UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Diplomová práce

Bc. Barbora Slezáková

Množiny bodů dané vlastnosti a jejich užití na 2. stupni ZŠ

Olomouc 2021 vedoucí práce: Mgr. David Nocar, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a uvedla veškerou použitou literaturu a zdroje.

V Olomouci dne Bc. Barbora Slezáková

Poděkování

Děkuji Mgr. Davidu Nocarovi, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a zkušenosti, kterými mě vedl a motivoval při zpracování diplomové práce.

Obsah

Úvod

Se studiem množin bodů dané vlastnosti se seznámíme na základní škole v tematickém okruhu Geometrie v rovině a prostoru. S množinami bodů dané vlastnosti se můžeme setkat v eukleidovském prostoru o různých dimenzích. V diplomové práci se zabývám problematikou v rovině a prostoru. Na základní škole se setkáme pouze s množinami bodů dané vlastnosti v rovině, proto jsou v této práci rozebírány více dopodrobna. Oproti množinám bodů dané vlastnosti v prostoru, které jsou spíše zajímavostí této práce.

Cílem diplomové práce je ucelených přehled informací a vlastností o jednotlivých typech množin bodů dané vlastnosti v rovině, které představím v teoretické části. V praktické části rozeberu na každý typ množin bodů dané vlastnosti čtyři příklady, se kterými se setkáme na základní škole.

Teoretickou část jsem rozdělila do šesti kapitol. První kapitola obsahuje pár slov o vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace, která je součásti Rámcového vzdělávacího program pro základní vzdělávání. Ve druhé kapitole píši o zakladateli geometrie, která je vyučována na základních školách, a o vlastnostech eukleidovské geometrie. Třetí kapitola obsahuje obecné informace o konstrukčních úlohách. Například jaké fáze obsahuje konstrukční úloha, podle jakých parametrů třídíme konstrukční úlohy či jaké můžeme použít metody k jejich řešení. Ve čtvrté kapitole definuji množiny bodů daných vlastností ve dvou rozměrném a trojrozměrném geometrické prostoru. Pátá kapitola pojímá podkapitoly, ve kterých se zabývám problematikou jednotlivých typů množin bodů dané vlastnosti. Jednotlivé množiny bodů daných vlastností rozebírám dopodrobna. V některých podkapitolách se můžeme setkat s informacemi, se kterými se na základní škole nesetkáme. Každá podkapitola obsahuje primárně množinu bodů dané vlastnosti a dále problematiku s ní spojenou. V poslední šesté teoretické kapitole je poukázáno na analogii množin bodů dané vlastnosti v rovině a prostoru.

Praktickou část klasifikuji do šesti podkapitol: osa úsečky, osa úhlu, osa pásu, kružnice, ekvidistanta a Thaletova kružnice. Jednotlivé podkapitoly chronologicky korespondují s teoretickou částí. U každého příkladu nalezneme zadání, rozbor, konstrukci, zkoušku a diskuzi. U rozboru z důvodu programového software vynechávám náčrtky. Konstrukce vždy obsahuje jak postup, tak obrázek řešení. Jednotlivé příklady rýsuji pomocí software Geogebra.

Většinu grafické stránky diplomové práce rýsuji opět pomocí programu Geogebra, který je zdarma dostupný pro každého ať už jako online či desktopová aplikace.

U části příkladů se inspiruji z učebnic a pracovních sešitů, podle kterých se vyučuje na základních školách.

1. Matematika a její aplikace

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je založena hlavně na práci s matematickými objekty a pro využití matematiky v reálném životě. Umožňuje získávat matematickou gramotnost díky poskytování vědomostí a dovedností v praktickém životě.

Tato oblast je na druhém stupni základních škol a nižšího stupně gymnázií rozdělena na čtyři tematické okruhy. Oblast obsahuje tematické okruhy Číslo a proměnná, Závislosti, vztahy a práce s daty, Geometrie v rovině a v prostoru a Nestandartní aplikační úlohy a problémy.

S množinami bodů daných vlastností se žáci na druhém stupni setkávají v předmětu zvaném Matematika. Konkrétněji podle Rámcového vzdělávacího programu Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy v tematickém okruhu Geometrie v rovině a prostoru.

V okruhu Geometrie v rovině a prostoru žáci znázorňují geometrické útvary. Hledají podobnosti a odlišnosti geometrických útvarů, které nás obklopují. Uvědomují si vzájemné polohy objektů v rovině, popřípadě prostoru. Porovnávají, odhadují a měří délky i velikosti úhlů. Řeší polohové a metrické úlohy a problémy, které pramení z běžného života kolem nás. V kurikulárním dokumentu Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV) se můžeme dočíst, že část učiva, které si žáci mají osvojit na druhém stupni jsou konstrukční úlohy. Konstrukční úlohy obsahují množiny všech bodů dané vlastnosti (osa úsečky, osa úhlu, Thaletova kružnice), osovou souměrnost a středovou souměrnost.

V souvislosti s množinami bodů dané vlastnosti se pojí pár očekávaných výstupů, které by si měli žáci po absolvování základního vzdělávání ukotvit.
Žák dokáže zdůvodnit a využít polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých problémů. Žák dokáže měřením a výpočtem určit velikost úhlu. Žák dokáže načrtnout a sestrojit rovinné útvary. Žák dokáže užít pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice útvaru a k řešení polohových či nepolohových konstrukčních úloh. Žák dokáže načrtnout a sestrojit obraz rovinného útvaru v osové i středové souměrnosti a také dokáže určit středově a osově souměrný útvar. (Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, 2016)

Po revizi RVP ZV, která proběhla v roce 2021. Zůstala část učiva množin bodů daných vlastností nedotčena.

2. Eukleidovské konstrukce

2.1. Eukleidés

Eukleidés z Alexandrie byl řecký matematik. Svůj život patrně prožil na přelomu čtvrtého a třetího století před naším letopočtem. Většinu života Eukleidés pobýval v Alexandrii a jeho působištěm byl Múseion. O jeho životě příliš nevíme. Existují dva typy autorů, kteří o Eukleidésovi píší dodatečné informace. První část autorů píše, že byl synem Naucrata a narodil se v Tyru. Druhá část autorů píše, že se Eukleidés narodil v Megare. (MacTutor History of Mathematics)

Mnoho jeho děl se nedochovalo. Jediné nejstarší ucelené informace pocházejí od Prokla[1]. Eukleidés sepsal a ucelil velké množství matematických výsledků svých předchůdců i současníků. Utřídil a oddělit definice od vět, upravil a doplnil důkazy tak, aby vznikla systematická teorie s ustálenou terminologií.

Eukleidés sepsal dílo Stoicheia (v překladu Základy), které obsahuje aritmetiku, teorii čísel, stereometrii, planimetrii i geometrickou algebru. V současné době se toto dílo řadí jako nejstarší dochovaný matematický text. Mezi další jeho spisy, které se dochovaly patří například Optika nebo Jevy. Jsou i díla, která se nedochovala, ale máme o nich zmínky od jiných osobností například Pseudaria (v překladu Mylné úsudky), Kuželosečky nebo Porismata. (Bečvářová, 2002)

Eukleidovy Základy bývají obvykle považovány za první pokus axiomatické výstavby geometrie. Dodává se, že tento pokus byl nedokonalý, ale oceňuje se jeho snaha. Je to způsobeno tím, že i když každý nový pojem definoval podle jeho základních definic. Tak právě ty jsou kamenem úrazu celé situace. Protože některé základní definice obsahují pojmy, které jsou též novými pojmy, ale nikde je nedefinoval. I přes tyto nedostatky byly Eukleidovy Základy přes stovky let vzorem pro tvorbu učebnic geometrie.

Eukleidésovo jméno se překládá do různých jazyků. Můžeme se proto setkat s pojmenováním Eukleidés, Euklidés anebo Euklid. Od těchto překladů jsou potom odvozovány i přídavná jména (např. eukleidésovy, euklidovy). V rámci zachování správnosti citačních náležitostí se mohou i v tomto díle vyskytnout různé překlady u jednotlivých informací.

[1] Proklos byl řecký filosof žijící v 5. století. Též vynikal jako gramatik a matematik. Byl jedním z představitelů novoplatonismu. (Rieger, Malý, 1867)

2.2. Eukleidovské konstrukce

Eukleidovské konstrukce můžeme také nazvat konstrukce pomocí pravítka a kružítka. V těchto konstrukcích jsou jasně stanovená pravidla a máme pouze dva základní nástroje, které můžeme používat. Těmito dvěma základními nástroji jsou pravítko a kružítko.

V Eukleidovských konstrukcích lze narýsovat kružítkem kružnici o libovolném poloměru. Kružítko tedy není omezeno žádným měřítkem. O pravítku se předpokládá totéž. Pravítko má jednu rovnou stranu a dá se s ním sestrojit úsečka o libovolné délce. Navíc má pravítko pouze jednu rovnou hranu a je zcela bez jakýkoliv značek. Eukleidés zformuloval pravidla pomocí, kterých dodnes konstruujeme jednotlivé objekty. Nazval je tzv. postuláty. (Vopěnka, 1989)

Eukleidés uvedl následující postuláty:

Postulát 1.: Vytvoř úsečku, která spojuje dva dané různé body.

K tomuto postulátu se dodává ještě následující zásada, jelikož z tohoto postulátu přímo neplyne, že taková úsečka může být jen jediná.

Zásada: Dvě samotné úsečky žádné místo neohraničují.

Postulát 2.: Danou úsečku na jedné i na druhé straně prodloužit tak daleko, jak potřebujeme (a pochopitelně v souladu s prvním principem zachycujícím Eukleidovo pojetí geometrie jen tak daleko, kam dohlédneme).

Postulát 3.: Vytvoř kruh o daném středu, na jehož obvodě leží daný bod (rozumí se různý od daného středu).

Eukleidés nejprve uvedl jen tyto tři postuláty, jelikož byly nedostačující, tak dodatečně zavedl čtvrtý postulát.

Postulát 4.: Postulát o rovnoběžkách. Nechť úsečka u protíná úsečky p, q tak, že na jedné straně úsečky u je součet vnitřních úhlů α, β, které svírají úsečky p, q s úsečkou u, menší než dva pravé úhly. Potom na této straně jest úsečky p, q prodloužit tak, aby se tato jejich prodloužení protla.

„Eukleidovskou konstrukcí rozumíme takovou konstrukci, jejíž jednotlivé kroky jsou prováděny výhradně jen podle tří shora uvedených postulátů.“ (Vopěnka, 1989, str. 43)
Poznámka: Eukleidovské konstrukce vznikají takzvaně samovolně různé body jako průsečíky vytvářených úseček a kružnic. (Vopěnka, 1989)

Za Eukleidovské konstrukce můžeme považovat takové konstrukce, ve kterých nás nezajímá pouze jak úlohu zkonstruovat, ale zda se úloha vůbec dá zkonstruovat. Ke zkonstruování objektu či celé úlohy máme pouze zidealizované kružítko a pravítko. Postup konstrukce musí splňovat přesné požadavky, které Eukleidés stanovil.

3. Konstrukční úlohy v geometrii

Konstrukční úlohy lze řešit několika metodami. S nejčastěji používanými metodami se seznámíme v sekci Metody řešení konstrukčních úloh. Z pohledu konstrukčních úloh se budeme zabývat pouze eukleidovskou konstrukcí. Pokud to tedy nebude někde specifikované, tak automaticky vycházíme z eukleidovské konstrukce.

3.1. Řešení konstrukčních úloh

Řešit konstrukci znamená sestrojit (zkonstruovat) geometrický útvar. Přesněji řečeno řešit konstrukční úlohu znamená, podle platných vět odvodit a doplnit dané prvky dalšími tak, abychom sestrojili určený tvar. Přitom používáme tzv. základní eukleidovské konstrukce, založené na sestrojování bodů, přímek a kružnic. Ke grafickému uskutečnění si vystačíme s pravítkem a kružítkem. (Šedivý, 2001)

Nejjednodušší a nejpřirozenější způsob řešení geometrické konstrukční úlohy je převést zadanou úlohu na úlohu, kterou již umíme řešit nebo jsme již někdy řešili. Od dané úlohy přecházíme k obměněné úloze, která je s ní rovnocenná. Anebo aspoň mají stejné souvislosti v řešení úlohy.

Řešení geometrické úlohy doprovázíme obrázkem, takzvaným náčrtkem. V náčrtku vyznačujeme důležité kroky, známé prvky a souvislosti, které směřují od nynějších prvků a souvislostí až k těm hledaným. Pokud jsme načrtnutým rozborem nalezli vhodnou cestu k řešení této úlohy, popíšeme provedení konstrukce. Dále musíme dokázat, že nalezené veličiny (souvislosti) jsou buď zcela anebo částečně řešeními naší úlohy. Důkaz nemusíme řešit, pokud jsme ke konstrukci jednotlivých kroků použili odpovídající elementární konstrukce, které důkaz nahrazují.

Ke zkonstruování geometrické úlohy používáme rýsovací náčiní. Rýsovací prostředky využíváme k rýsování předepsaným způsobem. Pokud nemáme nadefinováno jinak, používáme přímé pravítko a kružítko (též se můžeme setkat s názvem kružidlo). Řešení konstrukčních úloh tedy řešíme určitou posloupností základních konstrukcí, které se opírají o geometrické věty a axiomy. (Zelina, 1973).

„Přímé pravítko a kružidlo nám slouží k narýsování určitých čar, kterých pak používáme ke konstrukcím. Jsou to tzv. čáry základní; pro konstrukce zvané euklidovské jsou těmito základními čarami přímky a kružnice.

Příslušné úmluvy či základní věty (též konstrukční axiomy) pak znějí takto:

1. Přímku pokládáme za sestrojenou, jsou-li sestrojeny dva její body – axiom přímého pravítka.
2. Kružnici pokládáme za sestrojenou, je-li její střed sestrojený bod a je-li její poloměr dán dvěma sestrojenými body – axiom kružidla.
3. Bod pokládáme za sestrojený, je-li jím některý z výchozích bodů daných či zvolených, nebo je-li společným bodem dvou sestrojených (navzájem různých) základních čar – axiom průsečíku čar.

Vytvoříme-li obrazec kombinacemi výkonů 1.-3., říkáme, že byl sestrojen eukleidovskými konstrukcemi, krátce eukleidovsky. Ačkoliv jsou tyto konstrukce pro školskou geometrii nejdůležitější, neznamená to, že by to byl jediný druh možných konstrukcí.“ (Zelina, 1973, str. 274-275)

V teorii geometrických konstrukcích je snaha o použití co nejmenšího počtu konstrukčních pomůcek a dosažení co největšího okruhu řešení úloh. V praxi ale používáme různé druhy pravítek, například rovnoběžková pravítka nebo trojúhelníková pravítka a podobě. Rovnoběžkové pravítko má dvě rovnoběžné hrany, jejich vzdálenost známe. V eukleidovských konstrukcích může rovnoběžkové pravítko nahradit přímé pravítko a kružítko. Také můžeme vynechat přímé pravítko a ponechat jen kružítko. Co ale nelze je konstrukce pouhým přímým pravítkem. Pokus by šlo narýsovat nějaké řešení pouhým přímým pravítkem, tak by se určitě minimálně zmenšil okruh řešitelných úloh. (Zelina, 1973)

3.2. Fáze konstrukčních úloh

Nejpoužívanější způsob řešení konstrukčních úloh se skládá ze čtyř částí (fází). Jednotlivé části se chronologicky nazývají rozbor úlohy neboli analýza, konstrukce též také sestrojení. Zkouška či důkaz, občas se setkáme i s obecnějším názvem a tím je kontrola. A jako poslední fáze konstrukčních úloh je diskuze.

3.2.1. Rozbor

V rozboru zachycujeme všechna řešení úlohy a odvozujeme konstrukční předpis, kterým lze danými prostředky sestrojit zadanou úlohu (resp. hledaný obrazec). V jednoduchých úlohách se může zdát, že je rozbor nepotřebný, protože konstrukční předpis odhalíme a mohli bychom ho vynechat. Ve skutečnosti by se měl rozbor objevit i v jednoduchých úlohách, jelikož by řešení úlohy bylo neúplné. Pokud bychom opravdu chtěli rozbor vynechat, museli bychom dokázat, že nevynecháme žádné řešení.

V rozboru vždy předpokládáme, že konstrukční úloha má řešení. To dáváme najevo tím, že si načrtneme obrázek, ve kterém se snažíme úlohu vyřešit. Dodatečně můžeme zjistit, že tento předpoklad je nesprávný. Rozbor nás může zavést ke sporu s podmínkami úlohy nebo platnými matematickými axiomy či větami. (Vyšín a kol, 1965)

3.2.2. Konstrukce

V konstrukci stanovujeme přesný předpis. To znamená, že zhotovujeme posloupnost základních konstrukcí od zadaných prvků až k těm žádaným. Provádí se, jak matematickým zápisem postupu v chronologicky číslovaných bodech, tak grafickým provedením zadané úlohy. (Francová a kol, 1992)

3.2.3. Zkouška

Správnější název pro třetí fázi geometrické konstrukční úlohy je zkouška nežli důkaz. Protože ověřujeme správnost, zda prvky získané konstrukcí splňují všechny požadavky, které máme v zadání úlohy. Útvary nebo body, které je nemají musíme vyloučit.

V případě provedení grafické konstrukce (což požadujeme) je tak provedena i důležitá část zkoušky. Můžeme tedy i grafické provedení považovat za zkoušku, ale musíme k ní napsat doplňující větu, například „Takto sestrojený útvar vyhovuje všem podmínkám zadání a žádný jiný útvar jim nevyhovuje."

Další součástí zkoušky je zdůvodnění počtu řešení, to se ale řeší jen u neparametrických úloh. (Bartoňová, Květoň, 2007)

3.2.4. Diskuze

Diskuze má smysl, pokud řešíme konstrukční úlohy, ve kterých se vyskytují proměnné prvky (parametry). Konstrukční úlohy s parametry se klasifikují podle různých znaků, nejčastěji to je podle počtu různých výsledků. V diskuzi tedy řešíme, zda má úloha jedno, dvě či více řešení, naopak úloha může být i neřešitelná. Dále řešíme, za jakých (nutných a postačujících) podmínek pro parametry je konstrukční úloha řešitelná či neřešitelná a za jakých podmínek má více řešení.

„Počet řešení (výsledků) polohové konstrukční úlohy je roven počtu všech různých útvarů, které mají požadované vlastnosti. Rozbor zajišťuje, že nalezená konstrukce povede k jejich sestrojení, zkouška vytřídí útvary sestrojené konstrukcí, které nemají požadované vlastnosti.

Počet řešení nepolohové konstrukční úlohy je roven počtu všech tříd navzájem shodných útvarů, které mají požadované vlastnosti. Neúplné a nepřesné formulace konstrukčních úloh vedou k řadě nedorozumění v otázkách, kolik má úloha řešení.“ (Sedláček, 1981, str. 80)

3.3. Klasifikace konstrukčních úloh

Konstrukční úlohy dělíme do kategorií podle různých parametrů. V této podkapitole si představíme tři nejčastější klasifikace konstrukční úloh.

3.3.1. Konstrukční úlohy podle určení rozmístění prvků

Polohové úlohy

Úlohy, ve kterých máme přesně definovanou polohu daných prvků (bodů, úhlů, přímek atd.). U řešení polohových konstrukčních úloh hledáme jeden nebo více neznámých prvků konstruovaného geometrického útvaru. Podle počtu prvků, které neznáme dále rozlišujeme polohové konstrukční úlohy s jedním či více neznámými body.

Nepolohové úlohy

Úlohy, ve kterých si můžeme aspoň u jednoho z daných prvků zvolit polohu libovolně. Nepolohové úlohy můžeme vždy převést na úlohy polohové tím, že umístíme nějaký z daných prvků. (Šedivý, 2001)

Pokud budeme převádět nepolohovou úlohu na polohovou konstrukční úlohu. Musíme brát v potaz fakt, že můžeme sestrojit polohovou úlohu, ke které nenalezneme řešení.

Postup při řešení nepolohových konstrukčních úloh:

1. Zvolíme umístění libovolného prvku (úsečka, úhel, pás apod.), který splňuje alespoň jednu z požadovaných nepolohových vlastností útvaru. Tím docílíme polohové konstrukční úlohy.
2. Pokusíme se vyřešit polohovou konstrukční úlohu.
3. Pomocí úvahy o shodnosti útvarů, které jsou výsledky polohové úlohy, určíme počet tříd navzájem shodných útvarů, které mají požadované nepolohové vlastnosti. Určíme tedy počet řešení dané nepolohové úlohy. (Odvárko, 1990)

3.3.2. Konstrukční úlohy podle počtu neznámých bodů

Jak je již zmíněno výše, toto rozdělení lze klasifikovat pouze u polohových konstrukčních úloh.

Konstrukční úlohy s jedním neznámým bodem

Nejjednodušší úlohy budou obsahovat pouze jeden neznámý bod. Například to může být vrchol od hledaného trojúhelníku nebo střed nějaké hledané kružnice. Nejčastěji takovéto úlohy řešíme pomocí množin bodů dané vlastnosti.

Konstrukční úlohy s více neznámými body

Pokud máme vyřešit úlohu, ve které se vyskytuje více než jeden neznámý bod, zařazujeme tuto konstrukční úlohu mezi konstrukční úlohy s více neznámými body. Při těchto konstrukčních úlohách se snažíme postupně eliminovat počet neznámých bodů tak, abychom nakonec řešili konstrukční úlohu s jedním neznámým bodem.

3.3.3. Konstrukční úlohy podle počtu parametrů

Konstrukční úlohy s parametry

Obsahuje-li konstrukční úloha nějaké parametry, znamená to, že jsou v konstrukční úloze nějaké proměnné prvky. Řešíme-li úlohu, ve které jsou proměnné prvky, řešíme celou množinu úloh. V diskuzi pak tuto množinu rozebíráme z pohledu neřešitelnosti a řešitelnosti úlohy. V případě řešitelnosti určujeme počet řešení. Pro lepší přehlednost můžeme do diskuze uvést tabulku, ve které shrneme řešitelnost. Velice důležité je určení podmínek řešitelnosti. (Pomykalová, 2000)

Konstrukční úlohy bez parametrů

Konstrukční úloha, která neobsahuje žádné proměnné prvky. Pokud úloha nemá žádný parametr, pak v diskuzi řešíme pouze počet řešení.

3.4. Metody řešení konstrukčních úloh

Konstrukční úlohy nejčastěji řešíme pomocí metody množin bodů dané vlastnosti, metody geometrického zobrazení, algebraickou metodou, kombinací algebraické a geometrické metody a metodou souřadnic.

3.4.1. Konstrukce metodou množin bodů dané vlastnosti

U konstrukčních úloh řešených metodou množin bodů dané vlastnosti stanovíme dvě nutné podmínky pro každý hledaný bod, které musí splňovat. Dále určíme dvě množiny všech bodů, které splňují po řadě první a druhou podmínku. Bod, který hledáme, musí nutně náležet do první i do druhé množiny. Všechny body patřící do tohoto průniku množin sestrojíme pomocí základních eukleidovských konstrukcí.

3.4.2. Konstrukce metodou geometrického zobrazení

Jsou dva způsoby, jak můžeme u řešení konstrukčních úloh použít metodu geometrického zobrazení v rovině.

1) Geometrické zobrazení aplikujeme pouze na část geometrických útvarů, které se vyskytují v náčrtku rozboru. Můžeme v něm totiž nalézt vztahy mezi zadanými útvary a hledanými, na které bychom jinak nemuseli přijít.
2) Geometrického zobrazení použijeme na celou geometrickou situaci představovanou náčrtkem v rozboru zadané úlohy. Při této variantě metody geometrického zobrazení neaplikujeme shodnosti, protože bychom sestrojili shodný útvar a dostali tudíž stejnou geometrickou situaci. Z geometrických zobrazení můžeme například využít podobnost.

3.4.3. Konstrukce algebraickou metodou

Řešení konstrukčních úloh pomocí algebraické metody je založené na sestrojování úseček. Délky těchto úseček jsou vyjadřovány algebraickými výrazy.

Mezi jednodušší úlohy řešené algebraickou metodou řadíme nepolohové konstrukční úlohy, kde například musíme sestrojit úsečku. Délka této úsečky má předepsaný algebraický výraz. Na druhou stranu mezi složitější řešení konstrukčních úloh touto metodou řadíme úlohy, ve kterých nemáme přímo zadanou délku úsečky algebraickým výrazem. Proto též můžeme slyšet o řešení konstrukční úlohy na základě výpočtu. Algebraické výrazy jsou řešením rovnic, které vyjadřují různé souvislosti mezi danými a hledanými útvary. (Polák, 1995)

3.4.4. Konstrukce algebraicko-geometrickou metodou

Řešení zadané úlohy algebraicko-geometrickou metodou využíváme kombinaci konstrukcí a výpočtů daných prvků k prvkům hledaným.

3.4.5. Konstrukce metodou souřadnic

Řešení konstrukční úlohy metodou souřadnic neboli metodou využívající analytickou geometrii. Princip této metody je shodný s metodou množin bodů dané vlastnosti, akorát dané útvary či vlastnosti hledaných útvarů popisujeme rovnicemi a nerovnicemi mezi souřadnicemi (tj. analyticky). Výsledkem metody souřadnic je analytické vyjádření hledaného útvaru. (Tlustý, Huclová, 2019)

4. Množiny bodů dané vlastnosti

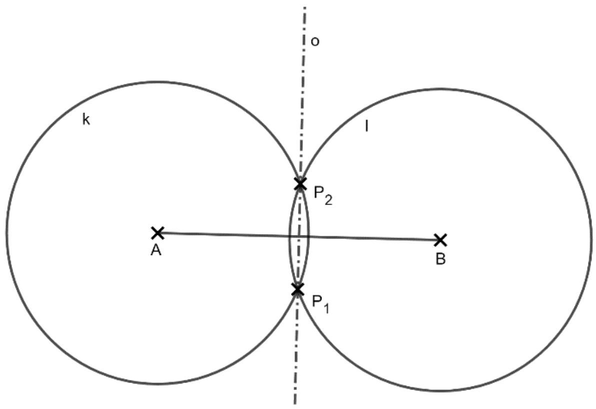
Množiny bodů dané vlastnosti můžeme řešit jak v rovině, tak v prostoru. Dále budeme používat zkratku MBDV. V této kapitole si definujeme množiny bodů dané vlastnosti v rovině i v prostoru. Vzhledem k tomu, že s MBDV v prostoru se nesetkáme na základní škole, tak o těchto množinách se dozvíme základní informace v této kapitole. Ale více s nimi již pracovat nebudeme. Množinám bodů dané vlastnosti v rovině věnujeme celou další kapitolu, jelikož tato metoda se vyskytuje na základní škole.

Můžeme se setkat s pojmy „množiny bodů dané vlastnosti“ anebo s „množiny všech bodů dané vlastnosti“. Ve většině případů se potkáme s názvem množina bodů dané vlastnosti, ale definice odpovídá množině všech bodů dané vlastnosti. Můžeme říci, že množina bodů dané vlastnosti je podmnožinou množiny všech bodů dané vlastnosti. Pokud bychom jsme tuto informaci chtěli ukázat na definici MBDV, tak by to vypadalo následovně.

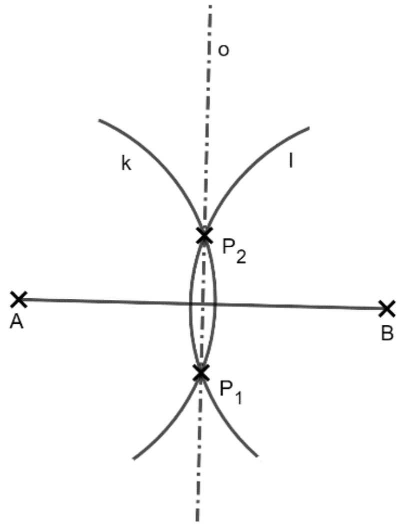
U definice množiny bodů dané vlastnosti stačí definovat pouze, že množinou bodů dané vlastnosti rozumíme takový geometrický útvar, jehož body splňují následující podmínku. Každý bod útvaru má danou vlastnost.

Pokud chceme definovat množinu všech bodů dané vlastnosti, tak musíme ještě navíc přidat opačnou podmínku. Každý bod, který má danou vlastnost, je bodem útvaru. Tyto dva pojmy jsou často používány nesprávně.

V Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání se píše o množinách všech bodů dané vlastnosti, ale když žáci sestrojují jednotlivé příklady, tak sestrojují pouze množiny bodů dané vlastnosti. Můžeme si to přiblížit na následujícím příkladu. Pokud žák konstruuje například osu úsečky, tak ve většině případů sestrojí jen část množiny bodů, která má od daných dvou bodů určitou vzdálenost. Zkonstruuje jen tu část, ve které se obě kružnice protínají, ale nedorýsuje již celé kružnice. Čili narýsuje jen část kružnic, tedy množin bodů dané vlastnosti. Místo toho, aby narýsoval množinu všech bodů dané vlastnosti, tedy celé kružnice.



Obrázek 1: Množina všech bodů dané vlastnosti



Obrázek 2: Množina bodů dané vlastnosti

Pár nesrovnalostí nalezneme i u definic jednotlivých množin bodů. Například u osy úsečky nebo osy úhlu, ale tyto záležitosti rozebereme až přímo u konkrétních definic.

4.1. Množina bodů dané vlastnosti v rovině

V této podkapitole se blíže seznámíme s množinou bodů dané vlastnosti v rovině (dvojrozměrném prostoru), proto si nejprve rovinu definujeme.

Definice:

Geometrický prostor, který má dva rozměry, nazýváme dvojrozměrným geometrickým prostorem nebo dvojrozměrným eukleidovským prostorem též můžeme použít jen název rovina.

Věta 1:

Patří-li dva body rovině, potom i přímka jimi určená patří této rovině.

Symbolicky: Je-li $A \in \rho$ a $B \in \rho$, pak $\overleftrightarrow{AB} \subset \rho$. (Jelínek, 1976)

Způsoby určení dvojrozměrného prostoru:

1) dvěma přímkami p, q, které se neprotínají
2) přímkou p a bodem X, který na ní neleží
3) třemi různými body A, B, C, které neleží na jedné přímce

Obor, který se zabývá rovinou nazýváme planimetrie. (Nedvěd. 2019)

Definice:

Množina M všech bodů dané vlastnosti V v rovině ρ je množina (rovinný geometrický útvar) $M \subset \rho$ splňující tyto dvě podmínky:

1. Každý bod množiny M má danou vlastnost V.
2. Každý bod roviny ρ, který má danou vlastnost V, patří do množiny M. (Neboli: Každá bod množiny ρ, který do množiny M nepatří, nemá danou vlastnost V.)

Nejvyužívanější množiny bodů dané vlastnosti v rovině jsou osa úsečky, osa úhlu, osa pásu, osy dvou různoběžek, osa dvou rovnoběžek, ekvidistanta, kružnice a Thaletova kružnice.

4.2. Množina bodů dané vlastnosti v prostoru

V této podkapitole se seznámíme s množinami bodů dané vlastnosti v prostoru. Opět si nejprve nadefinujeme prostor a poté uvedeme vybrané množiny bodů dané vlastnosti v prostoru.

Definice:

Geometrický prostor, který má tři rozměry (šířku, výšku a hloubku), nazýváme trojrozměrným geometrickým prostorem nebo trojrozměrným Eukleidovským prostorem či také jen prostorem.

Věta 1:

Množina bodů v prostoru je konvexní, jestliže každá úsečka spojující dva body množiny patří k této množině. (Jelínek, 1976)

Trojrozměrný geometrický prostor je nekonečný, nemá žádný hraniční bod. Obor, který se zabývá prostorem se nazývá stereometrie.

Definice:

Množina M všech bodů dané vlastnosti V v prostoru Π je množina $M \subset \Pi$ (prostorový geometrický útvar) splňující obdobné dvě podmínky jako v rovině ρ, avšak v prostoru Π.

Vybrané množiny bodů dané vlastnosti v prostoru:

Definice 1:

Množiny všech bodů, které mají od daného bodu A danou vzdálenost r, je kulová plocha o středu A a poloměru r; tato kulová plocha je rovněž množinou všech středů kulových ploch, které mají daný poloměr r a procházejí daným bodem A.

Definice 2:

Množiny všech bodů, které mají od dané přímky p danou vzdálenost r, je rotační válcová plocha o poloměru r, jejíž osou je přímka p tato válcová plocha je rovněž množina všech středů kulových ploch, které mají daný poloměr r a dotýkají se dané přímky p.

Definice 3:

Množiny všech bodů, které mají od dané roviny ρ danou vzdálenost r, jsou dvě roviny rovnoběžné s rovinou ρ ve vzdálenosti r; tyto roviny jsou rovněž množiny bodů všech středů kulových ploch, které mají daný poloměr r a dotýkají se dané roviny ρ.

Definice 4:

Množiny všech bodů stejně vzdálených od dvou daných bodů A, B je rovina souměrnosti úsečky AB. Tato rovina je rovněž množina všech středů kulových ploch, které prohází danými dvěma body A, B.

Definice 5:

Množiny všech bodů stejně vzdálených od dvou daných rovnoběžných rovin je rovina souměrnosti těchto rovin. Je rovněž množina všech středů kulových ploch, které se daných rovnoběžných rovin dotýkají.

Definice 6:

Množina všech bodů stejně vzdálených od dvou daných různoběžných rovin jsou roviny souměrnosti daných rovin. Tyto roviny jsou s výjimkou své průsečnice rovněž množiny všech středů kulových ploch, které se obou daných rovin dotýkají.

Definice 7:

Množiny všech přímek, které procházejí daným bodem V a mají od dané roviny ρ danou odchylku α, je rotační kuželová plocha, která má vrchol V, osu kolmou k rovině ρ a úhel osového řezu při vrcholu V má velikost $180° - 2\alpha$.

Definice 8:

Množiny všech středů kulových ploch, které se dotýkají dané přímky t v daném jejím bodě T, je rovina, která prochází bodem T a je kolmá k přímce t; bod T do ní nepatří.

Definice 9:

Množina všech středů kulových ploch, které se dotýkají dané roviny ρ v daném jejím bodě T, je přímka kolmá k rovině ρ a procházející bodem T; bod T do ní nepatří.

Definice 10:

Množina všech středů kulových ploch, které se dotýkají vně nebo uvnitř dané kulové plochy o středu S v daném jejím bodě T, je přímka ST; body S a T do ní nepatří.

Definice 11:

Množina všech středů kulových ploch, které mají daný poloměr ρ a dotýkají se dané kulové plochy o poloměru r vně (resp. uvnitř), je kulová plocha s danou soustředná a mající poloměr $r_1 = r + \rho \ (resp. r_2 = |r - \rho|)$. (Polák, 1995)

5. Typy množin bodů dané vlastnosti v rovině

5.1. Osa úsečky

Nejčastěji se setkáváme s následující definicí:

Množina všech bodů v rovině, které mají od dvou daných bodů stejnou vzdálenost, je osa úsečky spojující dané body.

Jednoznačnější je následující definice:

Množina všech středů kružnic v rovině, které procházejí dvěma danými body, je osa úsečky spojující dané středy.

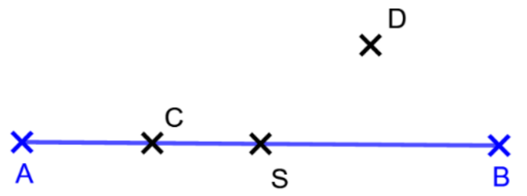
5.1.1. Úsečka

Úsečka se skládá ze dvou krajních bodů a „přímou“ cestou mezi nimi. Přímá cesta je taková cesta, kterou můžeme narýsovat pravítkem. Mezi krajními body může ležet na úsečce nekonečně mnoho vnitřních bodů. Z toho vyplývá, že úsečka je nekonečná množina bodů, ale sama je ohraničená.

Na obrázku vidíme úsečku AB. Bod C, který leží na úsečce AB, symbolicky zapsáno $C \in AB$. Bod D, který neleží na úsečce AB, symbolicky zapsáno $D \notin AB$.

Vzhledem k tomu, že úsečka je množina bodů, tak můžeme použít i množinové symboliky. Například úsečka AC je podmnožinou úsečky AB, tedy $AC \subset AB$. Nebo úsečka AB se rovná sjednocení úseček AC a CB, $AC \cup CB = AB$. Naopak úsečka AB je podmnožinou přímky AB, symbolicky: $AB \subset \overleftrightarrow{AB}$. (Jelínek, 1976)

Úsečku můžeme značit buď krajními body úseček AB (v našem případě) anebo malým písmenem například a. Velikost úsečky značíme dvěma svislými čarami $|AB|$. Poslední informaci, kterou jsme si k úsečce ještě neřekli je střed úsečky. Značí se S a dělí úsečku na dvě stejně velké části úsečky, $|AS| = |SB|$, $S = \frac{|AB|}{2}$.



Obrázek 3: Úsečka AB

5.1.2. Osa úsečky

Osu úsečky rýsujeme čerchovanou čárou. Je to kolmá přímka na samotnou úsečku. Osa úsečky prochází středem úsečky. Každý bod, který leží na ose úsečky má stejnou vzdálenost k oběma krajním bodům úsečky.

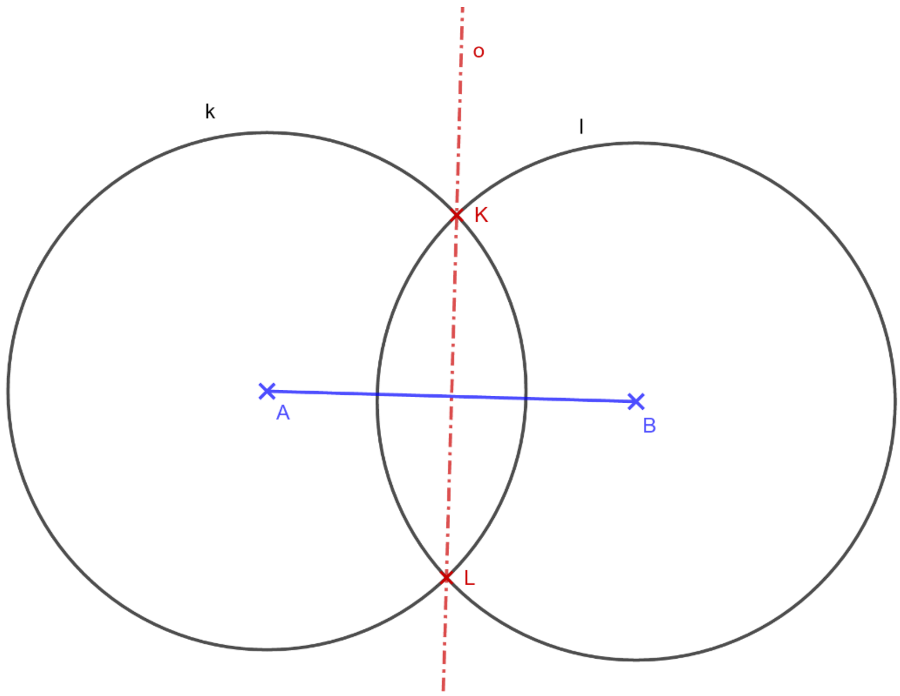
Věta:

Pokud je bod H libovolným bodem roviny, pak má osa úsečky o tyto vlastnosti:

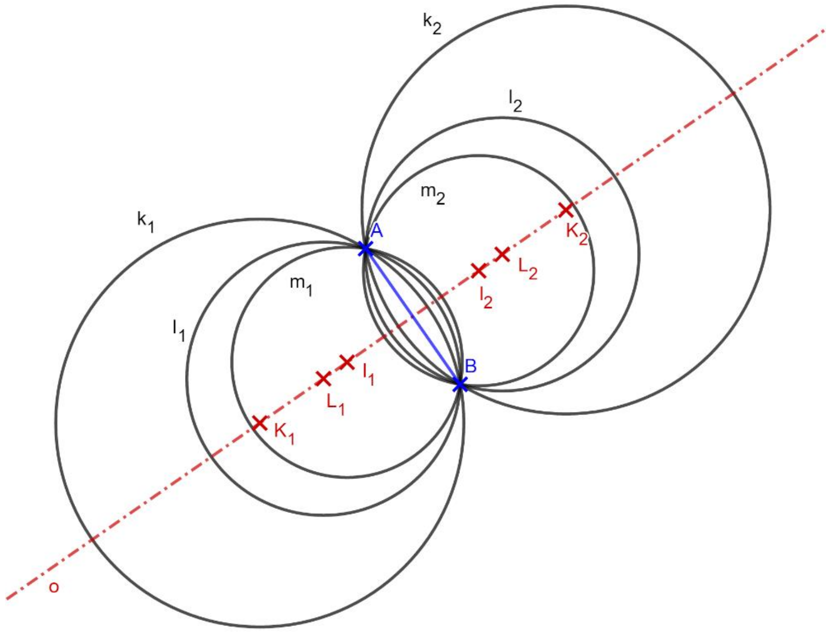
1. je-li $|AX| = |XB|$, pak $X \in o$
2. je-li $X \in o$, pak $AX = XB$ (Urban, 1982)

Konstrukce osy úsečky:

1. Sestrojíme úsečku AB.
2. Z obou krajních bodů úsečky narýsuje kružnice
   a. $k, k(A, \frac{|AB|}{2} < r < |AB|)$
   b. $l, l(B, \frac{|AB|}{2} < r < |AB|)$.
3. V místech, kde se kružnice protnou sestrojíme body K a L.
4. Bod K a bod L spojíme čerchovanou čárou, označíme ji o.
5. Přímka o je osa úsečky AB.

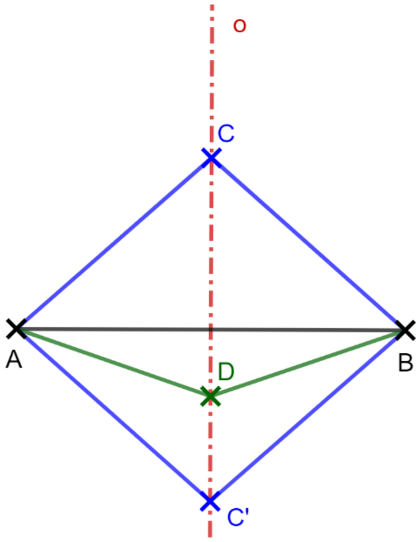


Obrázek 4: Množina bodů - osa úsečky



Obrázek 5: Množina středů kružnic – osa úsečky

Nejběžnější definice osy úsečky, která je popisována pomocí množiny všech bodů, pro kterou platí, že mají od dvou daných bodů stejnou vzdálenost není zcela jednoznačná. Dva různé body totiž tento požadavek nesplňují. Uvědomíme si znění této definice a ukážeme si ho pro názornost na následujícím obrázku.



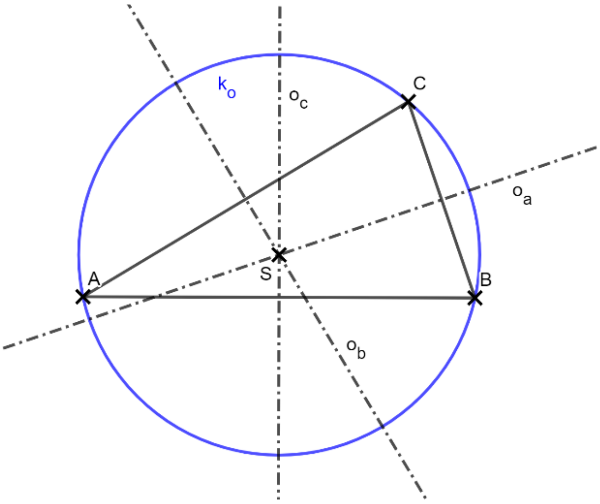
Obrázek 6: Množina bodů - osa úsečky (doplnění definice)

Vidíme, že body C a D nemají od dvou daných bodů stejnou vzdálenost. Vzdálenost bodu C od bodů A a B je větší než vzdálenost bodu D od bodů A, B. Stejnou vzdálenost od dvou daných bodů vždy splňují pouze dva body. Na obrázku jimi jsou body C a C' (vzor a jeho obraz).

Osa úsečky definovaná pomocí množiny všech středů kružnic dané vlastnosti je v tomto případě jednoznačnější.

5.1.3. Kružnice opsaná

Kružnicí opsanou nazveme takovou kružnici, která prochází všemi vrcholy daného trojúhelníku. Střed kružnice opsané leží na průsečíku jednotlivých os stran trojúhelníku. Můžeme také říci, že střed kružnice opsané leží na průsečíku os všech tětiv dané kružnice. Protože osa každé tětivy prochází středem kružnice. A jednotlivé strany trojúhelníku můžeme považovat za tětivy kružnice trojúhelníku opsané.



Obrázek 7: Kružnice opsaná

5.1.4. Osová souměrnost

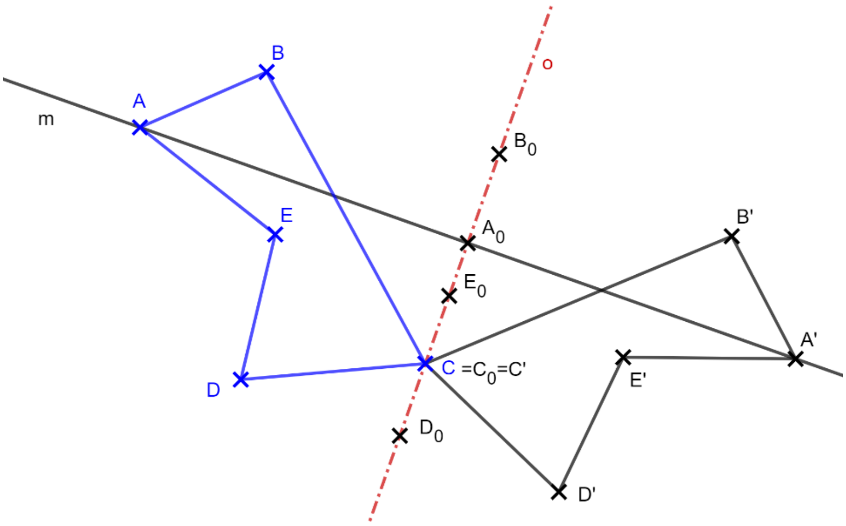
Definice:

Mějme danou přímku o. Osová souměrnost s osou o je shodné zobrazení $O(o)$, které přiřazuje:

1. každému bodu $X \notin o$ bod X' tak, že přímka XX' je kolmá k přímce o a střed úsečky XX' leží na přímce o
2. každému bodu $Y \in o$ bod $Y' = Y$. (Bartoňová, 2007)

Konstrukce:

1. Bodem A sestrojíme kolmici m k přímce o.
2. Průsečík přímek o a m označíme jako bod A_0.
3. Na přímce m sestrojíme bod A' tak, že bod A_0 bude střed úsečky AA'.
   Poznámka: je jedno zda bod sestrojíme pravítkem nebo kružítkem.
4. Tímto způsobem přeneseme přes osu o všechny body.



Obrázek 8: Osová souměrnost

Bod A se nazývá vzor. Bod A' je obraz k bodu A. Bod A_0 leží na ose o a je středem úsečky AA'. Bod E nazýváme samodružným bodem. Samodružný bod je bod, který je sám sobě vzorem i obrazem čili vzor a obraz splývají. Každý bod na ose souměrnosti o je samodružný. Například B a B' jsou souměrně sdružené body podle osy souměrnosti o.

Útvar $ABCDE$ a útvar $A'B'C'D'E'$ jsou souměrně sdružené podle osy souměrnosti o. Každý geometrický útvar a jeho obraz jsou v osové souměrnosti shodné. Osově souměrný útvar můžeme rozdělit osou souměrnosti o na dvě shodné části. Pro tyto dvě části platí, že pokud překlopíme jednu část útvaru podle osy o, bude se krýt s druhou částí útvaru. (Odvárko, Kadleček. 2011)

5.2. Osa úhlu

Nejčastěji se setkáváme s následující definicí:

Množina všech bodů v rovině, které mají od dvou daných různoběžek stejnou vzdálenost, jsou osy úhlů sevřených danými různoběžkami.

Jednoznačnější je následující definice:

Množina všech středů kružnic v rovině, které se dotýkají zároveň dvou daných různoběžek, jsou osy úhlů sevřených danými různoběžkami.

5.2.1. Úhel

Uvedeme si dvě definice úhlu. První definice úhel definuje pomocí polopřímek a druhá úhel definuje pomocí polorovin. U vyslovení druhé definice si můžeme všimnout toho, že definice sice vyhovuje množinovému pojetí, ale nezahrnuje nic o nekonvexním úhlu. Tedy lépe řečeno, definuje nám jen úhel konvexní.

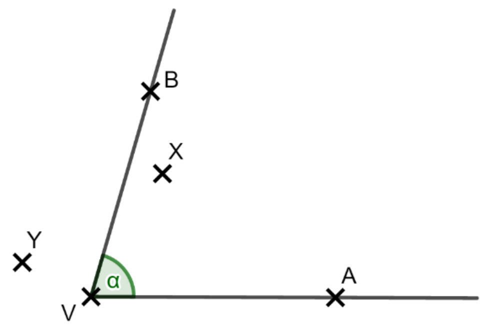
V této sekci zmiňujeme pojem konvexnost v rovině, proto si ji nejprve nadefinujeme a až poté vyslovíme další definice.

Definice:

Množina bodů se nazývá konvexní, jestliže pro každé dva její body X, Y platí, že úsečka XY je její podmnožinou. Prázdnou množinu a jednobodové množiny považujeme také za konvexní.

Definice:

Úhel je část roviny omezená dvěma polopřímkami se společným počátkem.



Obrázek 9: Úhel

Na obrázku vidíme dvě polopřímky AV a BV, které mají společný počátek v bodě V. Bod V se nazývá vrchol úhlu AVB. Polopřímka AV a polopřímka BV se nazývají ramena příslušného úhlu. Úhel AVB značíme $\measuredangle AVB$. Vrchol se nachází při značení vždy uprostřed. Body X, A, B, V patří úhlu AVB, symbolický zápis vypadá takto $X \in \measuredangle AVB$. Jakýkoliv bod úhlu, který nenáleží některému z ramen, nazýváme vnitřním bodem daného úhlu. Množina všech vnitřních bodů tvoří vnitřek úhlu. Úhel obsahuje i další polopřímky. Každá polopřímka patřící úhlu AVB má počátek ve vrcholu V a obsahuje některý z vnitřních bodů daného úhlu. Bod Y nepatří úhlu AVB, symboly to zapíšeme následovně $Y \notin AVB$. Nejčastěji úhly značíme písmeny řecké abecedy. (Jelínek, 1976)

Definice:

Jsou-li dány tři body P, R a S nepatřící jedné přímce, pak průnik polorovin PRS a PSR se nazývá konvexní úhel.

Konvexní úhel a nekonvexní úhel

Definice:

Nechť A, V, B jsou tři libovolné navzájem různé body. Konvexním úhlem AVB pak nazýváme:

a) průnik polorovin AVB a BVA v případě, že body A, V, B neleží v přímce[2]
b) leží-li body A, V, B v přímce a bod V leží mezi body A, B, lze za množinu všech bodů konvexního úhlu AVB považovat každou polorovinu s hraniční přímkou AB[3]
c) leží-li body A, V, B v přímce a bod V neleží mezi body A, B, lze za množinu všech bodů konvexního úhlu AVB považovat každou rovinu obsahující přímku AB i každou polopřímku VA[4]

Můžeme si všimnout jistých podobných vlastností, které mají jak úsečky, tak konvexní úhly.

1) „Úsečka je množina bodů. Úhel je množina bodů.
2) Úsečka má dva krajní body. Úhel má dvě hraniční polopřímky, tj. dvě ramena.
3) Vnitřek úsečky obsahuje všechny body úsečky kromě krajních bodů. Vnitřek úhlu obsahuje všechny body úhlu kromě bodů patřících ramenům.

[2] Tímto způsobem lze definovat úhly pravé, tupé a ostré.
[3] Zde se jedná o přímý úhel s vrcholem V a rameny VA, VB.
[4] Zde se jedná o úhel nulový (ramena úhlu splývají) anebo úhel plný s vrcholem V.

4) Jsou-li C, D vnitřní body úsečky AB, pak úsečka CD je částí (podmnožinou) úsečky AB. Jsou-li C, D vnitřní body úsečky AB, kde A je bod jednoho ramena a B bod druhého ramena, pak úsečka CD je částí (podmnožinou) úhlu AVB.“ (Jelínek, 1976, str. 39)

Definice:

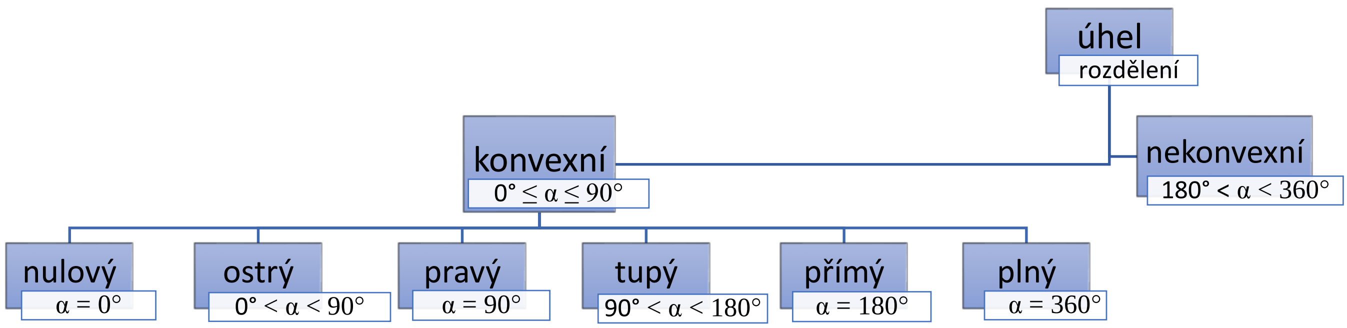
Nechť A, V, B jsou tři body, které neleží v přímce. Potom sjednocení doplňku konvexního úhlu AVB v rovině AVB a polopřímek VA a VB nazýváme nekonvexním úhlem AVB.

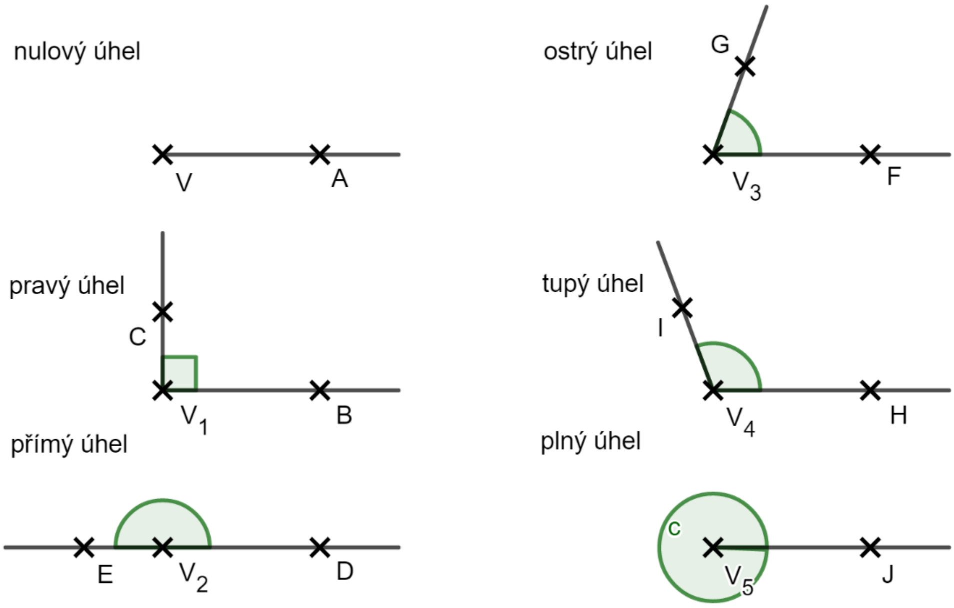
Název nekonvexní úhel AVB vyjadřuje, že se jedná o nekonvexní množinu bodů. To vyplývá například z toho, že body A a B patří nekonvexnímu úhlu AVB, ale úsečka AB není podmnožinou nekonvexního úhlu AVB. Sjednotíme-li množinu všech konvexních a množinu všech nekonvexních úhlů vznikne nám množina všech úhlů. (Francová, 2014)

5.2.2. Metrické vztahy mezi úhly

Úhel přímý je takový úhel, jsou-li polopřímky VA a VB opačné. Pokud se polopřímky VA a VB sobě rovnají, pak mohou nastat dvě situace. Buď tyto dvě polopřímky určují **nulový úhel**. To znamená, že úhel nemá žádné vnitřní body. Anebo polopřímky určují **úhel plný**. V tomto případě jsou všechny body roviny vnitřními body úhlu. Kromě bodů, které leží na polopřímce VA. (Čermák, Červinková, 2007)

Pokud je velikost úhlu menší než 90° nazýváme ho **úhel ostrý**. Je-li velikost úhlu od 90° do 180°, pak o daném úhlu říkáme, že je to **úhel tupý**. V případě, že je úhel roven 90°, označujeme ho jako **úhel pravý**. Úhly ostré a tupé souhrnně nazýváme **kosé úhly**. O úhlu můžeme prohlásit, že je kosý v případě, že úhel není nulový, pravý, přímý ani plný.





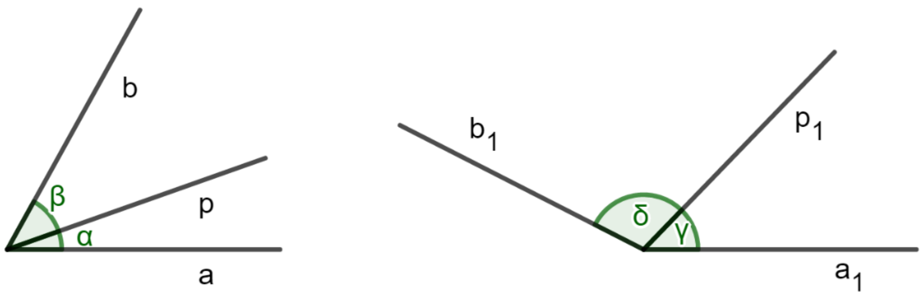
Obrázek 10: Přehled úhlů

5.2.3. Polohové vztahy mezi úhly

Dvojice úhlů mají své jisté názvy podle toho, kde přesně jsou umístěny.

Styčné úhly

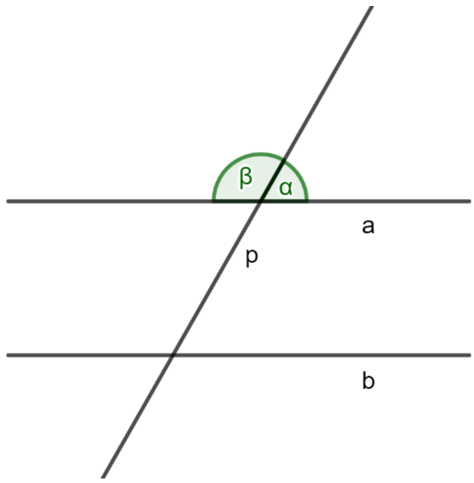
Dvojice úhlů, která má celkový součet velikosti obou úhlů menší než 380° (úhel plný). Jedno společné rameno (dvě ramena splývají v jedno) a zbylé dvě ramena leží ve vzájemně opačných polorovinách s hraniční přímkou, která obsahuje společné rameno se nazývají úhly styčné.



Obrázek 11: Styčné úhly

Vedlejší úhly

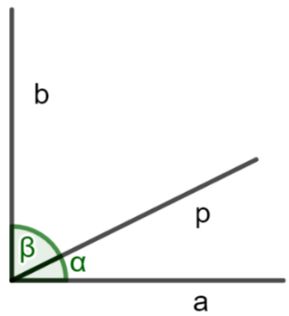
Styčné úhly, které mají společné jedno rameno a vrchol. Zbývající dvě ramena jsou navzájem opačné polopřímky nazýváme úhly vedlejší. Součet velikostí dvou vedlejších úhlů je 180°, tedy úhel přímý. Pokud je úhel shodný se svým úhlem vedlejším, jedná se o úhel pravý.



Obrázek 12: Vedlejší úhly

Doplňkové úhly

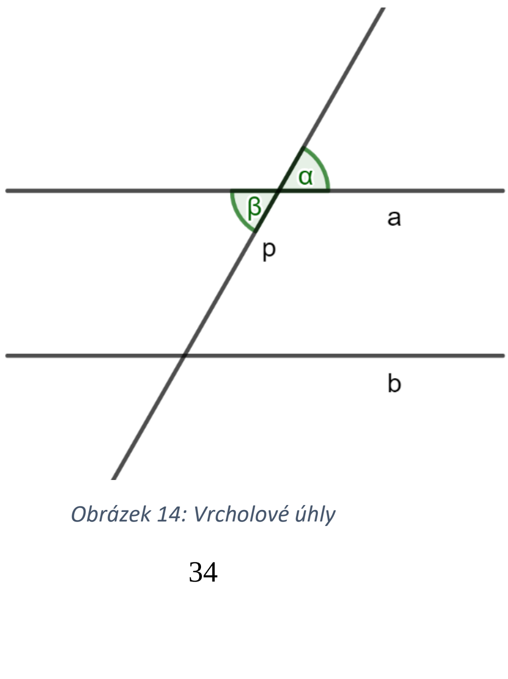
Dva úhly, jejichž grafický součet dává dohromady 90°, tedy úhel pravý. Ve většině případů se jedná o sousední úhly, ale není to podmínka.



Obrázek 13: Doplňkové úhly

Vrcholové úhly

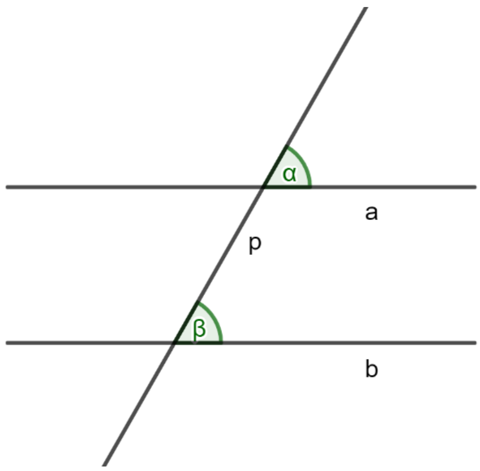
Dvojice úhlů, která má společný vrchol a ramena příslušných úhlů jsou navzájem opačné polopřímky, nazýváme úhly vrcholové. Velikost vrcholových úhlů je stejná (jsou shodné).



Obrázek 14: Vrcholové úhly

Souhlasné úhly

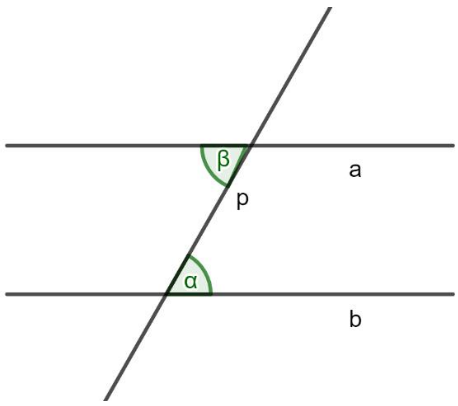
Souhlasné úhly mají společné jedno rameno a ostatní dvě ramena jsou rovnoběžná. Společné rameno musí být různoběžné od ramen rovnoběžných. Souhlasné úhly mají opět stejné velikosti. Oba úhly se buď nacházejí vpravo nebo vlevo od společného ramene a zároveň pro oba úhly platí, že jsou buď oba nad nebo oba pod rovnoběžnými rameny.



Obrázek 15: Souhlasné úhly

Střídavé úhly

U úhlů, které nazýváme úhly střídavé platí stejné rozmístění ramen jako u úhlů souhlasných. Tedy úhly mají opět společné rameno a ostatní dvě ramena jsou rovnoběžná s tím, že společné rameno je různoběžné od ramen rovnoběžných. Rozdíl je ale v umístění dvojice úhlů, která je v tomto případě na opačných stranách společného ramene. Pokud jeden úhel leží nad jedním z rovnoběžných ramen, tak druhý úhel leží pod druhým z rovnoběžných ramen. Rozdílné musí být i strany. Leží-li jeden úhel vpravo, tak druhý úhel musí ležet vlevo společného ramene. Střídavé úhly jsou opět shodné.



Obrázek 16: Střídavé úhly

5.2.4. Velikost úhlu

Velikost úhlu je veličina, proto za úhlem píšeme značku úhlové jednotky. Máme dvě míry, ve kterých měříme úhly. A těmi jsou míra stupňová a míra oblouková. Velikost úhlu značíme pomocí svislých čar anebo pomocí malých řeckých písmen.

Definice:

Hodnota obloukové míry úhlu AVB se rovná délce kružnicového oblouku AB, který je průnikem úhlu AVB a kružnice k se středem ve vrcholu V a poloměrem 1. Úhlová jednotka obloukové míry se nazývá radián a označuje se rad.

Zmíněnou kružnici o poloměru 1 nazýváme kružnicí jednotkovou. Radián je hlavní jednotkou rovinného úhlu. Radián řadíme mezi doplňkové jednotky mezinárodní soustavy jednotek.

Definice:

Úhlová míra stupňová byla odvozena od rozměru pravého úhlu, kterému bylo přiřazeno 90 jednotek. Proto tuto míru nazýváme též devadesátinná míra. Úhlovou jednotkou stupňové míry je 1 stupeň značka °.

K měření úhlů ve stupních používáme měřítko, které se nazývá úhloměr. Úhloměr má tvar polokruhu a jsou na něm vyznačeny velikosti úhlů od 0° do 180°.

Vztah mezi velikostmi úhlu v míře stupňové a obloukové

Úhlová míra stupňová se skládá z úhlových stupňů a úhlových minut. Jeden úhlový stupeň má 60 úhlových minut ($1° = 60'$). A jedna úhlová minuta se rovná 60 úhlovým vteřinám ($1' = 60''$). Pro převod mezi stupni a radiány platí tento vztah: $1° = \frac{\pi}{180} rad$.

Tabulka nejpoužívanějších hodnot úhlů stupňové a obloukové míry:

stupňová míra	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
oblouková míra	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Tabulka 1: Nejpoužívanější hodnoty úhlů stupňové a obloukové míry

Orientovaný úhel

Definice:

Orientovaný úhel POQ – značí se $\measuredangle \overrightarrow{POQ}$ nebo $\measuredangle(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$ – je uspořádaná dvojice polopřímek $\overrightarrow{OP}$ a $\overrightarrow{OQ}$. $\overrightarrow{OP}$ se nazývá počáteční a $\overrightarrow{OQ}$ koncové rameno úhlu.

Pojem uspořádaná dvojice znamená, že záleží na pořadí, ve kterém dané polopřímky zapisujeme. Pokud zapíšeme úhel způsobem $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$, tak se tento zmíněný úhel nerovná úhlu $(\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OP})$, $\measuredangle(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) \neq \measuredangle(\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OP})$.

Velikost orientovaného úhlu máme dán velikostí otáčení. Otáčení můžeme aplikovat dvěma směry. První možností je otáčení po směru pohybu hodinových ručiček. Tento směr považujeme za kladný směr otáčení. Druhou možností je otáčení proti směru pohybu hodinových ručiček. Naopak tento směr považujeme za záporný směr otáčení.

Orientovaný úhel opět značíme malými řeckými písmeny nebo svislými čarami, $\alpha = \left|\sphericalangle \overrightarrow{POQ}\right|$. Jednotkou otáčení je jedna otáčka, kterou dělíme na zlomky. Například $\frac{1}{2}$ otáčky je 180° (úhel přímý) a $\frac{1}{4}$ otáčky je $90°$ (úhel pravý). Celá jedna otáčka se rovná $360°$. Otáčka je tedy rozdělena do 360 malých dílků, jeden malý dílek se nazývá jeden stupeň. (Jelínek, 1976)

5.2.5. Osa úhlu

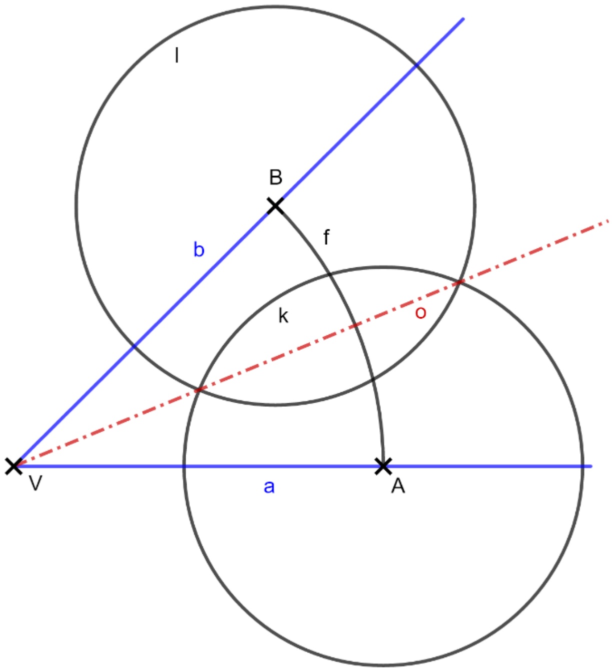
Osa úhlu je přímka, která dělí daný úhel na dva stejně velké úhly. Osu úhlu nejčastěji značíme o a rýsujeme ji čerchovanou čarou. Sestrojíme-li osu úhlu o, vzniknou dva shodné úhly.

Osu úhlu můžeme sestrojit pomocí dvou polopřímek, které svírají daný úhel. Anebo konstrukci můžeme rozšířit a sestrojit osu úhlu u dvou různoběžných přímek. V případě dvou různoběžných přímek jsou na sebe obě osy úhlů kolmé.

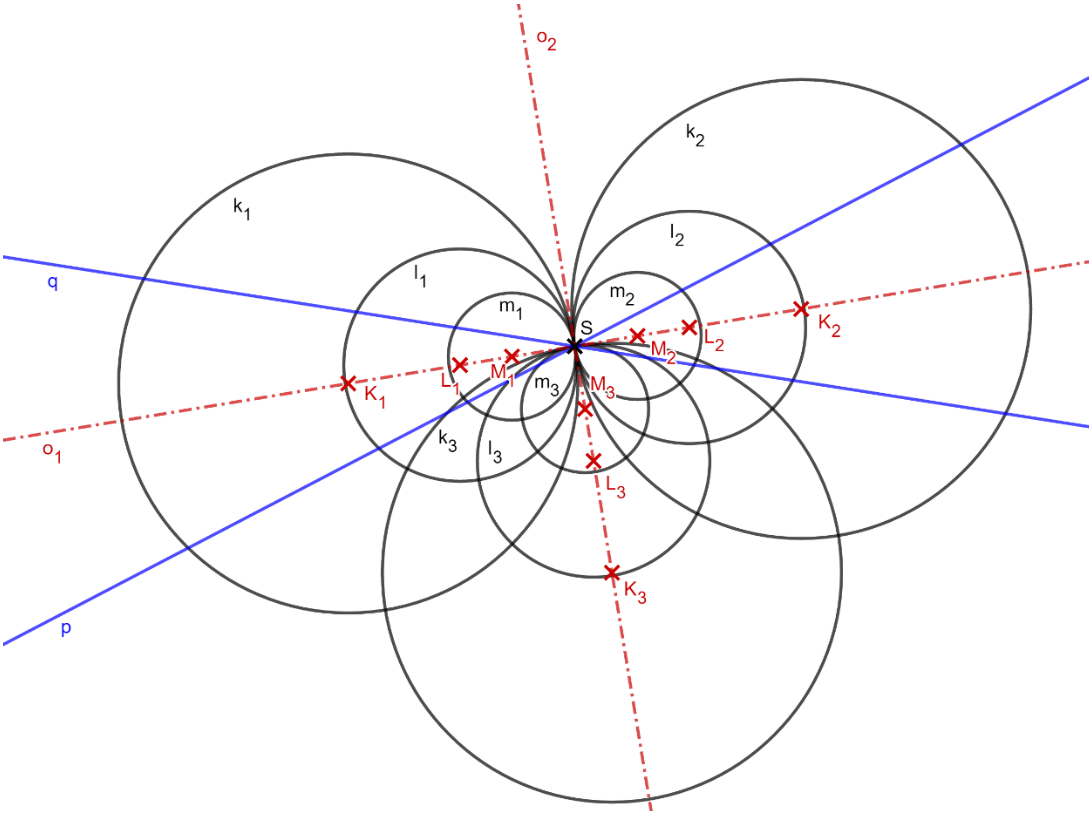
Různoběžkami rozumíme dvě různoběžné přímky, které leží v jedné rovině a protínají se právě v jednom bodu. Tento bod nazýváme průsečíkem přímek. Dvě různoběžné přímky p a q značíme tímto způsobem $p \nparallel q$.

Konstrukce osy úhlu:

1. Mějme dvě přímky a, b, které svírají daný úhel. Bod, ve kterém se střetnou vyznačíme V.
2. Vezmeme do kružítka libovolný poloměr.
3. Sestrojíme oblouk f kružnice o určitém poloměru r a se středem v bodě V. Oblouk musí protnou obě přímky (ramena úhlu).
4. V bodech, které oblouk protne na ramenou vyznačíme A a B. Z bodů A, B sestrojíme kružnice k, l, pro které platí $k(A;\, r_1), l(B;\, r_1)$. Velikost poloměru r_1 volíme tak, aby se kružnice k a l protly.
5. Sestrojíme přímku o, která prochází bodem V (vrcholem) a průsečíkem kružnic k a l. Přímka o je osa úhlu AVB



Obrázek 17: Množina bodů - osa úhlu



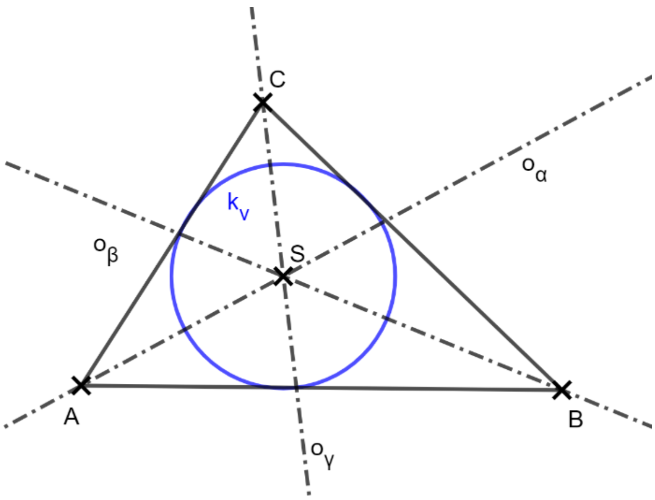
Obrázek 18: Množina středů kružnic - osa úhlu

Definice pomocí množiny všech bodů, které mají od dvou daných různoběžek stejnou vzdálenost je opět zavádějící a nejednoznačná. Princip je stejný jako u osy úsečky. Opět to vždy platí jen pro dva body (vzor a jeho obraz).

I zde je jednoznačnější definice pomocí množiny všech středů kružnic.

5.2.6. Kružnice vepsaná

Kružnicí vepsanou nazveme kružnici, která se dotýká všech stran trojúhelníka. Střed kružnice opsané leží na průsečíku os všech vnitřních úhlů daného trojúhelníku.



Obrázek 19: Kružnice vepsaná

5.3. Osa pásu

Definice:

Množina všech bodů v rovině, které mají od dvou daných rovnoběžek stejnou vzdálenost, nazýváme osa pásu.

Definice:

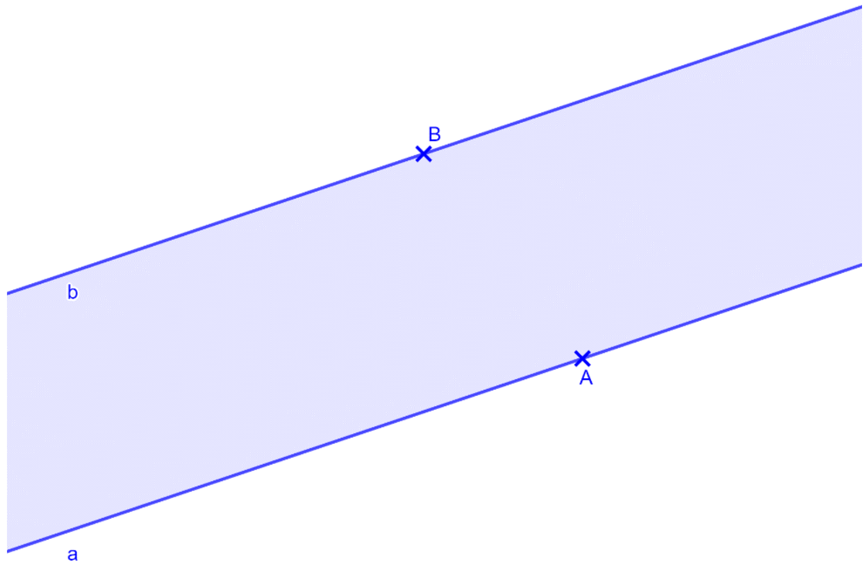
Množina všech středů kružnic v rovině, které mají od daných rovnoběžek stejnou vzdálenost, nazýváme osa pásu.

5.3.1. Pás

Prostor, který se nachází mezi dvěma rovnoběžkami se nazývá rovinný pás.

Definice:

Část roviny ohraničená dvěma rovnoběžkami a, b, tj. průnik polorovin aB, bA, se nazývá rovinný pás.



Obrázek 20: Rovinný pás

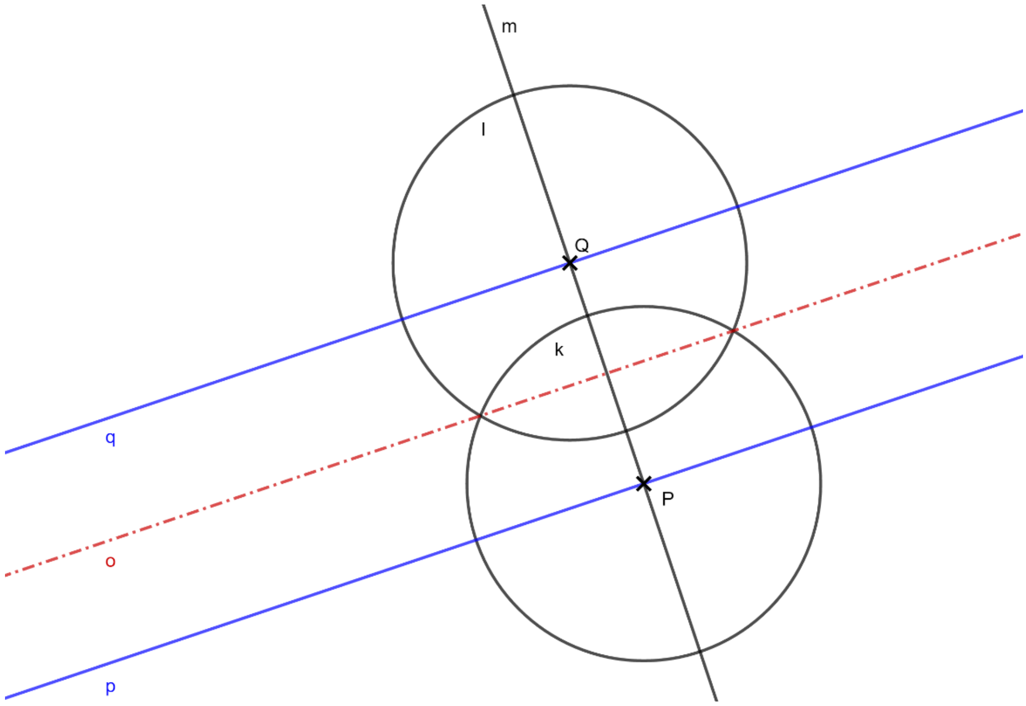
5.3.2. Osa pásu

Osu dvou rovnoběžných přímek nazveme osou pásu. Osu pásu značíme o a rýsujeme čerchovanou čarou.

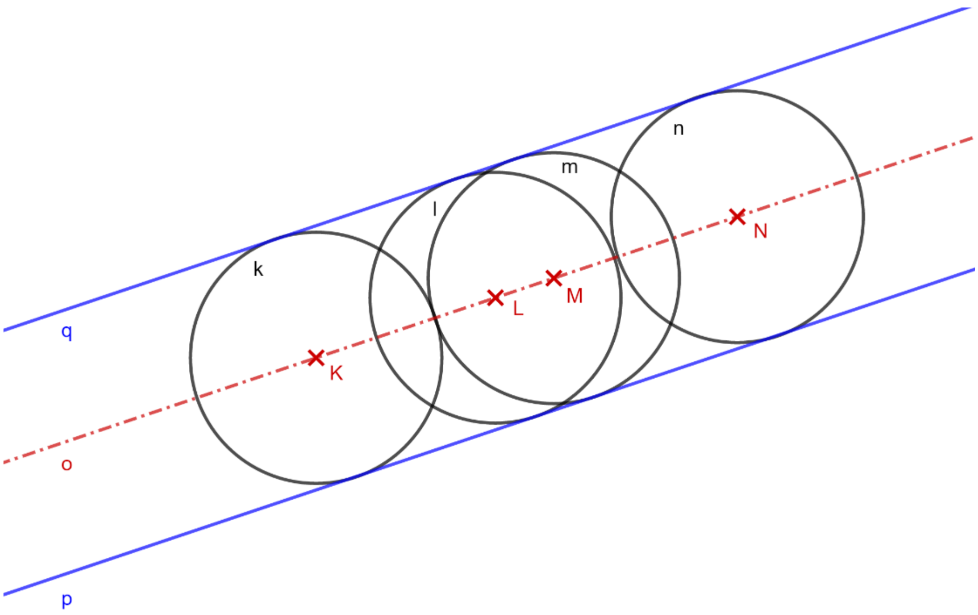
Postup konstrukce osy pásu:

1. Mějme dány dvě rovnoběžné přímky p a q.
2. Narýsujeme kolmici m k rovnoběžkám p a q.

3. V průsečících kolmice m s přímkami p a q vyznačte body P a Q.
4. Sestrojte kružnice k, l, pro které platí $k(P; r), l(Q; r)$. Poloměr r zvolte tak, aby vznikl alespoň jeden průsečík kružnic k a l.
5. Sestrojte přímku o, pro kterou platí, že prochází průsečíkem (průsečíky) kružnic a je rovnoběžná s danými rovnoběžkami. Přímko o je osa pásu.



Obrázek 21: Množina bodů - osa pásu



Obrázek 22: Množina středů kružnic - osa pásu

5.4. Kružnice

Definice:

Množina všech bodů v rovině, které mají od daného bodu stejnou vzdálenost r. Je kružnice se středem v daném bodě a poloměrem r.

Definice:

Množina všech středů kružnic v rovině, které procházejí daným bodem a mají poloměr r, je kružnice se středem v daném bodě a poloměrem r.

5.4.1. Kružnice

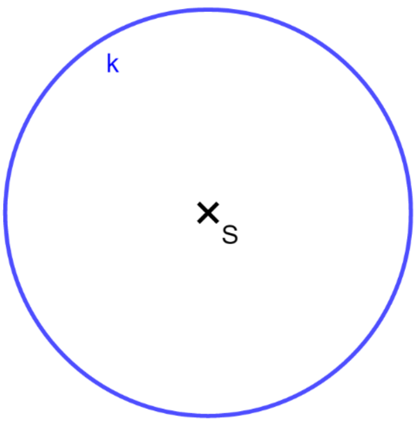
Definice:

Kružnice $k(S; r)$ je množina všech bodů X, které mají od bodu S vzdálenost $|SX| = r$.

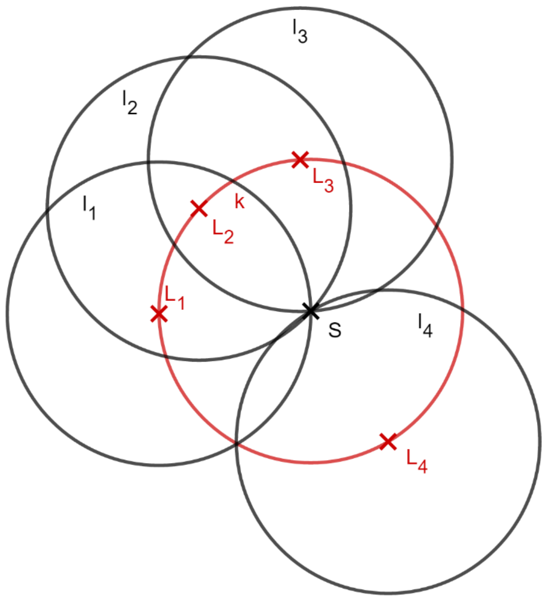
Bod S nazýváme středem kružnice k. Vzdálenost r nazýváme poloměrem kružnice k. Máme-li úsečku AB, která prochází středem S a její krajní body leží na kružnici k. Pak velikost úsečky AB můžeme nazvat průměrem kružnice k, tedy $|AB| = d$. Polovina průměru je rovna poloměru, tedy $d = 2r$, $|AB| = 2|AS|$. Kružnice jsou osově souměrné podle všech přímek, které procházejí středem kružnice k. Tyto přímky nazýváme osy souměrnosti.

Postup konstrukce kružnice:

1. Sestrojíme bod S.
2. Vezmeme do kružítka vzdálenost r.
3. Zapíchneme kružítko do bodu S a kružítkem sestrojíme kružnici k.



Obrázek 23: Množina bodů - kružnice



Obrázek 24: Množina středů kružnic - kružnice

5.4.2. Vzájemná poloha kružnice a bodu

Vnější bod kružnice

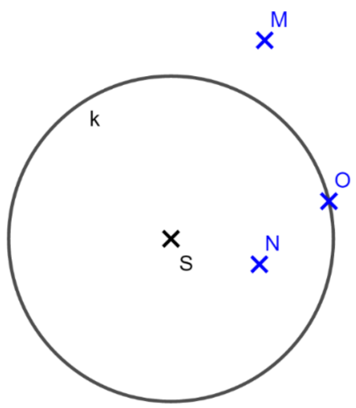
Mějme zadanou kružnici $k(S;\ r)$ a bod M. Leží-li bod vně kružnice k, platí-li $|SM| > r$, pak bod M není bodem kružnice k.

Vnitřní bod kružnice

Mějme zadanou kružnici $k(S;\ r)$ a bod N. Leží-li bod uvnitř kružnice k, platí-li $|SN| < r$, pak bod N opět nenáleží kružnici k.

Bod na kružnice

Mějme zadanou kružnici $k(S;\ r)$ a bod O. Leží-li bod na kružnici k, platí-li $|SO| = r$, pak bod O je bodem kružnice k.



Obrázek 25: Vzájemná poloha kružnice a bodu

5.4.3. Vzájemná poloha kružnice a přímky

Sečna

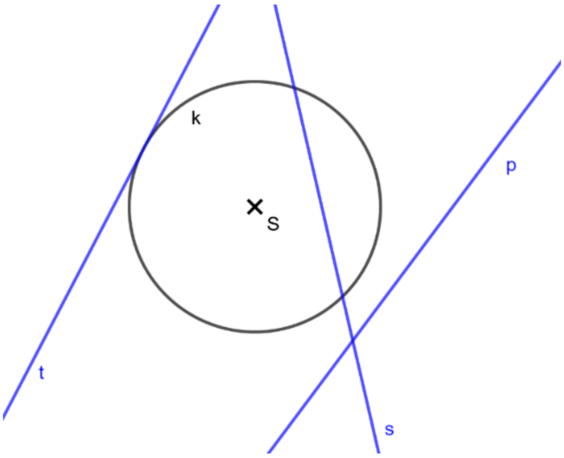
Sečnou nazveme přímku s, která protíná danou kružnici $k(S;\ r)$ ve dvou bodech.

Tečna

Tečnou nazveme přímku t, která protíná danou kružnici $k(S;\ r)$ v jednom bodu.

Vnější přímka

Vnější přímkou nazveme přímku p, která neprotíná danou kružnici $k(S;\ r)$ v žádném bodě.



Obrázek 26: Vzájemná poloha kružnice a přímky

5.4.4. Vzájemná poloha dvou kružnic

Kružnice nemají žádný společný bod

1) **Kružnice $\boldsymbol{l}$ leží ve vnější oblasti kružnice $\boldsymbol{k}$**

   Kružnice $l_1(S_1;\ r_1)$ leží vně kružnici $k(S;r)$. Vzdálenost mezi středy kružnic S a S_1 je vetší než r a ten je větší než poloměr r_1. Úsečku SS_1 nazýváme střednou.

   Platí: $|SS_1| > r > r_1$

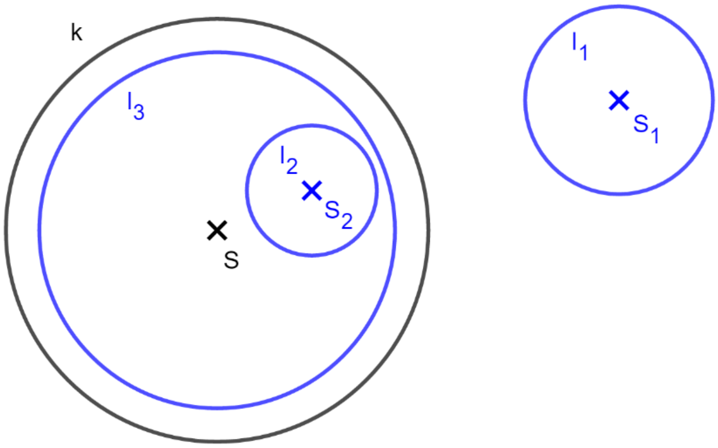
2) **Kružnice $\boldsymbol{n}$ leží ve vnitřní oblasti kružnice $\boldsymbol{k}$**

   Kružnice $l_2(S_2;r_2)$ leží uvnitř kružnice $k(S;r)$. Vzdálenost středů obou kružnic je menší než rozdíl jejich poloměrů r a r_2.

   Platí: $|SS_2| < r - r_2$

3) **Kružnice $\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{m}$ jsou soustředné**

   Kružnice l a k mají společný střed S, tedy platí $k(S;r), l(S;r_3)$. Takovéto kružnice nazýváme soustředné. Oblast mezi kružnicí k a kružnicí l, které mají rozdílné poloměry nazýváme mezikruží kružnic.



Obrázek 27: Vzájemná poloha dvou kružnic

Kružnice mají jeden společný bod

1) **Kružnice s vnějším dotykem**

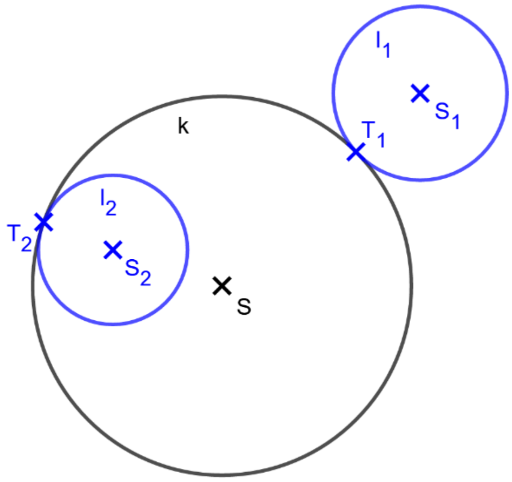
Kružnice $l_1(S_1; r_1)$ leží ve vnější oblasti kružnice $k(S; r)$. Velikost úsečky SS_1 je větší než součet obou poloměrů. Kružnice se dotýkají v jednom bodě z vnějších stran kružnic. Tento bod nazýváme bodem dotyku T_1.

Platí: $|SS_1| > r + r_1$

2) **Kružnice s vnitřním dotykem**

Kružnice $l_2(S_2; r_2)$ leží ve vnitřní oblasti kružnice $k(S; r)$. Velikost středů obou kružnic je rovna rozdílu poloměrů daných kružnic. Opět bod, ve kterém se kružnice l ze své vnější oblasti dotýká ve vnitřní oblasti kružnice k nazýváme bodem dotyku T_2.

Platí: $|SS_2| = r - r_2$



Obrázek 28: Kružnice s jedním bodem dotyku

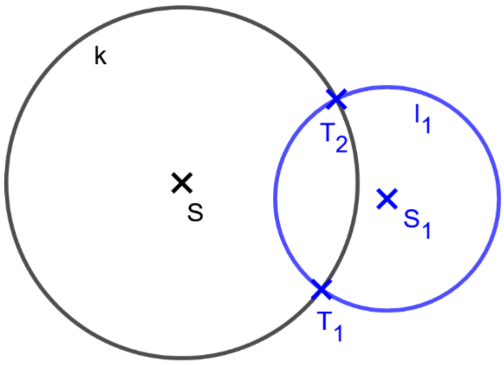
Kružnice mají dva a více společných bodů

1) **Kružnice se dvěma společnými body**

   Kružnice $l_1(S_1; r_1)$ a kružnice $k(S; r)$ se protínají ve dvou bodech dotyku T_1 a T_2. Pro dané kružnice musí platit $r - r_1 < |SS_1| < r + r_1$.

2) **Totožné kružnice**

   Kružnice, které mají společný střed obou kružnic i stejně velké poloměry nazýváme totožné. Takovéto kružnice splývají. Pro kružnice $l_2(S_2; r_2)$ a $k(S; r)$ platí, $S = S_2, r = r_2, k = l_2$.



Obrázek 29: Kružnice se dvěma body dotyku

5.4.5. Kruh

Definice:

Kruh $K(S; r)$ je množina všech bodů X. pro které platí $|SX| \leq r$.

Bod S nazýváme středem kruhu a velikost r je poloměr příslušného kruhu K. Pro vnitřní oblast kruhu platí, že vzdálenost vnitřního bodu kruhu musí být od středu kruhu menší než jeho poloměr. A naopak pro vnější oblast kruhu platí, že vzdálenost vnějšího bodu kruhu musí být od středu kruhu větší než jeho poloměrem.

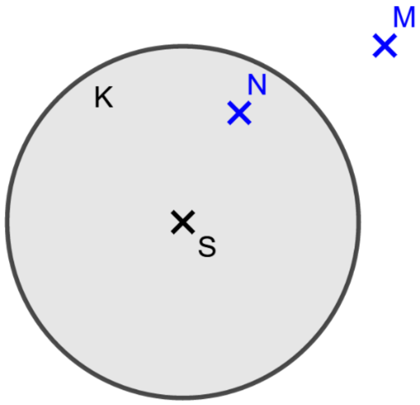
Vnější bod kruhu

Mějme zadaný kruh K$(S;\ r)$ a bod M. Leží-li bod vně kruhu K, platí-li $|SM| > r$, pak bod M není bodem kruhu K.

Vnitřní bod kruhu

Mějme zadaný kruh $K(S;\ r)$ a bod N. Leží-li bod uvnitř kruhu K, platí-li $|SN| \leq r$, pak bod N náleží kruhu K.

Vzájemná poloho kruhu a přímky je obdobná jako vzájemná poloha kružnice a přímky. Stejně tak to platí i pro vzájemnou polohu dvou kruhů.

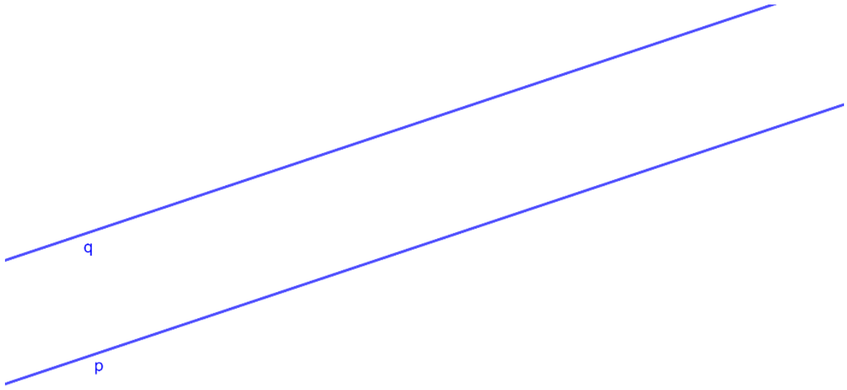


Obrázek 30: Kruh

5.5. Ekvidistanta

5.5.1. Rovnoběžky

Rovnoběžky jsou dvě přímky, které nemají žádný společný bod. Jinými slovy dvě rovnoběžné přímky, které se nikde neprotnou. Vzdálenost mezi těmito přímkami je všude stejně velká. Dvě rovnoběžné přímky p a q značíme $p \parallel q$.



Obrázek 31: Rovnoběžné přímky

5.5.2. Ekvidistanta přímky

Definice:

Množina všech bodů v rovině, které mají od dané přímky stejnou vzdálenost, se nazývá ekvidistanta přímky.

Definice:

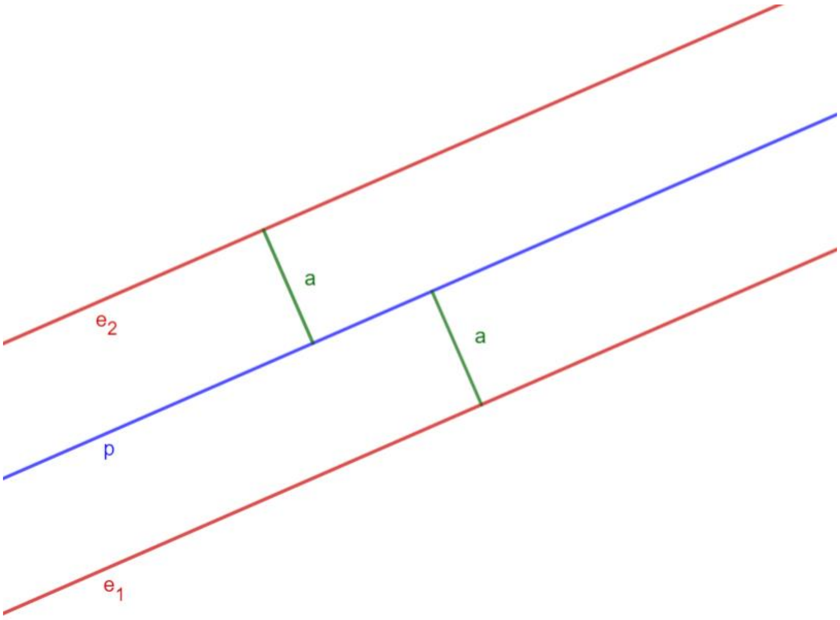
Množina všech středů kružnic stejného poloměru, které se dotýkají dané přímky, se nazývá ekvidistanta přímky.

Z hlediska metriky nazýváme ekvidistantou přímky vzdálenost výše definovaných rovnoběžek od zadané přímky.

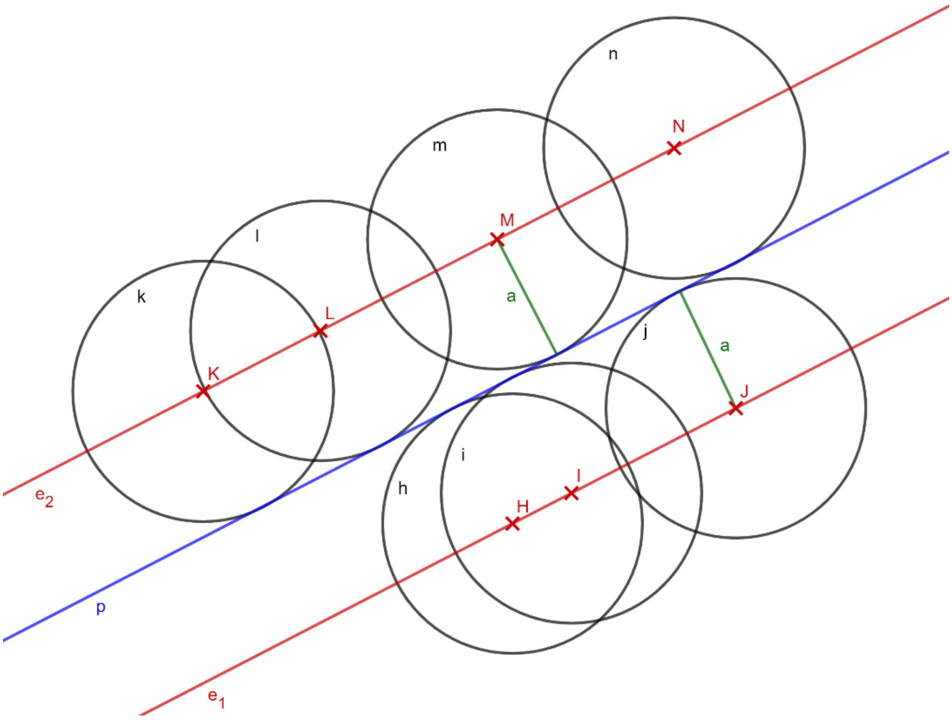
Definice:

Množinou všech bodů roviny, které mají od dané přímky p vzdálenost $a \epsilon R^+$, je dvojice rovnoběžek s přímkou p.

Vzdálenost a nazýváme ekvidistanta přímky.



Obrázek 32: Množina bodů - ekvidistanta přímky



Obrázek 33: Množina středů kružnic - ekvidistanta přímky

5.5.3. Ekvidistanta kružnice

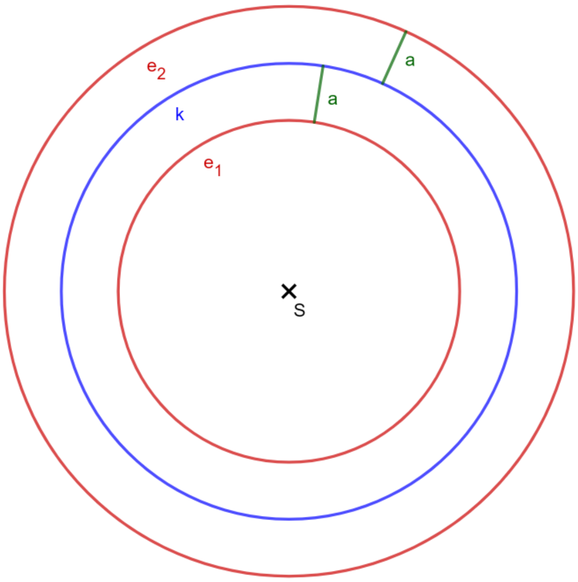
Definice:

Množina všech bodů v rovině, které mají od dané kružnice stejnou vzdálenost, nazýváme ekvidistanta kružnice.

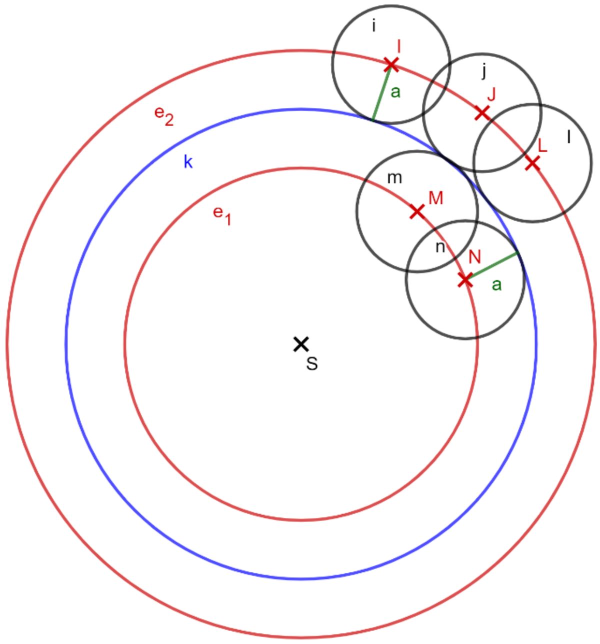
Definice:

Množina všech středů kružnic stejného poloměru, které se dotýkají dané kružnice, se nazývá ekvidistanta kružnice.

Z hlediska metriky nazveme ekvidistantou kružnice vzdálenost $a\,(obr. 34)$. Dvě soustředné kružnice nechť představují ekvidistantu zadané kružnice o poloměru r jako množina všech bodů dané vlastnosti spolu s metrickou hodnotou a této ekvidistanty. Potom poloměr menší kružnice bude roven $r - a$ a poloměr větší kružnice bude roven $r + a$. Výslednou ekvidistantou jsou tedy dvě kružnice, popř. číslo, které vyjadřuje vzdálenost bodů ekvidistanty od dané kružnice.



Obrázek 34: Množina bodů - ekvidistanta kružnice



Obrázek 35: Množina středů kružnic - ekvidistanta kružnice

5.6. Thaletova kružnice

Definice:

Množina všech vrcholů pravých úhlů všech pravoúhlých trojúhelníků v téže rovině s danou přeponou AB tvoří Thaletovu kružnici nad průměrem AB.

Definice:

Kružnice opsaná pravoúhlému trojúhelníku představuje Thaletovu kružnici nad jeho přeponou.

Definice:

Množina všech bodů v rovině, z nichž je vidět danou úsečku AB pod úhlem 90°, nazýváme Thaletovou kružnicí.

5.6.1. Thalés z Milétu

Řecký filosof Thalés žil patrně v letech 620 až 546 před naším letopočtem. Thalés se zajímal o spoustu oblastí od filozofie, vědy, historie přes matematiku, strojírenství, geografii až po politiku. Navrhl teorie vysvětlující mnoho přírodních událostí, primární podstaty, podpory Země a příčiny změn. Zabýval se i problémy astronomie, pro které nalézal vysvětlení. Založil milesiánskou školu přírodní filosofie. Thalés navštívil Egypt, aby na vlastní oči viděl, jak si počínají v praktické dovednosti měření půdy. Čerpal inspiraci při pozorování Egypťanů při měření. Říká se, že Thalés dovezl geometrii z Egypta do Řecka. Jeho jméno je spjato s pěti geometrickými větami. (The Internet Encyclopedia of Philosophy)

Věta 1:

Každý průměr dělí kruh na dvě stejné části.

Věta 2:

Úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku jsou shodné.

Věta 3:

Protilehlé úhly mezi dvěma protínajícími se přímkami jsou shodné.

Věta 4:

Dva trojúhelníky jsou shodné, pokud mají stejné dva úhly a jednu stranu.

Věta 5:

Trojúhelník vepsaný do oblouku nad průměrem kružnice je pravoúhlý. (Wikipedie)

5.6.2. Thaletova kružnice

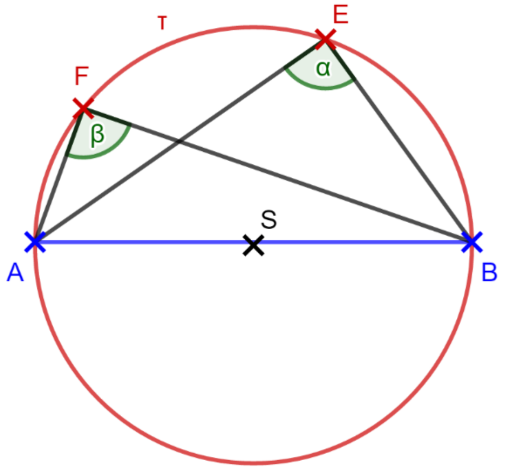
Thaletova věta:

Pro libovolný trojúhelník ABC platí:

- jestliže je ABC pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB, leží vrchol C na kružnici k s průměrem AB,
- jestliže vrchol C leží na kružnici k s průměrem AB, je ABC pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB.

Kružnice k je Thaletova kružnice s průměrem AB

Thaletovu kružnici značíme řeckým písmenem tau τ. Úhly u vrcholů E a F jsou pravoúhlé.



Obrázek 36: Thaletova kružnice

Důkaz Thaletovy věty:

Na obrázku máme dán trojúhelník ABC a kružnice k s poloměrem r a se středem v bodě S. Bod S je současně středem úsečky AB. Trojúhelník ACS je rovnoramenný, jelikož obě jeho ramena mají délku poloměru kružnice r. Základna tohoto trojúhelníku je úsečka AC. Jednou ze základních vlastností rovnoramenných trojúhelníků je ta, že mají oba úhly při základně stejně velké. To znamená, že úhly SAC a SCA mají stejnou velikost. Tyto úhly v obrázku označujeme řeckým písmenem α. Obdobně to je i na druhé straně trojúhelníka ABC, tedy trojúhelník BCS je též rovnoramenný. Základna tohoto trojúhelníku je úsečka BC a úhly SBC a SCB jsou stejně velké. Tyto úhly značíme β.

Součet vnitřních úhlů trojúhelníků je vždy $180°$. V našem případě platí $\alpha + \alpha + \beta + \beta = 2\alpha + 2\beta = 180°$. Z této rovnosti můžeme vyjádřit úhel při vrcholu C, pro který platí $C = \alpha + \beta$. Po dosazení do původní rovnosti nám vyjde $2(\alpha + \beta) = 180°$. Z toho nám vyplývá, že $\alpha + \beta = 90°$ a tím jsme větu dokázali.

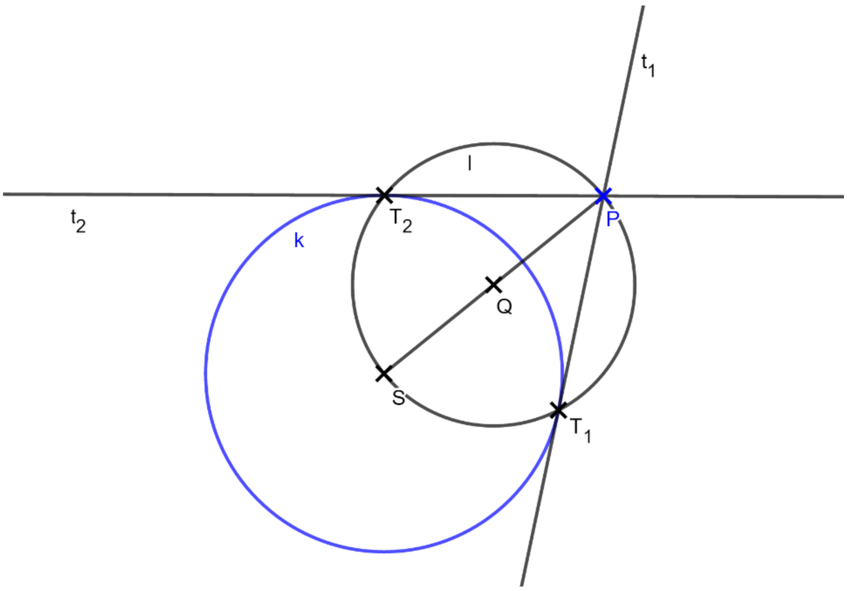
Tečna z bodu ke kružnici

Tečnu ke kružnici jsme již definovali v podkapitole Kružnice. Nyní si ukážeme, jak souvisí tečna ke kružnici s Thaletovou větou. Můžeme pomocí Thaletovy věty sestrojit tečny ke kružnici, které procházejí daným bodem. Bod, kterým mají tečny procházet nenáleží kružnici a leží v její vnější oblasti.

Postup konstrukce:

1. Mějme danou kružnici $k(S;r)$ a bod P.
2. Sestrojíme úsečku SP.
3. Vyznačíme bod Q, který je středem úsečky SP.
4. Naneseme z bodu Q kružnici l, pro kterou platí $l(Q;\left|\frac{SP}{2}\right|)$.
5. V průsečíkách kružnic k a l sestrojíme body T_1 a T_2.
6. Narýsujeme přímky t_1 a t_2, pro které platí, že t_1 prochází bodem T_1 a daným bodem P. Obdobně pro t_2 platí, že prochází bodem T_2 a zároveň bodem P.

Přímky t_1 a t_2 jsou naše hledané tečny ke kružnici procházející bodem P. Body T_1 a T_2 nazýváme body dotyku a zároveň to jsou vrcholy pravých úhlů PT_1S a PT_2S. Body T_1 a T_2 leží na Thaletově kružnici s průmětem SP. Oba body vidíme pod úhlem 90°.



Obrázek 37: Tečna z bodu ke kružnici

5.6.3. Středový a obvodový úhel

U středových a obvodových úhlů se setkáme s pojmem oblouk. Oblouk je část kružnice, kterému přísluší daný středový úhel. Oblouk je vymezený třemi body (dva body okrajové, jeden bod upřesňující.

Definice:

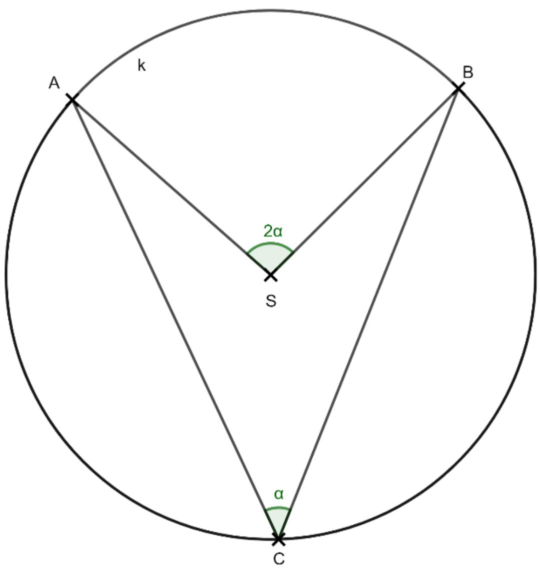
Úhel, jehož vrcholem je střed S, kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k, se nazývá středový úhel příslušný k tomu oblouku AB, který v tomto úhlu leží.

Definice:

Úhel, jehož vrchol V je bodem kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k $(V \neq A, V \neq B)$, se nazývá obvodový úhel příslušný k tomu oblouku AB, který v tomto úhlu leží.

Věta:

Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného témuž oblouku.



Obrázek 38: Obvodový a středový úhel

Thaletova věta je speciálním případem věty o středovém a obvodovém úhlu. V případě, kdy středový úhel je rovem 180° a obvodový úhel je roven 90°.

6. Analogie množin bodů dané vlastnosti v rovině a prostoru

„Dokážeme-li o množině bodů G, že každý její bod má vlastnost V, dokázali jsme, že G je množina bodů, které mají vlastnost V. Chceme-li dokázat, že G je množinou všech bodů, které mají vlastnost V, musíme ještě dokázat, že každý bod, který má vlastnost V, patří do množiny G." (Holubář, str. 7, 1983)

Ukážeme si, že existuje jistá analogii některých množin bodů v trojrozměrném geometrickém prostoru s některými množinami bodů v dvojrozměrném geometrickém prostoru.

Věta 1 (v rovině):

Množina všech bodů, které mají od daných dvou různých bodů A, B vzdálenosti sobě rovné, je osa úsečky AB.

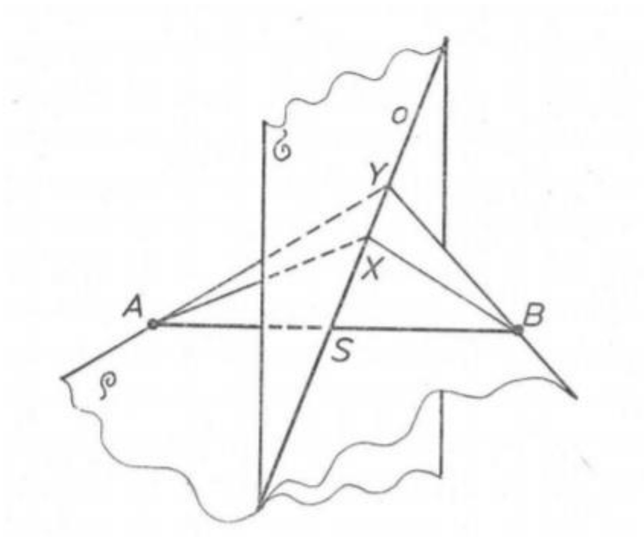
Věta 2 (v prostoru):

V prostoru množina všech bodů, které mají od daných dvou různých bodů A, B sobě rovné vzdálenosti, je rovina σ kolmá k přímce AB a procházející středem úsečky AB, tj. rovina souměrnosti bodů A, B.

Důkaz:

Mějme v prostoru bod X takový, že $|AX| = |XB|, X \notin \overleftrightarrow{AB}$. Body A, B, X tvoří rovinu ρ. Bod X leží v rovině ρ na přímce o (osa úsečky AB). A opačně pro každý bod Y, který zvolíme na přímce o platí $|AY| = |YB|$. Pro body Y můžeme tuto vlastnost dokázat pomocí shodných trojúhelníků, který jsou pravoúhlé a platí tedy $\triangle AYS \approxeq \triangle BYS, S \equiv AB$. Protože platí rovnost úhlů ASY a BSY a také rovnost úsečky AS a úsečky BS. Tuto vlastnost má i bod S. Z toho vyplývá, že přímka o je v rovině ρ množina všech bodů, pro které platí sobě stejná vzdálenost od bodů A a B.

Proložíme-li přímkou AB každou rovinu ρ, můžeme určit přímku o. Zmíněné roviny nám tvoří svazek rovin. Všechny takovéto přímky o vyplňují rovinu σ kolmou k přímce AB, která prochází středem $\overleftrightarrow{AB}$. Tím jsme dokázali, že body roviny σ (body přímek o) mají od bodu A i od bodu B sobě rovné vzdálenosti. Obdobně pokud má nějaký bod stejnou vzdálenost od A i od B, pak leží v rovině σ. Tím jsme dokázali, že množina všech bodů v prostoru je rovina σ. (Holubář, 1983)



Obrázek 39: Obrázek k větě č. 2

Věta 3 (v rovině):

Množina všech bodů, které mají od daných dvou bodů A, B ($A \not\equiv B$) daný součet vzdáleností rovný $2a > |AB|$, je elipsa s ohnisky A, B a hlavní poloosou o velikosti a.

Věta 4 (v prostoru):

Množina všech bodů, které mají od daných dvou různých bodů A, B daný součet vzdáleností rovný $2a > |AB|$, je rotační elipsoid protáhlý ε s ohnisky A, B a hlavní poloosou velikosti a. Přímka AB je osou rotace plochy ε.

Důkaz:

Důkaz lze provést obdobně jako v předchozím případě.

Věta 5 (v rovině):

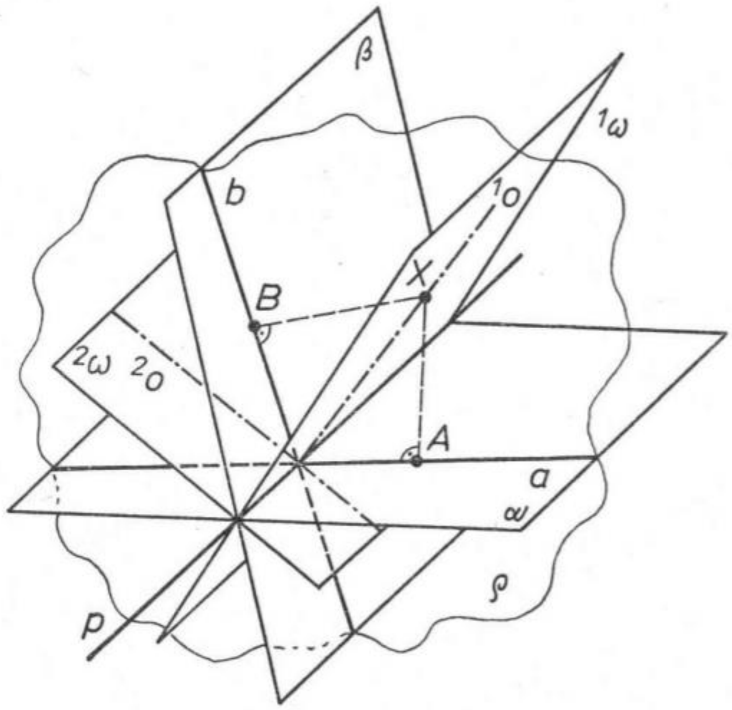
Množina všech bodů, které mají od dvou daných různoběžných přímek a, b sobě rovné vzdálenosti, jsou dvě přímky $o' \perp o''$, a to osy souměrnosti přímek a, b (osy úhlů, které přímky a, b tvoří).

Věta 6 (v prostoru):

Množina všech bodů, které mají od daných dvou různoběžných rovin α, β sobě rovné vzdálenosti, jsou dvě roviny ω', ω'', a to roviny souměrnosti rovin α, β, tj. roviny souměrnosti klínů, které roviny α, β tvoří.

Důkaz:

Mějme v prostoru bod X pro který platí $X \notin \alpha,\ X \notin \beta,\ |AX| = |XB|$. Bod A a bod B jsou paty kolmic sestrojených bodem X k rovině α a k rovině β. Rovina $\rho \equiv XAB$, je kolmá k přímce p. Přímka p je průsečnicí roviny α a roviny β, obě roviny protíná v přímkách $a \equiv \alpha * \rho$ a $b \equiv \beta * \rho$. Roviny α a β tvoří čtyři klíny, velikosti úhlů mezi danými klíny můžeme změřit pomocí přímek a a b, jelikož tyto přímky jsou rameny zmíněných úhlů daných klínů. V rovině můžeme zkonstruovat osy souměrnosti o' a o'' přímek a, b. Bod X je jedním z bodů, který patří do množiny všech bodů, kterou tvoří dvojice na sebe kolmých přímek o' a o''. Obdobně je tomu tak i v každé rovině ρ, kde $\rho \perp p$. V této rovině dostaneme též dvojici na sebe kolmých přímek o' a o''. Body přímek o' a o'' tvoří v rovině ρ množinu všech bodů požadované vlastnosti. Všechny dvojice přímky o' a přímky o'' vyplňují dvě na sebe kolmé roviny ω' a ω'', jejichž body mají požadovanou vlastnost. O bodech, které vznikly z rovin ω' a ω'' vyplývá, že každý bod, který má požadovanou vlastnost náleží rovině ω' nebo rovině ω''. A také bod, který náleží jedné z rovin ω' nebo ω'' má požadovanou vlastnost. (Holubář, 1983)



Obrázek 40: Obrázek k větě č. 6

7. Řešené příklady

7.1. Osa úsečky

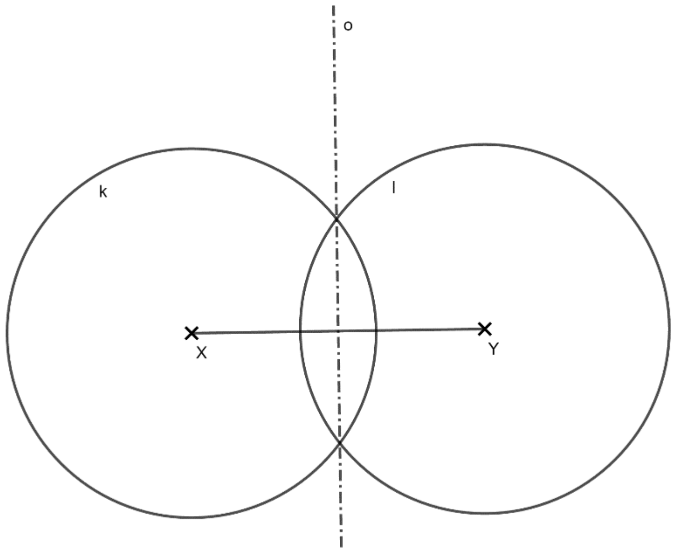
Příklad č. 1

Sestrojte množinu bodů, která má od dvou daných bodů X a Y stejnou vzdálenost.

1) Rozbor

Potřebujeme nalézt takovou přímku, aby pro body této přímky platila následující vlastnosti. Pokud narýsujeme jakýkoliv bod, který bude ležet na hledané přímce musí splňovat, že jeho vzdálenost je stejně velká jak k bodu X tak k bodu Y. Musíme tedy naleznout osu úsečky XY. Narýsujeme dvě kružnice takové, že body X a Y budou středy kružnic k a l. Průsečíky P_1a P_2, ve kterých se budou kružnice protínat budou náležet hledané ose úsečky o.

2) Konstrukce
   1. X, Y
   2. $k; k(X, r)$
   3. $l; l(Y, r)$
   4. $P_1;\ P_1 \in k \cap l$
   5. $P_2;\ P_2 \in k \cap l$
   6. $o; o \in P_1, o \in P_2$, o je osa úsečky



Obrázek 41: Konstrukce k příkladu č. 1

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má nekonečně mnoho řešení.

Příklad č. 2

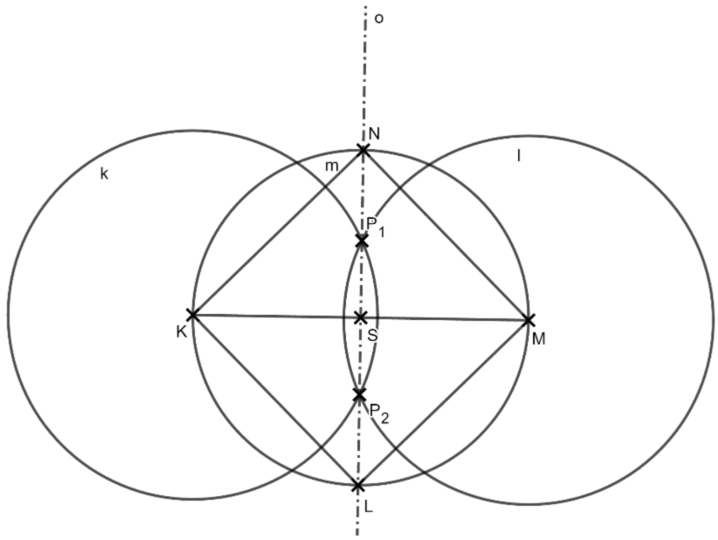
Sestrojte čtverec $KLMN$. Máte-li zadány pouze vrcholy K a M.

1) Rozbor

Po náčrtku čtverce $KLMN$, zjistíme, že vrcholy K a M jsou protějšími vrcholy hledaného útvaru. Nejprve si tedy připomeneme vlastnosti týkající se čtverce. Úhlopříčky ve čtverci mají stejné délky a jsou na sebe navzájem kolmé. Víme, že úsečka KM je jednou z úhlopříček čtverce. Musíme tedy nalézt osu úsečky KM. Osu úsečky sestrojíme pomocí kružnice k a l. Průsečíky kružnic leží na ose úsečky. Na ose o nalezneme druhou úhlopříčku hledaného čtverce. Tedy na ose o budou ležet i body L a N. V bodě, ve kterém se protíná úsečka KM a osa je střed hledaného čtverce. Stačí nám tedy z bodu S sestrojit kružnici o poloměru KS. V bodech, ve kterých se protne kružnice a osa úsečky sestrojíme zbývající dva vrcholy.

2) Konstrukce

1. $K,\ M$
2. $k; k(K,r)$
3. $l; l(M,r)$
4. $P_1;\ P_1 \in k \cap l$
5. $P_2;\ P_2 \in k \cap l$
6. $o; o \in P_1, o \in P_2, o$ je osa úsečky
7. $S; S \in o \cap KM$
8. $m; m(S, \left|\frac{KM}{2}\right|)$
9. $L, N; m \cap o = \{L, N\}$
10. čtverec $KLMN$



Obrázek 42: Konstrukce k příkladu č. 2

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má jedno řešení.

Příklad č. 3

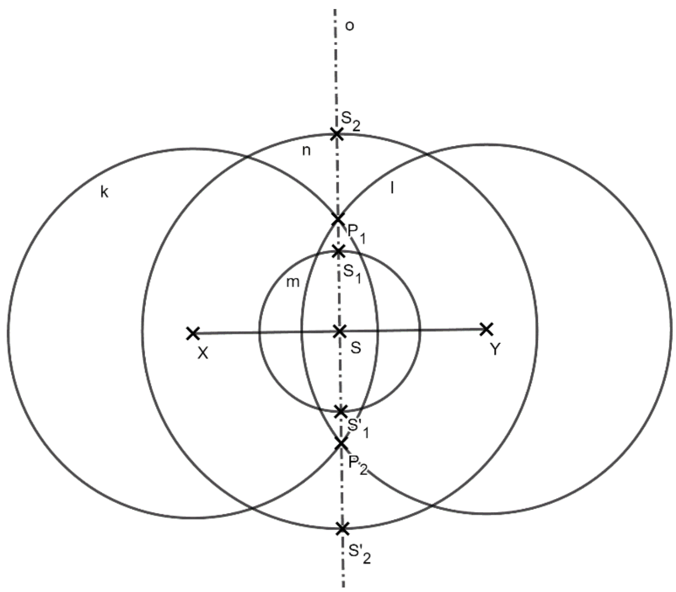
Sestrojte množinu všech středů kružnic, které procházejí body X a Y.

1) Rozbor

Potřebujeme nalézt přímku, na které budou ležet všechny středy kružnic. Pro tuto přímku musí platit, aby každý bod S (střed libovolné kružnice z hledané množiny), který leží na přímce musí mít stejnou vzdálenost od bodů X a Y. Čili musíme najít osu úsečky XY, na které budou ležet všechny středy kružnic. Bod, ve které se protíná úsečka XY a osa o pak bude hlavním středem pro kružnice, pomocí kterých vzniknout středy kružnic z hledané množiny středů. Protože budeme-li rýsovat z hlavního středu kružnice o různých poloměrech, tak průsečíky těchto kružnic a osy o jsou středy kružnic, které hledáme. Narýsujeme-li kružnici z libovolného bodu na ose o o poloměru vzdálenosti středu kružnice a jednoho z bodů X nebo Y automaticky bude kružnice procházet i druhým body. Protože oba body mají stejné vzdálenosti od středu kružnice.

2) Konstrukce

1. X, Y
2. $k; k(X, r)$
3. $l; l(Y, r)$
4. $P_1, P_2; k \cap l = \{P_1, P_2\}$
5. $o; o \in P_1, o \in P_2,$ o je osa úsečky
6. $S; S \in o \cap XY$
7. $m; m(S, r_1)$
8. $S_1, S_1'; m \cap o = \{S_1, S_1'\}$
9. $n; n(S, r_2)$
10. $S_2, S_2'; n \cap o = \{S_2, S_2'\}$



Obrázek 43: Konstrukce k příkladu č. 3

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má nekonečně mnoho řešení.

Příklad č. 4

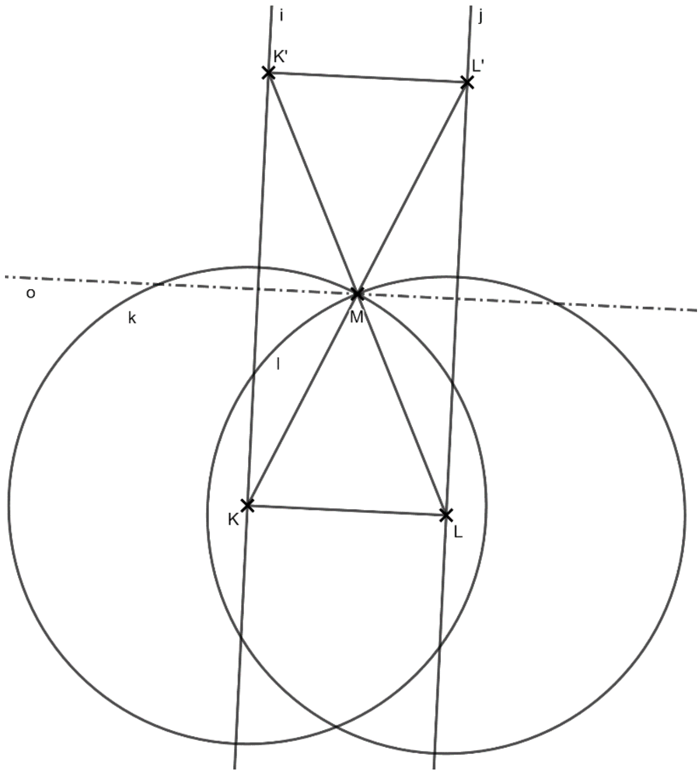
Sestrojte rovnoramenný trojúhelník KLM, pro který platí $|KM| = |LM| = 3\ cm$, $|KL| = 2{,}5\ cm$. K trojúhelníku KLM sestrojte jeho obraz $K'L'M'$ v osové souměrnosti podle osy o. Osa o je rovnoběžná s úsečkou KL a prochází vrcholem M.

1) Rozbor

Nejprve sestrojíme úsečku KL podle zadané velikosti. Z bodů K a L narýsujeme kružnice. V průsečíku kružnice vznikne vrchol M. Vrcholem budeme vést osu o, která musí být rovnoběžná s úsečkou KL. Jelikož bod M náleží ose o, bude bod M samodružným bodem. Ostatní dva body obrazy přeneseme pomocí kolmic přes osu o.

2) Konstrukce

1. $KL;\ |KL| = 2{,}5\ cm$
2. $k; k(K, 3\ cm)$
3. $l; l(L, 3cm)$
4. $M; M \epsilon k \cap l$, bod M je samodružný bod
5. $o; o \in M, o \parallel KL$, o je osa
6. $K'; O(o): K \to K'$
7. $L'; O(o): L \to L'$
8. obraz $K'L'M'$



Obrázek 44: Konstrukce k příkladu č. 4

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má dvě řešení.

7.2. Osa úhlu

Příklad č. 5

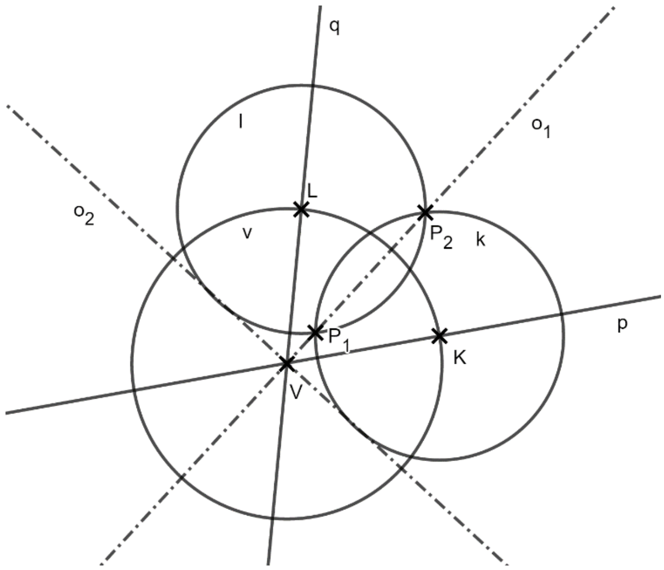
Sestrojte množinu bodů, která má od dvou daných různoběžek stejnou vzdálenost. Různoběžky svírají úhel 74°.

1) Rozbor

V tomto příkladu si musíme uvědomit, že hledaná množina bodů leží na ose úhlu, který svírají různoběžky. Protože všechny body, které budou ležet na ose úhlu, budou mít stejnou vzdálenost k oběma ramenům.

2) Konstrukce

1. sestrojíme $p,\, q,\, |\measuredangle pq| = 74°$
2. $V; V \in p \cap q$
3. $v; v(V, 2{,}5\ cm)$
4. $K; K \in p \cap v$
5. $L; L \in q \cap v$
6. $k; k(K, 2\ cm)$
7. $l; l(L, 2\ cm)$
8. $P_1, P_2; k \cap l = \{P_1, P_2\}$
9. $o_1; o_1 \in P_1, o_1 \in P_2,\ \ o_1$ je osa úhlu
10. $o_2; o_2 \perp o_1, o_2 \in V,\ \ o_2$ je osa úhlu



Obrázek 45: Konstrukce k příkladu č. 5

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má nekonečně mnoho řešení.

Příklad č. 6

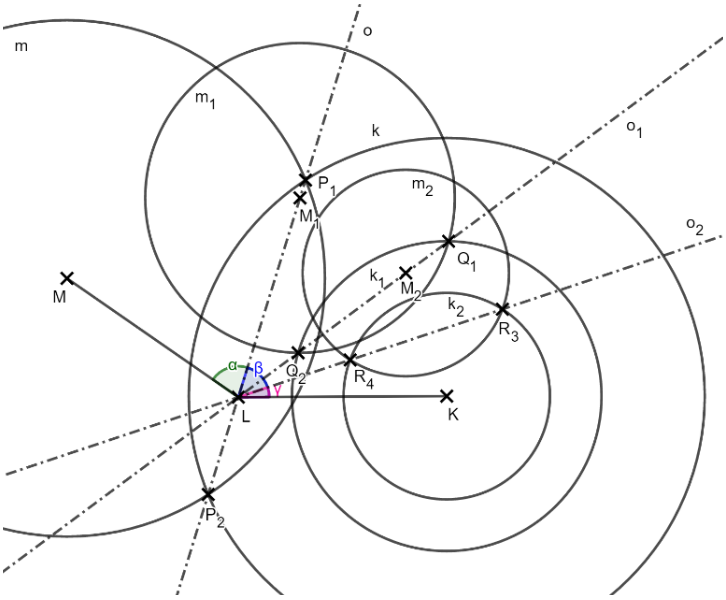
Do jednoho obrázku sestrojte úhly $\alpha = 145°, \beta = \frac{\alpha}{2}, \gamma = \frac{\alpha}{4}$. Pouze u úhlu α můžete použít úhloměr.

1) Rozbor

Úhel α narýsujeme podle pravítka. Úhel β musí být poloviční oproti úhlu α. Úhel α můžeme rozpůlit na dva stejné úhly sestrojením osy úhly. Musíme si uvědomit, že každý následující úhel má vzniknout úhlem předchozím pomocí jeho osy úhlu. Osu úhlu sestrojíme tak, že z bodů na ramenou úhlu sestrojíme stejnou kružnice tak, aby měly dva průsečíky. Místy, ve kterých se dvě narýsované kružnice protínají prochází osa úhlu. Tento postup zopakujeme i pro úhel γ.

2) Konstrukce

1. $\measuredangle KLM; |\measuredangle KLM| = \alpha = 145°$
2. $k; k(K, r)$
3. $m; m(M, r)$
4. $P_1, P_2; k \cap m = \{P_1, P_2\}$
5. $o; P_1 \in o, P_2 \in o,$ o je osa úhlu α
6. $M_1; M_1 \in o, |M_1L| = |LK|$
7. $k_1;\ k_1(K, r_1)$
8. $m_1; m_1(M_1, r_1)$
9. $Q_1, Q_2;\ k_1 \cap m_1 = \{Q_1, Q_2\}$
10. $o_1; Q_1 \in o_1, Q_2 \in o_1,$ o_1 je osa úhlu β
11. $M_2; M_2 \in o_1, |M_2L| = |LK|$
12. $k_2;\ k_2(K, r_2)$
13. $m_2; m_2(M_2, r_2)$
14. $R_1, R_2;\ k_2 \cap m_2 = \{R_1, R_2\}$
15. $o_2; R_1 \in o_2, R_2 \in o_2,$ o_2 je osa úhlu γ



Obrázek 46: Konstrukce k příkladu č. 6

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má jedno řešení.

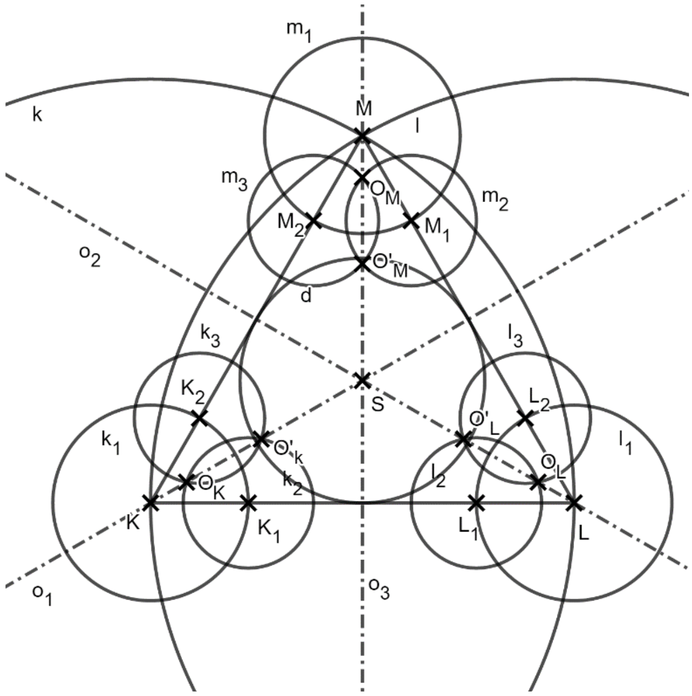
Příklad č. 7

Sestrojte rovnostranný trojúhelník KLM, pro který platí $|KL| = 6{,}5\ cm$ a dále kružnici vepsanou tomuto trojúhelníku.

1) Rozbor

Musíme si uvědomit, že rovnostranný trojúhelník má všechny tři strany stejně dlouhé. Proto nám stačí znát jen velikost jedné strany a podle ní můžeme narýsovat i ostatní. Z bodů K a L sestrojíme kružnice o poloměru délky strany KL. V bodech, ve kterých se nám kružnice protnou vzniknou vrcholy M a M'. Další část zadání je sestrojit kružnici vepsanou, což znamená, že musíme sestrojit osy úhlů vrcholů daného trojúhelníku. V bodě, ve kterém se osy úhlů protnou bude střed kružnice vepsané. A její poloměr bude dán středem a jedná ze stran trojúhelníku.

2) Konstrukce



Obrázek 47: Konstrukce k příkladu č. 7

1. $KL; |KL| = 6{,}5\ cm$
2. $k; k(K, 6{,}5\ cm)$
3. $l; l(L, 6{,}5\ cm)$
4. $M; M \in k \cap l$
5. $k_1; k_1(K, 1{,}5\ cm)$
6. $K_1; K_1 \in k_1 \cap KL$
7. $K_2; K_2 \in k_1 \cap KM$
8. $k_2; k_2(K_1, 1\ cm)$
9. $k_3; k_3(K_2, 1\ cm)$
10. $O_K, O'_K; k_2 \cap k_3 = \{O_K, O'_K\}$
11. $o_1; o_1 \in O_K, o_1 \in O'_K$, o_1 je osa úhlu
12. $l_1; l_1(L, 1{,}5\ cm)$
13. $L_1; L_1 \in l_1 \cap KL$
14. $L_2; L_2 \in l_1 \cap LM$
15. $l_2; l_2(L_1, 1\ cm)$
16. $l_3; l_3(L_2, 1\ cm)$
17. $O_L, O'_L; l_2 \cap l_3 = \{O_L, O'_L\}$
18. $o_2; o_2 \in O_L, o_2 \in O'_L$, o_2 je osa úhlu

19. $m_1; m_1(M, 1{,}5\ cm)$

20. $M_1; M_1 \in m_1 \cap LM$

21. $M_2; M_2 \in m_1 \cap MK$

22. $m_2; m_2(M_1, 1\ cm)$

23. $m_3; m_3(M_2, 1\ cm)$

24. $O_M, O'_M; m_2 \cap m_3 = \{O_M, O'_M\}$

25. $o_3; o_3 \in O_M, o_3 \in O'_M$, o_3 je osa úhlu

26. $S; o_1 \cap o_2 \cap o_3 = \{S\}$

27. $v; v(S, |vKL|)$

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má dvě řešení.

Příklad č. 8

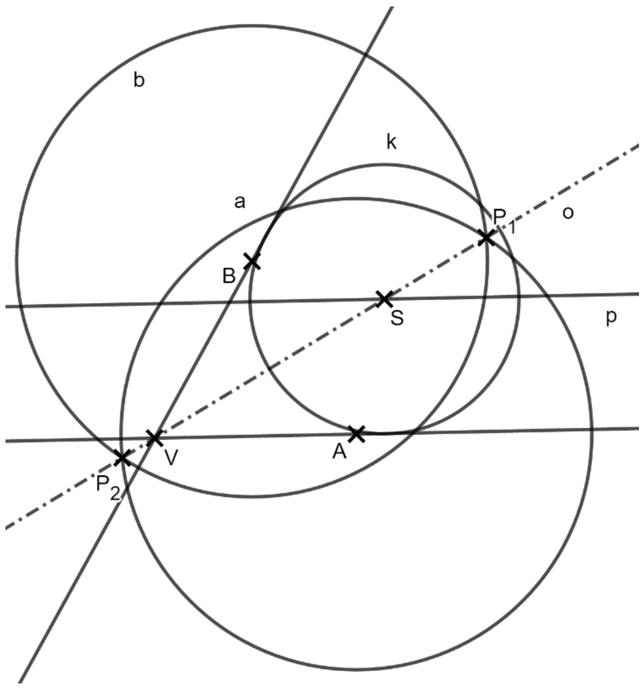
Sestrojte úhel α o velikosti 60° a sestrojte kružnici k, která se dotýká obou jeho ramen a má poloměr 2 cm.

1) Rozbor

V tomto příkladu máme na výběr ze dvou variant, jak se k dané kružnici dopracovat. My zkombinujeme variantu osy úhlu a rovnoběžky s jednou z ramen příslušného úhlu. Existuje ještě varianta, ve které nemusíme sestrojovat osu úhlu, ale narýsujeme rovnoběžky k oběma ramenům úhlu.

Nejprve si musíme uvědomit, že střed hledané kružnice musí mít stejnou vzdálenost k oběma ramenům. Sestrojíme tedy osu úhlu. Protože z osy úhlu mají všechny body stejnou vzdálenost k oběma ramenům daného úhlu. Dále víme, že kružnice má mít poloměr 2 cm. Střed kružnice tedy bude ležet na rovnoběžce vzdálené 2 cm od jednoho z ramen úhlu. Poslední věc, kterou si musíme uvědomit, že střed S leží na průsečíku osy úhlu a sestrojené rovnoběžky. Pak už jen stačí narýsovat hledanou kružnici.

2) Konstrukce
   1. $\measuredangle AVB, |\measuredangle AVB| = 60°$
   2. $a; a(A, 3{,}5\ cm)$
   3. $b; b(B, 3{,}5\ cm)$
   4. $P_1, P_2; a \cap b = \{P_1, P_2\}$
   5. $o; o \in P_1, o \in P_2$
   6. $p; p \parallel VA, |pVA| = 2\ cm$
   7. $S; S \in o \cap p$
   8. $k; k(S, 2cm)$



Obrázek 48: Konstrukce k příkladu č. 8

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má jedno řešení.

7.3. Osa pásu

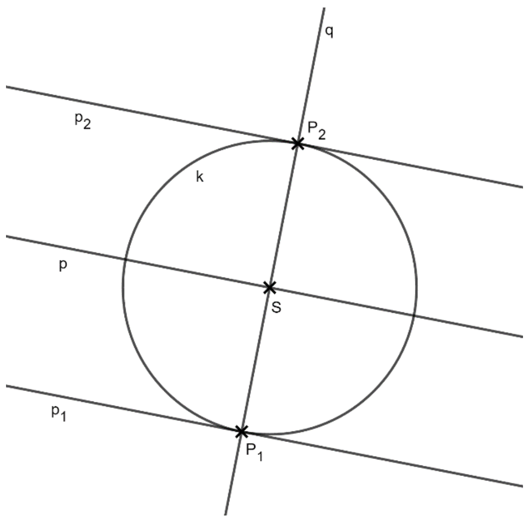
Příklad č. 9

Sestrojte množinu všech bodů roviny, ve které je každý bod od přímky p vzdálen přesně 3 cm nebo méně.

1) Rozbor

Musíme si uvědomit, že hledáme prostor, ve kterém jsou body vzdáleny tři anebo méně centimetrů. Za prvé ohraničíme prostor 3 cm, na každou stranu od přímky p sestrojením rovnoběžek vzdálených 3 cm od dané přímky. Dále se musíme zamyslet nad tím, co bude množinou budou, kterou hledáme, protože samostatné ohraničení dvěma rovnoběžkami nestačí. Může nastat případ, že bod nebude náležet jedné z rovnoběžek (například bude vzdálen 2 cm) od přímky p. Proto si musíme uvědomit, že hledanou množinou bodů je pás, ve kterém je naše příslušná přímka osou pásu. Stačí sestrojit kružnici o poloměru 3 cm se středem na dané přímce. Ze středu kružnice vést kolmici na přímku p a v průsečíkách kolmice a kružnice narýsovat rovnoběžky.

2) Konstrukce
   1. p
   2. $S; S \in p$
   3. $k; k(S, 3\ cm)$
   4. $q; q \perp p, S \in q$
   5. $P_1, P_2; p \cap k = \{P_1, P_2\}$
   6. $p_1; p_1 \parallel p, P_1 \in p_1$
   7. $p_2; p_2 \parallel p, P_2 \in p_2$



Obrázek 49: Konstrukce k příkladu č. 9

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má nekonečně mnoho řešení.

Příklad č. 10

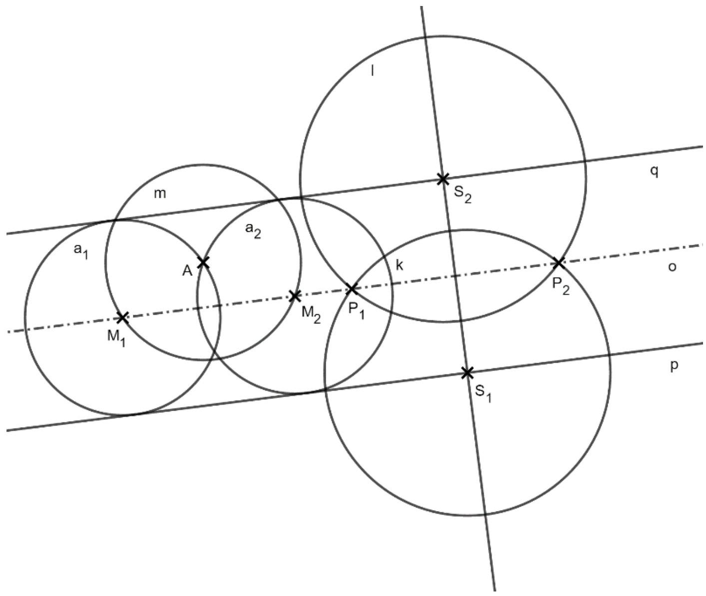
Sestrojte všechny kružnice, které procházejí bodem A a dotýkají se přímky p a přímky q. Bod A leží ve vnitřní oblasti pásu, který ohraničují přímky p a q.

1) Rozbor

Zde si musíme uvědomit, že kružnice, které hledáme, musí mít středy na ose pásu. Protože se mají dotýkat obou rovnoběžek a osa pásu má stejnou vzdálenost jak k jedné přímce, tak k přímce druhé. Ještě jednu důležitou funkci plní osa pásu v této úloze a to tu, že nám určí poloměr hledaných kružnic. Poloměr kružnic bude vzdálenost rovnoběžky a osy pásu. Abychom získali stejnou vzdálenost i k bodu, kterého se má kružnice dotýkat sestrojíme kružnici ze zadaného bodu o poloměru opět vzdáleností jedné z rovnoběžek a osy pásu. V průsečíkách, ve kterých se nám kružnice protne s osou pásu se nachází středy hledaných kružnic. V poslední řadě nám stačí z nalezených středů kružnic vyrýsovat hledané kružnice.

2) Konstrukce

1. $A, p, q, p \parallel q$
2. $s; s \perp p$
3. $S_1; S_1 \in p \cap r$
4. $S_2; S_2 \in q \cap r$
5. $k; k(S_1, r)$
6. $l; l(S_2, r)$
7. $P_1, P_2; k \cap l = \{P_1, P_2\}$
8. $o; o \in P_1,\ o \in P_2,\ o$ je osa pásu
9. $m; m(A, |po|)$
10. $M_1, M_2; m \cap o = \{M_1, M_2\}$
11. $a_1; a_1(M_1, |po|)$
12. $a_2; a_2(M_2, |po|)$



Obrázek 50: Konstrukce k příkladu č. 10

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má dvě řešení.

Příklad č. 11

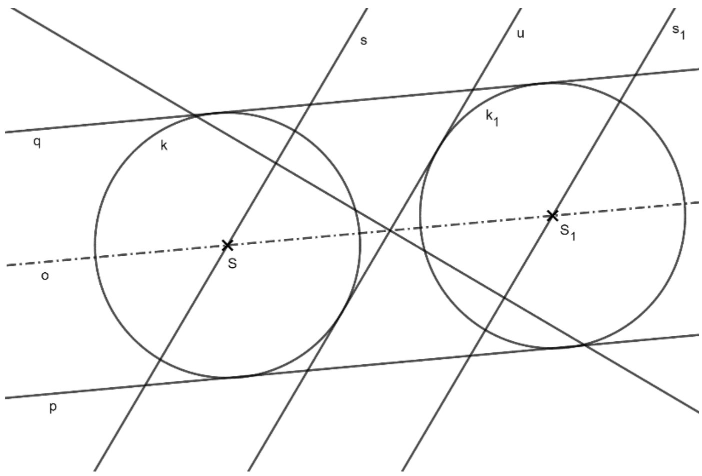
Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají dvojice rovnoběžných přímek $p,\ q,$ pro které platí $|pq| = 6\ cm$ a přímky u, která je od daných přímek různoběžná a svírá s nimi úhel 55°.

1) Rozbor

Po sestrojení zadaných přímek musíme zjistit na jaké množině bodů leží středy hledaných kružnic. Opět se musí dotýkat obou rovnoběžných přímek. Jejich středy leží na ose pásu. Zároveň se musí dotýkat i různoběžné přímky. S různoběžnou přímkou sestrojíme rovnoběžky na obě strany. Ty jsou vzdálené od dané přímky polovinu vzdálenosti mezi zadanými rovnoběžkami p, q. V bodech, ve kterých se protínají sestrojené rovnoběžky s a s_1 s osou pásu jsou středy hledaných kružnic. Zbývá pouze narýsovat hledané kružnice poloměrem, se kterým jsou od sebe vzdáleny rovnoběžky s a u nebo p a o (jejich vzdálenost je stejná).

2) Konstrukce

1. $p, q, u, |pq| = 6\ cm, |\sphericalangle pu| = 55°$
2. $o;\ |po| = |oq| = 3\ cm,\quad o$ je osa pásu
3. $s;\ |su| = 3\ cm, s \parallel u$
4. $s_1;\ |s_1u| = 3\ cm, s_1 \parallel u$
5. $S; S \in s \cap u$
6. $S_1; S_1 \in s_1 \cap u$
7. $k; k(S, 3\ cm)$
8. $k_1; k_1(S_1, 3\ cm)$



Obrázek 51: Konstrukce k příkladu č. 11

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má dvě řešení.

Příklad č. 12

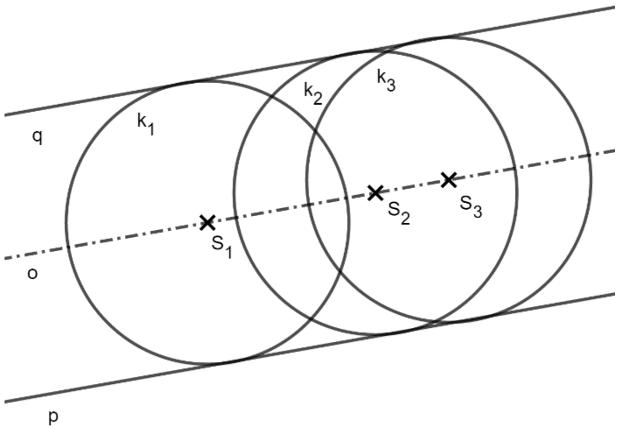
Sestrojte množinu středů kružnic, které se dotýkají daných dvou rovnoběžek p, q.

1) Rozbor

Abychom mohli sestrojit hledanou množinu středů kružnic, musíme narýsovat osu pásu. Osa pásu je stejně vzdálená od obou přímek. Tím pádem, pokud budou středy kružnic ležet na osa pásu a budou mít poloměr o vzdálenosti osy o a jedné z přímek. Tak se sestrojené kružnice z těchto středů budou dotýkat obou zadaných přímek.

2) Konstrukce

1. p, q
2. $o; o \parallel p, |op| = \frac{|pq|}{2}$, o je osa pásu
3. $k_1; k_1(S_1, |op|)$
4. $k_2; k_2(S_2, |op|)$
5. $k_3; k_3(S_3, |op|)$



Obrázek 52: Konstrukce k příkladu č. 12

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má nekonečně mnoho řešení.

7.4. Kružnice

Příklad č. 13

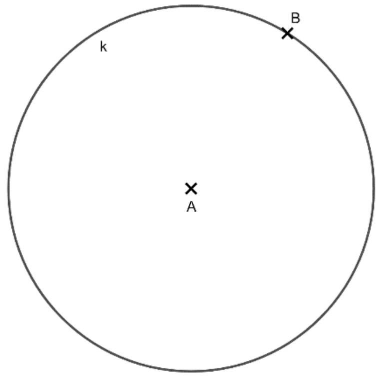
Sestrojte k libovolném bodu A množinu všech bodů, které mají od daného bodu vzdálenost 4 cm.

1) Rozbor

Množina všech bodů, které mají od zadaného bodu vzdálenost 4 cm budou ležet na kružnici s poloměrem 4 cm. Bod A je středem této kružnice.

2) Konstrukce

1. A
2. $k; k(A, 4\ cm)$
3. $B; B \in k$



Obrázek 53: Konstrukce k příkladu č. 13

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má nekonečně mnoho řešení.

Příklad č. 14

Sestrojte trojúhelník KLM, máte-li zadanou úsečku $|KL| = 4\ cm$, stranu $k = 5\ cm$ a stranu $l = 6\ cm$.

1) Rozbor

V této úloze máme přímo zadané body K a L a potřebujeme najít bod M. Víme, že strana k má velikost 5 cm. Bod M tedy musí ležet na množině bodů, která má od bodu L vzdálenost 5 cm. Stejně tak víme, že strana l má velikost 6 cm. Bod M musí zároveň ležet i na množině bodů, která má od bodu K vzdálenost 6 cm. Množinu bodů, která má od určitého bodu danou vzdálenost najdeme sestrojením kružnice o příslušném poloměru. Sestrojíme z bodu L kružnici o poloměru vzdálenosti strany k. Obdobně z bodu K sestrojíme kružnici o poloměru vzdálenosti strany l. V průsečíku, ve kterém se tyto dvě kružnice protnou vznikne bod M. Poté stačí pouze dorýsovat jednotlivé strany trojúhelníka.

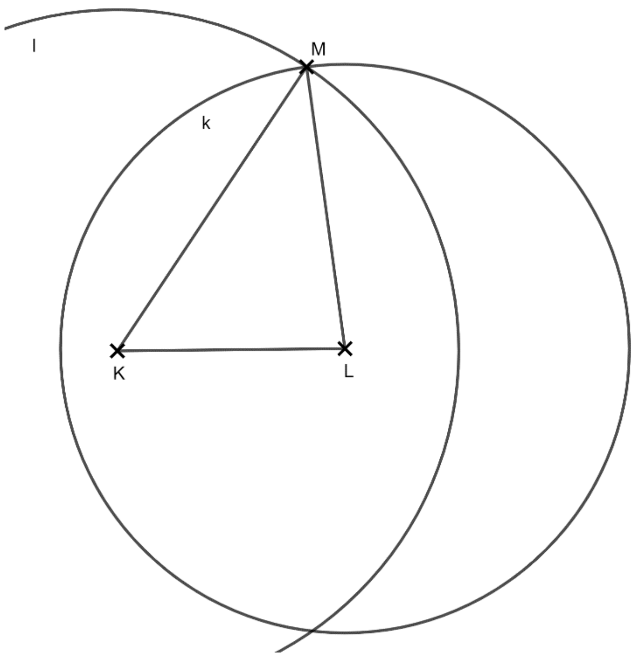
2) Konstrukce
   1. $|KL| = 4\ cm$
   2. $k; k(L, 5\ cm)$
   3. $l; l(K, 6\ cm)$
   4. $M; M \in k \cap l$
   5. ΔKLM

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má 2 řešení.



Obrázek 54: Konstrukce k příkladu č. 14

Příklad č. 15

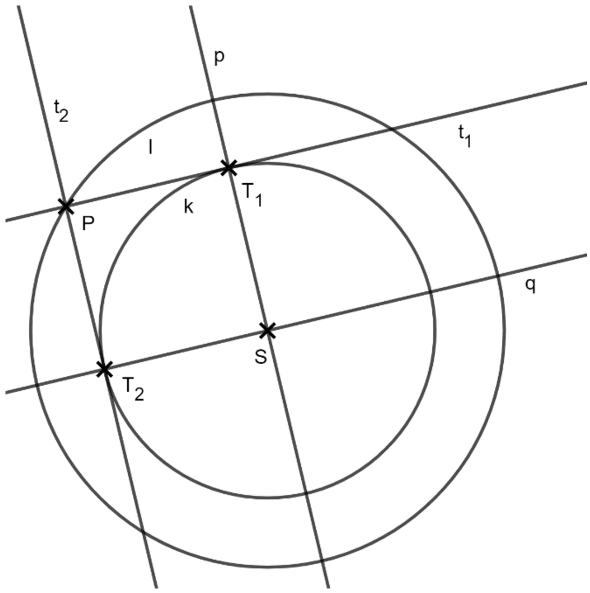
Sestrojte množinu průsečíků všech dvojic navzájem kolmých tečen ke kružnici k.

1) Rozbor

V této úloze si musíme nejprve sestrojit dvojici na sebe kolmých tečen. Pomocí přímky procházející středem kružnice sestrojíme bod dotyku, ve kterém se bude tečna dotýkat kružnice. Z bodu dotyku narýsujeme kolmici na přímku. Tato kolmice je jednou z tečen kružnice. Ze středu kružnice vedeme přímku, která bude rovnoběžná s tečnou ke kružnici. Bod, ve kterém se protne rovnoběžka s kružnicí je bod dotyku druhé tečny ke kružnici. Z bodu dotyku sestrojíme kolmici na přímku procházející středem kružnice. Tato přímka je druhou tečnou ke kružnici. Zbývá sestrojit kružnici z bodu S, která má poloměr o velikosti středu kružnice a průsečíku dvou na sebe kolmých tečen. Průsečík dvou na sebe kolmých tečen je jedním z hledaných průsečíků. Zbylé průsečíky leží na sestrojené kružnici l.

2) Konstrukce

1. $k(S, r)$
2. $p; p \in S$
3. $T_1; T_1 \in k \cap p$
4. $t_1; t_1 \in T_1, t_1 \perp p$
5. $q; q \in S, q \parallel t_1$
6. $T_2; T_2 \in k \cap q$
7. $t_2; t_2 \in T_2, t_2 \perp q$
8. $P; P \in t_1 \cap t_2$
9. $l; l(S, |SP|)$



Obrázek 55: Konstrukce k příkladu č. 15

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má 4 řešení.

Příklad č. 16

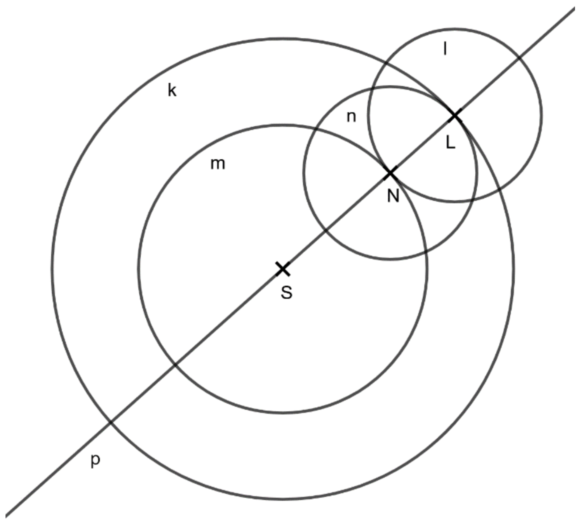
Sestrojte množinu středů všech kružnic, které mají poloměr 1,5 cm a dotýkají se kružnice k z vnitřní části kružnice. Kružnice k má poloměr 4 cm.

1) Rozbor

Množina středů všech kružnic bude ležet na kružnici. Kružnice bude mít střed v bodě S a poloměr této kružnice je dán rozdílem poloměrů zadané kružnice a kružnic hledaných. Nejprve si sestrojíme přímku, která prochází středem zadané kružnice. Z bodu, ve kterém se protíná kružnice s přímkou bude střed pomocné kružnice. Pomocná kružnice bude mít poloměr stejný jako kružnice hledaných středů. V průsečíku přímky a pomocné kružnice je jeden z hledaných středů kružnic. Narýsujeme kružnici z bude S o poloměru bodu S a průsečíku pomocné kružnice s přímkou. Na této kružnici leží množina středů všech kružnic, které mají poloměr 1,5 cm a dotýkají se zadané kružnice.

2) Konstrukce

1. $k(S, 4\ cm)$
2. $p; p \in S$
3. $L; L \in k \cap p$
4. $l; l(L, 1{,}5\ cm)$
5. $N; N \in l \cap p$
6. $n; n(N, 1{,}5\ cm)$



Obrázek 56: Konstrukce k příkladu č. 16

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má nekonečně mnoho řešení.

7.5. Ekvidistanta

Příklad č. 17

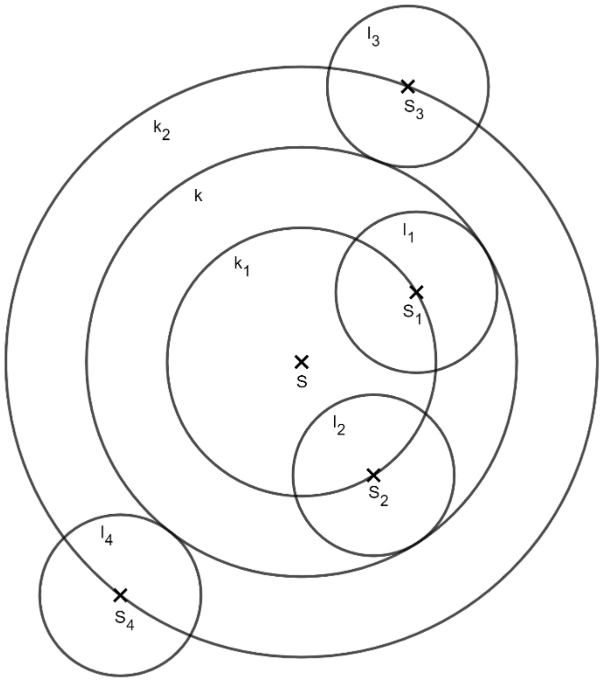
Sestrojte množinu všech středů kružnic, které mají poloměr 1,5 cm a dotýkají se kružnice $k(S, 4\ cm)$.

1) Rozbor

Hledaná množina středů kružnic musí ležet ve stejné vzdálenosti od zadané kružnice. Není specifikováno, zda se mají kružnice dotýkat zadané kružnice z vnější části nebo vnitřní části. Musíme tedy sestrojit obě varianty. K této úloze nám pomůže ekvidistanta kružnice. Ekvidistanta bude vzdálenosti poloměru hledaných kružnic. V tomto případě tedy $r = 1{,}5\ cm$. Množina středů kružnic bude ležet na vnější i vnitřní ekvidistantě kružnice. Ze středů nám stačí pouze sestrojit samotné kružnice a příklad máme vyřešen.

2) Konstrukce

1. k
2. $k_1; k_1(S, 2{,}5\ cm)$
3. $k_2; k_2(S, 5{,}5\ cm)$
4. $S_1; S_1 \in k_1$
5. $S_2; S_2 \in k_1$
6. $S_3; S_3 \in k_2$
7. $S_4; S_4 \in k_2$
8. $l_1; l_1(S_1, 1{,}5\ cm)$
9. $l_2; l_2(S_2, 1{,}5\ cm)$
10. $l_3; l_3(S_3, 1{,}5\ cm)$
11. $l_4; l_4(S_4, 1{,}5\ cm)$



Obrázek 57: Konstrukce k příkladu č. 17

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má nekonečně mnoho řešení.

Příklad č. 18

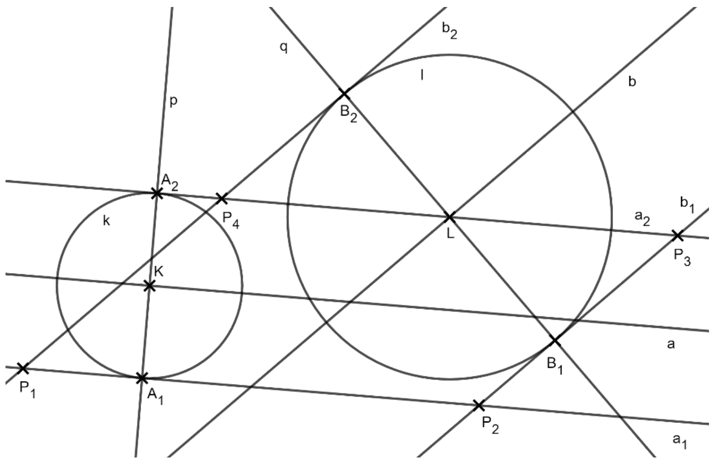
Sestrojte množinu všech bodů, které mají od dvou různoběžných přímek a, b následující vzdálenosti: od přímky a jsou vzdáleny $2\ cm$ a od přímky b jsou vzdáleny $3{,}5\ cm$.

1) Rozbor

V tomto příkladu musíme sestrojit ekvidistanty obou zadaných přímek a i b. Hledaná množina bodů leží někde na ekvidistantách těchto přímek. Ekvidistanta přímky a má vzdálenost $2\ cm$. Ekvidistanta přímky b má vzdálenost $3{,}5\ cm$. Jelikož body mají zadané přesné vzdálenosti, jak daleko leží od obou daných přímek. Leží tedy na průsečíkách sestrojených ekvidistant přímek. Protože jen v těchto průsečíkách splňují body obě zadané vzdálenosti.

2) Konstrukce

1. a, b
2. $K; K \in a$
3. $k; k(K, 2\ cm)$
4. $L; L \in b$
5. $l; l(L, 3{,}5\ cm)$
6. $p; p \perp a, K \in p$
7. $A_1, A_2; p \cap k = \{A_1, A_2\}$
8. $q; q \perp b, L \in q$
9. $B_1, B_2; q \cap l = \{B_1, B_2\}$
10. $a_1; a_1 \parallel a, A_1 \in a_1$
11. $a_2; a_2 \parallel a, A_2 \in a_2$
12. $b_1; b_1 \parallel b, B_1 \in b_1$
13. $b_2; b_2 \parallel b, B_2 \in b_2$
14. $P_1; P_1 \in a_1 \cap b_2$
15. $P_2; P_2 \in a_1 \cap b_1$
16. $P_3; P_3 \in a_2 \cap b_1$
17. $P_4; P_4 \in a_2 \cap b_2$



Obrázek 58: Konstrukce k příkladu č. 18

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má 4 řešení.

Příklad č. 19

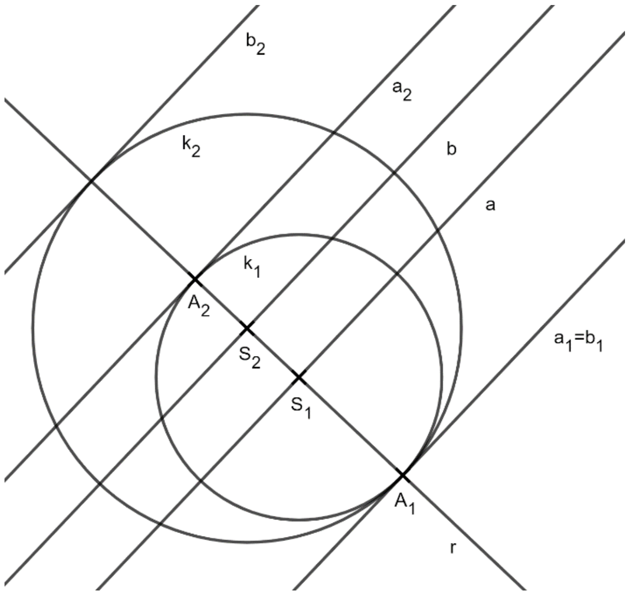
Sestrojte množinu všech bodů, která splňuje od dvou rovnoběžných přímek a a b následující vzdálenosti: od přímky a jsou body vzdáleny $1\,cm$ a od přímky b jsou body vzdáleny $3\,cm$. Přímky a a b jsou od sebe navzájem vzdálené $2\,cm$.

1) Rozbor

V této úloze máme sestrojit množinu všech bodů, které opět musí splňovat vzdálenosti od obou přímek. Opět sestrojíme ekvidistanty obou rovnoběžných přímek. Jelikož máme dvě různoběžné přímky a jejich ekvidistanty přímek jsou s nimi také rovnoběžné. Úloha bude mít řešení pouze v případě, že nám bude splývat ekvidistanta jedné přímky s ekvidistantou druhé přímky. Hledaná množin bodů leží právě na těchto splývajících přímkách. Pokud by přímky nesplývaly, úloha by neměla žádné řešení.

2) Konstrukce

1. a a b, $|ab| = 1cm$
2. $r; r \perp p$
3. $S_1; S_1 \in a \cap r$
4. $S_2; S_2 \in b \cap r$
5. $k_1; k_1(S_1, 2\ cm)$
6. $k_2; k_2(S_2, 3\ cm)$
7. $A_1, A_2; k_1 \cap r = \{A_1, A_2\}$
8. $a_1; a_1 \perp r, A_1 \in a_1$
9. $a_2; a_2 \perp r, A_2 \in a_2$
10. $b_1; b_1 \perp r, b_1 \in k_2 \cap r$
11. $b_2; b_2 \perp r, b_2 \in k_2 \cap r$



Obrázek 59: Konstrukce k příkladu č. 19

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má nekonečně mnoho řešení.

Příklad č. 20

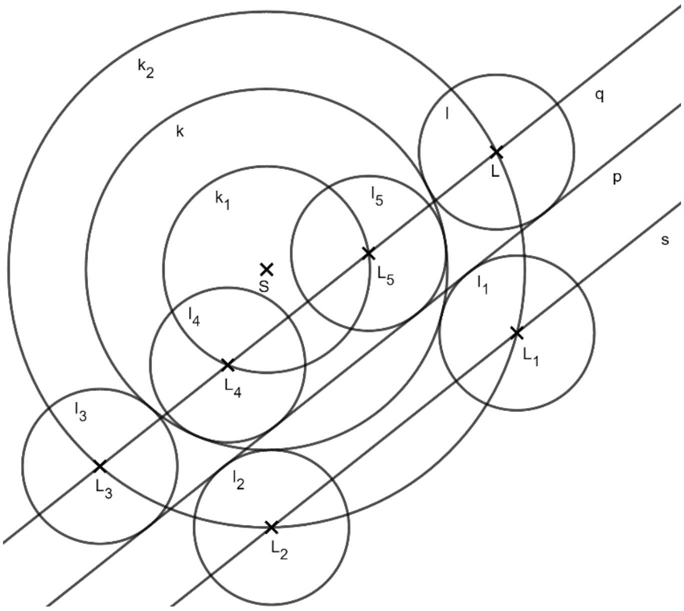
Sestrojte množinu všech kružnic s poloměrem $1{,}5\ cm$, které se dotýkají kružnice $k(S, 3{,}5\ cm)$ a přímky p. Pro přímku a kružnici platí $|Sp| = 2{,}5\ cm$.

1) Rozbor

V této úloze použijeme dvě ekvidistanty a to ekvidistantu kružnice a ekvidistantu přímky. Potřebujeme zjistit, kde leží středy hledaných kružnic. Pokud mají kružnice poloměr $1{,}5\ cm$ a musí se dotýkat zadané kružnice, tak jejich středy leží na edvidistantě kružnice k se vzdáleností $1{,}5\ cm$. Další podmínkou je, aby se dotýkaly i zadané přímky. Musíme tedy udělat i ekvidistantu přímky p se vzdáleností $1{,}5\ cm$. V průsečíkách ekvidistanty kružnice a ekvidistanty přímky leží hledané středy kružnic. V posledním kroku stačí sestrojit jednotlivé kružnice o poloměru $1{,}5\ cm$.

2) Konstrukce

1. $k(S, 3{,}5), p, |Sp| = 2{,}5\ cm$
2. $k_1; k_1(S, 2\ cm)$
3. $k_2; k_2(S, 5\ cm)$
4. $q; q \parallel p, |qp| = 1{,}5\ cm$
5. $s; s \parallel p, |ps| = 1{,}5\ cm$
6. $L, L_3; q \cap k_2 = \{L, L_3\}$
7. $l; l(L, 1{,}5\ cm)$
8. $l_3; l_3(L_3, 1{,}5\ cm)$
9. $L_4, L_5; q \cap k_1 = \{L_4, L_5\}$
10. $l_4; l_4(L_4, 1{,}5\ cm)$
11. $l_5; l_5(L_5, 1{,}5\ cm)$
12. $L_1, L_2; s \cap k_2 = \{L_1, L_2\}$
13. $l_1; l_1(L_1, 1{,}5\ cm)$
14. $l_2; l_2(L_2, 1{,}5\ cm)$



Obrázek 60: Konstrukce k příkladu č. 20

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha obsahuje 6 řešení.

7.6. Thaletova kružnice

Příklad č. 21

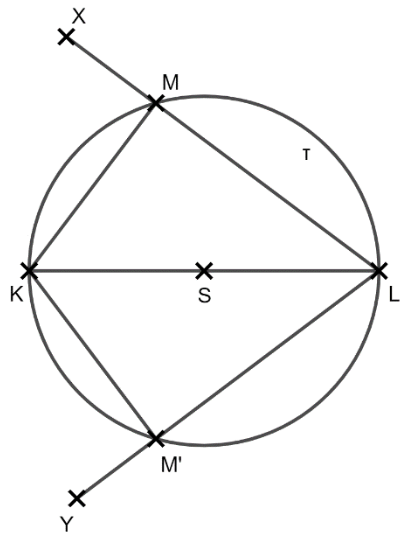
Sestrojte pravoúhlý trojúhelník KLM, tak aby pravý úhel byl u vrcholu M a $\measuredangle KLM = 37°$. Najděte všechny body M.

1) Rozbor

V této úloze musíme sestrojit množinu bodů, ve které uvidíme bod M pod úhlem 90°, protože pravý úhel náleží vrcholu M. Z toho vyplývá, že bod M leží na Thaletově kružnici. Sestrojíme tedy bod S, který je středem úsečky KL. Vrchol L svírá úhel 37°. V průsečíku ramena LX s Thaletovou kružnicí leží hledaný bod M. Bod M' sestrojíme stejným postupem jako bod M akorát zrcadlově na druhou stranu úsečky KL.

2) Konstrukce

1. KL
2. $S; \left|\frac{KL}{2}\right| = S$
3. $\tau; \tau(S, |KL|)$, τ je Thaletova kružnice
4. $\measuredangle KLX;\ |\measuredangle KLX| = 37°$
5. $M; M \in LX \cap \tau$
6. ΔKLM
7. $\measuredangle KLY;\ |\measuredangle KLY| = 37°$
8. $M'; M' \in LY \cap \tau$
9. $\Delta KLM'$



Obrázek 61: Konstrukce k příkladu č. 21

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má 2 řešení.

Příklad č. 22

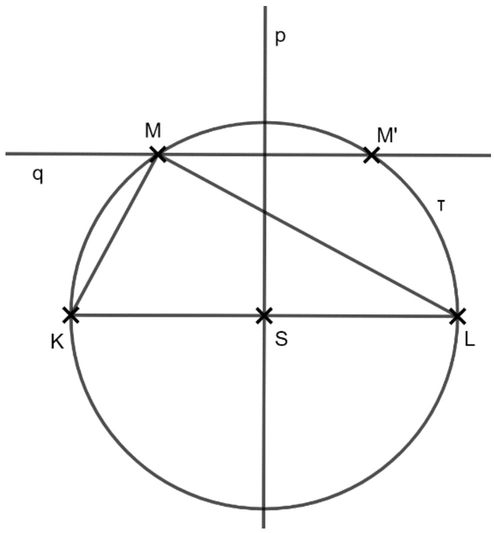
Sestrojte pravoúhlý trojúhelník KLM, znáte-li stranu $m = 6\ cm$, $v_m = 2{,}5\ cm$ a víte, že pravý úhel je u vrcholu M.

1) Rozbor

V této úloze známe stranu KL a výšku na stranu m. Pata výšky je kolmá na příslušnou stranu, tedy výška ke straně m je kolmá na stranu m. Z toho vyplývá, že vrchol M bude náležet rovnoběžné přímce s úsečkou KL, které jsou od sebe vzdálené velikostí výšky ke straně m. Dále víme, že u vrcholu M je pravý úhel. Musíme tedy sestrojit množinu bodů, pomocí které uvidíme daný vrchol pod úhlem 90°, což nám umožňuje Thaletova kružnice. V průsečíkách Thaletovy kružnice a sestrojené rovnoběžky vzniknou vrcholy M a M'. Už stačí pouze dorýsovat strany hledaného trojúhelníku.

2) Konstrukce

1. $m = |KL|$
2. $S; \left|\frac{KL}{2}\right| = S$
3. $\tau; \tau(S, \left|\frac{KL}{2}\right|)$, τ je Thaletova kružnice
4. $p; p \in S, p \perp KL$
5. $q; q \perp p, |KLq| = 2{,}5\ cm$
6. $M, M'; q \cap \tau = \{M, M'\}$
7. ΔKLM



Obrázek 62: Konstrukce k příkladu č. 22

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má 4 řešení.

Příklad č. 23

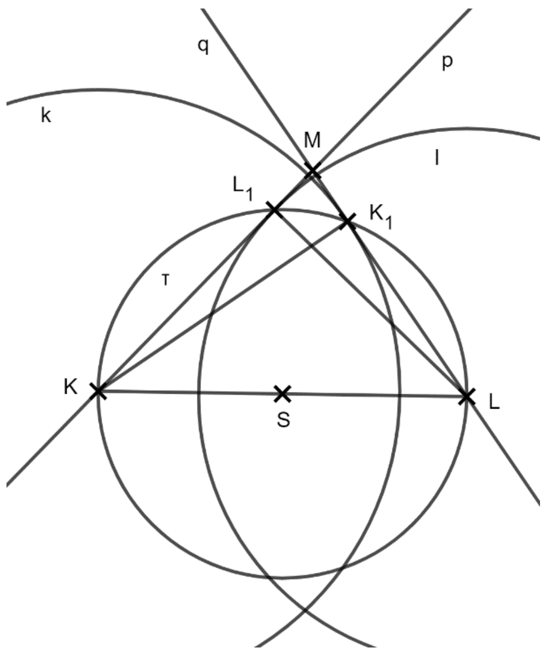
Sestrojte trojúhelník KLM, znáte-li $|KL| = 5{,}5\ cm$, $v_k = 4{,}5\ cm$, $v_l = 4\ cm$.

1) Rozbor

V této úloze známe základnu KL, výšku ke straně k a výšku ke straně l. Výška trojúhelníku je kolmá na příslušnou stranu. Patu výšky vidíme pod úhlem $90°$. Sestrojíme-li Thaletovu kružnici, zjistíme množinu bodů pravých úhlů všech pravoúhlých trojúhelníků s přeponou KL. My tedy zjistíme, na které množině budou ležet paty obou výšek. Také víme velikosti obou výšek. Výšky leží na množině bodů, které jsou od příslušných vrcholů vzdálené velikostí výšky. Což znamená, že můžeme sestrojit kružnice z vrcholů trojúhelníka s poloměry vzdáleností výšek. V bodech, ve kterých se protne Thaletova kružnice s kružnicemi o poloměrech obou výšek budou ležet paty výšek. Paty výšek leží na stranách k příslušným vrcholům a výšky jsou kolmé na strany trojúhelníka. Narýsujeme přímky kolmé na obě výšky tak, aby zároveň procházely patami výšek. V průsečíku těchto dvou přímek leží poslední vrchol M hledaného trojúhelníku.

2) Konstrukce

1. $|KL| = 5{,}5\ cm$
2. $S; \left|\frac{KL}{2}\right| = S$
3. $\tau; \tau(S, \left|\frac{KL}{2}\right|)$
4. $k; k(K, 4{,}5\ cm)$
5. $K_1; K_1 \in \tau \cap k$
6. $l; l(L, 4\ cm)$
7. $L_1; L_1 \in \tau \cap l$
8. $p; p \in L_1, p \perp LL_1$
9. $q; q \in K_1, q \perp KK_1$
10. $M; M \in p \cap q$
11. ΔKLM



Obrázek 63: Konstrukce k příkladu č. 23

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má 2 řešení.

Příklad č. 24

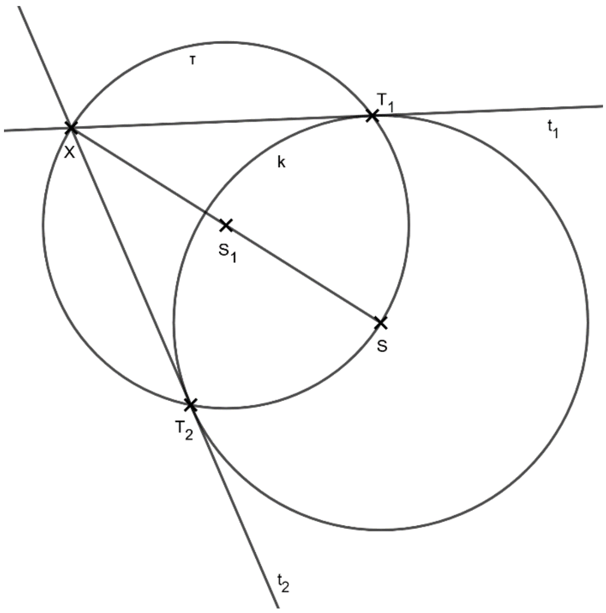
Sestrojte tečny ke kružnici k tak, aby procházely bodem X. Kružnice k má poloměr $4\ cm$.

1) Rozbor

Pro nalezení bodů dotyku kružnice s oběma tečnami musíme použít Thaletovu kružnici. Spojíme střed zadané kružnice s bodem, kterým mají tečny procházet. Veprostřed úsečky SX leží střed Thaletovy kružnice. V bodech, ve kterých se protíná Thaletova kružnice se zadanou kružnicí leží body dotyku tečen k kružnicí. Narýsujeme tedy přímky, které prochází zadaným bodem a body dotyku, tyto přímky jsou naše hledané tečny ke kružnici.

2) Konstrukce

1. $k(S, 4\ cm), X$
2. $S_1; \left|\frac{XS}{2}\right| = S_1$
3. $\tau; \tau(S_1, \left|\frac{XS}{2}\right|)$, τ je Thaletova kružnice
4. $T_1, T_2; \tau \cap k = \{T_1, T_2\}$
5. $t_1; t_1 \in T_1, t_1 \in X$
6. $t_2; t_2 \in T_2, t_2 \in X$



Obrázek 64: Konstrukce k příkladu č. 24

3) Zkouška

V rozboru byly nalezeny nutné a postačující podmínky.

4) Diskuze

Úloha má 1 řešení.

Závěr

Hlavním cílem mé diplomové práce bylo uvést čtenáře do problematiky množin bodů daných vlastností a jejich užití na základní škole.

Myslím si, že po přečtení této práce získá čtenář ucelený přehled základních množin bodů daných vlastností. Dozví se informace jak o množinách bodů daných vlastností v rovině i prostoru, tak analogií vybraných typů množin bodů daných vlastností v obou typech eukleidovských prostorů. Dále získá informace o kontextu této problematiky či pár historických údajů, které jsou s tímto tématem spjaty. Základní informace týkající se daného tématu doprovázejí obrázky, které mohou čtenáři napomoct a zlepšit orientaci v konkrétní problematice.

V praktické části jsou u jednotlivých typů MBDV názorně zpracovány celé příklady. Rozbory mohou čtenáři sloužit jako návod nebo kontrola při řešení úloh. Konstrukce jsou rozpracovány jak pomocí symbolického postupu řešení, tak pomocí grafického řešení. To opět může čtenáře navést na správné řešení. Zkouška a diskuze jsou v příkladech uváděny spíše proto, aby si čtenář ukotvil, jaké fáze jsou nedílnou součástí konstrukčních úloh.

Seznam literatury

FRANCOVÁ, Marta a Leni LVOVSKÁ. *Texty k základům elementární geometrie: pro studium učitelství 1. stupně základní školy*. Brno: Masarykova univerzita, 2014. ISBN 978-80-210-7594-8.

VOPĚNKA, Petr. *Rozpravy s geometrií*. Praha: Panorama, 1989. Pyramida (Panorama). ISBN 80-7038-031-4.

ZELINA, Ladislav. *Středoškolská geometrie (úvod do studia)*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1973.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání [online]. Praha: MŠMT, 2016 [cit. 2021-04-12]. Dostupné z: https://www.msmt.cz/file/37052/

VYŠÍN, Jan, Ernest JUCOVIČ, Jiří KŮST, Vlastimil MACHÁČEK a Iva ROHLÍČKOVÁ. *Geometrie pro pedagogické fakulty 1. díl*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965.

FRANCOVÁ, Marta, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ. *Sbírka úloh z elementární geometrie*. Brno: Masarykova univerzita, 1992. ISBN 80-210-0404-5.

SEDLÁČEK, Jiří a kol. *Slovník školské matematiky*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1981.

BARTOŇOVÁ, Eva a Pavel KVĚTOŇ. *Matematika III: základy geometrie*. Orlová: Obchodní akademie Orlová, 2006 [i.e. 2007]. Informatika v ekonomice v distanční formě vzdělávání na středních školách. ISBN 978-80-87113-06-6.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-85849-78-x.

TLUSTÝ, Pavel a Miroslava HUCLOVÁ. *Matematika s nadhledem 7: pracovní sešit pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2019. Škola s nadhledem. ISBN 978-80-7489-479-4.

RIEGER, František Ladislav a Jakub MALÝ. *Slovník naučný: 6. díl P-Quousque tandem*. Praha: Nakladatel: I. L. Kober, 1867.

NEDVĚD, Přemysl. *Čítanka matematiky* [online]. Praha, 2019 [cit. 2021-02-21]. ISBN 978-80-7335-583-8. Dostupné z: http://84.242.77.122/_uc%282ebnice_CS/index.htm

JELÍNEK, Miloš. *Množiny bodů 4*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1976.

POLÁK, Josef. *Středoškolská matematika v úlohách*. 2., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2011. ISBN 978-80-7196-419-3.

HOLUBÁŘ, Josef. *Množiny bodů v prostoru*. 2. vyd. Praha: Mladá fronta, 1983. Škola mladých matematiků.

URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie 1*. Praha: SPN, 1982.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 6. ročník základní školy*. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2011. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-416-2.

FRANCOVÁ, Marta a Leni LVOVSKÁ. *Texty k základům elementární geometrie: pro studium učitelství 1. stupně základní školy*. Brno: Masarykova univerzita, 2014. ISBN 978-80-210-7594-8.

ČERMÁK, Pavel a Petra ČERVINKOVÁ. *Odmaturuj! z matematiky 1*. Vyd. 4. Brno: Didaktis, c2007. Odmaturuj! ISBN 978-80-7358-102-2.

ODVÁRKO, Oldřich. *Metody řešení matematických úloh: celostátní vysokoškolská učebnice pro studenty matematematicko-fyzikálních, přírodovědeckých a pedagogických fakult*. Praha: SPN, 1990. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství).

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie*. 4., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-174-4.

O'GRADY, Patricia. Thales od Miletus. *The Internet Encyclopedia of Philosophy: A Peer-Reviewed Academic Resource* [online]. [cit. 2021-03-08]. Dostupné z: https://iep.utm.edu/thales/

Přispěvatelé Wikipedie, *Thalés z Milétu* [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2020, Datum poslední revize 8. 06. 2020, 11:09 UTC, [cit. 2021-3-8] Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Thal%C3%A9s_z_Mil%C3%A9tu&oldid=18668248

BEČVÁŘOVÁ, Martina. *Eukleidovy základy, jejich vydání a překlady* [online]. Praha: Prometheus, 2002 [cit. 2021-03-30]. Dějiny matematiky. ISBN 80-719-6233-3. Dostupné z: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/401801

Euclid of Alexandria. *MacTutor: History of Mathematics* [online]. [cit. 2021-03-30]. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euclid/

Matematika 8. ročník [online]. [cit. 2021-04-12]. Dostupné z: http://matematika8.wz.cz/

Seznam příkladů

Seznam obrázků

Vlastní obrázky

Převzaté obrázky

Seznam tabulek

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Bc. Barbora Slezáková
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. David Nocar, Ph.D
Rok obhajoby:	2021

Název práce:	Množiny bodů dané vlastnosti a jejich užití na 2. stupni ZŠ
Název v angličtině:	Sets of points of given property and their use at the lower secondary school
Anotace práce:	Hlavním cílem této diplomové práce je uvést do problematiky množin bodů dané vlastnosti, které jsou součástí Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání. Obsahem práce je teoretický úvod do problematiky, vymezení základních pojmů z oblasti MBDV a řešení ukázkových příkladů a konstrukční postupy jednotlivých typů množin bodů dané vlastnosti.
Klíčová slova:	Množina bodů dané vlastnosti, osa úsečky, osa úhlu, osa pásu, kružnice, Thaletova kružnice, ekvidistanta, geometrické konstrukce, eukleidovské konstrukce,
Anotace v angličtině:	The main goal of this diploma thesis is to introduce the issue of sets of points of a given property (known as Fixed Point Sets) which are the part of the Framework Educational Program for Elementary Education. The content of the work is a theoretical introduction to the issue, definition of the basic concepts of FPS and solving examples and construction procedures of these types of sets of points.
Klíčová slova v angličtině:	Fixed Point Sets, perpendicular bisector, angle bisector, line halfway between the parallel lines, circle, Thales' circle, equidistant, geometric constructions, Euclidean constructions,
Přílohy vázané v práci:	anotace
Rozsah práce:	91
Jazyk práce:	Český