UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lineární diferenciální rovnice 2.řádu

Vedoucí bakalářské práce:
prof. RNDr. Svatoslav Staněk, CSc.
Rok odevzdání: 2010

Vypracoval:
Lenka Nemcová
MAP, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto bakalářskou práci samostatně za vedení prof. RNDr. Svatoslava Staňka, CSc. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 15. dubna 2010

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucímu bakalářské práce prof. RNDr. Svatoslavu Staňkovi, CSc. za obětavou spolupráci i za čas, který mi věnoval při konzultacích. Dále si zaslouží poděkování můj počítač, že vydržel moje pracovní tempo, a typografický systém TEX, kterým je práce vysázena.

Obsah

Úvod

Tato bakalářská práce je věnována lineárním diferenciálním rovnicím 2.řádu, přičemž hlavním cílem je uvedení a dokázání základních vlastností řešení lineárních diferenciálních rovnic 2.řádu včetně Sturmovy srovnávací věty. Dále zde budou dokázány výsledky o odhadu vzdáleností sousedících nulových bodů netriviálního řešení homogenní lineární diferenciální rovnice 2.řádu.

Diferenciální rovnice mají zásadní význam při řešení mnohých fyzikálních, technických a inženýrských problémů. Bez diferenciálních rovnic by nebylo možné provádět různé výpočty související s pružností a pevností materiálu, s řízením složitých jaderných reakcí, s lety do vesmíru apod.

Kvalitativní teorii lineárních diferenciálních rovnic 2.řádu dal základ v roce 1836 J. C. F. Sturm svou slavnou prací "Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre" J. Math. Pures Allp. 1(1) (1836), 106 - 186, v němž studoval oscilační vlastnosti řešení a odvodil srovnávací věty. Na jeho bádání navázal J. Bernoulli, který se v letech 1835 - 1841 zabýval řešením okrajového problému.

Zajímavá je skutečnost, že teprve v 1. polovině 20. století se dostala teorie lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu opět do středu pozornosti a v dnešní době tvoří jednu z nejrozsáhlejších a nejpropracovanějších disciplín teorie obyčejných diferenciálních rovnic.

Lineární diferenciální rovnicí 2.řádu nazýváme rovnici

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$$

O funkcích a, b, c předpokládáme, že jsou spojité na nějakém intervalu I. Jiný běžně užívaný tvar rovnice 2.řádu je

$$(p(t)x')' + q(t)x = r(t),\ p(t) > 0.$$

V této práci bude hlavní pozornost věnována rovnici v Jacobiho tvaru

$$x'' + q(t)x = 0,\ q \in C^0(I),$$

a odpovídající nehomogenní rovnici

$$x'' + q(t)x = h(t), \ q, h \in C^0(I),$$

neboť metody, kterých budeme užívat ke studiu, jsou stejné jako v obecném případě, ale formálně podstatně jednodušší.

První kapitola je rozdělena na dvě podkapitoly a věnuje se základním vlastnostem řešení diferenciálních rovnic 2.řádu a vzdálenosti sousedních nulových bodů řešení. Jsou zde uvedeny věty Sturmova srovnávací, De la Vallée-Poussinova a Lyapunovova. Jsou zde i uvedeny příklady na odhad vzdálenosti nulových bodů řešení.

Druhá kapitola se zabývá řešením lineárních diferenciálních rovnic 2.řádu s konstantními koeficienty. Tato kapitola je rozdělena na tří podkapitol. V první se seznámíme se základními definicemi lineárních diferenciálních rovnic 2.řádu s konstatními koeficienty. Druhá je věnována řešení homogenní lineární diferenciální rovnice a jsou v ní i uvedeny přiklady na výpočet obecného řešení lineární diferenciální rovnice 2.řádu v homogenním tvaru a řešení nehomogenních lineárních diferenciálních rovnic 2.řádu. Ve třetí podkapitole jsou uvedeny metody pro výpočty řešení nehomogenní rovnice, tj. je tu uvedena metoda variace konstant a metoda neurčitých koeficientů, a jsou tu také příklady na použití těchto metod.

1 Homogenní lineární diferenciální rovnice 2.řádu

1.1 Základní vlastnosti řešení lineárních diferenciálních rovnic 2.řádu

V této kapitole uvedeme základní vlastnosti řešení lineárních diferenciálních rovnic

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0, \tag{1}$$

kde funkce a, b jsou spojité na nějakém intervalu $I \subset \mathbb{R}$.

Definice 1.1. *Řešením rovnice (1) rozumíme každou funkci x, která má spojitou druhou derivaci na I a vyhovuje rovnici (1) na I.*

Věta 1.1. *Buďte $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ a $t_0 \in I$. Pak existuje právě jedno řešení x rovnice (1) definované na I a spňující počáteční podmínky*

$$x(t_0) = \xi_1, x'(t_0) = \xi_2.$$

Důsledek 1.1. *Nechť $t_0 \in I$ a x je řešení rovnice (1) takové, že $x(t_0) = 0, x'(t_0) = 0$. Pak $x(t) = 0$ pro $t \in I$, tj. x je nulové řešení rovnice (1).*

Důkaz: Funkce $y(t) = 0$ pro $t \in I$ je řešením rovnice (1) a $y(t_0) = 0, y'(t_0) = 0$. Jelikož řešení x a y rovnice (1) splňují v bodě $t_0 = 0$ stejné počáteční podmínky, je $y(t) = x(t)$ pro $t \in I$ podle věty 1.1. Tedy x je nulové řešení rovnice (1). $\square$

Poznámka 1.1. Nechť x je nenulové řešení rovnice (1) a nechť $x(t_0) = 0$ pro nějaké $t_0 \in I$. Pak $x'(t_0) \neq 0$. V opačném případě je $x'(t_0) = 0$ a pak z důsledku 1.1. plyne, že x je nulové řešení rovnice (1).

Důsledek 1.2. *Nechť x je nenulové řešení rovnice (1). Pak jsou nulové body řešení x izolované body.*

Důkaz: Nechť $t_0 \in I$ je nulový bod řešení x, který není izolovaným bodem. Pak existuje posloupnost $\{t_n\} \subset I$ navzájem různých bodů takových, že $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$ a $x(t_n) = 0$ pro $n \in \mathbb{N}$. Jelikož $x(t_n) = x(t_{n+1}) = 0$ pro $n \in \mathbb{N}$, plyne z věty o přírůstku funkce, že $x'(\xi_n) = 0$, kde ξ_n leží mezi body t_n, t_{n+1}. Pak ovšem $\lim_{n\to\infty}\xi_n = t_0$, což plyne z předpokladu $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$. Ze spojitosti funkce x' dostáváme: $0 = \lim_{n\to\infty} x'(\xi_n) = x'(t_0)$. Tím je dokázáno, že $x'(t_0) = 0$, a jelikož $x(t_0) = 0$, je $x(t) = 0$ pro $t \in I$ podle důsledku 1.1. To je ve sporu s tím, že podle předpokladu x je nenulové řešení rovnice (1). □

Důsledek 1.3. *Netriviální řešení $x(t)$ rovnice (1) má na každém kompaktním intervalu $[a,b] \subset I$ konečný počet nulových bodů.*

Důkaz: Nechť $[a,b] \subset I$ je kompaktní interval. Předpokládejme, že netriviální řešení $x(t)$ rovnice (1) má na $[a,b]$ nekonečně mnoho nulových bodů. Pak existuje $\{t_n\} \subset [a,b]$ navzájem různých bodů, které jsou nulovými body řešení $x(t)$. Jelikož $\{t_n\}$ je ohraničena, existuje podle Weierstrassovy věty vybraná posloupnost $\{t_{k_n}\}$, která je konvergentní. Nechť $\lim_{n\to\infty} t_{k_n} = t_0$. Pak $t_0 \in [a,b]$ a $x(t_0) = 0$. Odtud plyne, že bod t_0 je hromadným bodem nulových bodů řešení $x(t)$. To je však ve sporu s tím, že podle důsledku 1.2. jsou nulové body každého netriviálního řešení rovnice (1) izolované. □

Důsledek 1.4. *Nechť x_1, x_2 jsou nenulová řešení rovnice (1) a nechť $x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0$ pro nějaká $t_0 \in I$. Pak $x_1(t) = kx_2(t)$ pro $t \in I$, kde $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$.*

Důkaz: Z poznámky 1.1. plyne, že $x_1'(t_0) \neq 0$ a $x_2'(t_0) \neq 0$. Položme $y(t) = kx_2(t)$ pro $t \in I$, kde $k = \frac{x_1'(t_0)}{x_2'(t_0)}$. Pak $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ a y je řešení rovnice (1). Jelikož $y(t_0) = 0$ a $y'(t_0) = kx_2'(t_0) = \frac{x_1'(t_0)}{x_2'(t_0)} x_2'(t_0) = x_1'(t_0)$, řešení x_1 a y rovnice (1) splňují v bodě $t = t_0$ stejné počáteční podmínky. Proto $x_1(t) = y(t)$ pro $t \in I$ podle věty 1.1. Odtud plyne $x_1(t) = kx_2(t)$ pro $t \in I$. □

Definice 1.2. *Řekneme, že řešení $x(t)$ a $y(t)$ jsou lineárně závislá řešení rovnice (1), jestliže existují $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $|c_1| + |c_2| > 0$ taková, že $c_1x(t) + c_2y(t) = 0$ pro $t \in I$. V opačném případě řekneme, že $x(t)$ a $y(t)$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (1) nebo také, že $x(t)$ a $y(t)$ je fundamentální systém řešení rovnice (1).*

Věta 1.2. *Řešení $x(t)$ a $y(t)$ rovnice (1) jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (1) právě, když pro jejich wronskián $W[x,y](t)$,*

$$W[x,y](t) = \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{vmatrix},$$

platí $W[x,y](t) \neq 0$ *pro* $t \in I$.

Věta 1.3. *Nechť* $x(t)$ *a* $y(t)$ *jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (1). Pak nulové body řešení* $x(t)$ *a* $y(t)$ *se vzájemně oddělují, což znamená, že mezi sousedními nulovými body řešení* $x(t)$ *leží právě jeden nulový bod řešení* $y(t)$ *a mezi sousedními nulovými body řešení* $y(t)$ *leží právě jeden nulový bod řešení* $x(t)$.

Důkaz: Stačí dokázat, že např. mezi sousedními nulovými body řešení $x(t)$ leží nulový bod řešení $y(t)$. Nechť tedy $t_1, t_2 \in I, t_1 < t_2$, jsou sousední nulové body řešení $x(t)$. Pak $x(t_1) = x(t_2) = 0$ a $x(t) \neq 0$ pro $t \in (t_1, t_2)$. Předpokládejme, že $y(t)$ nemá v intervalu (t_1, t_2) nulový bod. Jelikož $x(t)$ a $y(t)$ jsou podle předpokladu lineárně nezávislá řešení rovnice (1), je $y(t_1) \neq 0$ a $y(t_2) \neq 0$ podle důsledku 1.4. Lze tedy na intervalu $[t_1, t_2]$ definovat fuknci z předpisem $z(t) = \frac{x(t)}{y(t)}$. Pak $z(t_1) = z(t_2) = 0$ a $z'(t) = \frac{x'(t)y(t) - x(t)y'(t)}{y^2(t)} = -\frac{W[x,y](t)}{y^2(t)}$ pro $t \in I$, kde $W[x,y]$ je wronskián řešení $x(t), y(t)$. Z věty 1.2. plyne, že $W[x,y](t) \neq 0$ pro $t \in I$. Proto $\frac{W[x,y](t)}{y^2(t)} \neq 0$ pro $t \in [t_1, t_2]$, a tedy $z'(t) \neq 0$ na tomto intervalu. Odtud plyne, že $z'(t) > 0$ nebo $z'(t) < 0$ na $[t_1, t_2]$, což je ve sporu s $z(t_1) = z(t_2) = 0$. Tím je dokázáno, že $y(t)$ má nulový bod v intervalu (t_1, t_2). □

1.2 Nulové body řešení lineárních diferenciálních rovnic 2.řádu

Při studiu rozložení nulových bodů řešení rovnice (1) stačí jenom vyšetřovat řešení rovnice typu

$$x'' + p(t)x = 0,$$

což plyne z následující věty.

Věta 1.4. *Nechť* $a \in C^1(I)$ *a nechť* $b \in C(I)$. *Pak substituce*

$$x = zexp\Big(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} a(s)ds\Big) \quad t_0, t \in I,$$

transformuje množinu řešení rovnice (1) na množinu řešení rovnice

$$z'' + p(t)z = 0, \tag{2}$$

kde

$$p(t) = -\frac{a^2(t)}{4} - \frac{a'(t)}{2} + b(t), \quad t \in I.$$

Důkaz: Nechť x je řešení rovnice (1) a položme

$$z(t) = x(t)exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) \quad pro \quad t \in I. \tag{3}$$

Pak

$$z'(t) = exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)(x'(t) + \frac{1}{2}a(t)x(t))$$

a po úpravách postupně dostáváme

$$z''(t) = \frac{1}{2}a(t)exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)\left(x'(t) + \frac{1}{2}a(t)x(t)\right) +$$

$$+exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)\left(x''(t) + \frac{1}{2}a'(t)x(t) + \frac{1}{2}a(t)x'(t)\right) =$$

$$= exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)\left(x''(t) + a(t)x'(t) + \frac{1}{2}a'(t)x(t) + \frac{1}{4}a^2(t)x(t)\right) =$$

$$= exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)\left(- a(t)x'(t) - b(t)x(t) + a(t)x'(t) + \frac{1}{2}a'(t)x(t) + \frac{1}{4}a^2(t)x(t)\right) =$$

$$= \left(\frac{a^2(t)}{4} + \frac{1}{2}a'(t) - b(t)\right)x(t)exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) = -p(t)z(t) \quad pro \quad t \in I.$$

Tedy

$$z''(t) + p(t)z(t) = 0 \quad pro \quad t \in I.$$

Tím je dokázáno, že funkce z je řešením rovnice (2). $\square$

Poznámka 1.2. Neboť funkce $exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) > 0$ pro $t \in I$, plyne ze substituce (3), že funkce $z(t)$ a $x(t)$ mají stejné nulové body. Poznamenejme ještě, že pro studium kvalitativních vlastností řešení je rovnice (2) jednodušší než rovnice (1).

Definice 1.3. *Řekneme, že netriviální řešení $x(t)$ rovnice (1) (nebo (2)) je oscilující na intervalu $(a, b) \subset I$, jestliže má alespoň dva nulové body na tomto intervalu. V opačném případě říkáme, že řešení $x(t)$ je neosilující na (a, b).*

Příklad 1.1. Všechna nenulová řešení rovnice

$$x'' - m^2 x = 0 \qquad m \in \mathbb{R}, m \neq 0 \tag{4}$$

jsou neoscilující na $\mathbb{R}$. To plyne z obecného tvaru této rovnice

$$x = c_1 e^{mt} + c_2 e^{-mt}.$$

Uvažujme nyní rovnici

$$x'' + m^2 x = 0 \qquad m \in \mathbb{R}, m \neq 0, \tag{5}$$

která má obecné řešení

$$x = c_1 \cos mt + c_2 \sin mt.$$

Toto řešení můžeme transformovat do tvaru

$$x(t) = A \sin{(mt + \delta)}, \tag{6}$$

kde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ je amplituda a

$$\delta = \arcsin \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$$

je počáteční fáze. Z (6) je zřejmé, že všechna řešení rovnice (5) mají periodu $\frac{2\pi}{m}$, vzdálenost mezi dvěma sousedními nulovými body je rovna $\frac{\pi}{m}$, a všechna řešení jsou oscilující na každém intervalu s délkou větší než $\frac{\pi}{m}$. Tedy se zvětšováním m, se vzdálenost mezi nulovými body zmenšuje.

Lemma 1.1. *Nechť $p \in C(I)$ a $p(t) \leq 0$ pro $t \in I$. Pak jsou všechna netriviální řešení rovnice*

$$x'' + p(t)x = 0 \tag{7}$$

neoscilující na I.

Důkaz: Nechť $x(t)$ je netriviální řešení rovnice (7). Předpokládejme, že $x(t)$ je oscilující na I. Pak $x(t_1) = x(t_2) = 0$ a $x(t) \neq 0$ pro $t \in (t_1, t_2)$, kde $t_1, t_2 \in I, t_1 < t_2$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $x(t) > 0$ pro $t \in (t_1, t_2)$. V opačném případě uvažujeme řešení $-x(t)$. Jelikož $x'(t_1) > 0$, což plyne z poznámky 1.1., a jelikož $x''(t) = -p(t)x(t) \geq 0$ pro $t \in [t_1, t_2]$, je $x'(t) = x'(t_1) + \int_{t_1}^{t} x''(s)ds \geq x'(t_1)$. Pak ovšem $x(t_1) - x(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} x'(s)ds \geq x'(t_1)(t_2 - t_1) > 0$, což je ve sporu s $x(t_1) = x(t_2) = 0$. □

V dalších úvahách budeme vyšetřovat pouze netriviální řešení rovnic (1) a (7).

Věta 1.5. *Jestiže $p \in C[\alpha, \infty)$,*

$$p(t) \geq 0, \int_{\alpha}^{\infty} p(s)ds = \infty, \tag{8}$$

pak všechna řešení rovnice (7) mají nekonečně mnoho nulových bodů na intervalu $[\alpha, \infty)$.

Důkaz: Tento důkaz provedeme sporem.

Nechť existuje řešení $x(t)$ rovnice (7) a $t_0 \geq \alpha$ tak, že

$$x(t) > 0 \qquad \textit{pro} \quad t \in [t_0, \infty).$$

Z (7) máme

$$x''(t) = -p(t)x(t) \leq 0 \qquad t \geq t_0,$$

proto $x'(t)$ je nerostoucí. Poznamenejme, že nemůže nastat situace, kdy $x'(t) = 0$ na nějakém intervalu $[T, \infty) \subset [t_0, \infty)$. V tomto případě totiž ze vztahu $0 = x''(t) = -p(t)x(t)$ pro $t \in [T, \infty)$ a předpokladu $x(t) > 0$ pro $t \in [t_0, \infty)$ plyne, že

$p(t) = 0$ pro $t \in [T, \infty)$. To je ve sporu s předpokladem $\int_\alpha^\infty p(s)ds = \infty$. Mohou nastat dva případy:

$$x'(t) > 0 \qquad pro \quad t \geq t_0,$$

nebo

$$x'(t) < 0 \qquad pro \quad t \geq t_1 \geq t_0.$$

Začneme s prvním případem. Řešení $x(t)$ roste monotónně a $x(t) \geq c = x(t_0)$ pro $t \geq t_0$.

Pak

$$x''(t) = -p(t)x(t) \leq -cp(t)$$

a po zintegrování dostáváme

$$x'(t) - x'(t_0) \leq -c \int_{t_0}^{t} p(s)ds.$$

S růstem t pravá strana poslední nerovnosti konverguje k $-\infty$ vzhledem k (8), ale toto je ve sporu s tím, že

$$x'(t) > 0 \qquad pro \quad t \geq t_0.$$

Nyní se budeme věnovat druhému případu. Pak $x'(t)$ je záporné a klesá monotónně pro $t \geq t_1$, tedy

$$x'(t) \leq x'(t_1) < 0 \qquad pro \quad t \geq t_1.$$

Integrací této nerovnosti získáme

$$x(t) - x(t_1) \leq x'(t_1)(t - t_1),$$

což je ve sporu s podmínkou, že $x(t)$ je kladné pro všechna $t \geq t_0$. $\square$

Nyní se budeme se zabývat otázkou vzdáleností mezi sousedními nulovými body řešení rovnice.

Věta 1.6 (Sturmova). *Nechť jsou dány dvě rovnice*

$$y'' + p(t)y = 0 \quad a \quad z'' + q(t)z = 0,$$

kde $p, q \in C(I)$ *a*

$$q(t) \geq p(t) \qquad t \in I. \tag{9}$$

Pak mezi každými dvěma sousedními nulovými body netriviálního řešení první rovnice, je nejméně jeden nulový bod každého netriviálního řešení druhé rovnice za podmínky, že mezi těmito dvěma nulovými body leží body t*, pro které platí* $q(t) > p(t)$.

Důkaz: Nechť $y_1(t)$ je řešení první rovnice takové, že

$$y_1(t_1) = y_1(t_2) = 0 \quad a \quad y_1(t) > 0 \quad \text{pro} \quad t \in (t_1, t_2)$$

a nechť $q(t_0) > p(t_0)$ pro nějaké $t_0 \in (t_1, t_2)$. Předpokládáme, že existuje řešení druhé rovnice $z_1(t)$ takové, že

$$z_1(t) > 0 \quad \text{pro} \quad t \in (t_1, t_2)$$

Poznamenejme, že bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $z_1(t) > 0$ pro $t \in (t_1, t_2)$. V opačném případě uvažujeme $-z_1(t)$. Nyní vynásobíme první z nich $z_1(t)$, druhou $y_1(t)$ a odečteme druhou od první, obdržíme

$$y_1'' z_1 - z_1'' y_1 = (q(t) - p(t)) z_1 y_1.$$

Zintegrujeme tuto rovnost na intervalu (t_1, t_2). Vzhledem k tomu, že levá strana je derivace rozdílu $y_1' z_1 - y_1 z_1'$ a že $y_1(t_1) = y_1(t_2) = 0$,dostáváme

$$y_1'(t_2) z_1(t_2) - y_1'(t_1) z_1(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (q(s) - p(s)) y_1 z_1 ds. \tag{10}$$

Podle předpokladu (9) této věty a $q(t_0) > p(t_0)$, pravá strana v rovnosti (10) je kladná. Levá strana je nekladná, jelikož

$$y_1'(t_2) < 0 \quad z_1(t_2) \geq 0 \quad y_1'(t_1) > 0 \quad z_1(t_1) \geq 0.$$

Tím je dokázáno, že není splněna rovnost

$$z_1(t) > 0 \quad \text{pro} \quad t \in (t_1, t_2)$$

a tedy řešení $z_1(t)$ má na intervalu (t_1, t_2) alespoň jeden nulový bod. $\square$

Důsledek 1.5. *Nulové body dvou lineárně nezávislých řešení rovnice (7) jsou vzájemně oddělené.*

Tato věta byla uvedena dříve, ale nyní k důkazu použijeme obdobný postup jako v důkazu Sturmovy věty.

Důkaz: Nechť $y_1(t)$ a $z_1(t)$ jsou lineárně nezávislá řešení. Postupujme stejně jako v důkazu Sturmovy věty až k rovnosti (10). V tomto případě je pravá strana (10) rovna nule, neboť

$$q(t) \equiv p(t)$$

a levá strana je záporná, neboť

$$z_1(t_2) > 0 \qquad z_1(t_1) > 0,$$

což plyne z toho, že nezávislá řešení nemají společný nulový bod. Tedy $z_1(t)$ má jen jeden nulový bod uvnitř intervalu (t_1, t_2), v opačném případě se mění role rovnic, získáme ještě jeden nulový bod řešení $y_1(t)$ mezi body t_1, t_2. $\square$

Důsledek 1.6 (Odhad vzdáleností mezi sousedními nulovými body netriviálního řešení rovnice (10))**.** *Nechť*

$$0 < l^2 \leq p(t) \leq L^2 \quad \textit{pro} \quad t \in [\alpha, \beta] \subset I. \tag{11}$$

Pak odhad

$$\frac{\pi}{L} \leq d \leq \frac{\pi}{l} \tag{12}$$

platí pro vzdálenost d mezi sousedními nulovými body netriviálního řešení rovnice (5) v intervalu $[\alpha, \beta]$.

Důkaz: Je-li $p(t) = l^2$ $(p(t) = L^2)$ pro $t \in [\alpha, \beta]$, pak z příkladu 1.1 plyne, že vzdálenost d sousedních nulových bodů netriviálního řešení rovnice (5) je rovna

$\frac{\pi}{l}$ ($\frac{\pi}{L}$), a tedy odhad (12) platí. Předpokládejme, že existují body t_1 a $t_2 \in [\alpha, \beta]$ takové, že $l^2 < p(t_1), p(t_2) < L^2$. Pak lze použít Sturmovu srovnávací větu pro dvojici rovnic (5) a (7).

Pro $m = L$ dostáváme levou stranu nerovnosti z (12).

Pro $m = l$ dostáváme pravou stranu nerovnosti z (12). $\square$

Nyní si uvedeme větu pro dolní odhad vzdáleností sousedních nulových bodů řešení

Věta 1.7 (De la Vallée - Poussinova). *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $a, b \in C^0(I)$ a nechť*

$$|a(t)| \leq M_1, \quad |b(t)| \leq M_2 \quad pro \quad t \in I, \tag{13}$$

kde M_1, M_2 jsou konstanty. Pak odhad

$$d \geq \begin{cases} \frac{2}{M_2}\left(\sqrt{M_1^2 + 2M_2} - M_1\right) & jestliže \quad M_2 > 0, \\ \frac{2}{M_1} & jestliže \quad M_2 = 0, \end{cases} \tag{14}$$

platí pro vzdálenost d mezi každými dvěma sousedními nulovými body libovolného netriviálního řešení rovnice

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0. \tag{15}$$

Důkaz: Nechť $x(t)$ je netriviální řešení rovnice (15) a nechť $t_0, t_0 + d$ jsou jeho sousední nulové body. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat $t_0 = 0$. Integrací per partes a užitím rovností $x(0) = x(d) = 0$ dostáváme

$$\int_0^t sx''(s)ds - \int_t^d (d-s)x''(s)ds = \begin{vmatrix} u = s & v' = x'' \\ u' = 1 & v = x' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u = d - s & v' = x'' \\ u' = -1 & v = x' \end{vmatrix}$$

$$= [sx'(s)]_0^t - \int_0^t x'(s)ds - [(d-s)x'(s)]_t^d - \int_t^d x'(s)ds =$$

$$= tx'(t) - x(t) + (d-t)x'(t) + x(t) = x'(t)d \quad pro \quad t \in [0, d].$$

Odtud plyne rovnost

$$x'(t)d = \int_0^t sx''(s)ds - \int_t^d (d-s)x''(s)ds, \quad t \in [0,d]. \tag{16}$$

Nechť μ je takové číslo, že

$$|x'(t)| \leq \mu \quad pro \quad t \in [0,d]. \tag{17}$$

Jelikož x je netriviální řešení rovnice (15), je nutně $\mu > 0$. Nyní z rovností

$$x(t) = \int_0^t x'(s)ds, \quad x(t) = -\int_t^d x'(s)ds$$

plynou odhady

$$|x(t)| \leq \mu t, \quad |x(t)| \leq \mu(d-t) \quad pro \quad t \in [0,d].$$

Je tedy

$$|x(t)| \leq \begin{cases} \mu t & \text{pro} \quad t \in [0, \frac{d}{2}], \\ \mu(d-t) & \text{pro} \quad t \in [\frac{d}{2}, d]. \end{cases} \tag{18}$$

Z nerovností v (13) plyne, že

$$|x''(t)| = |a(t)x'(t) + b(t)x(t)| \leq M_1|x'(t)| + M_2|x(t)|,$$

a pak vzhledem k (17),

$$|x''(t)| \leq M_1\mu + M_2|x(t)| \quad pro \quad t \in [0,d].$$

Odtud a z (16) dostáváme

$$\begin{aligned} |x'(t)|d \leq \textstyle\int_0^t s|x''(s)|ds + \int_t^d (d-s)|x''(s)|ds \leq \\ \leq M_1\mu\Big[\textstyle\int_0^t sds + \int_t^d (d-s)ds\Big] + M_2\Big[\int_0^t s|x(s)|ds + \int_t^d (d-s)|x(s)|ds\Big] \end{aligned} \tag{19}$$

K odhadu posledního členu v (19) použijeme (18). Pak pro $t \in [0, \frac{d}{2}]$ je

$$\int_0^t s|x(s)|ds + \int_t^d (d-s)|x(s)|ds \leq \mu\Big[\int_0^t s^2 ds + \int_t^{\frac{d}{2}} s(d-s)ds + \int_{\frac{d}{2}}^d (d-s)^2 ds\Big] =$$

$$= \mu \left[\frac{t^3}{3} + \left[\frac{ds^2}{2} \right]_t^{\frac{d}{2}} - \left[\frac{s^3}{3} \right]_t^{\frac{d}{2}} + \frac{d^3}{24} \right] =$$

$$= \mu \Big[\frac{t^3}{3} + \frac{d^3}{8} - \frac{dt^2}{2} - \frac{d^3}{24} + \frac{t^3}{3} + \frac{d^3}{24} \Big] = \mu \Big[\frac{2}{3} t^3 - \frac{d}{2} t^2 + \frac{d^3}{8} \Big].$$

Jelikož $\left(\frac{2}{3} t^3 - \frac{d}{2} t^2 + \frac{d^3}{8} \right)' = 2t^2 - dt = t(2t - d) < 0$ pro $t \in [0, \frac{d}{2})$, je funkce $\mu \left(\frac{2}{3} t^3 - \frac{d}{2} t^2 + \frac{d^3}{8} \right)$ klesající na intervalu $t \in [0, \frac{d}{2}]$, a tedy je

$$\frac{2}{3} t^3 - \frac{d}{2} t^2 + \frac{d^3}{8} \leq \frac{d^3}{8} \quad pro \quad t \in [0, \frac{d}{2}].$$

Odtud plyne

$$\int_0^t s|x(s)|ds + \int_t^d (d - s)|x(s)|ds \leq \mu \frac{d^3}{8} \quad pro \quad t \in [0, \frac{d}{2}]. \tag{20}$$

Podobně postupujeme pro $t \in [\frac{d}{2}, d]$,

$$\int_0^t s|x(s)|ds + \int_t^d (d-s)|x(s)|ds \leq \mu \Big[\int_0^{\frac{d}{2}} s^2 ds + \int_{\frac{d}{2}}^t s(d-s) ds + \int_t^d (d-s)^2 ds \Big] =$$

$$= \mu \left[\frac{d^3}{24} + \left[\frac{ds^2}{2} \right]_{\frac{d}{2}}^t - \left[\frac{s^3}{3} \right]_{\frac{d}{2}}^t + \frac{(d-t)^3}{3} \right] =$$

$$= \mu \Big[\frac{d^3}{24} + \frac{dt^2}{2} - \frac{d^3}{8} - \frac{t^3}{3} + \frac{d^3}{24} + \frac{(d-t)^3}{3} \Big] = \mu \Big[\frac{(d-t)^3}{3} - \frac{t^3}{3} + \frac{d}{2} t^2 - \frac{d^3}{24} \Big].$$

Jelikož $\left(\frac{(d-t)^3}{3} - \frac{t^3}{3} + \frac{d}{2} t^2 - \frac{d^3}{24} \right)' = -(d-t)^2 - t^2 + dt = 2(d-t)(t - \frac{d}{2}) > 0$ pro $t \in (\frac{d}{2}, d]$, je funkce $\frac{(d-t)^3}{3} - \frac{t^3}{3} + \frac{d}{2} t^2 - \frac{d^3}{24}$ rostoucí na tomto intervalu, a tedy je

$$\frac{(d-t)^3}{3} - \frac{t^3}{3} + \frac{d}{2} t^2 - \frac{d^3}{24} \leq -\frac{d^3}{3} + \frac{d^3}{2} - \frac{d^3}{24} = \frac{d^3}{8} \quad pro \quad t \in (\frac{d}{2}, d].$$

Odtud plyne

$$\int_0^t s|x(s)|ds + \int_t^d (d - s)|x(s)|ds \leq \mu \frac{d^3}{8} \quad pro \quad t \in [\frac{d}{2}, d]. \tag{21}$$

Nerovnost

$$\int_0^t s|x(s)|ds + \int_t^d (d-s)|x(s)|ds \le \frac{d^3}{8} \quad pro \quad t \in [0,d] \tag{22}$$

plyne z (20) a (21). Z (19),(22) a nerovností

$$\int_0^t sds + \int_t^d (d-s)ds = \frac{t^2}{2} + \frac{(d-t)^2}{2} \le \frac{d^2}{2} \quad pro \quad t \in [0,d].$$

ihned dostáváme

$$|x'(t)|d \le \mu\bigg(\frac{M_1}{2}d^2 + \frac{M_2}{8}d^3\bigg) \quad pro \quad t \in [0,d].$$

Pak ovšem $\mu d \le \mu\bigg(\frac{M_1}{2}d^2 + \frac{M_2}{8}d^3\bigg)$, po úpravě $1 \le \frac{M_1}{2}d + \frac{M_2}{8}d^2$, což lze psát ve tvaru

$$M_2 d^2 + 4M_1 d - 8 \ge 0. \tag{23}$$

Tím jsme dokázali, že vzdálenost d každých sousedních nulových bodů netriviálních řešení rovnice (15) vyhovuje nerovnosti (23). Jestliže $M_2 > 0$, pak

$$d_{1,2} = \frac{2}{M_2}\Big(-M_1 \pm \sqrt{{M_1}^2 + 2M_2}\Big)$$

jsou kořeny kvadratické rovnice $M_2 d^2 + 4M_1 d - 8 = 0$. Jelikož vzdálenost d je kladná, je nutně

$$d \ge \frac{2}{M_2}\Big(\sqrt{{M_1}^2 + 2M_2} - M_1\Big). \tag{24}$$

Je-li $M_2 = 0$, pak z (23) plyne

$$d \ge \frac{2}{M_1}. \tag{25}$$

Dokazovanou nerovnost (14) dostáváme z (24) a (25).

□

Poznámka 1.3 (Porovnání Sturmovy a De la Vellée - Poussinovy věty)**.** Když odhadujeme hodnotu d , což je vzdálenost mezi sousedními nulovými body řešení rovnice

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0,$$

máme pro její dolní odhad dvě možnosti:

1. užijeme přímo De la Vallée - Poussinovu větu

2.přejdeme k rovnici $z'' + p(t)z = 0$ pomocí substituce z věty 1.4. a dále provedeme odhad pomocí na důsledku 1.5.

Co je výhodnější?

V obecném případě je nemožné doporučit jednu z možností, ale je třeba poznamenat, že pro dostatečně velkou $|a'(t)|, t \in I$, by se měla druhá možnost provádět s opatrností. To vyplývá ze skutečnosti, že

$$p(t) = -\frac{a^2(t)}{4} - \frac{a'(t)}{2} + b(t)$$

a růst $p(t)$ způsobuje odhad levé strany v (12) s menší přesností.

Příklad 1.2. Uvedeme odhad vzdálenosti dvou sousedních netriviálních nulových řešení rovnice

$$x'' + 2tx' + (t^2 + t + 1)x = 0, \quad t \in [1, 5]$$

1. Použití Sturmovy věty(věta 1.6.):

podle vzorce $p(t) = -\frac{a^2(t)}{4} - \frac{a'(t)}{2} + b(t)$ vypočteme $p(t) = t$. Funkce $p(t) = t$ nabývá v krajních bodech intervalu $[1, 5]$ hodnot 1 a 5, těmito hodnotami omezíme fci $p(t)$, a provedeme odhad pomocí důsledku 1.5.

$$p(t) = t \quad \Rightarrow \quad 1 \leq p(t) \leq 5 \quad \Rightarrow d > \frac{\pi}{\sqrt{5}} \doteq 0.4.$$

2. Použití de la Vallée-Pousiinovy věty(Věta 1.7.):

odhadneme funkce $|a(t)|$ a $|b(t)|$ tak, že vypočteme hodnoty těchto funkcí v pravém krajním bodě intervalu $[1, 5]$ a odhady dosadíme do vzorce (14).

$$|a(t)| \leq 10 = M_1, |b(t)| \leq 31 = M_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d \geq \frac{\sqrt{4 \cdot 10 + 8 \cdot 31} - 2 \cdot 10}{31} \doteq 0.2.$$

V tomto případě dá lepší výsledek Sturmova věta.

Příklad 1.3. Určete odhad vzdálenosti dvou sousedních netriviálních nulových řešení rovnice

$$x'' - (\arctan kt)x' + \pi^2 x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Použití Sturmovy věty(Věta 1.6.):

do vzorce $p(t) = -\frac{a^2(t)}{4} - \frac{a'(t)}{2} + b(t)$ dosadíme funkce $a(t)$ a $b(t)$ a shora omezíme funkcí $\frac{k}{2} + \pi^2$ a provedeme odhad pomocí důsledku 1.5.

$$p(t) = -\frac{1}{4}(\arctan kt)^2 + \frac{k}{2(1+k^2t^2)} + \pi^2 \leq \frac{k}{2} + \pi^2,$$

$$d > \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{k+2\pi^2}}.$$

2. Použití de la Vallée-Pousiinovy věty(Věta 1.7.): nejprve shora odhadneme funkce $a(t)$ a $b(t)$

$$|a(t)| \leq \frac{\pi}{2} = M_1, b(t) = \pi^2,$$

a dosadíme do vzorce (14),

$$d \geq \frac{\sqrt{\pi^2 + 8\pi^2} - \pi}{\pi^2} = \frac{2}{\pi}.$$

Pokud platí $2k = \pi^4 - 4\pi^2$, potom se odhady shodují, pro $2k > \pi^4 - 4\pi^2$ je výhodnější de la Vallée-Poussinova věta.

Věta 1.8 (Lyapunovova)**.** *Nechť řešení x, které je identicky různé od nuly, rovnice*

$$x'' + p(t)x = 0$$

má dva nulové body na intervalu $[a, b,] \subset I$. Pak

$$\int_a^b p^+(t)dt > \frac{4}{b-a}, \tag{26}$$

kde $p^+(t) = \max(p(t), 0)$.

Důkaz: Uvažujme rovnici

$$u'' + p^+(t)u = 0,$$

která je majorantní pro (7). Podle Sturmovy věty má tato rovnice řešení $u(t)$ takové, že

$$u(\alpha) = u(\beta) = 0 \quad pro \quad a \leq \alpha < \beta \leq b$$

a

$$u(t) > 0 \quad pro \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Užitím metody per-partes dostáváme

$$(\beta - t) \int_\alpha^t (s - \alpha)u''(s)ds + (t - \alpha) \int_t^\beta (\beta - s)u''(s)ds =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = s - \alpha & v' = u'' \\ u' = 1 & v = u' \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} u = \beta - s & v' = u'' \\ u' = -1 & v = u' \end{matrix} \right| =$$

$$= (\beta - t)\Big[\Big[(s-\alpha)u'(s)\Big]_\alpha^t - \int_\alpha^t u'(s)ds\Big] + (t-\alpha)\Big[\Big[(\beta - s)u'(s)\Big]_t^\beta + \int_t^\beta u'(s)ds\Big] =$$

$$= (\beta - t)\Big[(t - \alpha)u'(t) - u(t) + u(\alpha)\Big] + (t - \alpha)\Big[- (\beta - t)u'(t) + u(\beta) - u(t)\Big] =$$

$$= -(\beta - \alpha)u(t)$$

neboť $u(\alpha) = u(\beta) = 0$. Tedy platí rovnost

$$-(\beta - \alpha)u(t) = (\beta - t) \int_\alpha^t (s - \alpha)u''(s)ds + (t - \alpha) \int_t^\beta (\beta - s)u''(s)ds. \quad (27)$$

Klademe-li v této rovnosti $u''(t) = -p^+(t)u(t)$, obdržíme

$$(\beta - \alpha)u(t) = (\beta - t) \int_\alpha^t (s - \alpha)p^+(s)u(s)ds + (t - \alpha) \int_t^\beta (\beta - s)p^+(s)u(s)ds. \quad (28)$$

Nechť

$$u(t_0) = max(u(t) : \alpha \leq t \leq \beta).$$

Položme $t = t_0$ v (28) a po úpravách dostáváme

$$(\beta-\alpha)u(t_0) = (\beta-t_0)\int_\alpha^{t_0}(s-\alpha)p^+(s)u(s)ds+(t_0-\alpha)\int_{t_0}^\beta(\beta-s)p^+(s)u(s)ds \leq$$

$$\leq u(t_0)\Big[(\beta-t_0)\int_\alpha^{t_0}(s-\alpha)p^+(s)ds+(t_0-\alpha)\int_{t_0}^\beta(\beta-s)p^+(s)ds\Big] <$$

$$< u(t_0)\Big[\int_\alpha^{t_0}(\beta-s)(s-\alpha)p^+(s)ds+\int_{t_0}^\beta(s-\alpha)(\beta-s)p^+(s)ds\Big] =$$

$$= u(t_0)\int_\alpha^\beta(\beta-s)(s-\alpha)p^+(s)ds.$$

Tím je dokázána nerovnost

$$(\beta-\alpha)u(t_0) < u(t_0)\int_\alpha^\beta(\beta-s)(s-\alpha)p^+(s)ds.$$

Jelikož $u(t_0) > 0$, je

$$\beta-\alpha < \int_\alpha^\beta(\beta-s)(s-\alpha)p^+(s)ds. \tag{29}$$

Lehce lze ověřit, že platí

$$4xy \leq (x+y)^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Klademe-li v této nerovnosti $x = \beta - s$ a $y = s - \alpha$, dostáváme

$$(\beta-s)(s-\alpha) \leq \frac{(\beta-\alpha)^2}{4} \quad pro \quad s \in [\alpha, \beta].$$

Z (29) a poslední nerovnosti potom plyne

$$\beta-\alpha < \int_\alpha^\beta\frac{(\beta-\alpha)^2}{4}p^+(s)ds$$

a tedy

$$\int_\alpha^\beta p^+(s)ds > \frac{4}{\beta-\alpha},$$

což je dokozovaná nerovnost (26). □

Poznámka 1.4. V této poznámce ukážeme, že volba konstanty 4 ve (26) je nejlepší možná.

Nechť $\delta \in (0,1)$.Definujeme $y : [0,1] \to \mathbb{R}, y \in C^2[0,1]$ předpisem

$$y(t) = t \quad \text{pro} \quad t \in [0, \delta],$$

$$y(t) = 1 - t \quad \text{pro} \quad t \in [1-\delta, 0],$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad \text{na} \quad (\delta, 1-\delta) \quad \text{je} \quad y(t) > 0 \quad \text{a} \quad y''(t) < 0 \quad \text{pro} \quad t \in [\delta, 1-\delta].$$

Položme

$$p(t) = -\frac{y''(t)}{y(t)} \quad \text{pro} \quad t \in (0,1) \quad \text{a} \quad p(0) = p(1) = 0.$$

Pak

$$p \in C^0[0,1], p^+(t) = p(t) \quad \text{pro} \quad t \in [0,1].$$

$$\int_0^1 p(t)dt = -\int_\delta^{1-\delta} \frac{y''(t)}{y(t)}dt = \left| \begin{matrix} u = y' & v' = -\frac{y'}{y^2} \\ u' = y'' & v = \frac{1}{y} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\left[\frac{y'}{y}\right]_\delta^{1-\delta} - \int_\delta^{1-\delta} \left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2 dt \leq -\left[\frac{y'}{y}\right]_\delta^{1-\delta} = \frac{y'(\delta)}{y(\delta)} - \frac{y'(1-\delta)}{y(1-\delta)} =$$

$$= \frac{1}{\delta} - \frac{-1}{(1-(1-\delta))} = \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta} = \frac{2}{\delta}$$

$$\delta \to \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \quad \int_0^1 p(t)dt \leq \frac{2}{\delta} \quad \to \quad 4.$$

Vyplývá z [4].

Poznámka 1.5. V této poznámce srovnáme výsledek příkladu 1.2. s větou 1.8.

Pomocí Sturmovy věty jsme dostali odhad 0.4, pomocí de la Vallée-Poussinovy odhad přibližně 0.2.

Pokud budeme příklad 1.2. počítat pomocí Lyapunovy věty (věta 1.8.) obdržíme:

$$p^+(t) = p(t) = t, \qquad \int_1^5 tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^5 = 12 > \frac{4}{d} \Rightarrow d > \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \doteq 0.3$$

Z toho vidíme, že pro tento příklad je lepší odhad počítaný Sturmovou větou.

Důsledek 1.7. *Jestliže*

$$\int_a^b p^+(s)ds \le \frac{4}{b-a}$$

platí pro $[a,b] \subset I$, *pak všechna řešení rovnice*

$$x'' + p(t)x = 0$$

jsou neoscilující na $[a,b]$.

Tato podkapitola byla zpracována podle [3].

2 Řešení lineárních diferenciálních rovnic 2.řádu

2.1 Úvod

Hlavním úkolem této části je popsat způsob řešení lineární diferenciální rovnice 2.řádu

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \tag{30}$$

kde a_1, a_2 jsou *reálné konstanty* a f je *reálná* spojitá funkce definovaná na nějakém intervalu I.

Definice 2.1. *Řešením rovnice (30) na intervalu I budeme rozumět každou funkci, která má na I spojitou 2.derivaci a rovnici (30) vyhovuje. Je-li $f(x) = 0$ pro všechna $x \in I$, nazývá se (30)* rovnice homogenní, *v opačném případě* rovnice nehomogenní.

Existenci řešení rovnice (30) zaručuje následující věta:

Věta 2.1. *Nechť je funkce $f : I \to \mathbb{R}$ spojitá. Buďte $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, x_0 \in I$. Pak existuje právě jedno řešení y diferenciální rovnice (30) definované na intervalu I a splňující počáteční podmínky*

$$y(x_0) = \xi_1,\ y'(x_0) = \xi_2.$$

2.2 Řešení homogenní rovnice s konstatními koeficienty

Ukážeme, že všechna řešení rovnice

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{31}$$

lze najít algebraickými operacemi a že tato řešení lze vyjádřit pomocí elementárních funkcí.Označme

$$\mathcal{L} := \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_2.$$

Pak lze diferenciální rovnici (31) psát ve tvaru

$$\mathcal{L}(y) = 0.$$

Vlastnosti tzv. *diferenciálního operátoru* $\mathcal{L}$ uvádí následující věta:

Věta 2.2. *Jsou-li u, v libovolné 2-krát diferencovatelné funkce na nějakém intervalu I a $C, \lambda \in \mathbb{R}$ libovolné konstanty, platí*

1. $$\mathcal{L}(Cu) = C\mathcal{L}(u);$$

2. $$\mathcal{L}(u + v) = \mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(v);$$

3. $$\mathcal{L}(e^{(\lambda x)}) = e^{\lambda x}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2);$$

4. $$\mathcal{L}(uv) = uv'' + (2u' + a_1u)v' + (u'' + a_1u' + a_2u)v.$$

Ověření těchto vlastností je triviální.

Věta 2.3. *Jsou-li u, v libovolná řešení rovnice (31) na intervalu I, pak je též*

$$y = C_1u + C_2v, \ \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

řešením rovnice (31) na I.

Definice 2.2. *Dvojice řešení y_1, y_2 rovnice (31) definovaných na intervalu I se nazývá fundamentální systém řešení, když wronskián je různý od 0, tj.*

$$W[y_1(x), y_2(x)] = det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in I.$$

Věta 2.4. *Wronskián každých dvou řešení y_1, y_2 rovnice (31) lze vyjádřit ve tvaru*

$$W[y_1(x), y_2(x)] = Ce^{-a_1x}, C \in \mathbb{R}.$$

Důkaz: Označme

$$W(x) := W[y_1(x), y_2(x)].$$

Platí

$$W' = (y_1y_2' - y_1'y_2)' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1'y_2' - y_1''y_2 =$$

$$= y_1(-a_1y_2' - a_2y_2) - y_2(-a_1y_1' - a_2y_1) = -a_1W,$$

takže W je řešením lineární rovnice

$$W' = -a_1 W,$$

jejíž obecné řešení je

$$W(x) = Ce^{-a_1 x},$$

a to je tvrzení. □

Důsledek 2.1. *Je-li* $W(x_0) \neq 0$*, v nějakém čísle* x_0 *intervalu* I*, pak je* $W(x) \neq 0$ *pro všechna* $x \in I$*.*

Věta 2.5. *Buď* y_1, y_2 *fundamentální systém řešení rovnice (31). Pak je*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{32}$$

obecné řešení rovnice (31).

Důkaz: Máme ukázat, že každé řešení rovnice (31) lze vyjádřit ve tvaru (32).

Buď Y libovolné řešení rovnice (31),$x_0 \in I$ a označme

$$\xi_1 := Y(x_0), \xi_2 := Y'(x_0).$$

Funkce y definovaná v (32) splňuje v x_0 stejné počáteční podmínky jako řešení Y, když existují konstanty C_1, C_2 takové, že

$$C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = \xi_1,$$

$$C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = \xi_2.$$

Tento systém má jediné řešení, neboť funkce y_1, y_2 tvoří fundamentální systém řešení rovnice (31), takže

$$det \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Z věty o jednoznačnosti plyne

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad \forall x \in I,$$

takže Y je obecné řešení. K dokončení důkazu jeho existence stačí ukázat, že každá rovnice (31) má fundamentální systém řešení y_1, y_2. □

Definice 2.3. *Nechť je dána lineární diferenciální rovnice*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

s konstatními koeficienty $a_1, a_2 \neq 0$. *Pak algebraickou rovnici tvaru*

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

nazýváme charakteristickou rovnicí lineární diferenciální rovnice (30).

Věta 2.6. *Buď*

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \tag{33}$$

charakteristická rovnice pro rovnici (31). Označme $\Delta = a_1^2 - 4a_2$.

Je-li $\Delta > 0$, *má rovnice (33) reálné kořeny*

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}),\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2})$$

a funkce $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ *tvoří fundamentální systém řešení rovnice (31). Její obecné řešení je*

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Je-li $\Delta = 0$, *má (33) dvojnásobný reálný kořen*

$$\lambda = -\frac{1}{2}a_1$$

a funkce $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}$ *tvoří fundamentální systém řešení rovnice (31). Její obecné řešení je*

$$y = e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x).$$

Je-li $\Delta < 0$, *má (33) nereálné komplexně sdružené kořeny*

$$\alpha + i\beta, \alpha - i\beta, kde\ \alpha = -\frac{1}{2}a_1, \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4a_2 - a_1^2}.$$

Obecné řešení rovnice (31) je v tomto případě

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x).$$

V následujících příkladech ukážeme použití Věty 2.6.

Příklad 2.1. Mějme diferenciální rovnici 2.řádu

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

Jí odpovídající charakteristická rovnice je tvaru

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

Nyní si vypočteme kořeny charakteristické rovnice a ty jsou

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

Oba kořeny charakteristické rovnice jsou reálné, takže obecné řešení diferenciální rovnice bude va tvaru

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x}, \quad \text{kde} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 2.2. Mějme diferenciální rovnici 2.řádu

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Jí odpovídající charakteristická rovnice je tvaru

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

Nyní si vypočteme kořeny charakteristické rovnice a ty jsou

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2$$

Kořen charakteristické rovnice je dvojnásobný reálný, takže obecné řešení diferenciální rovnice bude va tvaru

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}, \qquad kde \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 2.3. Mějme diferenciální rovnici 2.řádu

$$y'' + y' = 0$$

Jí odpovídající charakteristická rovnice je tvaru

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

Nyní si vypočteme kořeny charakteristické rovnice a ty jsou

$$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$$

Oba kořeny charakteristické rovnice jsou komplexní, takže obecné řešení diferenciální rovnice bude va tvaru

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad \text{kde} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

NEHOMOGENNÍ ROVNICE

V této části se budeme věnovat řešením rovnice

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \tag{34}$$

kde a_1, a_2 jsou reálná čísla a f je funkce spojitá na otevřeném intervalu I, která není na I identicky rovna nule. Ukážeme, že všechna řešení této rovnice lze určit pomocí fundamentálního systému řešení rovnice

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{35}$$

kterou budeme nazývat *přidružená homogenní rovnice.*

Věta 2.7. *Buďte f_1, f_2 funkce spojité na intervalu I a u, v řešení rovnic*

$$\mathcal{L}(u) = f_1(x),\ \mathcal{L}(v) = f_2(x)\ \forall x \in I.$$

Pak je $u + v$ řešením rovnice

$$\mathcal{L}(u + v) = f_1(x) + f_2(x),\ \forall x \in I.$$

2.3 Řešení nehomogenní rovnice

V této části uvedeme obecnou metodu variace konstant a pro speciální tvary funkce $f(x)$ metodu neurčitých koeficientů.

a)METODA VARIACE KONSTANT

Věta 2.8. *Buď y_1, y_2 fundamentální systém řešení rovnice (35). Buďte K_1, K_2 funkce vyhovující soustevě rovnic*

$$\begin{aligned} K_1 y_1 + K_2 y_2 &= 0, \\ K_1 y_1' + K_2 y_2' &= f(x). \end{aligned} \tag{36}$$

Buďte $C_1 = \int K_1, C_2 = \int K_2$ libovolné primitivní funkce. Pak je

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \tag{37}$$

řešením rovnice (34).

Je-li $x_0 \in I$ a volíme-li

$$C_1(x) = \int_{x_0}^{x} K_1(t)dt, \;\; C_2(x) = \int_{x_0}^{x} K_2(t)dt,$$

je (37) řešením rovnice (34), pro které platí

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0.$$

Důkaz: Derivujeme-li funkci (37), obdržíme s přihlédnutím k (36)

$$y' = K_1 y_1 + C_1 y_1' + K_2 y_2 + C_2 y_2' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$$

$$y'' = K_1 y_1' + K_2 y_2' + C_1 y_1'' + C_2 y_2'' = f(x) + C_1 y_1'' + C_2 y_2'',$$

$$\mathcal{L} = f(x) + C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + a_1(C_1 y_1' + C_2 y_2') + a_2(C_1 y_1 + C_2 y_2) =$$

$$= f(x) + C_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + C_2(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2).$$

Protože $\mathcal{L}(y_1) = 0, \mathcal{L}(y_2) = 0$, vyplývá odtud $\mathcal{L}(y) = f(x)$ a důkaz je hotov. □

Poznámka 2.1. Tato metoda pro nalezení partikulárního řešení nehomogenní diferenciální rovnice se nazývá *metoda variace konstant.* To proto, že řešení hledáme ve tvaru obecného řešení přidružené homogenní rovnice s tím rozdílem, že konstanty C_1, C_2 jsou nahrazeny funkcemi, které jsou primitivní funkce složek K_1, K_2 řešení systému (36).

Příklad 2.4. Mějme rovnici

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$$

Z odpovídající charakteristické rovnice

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

vypočteme charakteristické kořeny

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1,$$

tedy obecné řešení zadané rovnice $y'' - 2y' - 3y = 0$ je tvaru

$$y_o(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}, \quad kde \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Nyní použitím metody variace konstant dostáváme soustavu dvou rovnic o neznamých c_1, c_2.

$$c_1' e^{3x} + c_2' e^{-x} = 0$$

$$3c_1' e^{3x} - c_2' e^{-x} = e^{4x}$$

Nyní vypočítáme neznámé c_1, c_2.

Nejprve sečteme rovnice, tím vyloučíme neznámou c_2 a vypočteme neznámou c_1.

$$4c_1' e^{3x} = e^{4x}$$

$$c_1' = \frac{e^x}{4}$$

$$c_1 = \frac{1}{4} e^x$$

Nyní c_1' dosadíme do první rovnice a vypočteme neznámou c_2.

$$\frac{1}{4}e^x e^{3x} + c_2' e^{-x} = 0$$

$$c_2' = -\frac{1}{4}e^{5x}$$

$$c_2 = -\frac{1}{20}e^{5x}$$

Nyní vypočtené neznámé dosadíme do obecného řešení a toto řešení sečteme s obecným řešením a získáme řešení rovnice

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5}e^{4x}.$$

Příklad 2.5. Mějme rovnici

$$y'' + y = \sin x$$

Z odpovídající charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

vypočteme charakteristické kořeny

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i,$$

tedy obecné řešení zadané rovnice $y'' + y = 0$ je tvaru

$$y_o(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad \text{kde} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Nyní použitím metody variace konstant dostáváme soustavu dvou rovnic o neznamých c_1, c_2.

$$c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0$$

$$-c_1' \sin x + c_2' \cos x = \sin x$$

Nyní vypočítáme neznámé c_1, c_2.

Nejprve vynásobíme první rovnici $\sin x$ a druhou $\cos x$ a sečteme, tím vyloučíme neznámou c_1 a vypočteme neznámou c_2.

$$c_2' \sin^2 x + c_2' \cos^2 x = \sin x \cos x$$

$$c_2' = \sin x \cos x$$

$$c_2 = \frac{1}{2}\sin^2 x$$

Nyní c_2' dosadíme do první rovnice a vypočteme neznámou c_1.

$$c_1' \cos x + \sin^2 x \cos x = 0$$

$$c_1' = -\sin^2 x$$

$$c_1 = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x$$

Nyní vypočtené neznámé dosadíme do obecného řešení a toto řešení sečteme s obecným řešením a získáme řešení rovnice

$$y(x) = \left(c_1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\cos x + \left(c_2 + \frac{1}{2}\sin^2 x\right)\sin x.$$

b)METODA NEURČITÝCH KOEFICIENTŮ

Věta 2.9. *Buď dána rovnice*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = e^{\alpha x}[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x], \tag{38}$$

kde a_1, a_2, α, β reálné konstanty a P, Q polynomy s reálnými koeficienty stupně r resp. s (připouští se i $P \equiv\ 0$ nebo $Q \equiv\ 0$).

Jestliže $\alpha + i\beta$ je k-násobným kořenem charakteristické rovnice (33), má rovnice (38) řešení tvaru

$$y_p = x^k e^{\alpha x}[L(x)\cos\beta x + M(x)\sin\beta x].\ k = 1, 2 \tag{39}$$

Jestliže $\alpha + i\beta$ není kořenem charakteristické rovnice, existuje řešení tvaru

$$y_p = e^{\alpha x}[L(x)\cos\beta x + M(x)\sin\beta x]. \tag{40}$$

V obou případech jsou L, M vhodné polynomy stupně $h = max(r, s)$. Jejich koeficienty lze určit metodou neurčitých koeficientů.

Důkaz: Postup ověření této věty je zřejmý - dosadit funkci y_p do levé strany rovnice (38) a ukázat,že lze koeficienty polynomů L a M určit tak, že by funkce (40) byla řešením rovnice (38). Ale je patrné, že výpočet těchto koeficientů je v obecném případě velmi dlouhý. Výpočet lze ulehčit tím, že se nejprve aplikuje věta 2.7. podle které lze řešení y_p dostat jako součet partikulárního řešení rovnic

$$\mathcal{L}(y) = e^{\alpha x} P(x) \cos \beta x, \ a \ \mathcal{L}(y) = e^{\alpha x} Q(x) \sin \beta x.$$

Dokážeme tvrzení jen pro první rovnici,tj. pro rovnici

$$\mathcal{L}(y) = e^{\alpha x} P(x) \cos \beta x,$$

kdy $\alpha + i\beta$ není kořenem charakteristické rovnice, protože v ostatních připadech se postupuje jen s malými změnami.

Buď tedy

$$P(x) = p_0 x^r + p_1 x^{r-1} + p_2 x^{r-2} + \cdots + p_{r-1} x + p_r,$$

$$Q(x) = q_0 x^s + q_1 x^{s-1} + q_2 x^{s-2} + \cdots + q_{s-1} x + q_s,$$

$$L(x) = l_0 x^h + l_1 x^{h-1} + l_2 x^{h-2} + \cdots + l_{h-1} x + l_h,$$

$$M(x) = m_0 x^h + m_1 x^{h-1} + m_2 x^{h-2} + \cdots + m_{h-1} x + m_h,$$

a označme

$$z(x) = L(x) \cos \beta x + M(x) \sin \beta x, \tag{41}$$

takže $y_p = e^{\alpha x} z(x)$.

Zřejmě je

$$\mathcal{L}(y_p) = e^{\alpha x}(\alpha^2 z(x) + 2\alpha z'(x) + z''(x) + a_1[\alpha z(x) + y'(x)] + a_2 z(x)) =$$

$$= e^{\alpha x}(z''(x) + [2\alpha + a_1] z'(x) + [\alpha^2 + a_1 \alpha + a_2] z(x)).$$

Označíme-li

$$A_1 = 2\alpha + a_1, \ A_2 = \alpha^2 + a_1 \alpha + a_2$$

a dosadíme-li do předchozího vztahu za $z(x)$ (41), vyjde

$$\mathcal{L}(y_p) = e^{\alpha x}[L''(x) \cos \beta x - 2\beta L'(x) \sin \beta x - \beta^2 L(x) \cos \beta x +$$

$$+A_1(L'(x)\cos\beta x - \beta L(x)\sin\beta x) + A_2 L(x)\cos\beta x]+$$

$$+e^{\alpha x}[M''(x)\sin\beta x + 2\beta M'(x)\cos\beta x - \beta^2 M(x)\sin\beta x+$$

$$+A_1(M'(x)\sin\beta x + \beta M(x)\cos\beta x + A_2 M(x)\sin\beta x] =$$

$$= e^{\alpha x}[\cos\beta x(L''(x) + A_1 L'(x) + (A_2 - \beta^2)L(x) + 2\beta M'(x) + \beta A_1 M(x))+$$

$$+\sin\beta x(M''(x) + A_1 M'(x) + (A_2 - \beta^2)M(x) - 2\beta L'(x) - \beta A_1 L(x))].$$

Protože

$$\mathcal{L}(y_p) = e^{\alpha x} P(x)\cos\beta x,$$

je nutné ověřit, jestli existují polynomy $L(x)$ a $M(x)$ tak že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$L''(x) + A_1 L'(x) + (A_2 - \beta^2)L(x) + 2\beta M'(x) + \beta A_1 M(x) = P(x),$$

$$M''(x) + A_1 M'(x) + (A_2 - \beta^2)M(x) - 2\beta L'(x) - \beta A_1 L(x) = 0.$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x na obou stranách těchto rovnic dostaneme:

porovnání koeficientů u x^h:

$$(A_2 - \beta^2)l_0 + A_1 m_0 = p_0,$$

$$-A_1\beta l_0 + (A_2 - \beta^2)m_0 = 0,$$

porovnání koeficientů u x^{h-1}:

$$(A_2 - \beta^2)l_1 + A_1\beta m_1 + A_1 h l_0 + 2\beta m_0 = p_1,$$

$$-A_1\beta l_1 + (A_2 - \beta^2)m_1 - 2\beta l_0 + A_1 h m_0 = 0,$$

porovnání koeficientů u x^{h-2}:

$$(A_2 - \beta^2)l_2 + A_1\beta m_2 + A_1(h-1)l_1 + 2\beta(h-1)m_1 + h(h-1)l_0 = p_2,$$

$$-A_1\beta l_2 + (A_2 - \beta^2)m_2 - 2\beta(h-1)l_1 + A_1(h-1)m_1 + h(h-1)m_0 = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

První dvojice rovnic má jen jedno řešení h_0, l_0. Determinant soustavy

$$\Delta := (A_2 - \beta^2)^2 + \beta^2 A_1^2$$

$$= (\alpha^2 - \beta^2 a_1 \alpha + a_2)^2 + \beta^2(2\alpha + a_1)^2$$

je totiž různý od nuly, protože výrazy v kulatých závorkách jsou současně rovny nule jen v případě, když $\alpha \pm \ i\beta$ jsou kořeny charakteistické rovnice, a to spor s předpokladem. Známe-li h_0, l_0, vypočteme h_1, l_1 z dalsí dvojice rovnic, pak h_2, l_2 atd.,protože determinant soustavy je ve všech případech roven Δ, a tedy je různý od nuly.

Po h krocích je výpočet koeficientů u obou polynomů L, M ukončen a důkaz věty je hotov. □

Příklad 2.6. Mějme rovnici

$$y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}.$$

Z odpovídající charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

vypočteme charakteristické kořeny

$$\lambda_{1,2} = -2$$

tedy obecné řešení rovnice je tvaru

$$y_o(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}.$$

S použižím metody variace konstant je předpokládané řešení tvaru

$$z(x) = (ax + b)e^{2x}$$

Vypočteme si první a druhou derivaci tohoto předpokládaného řešení

$$z'(x) = ae^{2x} + 2(ax + b)e^{2x}$$

$$z''(x) = 4ae^{2x} + 4(ax+b)e^{2x}$$

a dosadíme do zadané rovnice.

$$4ae^{2x} + 4(ax+b)e^{2x} + 4ae^{2x} + 8(ax+b)e^{2x} + 4(ax+b)e^{2x} = xe^{2x}$$

Jelikož se v každém členu této rovnice vyskytuje e^{2x}, můžeme ho pokrátit a po sečtení dostáváme rovnici

$$8a + 16(ax+b) = x$$

Porovnáme koeficienty u mocnin členu x

$$x^1: \quad 16a = 1$$

$$a = \frac{1}{16}$$

$$x^0: \quad \frac{1}{2} + 16b = 0$$

$$16b = -\frac{1}{2}$$

$$b = -\frac{1}{32}$$

Tím jsme získali řešení nehomogenní rovnice a to sečteme s obecným řešením rovnice a dostáváme

$$y(x) = e^{-2x}(c_1 + c_2x) + e^{2x}(\frac{1}{16}x - \frac{1}{32})$$

Příklad 2.7. Mějme rovnici

$$y'' - 3y' + 2y = x\cos x.$$

Z odpovídající charakteristické rovnice

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

vypočteme charakteristické kořeny

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$$

tedy obecné řešení rovnice je tvaru

$$y_o(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

S použižím metody variace konstant je předpokládané řešení tvaru

$$z(x) = (ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x$$

Vypočteme si první a druhou derivaci tohoto předpokládaného řešení

$$z'(x) = (a + cx + d)\cos x - (ax + b - c)\sin x$$

$$z''(x) = (2c - ax - b)\cos x - (2a + cx + d)\sin x$$

a dosadíme do zadané rovnice.

$$(ax - 3cx - 3a + b + 2c - 3d)\cos x + (3ax + cx - 2a + 3b - 3c + d)\sin x = x\cos x$$

Porovnáme mocniny koeficientu x u $\cos x$ a $\sin x$

x^1 :

$$cosx: \quad a - 3c = 1$$

$$a = \frac{1}{10}$$

$$\sin x: \quad 3a + c = 0$$

$$c = -\frac{3}{10}$$

x^0 :

$$\cos x: \quad -3a + b + 2c - 3d = 0$$

$$b = -\frac{3}{25}$$

$$\sin x: \quad -2a + 3b - 3c + d = 0$$

$$d = -\frac{17}{50}$$

Tím jsme získali řešení nehomogenní rovnice a to sečteme s obecným řešením rovnice a dostáváme

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \left(\frac{1}{10}x - \frac{3}{25}\right)\cos x - \left(\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\right)\sin x$$

Tato kapitola byla zpracována podle [2].

Závěr

V této bakalářské práci jsme se seznámili se základními definicemi a vlastnostmi lineárních diferenciálních rovnic 2.řádu. Dále jsme se zde zabývali základními vlastnostmi řešení a vzdáleností nulových řešení lineárních diferenciálních rovnic 2.řádu. V poslední kapitole jsme uvedli definice lineárních diferenciálních rovnic 2.řádu s konstantními koeficienty a existence řešení pro homogenní a nehomogenní rovnice a byly tu uvedeny příklady na výpočet řešení nehomogenních lineárních diferenciálních rovnic 2.řádu s konstatními koeficienty.

Literatura

[1] Josef Kalas, Miloš Ráb, Obyčejné diferenciální rovnice, Masarykova univerzita v Brně 2001

[2] Miloš Ráb, Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic, Masarykova univerzita v Brně 2004

[3] L. Ya. Adrianova, Introduction to linear systems of differential equations, 146. Providence, AMS, 1995

[4] W.A.Coppel, Disconjugacy, Springer, Berlin, 1971 (page 22)