

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Kinematická geometrie v rovině



Vedoucí bakalářské práce:
RNDr. Marie Chodorová, Ph.D.
Rok odevzdání: 2020

Vypracoval:
Mgr. Pavel Havrda
DG – Z

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora: Pavel Havrda

Název práce: Kinematická geometrie v rovině

Typ práce: bakalářská

Pracoviště: Katedra algebry a geometrie Přírodovědecké fakulty UPOL

Vedoucí práce: RNDr. Marie Chodorová, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2020

Počet stran: 48

Jazyk: český

Bibliographical identification

Author's first name and surname: Pavel Havrda

Title: Kinematic plane geometry

Type of thesis: bachelor

Department: Department of Algebra and Geometry, Faculty of Science UPOL

Supervisor: RNDr. Marie Chodorová, Ph.D.

The year of presentation: 2020

Number of pages: 48

Language: czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Marie Chodorové, Ph.D., a že jsem v seznamu literatury uvedl všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 20. června 2020

.....

podpis

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucí bakalářské práce, paní RNDr. Marii Chodorové, Ph.D., za cenné rady, ochotu a čas, který mi věnovala, a že měla se mnou po celou dobu nesmírnou trpělivost. Rovněž děkuji rodině za podporu během celého studia.

Obsah

Úvod	6
1 Základní pojmy kinematické geometrie	7
2 Speciální pohyby a konstrukce křivek	17
2.1 Ojniční pohyb	17
2.2 Eliptický pohyb	19
2.3 Kardiodický pohyb	22
2.4 Konchoidální pohyb	26
2.5 Úpatnicový pohyb	29
2.6 Cyklické pohyby	31
2.6.1 Cykloidální pohyb	32
2.6.2 Evolventní pohyb	34
2.6.3 Epicykloidální pohyb	35
2.6.4 Hypocykloidální pohyb	38
2.6.5 Pericykloidální pohyb	40
3 Využití v praxi	41
Závěr	46
Seznam literatury	47

Úvod

V této bakalářské práci se budeme zabývat rovinnou kinematickou geometrií a jejím využitím v praxi.

Kinematická geometrie v rovině studuje pohyb rovinných geometrických útvarů, tj. bodů, přímk, rovinných křivek aj., které při pohybu nemění svůj tvar, ani vzájemnou polohu. Na rozdíl od fyziky nás nebudou zajímat příčiny pohybu, tedy síly, které pohyb zapříčiňují, ani deformační účinky těchto sil. Budeme tedy předpokládat, že pohybující se objekty nikterak nemění svůj tvar.

Naším cílem je v první kapitole zavést základní pojmy kinematické rovinné geometrie – neproměnnou rovinnou soustavu, trajektorii pohybu, obálku soustavy křivek, pevnou a hybnou polodii aj. V druhé kapitole se budeme zabývat konkrétními rovinnými pohyby a popíšeme zde rovněž synteticky vznik jednotlivých křivek. Poslední kapitolu věnujeme výskytu kinematické geometrie v praxi, např. ve strojírenství, ale i v každodenním životě. Věříme, že se nám podaří zaujmout vysokoškolské, ale i středoškolské studenty pro tuto část geometrie díky svému mezipředmětovému přesahu.

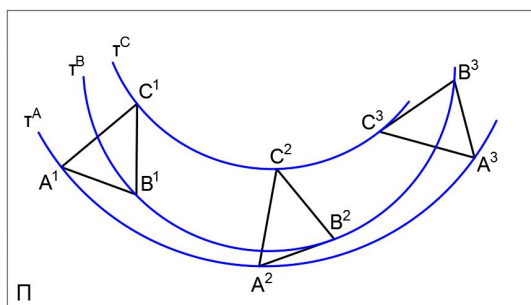
Nebude-li uvedeno jinak, budou ilustrační obrázky narýsovány za použití programu AutoCAD. Text vysázíme v typografickém programu T_EX.

1 Základní pojmy kinematické geometrie

V této kapitole zavedeme základní pojmy týkající se rovinné kinematické geometrie. Jak již v úvodu bylo řečeno, kinematická geometrie v rovině studuje pohyb rovinných geometrických útvarů, které při pohybu nemění svůj tvar, ani vzájemnou polohu (viz obr. 1.1).

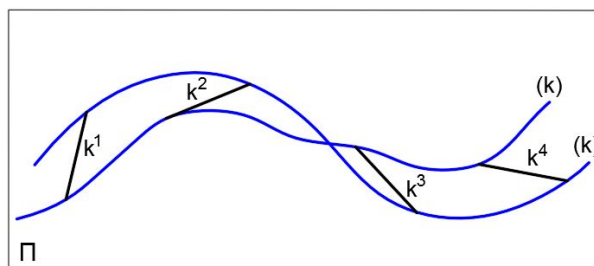
Definice 1.1

Množinu všech geometrických útvarů určité pevné¹ roviny Π , která je jako neproměnný celek podrobena určitému pohybu, budeme nazývat *neproměnná rovinná soustava* (stručně *soustava*) a označovat Σ , její další polohy pak Σ^i , $i = 1, 2, 3, \dots$. Každý bod pohybující se soustavy Σ opisuje křivku nazývanou *trajektorie (dráha)* bodu. Trajektorii bodu A budeme značit τ^A .



Obr. 1.1: Pohyb neproměnné rovinné soustavy

Každá křivka k neproměnné rovinné soustavy Σ vyplní při svém pohybu část roviny, která je omezena tzv. *obálkou*. Obálku křivek k^i , $i = 1, 2, 3, \dots$ budeme značit (k) (viz obr. 1.2).



Obr. 1.2: Obálka křivek

¹Pevnou rovinou Π rozumíme rovinu, která nepodléhá žádnému pohybu.

Z neproměnnosti pohybující se rovinné soustavy Σ (jak je i z obr. 1.1 zřejmé) plyne, že mezi každými jejími dvěma polohami existuje vzájemně jednoznačný vztah. Bodům A^1, B^1, C^1 soustavy Σ^1 korespondují body A^2, B^2, C^2 soustavy Σ^2 , odpovídající si úsečky jsou stejně veliké a smysl oběhu po obvodech odpovídajících si trojúhelníků je tentýž.

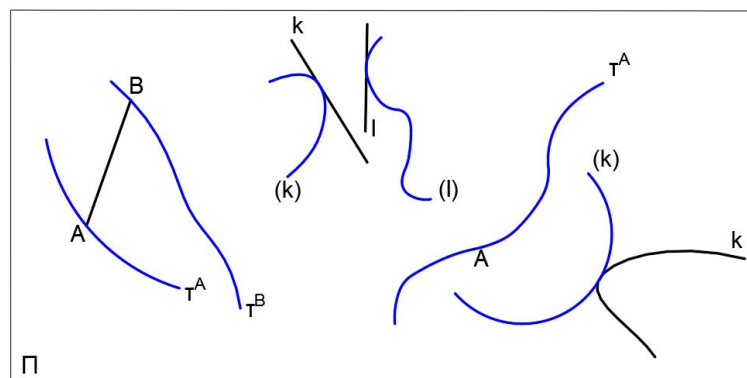
Je-li tedy v pevné rovině Π dána libovolná poloha Σ^1 pohybující se soustavy Σ , pak je její další poloha Σ^2 jednoznačně určena, známe-li přemístěnou polohu A^2B^2 libovolné úsečky A^1B^1 soustavy Σ^1 . Známe tak vlastně pohyb dvou libovolných bodů soustavy a poloha každého dalšího bodu je určena vrcholem trojúhelníku o daných stranách a dané orientaci.

Vzhledem k tomu, že to platí pro každou polohu Σ^i , $i = 1, 2, 3, \dots$ pohybující se rovinné soustavy Σ , můžeme vyslovit následující větu.

Věta 1.2

Pohyb neproměnné rovinné soustavy Σ je jednoznačně určen, jsou-li dány trajektorie τ^A, τ^B krajních bodů libovolné její úsečky AB .

Uvedené určení pohybu není samozřejmě jediné (obr. 1.3). Místo trajektorií τ^A, τ^B bodů A, B mohou být podle [1, str. 109] dány i např. obálky dvou křivek, jedna trajektorie a jedna obálka, příp. polodie pevná a polodie hybná (viz dále).



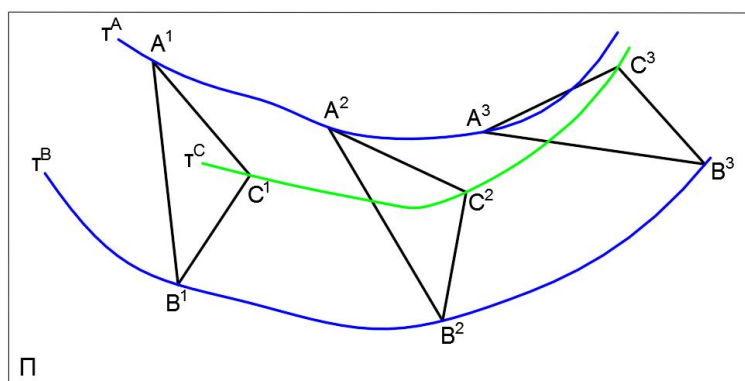
Obr. 1.3: Zadání pohybu

Nyní se zabýváme konstrukcí trajektorie bodu.

Příklad I

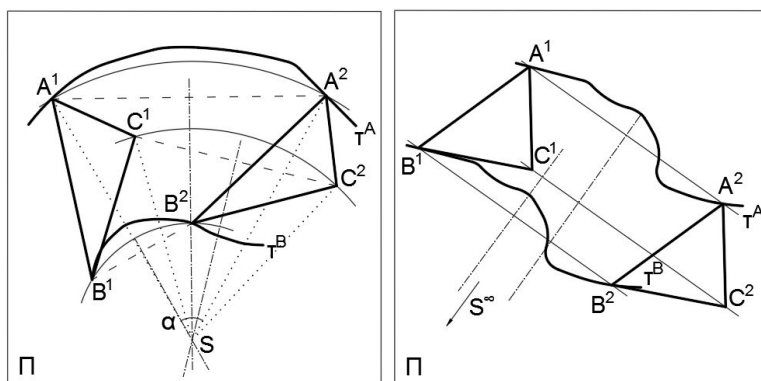
Neproměnná rovinná soustava Σ je tvořena trojúhelníkem ABC , který je dán polohou $A^1B^1C^1$. Pohyb soustavy je určen trajektoriemi τ^A, τ^B dvou bodů A, B . Sestrojte trajektorii τ^C bodu C .

Řešení 1: Trajektorii τ^C libovolného dalšího bodu C můžeme sestavit bodově užitím přímo shodných trojúhelníků $A^iB^iC^i$, kde $i = 2, 3, \dots$ v polohách Σ^i pohybující se neproměnné rovinné soustavy Σ . Na τ^A zvolme tedy dvě různé polohy A^2, A^3 bodu A . Velikosti úseček soustavy Σ se při pohybu nemění, proto body B^2, B^3 sestrojíme na trajektorii τ^B tak, aby platilo $|A^1B^1| = |A^2B^2| = |A^3B^3|$. Konstrukce bodů C^i trajektorie τ^C pomocí shodných trojúhelníků je již zřejmá.



Obr. 1.4: Konstrukce trajektorie bodu pomocí shodných trojúhelníků

Řešení 2: Na trajektorii τ^A bodu A zvolme libovolnou polohu A^2 . Stejným postupem jako v řešení 1 sestrojíme bod B^2 na τ^B . Nyní nalezneme bod S jako průsečík os úseček A^1A^2, B^1B^2 . Je-li S vlastní, přejdou body A^1, B^1, C^1 do bodů A^2, B^2, C^2 otočením o úhel $\varphi = \sphericalangle A^1SA^2$. Musí tedy platit $\varphi = \sphericalangle B^1SB^2 = \sphericalangle C^1SC^2$. Je-li bod S nevlastním bodem, pak body A^1, B^1, C^1 přejdou do bodů A^2, B^2, C^2 posunutím o vektor $\overrightarrow{A^1A^2}$. Bude tedy platit $|A^1A^2| = |B^1B^2| = |C^1C^2|$. Další body $C^i, i = 2, 3, \dots$ trajektorie τ^C tak sestrojíme pomocí otáčení, příp. posunutí.



Obr. 1.5: Konstrukce trajektorie bodu pomocí otáčení a posunutí

Pro libovolné dvě polohy pohybující se neproměnné rovinné soustavy Σ platí následující věta, tzv. *první základní věta rovinné kinematické geometrie*.

Věta 1.3

Jsou-li $\Sigma^i, \Sigma^j, i, j = 1, 2, 3, \dots$ dvě různé polohy pohybující se soustavy Σ , pak vždy existuje otočení nebo posunutí takové, které přemístuje Σ^i do Σ^j .

Důkaz lze nalézt např. v [12, str. 233, 234].

Věta o existenci otáčení, příp. posunutí platí pro každé dvě různé polohy $\Sigma^i, \Sigma^j, i, j = 1, 2, 3, \dots$ pohybující se neproměnné rovinné soustavy Σ a tedy také pro polohu soustavy Σ^2 blížící se poloze Σ^1 . Přibližuje-li se A^2 po τ^A bodu A^1 , pak se rovněž B^2 blíží po τ^B bodu B^1 . Sečna A^1A^2 (B^1B^2) trajektorie τ^A (τ^B) se blíží její tečně v bodě A^1 (B^1). Osa úsečky A^1A^2 se pak blíží normále trajektorie τ^A v bodě A^1 (podobně osa úsečky B^1B^2 se blíží normále trajektorie τ^B v bodě B^1). Společný bod os úseček A^1A^2, B^1B^2 se přitom blíží společnému bodu obou normál.

Věta 1.4

V každé poloze $\Sigma^i, i = 1, 2, 3, \dots$ pohybující se soustavy Σ procházejí normály trajektorií určitým pevným (vlastním nebo nevlastním) bodem S^i .

Bod S^i z věty 1.4 se nazývá *okamžitý střed otáčení (okamžitý pól)* příslušný poloze Σ^i pohybující se soustavy Σ .

Základními pohyby jsou tedy pohyb posuvný (translační) a pohyb otáčivý (rotační).

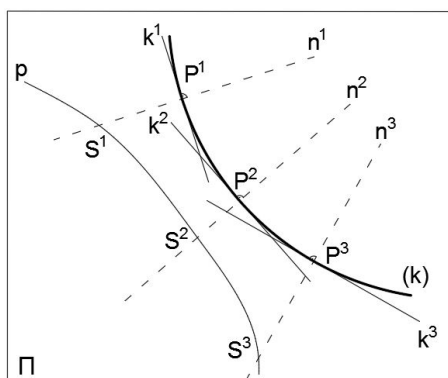
Při translaci body útvaru vykonávají dráhy rovnoběžné, téhož smyslu a stejné délky, udávající velikost posunutí. Zřejmě platí, že, pokud přemístíme útvar Σ^1 pohybem posuvným do polohy Σ^2 a z ní jiným posuvným pohybem do polohy Σ^3 , je možné rovněž útvar Σ^1 přesunout jediným translačním pohybem do polohy Σ^3 . Přitom výsledné posunutí je totéž, i když zaměníme pořadí obou daných translací. Rotační pohyb v rovině je dán středem a jeho dráhy jsou soustředné kružnice.

Nyní ještě doplníme větu 1.4 o normálách trajektorií větou týkající se obálky, kterou vytvoří křivka pohybující se neproměnné rovinné soustavy Σ .

Věta 1.5

Nechť (k) je obálka křivky k pohybující se soustavy Σ . V každé poloze Σ^i , $i = 1, 2, \dots$, soustavy Σ se příslušná poloha k^i křivky k dotýká obálky (k) v patě P^i kolmice spuštěné z okamžitého středu otáčení S^i na k^i .

Důkaz lze nalézt např. v [12, str. 235].



Obr. 1.6: Obálka křivky

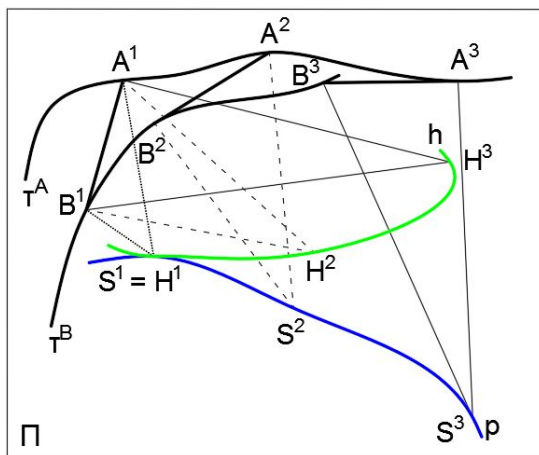
Dále vyloučíme pohyby, jejichž všechny okamžité středy otáčení splývají v jediném bodě vlastním (rotace) nebo nevlastním (translace).

Následující příklad (převzat z [1, str. 111] a upraven) nám poslouží jako názorná ilustrace pro zavedení dalších důležitých pojmů kinematické geometrie v rovině – *pevné a hybné polodie*.

Příklad II

Pohyb neproměnné rovinné soustavy Σ je dán trajektoriemi τ^A , τ^B dvou různých bodů A , B . K dané poloze Σ^1 úsečky A^1B^1 sestrojte další dvě polohy Σ^2 , Σ^3 a ke všem třem polohám jejich okamžité středy otáčení S^1 , S^2 , S^3 . Dále sestrojte body H^1 , H^2 , H^3 , které leží v počáteční poloze soustavy Σ^1 a které při pohybu neproměnné rovinné soustavy Σ splynou po řadě s body S^1 , S^2 a S^3 .

Řešení: Konstrukce úseček A^2B^2 a A^3B^3 je zřejmá (viz řešení příkladu I). Příslušné okamžité středy otáčení S^1 , S^2 , S^3 sestrojíme podle věty 1.4 o normálách trajektorií. Ještě zbývá zkonstruovat body H^1 , H^2 a H^3 . Ty určíme pomocí shodných trojúhelníků $\triangle A^1B^1S^1 \cong \triangle A^1B^1H^1$, kde evidentně S^1 splyne s H^1 , a dále $\triangle A^2B^2S^2 \cong \triangle A^1B^1H^2$, $\triangle A^3B^3S^3 \cong \triangle A^1B^1H^3$.



Obr. 1.7: Konstrukce pevné a hybné polodie

Definice 1.6

Množina všech okamžitých středů otáčení (okamžitých pólů) pohybující se neproměnné rovinné soustavy Σ se nazývá *pevná (nehybná) polodie*, značíme ji p .

Definice 1.7

Množina všech bodů neproměnné rovinné soustavy Σ , které se při jejím pohybu stanou okamžitými středy otáčení se nazývá *hybná polodie*, značíme h .

V rovině Π uvažujme tedy dvě křivky k_p a k_h takové, které se vzájemně dotýkají v jednom společném bodě S . Vytyčme na obou křivkách od bodu S obloučky stejné délky o koncových bodech P^i na křivce k_p a H^i na křivce k_h ,

$i = 1, 2, 3, \dots$. Dále předpokládejme, že křivka k_p je pevnou křivkou (nehybnou). Uvedeme-li křivku k_h do pohybu, kdy se její vytyčené body H^i postupně ztotožňují s body P^i nehybné křivky k_p a to tak, že při uvažovaném pohybu každý bod křivky k_h splyne s jediným bodem křivky k_p a že nenastane tzv. *smyk* po této křivce, je zřejmé (na základě předchozí ilustrace), že body P^i jsou vlastně okamžitými středy otáčení pro příslušné dvě polohy pohybující se křivky k_h . Podle předchozích dvou definic je tedy křivka k_p poloidou nehybnou a pohybující (valící) se křivka k_h pak poloidou hybnou. Takovýto pohyb nazýváme pohybem *valivým (kotálecím)*. Dráha, kterou při valení (kotálení) k_h po k_p vykoná libovolný bod, pevně spojený s křivkou kotálecí k_h , nazýváme *kotálnicí (trochoidou)*. Pokud zaměníme obě dvě polodie, dostaneme tzv. *pohyb vratný* k původnímu pohybu [7, str. 96].

Z výše popsaného vyplývá jedna z důležitých vět pro konstrukce trajektorií bodů a obálek křivek.

Věta 1.8

Příslušná poloha h^i , $i = 1, 2, 3, \dots$ hybné polodie h se v každé poloze Σ^i pohybující se neproměnné rovinné soustavy Σ dotýká pevné polodie p v okamžitém středu otáčení S^i .

Význam obou polodií pro pohyb je daný tzv. *druhou základní větou rovinné kinematické geometrie*. Její důkaz lze najít např. v [6, str. 4].

Věta 1.9

Každý pohyb (různý od rotace a translace) neproměnné rovinné soustavy Σ lze převést na valení (kotálení) hybné polodie h po pevné polodii p .

Věta platí i obráceně:

Věta 1.10

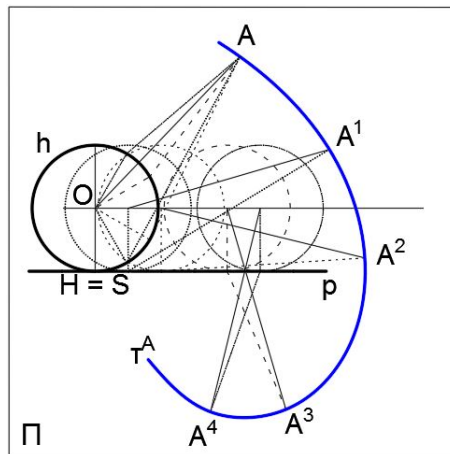
Kotálením libovolné křivky h po libovolné křivce p (různé od nevlastní přímky) je dán pohyb (s vyloučením rotace a translace) neproměnné rovinné soustavy Σ pevně spjaté s křivkou h .

Na závěr této kapitoly ještě uvedeme konstrukci (příklady III, IV) trajektorie bodu a obálky křivky, je-li dána pevná polodie p (přímka) a hybná polodie h (kružnice), s využitím věty 1.8 a zjednodušenou (tzv. Ponceletovu) konstrukci trajektorie bodu a obálky křivky (příklady V a VI).

Příklad III - konstrukce trajektorie bodu

Je zadána pevná polodie p (přímka) a hybná polodie h (kružnice o středu O) navzájem se dotýkající v bodě S . Dále je dán (vně hybné polodie) bod A pevně spojený s kružnicí h (s bodem O a body H^i , $i = 1, 2, 3, \dots$, což jsou body hybné polodie h). Sestrojte trajektorii τ^A bodu A při pohybu určeném pevnou a hybnou polodií p a h .

Řešení: Na hybné polodii h máme tedy dán bod $H = S$ a libovolně zvoleny body H^i , $i = 1, 2, 3, \dots$. Nejprve na pevné polodii p sestrojíme body S^i , $i = 1, 2, 3, \dots$ tak, aby platilo $|\widehat{HH^1}| = |\widehat{SS^1}|$, $|\widehat{H^iH^{i+1}}| = |\widehat{S^iS^{i+1}}|$. Dále zkonstruujeme další polohy hybné polodie h , tj. kružnice h^i se středy O^i , $i = 1, 2, 3, \dots$ tak, že $|\widehat{SS^1}| = |\widehat{OO^1}|$, $|\widehat{S^iS^{i+1}}| = |\widehat{O^iO^{i+1}}|$. Nakonec určíme body A^i trajektorie τ^A pomocí shodných trojúhelníků $\triangle H^iOA \cong \triangle S^iO^iA^i$, $i = 1, 2, 3, \dots$



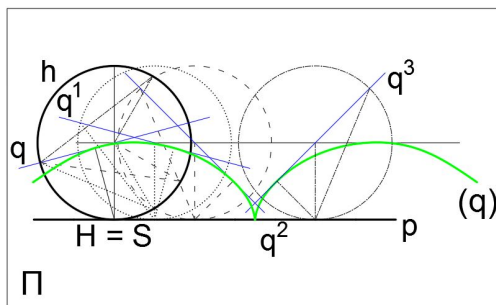
Obr. 1.8: Konstrukce trajektorie bodu

Příklad IV - konstrukce obálky křivky

Mějme opět zadanou pevnou polodii p (přímku) a hybnou polodii h (kružnici se středem O), které se vzájemně dotýkají v bodě S . Dále je dána přímka q procházející body O , A , kde bod A je libovolným bodem kružnice h (přímka q je

tedy s hybnou polodií pevně spojena). Zkonstruuje obálku (q) přímky q vzniklou zadaným pohybem.

Řešení: Postupujeme obdobně jako při řešení příkladu III. Na hybné polodii h zvolíme body H^i , na pevné polodii p sestrojíme body S^i a zkonstruuje kružnice h^i , $i = 1, 2, 3, \dots$. Nyní nalezneme další polohy přímky q , opět na základě shodných trojúhelníků $\triangle H^i O A \cong \triangle S^i O^i A^i$, $O^i A^i = q^i$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Body dotyku Q a Q^i obálky (q) s jednotlivými polohami přímky q určíme podle věty 1.5 o obálce křivky. Právě tyto body leží na hledané obálce (q) přímky q .

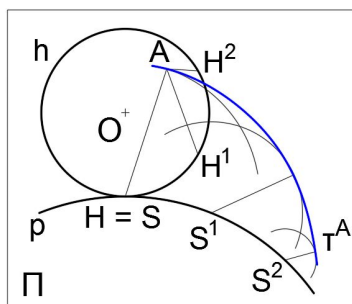


Obr. 1.9: Konstrukce obálky přímky

Následují zmíněné Ponceletovy konstrukce trajektorie bodu a obálky křivky, což jsou zjednodušené konstrukce, které nevyžadují opakované sestrojení polohy hybné polodie h jako v předchozích dvou příkladech. Zadání příkladů V a VI korespondují se zadáními příkladů III a IV.

Příklad V - Ponceletova konstrukce trajektorie bodu

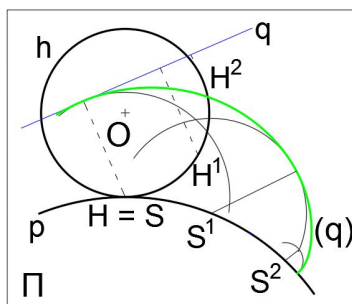
Řešení: Stejně jako v příkladu III libovolně zvolíme na hybné polodii h body H^i , $i = 1, 2, 3, \dots$. Na pevné polodii p sestrojíme body S^i , $i = 1, 2, 3, \dots$ tak, aby opět platilo $|\widehat{HH^1}| = |\widehat{SS^1}|$, $|\widehat{H^i H^{i+1}}| = |\widehat{S^i S^{i+1}}|$. Nyní sestrojíme kružnice $k(S, r = |HA|)$ a $k^i(S^i, r^i = |H^i A|)$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Trajektorii τ^A bodu A pak získáme jako obálku kružnic k , k^i , $i = 1, 2, 3, \dots$. Body dotyku neurčujeme.



Obr. 1.10: Ponceletova konstrukce trajektorie bodu

Příklad VI - Ponceletova konstrukce obálky křivky

Řešení: Na hybné polodii h zvolíme body H^i , na pevné polodii p zkonstruujeme body S^i , $i = 1, 2, 3, \dots$ stejně jako v předešlém příkladu. Body H, H^i vedeme kolmice k přímce q a paty těchto kolmic označíme po řadě P, P^i , $i = 1, 2, 3, \dots$. Sestrojíme kružnice $k(S, r = |HP|)$ a $k^i(S^i, r^i = |H^iP^i|)$, kde $i = 1, 2, 3, \dots$. Obálkou (q) přímky q je obálka kružnic k a k^i , $i = 1, 2, 3, \dots$. Body dotyku opět nesestrojujeme.



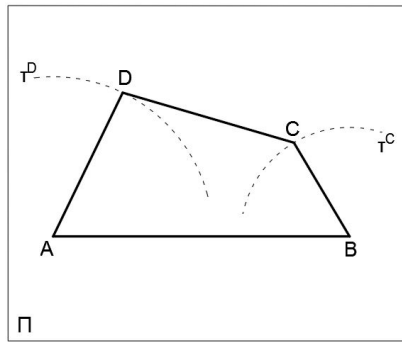
Obr. 1.11: Ponceletova konstrukce obálky přímky

2 Speciální pohyby a konstrukce křivek

Nyní budeme studovat vybrané speciální pohyby kinematické geometrie v rovině a rovněž se zaměříme na syntetické konstrukce některých vznikajících křivek.

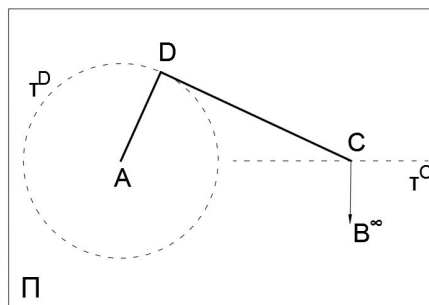
2.1 Ojniční pohyb

Ojniční pohyb je zadáný tzv. *kloubovým čtyřúhelníkem*. To je takový čtyřúhelník $ABCD$ pevné roviny Π , jehož body A, B jsou pevné a body C, D se pohybují po kruhových trajektoriích τ^C, τ^D se středy po řadě v bodech A, B ($A \neq B$). Strana AB se nazývá *rám* a strana CD *ojnice*. Strany AD, BC kloubového čtyřúhelníku pak nazýváme *kličky*, opisují-li body C, D kružnice, anebo *vahadla*, jsou-li τ^C a τ^D pouze kruhové oblouky.



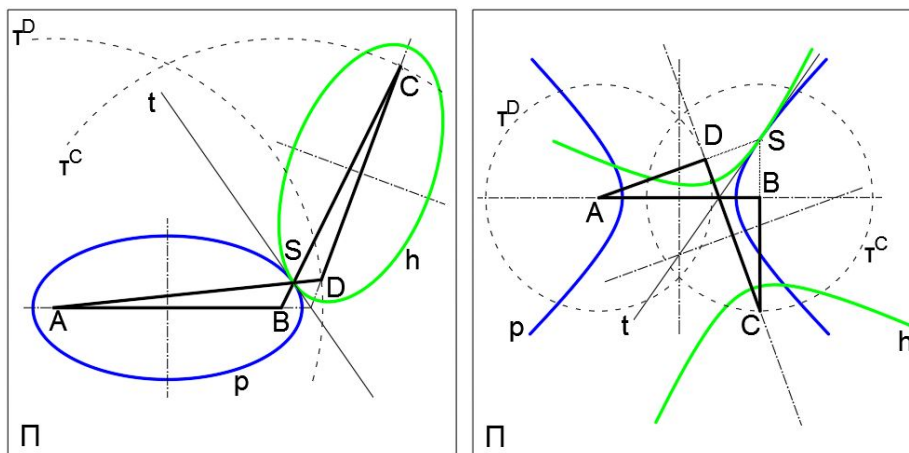
Obr. 2.1: Kloubový čtyřúhelník

Zvláštním případem kloubového čtyřúhelníku je *přímovod* (viz obr. 2.2). Jedná se o takový kloubový čtyřúhelník $ABCD$, jehož klička BC je nekonečně dlouhá. Kruhová dráha bodu C se tak mění v přímočarou.



Obr. 2.2: Přímovod

Dalším speciálním případem jsou tzv. *kloubové antiparalelogramy*, což jsou zkrížené¹ kloubové čtyřúhelníky $ABCD$.



Obr. 2.3: Antiparalelogram eliptický a hyperbolický

Na obrázcích 2.3 vidíme, že polodiemi antiparalelogramů jsou buď shodné elipsy, nebo rovnomoce hyperboly s ohnisky v bodech A , B a C , D . Platí tak následující věta.

Věta 2.1.1

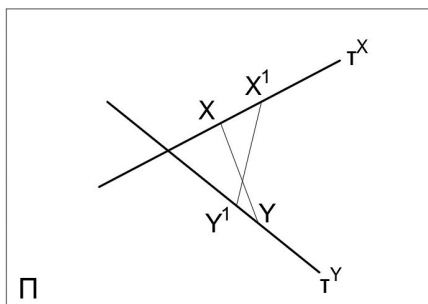
Pohyb kloubového antiparalelogramu můžeme převést buď na valení elipsy po shodné elipse, nebo na valení hyperboly po shodné hyperbole.

U eliptického a hyperbolického antiparalelogramu na obrázku 2.3 sledujme pohyb okamžitého středu otáčení S dané neproměnné rovinné soustavy. Konstrukce příslušné pevné a hybné polodie vyplývá z věty 2.1.1. Sestrojíme elipsu (hyperbolu) p a na ní zvolíme libovolný bod S . Tímto bodem vedeme tečnu t k dané kuželosečce. Sestrojíme druhou elipsu (hyperbolu) h osově souměrnou s elipsou (hyperbolou) p podle tečny t . Kloubový antiparalelogram $ABCD$ je tvořen úsečkami s krajními body v ohniscích jednotlivých kuželoseček p a h . Pohybem bodu S po kuželosečce p vytvářejí body C a D kružnice τ^C , τ^D .

¹Zkríženým čtyřúhelníkem (antiparalelogramem) rozumíme čtyřúhelník $ABCD$, jehož protilehlé strany jsou stejně dlouhé (tj. platí $|AB| = |CD|$, $|AD| = |BC|$) a strana BC protíná stranu AD (příp. AB protíná CD).

2.2 Eliptický pohyb

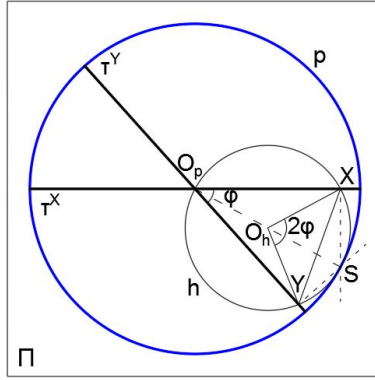
Pohyb neproměnné rovinné soustavy Σ , jejíž dva různé body X, Y opisují přímé různoběžné trajektorie τ^x, τ^y , nazýváme pohybem eliptickým. Vzdálenost bodů $|X^i Y^i|$ pro všechny polohy soustavy Σ je stále stejná.



Obr. 2.4: Zadání eliptického pohybu

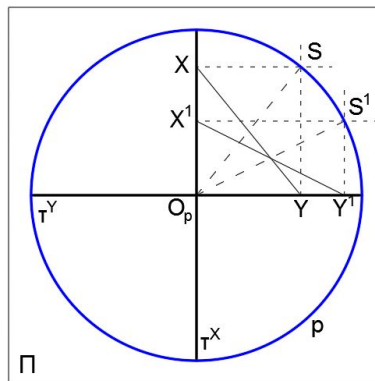
Odvoďme jeho pevnou a hybnou polodii.

Víme, že pevná polodie je množina všech okamžitých pólů pohybu a tedy průsečíků normál trajektorií bodů X, Y v daném okamžiku. Necht' přímkové trajektorie τ^X, τ^Y krajních bodů X, Y úsečky XY pohybující se neproměnné rovinné soustavy Σ svírají úhel $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Průsečík přímek τ^X, τ^Y označme O_p , okamžitý střed otáčení pro polohu Σ pak S . Trojúhelníky O_pXS a O_pYS jsou pravoúhlé a mají společnou přeponu O_pS . Body O_p, X, Y a S tak leží na jedné kružnici h , jejíž střed O_h je středem úsečky O_pS . Ze vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem víme, že velikost úhlu $\sphericalangle XO_pY$ je stejná jako polovina velikosti úhlu $\sphericalangle XO_hY$. Odtud můžeme odvodit poloměr kružnice h : $r_h = \frac{|\widehat{XY}|}{2\varphi}$ (viz obr. 2.5). Jelikož velikost oblouku \widehat{XY} je stále stejná (plyne ze zadání pohybu), vidíme, že i poloměr r_h bude stále konstantní. Z toho již vyplývá, že všechny okamžité póly S leží na kružnici p se středem v průsečíku O_p trajektorií τ^X, τ^Y a poloměrem $r_p = \frac{|\widehat{XY}|}{\varphi}$, která je tedy pevnou polodií eliptického pohybu.



Obr. 2.5: Pevná polodie eliptického pohybu (obecný úhel trajektorií)

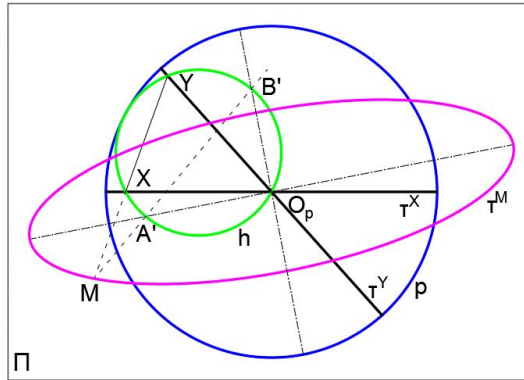
Zvolme si nyní trajektorie τ^X, τ^Y bodů X, Y na sebe kolmé. Jejich průsečík opět označme O_p , okamžitý střed otáčení S . Tentokrát body O_p, X, S a Y vytvoří obdélník s úhlopříčkami XY a O_pS stejné délky. Obdobně vytvoříme obdélníky $O_pX^iS^iY^i, i = 1, 2, \dots$. Protože všechny úhlopříčky X^iY^i jsou stejně velké, jsou stejně dlouhé i úhlopříčky O_pS^i . Všechny okamžité póly S^i tak opět vyplňují kružnici p se středem v průsečíku O_p trajektorií τ^X, τ^Y a poloměrem $r_p = |O_pS^i|$.



Obr. 2.6: Pevná polodie eliptického pohybu (kolmé trajektorie)

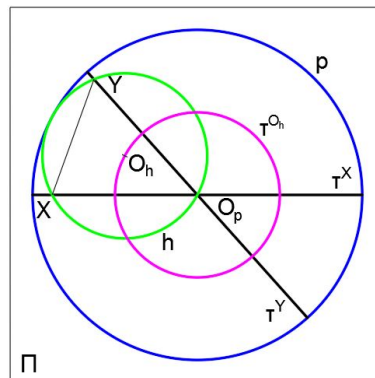
Hybnou polodií eliptického pohybu je také kružnice. Jestliže zvolíme polohu X^1, Y^1 bodů X, Y , dostaneme okamžitý pól S^1 . Body O_p, X^1, Y^1 a S^1 leží na kružnici h^1 . Označme H průsečík O_pS^1 s kružnicí h (viz obr. 2.7). Výpočtem lze ověřit, že velikost oblouku \widehat{SH} je shodná s velikostí oblouku $\widehat{SS^1}$ [6, str. 10]. Čili bod H valením kružnice h po kružnici p přejde do bodu S^1 . Hybná polodie je tedy kružnice h , která v daném okamžiku prochází průsečíkem O_p trajektorií τ^X, τ^Y a body X^i, Y^i (leží tedy uvnitř pevné polodie p). Její poloměr r_h je poloviční než poloměr r_p pevné polodie p .

středem kružnice h , dostaneme dva průsečíky této přímky s hybnou polodí A' , B' (viz obr. 2.9). Trajektorie těchto bodů jsou přímky procházející bodem O_p , čili jsou k sobě navzájem kolmé. Získali jsme tak hlavní a vedlejší osu elipsy. Délky poloos se odvodí z proužkové konstrukce elipsy, tedy $a = |MB'|$, $b = |MA'|$ [12, str. 251].



Obr. 2.9: Trajektorie bodu při eliptickém pohybu

Samotný střed O_h hybné polodie h evidentně opisuje kružnici τ^{O_h} se středem v průsečíku O_p trajektorií τ^X , τ^Y .

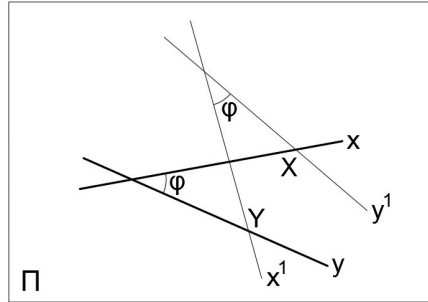


Obr. 2.10: Trajektorie středu hybné polodie při eliptickém pohybu

2.3 Kardioidický pohyb

Vratným pohybem k pohybu eliptickému je pohyb kardioidický. Ten je tedy určen pohybem dvou různoběžných přímek x , y neproměnné rovinné soustavy Σ , které stále procházejí dvěma různými pevnými body X a Y (viz obr. 2.11). Body

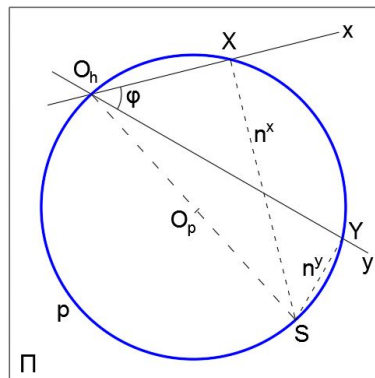
X, Y jsou tak vlastně obávkami $(x), (y)$ přímek x, y . Odchylka přímek x^i a y^i je konstantní pro všechny polohy Σ^i soustavy Σ .



Obr. 2.11: Zadání kardioidického pohybu

Jelikož se jedná o pohyb vratný k eliptickému, pevnou i hybnou polodií kardioidického pohybu jsou opět kružnice. Přesvědčme se o tom u pevné polodie.

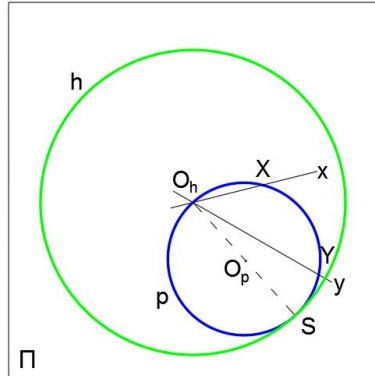
Uvažujme dvě různoběžné přímky x, y ($|\sphericalangle xy| = \varphi$) se společným bodem O_h procházející dvěma různými pevnými body X, Y (viz obr. 2.12). Sestrojíme-li v bodech X, Y kolmice po řadě k přímkám x, y , získáme jako jejich průsečík okamžitý střed otáčení S v daném momentu (podle věty 1.5). Body X, Y, S, O_h evidentně leží na kružnici $p = (O_p, r_p)$, kde O_p je středem úsečky SO_h (Thaletova kružnice nad průměrem SO_h). Protože úhel φ je stále konstantní, pohybuje se bod O_h do další polohy neproměnné rovinné soustavy Σ , tudíž i příslušný okamžitý pól S , právě po kružnici p , což plyne z vlastností obvodových úhlů. Kružnice p je proto pevnou polodií kardioidického pohybu.



Obr. 2.12: Pevná polodie kardioidického pohybu

Při vratném pohybu je hybná polodie eliptického pohybu pevnou polodií pohybu kardioidického a naopak. Hybnou polodií kardioidického pohybu pro da-

nou polohu $\Sigma^i, i = 1, 2, 3, \dots$, neproměnné rovinné soustavy Σ je tak kružnice $h^i = (O_{h^i}, 2r_p)$, kde r_p je poloměr polodie pevné.



Obr. 2.13: Hybná polodie kardioidického pohybu

Věta 2.2.2

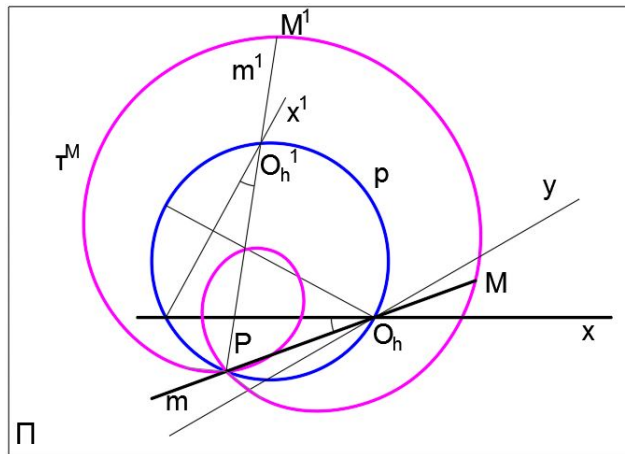
Kardioidický pohyb vznikne valením vnitřního obvodu kružnice h po vnějším obvodu kružnice p , jejíž poloměr je roven polovině poloměru kružnice h .

Konečně prozkoumejme trajektorie dalších bodů hybné soustavy Σ různých od průsečíku O_h přímek x a y (ten opisuje pevnou polodii p) při kardioidickém pohybu.

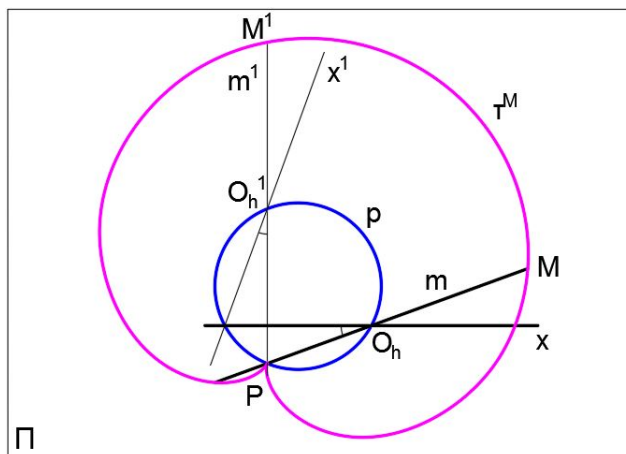
Mějme neproměnnou rovinnou soustavu Σ zadanou dvěma různoběžkami x, y a jejich obálkami $(x), (y)$ při kardioidickém pohybu. Uvažujme libovolný bod M ($M \neq O_h$, kde $O_h = x \cap y$) hybné soustavy Σ . Ten bude mít ve všech polohách Σ^i stejnou vzdálenost od bodu O_h . Příмка m určená body M a O_h má s přímkou x konstantní odchylku (pro všechny polohy). Odtud plyne, že druhý průsečík P přímkou m a pevné polodie p je pevný (jedná se o obálku (m) přímkou m). Z tohoto vyplývá syntetická konstrukce trajektorie bodu M . Bodem P vedeme přímkou m^i , na které od příslušných bodů O_{h^i} ($O_{h^i} = m^i \cap p$) nanášíme úsečky délky $|O_h M|$.

Takto vzniklé křivky se nazývají *Pascalovy závitnice*. Rozlišujeme tři druhy závitnic v závislosti na velikosti $|O_h M|$ ve srovnání s průměrem r_p pevné polodie p . Pokud $|O_h M| < 2r_p$, jedná se o tzv. *prodlouženou Pascalovu závitnici*. Platí-li $|O_h M| = 2r_p$ (tj. leží-li bod M na hybné polodii h), mluvíme o tzv. *prosté Pascalově závitnici* neboli rovněž *kardioidě* (srdcovce), která dala název pohybu.

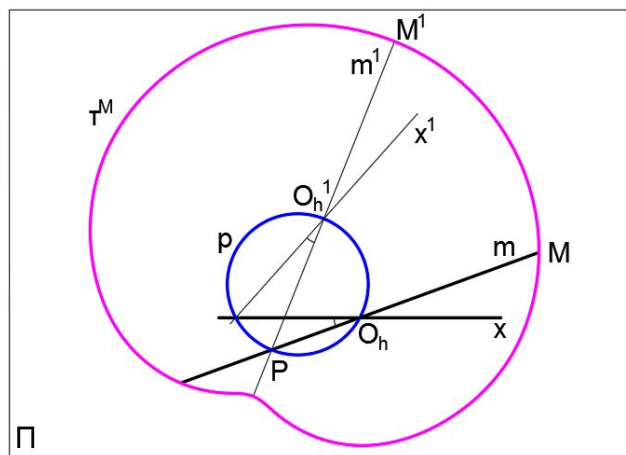
Pro $|O_h M| > 2r_p$ je trajektorií bodu M naopak tzv. *zkrácená Pascalova závitnice* (ta se pevné polodie nedotýká v žádném bodě).



Obr. 2.14: Prodloužená Pascalova závitnice



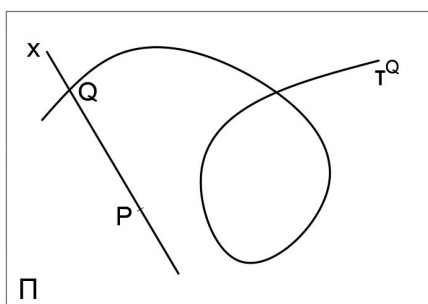
Obr. 2.15: Kardioida



Obr. 2.16: Zkrácená Pascalova závitnice

2.4 Konchoidální pohyb

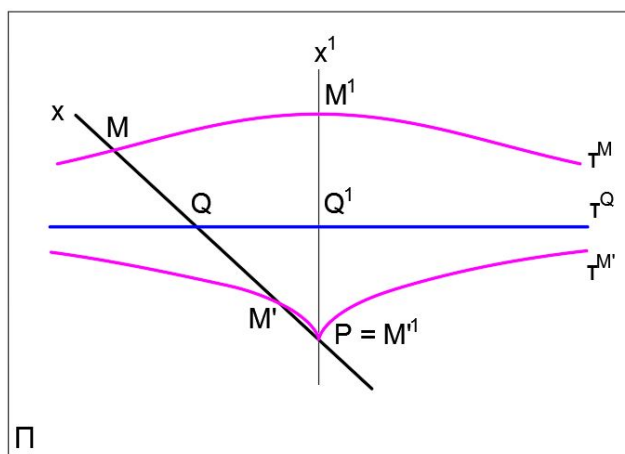
Konchoidální pohyb je určen přímkou x neproměnné rovinné soustavy Σ , která stále prochází daným pevným bodem P , a trajektorií τ_Q bodu $Q \in x$. Obálku přímkou x , tedy bod P , nazýváme *pólem* a křivku τ_Q *řídící křivkou* konchoidálního pohybu. Křivky vznikající tímto pohybem zveme *konchoidami*. Ty můžeme rozdělit na *přímé* a *kosé*. Přímou konchoidou křivky τ_Q rozumíme trajektorie takových bodů přímkou x , jejichž vzdálenost od bodu Q je stejná. Kosé konchoidy jsou pak dráhy bodů neležících na přímce x .



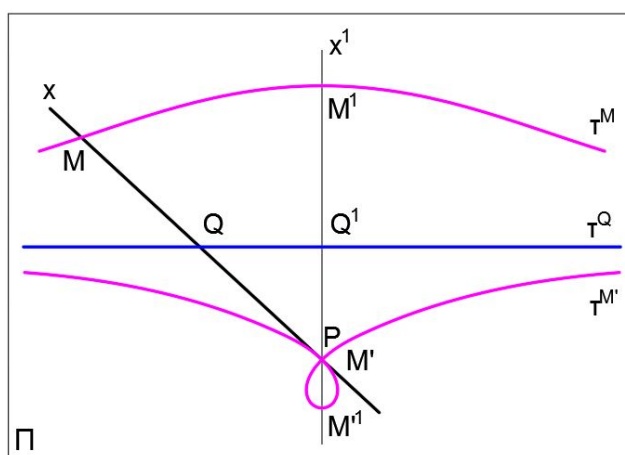
Obr. 2.17: Zadání konchoidálního pohybu

Nyní se blíže podívejme na přímou konchoidu přímkou a přímou konchoidu kružnice.

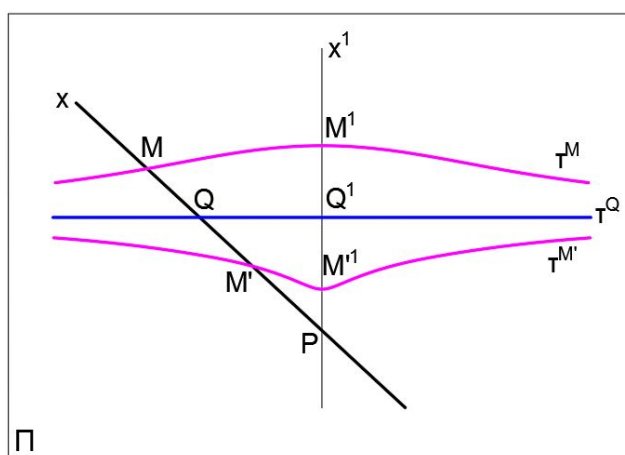
Mějme nejprve danou přímkou x a její obálku P , dále bod Q na přímce x a jeho přímkovou trajektorii τ_Q ($P \notin \tau_Q$). Na přímce x zvolme body M, M' tak, že $|MQ| = |QM'| = d$. Uvažujme konchoidální pohyb přímkou x . Body M a M' vykreslí přímou konchoidu přímkou τ_Q o dvou větvích $\tau_M, \tau_{M'}$, kterou také nazýváme *Nicomedovou konchoidou*. Její bodová konstrukce je zřejmá – ve všech polohách soustavy Σ nanášíme na přímkou x^i od bodů Q^i úsečky konstantní velikosti d , koncové body pak tvoří právě trajektorie $\tau_M, \tau_{M'}$. Řídící přímkou τ_Q je asymptotou Nicomedovy konchoidy. Podoba křivky je určena poměrem mezi velikostmi úseček d a v , kde v je vzdálenost pólu P od řídící přímkou τ_Q . Je-li $v = d$, mluvíme o tzv. *prosté konchoidě* (viz obr. 2.18). Platí-li $d > v$, jedná se o tzv. *prodlouženou konchoidu* (viz obr. 2.19), pro $d < v$ naopak o tzv. *zkrácenou konchoidu* (viz obr. 2.20).



Obr. 2.18: Prostá Nicomedova konchoida



Obr. 2.19: Prodloužená Nicomedova konchoida

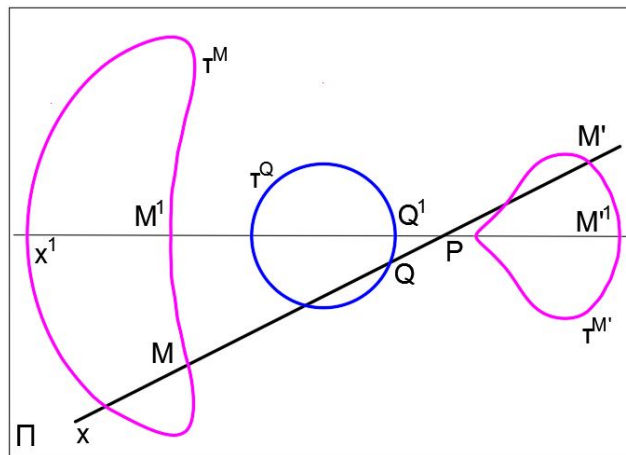


Obr. 2.20: Zkrácená Nicomedova konchoida

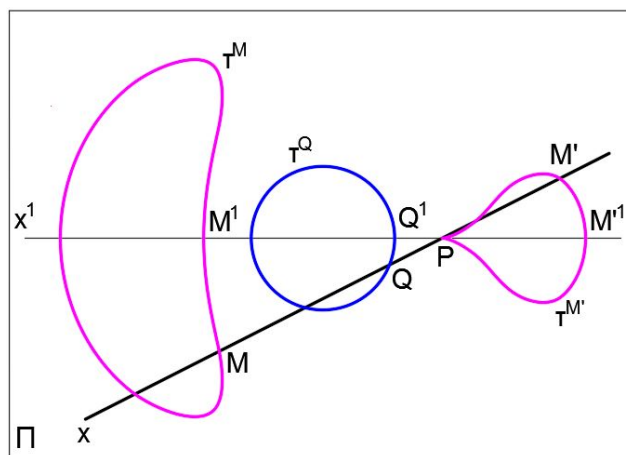
Dále se věnujme přímým konchoidám kružnic.

Leží-li pól P na kružnici τ_Q , její přímkou konchoidou je evidentně Pascalova závitnice. Uvědomme si, že řídicí kružnice τ_Q v konchoidálním pohybu je pevnou polodií p v kardioidickém pohybu.

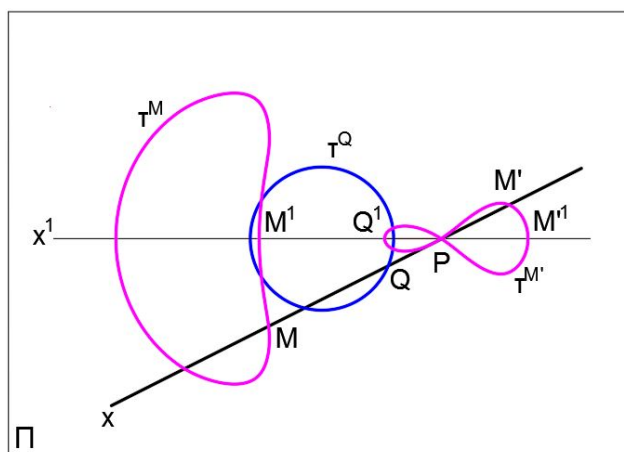
Jestliže pól P neleží na řídicí křivce τ_Q , konchoida kružnice se rozpadá na dvě části. Bodová konstrukce obou větví je obdobná jako u Nicomedovy konchoidy. Pro $d < 2r + v$, $d = 2r + v$ a $d > 2r + v$, kde r je poloměr τ_Q a v je vzdálenost pólu P od kružnice τ_Q , dostáváme opět tři druhy konchoid kružnic, po řadě konchoidu prodlouženou, prostou a zkrácenou [6, str. 14].



Obr. 2.21: Zkrácená konchoida kružnice



Obr. 2.22: Prostá konchoida kružnice



Obr. 2.23: Prodloužená konchoida kružnice

2.5 Úpatnicový pohyb

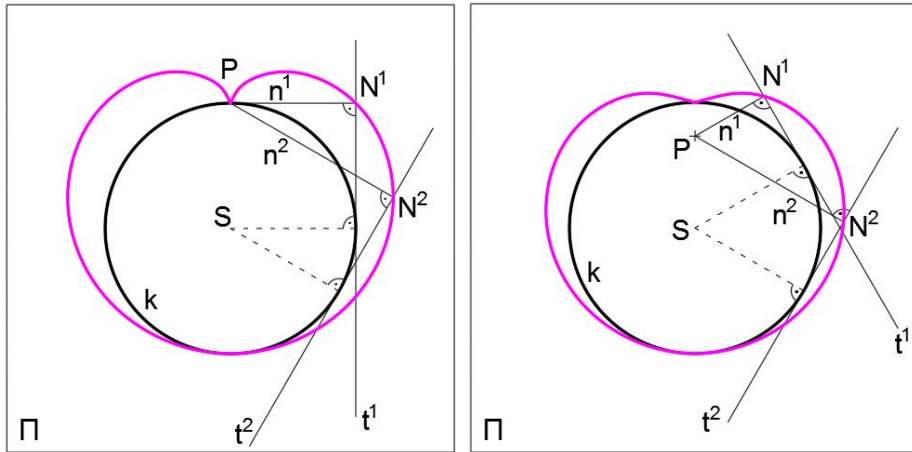
Nejprve si definujme pojem *úpatnice*.

Definice 2.1

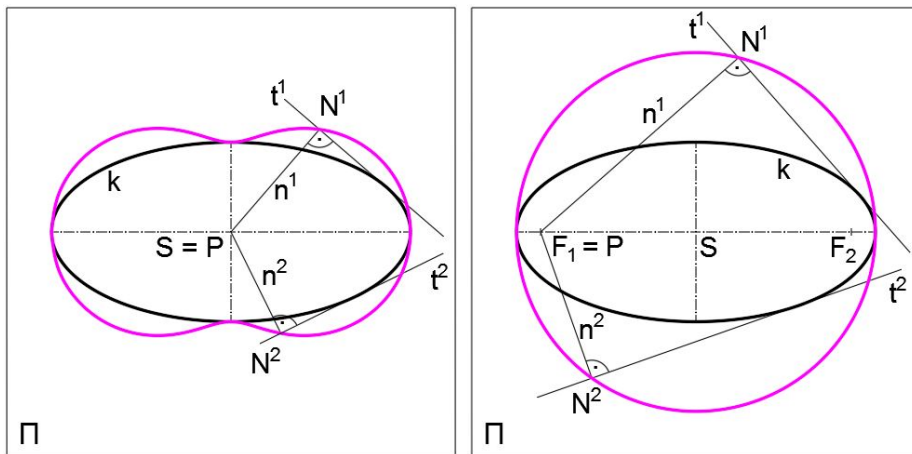
Úpatnice (řídící) křivky k je křivka, která vznikne jako množina všech pat N^i kolmic n^i spuštěných z daného bodu P (pólu) na tečny t^i křivky k , $i = 1, 2, 3, \dots$

Trajektorií úpatnicového pohybu je tedy dráha vrcholu N pravého úhlu, jehož jedno rameno obaluje řídící křivku k a druhé prochází pevným bodem P . Bod P (pól) a křivka k jsou tak vlastně obáčkami dvou vzájemně kolmých přímk neproměnné rovinné soustavy Σ . Bodová konstrukce úpatnice je tak zřejmá.

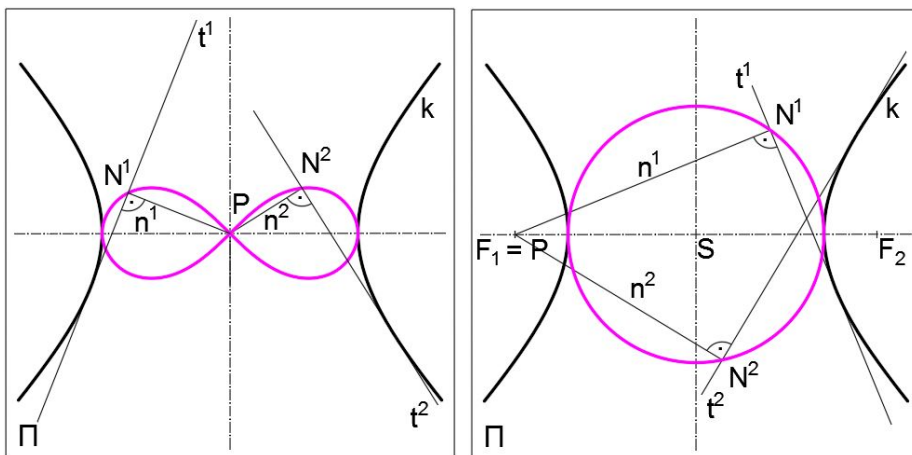
Na následujících obrázcích si ukážeme úpatnice kružnice pro pól na jejím obvodu i mimo něj, úpatnice elipsy a hyperboly pro pól ve středu a v ohnisku kuželosečky a úpatnice paraboly s pólem v jejím vrcholu a ohnisku.



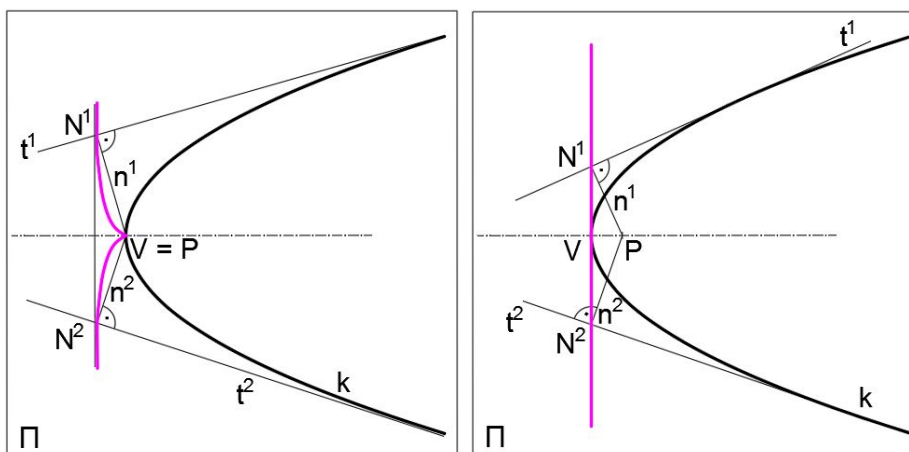
Obr. 2.24: Úpatnice kružnice



Obr. 2.25: Úpatnice elipsy



Obr. 2.26: Úpatnice hyperboly



Obr. 2.27: Úpatnice paraboly

Je-li řídicí křivkou k kružnice, její úpatnice je Pascalovou závitnicí. Jestliže navíc platí $P \in k$, jedná se o kardioidu [1, str. 118]. Ležel-li by pól P ve středu kružnice, úpatnicí by byla samotná kružnice k . Množinou všech pat kolmic (úpatnicí) vedených z ohniska elipsy (resp. hyperboly) k jejím tečnám je vrcholová kružnice elipsy (resp. hyperboly) se středem ve středu elipsy (resp. hyperboly) a poloměrem rovným délce hlavní poloosy elipsy (resp. hyperboly). Úpatnicí rovnosé hyperboly pro pól P ve středu S hyperboly je tzv. *Bernoulliho lemniskáta*. Množinou všech pat kolmic (úpatnicí) vedených z ohniska paraboly k jejím tečnám je vrcholová tečna. Úpatnicí paraboly s pólem P ve vrcholu V paraboly je tzv. *Dioklova kisoida*.

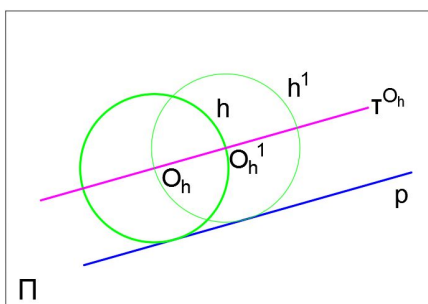
2.6 Cyklické pohyby

Pohyby, při nichž jsou obě polodie (pevná i hybná) kružnice, anebo jedna polodie je kružnice a druhá polodie přímka, nazýváme cyklickými pohyby. Trajektorie bodů neproměnné rovinné soustavy Σ vzniklé cyklickými pohyby se nazývají cyklické křivky. Bodová konstrukce trajektorií bodů je popsána v příkladu III, v první kapitole. Dále uvedeme zjednodušené konstrukce některých vznikajících křivek.

Cyklické pohyby dělíme podle toho, která křivka je pevnou a která hybnou polodií. Může nastat pět případů, které si postupně přiblížíme.

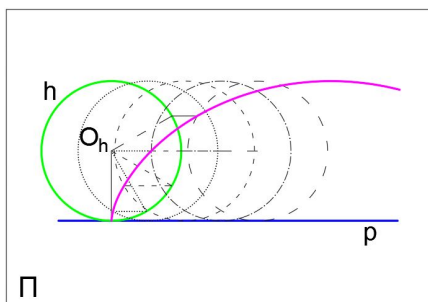
2.6.1 Cykloidální pohyb

Pohyb definovaný valením kružnice h (hybné polodie) po přímce p (pevné polodii) zveme *pohybem cykloidálním*. Trajektoriemi bodů pevně spojených s kružnicí h jsou pak tzv. *cykloidy*. Leží-li bod tvořící trajektorii na kružnici h , jedná se o tzv. *prostou cykloidu*, je-li tento bod vnějším (vnitřním) bodem kruhu s hranicí h , hovoříme o tzv. *prodloužené (zkrácené) cykloidě*. Trajektorií středu O_h hybné polodie h je přímka rovnoběžná s pevnou polodií p .

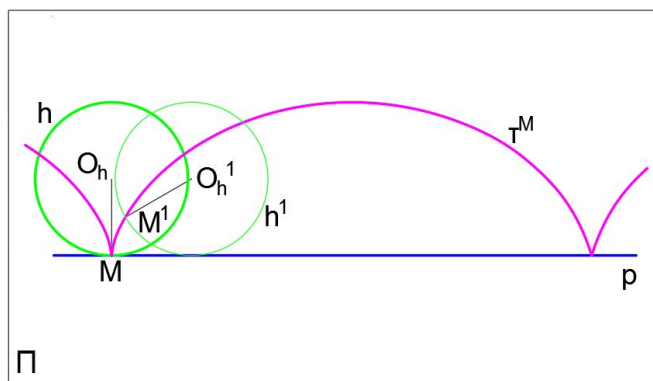


Obr. 2.28: Zadání cykloidálního pohybu, trajektorie středu hybné polodie

Syntetická konstrukce prosté cykloidy: Sestrojíme hybnou kružnici h a libovolnou její tečnu – pevnou polodii p . Na kružnici pravidelně zvolíme dostatečný počet bodů H^i . Ty vymezují oblouky příslušné středovým úhlům určité velikosti. Délku těchto oblouků nanese na rovnoběžku s přímkou p procházející středem O_h kružnice h . Dostaneme tak středy O_h^i dalších poloh hybné polodie h . Jejich průsečíky s příslušnými rovnoběžkami s p jdoucími body H^i jsou body hledané prosté cykloidy [13, str. 120].

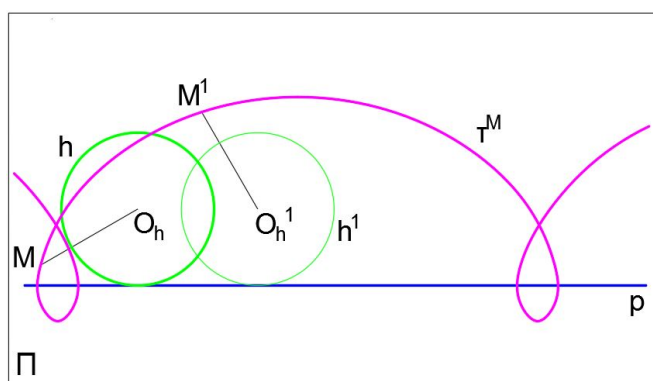


Obr. 2.29: Syntetická konstrukce prosté cykloidy

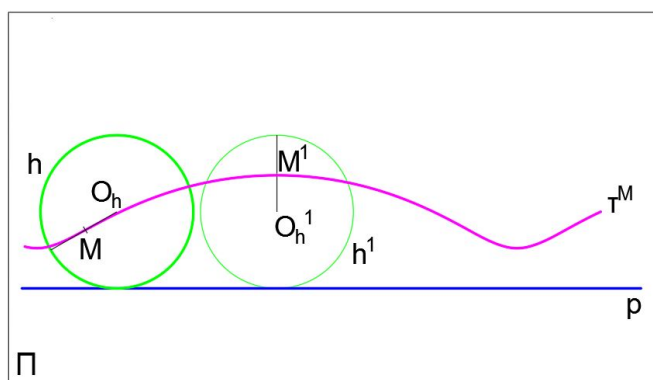


Obr. 2.30: Prostá cykloida

Syntetická konstrukce prodloužené (zkrácené) cykloidy: Bodem, který má vytvořit trajektorii, vedeme kružnici soustřednou s hybnou polodíí h . Poté postupujeme stejně jako při konstrukci prosté epicykloidy [13, str. 121].



Obr. 2.31: Prodloužená cykloida

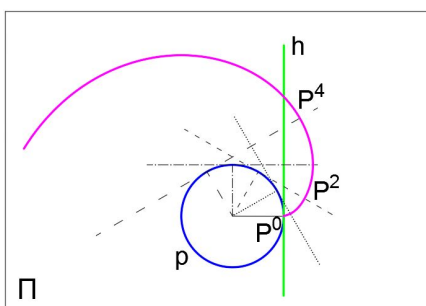


Obr. 2.32: Zkrácená cykloida

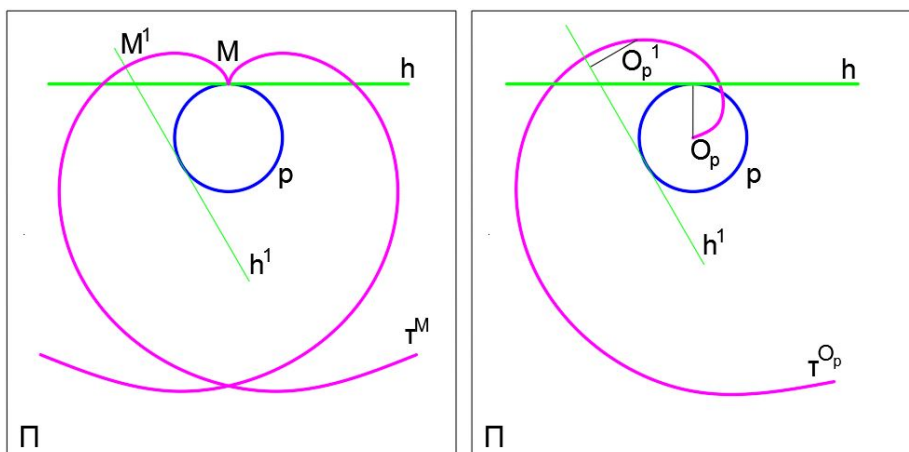
2.6.2 Evolventní pohyb

Vratným pohybem k cykloidálnímu je pohyb evolventní. Pevnou polodií je tedy tentokrát kružnice p , hybnou polodií pak přímka h . Trajektoriemi bodů jsou tzv. *evolventy kružnice*. Uvažujeme-li libovolný bod přímky h , jeho trajektorie se nazývá *prostá evolventa*, trajektorií bodu poloroviny určené přímkou h , v níž leží (neleží) střed O_p pevné polodie p , je tzv. *prodloužená (zkrácená) evolventa kružnice*. Splyne-li bod tvořící trajektorii při evolventním pohybu se středem O_p pevné kružnice p , jeho dráhu nazýváme *Archimédovou spirálou* (na obrázku znázorněna jedna její větev, viz obr. 2.34).

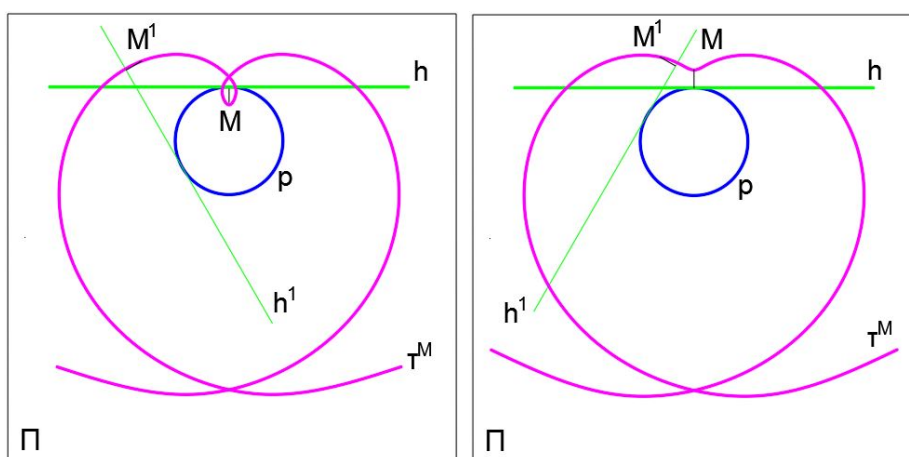
Syntetická konstrukce prosté evolventy: Zkonstruujeme kružnici p a libovolnou její tečnu – hybnou polodii h . Bod dotyku označíme P^0 . Na kružnici opět pravidelně zvolíme dostatečný počet bodů $P^i, i = 1, 2, \dots$, které vymezují oblouky příslušné středovým úhlům určité velikosti. Délku jednoho takového oblouku označme d . V bodech $P^i, i = 1, 2, \dots$ sestrojíme tečny ke kružnici h , na které postupně od dotykových bodů nanášíme úsečky délky $id, i = 1, 2, \dots$. Získané body tvoří hledanou prostou evolventu [13, str. 122].



Obr. 2.33: Syntetická konstrukce prosté evolventy



Obr. 2.34: Prostá evolventa (vlevo) a Archimédova spirála (vpravo)



Obr. 2.35: Prodloužená evolventa (vlevo) a zkrácená evolventa (vpravo)

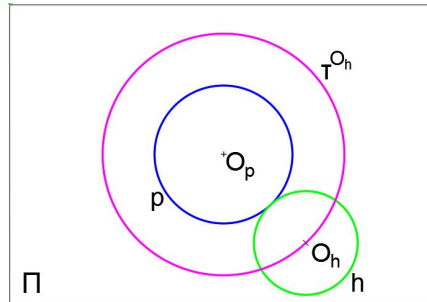
2.6.3 Epicykloidální pohyb

Epicykloidální pohyb je definovaný valením vnějšího obvodu jedné kružnice (hybné polodie h) po vnějším obvodu kružnice druhé (pevné polodii p). Trajektoriemi jsou tzv. *epicykloidy*. Bod hybné kružnice h přitom vykresluje tzv. *prostou epicykloidu*, vnitřní (vnější) bod polodie h (pevně s ní spojený) opisuje tzv. *zkrácenou (prodlouženou) epicykloidu*. Střed O_h hybné polodie h vytvoří kružnici soustřednou s kružnicí p .

Pokud je poloměr r_h hybné kružnice h stejně velký jako poloměr r_p kružnice pevné, pak jsou trajektoriemi pohybu Pascalovy závitnice, prostou epicykloidou

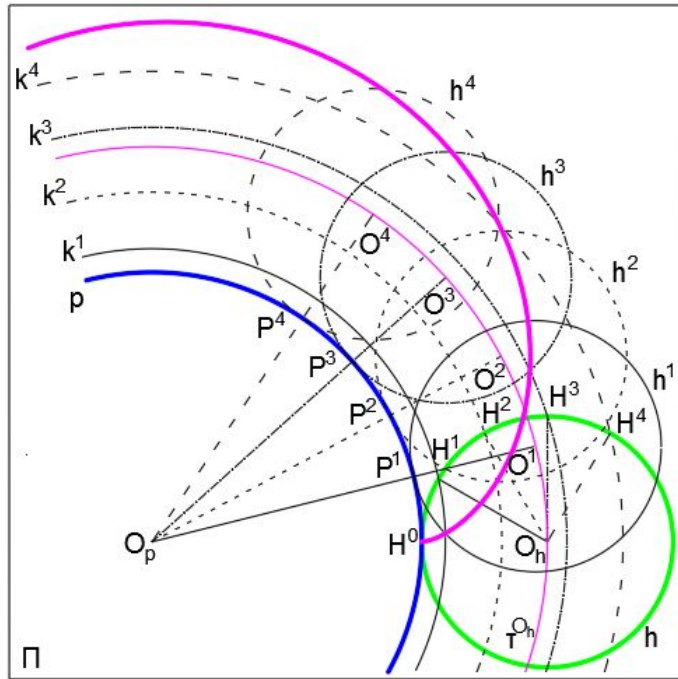
je v tomto případě kardioida. Pro poměr poloměrů $r_h : r_p = 1 : 2$ se vzniklá prostá epicykloida nazývá *nefroida*.

Je zřejmé, že vratným pohybem k pohybu epicykloidálnímu je opět pohyb epicykloidální.

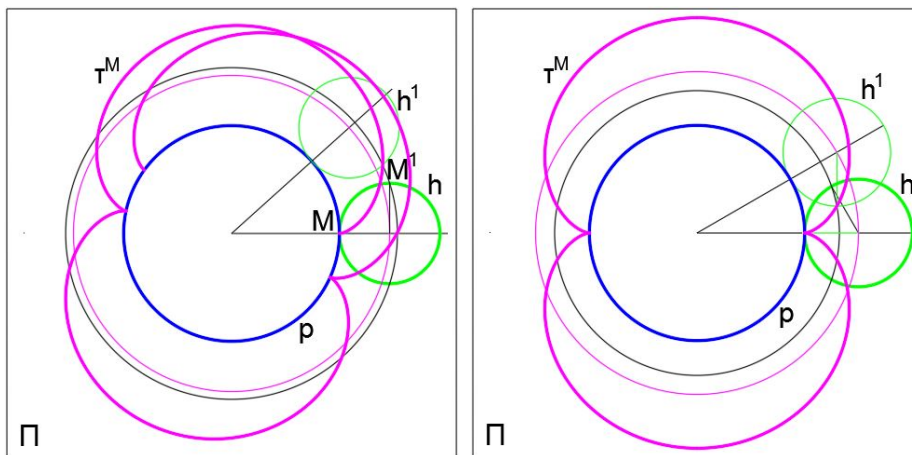


Obr. 2.36: Zadání epicykloidálního pohybu, trajektorie středu hybné polodie

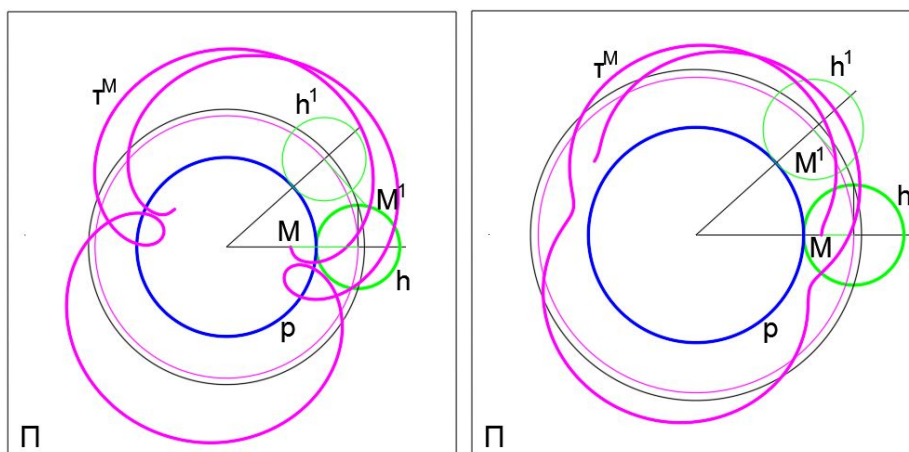
Syntetická konstrukce prosté epicykloidy: Sestrojíme pevnou a hybnou polodii – kružnice $p(O_p; r_p)$ a $h(O_h; r_h)$ s vnějším bodem dotyku H^0 . Na kružnici h pravidelně zvolíme dostatečný počet bodů $H^i, i = 1, 2, \dots$, které vymezují oblouky příslušné středovým úhlům určité velikosti. Jeden z těchto oblouků opakovaně navineme na kružnici p . Získáme tak body $P^i, i = 1, 2, \dots$. Dále zkonstruujeme kružnice $h^i(O^i; r_h)$, kde $O^i = \tau^{O_h} \cap O_p P^i$, a kružnice $k^i(O_p; r^i)$, kde $r^i = |O_p H^i|$. Body hledané prosté epicykloidy jsou průsečíky kružnic k^i, h^i . Uvažujeme pouze jeden z nich, a to s ohledem na skutečnost, že bod dotyku se po pevné polodii p pohybuje ve stejném smyslu, v jakém se kotálí hybná polodie h [13, str. 123].



Obr. 2.37: Syntetická konstrukce prosté epicykloidy



Obr. 2.38: Prostá epicykloida (vlevo) a nefroida (vpravo)

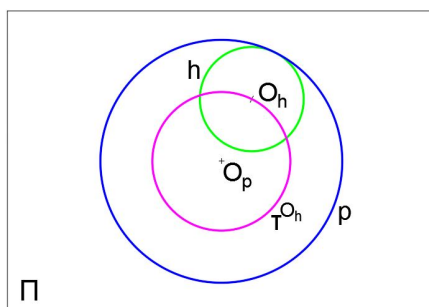


Obr. 2.39: Prodloužená epicykloida (vlevo) a zkrácená epicykloida (vpravo)

2.6.4 Hypocykloidální pohyb

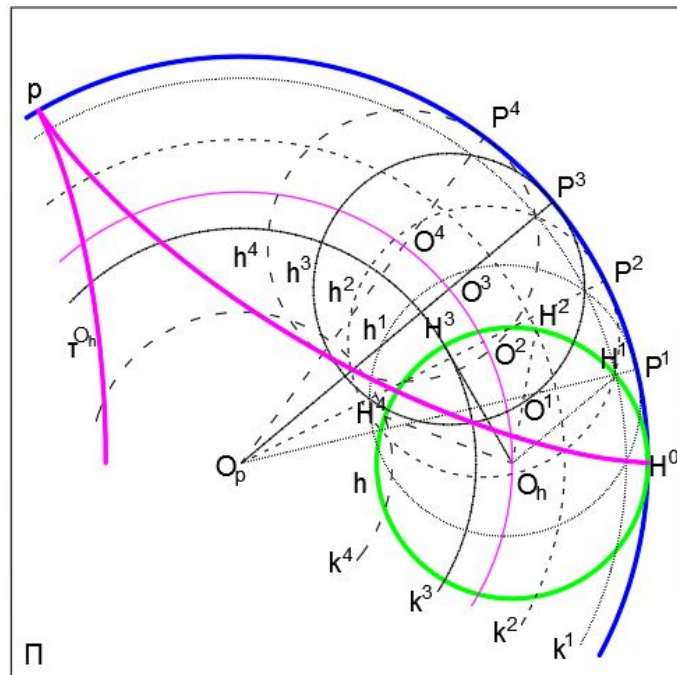
Mějme v rovině Π dány dvě kružnice $p(O_p; r_p)$ a $h(O_h; r_h)$ s vnitřním dotykem ($r_h < r_p$). Hypocykloidální pohyb vznikne valením vnějšího obvodu hybné polodie h po vnitřním obvodu pevné polodie p . Trajektoriemi jsou tzv. *hypocykloidy*. Bod hybné polodie h vytvoří tzv. *prostou hypocykloidu*. Libovolný vnější (vnitřní) bod kružnice h (a pevně s ní spjatý), opíše tzv. *prodlouženou (zkrácenou) hypocykloidu*. Trajektorií středu O_h polodie h je opět kružnice soustředná s pevnou polodií p .

I zde se můžeme setkat se speciálními křivkami. Pro $r_h : r_p = 1 : 3$ nazýváme prostou hypocykloidu *Steinerovou hypocykloidou*, též *deltoidou*, pro $r_h : r_p = 1 : 4$ se prostá hypocykloida nazývá *asteroida*. Platí-li $r_h : r_p = 1 : 2$, vznikne pohyb eliptický. Zkrácené a prodloužené hypocykloidy jsou v tomto případě elipsy, prostou hypocykloidou je úsečka (průměr pevné polodie p).

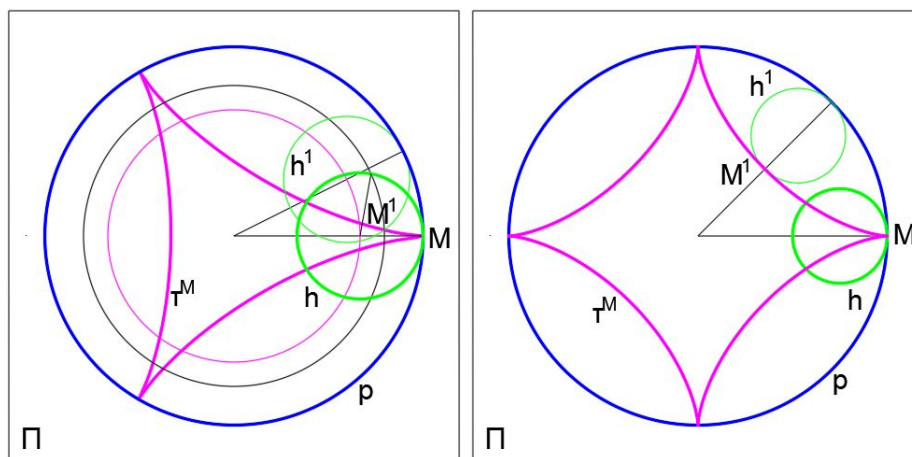


Obr. 2.40: Zadání hypocykloidálního pohybu, trajektorie středu hybné polodie

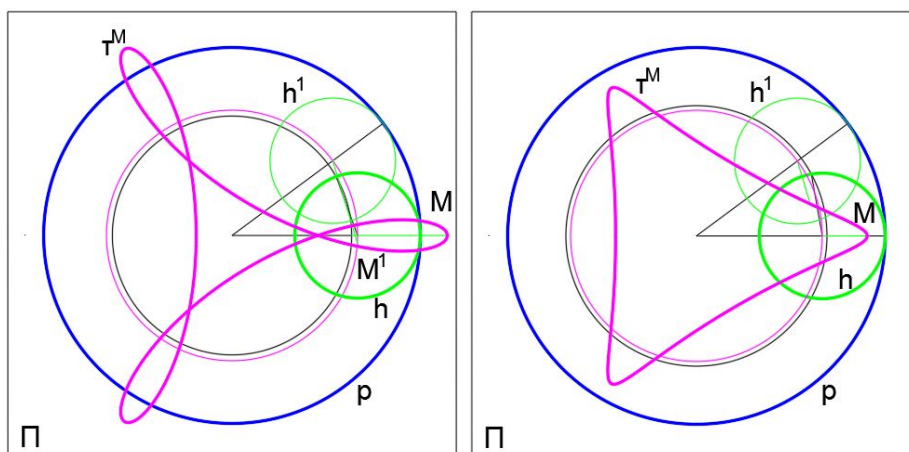
Syntetická konstrukce prosté hypocykloidy: Postupujeme analogicky jako při konstrukci prosté epicykloidy.



Obr. 2.41: Syntetická konstrukce prosté hypocykloidy



Obr. 2.42: Prostá hypocykloida – deltoida (*vlevo*) a asteroida (*vpravo*)

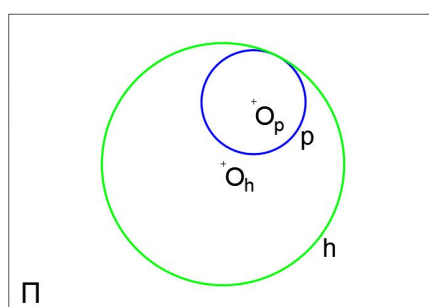


Obr. 2.43: Prodloužená hypocykloida (vlevo) a zkrácená hypocykloida (vpravo)

2.6.5 Pericykloidální pohyb

Jedná se o pohyb vratný k předchozímu. V rovině Π jsou tedy dány kružnice $p(O_p; r_p)$ a $h(O_h; r_h)$ s vnitřním dotykem (tentokrát $r_h > r_p$). Kotálení hybné polodie h po pevné polodii p zveve tedy pohybem pericykloidálním, trajektorie pak tzv. *pericykloidami*. I zde mohou vzniknout zkrácené, prosté a prodloužené pericykloidy (zkrácené, resp. prodloužené, pro vnitřní, resp. vnější, bod kružnice h). Lze dokázat, že každá pericykloida je epicykloidou a obráceně [12, str. 249].

Již víme (věta 2.2.2), že pro $r_h : r_p = 2 : 1$ se jedná o pohyb kardioidický.

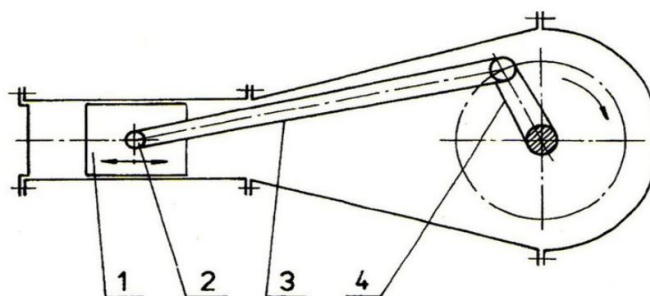


Obr. 2.44: Zadání pericykloidálního pohybu

3 Využití v praxi

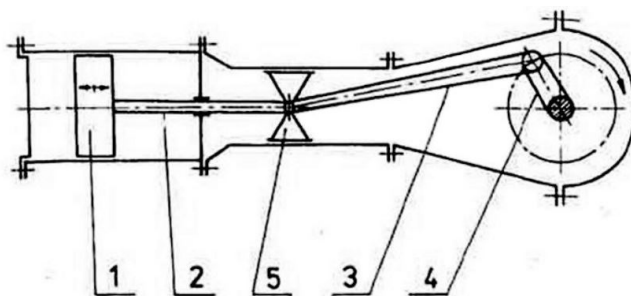
V této poslední kapitole zmíníme určité aplikace dříve uvedených kinematických rovinných pohybů, resp. jejich výskyt v praktickém životě.

Ojniční pohyb se vyskytuje u klikových mechanismů, což jsou technická zařízení, která nám umožňují převést rotační pohyb na přímočarý posuvný, příp. obráceně. Rozlišujeme úplné klikové mechanismy a zkrácené klikové mechanismy. Zkrácený klikový mechanismus se skládá z pístu (1), pístního čepu (2), který slouží ke spojení pístu a ojnice, ojnice (3) a kliky (4). Používá se tam, kde tlak pracovní látky působí pouze na jednu stranu pístu (tj. především při přeměně přímočarého pohybu na pohyb rotační), např. u pístových spalovacích motorů.



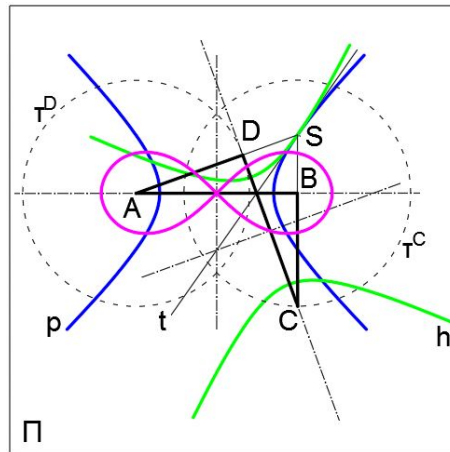
Obr. 3.1: Zkrácený klikový mechanismus [9, str. 209]

Úplný klikový mechanismus se naopak používá tam, kde tlak pracovní látky působí střídavě na obě strany pístu (tedy hlavně při převádění otáčivého pohybu na přímočarý posuvný pohyb), např. u pístových čerpadel a kompresorů. Je sestavován s kotoučovým pístem spojeným s pístní tyčí (2) a křížákem (5).



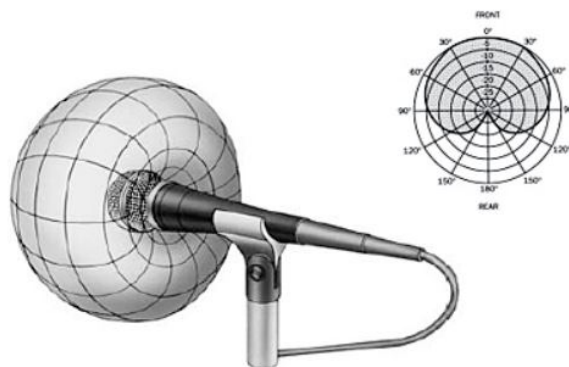
Obr. 3.2: Úplný klikový mechanismus [9, str. 209]

S hyperbolickým antiparalelogramem se můžeme setkat u lemniskátového mechanismu (na obr. 3.3 se střed hyperboly p pohybuje po křivce zvané lemniskáta). Ten je jednou z možností, jak přenést síly mezi rámem podvozku a skříní lokomotivy. Tento mechanismus byl použit např. u podvozku české lokomotivy Škoda 109E1 [3, str. 3].



Obr. 3.3: Lemniskátový mechanismus

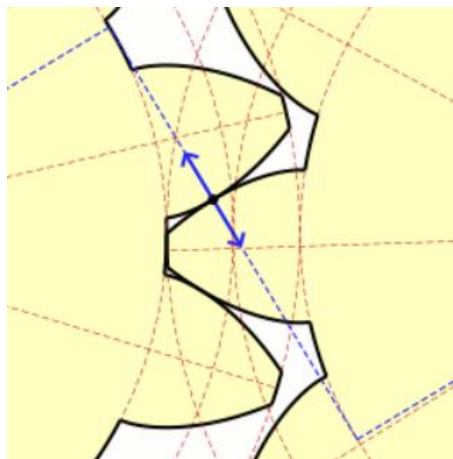
Zajímavou aplikaci kardioidického pohybu můžeme nalézt v akustice. Směrová charakteristika mikrofonu je závislost jeho citlivosti na úhlu, který svírá akustická osa mikrofonu s osou akustického zdroje [10]. Mikrofon s kardioidní charakteristikou zachycuje zvuk z oblasti přímo před sebou. Jde o typickou charakteristiku dynamických mikrofonů pro zpěváky, protože potlačuje zpětnou vazbu.



Obr. 3.4: Mikrofon s kardioidní charakteristikou [14]

Nikomedovu konchoidu, Dioklovu kisoиду a Archimedovu spirálu lze využít při řešení klasických problémů antické matematiky – trisekci úhlu, kvadratuře kruhu a zdvojení krychle. Postup trisekce úhlu pomocí Nikomedovy konchoidy lze nalézt např. v [2, str. 15]. K trisekci úhlu (a následně i ke kvadratuře kruhu) můžeme využít rovněž Archimedovu spirálu. Tu navíc uplatníme i při rektifikaci kružnice [8, str. 56]. Nikomedův postup při duplicitě krychle nalezneme např. v [5, str. 260-261]. Za účelem vyřešení zdvojení krychle byla rovněž zavedena Dioklova kisoída [5, str. 264].

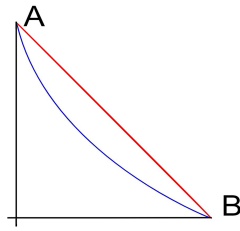
Cyklických pohybů se používá například pro různé druhy ozubených kol a soukolí, kde dochází k převádění rotačního pohybu na jiný pohyb rotační, příp. na posuvný, a naopak, což je hlavním principem převodovek a dalších podobných zařízení. Jako tvořící křivky zubů ozubených kol se využívají cykloidy a evolventy, které splňují podmínku, že jejich společná normála při valení je stále shodná s tečnou obou základních kružnic (kol) a tím zůstává zachován převodový směr. Profil boku zubu je tedy tvořen částí evolventy. Výhodou takového ozubení je menší opotřebení.



Obr. 3.5: Evolventní ozubení [11]

Evolventa kružnice se rovněž využívá při běžeckých závodech na oválném závodisti k rozmístění startovacích bloků.

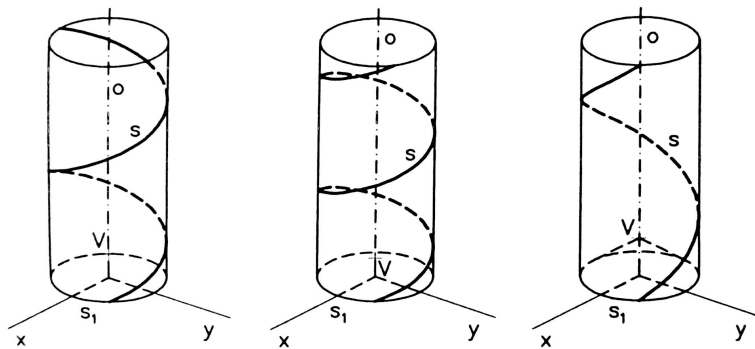
Další zajímavou aplikací cykloidálního pohybu je úloha o brachistochroně (křivce nejkratšího spádu), kdy hledáme křivku, po které se přemístí hmotný bod z jednoho bodu do druhého v homogenním gravitačním poli za nejkratší možný čas. Přišlo se na to, že hledanou křivkou je právě část prosté cykloidy.



Obr. 3.6: Brachistochrona [4]

S cykloidou se rovněž setkáváme v architektuře. Využívá se jí například při stavbě ramp na skateboarding a snowboarding, či při budování mostních oblouků [16, str. 132].

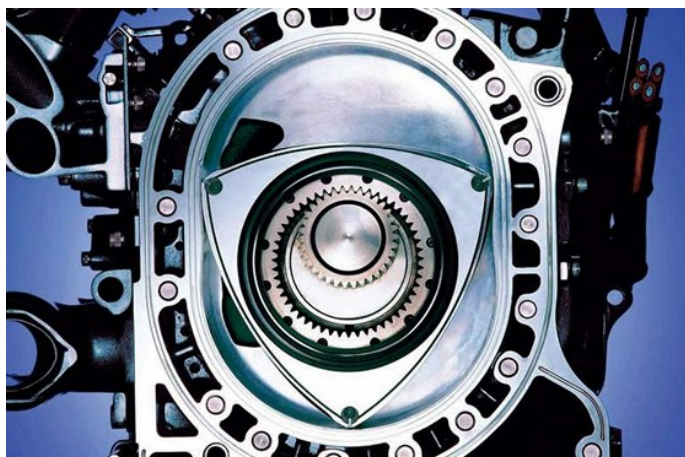
Důležitý význam má cykloida také v zobrazovacích metodách. V pravoúhlém promítání je průmětem šroubovice křivka odpovídající v osové afinitě cykloidě, jestliže osa o šroubovice svírá s průmětnou ostrý úhel [1, str. 133].



Obr. 3.7: Průměty pravotočivé šroubovice v pravoúhlé axonometrii [1, str. 136]

Prostá cykloida vzniká rovněž při jízdě cyklistického kola po silnici, sledujeme-li trajektorii libovolného bodu na obvodu pohybujícího se předního (nebo zadního) kola. Dráhou bodu, který je blíže k ose otáčení, je pak zkrácená cykloida. Pokud se kolo pohybuje po vnějším, resp. vnitřním povrchu válce podél jeho kruhového řezu (v reálu přes kopec, resp. údolím s profilem části kružnice), sledujeme epicykloidu, resp. hypocykloidu jakožto trajektorii bodu na obvodu otáčejícího se kola.

Pericykloidální pohyb pak můžeme najít ve Wankelově motoru, kde se valí velké ozubené kolo po menším.



Obr. 3.8: Wankelův rotační motor [15]

S cykloidami se také setkáváme v obkreslovací sadě, kterou jistě všichni znáte pod názvem *Inspiro*.



Obr. 3.9: Sada Inspiro. Foto autor

Závěr

Tato bakalářská práce se zabývá kinematickou geometrií v rovině a jejím využitím a výskytem v reálném životě.

V první kapitole, která vznikala převážně s využitím publikace [1], jsme zavedli základní pojmy a principy rovinné kinematické geometrie. Druhá a zároveň nejobsáhlejší kapitola studuje různé druhy pohybů a vznikající křivky. Je zde rovněž popsána syntetická konstrukce většiny křivek, což považujeme za velký přínos, neboť řada textů pojednávajících o této problematice je založena na moderních softwarech vykreslujících trajektorie bodů přímo ze zadaných prvků a čtenářům tak uniká samotný vznik jednotlivých křivek. Kapitola třetí je stručným přehledem aplikací jednotlivých pohybů a křivek v praxi.

Bakalářská práce je vhodná nejen pro vysokoškolské studenty oboru deskriptivní geometrie, ale může sloužit díky svému mezipředmětovému přesahu i jako motivace pro žáky středních škol ke studiu přírodovědných a technických oborů.

Pokračování práce by se mohlo věnovat kinematické geometrii v prostoru.

Seznam literatury

- [1] BORECKÁ, Květoslava, Ludmila CHVALINOVÁ, Mája LOVEČKOVÁ a Veronika ŠMÍDOVÁ-ROUŠAROVÁ. *Konstruktivní geometrie*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006.
- [2] BRIESKORN, Egbert a Horst KNÖRRER. *Plane Algebraic Curves*. Basel: Birkhäuser, 1981.
- [3] ČERVENKA, František a Dagmar DLOUHÁ. *Využití hyperboly a hyperboloidu v technické praxi*. [online] VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2017 [cit. 20.6.2020]. Dostupné z: ipmm.polsl.pl/?page_id=116
- [4] FARMER, Jan. *Brachistochrona*. [online]. [cit. 20.6.2020]. Dostupné z: sk.wikipedia.org/wiki/User:Farmer
- [5] HEATH, Sir Little Thomas. *A History of Greek Mathematics I. From Thales to Euclid*. New York: Dover Publications, 1981.
- [6] JUKLOVÁ, Lenka. *Základy kinematické geometrie v rovině*. [online]. [cit. 20.6.2020]. Dostupné z: kag.upol.cz/homepage_juklova/aplikace-dg-2/
- [7] KADERÁVEK, František, Josef KLÍMA a Josef KOUNOVSKÝ. *Deskriptivní geometrie I*. Praha: Nakladatelství ČAV, 1954.
- [8] LOMTATIDZE, Lenka. *Historický vývoj pojmu křivka*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006.
- [9] MIČKAL, Karel. *Strojnictví. Části strojů pro učební a studijní obory SOU a SOŠ*. Praha: Sobotáles, 1995.
- [10] REICHL, Jaroslav a Martin VŠETIČKA. *Směrová charakteristika mikrofónu*. [online]. [cit. 20.6.2020]. Dostupné z: fyzika.jreichl.com/main.article/view/378-zakladni-vlastnosti-mikrofonu
- [11] ROCCHINI, Claudio. *Involute gear*. [online]. [cit. 20.6.2020]. Dostupné z: en.wikipedia.org/wiki/User:Rocchini
- [12] URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie II*. Praha: SNTL, 1984.

- [13] ÚSTAV MATEMATIKY FSI VUT Brno. *Úvod do kinematické geometrie v rovině*. [online]. [cit. 20.6.2020]. Dostupné z: mathonline.fme.vutbr.cz/Prednaska/sc-1245-sr-1-a-261/default.aspx
- [14] VEAR, Tim. *Microphone Characteristics Vital To Know For Sound Reinforcement*. [online]. [cit. 20.6.2020]. Dostupné z: prosoundweb.com/microphone-characteristics-vital-to-know-for-sound-reinforcement/3/
- [15] VOKÁČ, Luděk. *Wankelův rotační motor. Jak to vlastně funguje?* [online]. [cit. 20.6.2020]. Dostupné z: idnes.cz/auto/zpravodajstvi/wankeluv-rotacni-motor-jak-to-vlastne-funguje.A080401_015114.ak_aktual_vok
- [16] VORÁČOVÁ, Šárka. *Atlas geometrie. Geometrie krásná a užitečná*. Praha: Academia, 2012.