím teorie grafů? Z cílů můžeme osvojovat *vytváření zásoby matematických nástrojů a efektivní využívání osvojeného matematického aparátu* nebo *rozvíjení zkušeností s matematickým modelováním (matematizace reálných situací)*. V části **Závislosti, vztahy a práce s daty** se již v 1. období objevuje očekávaný výstup, který s grafy úzce souvisí: *žák doplňuje schémata* a obdobně ve 2. období *žák čte a sestavuje jednoduché diagramy*. Kromě běžných matematických úloh se v očekávaných výstupech objevuje i požadavek na práci s nestandardními aplikačními úlohami a problémy, jeho formulace zní následovně: *žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky* (s. 31–35).

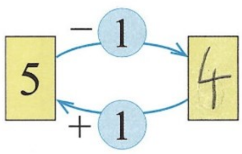
2.2 Úlohy ve vybraných pracovních sešitech matematiky

Ve vybraných pracovních sešitech matematiky jsme sledovali, jaké zastoupení mají úlohy z teorie grafů. Úlohy jsme rozdělili do několika kategorií podle typu grafů, se kterými se v nich pracuje. Většinu úloh lze dále modifikovat a také autoři pracovních sešitů využívají různé obměny úloh, aby je zpestřili nebo využili k procvičení aktuálně probíraného učiva. Zde jsou nejpoužívanější modifikační prvky, které jsme v pracovních sešitech pozorovali:

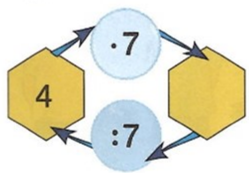
- nejjednodušší gradační prvek je záměna nižších čísel za vyšší a záměna početních operací podle aktuálního probíraného učiva;
- dalším přirozeným gradačním prvkem je rozšíření grafu, tedy zvětšení množiny vrcholů, hran nebo obou množin;
- úloha je obtížnější, pokud v ní je vyšší počet chybějících údajů, které je úkolem doplnit, obzvlášť pokud chybí více údajů za sebou a řešitel musí uvažovat několik kroků dopředu;
- doplňování ohodnocení hran většinou vyžaduje využití jiných početních operací než doplňování hodnot do vrcholů, kombinace doplňování hodnot hran i vrcholů pak zvyšuje obtížnost úlohy;
- tzv. podmínky, tedy přidání navýšení faktorů, které musíme zohlednit při doplňování čísla;
- doplnění úkolů prostřednictvím výběru prvků z nabídky.

2.2.1 Cyklické grafy

Cyklické grafy se nejčastěji vyskytují v pracovních sešitech za účelem znázornění vzájemných vztahů. Ukázka příkladu z pracovního sešitu pro 1. ročník nakladatelství *Nová škola* (Obrázek 23) je podobná ukázce z pracovního sešitu od *Taktiku* pro 2. ročník (Obrázek 24). Oba příklady přibližují žákům vztahy mezi opačnými početními operacemi.

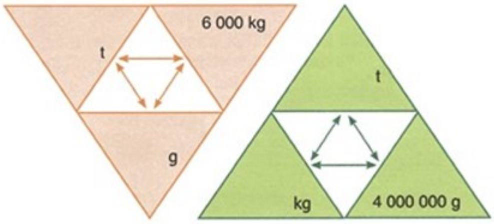


Obrázek 23: Vztah sčítání a odčítání (Rosecká 2012c, s. 3)



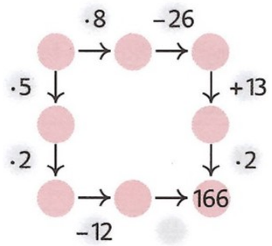
Obrázek 24: Vztah násobení a dělení (Faltinová a kol. 2017, s. 32)

Kružnice v pracovním sešitu nakladatelství *Taktik* (Obrázek 25) demonstruje vztah mezi jednotlivými jednotkami hmotnosti. Úkolem žáků je převést jednotky hmotnosti a zapsat je do menších barevných trojúhelníků, kde jsou již zapsané požadované jednotky. Obousměrné šipky uprostřed znázorňují, že je možné jednotky převádět oběma směry. Při práci s touto úlohou můžeme žákům zdůraznit, že hmotnost daného objektu se nemění, ale můžeme ji vyjádřit v různých jednotkách.

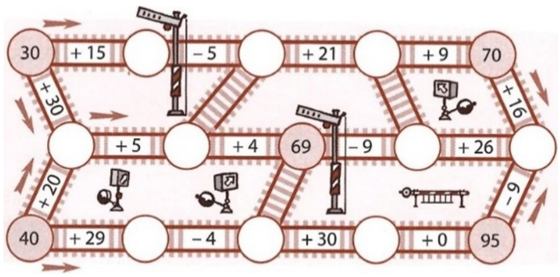


Obrázek 25: Vztah mezi jednotkami hmotnosti (Faltinová a kol. 2016b, s. 19)

V následujících příkladech můžeme sledovat, jak se dá ke stejnému výsledku dostat různými způsoby. Ukázka z nakladatelství *Fraus* (Obrázek 26) má jen jeden vrchol, který je pouze počáteční a jeden vrchol, který je pouze koncový, ale úloha z pracovního sešitu *Didaktis* (Obrázek 27) má dva čistě počáteční vrcholy a tvoří několik kružnic.



Obrázek 26: Graf s jedním zdrojem
(Hejný 2011b, s. 45)

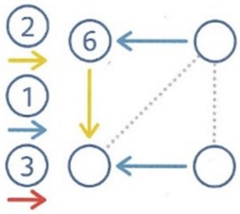


Obrázek 27: Graf se dvěma zdroji
(Bulín a Korityák 2007b, s. 3)

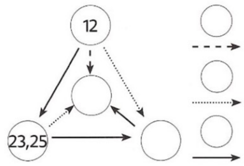
Pavučiny

„Pavučiny" jsou prostředí, které patří do matematiky profesora Hejného. Orientované hrany stejné barvy (případně se stejným stylem čáry) mají jednotné ohodnocení, například na Obrázku 28 mají žluté hrany hodnotu 2 a modré hrany hodnotu 1. Orientace hrany pak určuje směr od sčítance k součtu.

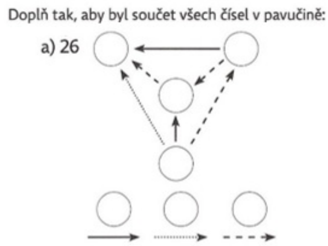
Na Obrázku 29 pak můžeme vidět pavučinu s desetinnými čísly, u které je třeba doplnit kromě některých vrcholů i ohodnocení hran. Úloha na Obrázku 30 nemá vyplněné hodnoty vrcholů ani ohodnocení hran, je v ní však stanovena podmínka součtu všech vrcholů. Můžeme si všimnout, že hodnota čárkované hrany musí být rovna polovině plné hrany a třetině hrany tečkované. Prostřednictvím dolního vrcholu v, který je pouze počátečním vrcholem, pak můžeme vyjádřit ostatní vrcholy (ve směru zleva doprava) jako: $v + 3e, v + 2e, v + e$.



Obrázek 28: Barevná pavučina (Hejný 2019, s. 35)



Obrázek 29: Pavučina s nevyplněnými hodnotami hran (Hejný 2011b, s. 28)

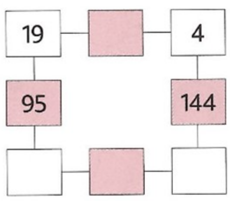


Obrázek 30: Pavučina s celkovým součtem vrcholů (Hejný 2010b, s. 16)

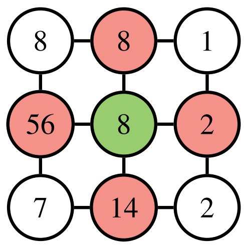
Součinové čtverce

Součinové (někdy také násobilkové) čtverce jsou dalším prostředím z matematiky profesora Hejného. Tyto cyklické grafy přibližují vztahy mezi operacemi násobení a dělení. Také napomáhají upevnit si násobilkové počty a přirozeně si osvojit práci s komutativitou operace násobení. Početní operace je závislá na pozici vrcholů v grafu.

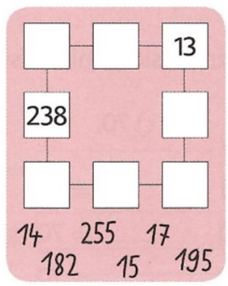
Cílem je zapsat do červeného pole součin dvou sousedních bílých vrcholů. Nejjednodušší varianta součinového čtverce má vyplněné pouze bílé vrcholy. Pokud je potřeba vyplnit některé bílé i červené vrcholy (jako na Obrázku 31), graf získává těžší obtížnost a při výpočtu musíme kromě násobení využít i opačnou operaci, tedy dělení. Doprostřed grafu můžeme navíc přidat vrchol, který bude mít vepsaný součet všech vrcholů, se kterými sousedí (zelený vrchol na Obrázku 32). K operaci násobení a dělení můžeme tak procvičit i sčítání (případě odčítání). Úlohu také můžeme ozvláštnit přidáním nabídky jako na Obrázku 33).



Obrázek 31: Součinový čtverec (Hejný 2011a, s. 6)



Obrázek 32: Graf se součtem uprostřed

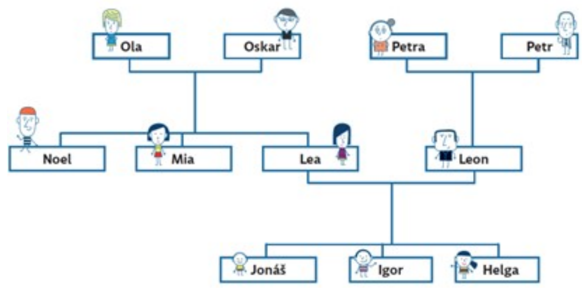


Obrázek 33: Graf s nabídkou (Hejný 2009, s. 13)

2.2.2 Stromy

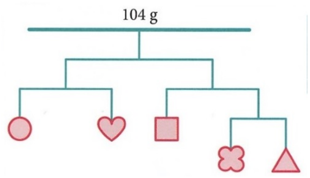
Jedním z nejznámějších způsobů využití stromů pro potřeby základní školy (nejen v matematice) jsou rodokmeny. V pracovních sešitech nakladatelství *H-mat* se pracuje s jednotným rodokmenem rodiny Moudrých (Obrázek 34).

Úloha s rodokmenem:
„Kdo co říká?
Jsem dcera Jonášova táty.
Jsem syn manželky Leona.
Otec mé sestry je Leon.“
(Hejný 2019, s. 33)



Obrázek 34: Rodokmen rodiny Moudrých
(Hejný 2010a, s. 29)

Úloha s dekoracemi: *„Závěsné váhy jsou v rovnováze. Celková hmotnost všech dekorací je 104 g. Vypočítej hmotnost trojúhelníku.“*



Obrázek 35: Úloha s dekoracemi
(Adámková a kol. 2017, s. 146)

Úloha na Obrázku 35 je poměrně náročná, ale uspořádání do grafu nám pomáhá zorientovat se ve vztahu jednotlivých dekorací mezi sebou.

Stromy se dají použít také pro seznámení se s učivem o pořadí operací a užívání závorek (Obrázek 36). Stejně jako v předchozí úloze nám graf pomůže ujasnit si vztahy mezi jednotlivými operacemi.

Úloha se závorkami: *Vypočítej. Proč se výsledky liší?*

$(2340 + 1560) : 15 =$ $\qquad$ $2340 + 1560 : 15 =$

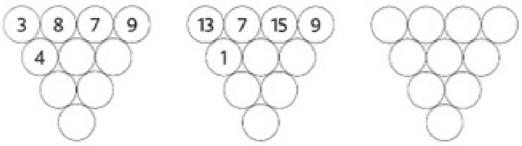
Obrázek 36: Pořadí operací (Bártová a kol. 2017a, s. 19)

Stromy v podobě trojúhelníků

Provedeme požadovanou operaci mezi následovníky a výsledek zapíšeme do jejich předchůdce. Početní příklady zapsané tímto způsobem jsou obtížnější než počítání jednotlivých příkladů. Jednak se žáci učí orientovat v jiné struktuře zápisu, ale především jakékoli chyby se projeví i v dalších úrovních grafu.

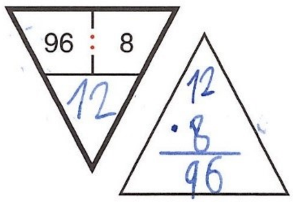
V didaktických materiálech se můžeme setkat se součinovými trojúhelníky. Na Obrázku 37 jsou upraveny tak, že namísto celého výsledku se zapíše jen jeho poslední číslice. V trojúhelníku

***Úloha se součinovými trojúhelníky:** „Vynásob čísla ležící vedle sebe. Do kruhu pod nimi zapiš pouze jednotky tohoto součinu. Pokračuj stejným způsobem. Poslední hrozen doplň tak, aby nejníže byla číslice 7.“*

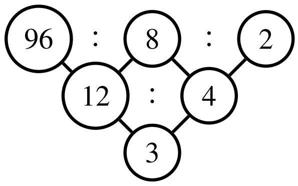


Obrázek 37: Součinové trojúhelníky (Hejný 2011b, s. 18)

vpravo se pak musí nejen dělit, ale žáci si musí také uvědomit, která čísla končí danou číslicí a zároveň patří do násobilky. Vedle dělicího trojúhelníku na Obrázku 38 je druhý, který slouží jako prostor pro kontrolu, ten není zapsaný prostřednictvím grafu. Na Obrázku 39 je pak větší strom s hloubkou 3.

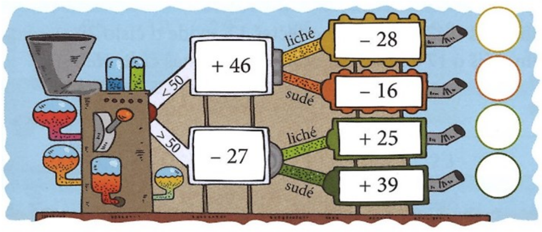


Obrázek 38: Dělicí trojúhelník (Faltinová a kol. 2016a, s. 7)

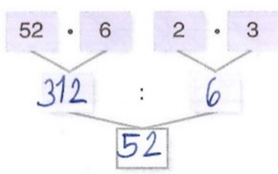


Obrázek 39: Rozšířený dělicí trojúhelník

Početní operace můžeme v rámci trojúhelníků i kombinovat. Na Obrázku 40 kombinujeme kromě sčítání a odčítání i určování sudosti čísel a jejich porovnávání. Úloha na Obrázku 41 kombinuje násobení a dělení.



Obrázek 40: Sčítací a odčítací trojúhelník (Adámková 2017, s. 106)

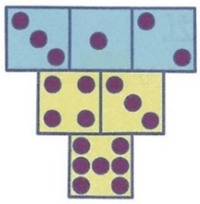


Obrázek 41: Součinový a dělicí trojúhelník (Faltinová a kol. 2020, s. 9)

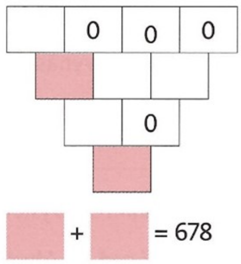
Sčítací trojúhelníky

Sčítací trojúhelníky jsou příklady kořenových stromů, které jsou v pracovních sešitech nejběžnější. Upozorněme na to, že některé sčítací trojúhelníky využívají čísla vprostřed řádku opakovaně jako sčítance, zatímco některé sečtou každé číslo pouze jednou.

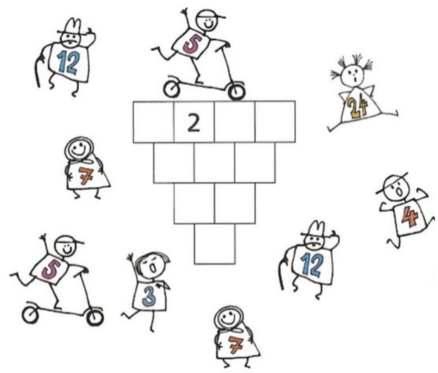
Princip úlohy je možná používat ještě dřív, než žáci umí psát číslice. Již v rámci předmatematické přípravy můžou žáci překreslovat příslušné počty puntíků jako na Obrázku 42. Pro zpestření je možné do trojúhelníku přidat podmínku (Obrázek 43) nebo nabídku pro výběr čísel (Obrázek 44).



Obrázek 42: Trojúhelník s puntíky (Hejný 2018, s. 49)



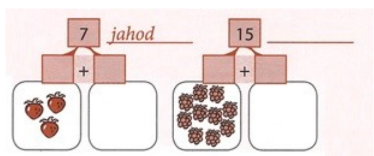
Obrázek 43: Sčítací trojúhelník s podmínkou (Hejný 2011b, s. 45)



Obrázek 44: Sčítací trojúhelník s nabídkou čísel (Hejný a kol. 2008b, s. 49)

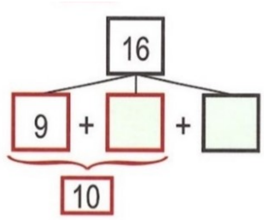
Rozdělování čísel

Rozdělování čísel je další typ úlohy, který se v pracovních sešitech matematiky používá pro seznámení s operací sčítání. Na Obrázku 45 je úkol pro nejmladší žáky a můžeme si všimnout, že tuto úlohu můžou řešit již žáci, kteří ještě neumí zapisovat číslice, tedy v předmatematické přípravě. Stačí číslice nahradit obrázky objektů v příslušném počtu.

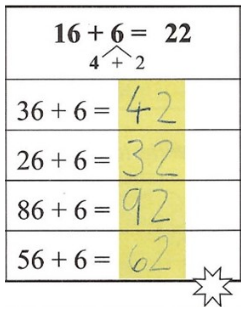


Obrázek 45: Rozdělování čísel (Bulín a Korityák 2007a, s. 5)

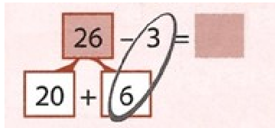
V nakladatelství *Nová škola* (Obrázky 46, 47) a *Didaktis* (Obrázek 48) tento graf využívají při výuce sčítání a odčítání s přechodem přes desítku. Na Obrázku 46 máme za úkol číslo rozložit tak, aby první dva sčítance daly dohromady součet deset, na Obrázcích 47 a 48 už je znalost rozložení čísla využívaná v praxi při sčítání i odčítání. Na prostředním obrázku rozkládáme číslo tak, abychom zjistili, kolik jednotek doplní desítku a kolik jednotek zůstane v konečném výsledku. V úloze vpravo pak rozdělujeme menšenec na desítky a jednotky, abychom žákům přiblížili, jak funguje odčítání od víceciferných čísel v desítkové soustavě.



Obrázek 46: Rozklad na 10
(Novotný a Novák 2015, s. 58)

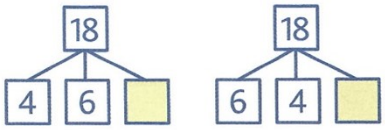


Obrázek 47: Přičítání čísla 6
(Rosecká 2011b, s. 32)



Obrázek 48: Odčítání od
dvouciferného čísla
(Bulín a Korityák 2007a, s. 46)

Na Obrázku 49 je ukázka z pracovního sešitu od *H-matu*, kde si žáci osvojují mimo jiné i komutativitu sčítání. Prostřednictvím úlohy tohoto typu bychom mohli žáky uvést do problematiky dělení čísle, stačilo by pozměnit zadání úlohy: *rozděl číslo 18 na tři stejná čísla*.



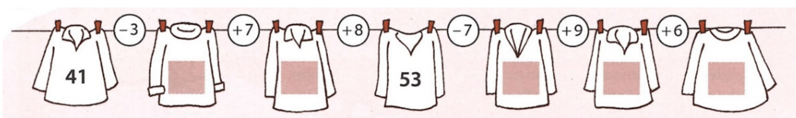
Obrázek 49: Komutativita sčítání (Hejný 2019, s. 24)

2.2.3 Hadi

V této části se budeme věnovat úlohám s hady, tedy grafy, které tvoří cestu. Většina takových grafů, které jsme v didaktických materiálech pro žáky na 1. stupni ZŠ našli, jsou ohodnocené a orientované. Za vrcholy považujeme číslo a orientovaná hrana je kromě čísla určená také početní operací. Číslo v počátečním vrcholu upravíme na základě hodnoty hrany a výsledek náleží koncovému vrcholu.

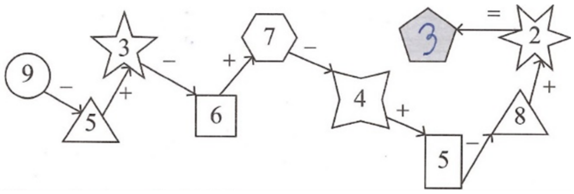
Úlohy s hady se vyskytují v pracovních sešitech v různých modifikacích:

- aplikujeme hodnotu hrany na počáteční vrchol a na místo koncového vrcholu zapisujeme výsledek;



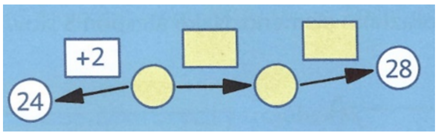
Obrázek 50: Had s kontrolním vrcholem (Bulín a Korityák 2007a, s. 65)

- dovnitř hada doplníme vrchol, který slouží jako kontrola výpočtů (Obrázek 50);
- pro zvýšení obtížnosti nepožadujeme zápis mezivýsledků (Obrázek 51);
- doplňujeme nejen vrcholy, ale také hodnoty hran (Obrázek 52);
- ozvláštnění úlohy tzv. podmínkou (Obrázek 53).

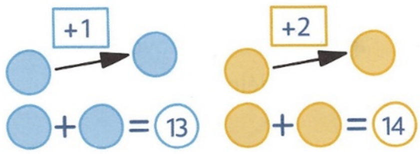


Obrázek 51: Had bez mezivýsledků (Rosecká 2012a, s. 45)

Když budou v grafu vynechané tři hodnoty po sobě následující, žáci budou nuceni využít opačné početní operace (v případě, že nevyužijí taktiku pokus–omyl).



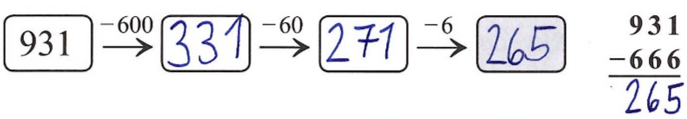
Obrázek 52: Had s doplněním hodnot hran
(Hejný 2019, s. 38)



Obrázek 53: Hadi s podmínkami
(Hejný 2019, s. 34)

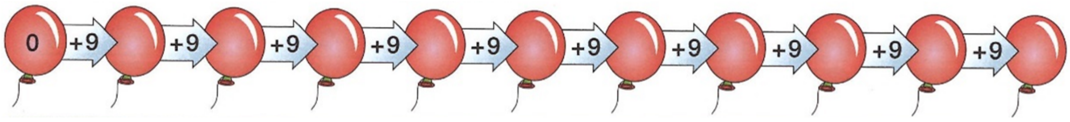
Úlohy s hady můžeme využít také pro vyvození některých témat a pochopení vztahů mezi pojmy:

- sčítání a odčítání víceciferných čísel (Obrázek 54);



Obrázek 54: Odčítání víceciferných čísel (Rosecká 2011a, s. 23)

- násobení jako postupné sčítání (Obrázek 55);
- slovní úlohy s větším počtem početních operací (Obrázek 56).



Obrázek 55: Násobilka 9 (Faltinová a kol. 2017, s. 41)

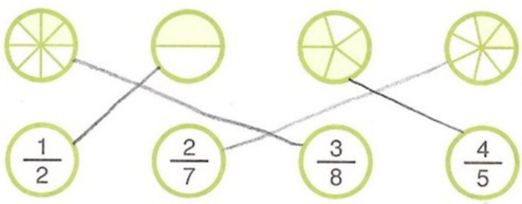
Slovní úloha o nákupu: *„Marcela šla na nákup, v pekařství utratila 18 Kč, v cukrárně 24 Kč, v zelinářství 58 Kč a v papírnictví 35 Kč. Kolik Kč zbylo Marcele z 200 korunové bankovky?“*

$$200 \xrightarrow{-18} 182 \xrightarrow{-24} 158 \xrightarrow{-58} 100 \xrightarrow{-35} 65$$

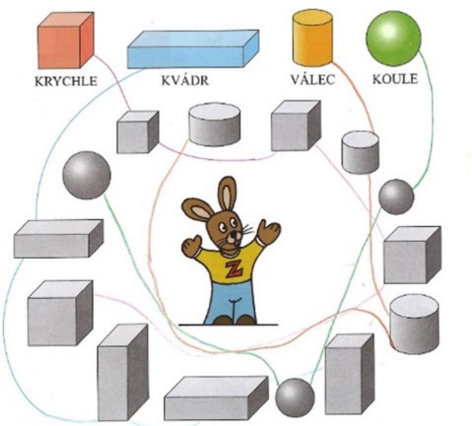
Obrázek 56: Slovní úloha o nákupu (Rosecká 2011a, s. 24)

2.2.4 Spojování údajů

Jedná se o typ úlohy, se kterou se hojně setkáváme i v jiných školních předmětech a můžeme jej použít pro procvičení téměř jakéhokoli učiva. Spojované údaje jsou vrcholy grafu a hrany znázorňují souvislost mezi těmito údaji. Výsledkem jsou bipartitní grafy. Můžeme spojovat dvojice údajů (jak vidíme na Obrázcích 57 a 60), nebo máme množinu nadřazených údajů, ke kterým přiřazujeme vrcholy (Obrázky 58 a 59).

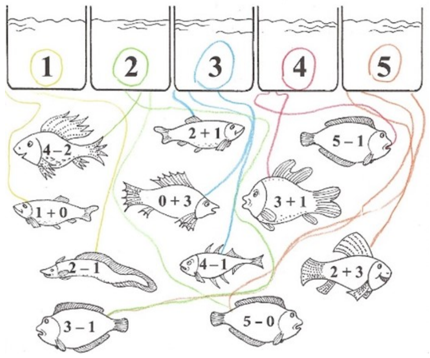


Obrázek 57: Spojování zlomků (Bártová a kol. 2017a, s. 21)



Obrázek 58: Spojování těles (Rosecká 2012c, s. 56)

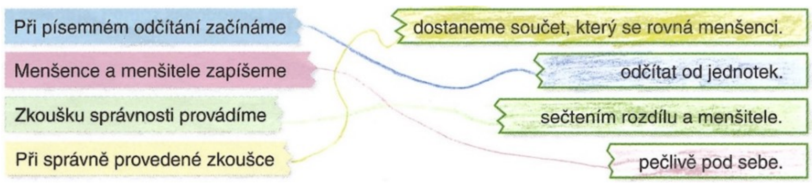
Spojování příkladů s výsledky je způsob, jak oživit početní příklady. Navíc nám umožňuje částečnou zpětnou vazbu. Pokud nemůžeme najít vrchol ke spojení, nejspíš jsme počítali nesprávně. Spojování početních příkladů můžeme najít například v pracovním sešitu z nakladatelství *Nová škola* (Obrázek 59).



Obrázek 59: Spojování příkladů (Rosecká 2012b, s. 47)

Zpětná vazba je ještě jednoznačnější u spojování dvojic, kdy znázorňujeme bijektivní zobrazení, tedy každému vrcholu z množiny příkladů přiřazujeme právě jeden vrchol z množiny výsledků a všechny vrcholy musíme využít.

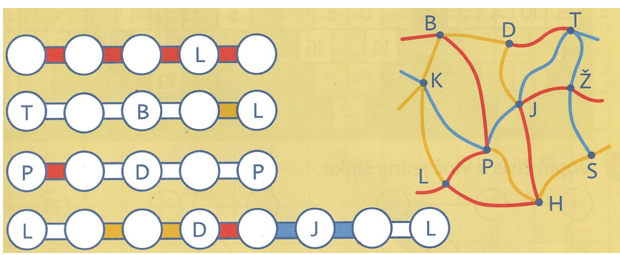
Méně obvyklé je v matematice spojování výroků, tuto úlohu najdeme v pracovním sešitu pro 4. ročník nakladatelství *Taktik* (Obrázek 60). V ní si žáci zopakují pravidla pro písemné odčítání.



Obrázek 60: Spojování výroků (Faltinová a kol. 2016a, s. 19)

2.2.5 Hledání cesty

Tato série úloh rozvíjí prostorovou představivost, orientaci v mapě a algoritmické myšlení. Většinou pracuje s mapami, kde vrcholy zastupují místa a hrany představují cesty mezi nimi.

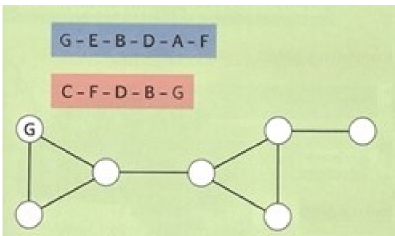


Obrázek 61: Zadání mapy (Hejný 2019, s. 5 a 32)

Typickým příkladem úlohy je prostředí používané v matematice profesora Hejného, které se jmenuje *Dětský park*. Toto prostředí má v učebnicích a pracovních sešitech nakladatelství *H-mat* jednotnou mapu (Obrázek 61 vpravo). Úkolem je najít stanoviště na mapě a vybarvit bílé cesty barvami, které je spojují nebo naopak zapsat stanoviště.

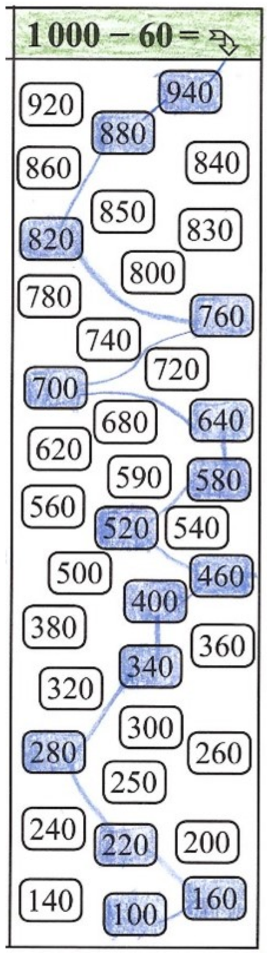
Další prostřední z Hejného matematiky, ve kterých se hledá cesta v grafech jsou *Autobusové linky* a *Výstaviště*. V prvním zmíněném prostředí (Obrázek 62) mají žáci za úkol dopsat do grafu stanice autobusových linek ze zadání, přičemž linky se musí překrývat. Ve výstavišti (Obrázek 63) je úkolem projít všechna pole (zapsat číselnou řadu přirozených čísel) za dodržení následujících pravidel: vstup i výstup jsou na okraji, mezi poli se může procházet jen přes sousední stěnu, nikoli diagonálně.

Úloha o autobusových linkách: *„Mezi obcemi jezdí dvě autobusové linky. Označ správně jména obcí."*



Obrázek 62: Autobusové linky (Hejný a kol. 2008b, s. 7)

Obrázek 63: Výstaviště (Hejný 2011b, s. 45)

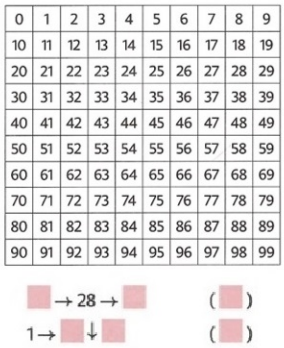


Obrázek 64: Odčítání čísla 60 (Rosecká 2011a, s. 15)

Často se v pracovních sešitech objevují grafy, které spojují posloupnost jako cestu v grafu. Tento typ úlohy je vhodný například pro vyvození a upevnění násobilkové řady. Na Obrázku 64 odčítáme číslo 60.

Cesty v grafu mohou být také způsob, jak se seznámit se stovkovou tabulkou (Obrázek 65) nebo kartézskou soustavou souřadnic, a naučit se v nich orientovat.

Úloha ve stovkové tabulce: *„Do cest ve stovkové tabulce dopiš chybějící čísla a zjisti součet každé cesty.“*



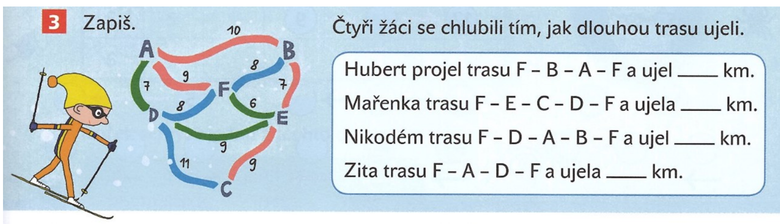
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Obrázek 65: Stovková tabulka (Hejný 2009, s. 19)

2.2.6 Délka trasy

Podobně jako u hledání cest budeme pracovat převážně s mapami, kde vrcholy budou reprezentovány místy a hrany cestami mezi nimi. Také tyto úlohy se v pracovních sešitech vyskytují v různých podobách, například:

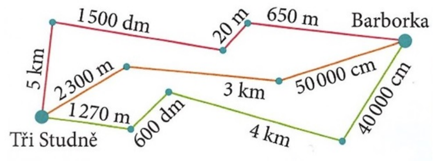
- pouhé sčítání délky trasy (Obrázek 66);



Obrázek 66: Počítání délky trasy (Hejný 2008b, s. 17)

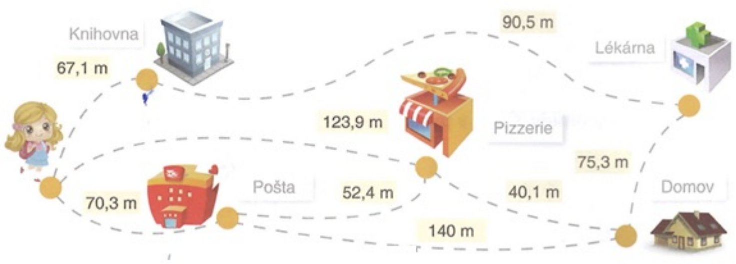
- sčítání délky trasy v různých jednotkách (Obrázek 67), žáci si tak kromě početních operací procvičí i převody jednotek;
- hledání nejkratší cesty (Obrázek 68) a jiné optimalizační úlohy (například *problém obchodního cestujícího*), které vyžadují sečtení a porovnání možných cest;
- dopočítávání chybějícího ohodnocení hran grafu (Obrázek 69);

Úloha s převody jednotek: *„Děti chtěly dojít ke studánce Barborka. Děti se rozdělily do 3 družstev a každé družstvo si zvolilo svou trasu. Příslušné údaje vidíš na obrázku. Vypočítej délky jednotlivých tras v metrech."*



Obrázek 67: Délky trasy s převody jednotek (Adámková a kol. 2017, s. 120)

Úloha o nejkratší cestě: *„Pomoz najít Kamile nejkratší cestu domů. Zkus nejkratší cestu nejprve odhadnout, poté ji spočítej."*



Obrázek 68: Hledání nejkratší cesty (Bártová 2017b, s. 16)

Úloha o délce trasy: *„Radek řekl: My ujedeme stejně kilometrů jako Eman. Pojedeme z Prahy do Brna, potom do Olomouce, Ostravy a zpět do Prahy.*
a) Obtáhni Radkovu cestu zeleně.
b) Dokážeš zjistit vzdálenost mezi Olomoucí a Ostravou, když víš, že vzdálenost z Brna do Prahy má 2 stovky a 4 jednotky?"

Obrázek 69: Dopočítávání délky trasy (Hejný 2009, s. 47)

- určování délky cesty ve stovkové tabulce nebo hledání nejkratší cesty;
- měření délky úsečky, která určuje hodnotu příslušné hrany (Obrázek 70). U této konkrétní

úlohy navíc žáci můžou žáci hledat eulerovský tah, všimněme si, že cedulky s nápisy *vchod* a *východ* jsou u vrcholů s lichým stupněm.

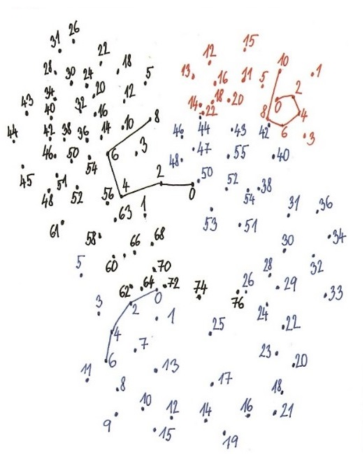
Úloha o měření trasy: *„Chlapci chtěli v botanické zahradě projít celý skleník a nic nevynechat. Podívej se na plánek skleníku a změř délku chodníků vyznačenou přerušovanými čárami. Víme, že 1 cm na plánku odpovídá 5 m ve skutečnosti. Vypočítej, kolik metrů kluci ve skleníku nachodili, pokud šli každou cestou pouze jednou."*

Obrázek 70: Měření trasy (Landová a kol. 2019a, s. 135)

Spojovačka

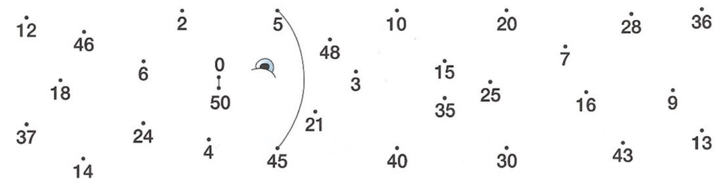
Účelem je spojit hranami (křivkami nebo úsečkami) vrcholy (přirozená čísla, která tvoří řadu) tak, že postupujeme postupně od nejnižší hodnoty až po tu nejvyšší. Jedná se o jednoduché úlohy, které mají propedeutický charakter a slouží především k procvičení číselné řady, a proto je najdeme častěji v materiálech pro mladší žáky.

Úloha o sudých číslech: *„Spoj k sobě. Začni od nuly a počítej po dvou. Některá čísla se nespojují."*



Obrázek 71: Sudá čísla
(Hejný a kol. 2008b, s. 58)

Úloha o násobilce 5: *„Násobky pěti zakroužkuj. Potom je spoj od nejmenšího k největšímu.“*



Obrázek 72: Násobilka 5 (Faltinová a kol. 2017, s. 20)

V didaktických materiálech, ale najdeme i obtížnější varianty těchto úloh. Například spojováním číselné řady čísel, které nejdou bezprostředně za sebou. V pracovním sešitu nakladatelství *Taktik* (Obrázek 72) využili spojovačku k procvičení násobilky pěti.

V pracovní učebnici nakladatelství *Fraus* (Obrázek 71) máme spojovat sudá čísla, navíc vytvořili obrázek ze tří „spojovaček“, které jsou barevně odlišené. Vrcholy jsou blízko u sebe, procvičujeme tak i pozornost a zrakovou percepci.

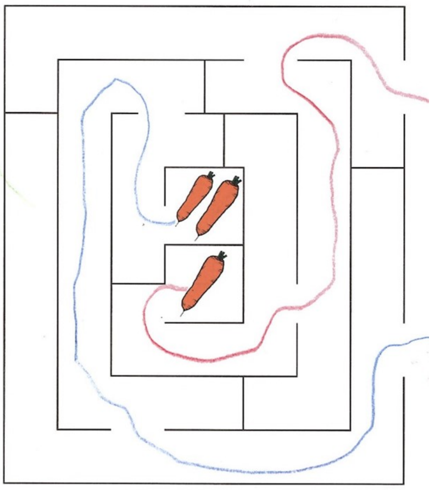
2.2.7 Bludiště

Bludiště mají přitažlivý vzhled a děti se s nimi setkávají už v mateřské škole, žáci si je nespojují s matematikou a jsou určeny spíše žákům mladším. Na těchto úlohách žáci trénují mimo jiné pozornost a prostorovou a pravolevou orientaci. Pokud bludiště převedeme do grafu, stává se přehlednějším a jednodušeji se orientujeme ve vztazích mezi jednotlivými chodbami a křižovatkami.

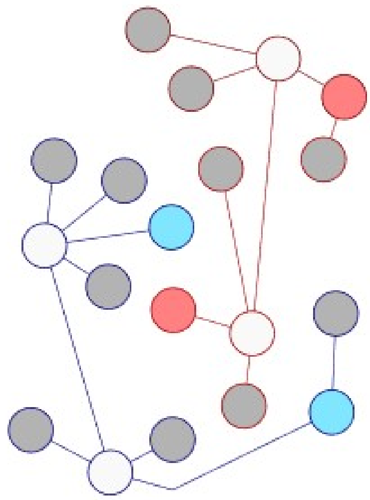
Podle Příhonské (2005) je pro zkoumání bludišť nejvhodnější matematickou disciplínou právě teorie grafů. Každé bludiště je možné znázornit jako graf, ze kterého lépe vyčteme vlastnosti bludišť, neboť dlouhé chodby v bludišti jsou v grafu znázorněny krátkými hranami.

Na Obrázku 74 jsou rozhodovací stromy vytvořené pro bludiště vlevo. Vrcholy grafu představují všechny křižovatky, slepé cesty a také vchod a východ, hrany jsou cesty mezi nimi. V našem příkladu symbolizují červené a modré vrcholy začátek a konec cesty, šedé vrcholy jsou slepé cesty v bludišti. I bludiště, která se objevují v didaktických materiálech mohou mít různé modifikace:

- najít optimální cestu v bludišti;
- najít více cílů v bludišti (Obrázek 73);

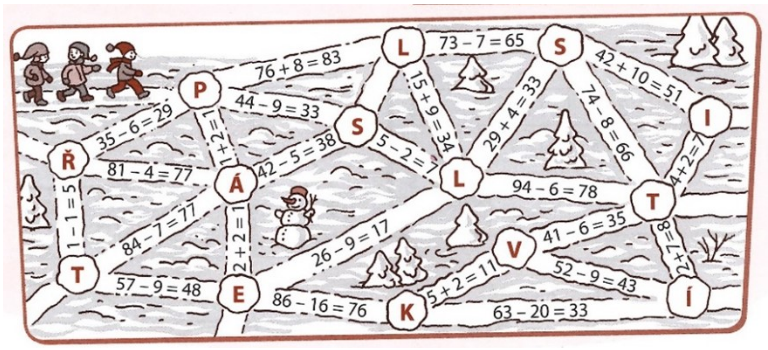


Obrázek 73: Dvě cesty v bludišti
(Rosecká 2012b, s. 4)



Obrázek 74: Rozhodovací stromy

- slovní nebo číselná tajenka, kterou „sbíráme“ při průchodu správnými chodbami, ty nám mohou poskytovat zpětnou vazbu o správnosti našeho postupu;
- omezení průchodnosti bludištěm na základě údajů v jejich chodbách, na Obrázku 75 jsou průchodné jen chodby s pravdivými příklady;



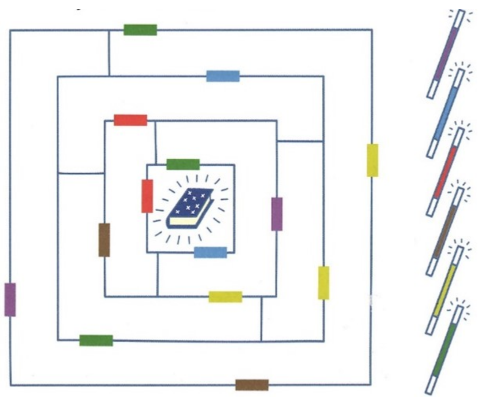
Obrázek 75: Bludiště s příklady (Bulín a Korityák 2007b, s. 16)

- barevné bludiště[1], které nabízí další možnosti úpravy zadání:
  - průchod barevnými bránami podle předem určeného pořadí (Obrázek 76);
  - průchod barevnými bránami s předem určeným počtem jednotlivých barevných bran, ale v libovolném pořadí;
  - výběr nejkratší cesty bludištěm a zapsání řešení pomocí barevných bran;

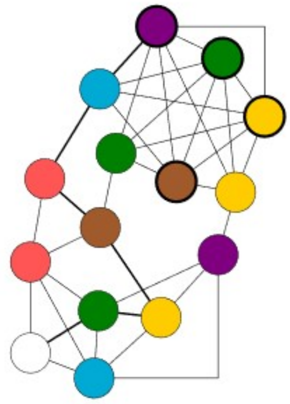
[1]Hejný (1998) se tomuto typu úloh více věnoval ve své publikaci *Barevná bludiště* [19].

– nalezení cesty se zadaným počtem bran, které je potřeba projít, ale bez určení jejich barev a pořadí.

Na Obrázku 77 můžeme vidět, jak by barevné bludiště mohlo být zobrazeno formou grafu. Tlustě ohraničené vrcholy náleží krajním vchodům do bludiště. Střed bludiště je reprezentován bílým vrcholem. Správná trasa je vyznačena tučnou čarou.



Obrázek 76: Barevné bludiště (Hejný 2019, s. 25)

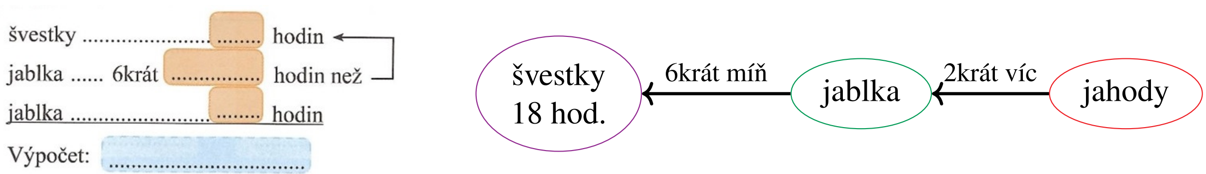


Obrázek 77: Rozhodovací strom barevného bludiště

2.2.8 Využití teorie grafů při řešení slovních úloh

S využitím grafů se často setkáme při zápisu slovních úloh typu o x větší nebo menší, případně y-krát větší/menší. Do vrcholu grafu zapíšeme důležité údaje ze zadání, se kterými poté budeme operovat a hrana je orientovaná a ohodnocená danou operací. Slovní úlohu o ovoci můžeme vidět zapsanou dvěma různými způsoby na Obrázku 78.

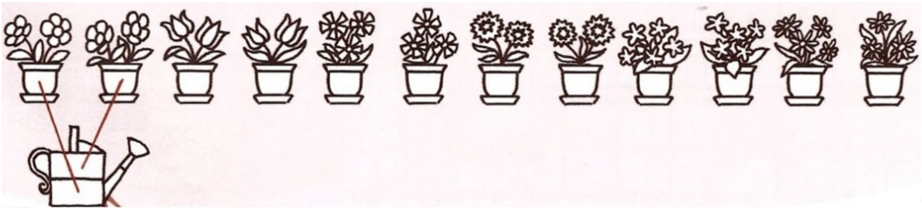
Slovní úloha o ovoci: *„Švestky se v sušičce ovoce suší 18 hodin. Jablka se suší šestkrát kratší dobu než švestky. Jahody se suší dvakrát delší dobu než jablka. Kolik hodin se suší jablka?“*



Obrázek 78: Slovní úloha o ovoci, (Faltinová a kol. 2017, s. 27)

Kromě slovního zápisu jsou grafy užitečné i pro zápis grafický, který mnohdy pomůže lépe než slovní zápis, především mladším dětem nebo žákům se specifickými vývojovými poruchami učení. Hojně se využívá při zápisu slovních úloh kombinatorického charakteru. V úloze na Obrázku 79 graf zobrazuje, kolik konviček budeme potřebovat pro zalití dvanácti kytiček.

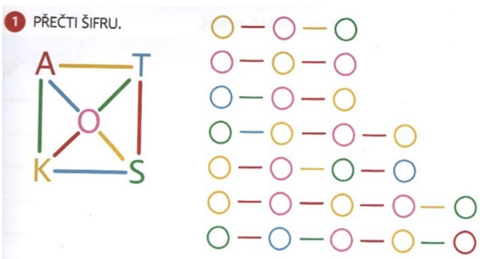
Slovní úloha o zalévání: *„Zvoněnka má zalít 12 kytiček a do každého květináče nalít půl konvičky vody. Prozradíš jí, kolikrát bude muset jít pro vodu? Nejlépe bude, když jí konvičky pod květináče namaluješ a spojíš je s květinami.“*



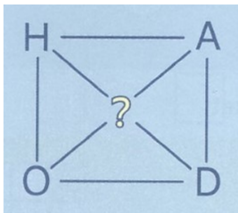
Obrázek 79: Grafický zápis slovní úlohy (Bulín a Korityák 2007b, s. 23)

2.2.9 Další zajímavé úlohy

Některé úlohy nepatří do žádné z výše uvedených oblastí, ale přesto obsahují grafy, například úlohy propojující matematiku s českým jazykem. Kromě matematických představ rozvíjí také slovní zásobu. Na Obrázku 80 jde především o orientaci v grafu, protože sledy jsou zadány barvami vrcholů a hran, v úloze na Obrázku 81 už žáci musí více využít vlastní znalost jazyka.

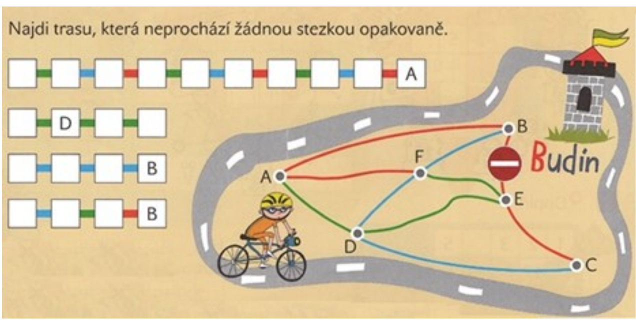


Obrázek 80: Slovní šifra 1 (Hejný 2018, s. 60)



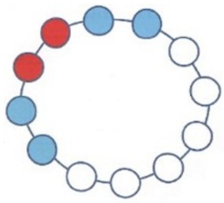
Obrázek 81: Slovní šifra 2, (Hejný 2019, s. 37)

Známou úlohou rekreační matematiky „jednotažky“, tedy hledání eulerovského tahu. Většina lidí si pro tento typ úlohy představí kresbu domečku jedním tahem, ale může mít i jiné podoby. Například cyklistikou trasu jako na Obrázku 82.



Obrázek 82: Cyklistická jednotažka (Hejný a kol. 2008a, s. 27)

Posloupnosti můžeme také zakreslit jako grafy. Barvy vrcholů v kružnici na Obrázku 83 se střídají vždy po dvou. V pracovním sešitě nakladatelství *Fraus* (Obrázek 84) najdeme úlohu, která se ptá na stupeň vrcholu.



Obrázek 83: Barevná posloupnost (Hejný 2018, s. 48)

Obrázek 84: Úloha o stupni vrcholů (Hejný a kol. 2008a, s. 38)

2.3 Výhody integrace teorie grafů do výuky matematiky

Přestože teorie grafů není součástí učebních osnov na 1. stupni ZŠ, některé její myšlenky bývají využívány při řešení různých problémů, například k systematizaci, vizualizaci nebo procesualizaci. (Příhonská 2005, s. 9) Grafy umožňují přehledně zobrazit i zdánlivě obtížnou úlohu. Prostřednictvím propojených vrcholů můžeme studovat základní koncepty bez znalosti složitých nástrojů a technik.

Grafy představují novou, neobvyklou strukturu oproti těm, se kterými žáci běžně pracují. I když je tato struktura odlišná, stále je potřeba odůvodňovat své kroky, jako kdekoli jinde. Žáci nalézají různé cesty ke správnému řešení a při představování vlastních postupů rozvíjí verbalizaci myšlení a komunikaci. Podle Nimana (1975, s. 352) využívání grafů zlepšuje dovednost v samostatném používání základních matematických dovedností.

Kromě zmíněných kognitivních cílů, teorie grafů rozvíjí i cíle afektivní, jelikož může podnítit dětský zájem o matematiku. Žáci mohou zkoumat grafy, které reprezentují jejich vlastní sociální sítě, cesty do školy nebo oblíbené aktivity. To jim ukazuje praktické využití nejen této disciplíny (ale i matematiky obecně) v životě. K motivaci přispívá i estetičnost a intuitivní přirozenost grafů. Zdánlivě vyžadují jiný způsob myšlení a s pomocí teorie grafů se můžou uchytit i žáci, kteří jsou v běžné matematice méně úspěšní.

Grafy umožňují vizualizaci úloh, čímž podporují vizuální učení a v důsledku toho i paměť. Jsou vhodné pro řešení optimalizačních úloh, posilují logické uvažování a rozvíjí řešitelské strategie.

Teorii grafů nemusíme aplikovat jen do hodin matematiky, jelikož má využitelnost v řadě oborů, je vhodné ji tak integrovat i do výuky přírodopisu, vlastivědy, českého jazyka i dalších předmětů. Třeba tzv. myšlenkové mapy jsou jedním z příkladů grafů, které se využívají pro rozvoj kritického myšlení a spojování souvislostí i v jiných vyučovacích předmětech.

Základy teorie grafů jsou, jak už jsme zmínili, velice intuitivní. Na druhou stranu, ale grafy nabízí i pokročilá témata různých obtížností, a tak můžeme zaujmout i žáky nadané a talentované, kteří rádi přijímají logické výzvy.

Praktická část

3 Charakteristika výzkumu

3.1 Cíle výzkumu

Hlavním cílem výzkumu bylo analyzovat strategie a úspěšnost žáků při řešení úloh z teorie grafů ve všech ročnících 1. stupně ZŠ. Tento cíl jsme rozdělili na následující dílčí cíle.

- Vytvořit didaktické testy obsahující úlohy z teorie grafů pro žáky všech ročníků na 1. stupni ZŠ.
- Reflektovat náročnost vytvořeného didaktického testu s učiteli.
- Zjistit, jak často učitelé zařazují teorii grafů do výuky matematiky na 1. stupni ZŠ.
- Porovnat úspěšnost jednotlivých řešitelských strategií v každé z úloh didaktického testu.
- Provést analýzu chyb, které žáci dělali při řešení sestaveného didaktického testu.
- Ověřit, zda žáci s rozšířenou výukou matematiky řeší úlohy z teorie grafů s vyšší úspěšností, než žáci z běžných tříd.

3.2 Výzkumné otázky

Na začátku výzkumného šetření jsme stanovili následující výzkumné otázky:

- VO_1: Jaké jsou strategie při řešení vybraných úloh z teorie grafů žáky 1. stupně ZŠ?
- VO_2: Které typy úloh z teorie grafů je vhodné zařazovat do výuky matematiky na 1. stupni ZŠ?
- VO_3: Jaká je úspěšnost žáků při řešení neznámého typu úlohy, která využívá skóre grafu?

3.3 Výzkumný vzorek

Výzkum jsme realizovali v plně organizované městské škole se souhlasem ředitelky školy. Vzhledem ke stanoveným výzkumným otázkám jsme zvolili školu, kde jsou na 1. stupni v rámci všech ročníků, kromě běžných tříd, zřízeny i výběrové třídy s rozšířenou výukou matematiky. Paní ředitelka vznesla požadavek na zachování anonymity, proto zde neuvádíme název školy.

Výzkumu se účastnilo celkem 159 žáků, z toho 97 žáků navštěvuje běžnou třídu a 62 žáků se vzdělává ve výběrové třídě s rozšířenou výukou matematiky. Podrobnější rozložení výzkumného vzorku podle ročníků zobrazuje Tabulka 1.

ročník	běžná třída	matematická třída
1.	17	14
2.	20	14
3.	22	14
4.	16	10
5.	22	10

Tabulka 1: Četnost respondentů

Třídy s rozšířenou výukou matematiky (dále matematické třídy) fungují na škole od roku 2016, ale už předtím se škola devět let věnovala vzdělávání nadaných žáků. Mimo matematiku, mají žáci rozšířenou výuku anglického jazyka. Počet žáků v těchto třídách je omezen maximálním počtem 15 dětí. Jsou zřízeny jen na prvním stupni, poté žáci obvykle pokračují na víceletá gymnázia. V rozvrhu jsou zařazeny předměty, které nejsou součástí běžného vzdělávacího plánu. Pro účely našeho výzkumu je zajímavé, že ve všech ročnících mají žáci jednu hodinu týdně předmět *Logika*, kde řeší nestandardní a logické úlohy, šifry a hlavolamy. Ve 4. a 5. ročníku navíc přibývá hodina *Programování*, kde se žáci učí pracovat především v jazyce Scratch. Výuka matematiky je posílena o disponibilní hodiny a volitelné předměty. V nich je prohlubováno učivo matematiky, klade se důraz na samostatné a tvořivé řešení problémových úloh a na praktické procvičování probraného učiva. Současně mají za cíl žáky připravovat na matematické soutěže, rozvíjet kreativitu, logické myšlení, samostatnost a schopnost spolupracovat.

4 Fáze výzkumu a výzkumné nástroje

Náš výzkum začal jako kvalitativně orientovaný hledáním strategií, jaké využívají žáci během řešení úloh z oboru teorie grafů, a následně jsme přešli k metodám kvantitativního výzkumu, když jsme hledali míru využití těchto strategií. V současném pedagogickém výzkumu nejsou kvalitativní a kvantitativní přístupy vnímány jako soupeřící paradigmata, ale naopak je vhodné oba přístupy kombinovat a využít tak silné stránky obou metodologických přístupů (Švaříček a Šeďová 2007, s. 27).

Sběr dat jsme realizovali ve 2. pololetí školního roku 2022/2023. V jednotlivých třídách jsme strávili vždy dvě vyučovací hodiny. V úvodu jsme žákům představili jednotlivé úlohy a ukázali jejich řešení na vzorových příkladech, jež jsou součástí didaktických testů. Při komunikaci s žáky jsme nahradili pojmy z teorie grafů slovy, která jsou dětem blízká (např. slovo „čáry“ místo pojmu „hrany“), u popisu úloh níže však používáme odborné názvy. V průběhu uvádění jednotlivých úkolů jsme pracovali s připraveným zadáním vystaveným na tabuli.

Stěžejní část výzkumu tvoří analýza řešitelských strategií žáků. Proto jsme zvolili jako hlavní výzkumný nástroj didaktický test, který jsme gradovali pro jednotlivé ročníky. Pro upřesnění získaných dat jsme testy doplnili o reflexi didaktických testů, kterou jsme provedli spolu s žáky.

4.1 Předvýzkum: Interview s učiteli

Před samotným výzkumem jsme učitele, kteří učí matematiku ve zúčastněných třídách, seznámili s didaktickým testem pro daný ročník a následně jsme s těmito pedagogy provedli interview. Podle Adedoyina (2020) je polostrukturované interview přístup ke sběru dat, při kterém výzkumník nemusí dodržovat přesné formální otázky. Naopak se očekává, že bude klást otázky otevřené a poskytne prostor pro konverzaci s respondenty. Tato metoda umožňuje volnost odpovědí, tudíž může přinášet nové a nečekané informace.

Učitelé vyjadřovali svůj názor na obtížnost a atraktivitu předložených úloh. Dále jsme se ptali na jejich zkušenost s obdobnými úlohami a četnost zařazování do hodin matematiky.

4.2 Didaktické testy

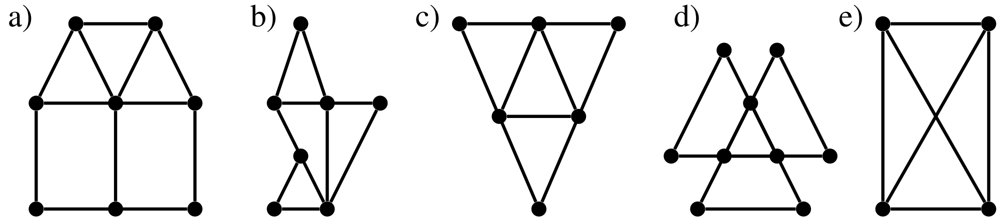
Hlavním výzkumným nástrojem pro náš výzkum byl didaktický test. Tento pojem sice různí autoři vymezují rozdílně, ale shodují se v tom, že didaktické testy objektivně zjišťují úroveň zvládnutí určitých schopností a dovedností u respondentů. Od běžné zkoušky se liší předem stanovenými pravidly, kterými se výzkumník řídí při navrhování, ověřování, hodnocení a interpretování testu. (Chráska 2016, s. 178)

Didaktický test obsahuje šest úloh, které jsme gradovali tak, aby se obtížnost stupňovala s vyššími ročníky. Úlohy do didaktického testu jsme volili na základě analýzy vybraných pracovních sešitů matematiky, kterou jsme prezentovali v teoretické části. Jednak jsme zařadili úlohy, které vyžadují orientaci v různých typech grafů, dále úlohy vyžadující logické a algoritmické myšlení. Jelikož chceme poukázat na možnosti využití teorie grafů ve výuce matematiky, modifikovali jsme některé úlohy, aby ověřovali základní matematické dovednosti, které se vyučují na 1. stupni ZŠ (například početní operace sčítání, odčítání, násobení a dělení, porovnávání čísel). Mimo jiné jsme do didaktického testu zařadili i nový typ úlohy, konkrétně úlohu využívající skóre grafu. Následuje charakteristika didaktických testů.

4.2.1 Úloha 1: Jednotažky

Na úvod didaktického testu jsme jako motivační úlohu zvolili hledání cesty jedním tahem. Symbolicky se jedná také o úlohu, kterou se datuje počátek teorie grafů. Žáci úlohu většinou nepovažují za matematickou, protože se v ní neoperuje s čísly. V teorii grafů bychom úlohu označili jako hledání eulerovského tahu. Tuto úlohu jsme gradovali zvyšováním počtu grafů a přidáváním dílčích úkolů.

Úloha 1: *Zakroužkuj obrázky, které můžeš nakreslit jedním tahem. To znamená, že každou čáru nakreslíš právě jednou a při kreslení nezvedneš tužku z papíru.*



Obrázek 85: Zadání 1. úlohy

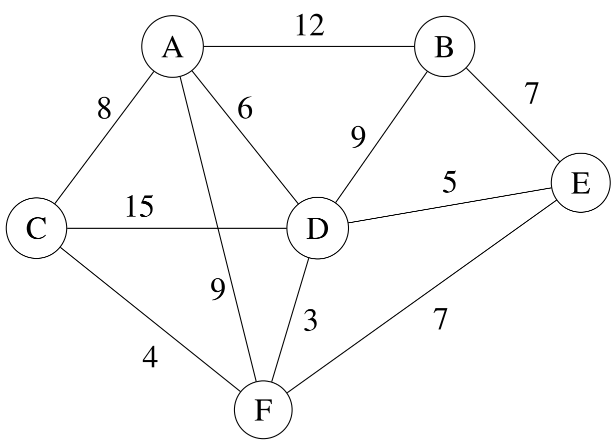
Při představování této úlohy jsme žákům objasnili, co znamená jedním tahem, tedy, že při kreslení nesmí zvednout tužku z papíru a každou hranu můžou nakreslit právě jednou. To jsme demonstrovali na obrázku „domečku“, kde jsme zápisem na tabuli ukázali možné a nesprávné tahy. Každý z uvedených grafů (Obrázek 85), u kterého existuje eulerovský tah, je možné zakreslit jedním tahem vícero způsoby.

4.2.2 Úloha 2: Délka trasy

Pro vyřešení druhé úlohy, kde žáci pracují s mapou (Obrázek 86), je potřeba dovednost sčítání a odčítání a orientace v grafu. Mapu představuje ohodnocený neorientovaný graf, kde hodnoty hran symbolizují vzdálenost mezi místy na mapě.

Nejjednodušší gradace této úlohy spočívá ve zvyšování hodnoty čísel, které označují hodnoty hran. Další způsob, je prodloužit délku trasy, kterou mají žáci spočítat, tedy zadat trasu sestávající z více hran. S vyššími ročníky se navíc rozšiřuje zadání úlohy. Od prostého sečtení délky trasy, přes srovnávání a dopočítávání hodnot, až po problém obchodního cestujícího. Pro zjednodušení orientace v grafu jsou vrcholy v mapě pro 1. ročník označeny písmeny i obrázky. Úloha měla vždy právě jedno správné řešení.

Úloha 2: *Jak dlouhá je trasa* A–D–F ?



Zkus najít nejkratší cestu, která začíná a končí v bodě A a zároveň navštíví všechny ostatní body.

Obrázek 86: Zadání 2. úlohy

4.2.3 Úloha 3: Skóre grafu

Třetí úlohu jsme zvolili, abychom zjistili, jaký přístup žáci zaujmou k úloze, pokud s podobným typem zadání nemají zkušenosti. O absenci zkušeností s touto úlohou jsme rozhodli na základě analýzy vybraných pracovních sešitů matematiky a během výzkumu nám ji potvrdili vyučující i žáci. Jedná se o úlohu, kde žáci mají zakreslit graf na základě zadaného skóre grafu, tedy spojit hranami vrcholy, když znají jejich stupeň.

V testu jsme použili dva způsoby gradace. Zvyšování počtu vrcholů v grafu a rozestavění vrcholů v prostoru. Ukázka zadání na Obrázku 87 je číslovaná podle příslušných ročníků. Žáci 3. ročníku kreslili graf se stejným zadáním skóre jako žáci 2. ročníků, tedy 2a, 2b.

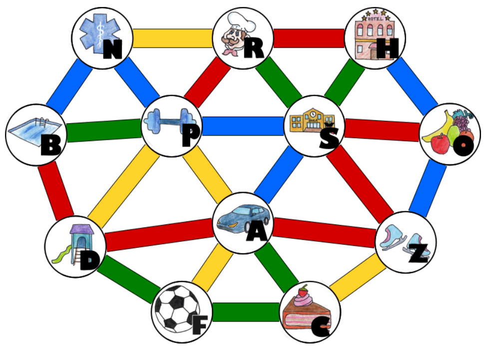
Úloha 3: *Spoj kolečka čarami tak, aby z každého kolečka vycházelo tolik čar, kolik udává číslo uvnitř. Každá čára musí mít začátek i konec v kolečku.*

1a	2	2	2			1b	1	2	1		
2a	2	2	2	2		2b	1	2	2	3	
4a	1	1	1	3		4b	2	2	3	3	4
5a	1	2	3	3	3	5b	2	3	3	4	4

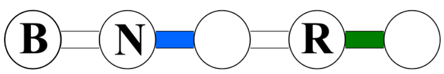
Obrázek 87: Zadání 3. úlohy

4.2.4 Úloha 4: Orientace v mapě

Ve 4. úloze bylo naším cílem zjistit, jak si žáci poradí s izomorfními podgrafy. Tedy s orientací v grafu, v případě, že graf v zadání nemá stejnou podobu, jako graf v předloze (Obrázek 88).



Úloha 4: *Podle mapy napiš do prázdných koleček písmena a vybarvi bílé cesty.*



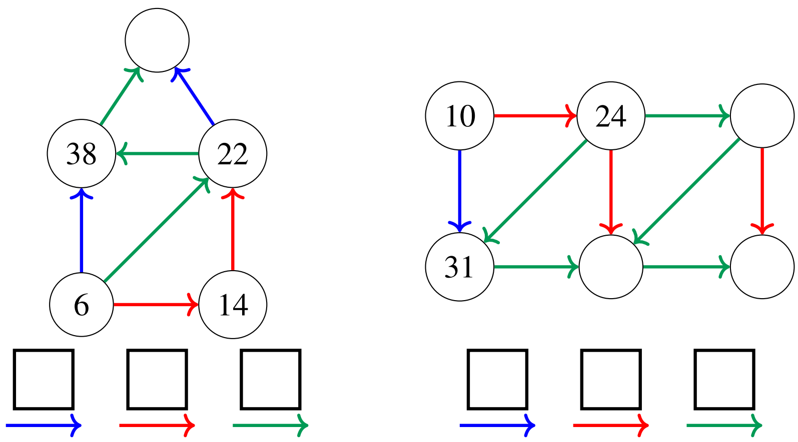
Obrázek 88: Zadání 4. úlohy

Tato úloha nabízí široké množství gradačních prvků. První možností zvýšení obtížnosti je kombinace vynechání názvu vrcholů i barevných označení hran, jednodušší je doplňovat pouze prvky jedné množiny. Další možností je zvýšení počtu chybějících údajů. Také jsme úlohu ztížili, když jsme vynechali takový údaj, aby se cesta v podgrafu stala nejednoznačnou. Žáci se museli rozhodovat mezi dvěma nebo více prvky k doplnění s tím, že právě jeden z možných prvků byl správný. Pokud by graf doplnili o nesprávný prvek, cesta v podgrafu by dál nemohla pokračovat. Bylo tedy potřeba, aby uvažovali více kroků dopředu. Naopak pro nejmladší žáky jsme úlohu zjednodušili označením vrcholů v podgrafech kombinací obrázku a písmene, a také využitím indukovaných podgrafů. Všechny podgrafy mají právě jedno možné řešení.

4.2.5 Úloha 5: Sčítací grafy

Naším záměrem v 5. úloze bylo ověřit, zda žáci dokáží pracovat s jednoduchými početními úkony v grafu (Obrázek 89). Směr hrany v grafu určuje směr od sčítance k součtu, druhý sčítanec má podobu ohodnocení hrany. Jedná se tedy o ohodnocené orientované grafy a žáci místo známých symbolů $+$ a $=$, musí sledovat směr hrany. Tyto grafy jsou inspirovány metodou profesora Hejného a prostředím, které se nazývá *pavučiny*.

Úloha 5: *Doplň chybějící čísla. Čísla ve čtverečcích určují, jaké číslo přičítá šipka s danou barvou.*



Obrázek 89: Zadání 5. úlohy

Stejně jako u jiných úloh, kde žáci operují s čísly, i tady je nejjednodušším způsobem gradace změna číselného oboru, ve kterém žáci počítají. Také jsme úlohu ztížili tím, že jsme vynechali některé z počátečních vrcholů tak, aby žáci nemohli určit hodnotu sečtením, ale museli použít jiný postup. Obdobně jako u předchozí úlohy, je zde jednodušší doplňovat prvky pouze jedné množiny, vrcholy nebo hodnoty hran. Dalším gradačním prvkem je absence nabídky ohodnocení hran a počet prvků, které mají žáci doplnit. Všechny varianty zadání v této úloze mají právě jedno řešení.

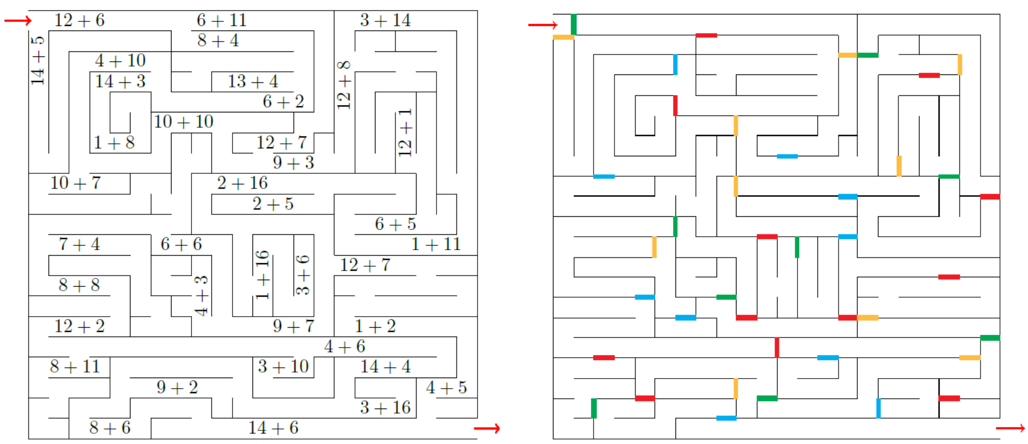
4.2.6 Úloha 6: Bludiště

Jako poslední úlohu jsme zvolili bludiště (Obrázek 90), které, stejně jako první úloha, nepůsobí jako matematická úloha a zároveň s ním má většina žáků zkušenost. Bludiště může sloužit k ověření a procvičení pozornosti a prostorové orientace, zároveň o něm jde uvažovat i logicky a systematicky, kdy si například dopředu označíme slepé cesty. Křižovatky v bludišti můžeme považovat za vrcholy a jeho chodby za hrany bludiště.

Bludiště mají pro všechny ročníky stejné křižovatky a chodby. Ke gradaci jsme využili tzv. podmínky, prvky, které jsou umístěny na křižovatkách a ovlivňují, jestli je cesta průchodná. Na Obrázku 90 jsou ukázky ze zadání pro 2. a 4. ročník. Podmínkou pro žáky 2. ročníku byla průchodnost pouze těch chodeb, které mají sudý výsledek. Starší žáci hledali cestu, která využije nejmenší možný počet červených bran.

Z našeho výzkumu vyplývá, že přestože všichni žáci znají princip bludiště, tak pouze 18 % už se v minulosti setkalo s bludištěm, které obsahovalo podmínky. Žáci tak kromě bludiště museli zvládnout i početní příklady a využít znalosti o vlastnostech čísel (určení sudosti), algoritmické myšlení a porovnávání grafů. Každé bludiště má pouze jedno řešení, včetně těch s podmínkami.

Úloha 6: *Projdi bludištěm.*



Obrázek 90: Zadání 6. úlohy

4.3 Reflexe žáků

Data jsme sbírali také pozorováním a dotazováním žáků. Nechtěli jsme pro zpětnou vazbu využívat dotazník, protože vypracovat samotný didaktický test trvalo žákům většinu vyučovacích hodiny a obávali jsme se, že už by vyplňování dotazníku nevěnovali dostatečnou pozornost. Proto po dokončení testu proběhla reflexe žáků, která byla interaktivnější. Žáci do svých testů zaznačili, která úloha byla podle jejich názoru nejobtížnější, a která jim přišla nejzajímavější. Nakonec jsme si společně řekli správné výsledky a žáci představili spolužákům své postupy řešení. Společně jsme hledali další řešení a poznatky žáků jsme si během reflexe zapisovali k jejich jménům tak, abychom je následně mohli spojit s daným didaktickým testem.

5 Prezentace výsledků výzkumného šetření

5.1 Vyhodnocení interview s učiteli

Z rozhovorů s učiteli víme, že všichni, kteří vyučují v matematických třídách vedou žáky k využívání rozmanitých strategií, sami jim některé z nich ukazují při řešení nestandardních úloh a žáci občas představují svá řešení v rámci reflexe. I žáci dvou běžných tříd své strategie prezentují spolužákům, ve zbylých třech třídách nikoli (kvůli nedostatku času, v 1. ročníku navíc žáci nepracují s úlohami, které by umožňovaly vlastní řešitelské strategie).

Většina učitelů se shodla, že preferují úlohy procvičující dovednosti, které jsou součástí učebních osnov. V případě našeho didaktického testu tedy úlohy 2 a 5. Pouze jedna vyučující odpověděla, že teorii grafů ve výuce nevyužije, protože jsou podle jejího názoru pro žáky příliš náročné a upřednostňuje procvičování početních příkladů standardním způsobem.

Sedm učitelů zmínilo, že úlohy, které nevyužívají počty, jsou vhodné pro nadané a bystré žáky, kteří dokončí práci rychleji, jako zajímavé úlohy navíc. Polovina pedagogů uvedla, že jsou tyto úlohy vhodné pro jejich motivační efekt ke zpestření výuky. Žádnou úlohu učitelé neoznačili jako nevhodnou.

Většina učitelů se domnívala, že úloha 3 o skóre grafu bude jedna z obtížnějších, ale žáci ji zvládnou vyřešit. Dva učitelé si mysleli, že ji nejspíš většina jejich žáků nepochopí.

Podle reflexe s žáky i rozhovorů s učiteli, měli žáci z matematických tříd větší zkušenosti s podobnými typy úloh a věnují se nestandardním úlohám i v rámci hodin Logiky. Dále mají větší dotaci hodin matematiky, což mohlo přispět také k nižšímu počtu numerických chyb. Některé z úloh v didaktickém testu byly inspirovány Hejného metodou a jak vyplývá z analýzy vybraných pracovních sešitů v teoretické části, profesor Hejný ve svých učebnicích a jiných didaktických materiálech pracuje s teorií grafů. Podle výpovědí učitelů mají žáci z matematických tříd zkušenost s touto metodou, ve dvou třídách ji používají jako dominantní styl výuky. Naopak v běžných třídách zařazují do výuky prvky Hejného metody tři učitelé a dvě třídy se s ní nikdy nesetkali. V neposlední řadě je důležité zmínit, že matematické třídy jsou výběrové, což jistě také přispělo k jejich vyšší úspěšnosti.

5.2 Vyhodnocení didaktických testů

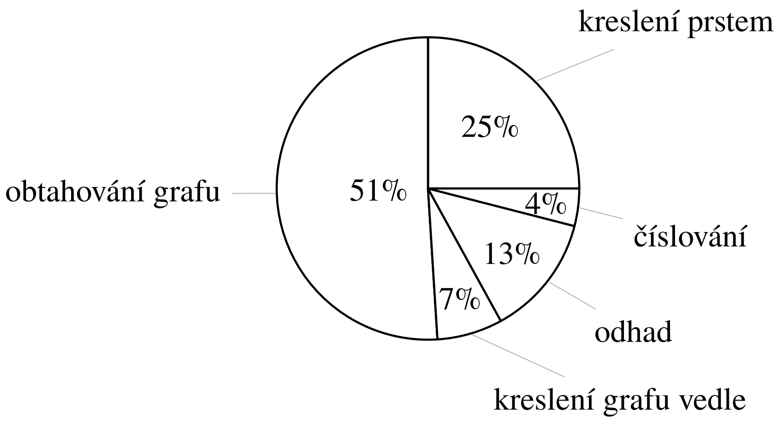
Při analýze pracovních listů využíváme sumarizování a kategorizování, což Flick (2018, s. 484) označuje jako první redukci sesbíraných dat, druhou redukcí je následné rozkrytí a interpretace významů, které se skrývají v žákovských řešeních. Pro naše potřeby jsme využili metodu otevřeného kódování, jak ji popisuje Šeďová (Švaříček a Šeďová 2007, s. 211–230), kdy jsme nejdříve data (v našem případě slova, obrázky, matematické zápisy a čísla, která si žáci zapisovali do pracovních listů) rozdělili na jednotky. Každé takovéto jednotce jsme přiřadili kód, který ji specifikuje a odlišuje od ostatních. K totožným kódům jsme sepsali, kde se vyskytly a následně jsme je systematicky kategorizovali. Systém kategorií vznikl pro každý ročník a úkol zvlášť a následně jsme sledovali souvislosti mezi jednotlivými ročníky a úlohami.

5.2.1 Úloha 1: Jednotažky

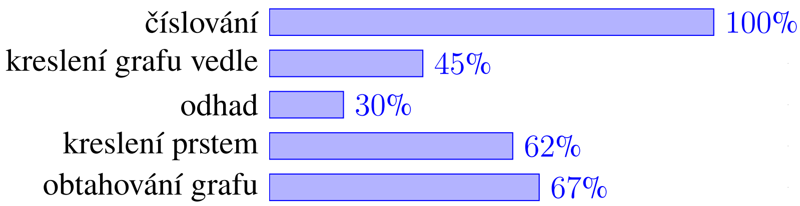
Při hledání eulerovského grafu jsme vypozorovali 5 strategií, které žáci používali.

- Tou nejčastější (Graf 1) bylo obtahování grafu přímo do zadání. Tato strategie vykazovala i vysokou úspěšnost (Graf 2).
- Jen 13 % žáků využilo nejméně úspěšný způsob hledání eulerovského grafu, a to odhad. Tato strategie byla obvyklejší u mladších žáků. Ve 4. a 5. ročníku ji nevyužil nikdo, což může souviset i s rozšiřujícími úlohami.
- Téměř poloviční úspěšnost mělo kreslení grafu vedle. Nižší úspěšnost této strategie, než kreslení přímo do grafu, připisujeme tomu, že žáci graf zkoušeli kreslit bez předkreslených vrcholů, přehlednost kreslení grafu byla tedy nižší.
- Nejméně častou strategií je číslování, naopak ale vykazuje 100% úspěšnost (Obrázek 91). Žáci si při kreslení grafu číslovali, jak postupovali. Měli tak představu o tom, jaké hrany už obtáhli a nestalo se, že by se spletli a některou hranu vynechali nebo zakreslili vícekrát, což je podle nás hlavním důvodem nulové chybovosti.

Žáci z matematických tříd častěji volili strategie, při kterých zaznamenávali postup. Naopak strategie, kdy myšlenkový proces není zaznamenaný volili žáci z běžných tříd. Tyto rozdíly přikládáme faktu, že žáci z matematických tříd se s podobnými nestandardními úlohami setkávají častěji.



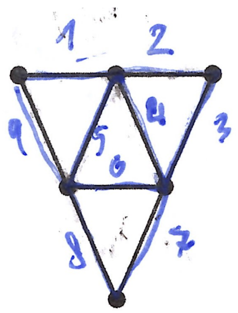
Graf 1: Rozložení žákovských strategií v 1. úloze



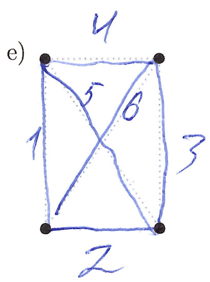
Graf 2: Úspěšnost žákovských strategií v 1. úloze

Žáci z běžných tříd v této úloze chybovali častěji, nejvíce v grafu e) (68 % chybujících). Častý důvod chybování můžeme vidět na ukázce z didaktického testu na Obrázku 92. Žák čísloval hrany grafu, ale hranu s číslem 6 očísloval ve špatném směru. Žáci z matematických tříd chybovali nejvíc v grafu b) (78 % chybujících).

Pouze jeden žák z matematické třídy se s podobnou úlohou v minulosti nesetkal, u žáků z běžných tříd zkušenost nemělo 19 % žáků. Vyšší rozdíl v úspěšnosti měla úloha pro starší žáky, kde měli za úkol očíslovat postup kreslení eulerovského grafu. Z žáků, kteří úlohu řešili,



Obrázek 91: Strategie číslování hran



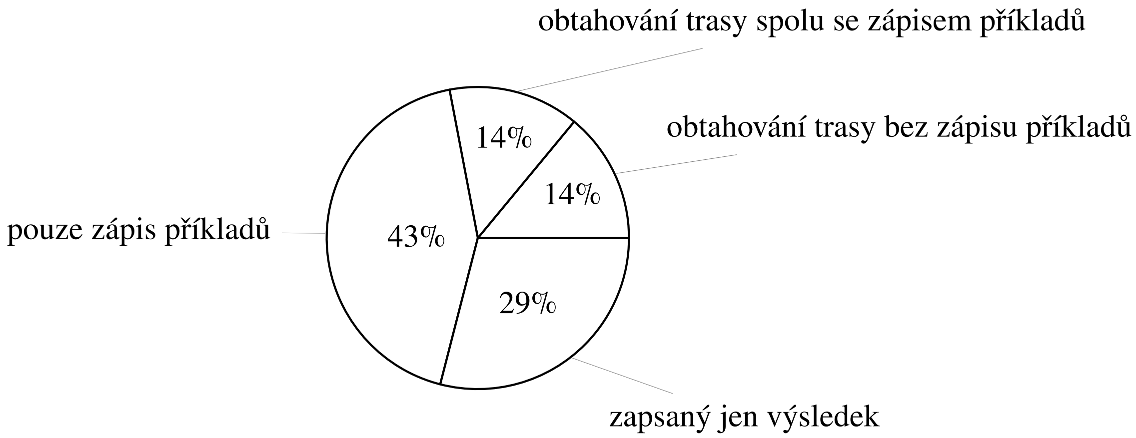
Obrázek 92: Špatné číslování hrany 6

v ní nechybovalo 30 % žáků z běžných tříd a 58 % žáků ze tříd matematických. U některých žáků z běžných tříd jsme vypozorovali „chyby z nepozornosti“, které se u druhé skupiny respondentů neobjevily. Například zapomněli některou z hran očíslovat, nebo očíslovali hranu, která nesousedila s tou předchozí. Mnohem častěji také žáci z běžných tříd požadované grafy nakreslili, ale hrany ani vrcholy neočíslovali.

Jen dva žáci úlohu vynechali a nepokoušeli se ji vyřešit. Eulerovské grafy správně určilo 63 % žáků. Rozšiřující úkol pro 4. a 5. ročníky, očíslovat pořadí eulerovského tahu, bezchybně splnilo pouze 38 % žáků, ale 62 % očíslovalo správně alespoň jeden graf.

V pátém ročníku polovina žáků splnila navíc úkol, nakreslit eulerovský graf a zapsat různé pořadí hran. Všichni žáci, kteří tento úkol vypracovali ho splnili správně. Nejčastěji si žáci vybrali graf c) nebo „domeček“ (viz Obrázek 85).

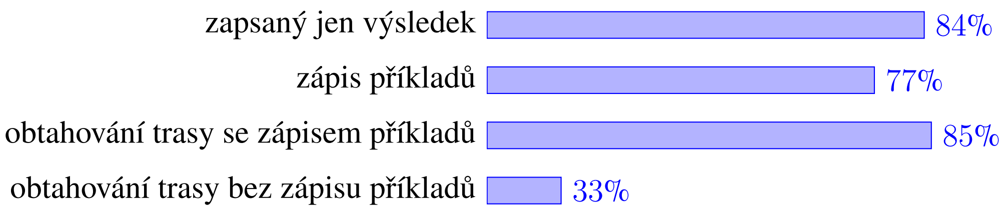
5.2.2 Úloha 2: Délka trasy



Graf 3: Rozložení žákovských strategií ve 2. úloze

Zaznamenali jsme 4 postupy při výpočtu délky trasy žáky. Tím nejfrekventovanějším byl zápis a výpočet příkladů, bez zaznačení trasy v grafu. Tento způsob využila téměř polovina žáků, kteří úlohu řešili (Graf 3). Nejméně úspěšní byli žáci, kteří jen obtáhli trasu a zpaměti spočítali délky tras (Graf 4). Překvapivě nejúspěšnější strategií bylo zapsání pouhého výsledku. Tuto strategii využívali především žáci 2. a 3. ročníku, kteří pravidelně procvičují sčítání a odčítání dvouciferných čísel zpaměti.

Z rozšiřujících úloh bychom rádi zmínili strategie žáků 5. ročníků, kteří řešili *problém obchodního cestujícího*. V souladu s naším očekáváním byli nejúspěšnější žáci, kteří zkoušeli vypočítat větší počet tras a jejich výsledné hodnoty mezi sebou porovnali. Tuto strategii využilo



Graf 4: Úspěšnost žákovských strategií ve 2. úloze

32 % žáků. (Bohužel nemáme dostatečné množství dat na to, abychom mohli zhodnotit, jestli se s vyšším počtem vypočítaných a porovnaných tras, zvyšuje i úspěšnost řešení úlohy.)

Další často využívanou strategií byl odhad cesty, většinou na základě délky úsečky, která hranu znázorňuje v grafu, tato délka ovšem nijak nesouvisí s hodnotou hrany. Jiná strategie se podobá Kruskalovu algoritmu, který se využívá při hledání minimální kostry grafu. Tito žáci nejdříve spojovali vrcholy hranami s nejnižším ohodnocením, a potom je doplnili tak, aby vytvořili hamiltonovskou kružnici.

Úlohu neřešilo (tedy nezkusilo spočítat žádnou trasu, ani neřešilo dílčí úlohy) 32 % žáků z běžných tříd, u žáků z matematických tříd úlohu přeskočilo jen 9 % žáků.

Strategie obtahování grafu se zápisem příkladů měla v matematických třídách 100% úspěšnost, zatímco žáci, kteří zapsali jen výsledky měli nejnižší 64% úspěšnost. Naopak v běžných třídách byli nejúspěšnější žáci, kteří zapsali jen výsledek (95 %).

V matematických třídách žáci dvakrát častěji chybovali v důsledku špatného zápisu čísel, naopak v běžných třídách měli žáci častěji početní chyby.

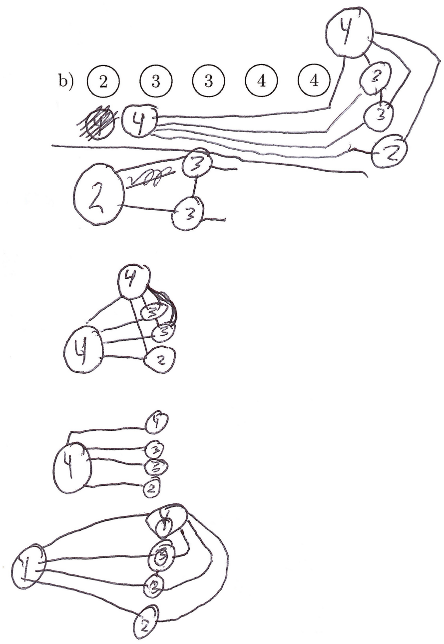
V úloze o obchodním cestujícím našlo správný podgraf jen 15 % žáků z běžných tříd, ale 44 % žáků ze tříd matematických. Pouze v běžných třídách se objevovaly i podgrafy s vynechaným vrcholem nebo podgrafy vyznačené jen v obrázku či zapsané sledem vrcholů bez sečtené délky trasy.

Jen 31 % žáků už se někdy v minulosti setkalo s podobným typem úlohy. 23 % žáků úlohu vynechalo a 60 % řešitelů spočítalo správně všechny trasy.

Nejúspěšnější rozšiřující úlohou bylo srovnávání délek tras, tuto úlohu spočítalo správně 64 % druháků. Naopak nejtěžší, dle očekávání, byl problém obchodního cestujícího s úspěšností jen 27 %.

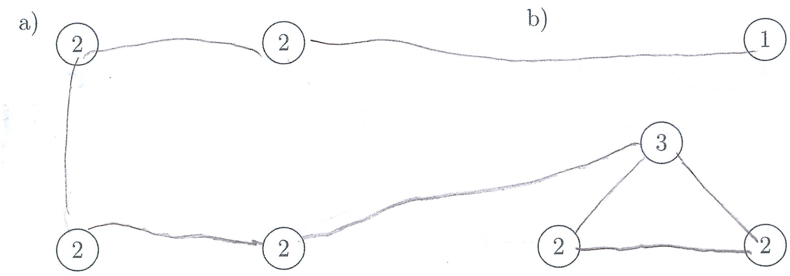
5.2.3 Úloha 3: Skóre grafu

Všímali jsme si, zda žáci řešení grafu hledali pouze za pomoci své představivosti, nebo zkoušeli graf kreslit na papír. Častěji žáci grafy hledali kreslením (Obrázek 93), a to 52 % žáků. Tato strategie byla dle očekávání úspěšnější, 68 % žáků, kteří ji použili, našli pro oba grafy správné řešení.



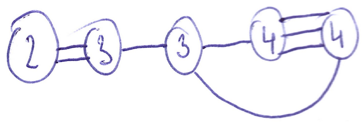
Obrázek 93: Hledání grafu

Dále jsme pozorovali, že někteří žáci se snažili jednotlivé vrcholy propojit. Někteří nepochopili zadání a vrcholy pouze propojili, aniž by respektovali skóre grafů. 28 % řešitelů však po propojení vrcholů upravili graf tak, aby odpovídal zadání. Žákyně 2. ročníku tímto způsobem spojila dohromady oba grafy v jeden (Obrázek 94).



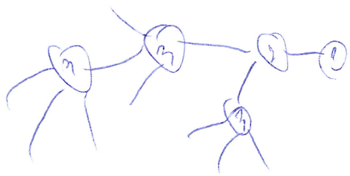
Obrázek 94: Spojení grafů

5 % žáků využilo v řešení multigraf (jednalo se pouze o respondenty z řad 4. a 5. ročníku, Obrázek 95) a nerovinný graf nakreslilo 11 % žáků.

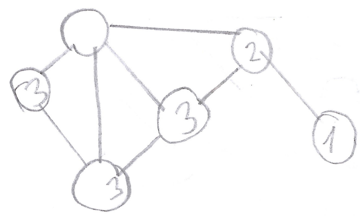


Obrázek 95: Multigraf

9 % řešitelů počítalo jen s hranami, které kreslili „směrem ven z vrcholu“. Počty hran tak neodpovídaly stupňům vrcholů.



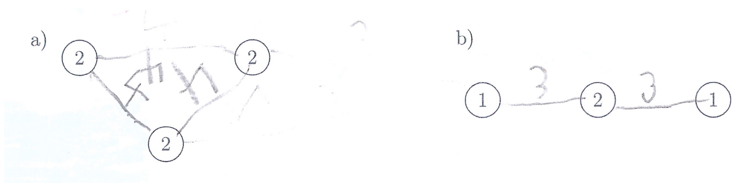
Obrázek 96: Absence vrcholů



Obrázek 97: Dokreslení vrcholů

V 7 % řešení byly zakreslené hrany, které vedly z vrcholu, ale končily v prostoru (Obrázek 96). To je ovšem v rozporu s definicí grafu. Jedna žákyně 5. ročníku se pokusila toto zadání upravit a chybějící vrcholy si dokreslila (Obrázek 97).

Žádného žáka nenapadlo využít smyčky, ale 5 % žáků využilo v řešení multigraf. Neobvyklým řešením bylo také zakreslení grafu, jehož hrany se kříží, takový graf nakreslilo 11 % žáků. Zajímavé bylo řešení žáka, který doplnil hrany ohodnocením na základě součtu stupňů vrcholů (Obrázek 98).

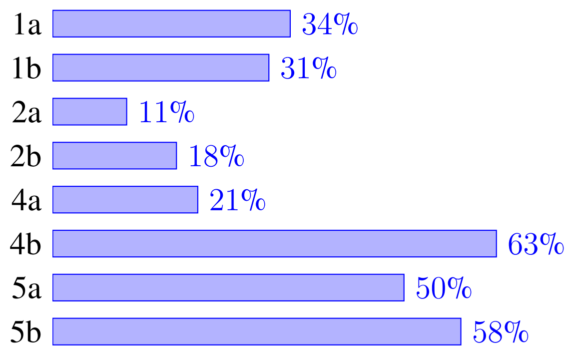


Obrázek 98: Ohodnocení hran součtem stupňů vrcholů

72 % žáků z matematických tříd vyřešilo obě zadané úlohy správně, u tříd běžných byla úspěšnost pouze 45%. Žáci z běžných tříd se mnohem častěji drželi rovinných grafů, ale využití multigrafů v řešení bylo u obou tříd stejně frekventované.

Vyučující i žáci nám potvrdili, že se s podobným typem úlohy v minulosti nesetkali. Tuto úlohu vynechalo 12 % žáků, což je nejvíc ze všech úloh a 56% úspěšnost patří k těm nižším.

Nejčastěji žáci chybovali v úloze 4b, naopak nejjednodušší pro žáky byla úloha 2a (Graf 5).



Graf 5: Chybovost ve 3. úloze

5.2.4 Úloha 4: Orientace v mapě

Zaměřili jsme se především na strategie v místech, kde žáci mohli zvolit více možností, ale jen jedna pokračovala dál. 100% úspěšnost vykazovala strategie, kterou použilo 22 % žáků, kteří si nejdříve nevšimli více možností, ale svoji chybu si uvědomili a cestu opravili, protože nemohli najít navazující cestu. Naopak nejvíc chybovali žáci, kteří ponechali v řešení první cestu, kterou vybrali a neuvažovali více možností. Nejvíce žáků si záludnosti místa všimlo a podívali se v úloze dopředu, aby věděli, jakou cestu zvolit. Pouze 10 % žáků si pomáhalo kreslením do mapy, ale všichni tito žáci úlohu splnili bez chyb.

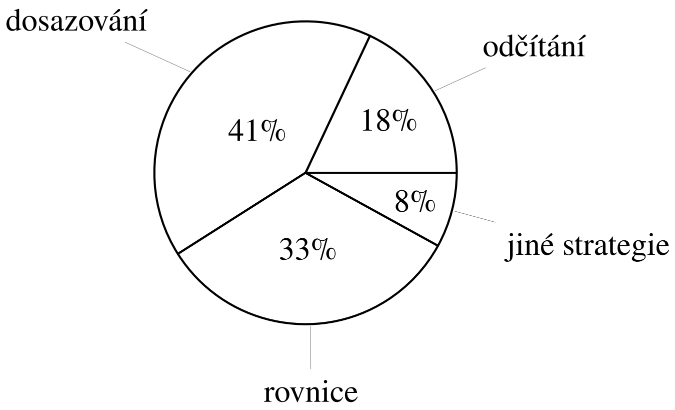
Žáci 4. ročníku v úloze b) znali jen prostřední vrchol. Nejčastěji postupovali v této úloze od středu cesty (68 %), což byla zároveň nejúspěšnější strategie pro tuto úlohu.

V matematických třídách mělo s touto úlohou zkušenost 85 % žáků, kromě žáků 3. a 4. ročníků se s úlohou podobného typu žáci běžně setkávají ve výuce, což nám potvrdili i vyučující. Řešili ji všichni žáci z matematických tříd (nikdo ji nevynechal). V běžných třídách mělo s úlohou zkušenost pouze 16 % žáků, ale i přesto ji většina žáků řešila (97 %).

V místech, kde bylo více možností, žádný z žáků z matematické třídy neopravoval své řešení. 76 % žáků se dívalo na trasu dopředu. Naopak žáci z běžných tříd využívali všechny tři výše jmenované strategie v podobné míře. 61 % chyb, které udělali žáci z matematických tříd bylo vynechání hrany nebo vrcholu. U žáků z běžných tříd takto vzniklo pouze 39 % chyb.

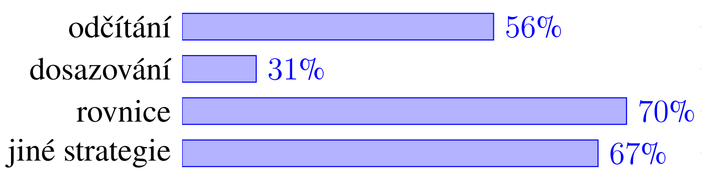
Celkově mělo s podobným typem úlohy zkušenost 43 % žáků, přesto se ji pokusilo vyřešit 98 %, z nich 74 % žáků vyřešilo úlohu bez chyby. Žáci častěji chybovali v určování barvy hran (25 %). 44 % chyb vzniklo nedoplněním údaje. Žáci, kteří doplňovali jak hrany, tak vrcholy, hodnotili doplňování vrcholů jako obtížnější, případně jako stejně obtížné. Přesto i tito žáci častěji chybovali v doplňování barev hran.

5.2.5 Úloha 5: Sčítací grafy



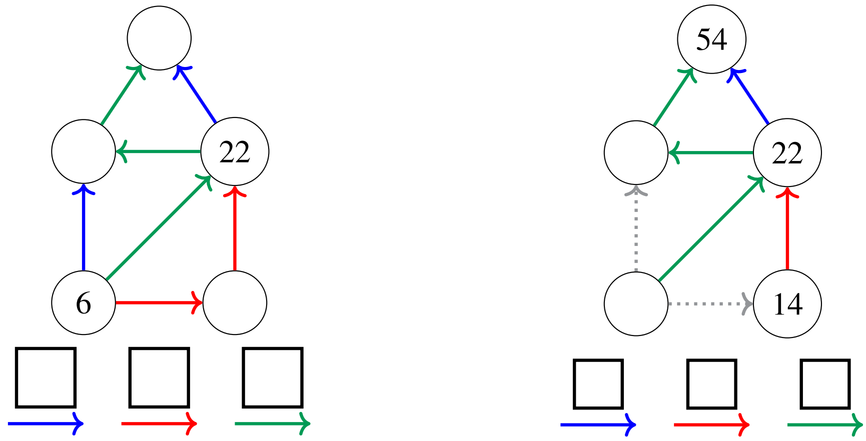
Graf 6: Rozložení žákovských strategií v 5. úloze

Sledovali jsme především strategie v místech, kde nebylo možné pouze sečíst sčítance. Nejčastěji žáci zkoušeli dosazovat čísla (Graf 6), tato strategie ovšem byla nejméně úspěšná. Naopak nejúspěšnější strategie bylo využití rovnice (Graf 7).



Graf 7: Úspěšnost žákovských strategií v 5. úloze

Zvlášť jsme se zaměřili na strategie žáků 4. a 5. ročníku v grafu 5a) (Obrázek 99), kde žáci měli za úkol doplnit vrchol a ohodnocení hrany, za předpokladu, že jedna zelená hrana je dovede ke stejnému výsledku jako dvě červené hrany (v případě 4. ročníku a obdobně v 5. ročníku jedna modrá hrana má stejnou hodnotu jako dvě zelené hrany). Žáci buď zkoušeli vrcholy dosadit,



Obrázek 99: Graf 5a)

ale 43 % žáků si uvědomilo souvislost mezi hranami a hodnotu hrany s větším ohodnocením vydělilo 2. Tato strategie měla 100% úspěšnost, narozdíl od dosazování.

97 % žáků z matematických tříd měli s podobnou úlohou již zkušenost. Také učitelé těchto tříd nám potvrdili, že žáci v matematice s úlohou tohoto typu pracují, s výjimkou žáků 1. ročníku. 62 % žáků vyřešilo tuto úlohu správně, celková chybovost je jen 8 %.

Naopak žáci z běžných tříd se s úlohou setkávají méně. Pouze 38 % žáků už někdy podobnou úlohu řešilo a z učitelů nám její využívání ve výuce potvrdila jen učitelka 3. ročníku. Úspěšnost byla 43 %, žáci častěji chybovali ve větším množství dílčích úkolů a celková chybovost tak je 31 %.

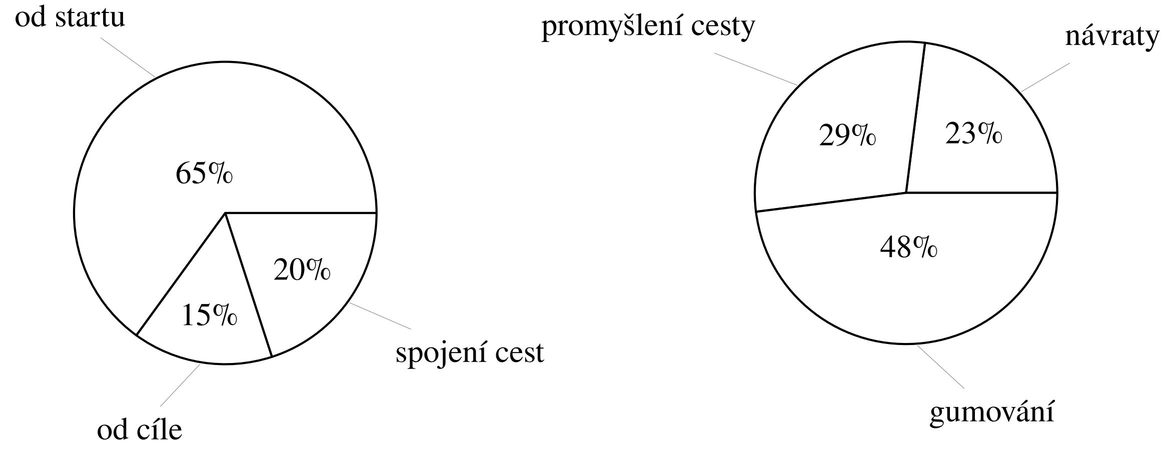
Využití strategií bylo u obou skupin žáků velice podobné. Rozdíl byl ve využití strategií u 4. a 5. ročníku v grafu 5a). Žáci z běžných tříd častěji dosazovali (v 83 %), naopak žáci z matematických tříd si v 61 % všimli souvislosti mezi hranami a použili dělení dvěma, v důsledku toho byli i úspěšnější.

Celkem se s podobnou úlohou v minulosti setkalo 61 % žáků. Úlohu se pokusilo vyřešit 89 % žáků, z nich 51 % úlohu bezchybně vyřešilo.

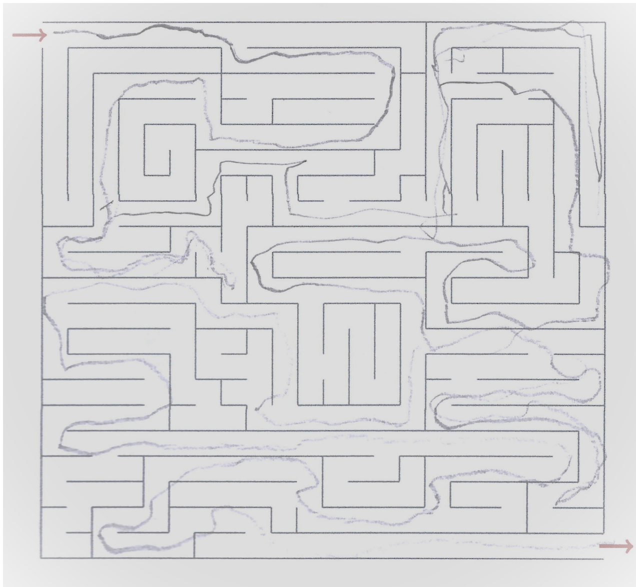
Nejčastěji žáci chybovali v doplňování vrcholů, to přisuzujeme chybám z nepozornosti a numerickým chybám. Naopak při dokreslování barevných hran měli žáci jen tři možnosti a mohli postupovat vylučovací metodou.

5.2.6 Úloha 6: Bludiště

V první řadě jsme sledovali, jakým směrem žáci bludiště řešili, nejúspěšnější strategie bylo „spojení cest“ (Graf 8 vlevo), kdy žáci střídavě zkoušeli hledat cestu od startu i od konce a nakonec ji spojili. Dále jsme pozorovali strategie žáků na křižovatkách (Graf 8 vpravo). Zaujaly nás „návraty“ vypozorované u 23 % žáků (Obrázek 100).



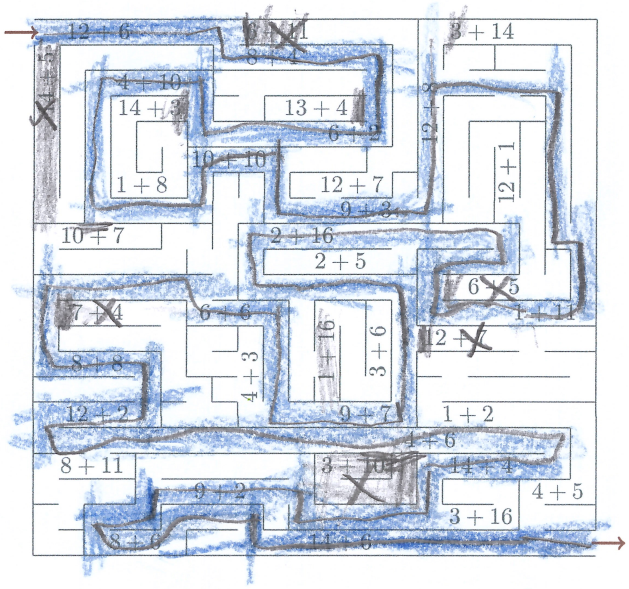
Graf 8: Rozložení žákovských strategií v 6. úloze



Obrázek 100: Návraty v bludišti

V této úloze se neliší zkušenosti u žáků z matematických a běžných tříd. Procento řešitelů je také totožné. Při řešení ale byli úspěšnější žáci z matematických tříd. Směr cesty bludištěm žáci volili podobně, ale liší se strategie na křižovatkách. Zatímco žáci z běžných tříd nejčastěji gumovali, žáci z matematických tříd dvakrát častěji označovali slepé cesty v bludišti (Obrázek 101). Pouze 2 % žáků z matematických tříd hledání cesty do cíle vzdali, u žáků z běžných tříd cestu nedokončilo 13 % žáků.

Bludiště správně prošlo 73 % řešitelů. 8 % žáků při řešení prošlo zdí a stejné množství žáků se bludištěm pokusilo projít, ale svůj pokus vzdalo. Líbilo se nám řešení 5 % žáků, kteří si zaznačili slepé cesty (Obrázek 101), všichni tito žáci bludištěm úspěšně prošli.



Obrázek 101: Zaznačení slepých cest v bludišti

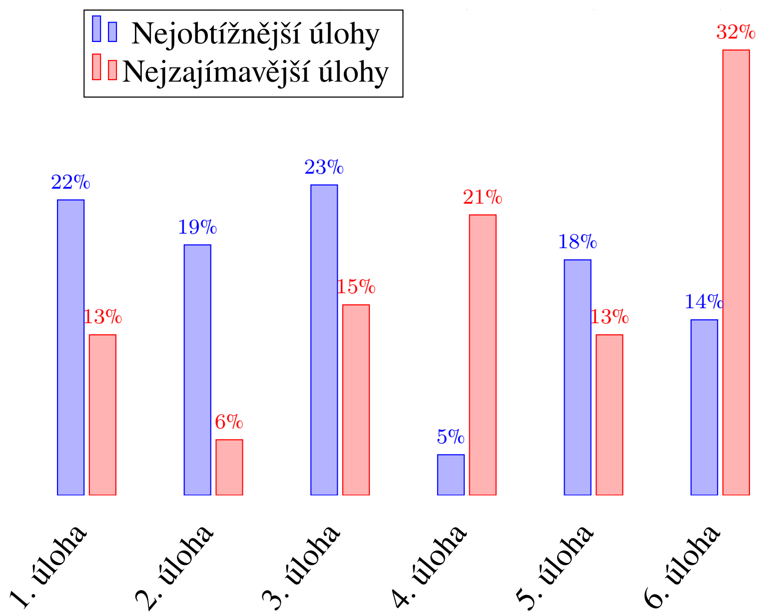
Žáci 1. ročníku pracovali s prostým bludištěm bez podmínek, proto jsme u nich pozorovali, že bludiště před zaznamenáním cesty prošlo prstem 8 % žáků. Tito žáci byli úspěšnější než žáci, kteří tuto strategii nepoužili. Žáci 3. a 5. ročníku pracovali s hvězdami, které sloužily jako klíče k barevným branám. 26 % žáků si zapisovalo, hvězdy, které už „využili“, tuto strategii také používali spíše úspěšnější žáci a častěji se objevovala u žáků z matematických tříd. Žáci 4. ročníku měli za úkol projít bludištěm přes co nejmenší počet červených bran. Správným řešením byla cesta přes 4 červené brány, těmi prošlo 58 % řešitelů, druhým nejčastějším řešením bylo využití 6 červených bran, které prošlo 23 % žáků.

5.3 Vyhodnocení reflexe žáků

Hodnocení úloh žáky můžeme vyčíst z Grafu 9. Všimněme si, že nejmenší část žáků považovala za nejzajímavější úlohy právě ty, které učitelé označovali jako nejvhodnější do výuky matematiky. V úlohách, které žáci označovali jako nejtěžší, byli průměrně úspěšní a v úlohách, které byly pro žáky nejzábavnější, uspěli v 92 %.

5.4 Shrnutí

Na základě výzkumu jsme zodpověděli všechny výzkumné otázky a vytvořili ukázku úloh, které je možné využít ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ. Uvedli jsme strategie, které využívají



Graf 9: Žákovské hodnocení úloh

žáci při řešení úloh z teorie grafů. Ověřili jsme, že žáci se zkušeností s podobnými typy úloh a Hejného matematikou jsou při řešení úspěšnější. Zjistili jsme, že si poradí i s neznámým typem úlohy a znalost nestandardních úloh je pro její řešení výhodou. Někteří žáci používali teorii grafů pro zápis svých postupů v místech, kde to nebylo naším záměrem, například pro zápis mezivýpočtů.

Na základě výzkumného šetření bychom učitelům doporučili využívat prvky teorie grafů ve výuce, především kvůli jejich motivačnímu charakteru. Žáci se také prostřednictvím grafů učí používat kreativitu a představivost při řešení matematických problémů. Grafy se odlišují od čísel nebo jiných klasických struktur, které se běžně používají ve výuce na základní škole, což může poskytnout šanci uspět v matematice i méně úspěšným žákům.

VO$_1$: Jaké jsou strategie při řešení vybraných úloh z teorie grafů žáky 1. stupně ZŠ?

Strategie, které žáci používali při řešení jednotlivých úloh, jsme popsali v předchozí kapitole. Následně jsme všechny vypozorované strategie rozdělili do tří kategorií: kreslení a zaznačování do grafu, zápis vedle grafu a rozmýšlení řešení zpaměti. Všechny tyto strategie byly používány v podobné míře. Liší se však jejich úspěšnost.

Nejúspěšnější strategie byl zápis vedle grafu, což si zdůvodňujeme tím, že žáci, kteří prováděli zápis, mohli nejlépe provést i zpětnou kontrolu svých postupů. Strategie také byla nápomocná v úlohách, kde byly potřeba počty. Naopak nejméně úspěšná strategie bylo rozmýšlení řešení zpaměti. Domníváme se, že žáci při použití této strategie často chybovali z nepozornosti nebo dělali početní chyby.

Strategie, které se ukázaly být nejúspěšnějšími, byly většinou málo využívané. Důvodem je, že tyto způsoby řešení byly buď velmi neobvyklé, nebo obtížnější, a tak je využívali žáci s větším vhledem do dané problematiky a žáci bystřejší (např. číslování eulerovského tahu v 1. úloze).

VO$_2$: Které typy úloh z teorie grafů je vhodné zařazovat do výuky matematiky na 1. stupni ZŠ?

Všechny úlohy, které jsme použili v didaktickém testu je možné předložit žákům na 1. stupni ZŠ. Jejich zařazení se liší podle záměru pedagoga.

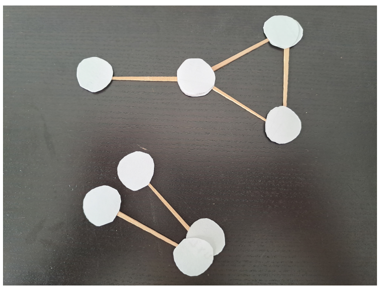
Sedm učitelů zmínilo, že úlohy, které nevyužívají počty, jsou vhodné pro nadané a bystré žáky, kteří dokončí práci rychleji, jako zajímavé úlohy navíc. Polovina pedagogů uvedla, že jsou tyto úlohy vhodné pro jejich motivační efekt ke zpestření výuky. Žádnou úlohu učitelé neoznačili jako nevhodnou.

Žáci zřídka nepochopili zadání, chyby, které dělali většinou vycházely z nepozornosti nebo se jednalo o početní chyby. Tyto nedostatky můžeme eliminovat tak, že žáky budeme učit efektivnější strategie se zápisem postupu, aby měli možnost zpětné kontroly a viděli, které kroky už provedli.

V příloze 2 uvádíme další úlohy využívající teorii grafů, které je možné využít ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ.

VO$_3$: Jaká je úspěšnost žáků při řešení neznámého typu úlohy, která využívá skóre grafu?

3. úloze jsme věnovali zvláštní pozornost již ve vyhodnocení didaktického testu. Tuto úlohu žáci označovali nejčastěji jako nejobtížnější (viz Graf 9). Vysvětlujeme si to tím, že když je úloha pro žáky nová, ještě pro ni nemají vytvořený algoritmus řešení a vytvářet nový je náročné.



Obrázek 102: Manipulativní činnosti

Dále bychom rádi zmínili, jakým způsobem je možné předcházet nejčastějším chybám, které se při řešení této úlohy objevily.

Žáci často počítali jen s hranami, které kreslili „směrem ven z vrcholu“. Tuto chybu je možné eliminovat tak, že nejdříve žákům předložíme úlohy, ve kterých budou vrcholům přiřazovat jejich stupeň.

Opakovaně se objevovaly hrany, které končily v prostoru. Aby se neopakovala tato chyba, bylo by vhodné úlohu aplikovat v situaci z reálného světa. Další možností je úlohu řešit s pomocí pomůcek (Obrázek 102). Žákům pak stačí jen spočítat, kolik vrcholů (koleček) leží na sobě.

6 Diskuze

Náš výzkum ukázal, že prvky teorie grafů lze využít ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ. Také jsme zjistili, že někteří učitelé s nimi již aktivně pracují a žáci je považují za zajímavé. I jiní autoři podporují zařazení teorie grafů do školní výuky. Zdůrazňují ji jako nástroj pro modelování situací reálného světa, rozvíjení matematického myšlení a podporu při řešení problémů. Publikované studie se zaměřují na žáky středních škol (Lessner 2011, Smithers 2005), případně starší žáky základních škol (Blanco 2021, Gaio 2020, Niman 1975), ale je nedostatek výzkumů s žáky na 1. stupni ZŠ. Všichni uvedení autoři, kteří představovali teorii grafů žákům, zdůrazňují její motivační účinek a zájem, který předkládané úlohy u žáků vyvolaly. Stejné nadšení jsme u žáků během výzkumu pozorovali i my.

Autoři, kteří se věnovali implementaci teorie grafů do školní výuky, žákům představovali grafy ve formě netradičních úloh, ale nekombinovali je s učivem žáků. Náš záměr byl grafy využít a aplikovat v úlohách, aniž bychom žákům představovali teorii grafů a definovali základní pojmy.

Publikované články o teorii grafů představují úlohy, které je vhodné předložit žákům, ale už neanalyzovaly jejich řešení a postupy. Pouze Blanco (2021) sledoval strategie žáků při řešení problému čtyř barev, „Handshaking problem“ a problému sedmi mostů v Královci. Pracovali s eulerovskými cestami a kružnicemi a hamiltonovskými grafy. Z jeho výzkumu vychází najevo, že žáci teorii grafů dobře porozuměli. Pro řešení kombinatorické úlohy handshaking problému měli žáci za úkol vytvořit strategie k počítání za pomocí teorie grafů. Některým se dokonce povedlo úspěšně strategii zobecnit. Blanco ukazuje, že grafy mohou být použity k rozvoji práci se strategiemi jako jsou zobecnění a indukce.

Žáci využívali různé strategie: hledání opakujícího se vzorce, metodu pokusu a omylu, strategie počítání, zobecnění, využití symetrie, metodu odhadu a kontroly a úvahu. S některými těmito strategiemi jsme se setkali i my. Nejpoužívanější z těchto postupů byla metoda pokusu a omylu, což je ovšem obecné označení, pod kterým si můžeme představit řadu přístupů. My jsme se ve vyhodnocení výzkumu snažili žákovské strategie blíže specifikovat. Například v 1. úloze jsme sledovali, jakým způsobem žáci metodu pokusu a omylu prováděli, například zda si tyto „pokusy“ zaznamenávali do grafů nebo vedle nich. Symetrii využívali někteří žáci ve 3. úloze, s metodou odhadu a kontroly pracovali především nejstarší respondenti při hledání nejkratší cesty mezi vrcholy. Úvahu použili žáci, kteří využili vlastnosti grafu a 5. úlohu řešili prostřednictvím dělení. My jsme však řešitelské strategie pojali z jiného úhlu pohledu a snažili jsme se být při jejich popisu co nejkonkrétnější.

V České republice se aplikací teorie grafů do školské matematiky zabývají především Příhonská (např. 2004, 2005) a Hejný (1998). Oba autoři tvoří úlohy, které je možné využívat ve výuce matematiky. Stejně tak Vejmola (1986) vydal monografii o řešení hlavolamů prostřednictvím teorie grafů, kterou učitelé mohou využít jako inspiraci.

Výzkumy, které se zaměřují na aplikaci teorie grafů ve výuce matematiky u nás také chybí, ale zaměřili jsme se na hodnocení úspěšnosti Hejného metody, která využívá i úlohy z teorie grafů. Greger a kol. (2022) provedli sekundární analýzu dat z mezinárodních šetření TIMSS z let 2015 a 2019 ve vztahu k Hejného metodě výuky matematiky. Žáci vyučovaní touto metodou dosáhli statisticky významně lepšího výsledku než žáci, kteří tuto metodu nepoužívají. Na druhou stranu nebyly identifikovány žádné oblasti učiva, v nichž by žáci vyučovaní Hejného metodou dosahovali systematicky lepších nebo horších výsledků než ostatní žáci.

Provedený výzkum obohatil naše poznatky o využívání teorie grafů ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ a o žákovských řešeních v této oblasti i přesto, že má své limity. Za nedostatek práce považujeme malý počet respondentů. Především zastoupení většího vzorku učitelů by mohlo přinést lepší poznání, jaké je aktuální postavení teorie grafů ve výuce. Výzkum byl realizován pouze na jedné škole. Kdybychom měli možnost rozšířit výzkum o šetření na dalších základních školách, výsledky by měly větší validitu.

Rádi bychom v budoucnu výzkum rozšířili o dlouhodobou práci s žáky, se kterými bychom se systematicky věnovali teorii grafů a následně bychom mohli ověřit, jak tyto znalosti využijí v hodinách matematiky nebo při řešení nestandardních úloh.

Závěr

Diplomová práce se zabývá teorií grafů a jejich využitím ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ. V teoretické části jsme vymezili některé základní pojmy z teorie grafů, stručně jsme přiblížili historii této disciplíny a představili jsme vybrané známé problémy a aplikace teorie grafů. Vybírali jsme především pojmy a problémy, které se později objevily v praktické části nebo při analýze vybraných pracovních sešitů.

Dále jsme se věnovali teorii grafů ve výuce matematiky a uvedli jsme, jaké je její postavení vzhledem k současnému kurikulu. Věnovali jsme se cílům a výstupům z Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání, které můžeme naplňovat prostřednictvím teorie grafů. Analyzovali jsme úlohy z teorie grafů, které se vyskytují ve vybraných pracovních sešitech matematiky pro 1. stupeň ZŠ. Tyto úlohy jsme rozdělili do kategorií podle grafů, které využívají. Na konci praktické části jsou zmíněny výhody integrace teorie grafů do výuky matematiky.

V praktické části jsme popsali provedený výzkum zaměřený na teorii grafů. Výzkum jsme realizovali ve všech ročnících 1. stupně ZŠ v běžných třídách i ve výběrových třídách s rozšířenou výukou matematiky. Náš hlavní cíl, analyzovat strategie a úspěšnost žáků při řešení úloh z teorie grafů, byl naplněn. Vytvořili jsme didaktický test, který jsme reflektovali s učiteli a následně předložili žákům. Porovnávali jsme úspěšnost a chyby žáků při řešení sestaveného didaktického testu. Zjistili jsme, že si žáci poradí i s neznámým typem úlohy a znalost nestandardních úloh je pro její řešení výhodou. Ověřili jsme, že žáci s rozšířenou výukou matematiky řeší úlohy z teorie grafů s vyšší úspěšností, než žáci z běžných tříd.

Grafy svou odlišnou strukturou od běžných úloh žáky motivují. Zároveň umožňují pracovat s praktickými úlohami i s abstraktním zadáním, podporují rozvoj strategií, analytických dovedností i kritického myšlení. V příloze předkládáme didaktický test, který sloužil k účelům výzkumu a další úlohy, které je možné využít ve výuce. Na základě našeho výzkumu bychom učitelům doporučili integrovat teorii grafů do výuky na 1. stupni ZŠ a rádi bychom pokračovali ve výzkumu možností aplikace této disciplíny do výuky matematiky.

Literatura

[1] ADEDOYIN, Olasile Babatunde (2020). *Qualitative Research Methods.* Online. Near East University. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/340594471_Qualitative_Research_Methods. [Citováno 2023-08-12].

[2] BARNETT, Janet Heine (2009). *Early Writings on Graph Theory: Hamiltonian Circuits nad The Icosian Game.* Resources for Teaching Discrete Mathematics: Classroom Projects, History Modules and Articles, s. 217–223. ISBN 9780883859742.

[3] BĚLOHLÁVEK, Radim (2020). *Diskrétní struktury 1. Učební text k přednáškám.* Olomouc: Univerzita Palackého, Katedra informatiky.

[4] BLANCO, Rocío a GAECÍA-MOYA, Melody (2021). *Graph Theory for Primary School Students with High Skills in Mathematics.* Online. Mathematics, vol. 9, no. 13. Dostupné z: https://doi.org/10.3390/math9131567. [Citováno 2023-10-30].

[5] BORŮVKA, Otakar (1926). *O jistém problému minimálním.* Online. Práce Moravské přírodovědecké společnosti, sv. III, spis 3. s. 37–58. Dostupné z: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/500114. [Citováno 2024-04-02].

[6] HÁTLE, Jiří (2023). *Matematický klokan 2023.* Online. Olomouc: Univerzita Palackého, JČMF. Dostupné z: https://matematickyklokan.upol.cz/wp-content/uploads/2024/03/sbornik2023.pdf. [Citováno 2024-04-11.]

[7] CIOABĂ, Sebastian M. a MURTY, M. Ram (2022). *A First Course in Graph Theory and Combinatorics.* Second Edition. New Delhi: Hindustan Book Agency. ISBN 978-981-19-0957-3.

[8] COOK, William (2012). *Po stopách obchodního cestujícího. Matematika na hranicích možností.* Praha: Argo. ISBN 9788073634124.

[9] DALGETY, James (2017). *The Icosian Game.* Online. In: DALGETY, James. The Puzzle Museum. Dostupné z: https://www.puzzlemuseum.com/month/picm02/200207icosian.htm. [Citováno 2024-04-15].

[10] DEMEL, Jiří (2002). *Grafy a jejich aplikace.* Praha: Academia. ISBN 80-200-0990-6.

[11] EULER, Leonard (1741). *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis.* Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Vol. 8, pp. 128-140. In Opera Omnia Vol. 7, no. 1, pp. 1–10.

[12] EVERITT, Tom a HUTTER, Marcus (2015). *A topological approach to meta-heuristics: analytical results on the BFS vs. DFS algorithm selection problem.* Online. Australian National University Dostupné z: https://arxiv.org/abs/1509.02709. [Citováno 2024-04-11.]

[13] FIEDLER, Miroslav (1984). *RNDr. Jiří Sedláček, CSc. šedesátníkem.* Online. Časopis pro pěstování matematiky, roč. 109, č. 2, s. 220–224. Dostupné z: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/108500. [Citováno 2024-04-02.]

[14] FLICK, Uwe (2018). *An Introduction to Qualitative Research.* 6th edition. Los Angeles: Sage. ISBN 9781526445650.

[15] FUCHS, Eduard (1996). *Práce z teorie grafů.* In: TŘEŠŇÁK, Zdeněk; ŠARMANOVÁ, Petra; PŮŽA, Bedřich. Otakar Borůvka. Brno: Nadace Universitas Masarykiana v Brně. s. 173–175. ISBN 8090200400.

[16] GAIO, Aaron; BRANCHETTI, Laura a CAPONE, Roberto (2020). Learning Math Outdoors: Graph Theory Using Maps. In book: *Research on Outdoor STEM Education in the digital Age.* Proceedings of the ROSETA Online Conference in June 2020. DOI: 10.37626/GA9783959871440.0.12. Dostupné z: https://www.wtm-verlag.de/DOI-Deposit/978-3-95987-144-0/978-3-95987-144-0-Book.pdf. [Citováno 2023-10-30].

[17] GREGER, David; CHVÁL, Martin; MARTINKOVÁ, Patrícia; POTUŽNÍKOVÁ, Eva; SOUKUP, Petr a VONDROVÁ, Naďa (2022). *Hejného metoda výuky matematiky v mezinárodním výzkumu TIMSS: závěrečná zpráva.* Ústav výzkumu a rozvoje vzdělávání, PedF UK, Praha.

[18] GROSS, Johnathan L.; YELLEN, Jay a ANDERSON, Mark (2023). *Topics in Graph Theory.* CRC Press, New York. ISBN 9781003051237.

[19] HEJNÝ, Milan (1998). *Barevná bludiště* – nepublikováno. PedF UK, Praha.

[20] HLINĚNÝ, Petr (2008). *Teorie grafů.* Výukový text. MUNI, Brno.

[21] CHRÁSKA, Miroslav (2016). *Metody pedagogického výzkumu: Základy kvantitativního výzkumu.* 2., aktualizované vydání. Praha: Grada. ISBN 9788024753263.

[22] JIROVSKÝ, Lukáš (2008). *Vybrané problémy z teorie grafu ve výuce na stredni škole*. Bakalářská práce. Praha: Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky. Vedoucí práce RNDr. Pavla Pavlíková, Ph.D.

[23] JIROVSKÝ, Lukáš (2010). *Teorie grafů ve výuce na střední škole*. Diplomová práce. Praha: Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky. Vedoucí práce RNDr. Pavla Pavlíková, Ph.D.

[24] KNISLEY, Jeff R. a KNISLEY, Debra J. (2014). *Vertex-Weighted graphs and their applications.* Online. Utilitas Mathematica, roč. 94, č. 7. Dostupné z: http://utilitasmathematica.com/index.php/Index/article/view/1091. [Citováno 2024-04-11.]

[25] KÖNIG, Dénes (1936). *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.* Leipzig: Akademische Verlagsge-sellschaft M. B. H.

[26] KRAVAROVÁ, Radka (2016). *Problém čtyř barev a jeho historie*. Bakalářská práce. Plzeň: Západočeská univerzita, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy. Vedoucí práce doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

[27] KRUJA, Eriola; MARKS, Joe; BLAIR, Ann a WATERS, Richard (2002). A Short Note on the History of Graph Drawing. In: *Graph Drawing. 9th International Symposium, GD 2001 Vienna, Austria, September 23–26, 2001 Revised Papers 9.* Online. Springer Berlin Heidelberg, s. 272–286. Dostupné z: https://link.springer.com/chapter/10.1007/3-540-45848-4_22. [Citováno 2024-04-02].

[28] LESSNER, Daniel (2011). Graph Theory at Czech Grammar Schools. *WDS'11 Proceedings of Contributed Papers: Part I - Mathematics and Computer Sciences.* Prague: Matfyzpress. Pages 78–84. ISBN 978-80-7378-184-2

[29] MILKOVÁ, Eva (2000). *Moderní pohled na „jistý problém minimální“*. Online. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 45, č. 4, s. 265–273. Dostupné z: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/141045. [Citováno 2024-04-02].

[30] NIMAN, John (1975). *Graph theory in the elementary school.* Online. Educational Studies in Mathematics, vol. 6, no. 3, November 1975, s. 351–373. Dostupné z: https://doi.org/10.1007/BF01793617. [Citováno 2023-10-30].

[31] PŘÍHONSKÁ, Jana (2004). *Graf jako nástroj porozumění matematickým myšlenkám (didaktická analýza).* Disertační práce. PedF UK, Praha.

[32] PŘÍHONSKÁ, Jana (2005). Teorie grafů na základní škole (1). *Učitel matematiky*. Roč. 13, č. 1, s. 9–19.

[33] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* (2023). Online. Praha, MŠMT. Dostupné z https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/. [Citováno 2024-01-31].

[34] ROSEN, Kenneth H. (2019). *Discrete Mathematics and Its Applications.* Eighth Edition. New York: McGraw-Hill Education. ISBN 978-1-259-67651-2.

[35] SEDLÁČEK, Jiří (1964). *Kombinatorika v teorii a praxi. Úvod do teorie grafů.* Nakladatelství Československé akademie věd.

[36] SENGOKU, Masakazu (2023). *Graph Theory and Mobile Communications.* World Scientific Publishing Co. ISBN 9789811255298.

[37] SMITHERS, Dayna Brown (2005). *Graph theory for the secondary school classroom.* Master's Thesis. East Tennessee State University.

[38] SYLVESTER, James Joseph (1878). *On an Application of the New Atomic Theory to the Graphical Representation of the Invariants and Covariants of Binary Quantics, with Three Appendices.* Online. Americas Journal of Mathematics, vol. 1, no. 1, s. 64–104. Dostupné z: https://doi.org/10.2307/2369436. [Citováno 2024-03-29].

[39] ŠIŠMA, Pavel (1996). *Vznik a vývoj teorie grafů.* In: BEČVÁŘ, Jindřich a FUCHS, Eduard. Člověk-umění-matematika. Sborník přednášek z letních škol Historie matematiky. Praha: Prometheus. s. 155–165. ISBN 8071960314.

[40] ŠIŠMA, Pavel (1997). *Problém čtyř barev.* In: BEČVÁŘ, Jindřich a FUCHS, Historie matematiky. II. Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, 21. 8. – 24. 8. 1995, Sborník. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-046-2, s. 169-180.

[41] ŠVAŘÍČEK, Roman a ŠEĎOVÁ, Klára (2007). *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách.* Praha: Portál. ISBN 9788073673130.

[42] VEČERKA, Arnošt (2007). *Grafy a grafové algoritmy.* Online. Olomouc: Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta, Katedra informatiky. Dostupné z: https://phoenix.inf.upol.cz/esf/ucebni/grafy_a_grafove_al.pdf. [Citováno 2024-04-11].

[43] VEJMOLA, Stanislav (1989). *Konec záhady hlavolamů.* 2. vyd. Maják, Praha: Státní pedagogické nakladatelství. ISBN 80-04-24-287-1.

[44] YADAV, Santosh Kumar (2023). *Advanced Graph Theory.* Springer Nature. ISBN 978-3-031-22561-1.

[45] ZAMBITO, Leonardo (2006). *The Traveling Salesman Problem. A Comprehensive Survey.* Online. Dostupné z: https://www.eecs.yorku.ca/~aaw/legacy/Zambito/TSP_Survey.pdf. [Citováno 2024-04-02].

[46] ZELINKA, Bohdan (1977). *Rovinné grafy.* Online. Praha: Mladá fronta. Dostupné z: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403901. [Citováno 2024-04-01].

Pracovní sešity pro výuku matematiky

[47] ADÁMKOVÁ, Petra; BRLICOVÁ, Věra; DIVÍNOVÁ, Romana; HADAMOVÁ, Markéta; JANOUŠOVÁ, Iva; TARÁBKOVÁ, Mária; TVRĎOCHOVÁ, Dana a VALČÍKOVÁ, Ivana (2017). *Koumák pro třeťáky: rozšiřující pracovní sešit pro všechny třeťáky, kteří chtějí víc vědět a přemýšlet ještě víc...* Brno: Didaktis. ISBN 9788073582609.

[48] BÁRTOVÁ, Marie; BEĎAČOVÁ, Marie; FALTINOVÁ, Magdaléna; RYBOVÁ, Jovanka; CZEREOVÁ, Lenka a kol. (2017a). *Hravá matematika 5: pracovní sešit pro 5. ročník ZŠ. 1. díl.* Praha: Taktik. ISBN 9788075630537.

[49] BÁRTOVÁ, Marie; BEĎAČOVÁ, Marie; FALTINOVÁ, Magdaléna; RYBOVÁ, Jovanka; CZEREOVÁ, Lenka a kol. (2017b) *Hravá matematika 5: pracovní sešit pro 5. ročník ZŠ. 2. díl.* Praha: Taktik. ISBN 9788075630544.

[50] BULÍN, Jindřich a KORITYÁK, Stanislav (2007a). *Matematika: pro 2. ročník základní školy. Pracovní sešit 1.* Ilustroval Miroslav RŮŽEK. Brno: Didaktis. ISBN 9788073580766.

[51] BULÍN, Jindřich a KORITYÁK, Stanislav (2007b). *Matematika: pro 2. ročník základní školy. Pracovní sešit 2.* Ilustroval Miroslav RŮŽEK. Brno: Didaktis. ISBN 9788073580773.

[52] FALTINOVÁ, Magdaléna; PÍTOVÁ, Lenka; VONDRÁŠKOVÁ, Štěpánka; BÁRTOVÁ, Marie; BEĎAČOVÁ, Marie a kol. (2020) *Hravá matematika 4: pracovní sešit pro 4. ročník ZŠ. 1. díl.* 3. vydání. Praha: Taktik. ISBN 9788075633330.

[53] FALTINOVÁ, Magdaléna; PÍTOVÁ, Lenka; VONDRÁŠKOVÁ, Štěpánka; FUSKOVÁ Alena; HRADILOVÁ, Hana a kol. (2016a) *Hravá matematika 4: pracovní sešit pro 4. ročník ZŠ. 1. díl.* Praha: Taktik. ISBN 9788087881743.

[54] FALTINOVÁ, Magdaléna; PÍTOVÁ, Lenka; VONDRÁŠKOVÁ, Štěpánka; FUSKOVÁ Alena; HRADILOVÁ, Hana a kol. (2016b) *Hravá matematika 4: pracovní sešit pro 4. ročník ZŠ. 2 díl.* Praha: Taktik. ISBN 9788075630261.

[55] FALTINOVÁ, Magdaléna; PÍTOVÁ, Lenka; ŠVIHLOVÁ, Štěpánka; VONDRÁŠKOVÁ, Štěpánka a HRUBKOVÁ, Martina (2017). *Hravá matematika 2: pracovní učebnice pro 2. ročník ZŠ. 2. díl. Násobení a dělení v oboru do 10.* 2. vydání. Praha: Taktik. ISBN 9788075630933.

[56] HEJNÝ, Milan (2009). *Matematika: pro 3. ročník základní školy. Pracovní sešit 2 s přílohou Přehled učiva.* Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Plzeň: Fraus. ISBN 9788072388264.

[57] HEJNÝ, Milan (2010a). *Matematika: pro 4. ročník základní školy. Pracovní sešit 1 s přílohou Přehled učiva.* Ilustroval Lukáš URBÁNEK a Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus. ISBN 9788072389414.

[58] HEJNÝ, Milan (2010b). *Matematika: pro 4. ročník základní školy. Pracovní sešit 2.* Ilustroval Lukáš URBÁNEK a Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus. ISBN 9788072389421.

[59] HEJNÝ, Milan (2011a). *Matematika: pro 5. ročník základní školy. Pracovní sešit 1 s přílohou Přehled učiva.* Plzeň: Fraus. ISBN 9788072389674.

[60] HEJNÝ, Milan (2011b). *Matematika: pro 5. ročník základní školy. Pracovní sešit 2.* Plzeň: Fraus. ISBN 9788072389681.

[61] HEJNÝ, Milan (2018). *Matematika 1.* Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat. ISBN 9788088247029.

[62] HEJNÝ, Milan (2019). *Matematika 2.* Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat. ISBN 9788088247166.

[63] HEJNÝ, Milan; JIROTKOVÁ, Darina a SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, Jana (2008a). *Matematika: pro 2. ročník základní školy. 1. díl pracovní učebnice.* Ilustroval Lukáš URBÁNEK a Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus. ISBN 9788072387687.

[64] HEJNÝ, Milan; JIROTKOVÁ, Darina a SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, Jana (2008b). *Matematika: pro 2. ročník základní školy. 2. díl pracovní učebnice.* Ilustroval Lukáš URBÁNEK a Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus. ISBN 9788072387694.

[65] LANDOVÁ, Vlasta; STAUDKOVÁ, Hana a TŮMOVÁ, Věra (2019). *Matematika: Numerace, sčítání a odčítání do 6.* Vydání třinácté. Ilustroval Zdeněk MILER. Všeň: Alter. ISBN 9788072453634.

[66] NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František (2015). *Matýskova matematika: 3. díl - počítání do dvaceti.* Čtvrté vydání. Ilustroval Andrea SCHINDLEROVÁ. Brno: Nová škola. Duhová řada. ISBN 9788072897261.

[67] ROSECKÁ, Zdena (2011a). *Já počítám do 1 000: pracovní sešit pro 3. ročník.* Brno: Nová škola. Duhová řada. ISBN 9788087565308.

[68] ROSECKÁ, Zdena (2011b). *Veselé počítání: pro 2. ročník základní školy. Pracovní sešit 2. díl.* Brno: Nová škola. Duhová řada. ISBN 9788087565087.

[69] ROSECKÁ, Zdena (2012a). *Moje první počítání: pracovní sešit pro 1. ročník.* Brno: Nová škola. Duhová řada. ISBN 9788087565391.

[70] ROSECKÁ, Zdena (2012b). *Živé počítání: pro 1. ročník základní školy. Pracovní sešit, 1. díl.* Brno: Nová škola. Duhová řada. ISBN 9788087565346.

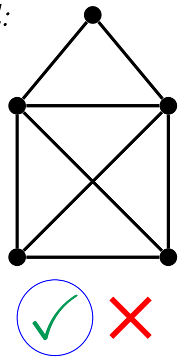
[71] ROSECKÁ, Zdena (2012c). *Živé počítání: pro 1. ročník základní školy. Pracovní sešit, 2. díl.* Brno: Nová škola. Duhová řada. ISBN 9788087565032.

Přílohy

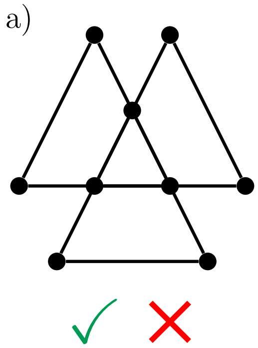
Jméno: ....

1. Můžeš nakreslit obrázky jedním tahem?

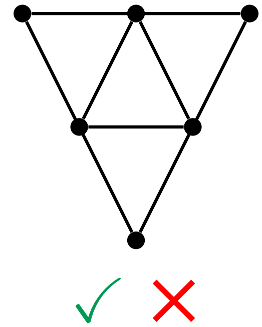
Příklad:



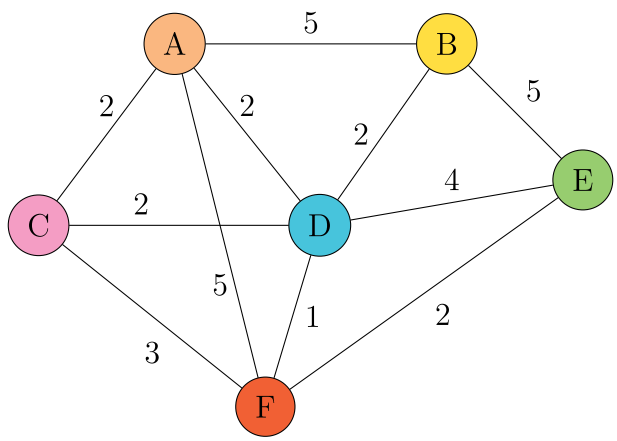
a)



b)



2. Pozorně si prohlédni mapu a odpověz na otázky.



Příklad: Jak dlouhá je trasa B – E – F?

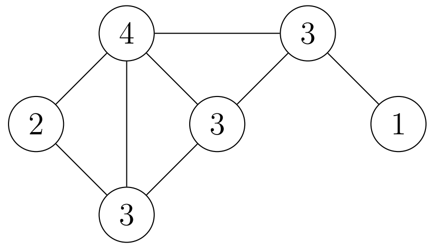
5 + 2 = 7

Trasa je dlouhá 7.

a) Jak dlouhá je trasa A – D – F?

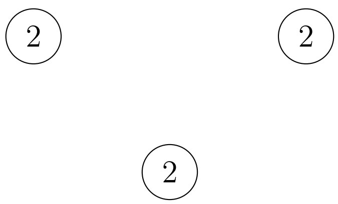
b) Jak dlouhá je trasa A – C – F?

3. Čísla v kolečku určují, kolik čar z nich vede.



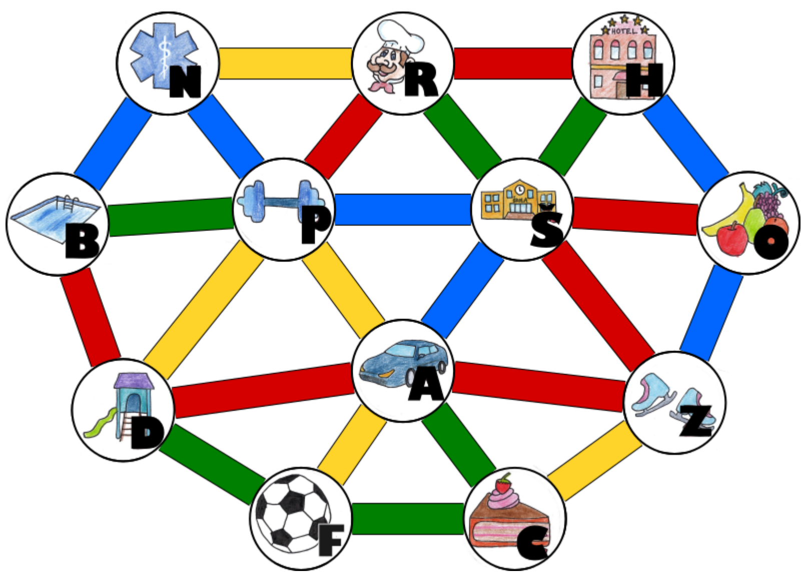
Spoj kolečka.

a)



b)

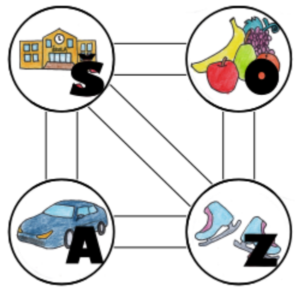
4. Mapa.



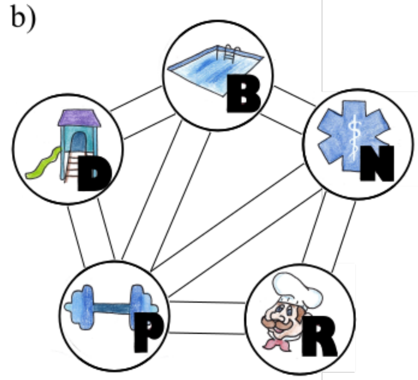
Vybarvi cesty stejnými barvami jako na mapě.

Příklad:

a)

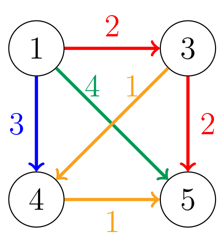


b)

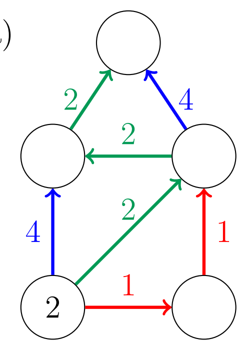


5. Dopiš čísla do koleček, šipky určují, jaké číslo musíš přičíst.

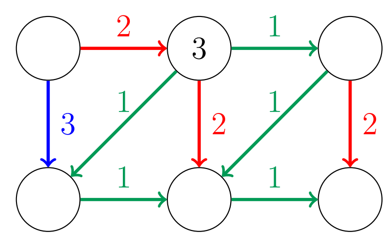
Příklad:



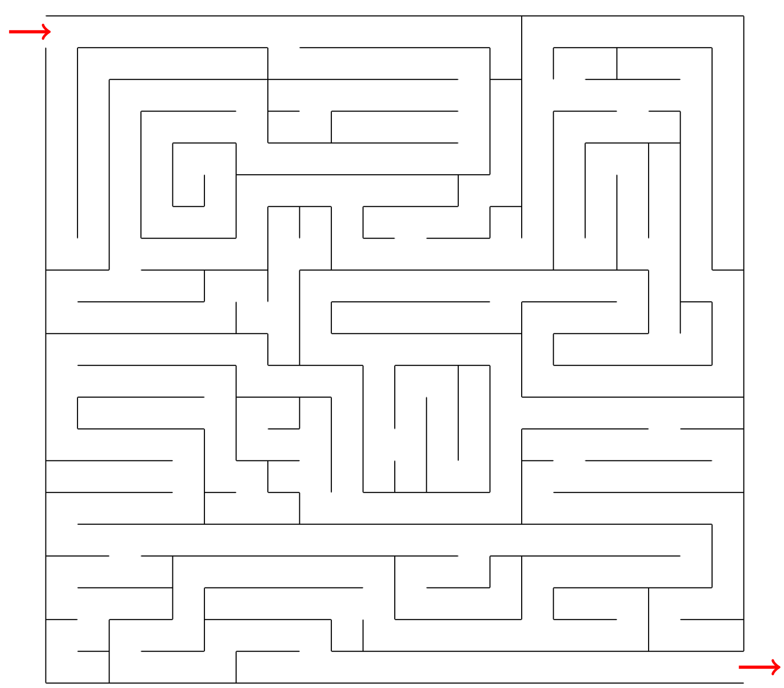
a)



b)



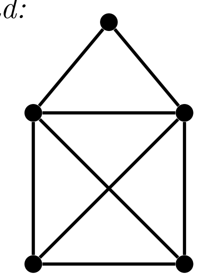
6. Projdi bludištěm.



Jméno: ....

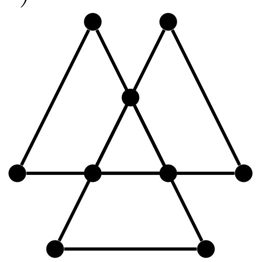
1. Rozhodni, zda můžeš obrázky nakreslit jedním tahem. To znamená, že každou čáru nakreslíš právě jednou a při kreslení nezvedneš tužku z papíru.

Příklad:



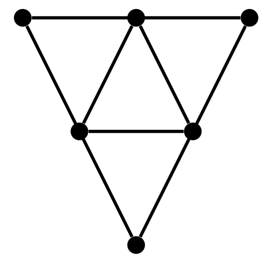
MŮŽU / NEMŮŽU obrázek nakreslit jedním tahem

a)



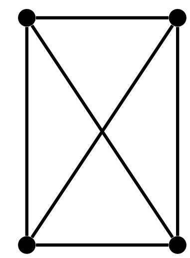
MŮŽU / NEMŮŽU obrázek nakreslit jedním tahem

b)



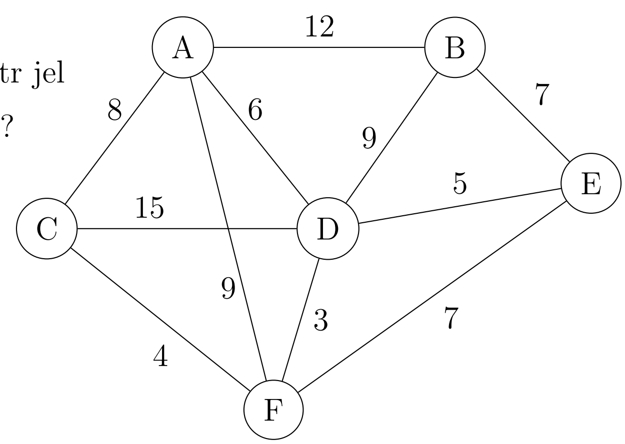
MŮŽU / NEMŮŽU obrázek nakreslit jedním tahem

c)



MŮŽU / NEMŮŽU obrázek nakreslit jedním tahem

2. Pozorně si prohlédni mapu a odpověz na otázky. Všechny hodnoty jsou uvedeny v kilometrech.



Příklad: Pavel jel po trase D – B – E a Petr jel D – E. Kdo ujel méně kilometrů? O kolik?

Pavel: $9 + 7 = 16$

Petr: 5

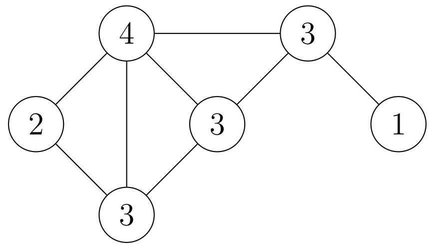
$16 - 5 = 11$

Petr ujel o 11 km méně.

a) Adam jel po trase A – D – F a Aleš jel A – C – F. Kdo ujel méně kilometrů? O kolik?

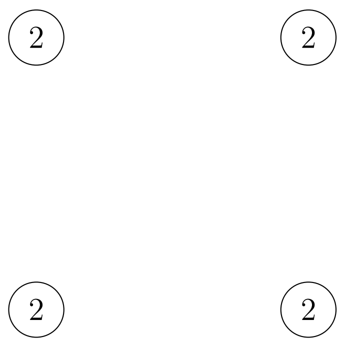
b) Bruno jel po trase C – A – B a Ben jel C – F – E – B. Kdo ujel méně kilometrů? O kolik?

3. Pozorně si prohlédni obrázek. Všimni si, že čísla v kolečku určují, kolik čar z nich vede.

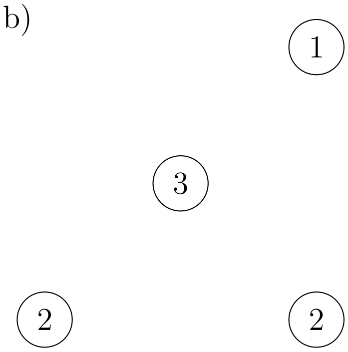


Spoj kolečka čarami tak, aby z každého kolečka vycházelo tolik čar, kolik udává číslo uvnitř. Každá čára musí mít začátek i konec v kolečku.

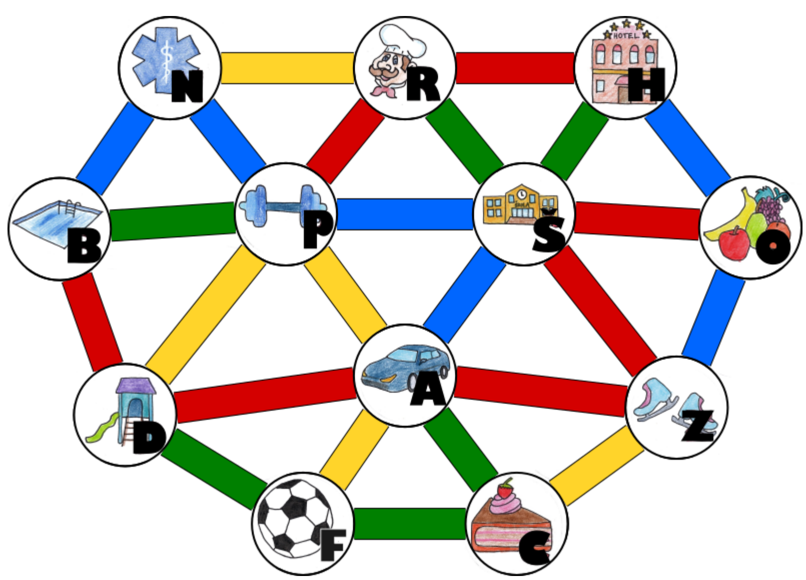
a)



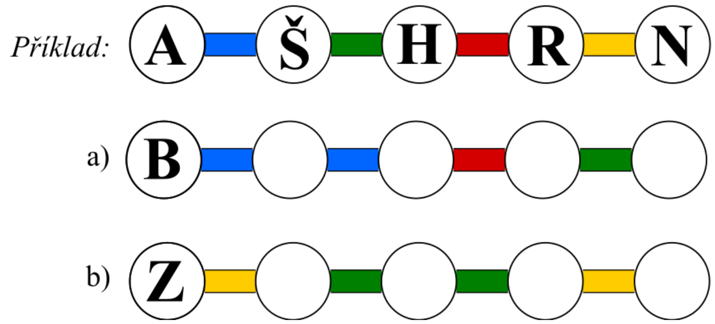
b)



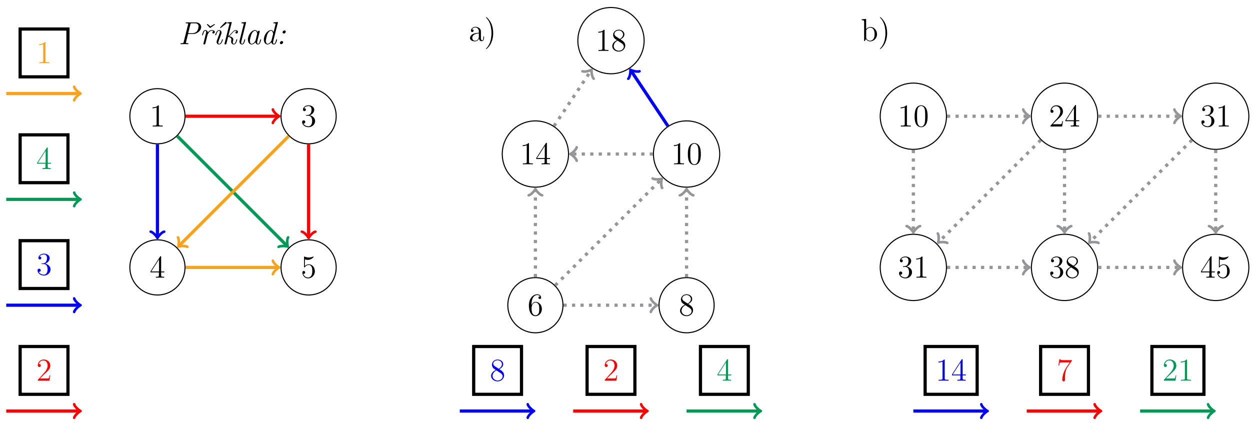
4. Pozorně si prohlédni mapu a vypracuj úkol na další straně.



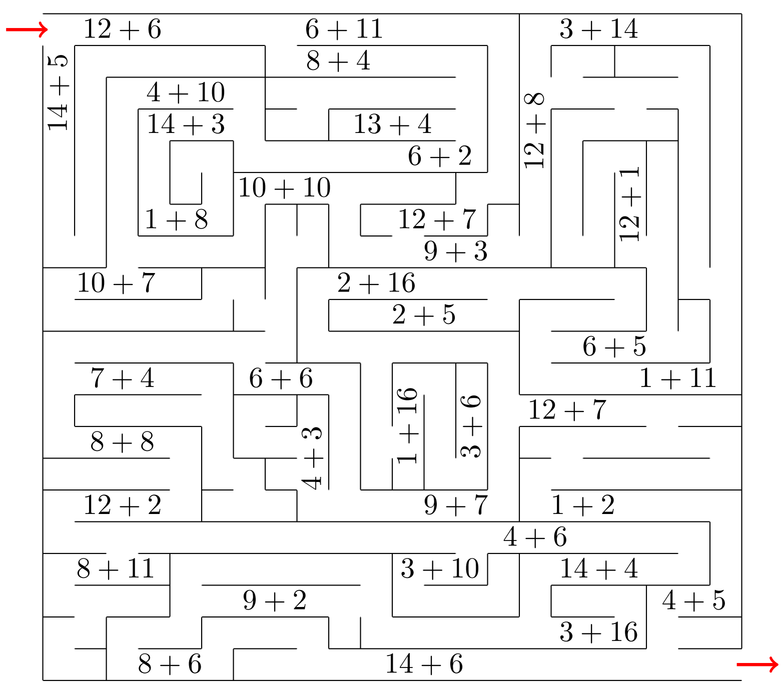
Napiš do prázných koleček písmena podle mapy.



5. Dokresli barevné šipky podle čísla, které přičítají.



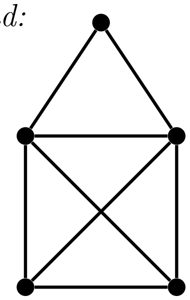
6. Projdi bludištěm, ale pozor! Můžeš projít jen přes **sudé výsledky**. Příklady s lichými výsledky nejsou průchozí.



Jméno: ....

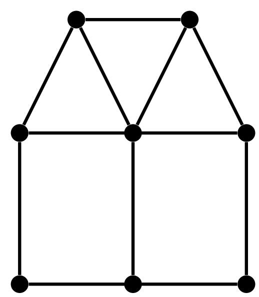
1. Rozhodni, zda můžeš obrázky nakreslit jedním tahem. To znamená, že každou čáru nakreslíš právě jednou a při kreslení nezvedneš tužku z papíru.

Příklad:



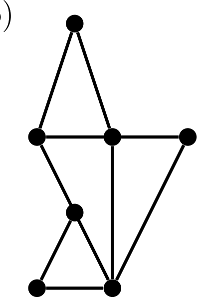
MŮŽU / NEMŮŽU
obrázek nakreslit
jedním tahem

a)



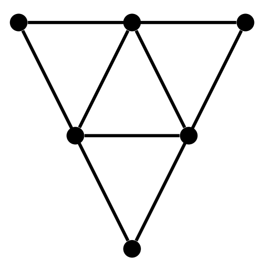
MŮŽU / NEMŮŽU
obrázek nakreslit
jedním tahem

b)



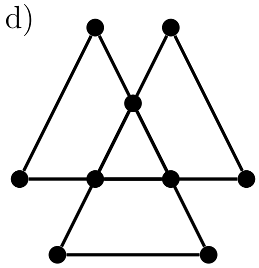
MŮŽU / NEMŮŽU
obrázek nakreslit
jedním tahem

c)



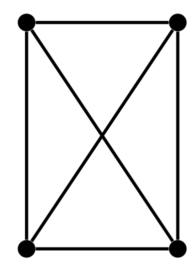
MŮŽU / NEMŮŽU
obrázek nakreslit
jedním tahem

d)



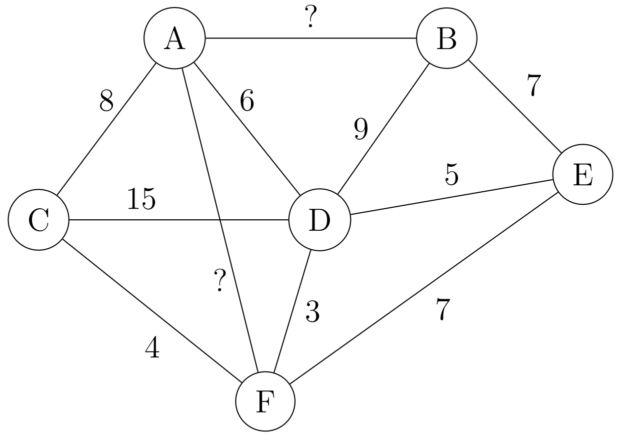
MŮŽU / NEMŮŽU
obrázek nakreslit
jedním tahem

e)



MŮŽU / NEMŮŽU
obrázek nakreslit
jedním tahem

2. Pozorně si prohlédni mapu a odpověz na otázky. Všechny hodnoty jsou uvedeny v kilometrech.



Příklad: Jak dlouhá je cesta C–D–B ?

$15 + 9 = 24$

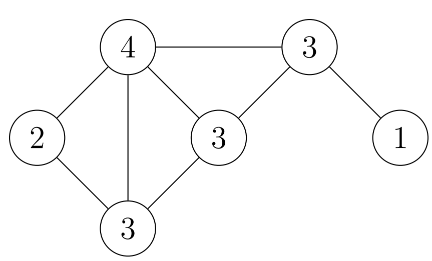
Cesta je dlouhá 24 km.

a) Jak dlouhá je cesta z A do B, když víš, že A–B–E je stejně dlouhá jako A–C–F–E ?

b) Jak dlouhá je cesta z A do F, když víš, že A–F–E je o 5 km delší než A–D–F ?

3. Spoj kolečka čarami tak, aby z každého kolečka vycházelo tolik čar, kolik udává číslo uvnitř. Každá čára musí mít začátek i konec v kolečku.

Příklad: 1 2 3 3 3 4

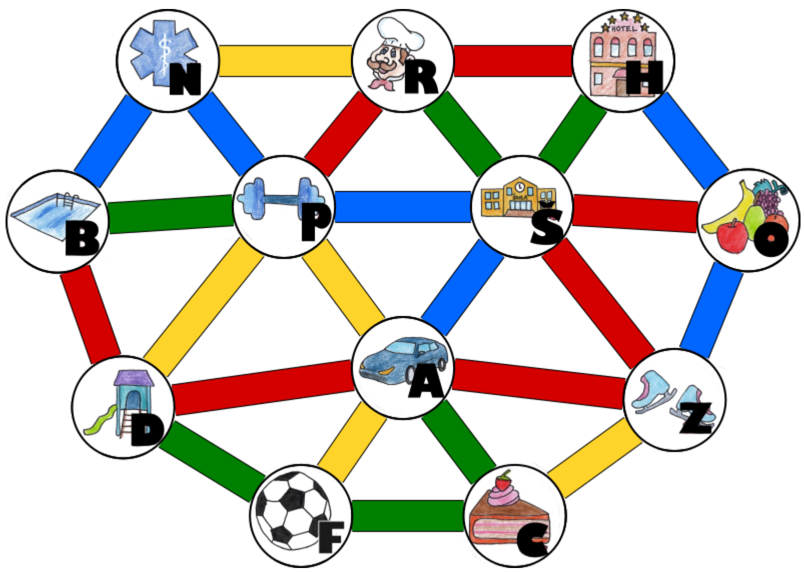


Spoj kolečka podle vzorového příkladu na předchozí straně.

a) 2 2 2 2

b) 1 2 2 3

4. Pozorně si prohlédni mapu.



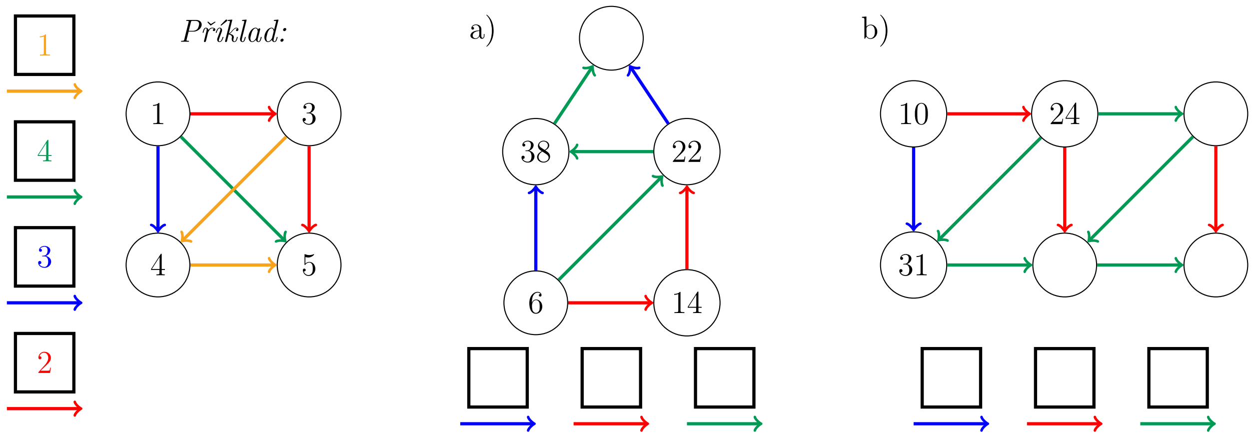
Podle mapy napiš do prázných koleček písmena a vybarvi bílé cesty.

Příklad: A — Š — H — R — N

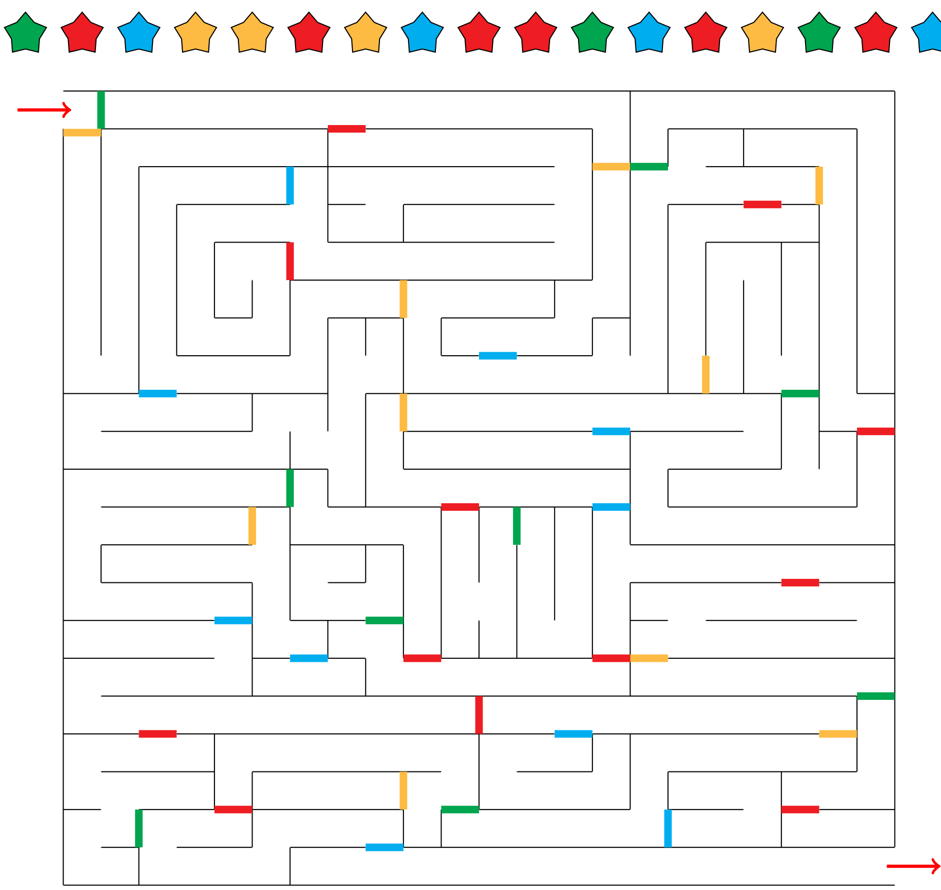
a) B — N — ◯ — R — ◯

b) ◯ — Z — O — H — ◯

5. Doplň chybějící čísla. Čísla ve čtverečcích určují, jaké číslo přičítá šipka s danou barvou.



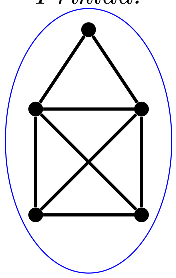
6. Projdi bludištěm. Skrz barevné dveře můžeš projít jen s **hvězdou stejné barvy**. Použij hvězdy nad bludištěm, ale **nesmíš měnit jejich pořadí** a každou můžeš **použít jen jednou**.



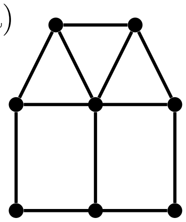
Jméno: ....

1. Zakroužkuj obrázky, které můžeš nakreslit jedním tahem. To znamená, že každou čáru nakreslíš právě jednou a při kreslení nezvedneš tužku z papíru. Obrázky, které zakroužkuješ, zkus nakreslit jedním tahem a k čarám napiš pořadí, ve kterém jsi je nakreslil/a.

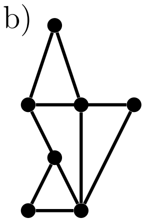
Příklad:



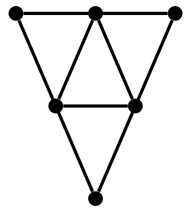
a)



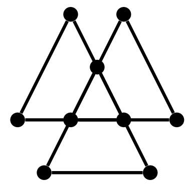
b)



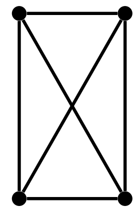
c)



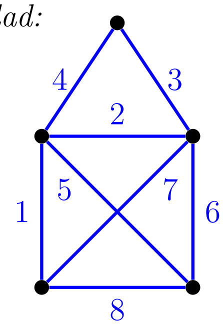
d)



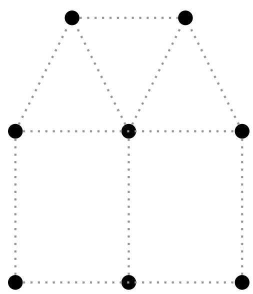
e)



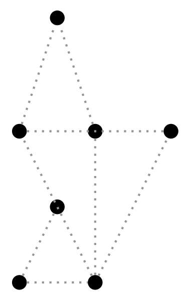
Příklad:



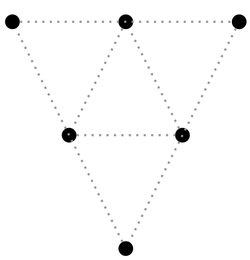
a)



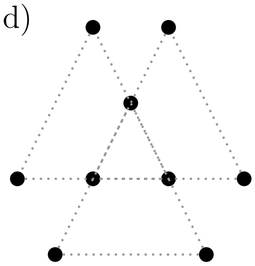
b)



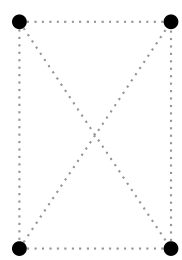
c)



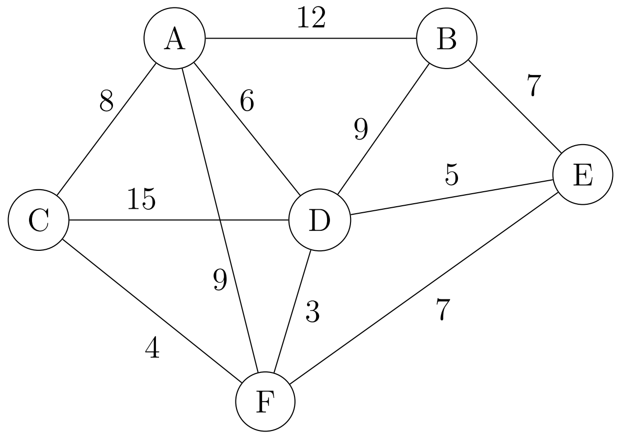
d)



e)



2. Pozorně si prohlédni mapu a odpověz na otázky. Nejkratší cesta je ta, u které je napsané nejnižší číslo.

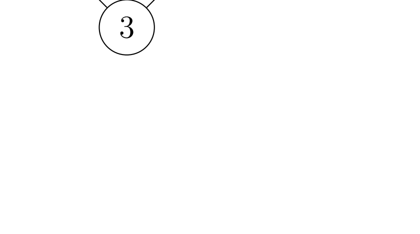


a) Jak se nejkratší cestou dostaneš z A do E?

a) Jak se nejkratší cestou dostaneš z C do B?

3. Spoj kolečka čarami tak, aby z každého kolečka vycházelo tolik čar, kolik udává číslo uvnitř. Každá čára musí mít začátek i konec v kolečku.

Příklad: 1 2 3 3 3 4

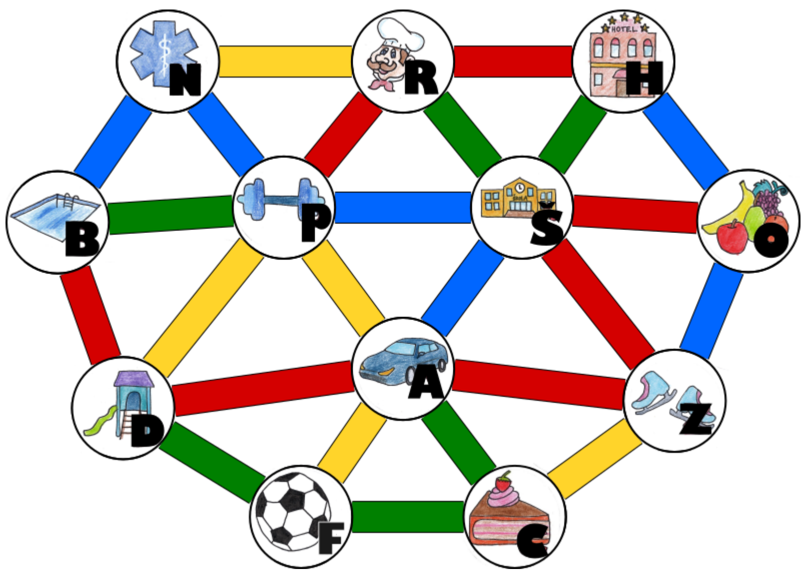


Spoj kolečka podle vzorového příkladu na předchozí straně.

a) (1) (1) (1) (3)

b) (2) (2) (3) (3) (4)

4. Pozorně si prohlédni mapu.

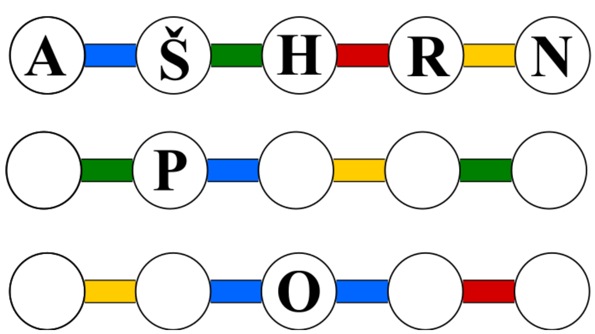


Napiš do prázdných koleček písmena podle mapy.

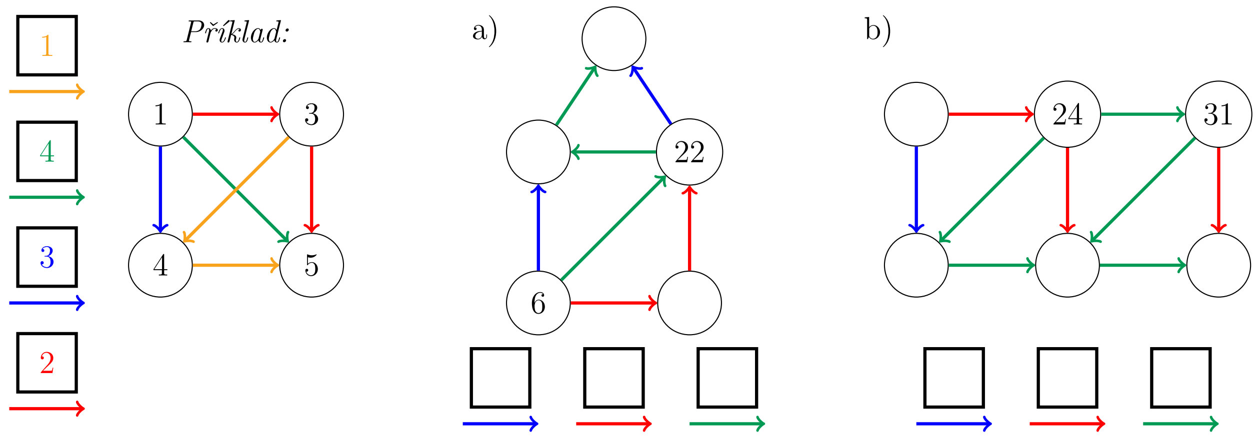
Příklad:

a)

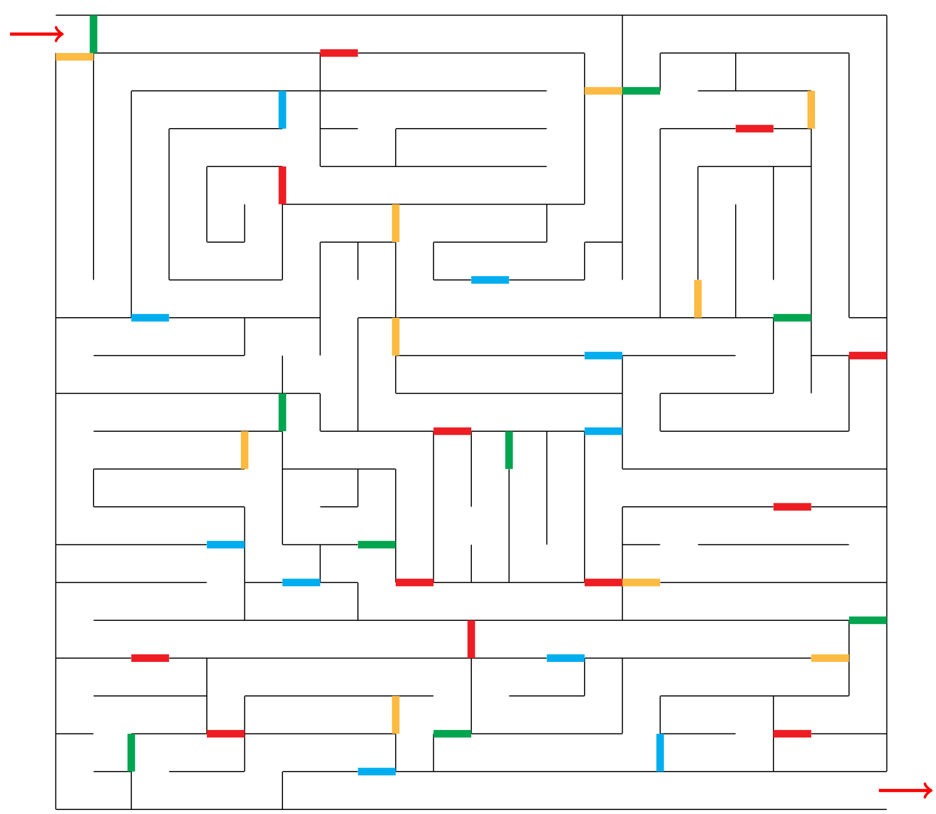
b)



5. Doplň chybějící čísla. Čísla ve čtverečcích určují, jaké číslo přičítá šipka s danou barvou.



6. Projdi bludištěm tak, aby cesta vedla přes co **nejméně červených bran**. Ostatními barevnými bránami můžeš procházet bez omezení.

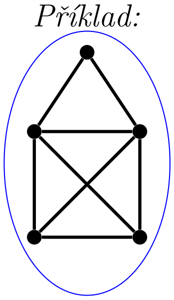


Počet červených bran, kterými vede cesta: ☐.

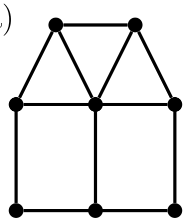
Jméno: ....

1. Zakroužkuj obrázky, které můžeš nakreslit jedním tahem. To znamená, že každou čáru nakreslíš právě jednou a při kreslení nezvedneš tužku z papíru. Obrázky, které zakroužkuješ, zkus nakreslit jedním tahem a k čarám napiš pořadí, ve kterém jsi je nakreslil/a.

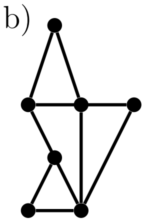
Příklad:



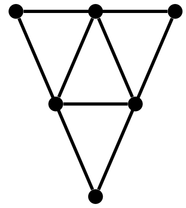
a)



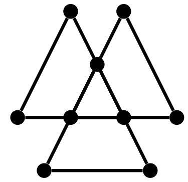
b)



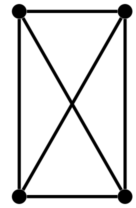
c)



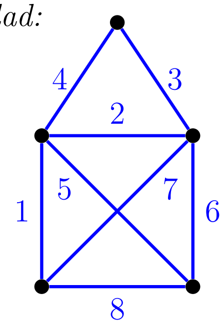
d)



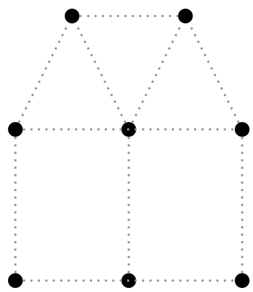
e)



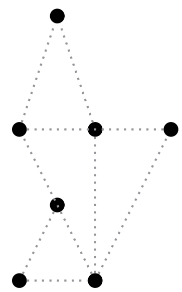
Příklad:



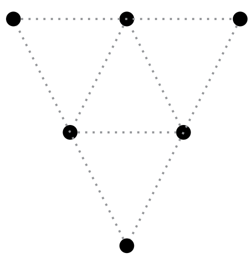
a)



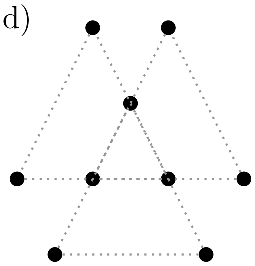
b)



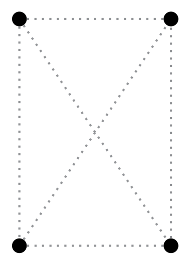
c)



d)

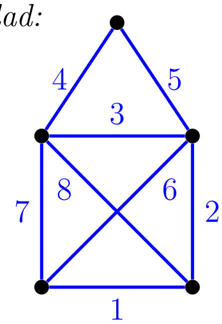


e)

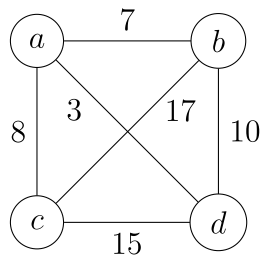


Vyber si jeden obrázek a zkus najít víc způsobů, jak ho nakreslit jedním tahem. Můžeš najít i další způsoby jak nakreslit domeček.

Příklad:

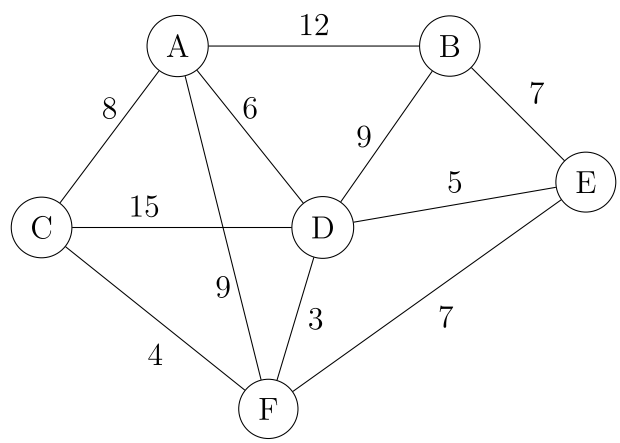


2. *Příklad:* Zkus najít **nejkratší cestu**, která začíná a končí v bodě a a zároveň navštíví všechny ostatní body. Nejkratší cesta je ta, u které je napsané nejnižší číslo.



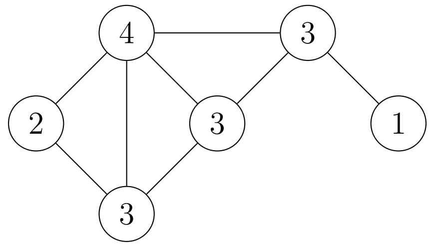
Cesta $a - b - d - c - a : 7 + 10 + 15 + 8 = 40$.
Cesta $a - b - c - d - a : 7 + 17 + 15 + 3 = 42$.
Cesta $a - d - b - c - a : 3 + 10 + 17 + 8 = 38$.
$42 > 40 > 38$.
Nejkratší cesta je $a - d - b - c - a$.

Zkus najít **nejkratší cestu**, která začíná a končí v bodě A a zároveň navštíví všechny ostatní body.



3. Spoj kolečka čarami tak, aby z každého kolečka vycházelo tolik čar, kolik udává číslo uvnitř. Každá čára musí mít začátek i konec v kolečku.

   Příklad: 1 2 3 3 3 4

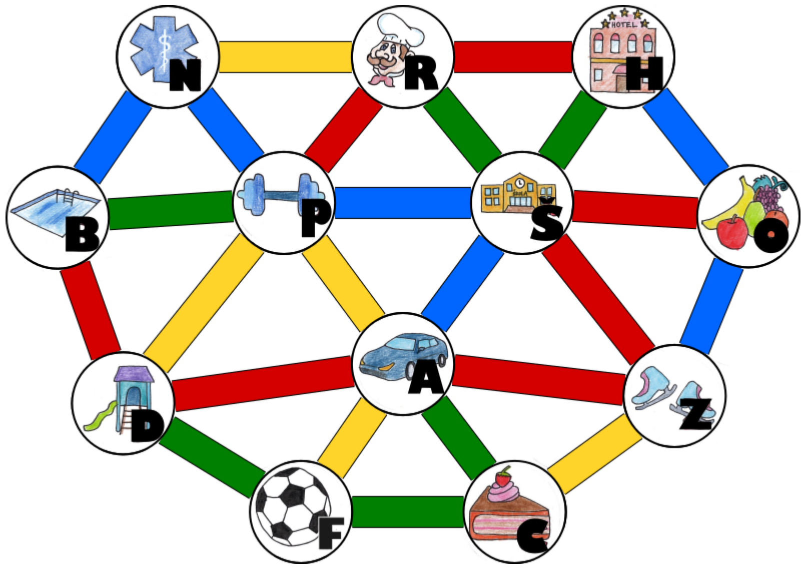


   Spoj kolečka podle vzorového příkladu.

   a) 1 2 3 3 3

   b) 2 3 3 4 4

4. Pozorně si prohlédni mapu.

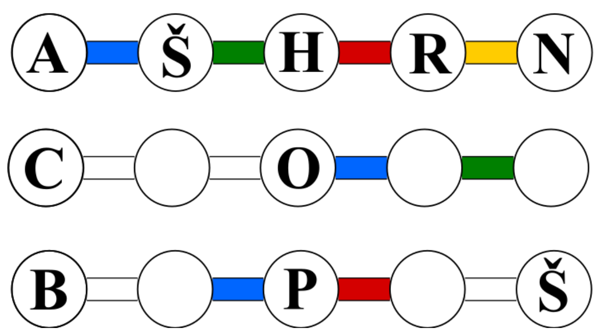


Podle mapy napiš do prázných koleček písmena a vybarvi bílé cesty.

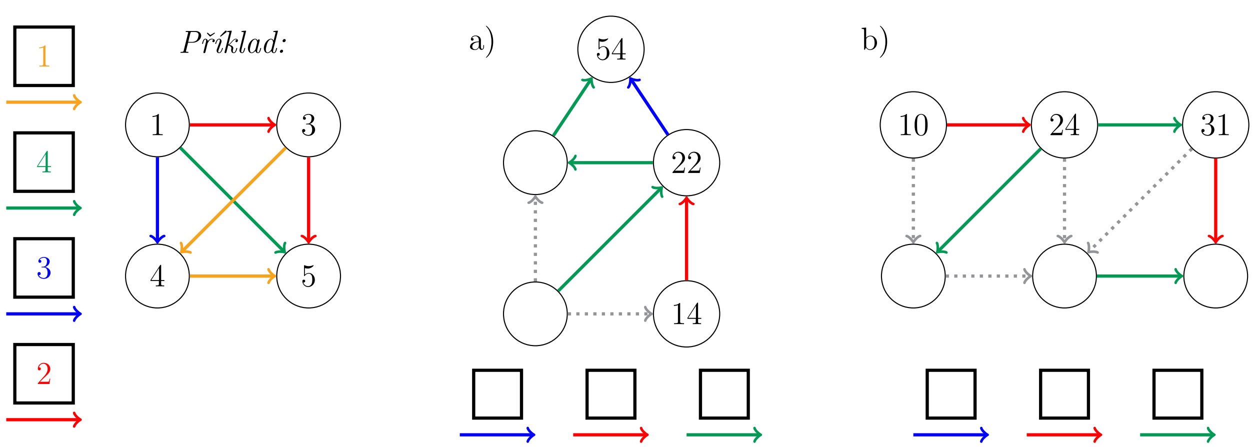
Příklad:

a)

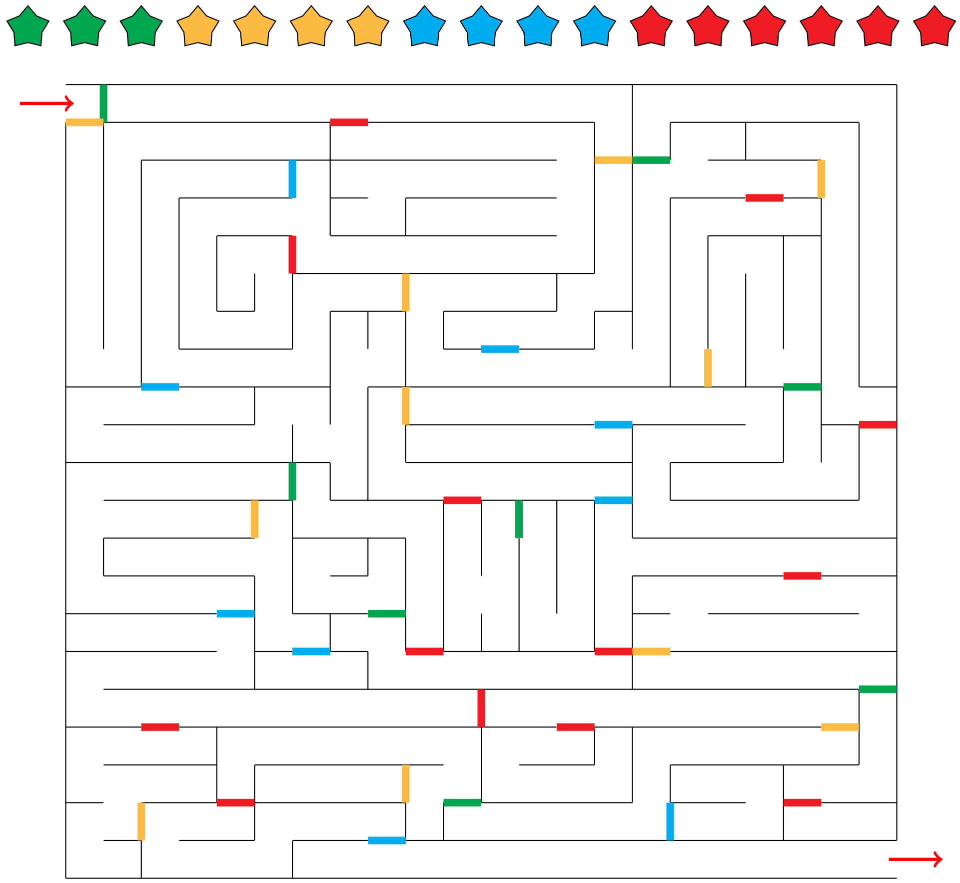
b)



5. Doplň chybějící čísla a barevné šipky. Čísla ve čtverečcích určují, jaké číslo přičítá šipka s danou barvou.



6. Projdi bludištěm. Skrz barevné dveře můžeš projít jen s **hvězdou stejné barvy**. Použij hvězdy nad bludištěm v **libovolném pořadí**.



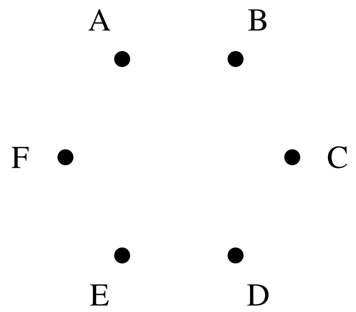
Příloha 2: Ukázka dalších úloh z teorie grafů

U všech úloh uvádíme jen jedno možné řešení, přestože některé úlohy jich mohou mít více.

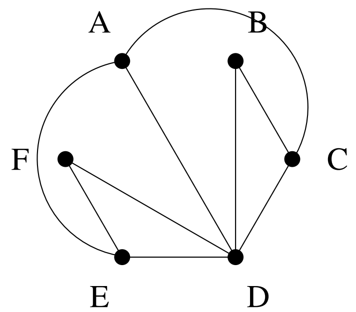
Úloha 1: Rovinný graf

Tatínka zajímá, zda je možné propojit části elektrického obvodu tak, aby se jednotlivé dráty nekřížily. Spoj body čárami tak, aby byly spojené dvojice v závorkách, ale čáry se nekřížily.

$$(A,C),(A,D),(A,E),(B,C),(B,D),(C,D),(D,E),(D,F),(E,F)$$



Řešení úlohy 1:

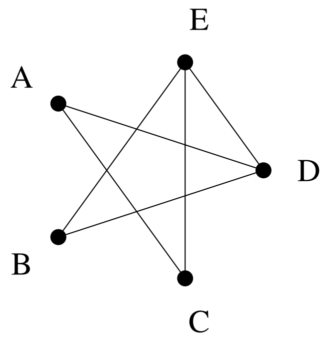


Další doplňující úlohy:

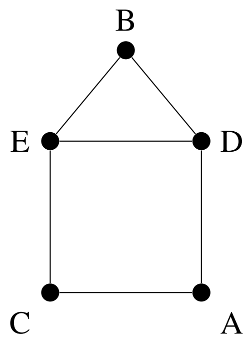
- Je možné spojit body podle zadání jedním tahem?
- Spoj body podle zadání minimálním počtem tahů.
- Spoj dva body takové, aby už nebylo možné spojit body bez křížení čar.

Úloha 2: Izomorfní rovinný graf

Děti na táboře hrají hru. Každý drží konec dvou nebo tří lan, která jsou propletená do sebe. Úkolem dětí je lana rozplést. Zkus přemístit děti (body na obrázku) tak, aby se lana (čáry) nekřížila a zároveň, aby děti pořád držely stejná lana. Nové rozmístění dětí i s jejich lany nakresli.

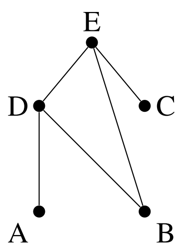


Řešení úlohy 2:



Další doplňující úlohy:

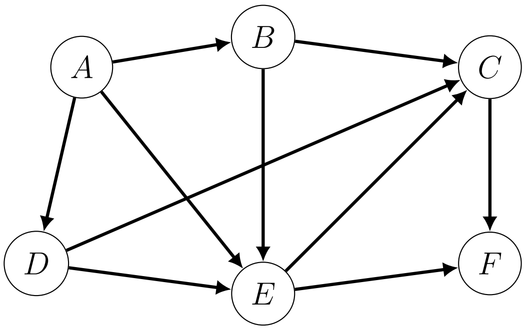
- Zkuste situaci s lany realizovat.
- Je možné, aby se děti s lany přemístily tak, aby stály jako na následujícím obrázku?



- Uprav obrázek z předchozího bodu, aby se tak mohly přemístit děti s lany.

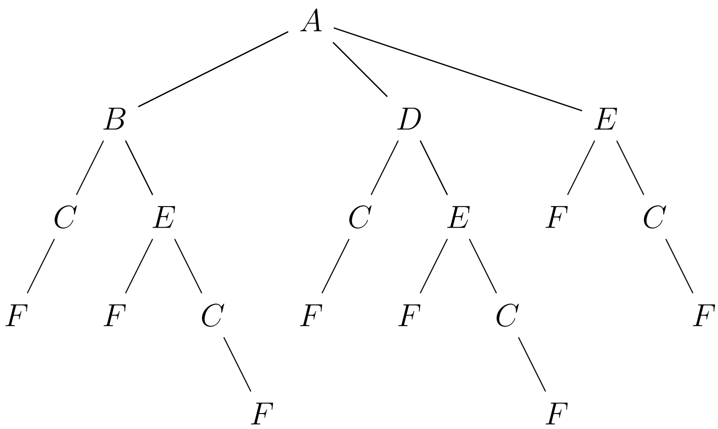
Úloha 3: Cesta v orientovaném grafu

Cyril je v nákupním centru a chce se dostat z místa A do místa F, ale rád jezdí eskalátory a chce je využít k cestě do cíle. Mapa znázorňuje, do kterých míst a v jakém směru eskalátory jezdí. Z kolika možných cest si Cyril může vybrat?



Řešení úlohy 3:

Z místa A do místa B vede 8 cest. Pro ukázku řešení jsme zvolili rozhodovací strom.

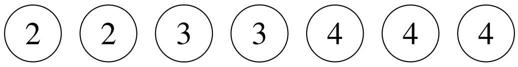


Další doplňující úlohy:

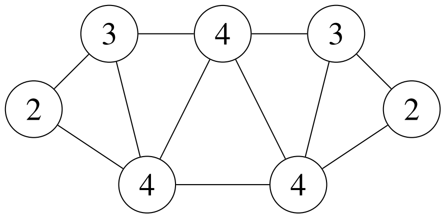
- Najdi cestu z místa A do místa F tak, abys použil co nejmenší počet eskalátorů.
- Najdi cestu z místa A do místa F tak, abys použil co největší počet eskalátorů.
- Kolik možný cest Cyril má, pokud potřebuje vyrazit z místa A, pak navštívit místo C a skončit v místě F?

Úloha 4: Skóre grafu

Darinka chce postavit autodráhu ze všech svých dílků. Pomoz jí vymyslet, jak propojit všechny křižovatky znázorněné kolečky. Čísla uvnitř koleček znázorňují, kolik cest musí křižovatka propojit. Každá cesta musí mít křižovatku (kolečko) z obou stran.



Řešení úlohy 4:

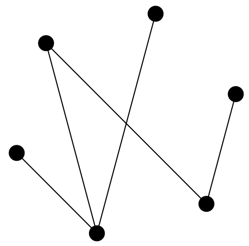


Další doplňující úlohy:

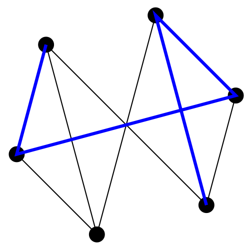
- Spoj některé křižovatky dvouproudou silnicí, to znamená, že některé vrcholy budou spojeny dvěma čárami. Dvouproudá silnice se počítá, jako kdyby ke křižovatce byly připojeny dvě silnice.
- S křižovatkami ze zadání, vytvoř dvě autodráhy.
- Darinka má 70 dílků silnic. Zkus navrhnout, jak by mohla dílky rozmístit do autodráhy, aby použila všechny. Zapiš počty dílků k čarám mezi kolečky a dej pozor, aby jejich součet byl přesně 70.

Úloha 5: Regulární graf

Děti dostaly tři úkoly, které budou dělat ve dvojicích, přičemž každý úkol musí dělat v jiné dvojici. Na obrázku jsou děti zaznačeny body, pokud jsou body spojené čárou znamená to, že děti spolupracovaly na úkolu. Doplň čáry tak, aby každé dítě mělo tři dvojice.



Řešení úlohy 5:

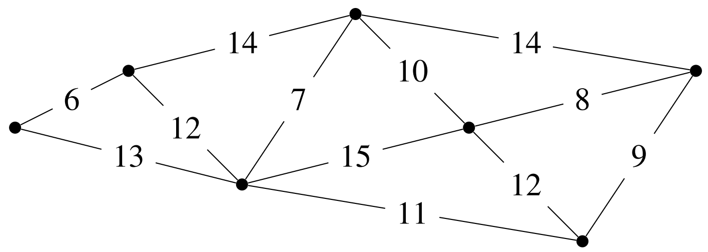


Další doplňující úlohy:

- Nakresli, jak by obrázek vypadal, kdyby děti musely vytvořit dvojice pro 4 úkoly. To znamená, že by každý byl spojený se čtyřmi body.
- Kolik nejvýše úkolů by děti mohly dostat, aby na každý úkol byly v jiné dvojici. Nakresli takový obrázek.
- Do skupiny přišly další dvě děti. Uprav původní obrázek a dokresli do obrázku dva body. Doplň čáry, aby každé dítě mělo tři dvojice.

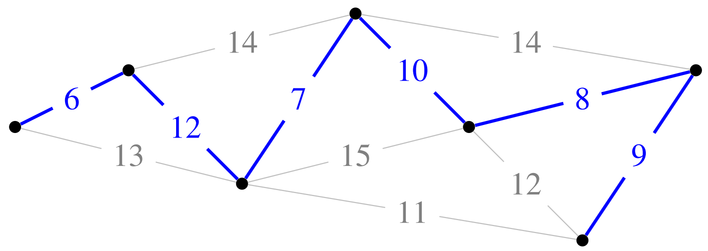
Úloha 6: Minimální kostra grafu

Kamarádi si postavili domy na stromech a chtějí mezi nimi natáhnout lano tak, aby použili co nejméně lana. Podmínkou ovšem je, aby bylo možné dostat se z každého domu do libovolného jiného pomocí těchto lan. Body na mapě znázorňují stromové domy a čáry s čísly ukazují, kolik nejméně metrů lana je potřeba pro spojení jednotlivých domů. Spoj domy a spočítej, kolik lana budou potřebovat.



Řešení úlohy 6:

Na spojení domů je potřeba 52 metrů lana.

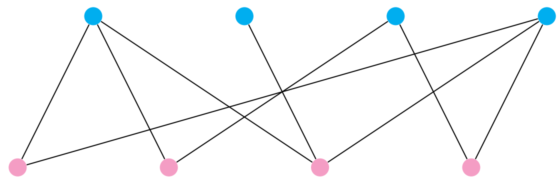


Další doplňující úlohy:

- Kamarádi chtějí domky ohraničit kolem dokola. Jak dlouhé lano budou potřebovat, aby spojili krajní domy a vytvořili uzavřenou oblast?
- Prodejce lana chce kamarády ošidit, proto hledá cestu, která spojí všechny domy. Stále ale musí ponechat nejmenší možný počet použitých spojení pro cestu z každého domu do libovolného jiného domu.
- Filip chce dům v centru, ze kterého bude mít nejkratší cestu do všech ostatních domů. Poraď mu, který dům si má vybrat.

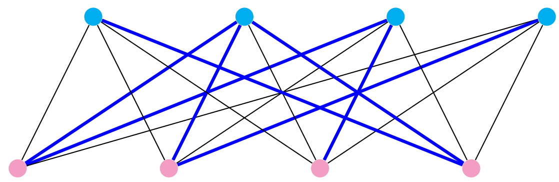
Úloha 7: Bipartitní graf

Děti mají taneční kroužek, ve kterém střídají taneční páry. Páry jsou vždy tvořené chlapcem a dívkou. Na obrázku jsou znázorněny páry, které už spolu tančily. Chlapci jsou označeni modrým bodem a dívky růžovým. Kolik nových tanečních párů ještě můžou děti vytvořit? Spoj body, které mají rozdílnou barvu a ještě nejsou spojeny.



Řešení úlohy 7:

Děti v tanečním kroužku můžou vytvořit 7 nových tanečních párů.



Další doplňující úlohy:

- Uprav obrázek tak, aby každý chlapec tančil se 3 tanečními partnerkami. Tedy spoj modré body s růžovými, aby z každého modrého vycházely právě 3 čáry.
- Kolik nejméně čar musíš odstranit, aby měl každý v tanečním kroužku svého stálého tanečního partnera. To znamená, že každý bod (modrý i růžový) bude spojený s jedním bodem jiné barvy.
- Přiřaď k bodům jména postav z knihy nebo z filmu (modré body budou mužské postavy a růžové body budou ženské postavy). Spoj postavy, které by si v příběhu mohly zatancovat.