VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

ŘEŠENÍ PARCIÁLNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC S VYUŽITÍM APOSTERIORNÍHO ODHADU CHYBY

DISERTAČNÍ PRÁCE

AUTOR PRÁCE Ing. VÁCLAV VALENTA
AUTHOR

BRNO 2014

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

ŘEŠENÍ PARCIÁLNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC S VYUŽITÍM APOSTERIORNÍHO ODHADU CHYBY

A POSTERIORI ERROR ESTIMATION METHOD FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS SOLUTION

DISERTAČNÍ PRÁCE

AUTOR PRÁCE — Ing. VÁCLAV VALENTA
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — Doc. Ing. JIŘÍ KUNOVSKÝ, CSc.
SUPERVISOR

BRNO 2014

Abstrakt

Práce se zabývá výpočtem gradientu ve vrcholech triangulace pomocí váženého průměru gradientů obklopujících elementů a použitím tohoto přesnějšího gradientu k aposteriornímu odhadu chyby, čímž dosáhne přesnějšího řešení parciálních diferenciálních rovnic. V práci je popsáno použití dvou běžných metod – metody Konečných prvků a metody Konečných diferencí.

Abstract

This thesis deals with gradient calculation in triangulation nodes using weighted average of gradients of neighboring elements. This gradient is then used for aposteriori error estimation which produce better solution of partial differential equations. This work presents two common methods – Finite elements method and Finite difference method.

Klíčová slova

Parciální diferenciální rovnice, Metoda Konečných prvků, Metoda Konečných diferencí, gradient, vážený průměr, triangulace, Aposteriorní odhad chyby

Keywords

Partial differential equations, Finite elements method, Finite difference method, gradient, weighted averaging, triangulation, A posteriori error estimation

Citace

Václav Valenta: Řešení parciálních diferenciálních rovnic s využitím aposteriorního odhadu chyby, disertační práce, Brno, FIT VUT v Brně, 2014

Řešení parciálních diferenciálních rovnic s využitím aposteriorního odhadu chyby

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně pod vedením pana doc. Kunovského

. . . . . .
Václav Valenta
28. srpna 2015

Poděkování

Chtěl bych poděkovat svému školiteli Jiřímu Kunovskému za podporu při studiu, a svojí ženě Veronice za trpělivost a podporu.

© Václav Valenta, 2014.
Tato práce vznikla jako školní dílo na Vysokém učení technickém v Brně, Fakultě informačních technologií. Práce je chráněna autorským zákonem a její užití bez udělení oprávnění autorem je nezákonné, s výjimkou zákonem definovaných případů.

Obsah

1 Úvod **7**

2 Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic **8**
2.1 Limita a derivace . . . 8
2.2 Obyčejné diferenciální rovnice . . . 9
2.2.1 Definice obyčejné diferenciální rovnice . . . 9
2.2.2 Cauchyova počáteční úloha . . . 9
2.3 Analytické řešení diferenciálních rovnic . . . 10
2.3.1 Lineární diferenciální rovnice prvního řádu . . . 10
2.3.2 Metoda variace konstanty . . . 11
2.3.3 Lineární diferenciální rovnice vyššího řádu . . . 12
2.4 Speciální diferenciální rovnice . . . 13
2.4.1 Bernoulliova diferenciální rovnice . . . 13
2.4.2 Riccatiova diferenciální rovnice . . . 13
2.4.3 Van der Pollova rovnice . . . 13
2.5 Úpravy diferenciálních rovnic . . . 14
2.5.1 Metoda postupné integrace . . . 14
2.5.2 Metoda snižování řádu derivace . . . 15
2.5.3 Kruhový test . . . 15
2.6 Numerické řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic . . . 16
2.6.1 Eulerova metoda . . . 16
2.6.2 Runge-Kuttovy metody . . . 21
2.6.3 Metoda Taylorovy řady . . . 22
2.6.4 Adamsova-Bashfortova metoda . . . 23

3 Parciální diferenciální rovnice **25**
3.1 Skalární a vektorové pole . . . 25
3.2 Operátor nabla (∇) . . . 26
3.3 Počáteční podmínky . . . 27
3.4 Typy parciálních diferenciálních rovnic . . . 27
3.4.1 Rovnice eliptického typu . . . 28
3.4.2 Elektrické pole a Poissonova rovnice . . . 29
3.4.3 Rovnice hyperbolického typu . . . 29
3.4.4 Rovnice parabolického typu . . . 30
3.5 Analytické řešení parciálních diferenciálních rovnic . . . 31
3.5.1 Příklad . . . 32
3.6 Numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic . . . 33
3.6.1 Triangulace . . . 34

3.6.2 Interpolant . . . 34

4 Metoda konečných prvků **36**
4.1 Silná forma . . . 36
4.2 Greenův teorém . . . 36
4.3 Slabá forma . . . 37
4.4 Numerické řešení . . . 37
4.4.1 Matice tuhosti a matice hmotnosti . . . 38
4.5 Příklad . . . 38
4.6 Algoritmizace metody . . . 40
4.7 Kvadratické elementy . . . 43

5 Metoda konečných diferencí a metoda přímek **44**
5.1 Lagrangeův interpolační polynom . . . 44
5.2 Newtonův interpolační polynom . . . 45
5.3 Vzorce odvozené z Taylorovy řady . . . 46
5.3.1 Zpětné diferenční vzorce . . . 47
5.3.2 Dopředné diferenční vzorce . . . 48
5.3.3 Kombinované diferenční vzorce . . . 49
5.3.4 Příklad výpočtu diferenčních vzorců . . . 50
5.3.5 Taylorova řada funkce více proměnných . . . 51
5.4 Použití metody konečných diferencí . . . 54
5.4.1 Příklad 1 . . . 54
5.4.2 Metoda přímek – příklad . . . 58
5.5 Odporové sítě . . . 59
5.5.1 Laplaceova rovnice . . . 59
5.5.2 Rovnice vedení tepla . . . 59
5.6 Varianty metody konečných diferencí . . . 62

6 Metoda váhování **65**
6.1 Příprava triangulace . . . 65
6.2 Podmínka konzistence . . . 65
6.3 Trojúhelníkové sítě . . . 66
6.3.1 Okrajové vrcholy . . . 68
6.3.2 Praktický výpočet . . . 69
6.4 Rovnoběžníkové sítě . . . 71
6.4.1 Idea metody . . . 71
6.4.2 Zobecnění metody . . . 75
6.4.3 Okrajové vrcholy . . . 77

7 Dosažené výsledky **79**
7.1 Výpočet gradientu . . . 79
7.2 Aposteriorní odhad chyby . . . 79
7.2.1 Iterativní výpočet . . . 82
7.2.2 Aposteriorní odhad chyby na obdélníkové síti . . . 83
7.2.3 Aposteriorní odhad chyby na trojúhelníkové síti . . . 88
7.3 Metoda konečných diferencí s vícebodovou aproximací . . . 90
7.4 Aposteriorní odhad chyby pro vlnovou rovnici . . . 92

8 Závěr **93**

Literatura **94**

Publikace **96**

A Řešení vlnové rovnice **97**

Seznam obrázků

2.1 Kruhový test, integrační krok $h = 0.1$, svislá osa je w, vodorovná osa je u . 19
2.2 Kruhový test, integrační krok $h = 0.01$, svislá osa je w, vodorovná osa je u . 19
2.3 Kruhový test, integrační krok $h = 0.001$, svislá osa je w, vodorovná osa je u 20

4.1 Triangulace pro ukázku řešení Laplaceovy rovnice 38
4.2 Schéma uzlů pro $\mathbb{P}_2$ element 43

5.1 Zpětné diferenční vzorce 48
5.2 Dopředné diferenční vzorce 49
5.3 Kombinované diferenční vzorce 50
5.4 Mřížka pro odvození diferenčních vzorců Taylorova rozvoje dvou proměnných 52
5.5 Složitější mřížka pro odvození diferečních vzorců Taylorova rozvoje dvou proměnných 54
5.6 Řešení zadané okrajové úlohy na mřížce 5×5. 56
5.7 Absolutní chyba řešení zadané okrajové úlohy na mřížce 5×5. 57
5.8 Relativní chyba řešení zadané okrajové úlohy na mřížce 5×5. 57
5.9 Řešení vlnové rovnice 59
5.10 Model pro řešení Laplaceovy rovnice pomocí odporové sítě 60
5.11 Model pro řešení rovnice vedení tepla pomocí odporové sítě 61
5.12 Řešení rovnice vedení tepla ve vybraných uzlech 61
5.13 Řešení Laplaceovy rovnice 63
5.14 Absolutní chyba řešení Laplaceovy rovnice explicitní metodou 64
5.15 Graf závislosti počtu iterací na parametru ω. Zelený zobrazuje metodu SOR, červený medotu ADSOR 64

6.1 Schéma okruhu okolo vrcholu. Vlevo je okruh vnitřního vrcholu **a**, vpravo je okruh okrajového vrcholu **a**. 68
6.2 Schéma sítě použité pro demonstraci výpočtu. 69
6.3 Jednoduché schéma čtyř obdélníků pro odvození idey metody 71
6.4 Vlevo schéma hranově vnořeného vrcholu, vpravo schéma vrcholově vnořeného vrcholu 77

7.1 Absolutní chyba při výpočtu gradientu funkce $\sin \frac{x}{y}$ 80
7.2 Absolutní chyba při výpočtu gradientu funkce $\sin(x)\cos(y)$ 80
7.3 Absolutní chyba při výpočtu gradientu funkce $\frac{1}{\sinh \pi} \sin \pi x \sinh \pi y$ 81
7.4 Absolutní chyba při výpočtu gradientu funkce $x^2 + y^2$ 81
7.5 Zjemňování obdélníkové mřížky pomocí vertikálního zjemnění 83
7.6 Zjemnění trojúhelníkové mřížky 83
7.7 Počáteční mřížka 84

7.8 Mřížka po prvním zjemnění 84
7.9 Mřížka po druhém zjemnění 84
7.10 Mřížka po sedmém zjemnění 84
7.11 Mřížka po desátém zjemnění 84
7.12 Finální mřížka 84
7.13 Chyba na počátku výpočtu (zobrazen je pouze jeden vrchol s chybou a vrcholy na okrajové podmínce s nulovou chybou. 86
7.14 Chyba výpočtu na zjemněné mřížce. Výsledky jsou linearizovány 87
7.15 Vlevo počáteční triangulace, vpravo koncová triangulace při desáté iteraci. . 88
7.16 Absolutní chyba řešení v bodě $[0.3, 0.3]$. Červená křivka představuje numerické řešení, zelené analytické řešení. 89
7.17 Absolutní chyba řešení v bodě $[0.3, 0.6]$. Červená křivka představuje numerické řešení, zelené analytické řešení. 89
7.18 Absolutní chyba řešení při použití tříbodové aproximace derivace. 90
7.19 Absolutní chyba řešení při použití pětibodové aproximace derivace. 91
7.20 Schéma mřížek použitých při řešení vlnové rovnice. Vlevo počáteční mřížka, vpravo koncová mřížka. 92

Seznam tabulek

2.1 Ukázka výpočtu kruhového testu explicitní metodou 17
2.2 Ukázka výpočtu kruhového testu implicitní metodou 18

5.1 Vybrané body funkce zadané tabulkou 45
5.2 Tabulka pro výpočet Newtonova interpolačního polynomu 46

6.1 Okruh $r_{\mathbf{a}}$ v globálních souřadnicích (x, y) a v obou lokálních (ϕ_x, ζ_x), (ϕ_y, ζ_y) 70
6.2 Tabulka interpolantů pro bazické funkce druhého stupně 74

7.1 Tabulka s aposteriorním odhadem chyby v první iteraci 85
7.2 Tabulka s aposteriorním odhadem chyby po prvním zjemnění 85
7.3 Tabulka s aposteriorním odhadem chyby po druhém zjemnění 85
7.4 Tabulka s aposteriorním odhadem chyby po sedmém zjemnění 85

Kapitola 1

Úvod

Problematika *parciálních diferenciálních rovnic* je dnes velmi dobře prozkoumaná a všeobecně známá. Existuje spousta systémů, s jejichž pomocí je možné tyto rovnice řešit. Mezi nejznámější systémy patří např. *Ansys*, *R3D*, *T3D*, *tCAD* a celá řada dalších.

Specifické pro software tohoto typu je, že každý program je specializován na určitý fyzikální problém, ke kterému se váže jedna nebo několik parciálních diferenciálních rovnic. To je dáno tím, že v podstatě neexistuje žádný zaručený univerzální postup, jak vyřešit jakoukoli parciální diferenciální rovnici. Při řešení určitého fyzikálního problému se využívají vlastnosti rovnic které umožňují řešení.

Parciální diferenciální rovnice spadají do oblasti *infinitezimálního* počtu, který byl objeven *sirem Isaacem Newtonem* a *Gottfriedem Leibnizem*. Tento počet znamenal průlom v řešení nejrůznějším fyzikálních problémů a s jeho pomocí se podařilo poprvé v historii vysvětlit např. *Zenónovy paradoxy*. Francouzský matematik *Jean d'Alembert* publikoval článek o kmitání struny, což byla v podstatě první publikace týkající se parciálních diferenciálních rovnic. Mezi další nejvýznamnější matematiky zabývající se touto problematikou patří *Leonhard Euler*, *Pierre Simon Laplace* a *Joseph Louis Lagrange*. Matematici *Augustin Cauchy*, *Bernhard Riemann* a *Henri Poincaré* rozvinuli především teorii úloh s okrajovými podmínkami, které mají široké uplatnění ve fyzikálních úlohách. Poměrně zajímavé informace o historii je možné najít např. v [9] a [30].

Stále však existují otevřené problémy. Mezi nejznámější z nich patří Navier-Stokesova rovnice řešící dynamiku tekutin. Jestliže někdo bude schopen podat analytické řešení této rovnice, může získat milion dolarů. Informace o tomto problému je možné najít např. v [14].

Další zajímavou a obtížnou úlohou je např. EMC (*electromagnetic compatibility*) simulace integrovaných elektrických obvodů počítající elektromagnetické vyzařování a pohlcování simulovaného obvodu.

Nejprve se budeme zabývat známými konvenčními metodami v oblasti soustav obyčejných diferenciálních rovnic. V třetí kapitole představíme teorii parciálních diferenciálních rovnic a typy úloh. Následující dvě kapitoly popíší dvě nejznámější a nejpoužívanější metody řešení parciálních diferenciálních rovnic. Vlastní přínos – Superaproximace gradientu – je odvozen a prezentován v kapitole *Metoda váhování*. Aplikace Superaproximace a její použití je popsáno na několika příkladech v kapitole *Dosažené výsledky*.

Kapitola 2

Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

Celá tato práce je zaměřena na řešení parciálních diferenciálních rovnic. Nejprve je nutné porozumět řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic. Později uvidíme, že některé typy parciálních diferenciálních rovnic je možné převést na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic.

Informace pro tuto kapitolu jsem čerpal z [30], [8], [6], [5], [20], [26], [31], [32] a [24]

2.1 Limita a derivace

V základech diferenciálních rovnic obecně leží pojem derivace. Derivace funkce vznikla v 17. století a má velmi široké uplatnění v řadě fyzikálních úloh. Jelikož derivace je definována jako limita nějaké funkce, budeme nejprve definovat limitu.

Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x = a$ limitu právě když ke každému libovolně maléhmu číslu $\epsilon > 0$ existuje jiné číslo $\delta > 0$ takové, že všechny x, pro které platí, $0 < |x - a| < \delta$ platí $|f(x) - A| < \epsilon$. Limitu zapisujeme jako

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \tag{2.1}$$

Je důležité si uvědomit, že funkční hodnota funkce $f(a)$ nemusí být definována a limitu v bodě **a** nelze zaměnit s funkční hodnotou v bodě **a**.

Nyní můžeme definovat derivaci. Úkolem derivace je kvantifikovat růst funkce a můžeme ji pomocí limity definovat jako

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2.2}$$

přičemž

- $f(x)$ je nějaká funkce jedné proměnné
- $f'(x)$ je symbol pro derivaci funkce $f(x)$
- x_0 je bod, ve kterém derivaci počítáme
- x je volná proměnná

Derivace funkce je opět funkcí a proto můžeme definovat i derivace vyšších řádů Za předpokladu, že funkce $f'(x)$ má v každém bodě definičního oboru funkce $f(x)$ vlastní derivaci, potom $f''(x)$ bude druhá derivace funkce ve tvaru

$$f''(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \tag{2.3}$$

2.2 Obyčejné diferenciální rovnice

V této části představíme základní pojmy v oblasti obyčejných diferenciálních rovnic.

2.2.1 Definice obyčejné diferenciální rovnice

Obyčejnou diferenciální rovnicí nazýváme rovnici ve které se vyskytuje derivace hledané funkce jednoho argumentu. Řádem n diferenciální rovnice nazveme nejvyšší řád derivace hledané funkce v diferenciální rovnici. Rovnici můžeme zapsat jako

$$y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' = f(x) \tag{2.4}$$

- n představuje řád diferenciální rovnice
- x je nezávislá proměnná
- y^k je k-tá derivace hledané funkce $y(x)$
- $a_k(x)$ jsou nějaké známé funkce
- $f(x)$ je pravá strana diferenciální rovnice. Pokud $f(x) = 0$ hovoříme o homogenní diferenciální rovnici.

Řešením diferenciální rovnice řádu n na intervalu J nazýváme n-krát diferenciabilní funkci na intervalu J, která vyhovuje zadané rovnici.

Celkem rozeznáváme tři základní typy řešení obyčejných diferenciálních rovnic

- Obecným řešením obyčejné diferenciální rovnice je funkce, ve které se vyskytují funkce $C_1(x), \ldots, C_n(x)$. Důležité je, že díky těmto libovolným funkcím máme nekonečně mnoho řešení. V nejjednodušších případech jsou tyto funkce konstantní.
- Partikulární řešení je konkrétní jedno řešení obyčejné diferenciální rovnice, které dostaneme z obecného řešení dosazením nějaké libovolné funkce za $C_1(x), \ldots, C_n(x)$.
- Singulární řešení je takové řešení, které vyhovuje rovnici, ale nelze získat z obecného řešení obyčejné diferenciální rovnice. Toto řešení však existuje pouze u některých rovnic.

2.2.2 Cauchyova počáteční úloha

Cauchyovu počáteční úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici řádu n nazýváme úlohu najít řešení rovnice (2.4) když známe počáteční podmínky.

Taková úloha může mít žádné, jedno, nebo i více řešení.

Počáteční podmínky jsou definovány jako dvojice $[x_n, y_n]$, přičemž platí

$$
\begin{aligned}
y_0 &= y(x_0) && (2.5)\\
y_1 &= y'(x_1) && (2.6)\\
&\vdots && (2.7)\\
y_{n-1} &= y^{n-1}(x_{n-1}) && (2.8)
\end{aligned}
$$

2.3 Analytické řešení diferenciálních rovnic

Analytické řešení obyčejných diferenciálních rovnic není jednoduché a prakticky většinou neřešíme rovnice více než druhého řádu. Nejlépe jdou řešit lineární diferenciální rovnice prvního a druhého řádu.

2.3.1 Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Lineární diferenciální rovnici prvního řádu definujeme takto

$$y' + yp(x) = q(x) \tag{2.9}$$

Z hlediska řešení rozeznáváme 2 typy rovnic

- *homogenní* (zkrácená), pokud $q(x) = 0$
- *nehomogenní* (nezkrácená), pokud $q(x) \neq 0$

Homogenní rovnici můžeme vyřešit následujícím způsobem

$$
\begin{aligned}
y' + yp(x) &= 0 && (2.10)\\
y' &= -yp(x) && (2.11)\\
\frac{y'}{y} &= -p(x) && (2.12)\\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int p(x)\mathrm{d}x && (2.13)\\
\ln|y| &= -\int (p(x))\mathrm{d}x + C_1 && (2.14)\\
|y| &= \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{-\int (p(x))\mathrm{d}x} && (2.15)\\
y &= C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} && (2.16)
\end{aligned}
$$

Přičemž konstantu C je nutné dopočítat z počátečních podmínek. Postup řešení bude demonstrován na jednoduchém příkladu. Uvažujme následující homogenní rovnici ve tvaru

$$y' + y = 0 \tag{2.17}$$

Je zřejmé, že funkce $p(x) = 1$ a integrál této funkce je $\int p(x)\mathrm{d}x = x$. Odtud odvodíme obecné řešení ve tvaru

$$y = C\mathrm{e}^{-x} \tag{2.18}$$

Abychom dostali partikulární řešení, musíme zadat počáteční podmínku, např.

$$y(0) = 2 \tag{2.19}$$

kterou dosadíme do obecného řešení

$$\begin{aligned} 2 &= C\mathrm{e}^0 && (2.20)\\ C &= 2 && (2.21) \end{aligned}$$

a hledaná funkce y je ve tvaru

$$y(x) = 2\mathrm{e}^{-x} \tag{2.22}$$

Na závěr můžeme provést zkoušku a ověřit řešení

$$\begin{aligned} (2\mathrm{e}^{-x})' + 2\mathrm{e}^{-x} &= 0 && (2.23)\\ -2\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x} &= 0 && (2.24)\\ 0 &= 0 && (2.25) \end{aligned}$$

2.3.2 Metoda variace konstanty

Složitější situace nastane v případě nehomogenních diferenciálních rovnic. V tomto případě se používá metoda *variace konstanty*, někdy též zvaná Lagrangeova metoda variace konstanty. Ta má dva kroky.

1. Určí se obecné řešení příslušné homogenní rovnice $y = Cu(x)$
2. Obecné řešení nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru $y = C(x)u(x)$, funkci $C(x)$ určíme z podmínky $C'(x)u(x) = q(x)$ (viz. (2.9)).

Metodu variace konstanty budeme demonstrovat na jednoduchém příkladu

$$y' + y = \mathrm{e}^x \tag{2.26}$$

Nejprve budeme řešit homogenní rovnici vytvořenou z (2.26). Z předchozího příkladu víme, že obecné řešení je ve tvaru (2.18) a abychom mohli aplikovat metodu variace konstanty, je potřeba nahradit konstantu C funkcí $C(x)$

$$y = C(x)\mathrm{e}^{-x} \tag{2.27}$$

Spočítáme derivaci podle vzorce (2.27)

$$\begin{aligned} y &= C(x)\mathrm{e}^{-x} && (2.28)\\ y' &= (C(x)\mathrm{e}^{-x})' && (2.29)\\ y' &= C(x)'\mathrm{e}^{-x} - C(x)\mathrm{e}^{-x} && (2.30) \end{aligned}$$

Nyní tento vztah dosadíme do rovnice (2.26).

$$
\begin{aligned}
y' + y &= \mathrm{e}^{x} && (2.31)\\
\left(C(x)'\mathrm{e}^{-x} - C(x)\mathrm{e}^{-x}\right) + \left(C(x)\mathrm{e}^{-x}\right) &= \mathrm{e}^{x} && (2.32)\\
C(x)' &= \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{-x}} && (2.33)\\
C(x)' &= \mathrm{e}^{2x} && (2.34)\\
C(x) &= \int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x && (2.35)\\
C(x) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + c && (2.36)
\end{aligned}
$$

Obecným řešením po dosazení bude

$$
y(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x} + c\mathrm{e}^{-x} \tag{2.37}
$$

Provedeme-li zkoušku, zjistíme, že máme správné řešení.

2.3.3 Lineární diferenciální rovnice vyššího řádu

Obecně můžeme zapsat lineární diferenciální rovnice $n-$tého řádu jako

$$
A_n y^{(n)} + \ldots + A_1 y' + A_0 y = B \tag{2.38}
$$

- $A_n, \ldots, A_0, B$ jsou spojité funkce
- je-li $B = 0$, resp. $B \neq 0$, hovoříme o homogenní, resp. nehomogenní rovnici

Obecným řešením (integrálem) diferenciální rovnice nazveme funkci $\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n)$ obsahující n parametrů $C_1, \ldots, C_n$, kdy funkce vyhovuje rovnici.

Partikulárním řešením nazveme takové řešení, kdy dosadíme do obecného řešení konkrétní konstanty C_k.

Rovnici

$$
A_n r^n + \ldots A_1 r + A_0 = 0 \tag{2.39}
$$

nazveme *charakteristickou* rovnicí rovnice (2.38). Tuto rovnici můžeme odvodit pokud hledáme podmínku, jíž vyhovuje funkce

$$
y = \mathrm{e}^{rx} \tag{2.40}
$$

Potom vyšší derivace budou vypadat následujícím způsobem

$$
\begin{aligned}
y' &= r\mathrm{e}^{rx} && (2.41)\\
y'' &= r^2\mathrm{e}^{rx} && (2.42)\\
\ldots & && (2.43)\\
y^{(n)} &= r^n\mathrm{e}^{rx} && (2.44)
\end{aligned}
$$

Po dosazení do rovnice (2.38) dostaneme

$$\mathrm{e}^{rx}\left(A_n r^n + \ldots + A_1 r + A_0\right) = 0 \tag{2.45}$$

Pokud celou rovnici vydělíme výrazem e^{rx}, získáme charakteristickou rovnici.

Nyní mějme homogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu a její cahrakteristickou rovnici s kořeny r_1, r_2.

$$A_2 r^2 + A_1 r + A_0 = 0 \tag{2.46}$$

Pak obecné řešení diferenciální rovnice je ve tvaru

- $r_1 \in \Re \neq r_2 \in \Re$, pak $y = C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x}$
- $r_1 \in \Re = r_2 \in \Re$, pak $y = \mathrm{e}^{rx}\left(C_1 + C_2 x\right)$
- $r_{1,2} \in \mathcal{C} = a + b\mathrm{i}$, pak $y = \mathrm{e}^{ax}\left(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx\right)$

2.4 Speciální diferenciální rovnice

Analytické řešení ostatních diferenciálních rovnic je velmi problematické. Postupně se z inženýrské praxe vybraly některé speciální typy diferenciálních rovnic a využilo některých jejich speciálních vlastností pro nalezení řešení.

2.4.1 Bernoulliova diferenciální rovnice

Je rovnice ve tvaru

$$y' + yp(x) = y^m q(x) \tag{2.47}$$

Kde m je libovolné nenulové a nejedničkové reálné číslo a $p(x)$ a $q(x)$ jsou spojite funkce.

Tato rovnice se převede na lineární diferenciální rovnici substitucí

$$u = y^{1-m} \tag{2.48}$$

2.4.2 Riccatiova diferenciální rovnice

Je rovnice ve tvaru

$$y' + yp(x) + y^2 q(x) = h(x) \tag{2.49}$$

Kde $p(x)$, $q(x)$ a $h(x)$ jsou spojité funkce.

2.4.3 Van der Pollova rovnice

Je rovnice popisující tlumené kmitání a je popsána rovnicí druhého řádu

$$y'' - \mu\left(y^2 - 1\right) y' + y = 0 \tag{2.50}$$

2.5 Úpravy diferenciálních rovnic

Většina numerických metod je navržena pro řešení rovnic prvního řádu. Pokud potřebujeme řešit rovnice vyšších řádů (např. kruhový test), je nutné tyto rovnice upravit na soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu. Mezi nejpoužívanější metody patří

- *Metoda postupné integrace*
- *Metoda snižování řádu derivace*

Obě metody budou popsány v následujících odstavcích. Využijeme operátorového tvaru, kdy se derivace nahradí operátorem p.

$$p^n y = y^{(n)} \tag{2.51}$$

Opačnou operací k derivaci je integrace. Tu budeme v operátorovém zápisu značit tímto způsobem

$$\frac{1}{p} y = \int y \mathrm{d}x \tag{2.52}$$

Pro ilustraci uvádím diferenciální rovnici a její odpovídající operátorový tvar.

$$y(x)'' + 8y(x)' - 5y(x) = f'(x) + k(x)f(x) \tag{2.53}$$

$$p^2 y(x) + 8py(x) - 5y(x) = pf(x) + k(x)f(x) \tag{2.54}$$

2.5.1 Metoda postupné integrace

Principem metody je převést členy s nejvyšší derivací na levou stranu a ostatní členy na pravou stranu. Dalším krokem je integrace obou stran rovnic, dokud nám na levé straně nezbyde první derivace. Důležité je, že s každou integrací nám přibývá nová rovnice a s ní i nová neznámá funkce. Výsledkem tohoto postupu je soustava obyčejných diferenciálních rovnic, které vyhovují numerickým metodám.

Jako jednoduchý příklad uveďme převedení diferenciální rovnice na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu.

$$p^2 y + 3py + y = \sin^2(x) + \cos^2(x) \tag{2.55}$$

Prvním krokem je osamostatnit člen s nejvyšším řádem derivace na levé straně

$$p^2 y = -3py - y + \sin^2(x) + \cos^2(x) \tag{2.56}$$

Nyní budeme obě strany rovnice integrovat pomocí operátoru $\frac{1}{p}$.

$$py = -3y + \frac{1}{p}\left(\sin^2(x) + \cos^2(x) - y\right) \tag{2.57}$$

Zavedeme novou rovnici $w = \frac{1}{p}\left(\sin^2(x) + \cos^2(x) - y\right)$ a dosazením do původní rovnice dostaneme

$$py = -3y + w \tag{2.58}$$

Výsledkem bude soustava dvou obyčejných diferenciálních rovnic ve tvaru

$$y' = -3y + w \tag{2.59}$$
$$w' = \sin^2(x) + \cos^2(x) - y \tag{2.60}$$

2.5.2 Metoda snižování řádu derivace

Tato metoda používá substituci za derivace hledané funkce. Nahrazujeme postupně členy $p^n y$ a místo nich přidáváme nové rovnice. Algoritmus uvedeme na jednoduchém příkladu.

$$p^2 y + 3py + y = 30 \tag{2.61}$$

Provedeme substituci

$$u = y \tag{2.62}$$
$$v = py \tag{2.63}$$
$$w = p^2 y \tag{2.64}$$

Potom provedeme dosazení a odvodíme soustavu tří rovnic

$$w = 30 - 3u - v \tag{2.65}$$
$$v' = w \tag{2.66}$$
$$u' = v \tag{2.67}$$

Tato soustava bude řešitelná běžnými numerickými metodami.

2.5.3 Kruhový test

Kruhový test je často používaný pro ověření numerických metod. Vychází z parametrické rovnice kružnice, která vypadá takto

$$x = \cos t \tag{2.68}$$
$$y = \sin t \tag{2.69}$$
$$t \in < 0, 2\pi > \tag{2.70}$$

Kruhový test je diferenciální rovnice druhého řádu

$$y'' + y = 0 \tag{2.71}$$
$$y(0) = 0 \tag{2.72}$$
$$y'(0) = 1 \tag{2.73}$$

Řešením je $y = \sin x$ a snadno odvodíme, že $y' = \cos x$.

2.6 Numerické řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic

Numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic často bývá jedinou možností, jak zjistit aspoň přibližné řešení rovnice. Pod numerickým řešením budeme rozumět posloupnost bodů $[x_i, y_i]$, které nám přibližně kopírují neznámou funkci y.

Pokud budeme potřebovat opravdový funkční předpis, je nutné použít nějaký interpolační polynom, např. Lagrangeův nebo Newtonův.

Důležitým pojmem je **integrační krok**, který budeme značit h. Integrační krok je parametrem, který se volí podle typu úlohy kterou řešíme, a ve výsledcích jej spočítáme jako rozdíl dvou po sobě jdoucích x-ových souřadnic bodů z řešení R_y, což je uspořádaná posloupnost bodů.

$$h = x_{n+1} - x_n, \quad [x_{n+1}, y_{n+1}], [x_n, y_n] \in R_y \tag{2.74}$$

Podle integračního kroku můžeme metody rozdělit na

- metody s pevným krokem – jsou jednoduché na implementaci, ale mohou být časově nebo prostorově náročné
- metody s proměnným krokem – potřeba zajistit vhodný algoritmus na volbu kroku, ale mohou počítat řešení rychleji než metody s pevným krokem

Dále můžeme metody dělit na

- jednokrokové – používají pouze hodnotu z předchozího kroku, obecně platí, že jsou méně přesné než vícekrokové
- vícekrokové – používají několik předchozích hodnot

A poslední významné dělení je na

- implicitní – neformálně řečeno, pro výpočet hodnoty y_{i+1} potřebuje hodnotu y_{i+1}. Tyto metody vyžadují v každém kroku iterační výpočet, mají však větší oblast stability
- explicitní – jednodušší na implementaci, ale mají menší oblast stability. Více informací je možné nalézt v [31].

Dále budou uvedeny některé metody a jejich vlastnosti.

2.6.1 Eulerova metoda

Asi nejjednodušší metodou pro řešení diferenciálních rovnic je Explicitní Eulerova metoda. Může být v obou variantách s proměnným i pevným integračním krokem.

Jádrem metody je následující vzorec

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \tag{2.75}$$

Naproti tomu, implicitní Eulerova metoda je dána následujícím vzorcem

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}) \tag{2.76}$$

Kde $y'_i = f(x_i, y_i)$, resp. $y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$.

Pokusme se nastínit algoritmus výpočtu obou variant Eulerovy metody. Jako příklad nám poslouží kruhový test.

Kruhový test je zadán jako soustava dvou rovnic ve tvaru

$$u' = w \wedge u(0) = 0 \tag{2.77}$$
$$w' = -u \wedge w(0) = 1 \tag{2.78}$$

Explicitní metoda začíná z počátečních podmínek, tedy

$$u_0 = 0 \quad w_0 = 1 \tag{2.79}$$

Nyní se bude postupovat podle vzorce

$$u_{i+1} = u_i + hw_i \tag{2.80}$$
$$w_{i+1} = w_i + h(-u_i) \tag{2.81}$$

Uveďme počátek výpočtu s krokem $h = 0.1$

x	u	w	abs. chyba u	abs. chyba w
0	0	1	0	0
0.1	0.1	1	0.000166583	0.004995835
0.2	0.2	0.99	0.001330669	0.009933422
0.3	0.299	0.97	0.00347973	0.014663511
0.4	0.396	0.9401	0.006581658	0.019039006
0.5	0.49001	0.9005	0.01058446	0.022917438
0.6	0.58006	0.851499	0.015417527	0.026163385
0.7	0.66521	0.793493	0.020992313	0.028650813
0.8	0.744559	0.726972	0.027202909	0.030265291
0.9	0.817256	0.652516	0,03392909 0,030906032	
1	0.882508	0.57079	0.041037015	0.030487694

Tabulka 2.1: Ukázka výpočtu kruhového testu explicitní metodou

U implicitní metody je situace poněkud složitější. Vychází se z následujícího vzorce

$$u_{i+1} = u_i + hw_{i+1} \tag{2.82}$$
$$w_{i+1} = w_i + h(-u_{i+1}) \tag{2.83}$$

To je soustava lineárních algebraických rovnic, která se v tomto jednoduchém případě dá vyřešit.

$$u_{i+1} = u_i + h\frac{w_i - hu_i}{h^2+1} \tag{2.84}$$

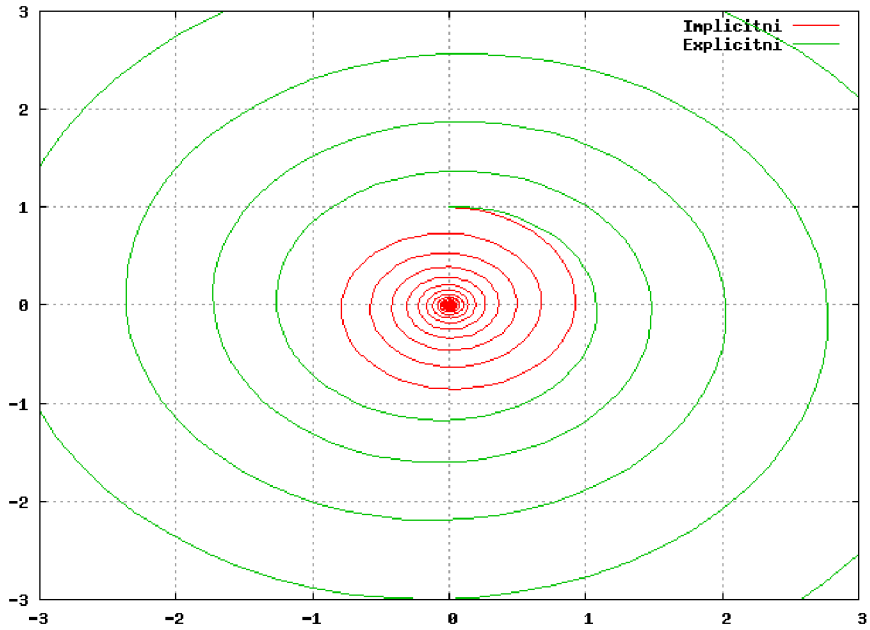
$$w_{i+1} = \frac{w_i - hu_i}{h^2+1} \tag{2.85}$$

U složitějších diferenciálních rovnic obdržet rovnici, které nelze analyticky řešit a potom je nutné použít numerické metody i na tuto soustavu. Můžeme použít např. Newtonovu metodu.

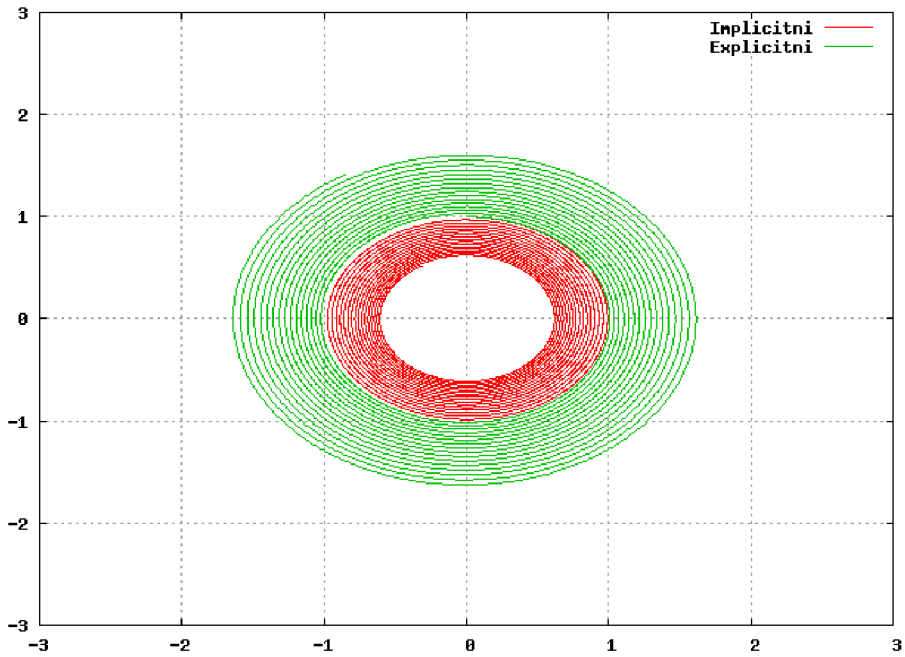
x	u	w	abs. chyba u	abs. chyba w
0	0	1	0	0
0.1	0.0990099	0.990099	0.000734417	0.004905165
0.2	0.196059	0.970493	0.002610331	0.009573578
0.3	0.290206	0.941472	0.005314207	0.013864489
0.4	0.380548	0.903418	0.008870342	0.017642994
0.5	0.466228	0.856795	0.013197539	0.020787562
0.6	0.546443	0.802151	0.018199473	0.023184615
0.7	0.620453	0.740105	0.023764687	0.024737187
0.8	0.687588	0.671346	0.018597291	0.025360709
0.9	0.74725	0.596621	0.03607691	0.024988968
1	0.798923	0.516729	0.042547985	0.023573306

Tabulka 2.2: Ukázka výpočtu kruhového testu implicitní metodou

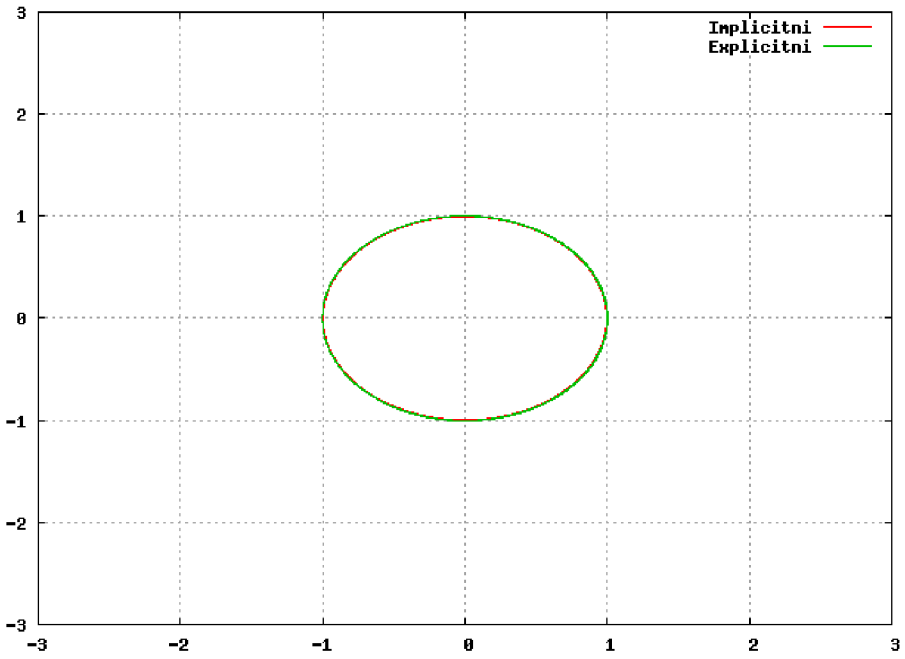
Výsledky kruhového testu v závislosti na integračním kroku jsou vidět na následujících obrázcích 2.1, 2.2 a 2.2. Ve všech případech je zelená křivka řešení explicitní a červená křivka implicitní Eulerovy metody.



Obrázek 2.1: Kruhový test, integrační krok $h = 0.1$, svislá osa je w, vodorovná osa je u



Obrázek 2.2: Kruhový test, integrační krok $h = 0.01$, svislá osa je w, vodorovná osa je u



Obrázek 2.3: Kruhový test, integrační krok $h = 0.001$, svislá osa je w, vodorovná osa je u

2.6.2 Runge-Kuttovy metody

Runge-Kuttovy metody patří mezi nejběžnější numerické metody řešení diferenciálních rovnic. Metoda vychází z Taylorovy řady ve tvaru

$$y(x_0 + h) = y_0 + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_0) + \dots \tag{2.86}$$

Přesnost (a řád metody) vychází z počtu členů Taylorova rozvoje které použijeme. Pokud použijeme člen řady s mocninou h^3, budeme hovořit o motodě třetího řádu.

Pokud budeme uvažovat metodu třetího řádu, vyjdeme následujícího vztahu přírůstku funkce

$$y(x_0 + h) - y_0 = hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_0) \tag{2.87}$$

Přírůstek označíme jako $k = y(x_0 + h) - y_0$.

Vyjdeme-li z pravidel o derivování implicitních funkcí, můžeme rozepsat vyšší derivace neznámé funkce y pomocí funkce $f(x, y)$ jako

$$y' = f \tag{2.88}$$

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y} \tag{2.89}$$

$$y''' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial xy} + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{2.90}$$

Pro praktický výpočet zavedeme substituci

$$Df = \frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y} \tag{2.91}$$

$$D^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial xy} + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{2.92}$$

Pak můžeme derivace hledané funkce zapsat v následujícím tvaru

$$y'' = Df \tag{2.93}$$

$$y''' = D^2 f + \frac{\partial f}{\partial y}Df \tag{2.94}$$

Potom přírůstem funkce k budeme moci zapsat v tomto tvaru

$$k = hf + \frac{h^2}{2}Df + \frac{h^3}{6}\left(D^2 f + \frac{\partial f}{\partial y}Df\right) \tag{2.95}$$

Nyní přírůstek vyjádříme jako lineární kombinaci

$$k = ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4 \tag{2.96}$$

kde a, b, c, d jsou koeficienty a k_i splňují následující vztah

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x,y) && (2.97)\\
k_2 &= hf(x+h/2, y+k_1/2) && (2.98)\\
k_3 &= hf(x+h/2, y+k_2/2) && (2.99)\\
k_4 &= hf(x+h, y+k_3) && (2.100)
\end{aligned}
$$

Výrazy k_v pro $v = 1 \dots 4$ rozvineme ve tvar Taylorovy řady do členu s mocninou h^3 a po zjednodušení obdržíme následující soustavu lineárních rovnic

$$
\begin{aligned}
1 &= a+b+c+d && (2.101)\\
\frac{1}{2} &= \frac{b}{2}+\frac{c}{2}+d && (2.102)\\
\frac{1}{6} &= \frac{b}{8}+\frac{c}{8}+\frac{d}{2} && (2.103)\\
\frac{1}{6} &= \frac{c}{4}+\frac{d}{2} && (2.104)
\end{aligned}
$$

Po vyřešení soustavy obdržíme $a = d = \frac{1}{6}$ a $b = c = \frac{1}{3}$.
Pokud budeme řešit rovnici ve tvaru

$$y' = f(x,y) \tag{2.105}$$

Pak Runge-Kuttova metoda čtvrtého řádu bude ve tvaru

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, y_n) && (2.106)\\
k_2 &= hf(x_n+h/2, y_n+k_1/2) && (2.107)\\
k_3 &= hf(x_n+h/2, y_n+k_2/2) && (2.108)\\
k_4 &= hf(x_n+h, y_n+k_3) && (2.109)\\
y_{n+1} &= y_n+\frac{k_1}{6}+\frac{k_2}{3}+\frac{k_3}{3}+\frac{k_4}{6} && (2.110)
\end{aligned}
$$

Z Taylorova rozvoje je možné tímto způsobem odvodit metody vyšších řádů.

2.6.3 Metoda Taylorovy řady

Tato metoda vychází z Taylorova rozvoje, podobně jako předchozí metody, ale používá tolik členů rozvoje, kolik je potřeba.

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' + \frac{h^2}{2!}y_i'' + \frac{h^3}{3!}y_i''' + \dots \tag{2.111}$$

Vlastností metody Taylorovy řady je rekurentní výpočet derivací. Vlastní rekurenci ukážeme na kruhovém testu.

Mějme zadaný kruhový test ve tvaru

$$
\begin{aligned}
y' &= z \quad y(0) = 0 && (2.112)\\
z' &= -y \quad z(0) = 1 && (2.113)
\end{aligned}
$$

Zapišme Taylorovy rozvoje pro soustavu rovnic

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' + \frac{h^2}{2!}y_i'' + \frac{h^3}{3!}y_i''' + \dots \tag{2.114}$$

$$z_{i+1} = z_i + hz_i' + \frac{h^2}{2!}z_i'' + \frac{h^3}{3!}z_i''' + \dots \tag{2.115}$$

Nyní zbývá spočítat vyšší derivace obou funkcí. Budeme vycházet ze zadané soustavy rovnic a postupně derivovat pravou i levou stranu všech rovnic, čímž dostaneme rekurentní vztah.

$$y'' = z' = -y \tag{2.116}$$

$$z'' = -y' = -z \tag{2.117}$$

Podobným způsobem odvodíme i třetí derivaci

$$y''' = z'' = -y' = -z \tag{2.118}$$

$$z''' = -y'' = -z' = y \tag{2.119}$$

Odtud odvodíme výsledný vzorec pro tuto úlohu

$$y_{i+1} = y_i + hz_i - \frac{h^2}{2!}y_i - \frac{h^3}{3!}z_i + \dots \tag{2.120}$$

$$z_{i+1} = z_i - hy_i - \frac{h^2}{2!}z_i + \frac{h^3}{3!}y_i + \dots \tag{2.121}$$

Vidíme, že metoda Taylorovy řady je implementačně složitější než předchozí metody, u kterých stačilo využít vzorec. V této metodě se musí nejprve vzorec vytvořit a teprve potom použít. Výhodou je vysoká přesnost závisející na počtu použitých členů Taylorova rozvoje.

2.6.4 Adamsova-Bashfortova metoda

Jsou metody vícekrokové, tedy využívají několik hodnot z předchozích kroků.

Opět vyjdeme z rovnice

$$y' = f(x, y) \tag{2.122}$$

Budeme používat následující značení

$$x_k = x_0 + kh \tag{2.123}$$

$$y_k = y(x_k) \tag{2.124}$$

$$y_k' = y'(x_k) \tag{2.125}$$

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}s} y' \mathrm{d}x \tag{2.126}$$

$$u = (x - x_k)/h, \mathrm{d}u = \mathrm{d}yx/h \tag{2.127}$$

Pokud použijeme Newtonův interpolační vzorec řádu čtyři, a dosadíme, dostaneme Adamsův vzorec ve tvaru

$$\Delta y_k = hy'_k + \frac{1}{2}\Delta hy'_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2(hy'_{k-2}) + \frac{3}{8}\Delta^3(hy'_{k-3}) \tag{2.128}$$

Víme, že platí následující vzorce

$$\Delta y'_{k-1} = y'_k - y'_{k-1} \tag{2.129}$$

$$\Delta^2 y'_{k-2} = y'_k - 2y'_{k-1} + y'_{k-2} \tag{2.130}$$

$$\Delta^3 y'_{k-3} = y'_k - 3y'_{k-1} + 3y'_{k-2} - y'_{k-3} \tag{2.131}$$

Dosazením do Adamsova vzorce dostaneme metodu ve tvaru

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\left(55y'_k - 59y'_{k-1} + 37y'_{k-2} - 9y'_{k-3}\right) \tag{2.132}$$

Abychom tuto metodu mohli použít musíme znát bázi, čili čtyři hodnoty y_0, y_1, y_2, y_3. Tuto bázi můžeme určit např. Runge-Kuttovou metodou.

Kapitola 3

Parciální diferenciální rovnice

Parciální diferenciální rovnice jsou takové rovnice, ve kterých se vyskytují parciální derivace neznámé funkce dvou, případně více argumentů. *Řádem parciální diferenciální rovnice* nazýváme nejvyšší řád parciální derivace hledané funkce, jež se v rovnici vyskytuje.

Řešením (integrálem) parciální diferenciální rovnice nazýváme funkci, která zadané rovnici vyhovuje. Jelikož hledaná funkce musí mít minimálně dva argumenty, jsou řešením parciálních diferenciálních rovnic vícerozměrné křivky, např. v případě funkce dvou proměnných x a y lze řešení rovnice $z(x, y)$ chápat jako plochu v trojrozměrném prostoru.

Obecně lze parciální diferenciální rovnici napsat ve tvaru

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^m y}{\partial x_1^{(m)}}, \ldots, \frac{\partial^m y}{\partial x_n^{(m)}}\right) = 0 \tag{3.1}$$

kde

- Funkce y je neznámá, hledaná funkce n proměnných

$$y = y(x_1, x_2, \ldots, y_n) \tag{3.2}$$

- Rovnice (3.1) je řádu m, protože je m je nejvyšší řád parciální derivace

Více informací je možné najít v literatuře [30], [8], [24].

3.1 Skalární a vektorové pole

Při řešení různých fyzikálních problémů se setkáváme s vektorovými a skalárními poli. Mějme skalárové pole T. Toto pole je charakterizováno v každém bodě pouze jedním číslem – skalárem. Obecně se tato hodnota může v čase měnit. Například teplota je skalárové pole. V každém bodě pole změříme jedno číslo – teplotu.

Na druhé straně vektorové pole $\mathbf{T}$ je v každém bodě charakterizováno vektorem, který je charakterizován velikostí a směrem. Např. fyzikální veličina hustoty tepelného toku.

Velmi důležitým pojmem je *derivace pole*, které se nazývá *gradient*. Gradient charakterizuje směr růstu pole. V podstatě gradient je vektor, jehož složky představují parciální derivace podle všech prostorových souřadnic. Gradient pole $\mathbf{T}$ (vektor) je definován jako

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{3.3}$$

3.2 Operátor nabla (∇)

V parciálních diferenciálních rovnicích se velmi často používá vektorový operátor nabla – ∇ – který lze použít k zjednodušení zápisu rovnic. Tento operátor je definován jako

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{3.4}$$

Mějme skalárové pole T. V podstatě T je funkce tří proměnných $T(x, y, z)$. S pomocí operátoru nabla můžeme definovat gradient T. Nutno říct, že nabla je vektorový operátor a proto gradient je také vektor.

$$\nabla T = \text{grad } T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{3.5}$$

Budeme-li řešit rovnici

$$\nabla T = \mathbf{0} \tag{3.6}$$

Potom budeme ve skutečnosti řešit soustavu tří rovnic

$$\frac{\partial T(x, y, z)}{\partial x} = 0 \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial T(x, y, z)}{\partial y} = 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial T(x, y, z)}{\partial z} = 0 \tag{3.9}$$

Mějme $\mathbf{T}$ vektorové pole (funkce tří proměnných, která každému bodu přiřazuje vektor), potom můžeme použít *skalární* a *vektorový* součin s operátorem nabla. V prvním případě definujeme *divergenci* jako skalární součin dvou vektorů. Výsledkem této operace je skalár.

$$\nabla.\mathbf{T} = \text{div}\mathbf{T} = \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial T_z}{\partial z} \tag{3.10}$$

Vektorový součin dvou vektorů se nazývá rotace. Nutno říct, že výsledkem této operace je vektor. Rotace je definovaná pomocí operátoru nabla takto

$$\nabla \times \mathbf{T} = \text{rot}\mathbf{T} = \left(\frac{\partial T_y}{\partial x} - \frac{\partial T_x}{\partial y}, \frac{\partial T_z}{\partial y} - \frac{\partial T_y}{\partial z}, \frac{\partial T_x}{\partial z} - \frac{\partial T_z}{\partial x}\right) \tag{3.11}$$

Tímto způsobem jsme definovali základní tři kombinace, ve kterých se používá operátor nabla. V technické praxi si však s prvními derivacemi nevystačíme a používáme i druhé derivace které sestavíme z kombinací základních tří.

Nejvýznamnější operátor druhého řádu se nazývá *Laplaceův operátor* (∇^2). Ten je definován jako

$$(\nabla.\nabla) = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3.12}$$

V české literatuře se často používá jiný symbol pro Laplaceův operátor $\nabla^2 = \mathbf{\Delta}$. Pokud použijeme Laplaceův operátor v kombinaci s funkcí (skalárovým polem) T, dostaneme

$$\nabla^2 T = \mathbf{\Delta} T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{3.13}$$

Jednoduchým použitím vektorové algebry jsme odvodili všechny hlavní operátory, které se často používají v oblasti parciálních diferenciálních rovnic. Informace v této části jsem převzal z [16].

3.3 Počáteční podmínky

V praxi používáme *úlohy s počátečními (Cauchyovými) podmínkami.* Podobně jako v soustavách obyčejných diferenciálních rovnic potřebujeme znát počáteční podmínky, u parciálních diferenciální rovnic je to podobné. Definici však omezím na nejčastěji používané typy úloh – rovnice prvního a druhého řádu.

U rovnic prvního řádu s neznámou funkcí tří proměnných $T(x, y, z)$ ve tvaru

$$\frac{\partial T}{\partial x} = f\left(x, y, z, T, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{3.14}$$

Potřebujeme na definování počáteční podmínky pro partikulární integrál funkce T pevné číslo $x = \mathrm{a}$. Dále potřebujeme znát funkci dvou proměnných y a z

$$T(\mathrm{a}, y, z) = \phi(y, z) \tag{3.15}$$

kde ϕ je funkce dvou proměnných, která nezávisí na x.

V případě rovnic druhého řádu je to podobné. Zde potřebujeme znát dvě funkce. Mějme rovnici druhého řádu ve tvaru

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f\left(x, y, z, T, \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}, \frac{\partial^2 T}{\partial xy}, \frac{\partial^2 T}{\partial xz}, \frac{\partial^2 T}{\partial yy}, \frac{\partial^2 T}{\partial yz}, \frac{\partial^2 T}{\partial zz}\right) \tag{3.16}$$

Potom jako počáteční podmínku potřebujeme pro pevný bod $x = \mathrm{a}$ definovány dvě funkce ϕ a ψ nezávisející na x. Informace jsem převzal z [30].

$$T(\mathrm{a}, y, z) = \phi(y, z) \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial T(\mathrm{a}, y, z)}{\partial x} = \psi(y, z) \tag{3.18}$$

3.4 Typy parciálních diferenciálních rovnic

V technické praxi se často používají některé speciální typy parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu. Mějme obecnou rovnici druhého řádu na oblasti Ω.

$$A\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 T}{\partial xy} + C\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + D\frac{\partial T}{\partial x} + E\frac{\partial T}{\partial y} + F.T + G = 0 \tag{3.19}$$

- funkce T je neznámá funkce dvou proměnných x a y na oblasti Ω
- A,B,C,D,E,F,G jsou spojité funkce proměnných x a y na oblasti Ω

Z této rovnice sestavíme matici Q

$$Q = \begin{pmatrix} A(x, y) & B(x, y) \\ B(x, y) & C(x, y) \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

Následně z matice Q vyjádříme diskriminant δ, který dále použijeme. Diskriminant v bodě $M = [x, y]$, kde bod M je libovolný pevný bod v oblasti Ω, je definován jako

$$\delta = -|Q| \tag{3.21}$$

Podle hodnoty diskriminantu definujeme tři typy parciálních diferenciálních rovnic

- $\delta > 0$ – *hyperbolická v bodě M*
- $\delta = 0$ – *parabolická v bodě M*
- $\delta < 0$ – *eliptická v bodě M*

Dále platí, že pokud diskriminant δ má stejné znaménko pro $\forall[x, y] \in \Omega$ potom hovoříme o *hyperbolické* resp. *parabolické* resp. *eliptické* parciální diferenciální rovnici na oboru Ω.

V případě, že se znaménko diskriminantu mění, pak hovoříme o *lineární parciální diferenciální rovnici smíšeného typu.*

Když budeme obecně uvažovat n-dimenzionální prostor, můžeme matici zapsat jako

$$Q(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \tag{3.22}$$

Kde $\xi \in \Re^n$ a koeficienty a_{ij} jsou koeficienty (obecně funkce n-proměnných) z rovnice. Diskriminant spočítáme podobným způsobem jako diskriminant v předchozím případě.

3.4.1 Rovnice eliptického typu

Jedná se o třídu parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu, které mají diskriminant δ menší než 0. Mezi nejznámější rovnice eliptického typu patří *Poissonova rovnice* a její speciální případ *Laplaceova rovnice.* Tyto rovnice mají široké praktické uplatnění. Např. touto rovnicí se dá spočítat elektrický potenciál na povrchu nějakého tělesa (např. na povrchu koule).

Poissonova rovnice je ve tvaru

$$\nabla^2 T = f \tag{3.23}$$

kde

- ∇^2 je Laplaceův operátor
- T je neznámá funkce n proměnných
- f je libovolná funkce n proměnných

Speciální případ Poissonovy rovnice pro funkci tří proměnných, kdy rozepíšeme Laplaceův operátor je

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \tag{3.24}$$

Nyní se budeme zabývat řešením těchto rovnic ve dvou nebo ve třech rozměrech. Budeme řešit rovnici (3.24) na oblasti Ω. Jestliže funkce $f(x, y)$ nebo funkce $f(x, y, z)$ které jsou dvakrát spojitě diferenciabilní na oblasti Ω a vyhovují rovnici (3.24), potom tyto funkce nazýváme *harmonické na oblasti* Ω.

Některé harmonické funkce lze matematicky formulovat jako *Dirichletův* případně *Neumannův* okrajový problém.

Mějme Laplaceovu rovnici $\nabla^2 T = 0$ a oblast Ω, s hranicí $\partial\Omega$. Dále mějme funkci $\phi : \partial\Omega \to \Re$. *Dirichletova* počáteční úloha pro Laplaceovu rovnici znamená najít takovou funkci T, která vyhovuje rovnici $\nabla^2 T = 0$ v Ω a zároveň splňuje *Dirichletovu podmínku*

$$T(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \tag{3.25}$$

V podstatě *Dirichletova počáteční úloha* znamená najít takovou funkci, která vyhovuje rovnici a zároveň nabývá daných hodnot na okraji řešené oblasti. Ilustrovat to můžeme např. na příkladě výpočtu elektrického potenciálu, kde okrajovou podmínku představuje uzemnění vodiče, tj. okrajová podmínka bude nulová.

Další okrajový problém je *Neumannův okrajový problém.* Opět řešme Laplaceovu rovnici $\nabla^2 T = 0$ na oblasti Ω. Mějme opět hranici oblasti $\partial\Omega$. Potom *Neumanova počáteční úloha* pro Laplaceovu rovnici znamená najít takovou funkci T která vyhovuje rovnici a zároveň splňuje *Neumannovu podmínku* – derivace funkce ve směru vnější normály k okraji oblasti Ω.

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \tag{3.26}$$

3.4.2 Elektrické pole a Poissonova rovnice

V této práci bych se chtěl zaměřit mimo jiné i na elektrické obvody. Fundamentálním prvkem elektrotechniky jsou *Maxwellovy rovnice.* Jedná se o čtyři parciální diferenciální rovnice. V jednom z nejjednodušších případů je možné získat Poissonovu rovnici z Maxwellových rovnic. V této kapitole bych chtěl ukázat, jakým způsobem je možné z Maxwellových rovnic získat právě Laplaceovu rovnici.

Mějme potenciálové (skalární) pole V. Odtud odvodíme že elektrické pole E je definováno jako gradient potenciálového pole (napětí je rozdíl potenciálů). Tedy

$$E = -\nabla V \tag{3.27}$$

Dále použijeme Maxwellovu rovnici, která říká, že elektrické pole E je úměrné divergenci hustoty rozložení elektrického náboje. Z tohoto vztahu můžeme dosazením odvodit

$$\nabla . E = \frac{\varrho}{\epsilon_0} \tag{3.28}$$

$$\nabla . -(\nabla V) = \frac{\varrho}{\epsilon_0} \tag{3.29}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\varrho}{\epsilon_0} \tag{3.30}$$

Vidíme, že se jedná o Poissonovu rovnici. Když vezmeme speciální případ v prostředí bez náboje, dostaneme pravou stranu rovnu nule a obdržíme Laplaceovu rovnici.

Další informace je možné získat z literatury [27], [2] a zajímavé informace z teorie Maxwellových rovnic je možné najít v [23].

3.4.3 Rovnice hyperbolického typu

Při řešení rovnic hyperbolického typu je vhodné, když budeme uvažovat že jeden rozměr je čas. Nejvýznamnější rovnice hyperbolického typu jsou vlnové rovnice, kterou můžeme obecně zapsat jako

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 T + kT = G(x, y, z, t) \tag{3.31}$$

A její speciální případy se dají napsat jako

- *Rovnice kmitání struny*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \tag{3.32}$$

- *Rovnice válcových vln*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0 \tag{3.33}$$

- *Rovnice kulových vln*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0 \tag{3.34}$$

- *Telegrafní rovnice*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \left(a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + b \frac{\partial T}{\partial t} + cT \right) = 0 \tag{3.35}$$

Abychom byli schopni řešit vlnovou rovnici, potřebujeme definovat počáteční úlohu. Kromě počáteční hodnoty budeme potřebovat současně zadat počáteční hodnoty časové derivace.

Budeme hledat funkci T v definičním oboru $\Re^n \times \langle 0, \infty)$, která vyhovuje rovnici a zároveň pro $t = 0$ máme zadány počáteční podmínky ve tvaru

$$T(\mathbf{x}, 0) = \phi_1(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Re^n \tag{3.36}$$

$$\frac{\partial T(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} = \phi_2(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Re^n \tag{3.37}$$

kde ϕ_1 a ϕ_2 jsou dané spojité funkce. Můžeme uvést, že existuje speciální jednoduchý případ zadání vlnové rovnice s počátečími podmínkami

$$T(\mathbf{x}, 0) = 0 \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial T(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} = \phi_2(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Re^n \tag{3.39}$$

V případě jednorozměrné struny si lze tento případ představit jako „drnknutí“ do struny v klidu.

3.4.4 Rovnice parabolického typu

Nejvýznamnější rovnice parabolického typu je rovnice *vedení tepla*, také nazývaná rovnice difuze ve tvaru

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla^2 T = 0 \tag{3.40}$$

Při řešení rovnice vedení tepla hledáme funkci T v oboru $\Re^n \times \langle 0, \infty)$, která je spojitá a vyhovuje rovnici. Dále víme, že pro čas $t = 0$ funkce nabývá předepsaných hodnot. Čili

$$\frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \nabla^2 T(\mathbf{x}, t) = 0 \qquad \mathbf{x} \in \Re^n, t\langle \in 0, \infty) \tag{3.41}$$

$$T(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Re^n \tag{3.42}$$

Informace v této části jsem čerpal z [30] a [22].

3.5 Analytické řešení parciálních diferenciálních rovnic

Obrovskou výhodou *analytického řešení* je v podstatě dokonalá přesnost. Tato výhoda je však vykoupena nevýhodou v podobě složitosti získání analytického řešení, které v některých případech vůbec nemusí existovat. Dále můžeme mít zadanou např. Laplaceovu rovnici s matematicky těžko popsatelnými okrajovými podmínkami. Analytické řešení představuje najít matematický funkční předpis, např.

$$T(x, y, z) = \frac{z^2}{\pi} \sin x \cosh y \tag{3.43}$$

Nutno poznamenat, že existuje spousta různých metod pro analytické řešení parciálních diferenciálních rovnic, které byly navrženy pro různé druhy parciálních diferenciálních rovnic. Mezi nejdůležitější metody patří

- Metoda separace proměnných (Fourierova metoda)
- Metoda záměny proměnné
- Fourierovy řady

Zkusím zde nastínit jakým způsobem by se postupovalo metodou sepearace proměnných při řešení Laplaceovy rovnice ve tvaru

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \tag{3.44}$$

První krok při použití metody separace proměnných je vyjádřit hledanou funkci jako součet, či součin funkcí, kde každá funkce závisí pouze na jedné proměnné.

$$T(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{3.45}$$

Ve druhém kroku tuto funkci dosadíme do rovnice

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y)Z(z) + \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} X(x)Z(z) + \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} X(x)Y(y) = 0 \tag{3.46}$$

Třetí krok spočívá ve vydělení celé rovnice funkcí T, čili

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0 \tag{3.47}$$

Všimněme si, že každý člen součtu je závislý vždy jen na jedné proměnné, které jsou nezávislé, je každý člen roven nějaké konstantě, jejichž součet je nula. První konstantu

nazvěme a, druhou b a třetí $-(a+b)$. Celá idea této metody spočívá v nalezení systému tří obyčejných diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = aX(x) \tag{3.48}$$

$$\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = bY(y) \tag{3.49}$$

$$\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -(a+b)Z(z) \tag{3.50}$$

Vidíme, že se jedná o homogenní rovnice a proto řešení těchto rovnic je ve tvaru $X(x) = C\mathrm{e}^{\pm\sqrt{ax}}$, potom řešení vyjádříme jako

$$T(x,y,z) = C\mathrm{e}^{\pm\sqrt{ax}}\mathrm{e}^{\pm\sqrt{by}}\mathrm{e}^{\pm i\sqrt{(a+b)z}} \tag{3.51}$$

Nyní už musí do výpočtu vstoupit okrajové podmínky, ze kterých spočítáme jedno konkrétní řešení. Informace pro tuto část jsem čerpal z [10], [18] a [30].

3.5.1 Příklad

Pro ilustraci uveďme postup na získání analytického řešení Laplaceovy rovnice. Tato rovnice je velmi často použita v celé této práci jako testovací rovnice.

$$\nabla^2 u = 0, \quad \Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \tag{3.52}$$

$$u(x,0) = 0 \tag{3.53}$$

$$u(0,y) = 0 \tag{3.54}$$

$$u(1,y) = 0 \tag{3.55}$$

$$u(x,1) = \sin \pi x \tag{3.56}$$

Použijeme metodu separace proměnných, čili budeme uvažovat řešení ve tvaru $u(x,y) = X(x).Y(y)$.

Funkci u v tomto tvaru budeme derivovat

$$X''Y + XY'' = 0 \tag{3.57}$$

$$X(0)Y(y) = X(1)Y(y) = 0 \tag{3.58}$$

Sestavíme soustavu 2 diferenciálních rovnic, kterou vyřešíme.

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \tag{3.59}$$

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0 \tag{3.60}$$

Využijeme vzorec pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic, kerým obdržíme řešení ve tvaru

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \qquad y = C\cos\lambda x + D\sin\lambda x \tag{3.61}$$

Je zřejmé, že řešením bude periodická funkce. Využijeme okrajovou podmíku a odvodíme $\lambda = \frac{1}{M} n\pi$, pro celočíselné n.

Nyní vyřešíme druhou diferenciální rovnici, která bude mít řešení v tomto tvaru

$$y'' - \lambda^2 y = 0, \qquad y = C\mathrm{e}^{\lambda x} + D\mathrm{e}^{-\lambda x} \tag{3.62}$$

Odsud odvodíme obě funkce následujícího tvaru

$$X(x) = \sin \frac{n\pi x}{M} \tag{3.63}$$

$$Y(y) = \sinh \frac{n\pi y}{M} + \sinh \frac{n\pi(L-y)}{M} \tag{3.64}$$

Z tohoto tvaru vidíme, že řešení je nekonečně mnoho a závisí na volbě parametrů n, M a L. Pro jednoduchost, vybereme $n = 1$, $M = 1$ a $L = 1$.

$$u(x,y) = X(x).Y(y) = \sin n\pi x \left(a \sinh n\pi x + b \sinh n\pi(1-y)\right) \tag{3.65}$$

Nyní s pomocí okrajových podmínek dostaneme výsledné řešení.

$$u(x,0) = 0 \tag{3.66}$$

$$0 = \sin \pi x \left(a \sinh 0 + b \sinh \pi\right) \tag{3.67}$$

$$0 = b \sinh \pi \tag{3.68}$$

$$b = 0 \tag{3.69}$$

$$u(x,1) = \sin \pi x \tag{3.70}$$

$$\sin \pi x = a \sin \pi x \sinh \pi \tag{3.71}$$

$$1 = a \sinh \pi \tag{3.72}$$

$$a = \sinh \pi^{-1} \tag{3.73}$$

Výsledkem je funkce, vyhovující rovnici i okrajovým podmínkám.

$$u(x,y) = \frac{1}{\sinh \pi} \sin \pi x \sinh \pi y \tag{3.74}$$

3.6 Numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic

Numerické řešení bývá v některých případech jedinou metodou jak dostat uspokojivé řešení parciálních diferenciálních rovnic. Tento způsob může být výpočetně (časově i pamětně) velmi náročný a narozdíl od analytického řešení je pouze přibližný.

Společnou vlastností numerických metod je diskretizace prostoru. Oblast Ω obsahuje nekonečně mnoho bodů a není možné získat přesné řešení v každém bodě. Diskretizací budeme rozumět zvolení konečného počtu bodů, ve kterých spočítáme přibližné řešení.

Mezi nejdůležitější a nejčastěji používané metody patří

- Metoda konečných diferencí

- Metoda konečných prvků

Tato práce je zaměřena na numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic, proto tato kapitola bude zaměřena na základní pojmy a vlastní metody budou popsány v dalších kapitolách. Pokud nebude uvedeno jinak, budeme uvažovat rovnici s dvourozměrnou oblastí Ω, jejíž okraj má polygonální tvar.

Uveďme nyní hlavní pojmy z oblasti řešení parciálních diferenciálních rovnic.

3.6.1 Triangulace

Triangulací budeme rozumět diskretizaci oblasti Ω. Základní prvky triangulace budeme nazývat *elementy*. Přestože by se dalo podle názvu usuzovat, že triangulace znamená pokrytí prostoru trojúhelníky, v této práci budeme nazývat triangulací i pokrytí jinými než trojúhelníkovými útvary, např. čtverci, rovnoběžníky apod. *Triangulace* je typicky používána v metodě konečných prvků a v tomto případě záleží i na geometrii použitých elementů.

Rovnici řešíme na oblasti Ω a budeme předpokládat že hranice $\partial\Omega$ je polygon. Množinu $\mathcal{T}_\Omega$ budeme nazývat *triangulací*, když platí následující podmínky

- $\bigcup t \in \mathcal{T}_\Omega = \overline{\Omega}$ – sjednocení všech elementů triangulace pokryje celou oblast včetně hranice.
- každé dva různé elementy z triangulace $\mathcal{T}_\Omega$ mají prazdný průnik, nebo mají společný vrchol, nebo hranu.

V této práci se zaměříme na triangulace složenými z trojúhelníkových a čtyřúhelníkových elementů, případně jejich kombinacemi. V literatuře se pojem triangulace používá pro množiny obsahující i složitější elementy. Typicky se jedná o trojúhelníky typu $\mathbb{P}_2$ případně $\mathbb{P}_3$.

Vrcholy elementů budeme značit $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots \mathbf{b_n}$. Zaměříme se na lineární trojúhelníkové popř. bilineární rovnoběžníkové elementy prvního řádu, také nazývané $\mathbb{P}_1$ elementy. Funkce je ve tvaru

$$f(x, y) = ax + by + c \tag{3.75}$$

popř.

$$f(x, y) = axy + bx + cy + d \tag{3.76}$$

a je jednoznačně určena koeficienty a, b a c popř. d. Její hodnoty ve vrcholech elementu budeme nazývat lokální stupně volnosti.

3.6.2 Interpolant

Důležitým pojmem je *interpolant* funkce. Jedná so o funkci která má podobný průběh jako funkce, kterou interpoluje. Formálně interpolantem $\Pi_t[f]$ funkce f na elementu t budeme rozumět

- lineární funkci 2 proměnných ve tvaru $\mathrm{a}x + \mathrm{b}y + \mathrm{c}$ v případě, že t je trojúhelníkový element
- bilineární funkci 2 proměnných ve tvaru $\mathrm{a}xy + \mathrm{b}x + \mathrm{c}y + \mathrm{d}$ v případě, že t je čtyřúhelníkový element

Vše vychází z geometrie elementu. Trojúhelník t je definován třemi body $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $[x_3, y_3]$, s funkčními hodnotami $z_1 = f(x_1, y_1)$, $z_2 = f(x_2, y_2)$ a $z_3 = f(x_3, y_3)$, které určí jednoznačně lineární funkci dvou proměnných, přičemž koeficienty budou ve tvaru

$$\mathrm{a} = -\frac{z_2y_1 - z_2y_3 - y_2z_1 + y_2z_3 - z_3y_1 + y_3z_1}{x_1y_2 - x_1y_3 - y_1x_2 + y_1x_3 - x_3y_2 + y_3x_2} \tag{3.77}$$

$$\mathrm{b} = \frac{-z_1x_2 + z_1x_3 + x_1z_2 - x_1z_3 + z_3x_2 - x_3z_2}{x_1y_2 - x_1y_3 - y_1x_2 + y_1x_3 - x_3y_2 + y_3x_2} \tag{3.78}$$

$$\mathrm{c} = \frac{x_1y_2z_3 - x_2y_1z_3 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 + x_2y_3z_1 - x_1y_3z_2}{x_1y_2 - x_1y_3 - y_1x_2 + y_1x_3 - x_3y_2 + y_3x_2} \tag{3.79}$$

V případě čtyřúhelníkového elementu definováného čtyřmi body $[x_1, y_1, z_1]$, $[x_2, y_2, z_2]$, $[x_3, y_3, z_3]$ a $[x_4, y_4, z_4]$. pro každý vrchol nadefinujeme bázovou funkci $N^i(x, y)$, která bude nabývat hodnoty 1 ve vrcholu $[x_i, y_i]$, bude bilineární a v ostatních vrcholech bude nabývat hodnoty 0.

Jakmile známe bázové funkce N^1, N^2, N^3, N^4, víme, že výsledný interpolant na elementu t bude ve tvaru

$$\Pi_t[f](x, y) = z_1N^1(x, y) + z_2N^2(x, y) + z_3N^3(x, y) + z_4N^4(x, y) \tag{3.80}$$

Kapitola 4

Metoda konečných prvků

V této kapitole se zaměříme na metodu konečných prvků při řešení Laplaceovy rovnice v rovině $\mathbb{R}^2$ na oblasti $\Omega \in \mathbb{R}^2$ s hranici Γ. Informace jsem čerpal hlavně z [4], [11] a [25].

Označme Γ_D část okraje s dirichletovou okrajovou podmínkou a Γ_N část okraje s neumanovou okrajovou podmíkou, přičemž platí $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma$.

4.1 Silná forma

Úlohu zapíšeme v takzvané silné formě jako

$$
\begin{aligned}
-\Delta u + cu &= f && (4.1)\\
u(x,y) &= g_0, [x,y] \in \Gamma_D && (4.2)\\
\partial_n u(x,y) &= g_1, [x,y] \in \Gamma_N && (4.3)
\end{aligned}
$$

- c je nějaká kladná konstanta
- f je nějaká funkce definovaná na Ω.
- g_0, g_1 jsou funkce definované na hranici. g_0 musí být spojitá funkce, zatímco g_1 může být funkcí nespojitou.
- ∂_n je operátor pro vnější normálovou derivaci definována jako $\partial_n u = \nabla u.\mathrm{n}$, kde n je jednotkový normálový vektor směřující ven z oblasti Ω.

4.2 Greenův teorém

Metoda konečných prvků neřeší úlohu zapsanou v silné formě přímo. Namísto toho tuto úlohu přeformuluje do takzvané slabé nebo někdy nazývané variační formy. K tomuto převodu se použije Greenův teorém ve tvaru

$$\int_\Omega (\Delta u)v + \int_\Omega \nabla u.\nabla v = \int_\Gamma (\partial_n u)v \tag{4.4}$$

Oba integrály na levé straně jsou plošné a integrál na pravé straně je křivkový. Při zobecnění do 3 rozměrů budou integrály objemové resp. plošné.

4.3 Slabá forma

S pomocí Greenova teorému odvodíme slabou formulaci úlohy ze silné. Je důležité si uvědomit, že křivkový integrál na pravé straně teorému je potřeba rozvést na dirichletovu a neumanovu část.

$$\int_{\Gamma}(\partial_n u)v = \int_{\Gamma_D}(\partial_n u)v + \int_{\Gamma_N}(\partial_n u)v \tag{4.5}$$

Víme, že $\partial_n u = g_1$ na Γ_N a $\Delta u = f - cu$. Potom, pokud dosadíme dostaneme

$$\int_{\Omega}\nabla u.\nabla v + c\int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv + \int_{\Gamma_N} g_1 v + \int_{\Gamma_D}(\partial_n u)v \tag{4.6}$$

Dalším zjednodušením je, že budeme předpokládat $v = 0$ na hranici Γ_D, potom celá rovnice bude ve tvaru

$$\int_{\Omega}\nabla u.\nabla v + c\int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv + \int_{\Gamma_N} g_1 v \tag{4.7}$$

Výsledná slabá forma bude zapsána ve tvaru

$$u(x,y) = g_0(x,y), [x,y] \in \Gamma_D \tag{4.8}$$

$$\int_{\Omega}\nabla u.\nabla v + c\int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv + \int_{\Gamma_N} g_1 v, \forall v(x,y) = 0, [x,y] \in \Gamma_D \tag{4.9}$$

4.4 Numerické řešení

Abychom vyřešili zadaný problém numericky, přepíšeme slabou formu do výsledné formy, s využitím po částech spojitých lineárních funkcí.

Budeme hledat u_h takové, aby $u_h(\imath) = g_0(\imath), \imath \in Dir$ a

$$\int_{\Omega}\nabla u_h.\nabla v_h + c\int_{\Omega} u_h v_h = \int_{\Omega} f v_h + \int_{\Gamma_N} g_1 v_h \tag{4.10}$$

a tato výsledná diskrétní rovnice je ekvivalentní se systémem rovnic ve tvaru

$$\int_{\Omega}\nabla u_h.\nabla \phi_i + c\int_{\Omega} u_h \phi_i = \int_{\Omega} f\phi_i + \int_{\Gamma_N} g_1 \phi_i \tag{4.11}$$

pro $\forall i \in Ind$. Množina Dir je množina obsahující dirichletovy uzly (hodnota řešení je v nich známá a neměnná). Množina Ind obsahuje nezávislé uzly, jejichž hodnota se musí vypočítat.

Funkci u_h můžeme zapsat jako

$$u_h = \sum_{j\in Ind} u_j\phi_j + \sum_{j\in Dir} u_j\phi_j \tag{4.12}$$

kde nahradíme pravou část výrazu dirichletovou okrajovou podmínkou

$$u_h = \sum_{j\in Ind} u_j\phi_j + \sum_{j\in Dir} g_0(\imath)\phi_j \tag{4.13}$$

4.4.1 Matice tuhosti a matice hmotnosti

V případě praktického postupu při řešení parciální diferenciální rovnice se setkáme s maticí *tuhosti* W(anglicky *stiffness*) a s maticí *hmotnosti* M (anglicky *mass*). Prvky matice jsou definovány pro každé dva vrcholy triangulace $i, j = 1 \dots N$, kde N je počet vrcholů triangulace včetně okrajových vrcholů.

Prvky Matice tuhosti jsou definovány jako

$$W_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla\phi_j . \nabla\phi_i \tag{4.14}$$

a matice hmotnosti je definována jako

$$M_{i,j} = \int_{\Omega} \phi_j . \phi_i \tag{4.15}$$

Vektor pravé strany b_i zapíšeme pro všechny volné vrcholy $i \in Ind$ triangulace jako

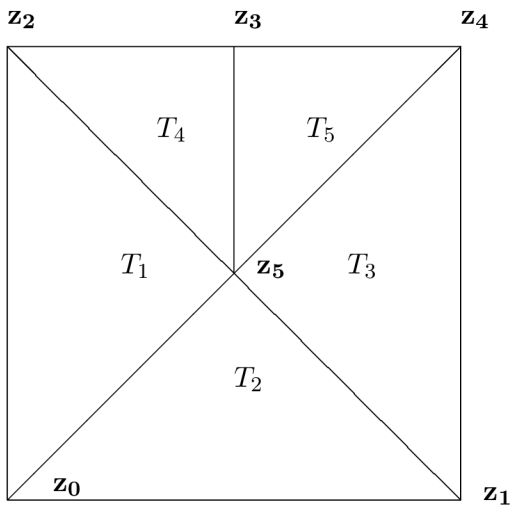
$$b_i = \int_{\Omega} f\phi_i + \int_{\Gamma_N} g_1\phi_i \tag{4.16}$$

Nyní řešíme soustavu rovnic, kde $i \in Ind$

$$\sum_{j \in Ind} (W_{ij} + cM_{ij})\, u_j = b_i - \sum_{j \in Dir} (W_{i,j} + cM_{ij})\, g_0(p_j) \tag{4.17}$$

4.5 Příklad

Nyní se pokusme vyřešit jednoduchý příklad metodou konečných prvků. Zaměřme se na Laplaceovu rovnici (3.74) a použijme triangulaci 4.1



Obrázek 4.1: Triangulace pro ukázku řešení Laplaceovy rovnice

Vidíme, že celé schema obsahuje celkem 5 trojúhelníků $T_1, \dots, T_5$, 5 dirichletových uzlů $\mathbf{z_0} \dots \mathbf{z_4}$ a jeden volný uzel $\mathbf{z_5}$. Řešení této rovnice znamená najít přibližnou hodnotu řešení ve volném uzlu $\mathbf{z_5}$.

V tomto jednoduchém případě je ve vzorci (4.17) $c = 0$. Proto nepotřebujeme počítat matici hmotnosti a funkce $f(x, y) = 0$, čímž se zjednoduší i vektor pravé strany. Ve výsledku je potřeba vypočítat matici tuhosti, která bude mít rozměr 6×6.

Spočítáme prvek matice tuhosti pro pozici $(i, j) = (0, 5)$. Dalším krokem je sestavení po částech spojitých lineárních funkcí ϕ_i. Např. pro uzly $\mathbf{z_0}$ a $\mathbf{z_5}$ vypadají funkce ϕ_0 a ϕ_5 takto

$$\begin{aligned}
\phi_0 : \phi_0[T_1](x, y) &= -x - y + 1 && (4.18)\\
\phi_0[T_2](x, y) &= -x - y + 1 && (4.19)\\
\phi_0[T_3](x, y) &= 0 && (4.20)\\
\phi_0[T_4](x, y) &= 0 && (4.21)\\
\phi_0[T_5](x, y) &= 0 && (4.22)\\
\phi_5 : \phi_5[T_1](x, y) &= 2x && (4.23)\\
\phi_5[T_2](x, y) &= 2y && (4.24)\\
\phi_5[T_3](x, y) &= -2x + 2 && (4.25)\\
\phi_5[T_4](x, y) &= -2y + 2 && (4.26)\\
\phi_5[T_5](x, y) &= -2y + 2 && (4.27)
\end{aligned}$$

Pro výpočet matice tuhosti je potřeba spočítat gradienty těchto funkcí, ty pak budou ve tvaru

$$\begin{aligned}
\nabla\phi_0 : \nabla\phi_0[T_1](x, y) &= (-1, -1) && (4.28)\\
\nabla\phi_0[T_2](x, y) &= (-1, -1) && (4.29)\\
\nabla\phi_0[T_3](x, y) &= (0, 0) && (4.30)\\
\nabla\phi_0[T_4](x, y) &= (0, 0) && (4.31)\\
\nabla\phi_0[T_5](x, y) &= (0, 0) && (4.32)\\
\nabla\phi_5 : \nabla\phi_5[T_1](x, y) &= (2, 0) && (4.33)\\
\nabla\phi_5[T_2](x, y) &= (0, 2) && (4.34)\\
\nabla\phi_5[T_3](x, y) &= (-2, 0) && (4.35)\\
\nabla\phi_5[T_4](x, y) &= (0, -2) && (4.36)\\
\nabla\phi_5[T_5](x, y) &= (0, -2) && (4.37)
\end{aligned}$$

Dále spočítáme skalární součin gradientů funkcí $\nabla\phi_0$ a $\nabla\phi_5$ jako

$$\begin{aligned}
\nabla\phi_0[T_1].\nabla\phi_5[T_1] &= -2 && (4.38)\\
\nabla\phi_0[T_2].\nabla\phi_5[T_1] &= -2 && (4.39)\\
\nabla\phi_0[T_3].\nabla\phi_5[T_3] &= 0 && (4.40)\\
\nabla\phi_0[T_4].\nabla\phi_5[T_4] &= 0 && (4.41)\\
\nabla\phi_0[T_5].\nabla\phi_5[T_5] &= 0 && (4.42)
\end{aligned}$$

V případě výpočtu podle vzorce $\int_\Omega \nabla\phi_j.\nabla\phi_i$ se jedná o objem jednotlivých hranolů s trojúhelníkovou základnou. V našem případě závisí pouze na trojúhelnících T_1 a T_2. Oba trojúhelníky mají obsah $S = 0.25$, čili výsledný integrál

$$\int_\Omega \nabla\phi_0.\nabla\phi_5 = S_{T_0}(\nabla\phi_0[T_1].\nabla\phi_5[T_1]) + S_{T_2}(\nabla\phi_0[T_2].\nabla\phi_5[T_2]) = 0.25.(-2) + 0.25.(-2) = -1 \tag{4.43}$$

Když tento postup zopakujeme pro každé dva uzly, můžeme spočítat výslednou matici tuhosti

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & -2 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & -0.5 \\ -1 & -1 & -0.5 & 1 & -0.5 & 2 \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

Nyní sestavíme soustavu lineárních algebraických rovnic pro každý volný uzel podle vzorce (4.17), v našem případě se bude jednat o jednu rovnici.

Sestavíme rovnici pro $i = 5$. Levá strana L rovnice bude vypadat takto

$$L_i = \sum_{j \in Ind} (W_{ij} + cM_{ij})\, u_j \tag{4.45}$$

$$L_i = \sum_{j \in Ind} W_{ij} u_j \tag{4.46}$$

$$L_5 = W_{5,5}.u_5 \tag{4.47}$$

$$L_5 = 2u_5 \tag{4.48}$$

Pravá strana P rovnice bude vypadat takto

$$P_i = b_i - \sum_{j \in Dir} (W_{i,j})\, g_0(p_j) \tag{4.49}$$

$$P_5 = 0 - \sum_{j=0...4} W_{5,j}.g_0(p_j) \tag{4.50}$$

$$P_5 = 0 - (1 * 1) \tag{4.51}$$

$$P_5 = -1 \tag{4.52}$$

Výsledná rovnice je ve tvaru

$$2u_5 = -1 \tag{4.53}$$

Protože jsme metodu odvodili pro tvar $-\Delta u = f(x, y)$, musíme přidat k levé straně rovnice znaménko $-$.

Výsledkem je přibližná hodnota řešení rovnice v bodě $[0.5, 0.5]$, které má hodnotu $u_5 = 0.5$.

4.6 Algoritmizace metody

Výše zmíněný způsob výpočtu není jednoduše implementovatelný a pro praktickou implementaci se využívá metody *kondenzace*. Pro jednoduchost nebudeme počítat matici hmostnosti, pouze matici tuhosti a vektor pravých stran. Princip metody kondenzace spočívá

v lineárním průchodu přes všechny elementy (trojúhelníky, rovnoběžníky, ...) a v postupné kondenzaci hodnot v matici tuhosti, přičemž se veškeré integrály spočítají na referenčním elementu, v případě trojúhelníku použijeme referenční trojúhelník s vrcholy $(0,0),(1,0),(0,1)$ v lokálních souřadnicích (ϕ,ζ) a transformací

$$x = x(\phi,\zeta) = x_1 + (x_2 - x_1)\phi + (x_3 - x_1)\zeta \tag{4.54}$$

$$y = y(\phi,\zeta) = y_1 + (y_2 - y_1)\phi + (y_3 - y_1)\zeta \tag{4.55}$$

Díky této mapovací funkci přechází funkce $v(x,y)$ na funkci $\hat{v}(\phi,\zeta) = v(x(\phi,\zeta), y(\phi,\zeta))$. Dále budeme potřebovat Jacobiovu matici transformace ve tvaru

$$J = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \tag{4.56}$$

a její determinant

$$|J| = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \tag{4.57}$$

Vlastní algoritmus výpočtu inicializuje všechny prvky matice tuhosti a vektoru pravých stran na nulu. Potom pro každý trojúhelník a čtyřúhelník spočítáme lokalní matici tuhosti velikosti 3×3 (případně 4×4).

Pro každý vrchol trojúhelníku spočítáme parametr a, tyto 3 parametry jsou ve tvaru

$$a_1 = \frac{1}{2\,|J|}\left((x_1 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)\right) \tag{4.58}$$

$$a_2 = \frac{1}{2\,|J|}\left((x_2 - x_3)(x_2 - x_1) + (y_2 - y_3)(y_2 - y_1)\right) \tag{4.59}$$

$$a_3 = \frac{1}{2\,|J|}\left((x_3 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_3 - y_1)(y_3 - y_2)\right) \tag{4.60}$$

Lokální matice tuhosti W_l bude potom vypadat takto

$$W_l = \begin{bmatrix} a_2 + a_3 & -a_3 & -a_2 \\ -a_3 & a_3 + a_1 & -a_1 \\ -a_2 & -a_1 & a_1 + a_2 \end{bmatrix} \tag{4.61}$$

Všechny tyto hodnoty se pak přičtou k odpovídajícím prvkům globální matice tuhosti.

Lokální vektor pravých stran B_l bude vypadat takto, jeho hodnoty se opět musí přičíst ke globálnímu vektoru pravých stran.

$$B_l = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}\,|J|\,f(x_1,y_1) \\ \frac{1}{6}\,|J|\,f(x_2,y_2) \\ \frac{1}{6}\,|J|\,f(x_3,y_3) \end{bmatrix} \tag{4.62}$$

V případě, že narazíme na rovnoběžníkový element, který je podobně jako trojúhelník určen dvěma vektory, bude determinant transformace vypadat takto

$$|J| = (x_2 - x_1)(y_4 - y_1) - (x_4 - x_1)(y_2 - y_1) \tag{4.63}$$

Opět spočítáme parametry a

$$a_1 = \frac{1}{|J|}\left((y_4 - y_1)(y_4 - y_1) + (x_1 - x_4)(x_1 - x_4)\right) \tag{4.64}$$

$$a_2 = \frac{1}{|J|}\left((y_4 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_4)(x_2 - x_1)\right) \tag{4.65}$$

$$a_3 = \frac{1}{|J|}\left((y_4 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_4)(x_2 - x_1)\right) \tag{4.66}$$

$$a_4 = \frac{1}{|J|}\left((y_1 - y_2)(y_1 - y_2) + (x_2 - x_1)(x_2 - x_1)\right) \tag{4.67}$$

Výsledná lokální matice tuhosti W_l je ve tvaru

$$W_{1,1} = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{3}(a_3 + a_4) \tag{4.68}$$

$$W_{1,2} = -\frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{6}(a_3 + a_4) \tag{4.69}$$

$$W_{1,3} = -\frac{1}{6}a_1 - \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{6}(a_3 + a_4) \tag{4.70}$$

$$W_{1,4} = \frac{1}{6}a_1 - \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{6}(a_3 + a_4) \tag{4.71}$$

$$W_{1,2} = -\frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{6}(a_3 + a_4) \tag{4.72}$$

$$W_{2,2} = \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{3}(a_3 + a_4) \tag{4.73}$$

$$W_{2,3} = \frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{3}(a_3 + a_4) \tag{4.74}$$

$$W_{2,4} = -\frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{6}(a_3 + a_4) \tag{4.75}$$

$$W_{3,1} = -\frac{1}{6}a_1 - \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{6}(a_3 + a_4) \tag{4.76}$$

$$W_{3,2} = \frac{1}{6}a_1 - \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{3}(a_3 + a_4) \tag{4.77}$$

$$W_{3,3} = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{3}(a_3 + a_4) \tag{4.78}$$

$$W_{3,4} = -\frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{6}(a_3 + a_4) \tag{4.79}$$

$$W_{4,1} = \frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{3}(a_3 + a_4) \tag{4.80}$$

$$W_{4,2} = -\frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{3}(a_3 + a_4) \tag{4.81}$$

$$W_{4,3} = -\frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{6}(a_3 + a_4) \tag{4.82}$$

$$W_{4,4} = \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{3}(a_3 + a_4) \tag{4.83}$$

$$W_l = \begin{bmatrix} W_{1,1} & W_{1,2} & W_{1,3} & W_{1,4} \\ W_{2,1} & W_{2,2} & W_{2,3} & W_{2,4} \\ W_{3,1} & W_{3,2} & W_{3,3} & W_{3,4} \\ W_{4,1} & W_{4,2} & W_{4,3} & W_{4,4} \end{bmatrix} \tag{4.84}$$

Lokální vektor pravých stran B_l bude pak ve tvaru

$$B_l = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\,|J|\,f(x_1, y_1) \\ \frac{1}{4}\,|J|\,f(x_2, y_2) \\ \frac{1}{4}\,|J|\,f(x_3, y_3) \\ \frac{1}{4}\,|J|\,f(x_4, y_4) \end{bmatrix} \tag{4.85}$$

Po spočítání lokálních matic tuhosti a pravých stran je potřeba přičíst tyto hodnoty do globálních matic.

4.7 Kvadratické elementy

V této kapitole se letmo zmíníme o kvadratických elementech. Dosud jsme se zabývali $\mathbb{P}_1$ elementy. Abychom získali řešení přesnější o jednu platnou číslici navíc, bylo by nutné zkrátit hrany všech elementů $10\times$. Proto je výhodnější použít $\mathbb{P}_2$ elementy, které používají kvadratické polynomy místo lineárních.

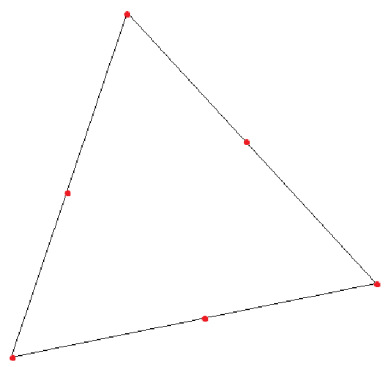
$$\mathbb{P}_2 = \left\{a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 x^2 + a_5 xy\right\} \tag{4.86}$$

V tomto případě máme 6 parametrů a_i a v případě trojúhelníku potřebujeme ještě další tři vstupní hodnoty. Typicky se jedná o tři vrcholy trojúhelníku a tři body - středy hran trojúhelníku – viz. 4.2.

V případě použití $\mathbb{P}_2$ elementů jde o použití kvadratických funkcí ϕ_i a ϕ_j. Ostatní postup zůstává stejný jako v případě $\mathbb{P}_1$ elementů.

$$W_{i,j} = \int_\Omega \nabla\phi_j . \nabla\phi_i \tag{4.87}$$

$$M_{i,j} = \int_\Omega \phi_j . \phi_i \tag{4.88}$$



Obrázek 4.2: Schéma uzlů pro $\mathbb{P}_2$ element

Kapitola 5

Metoda konečných diferencí a metoda přímek

Tato část bude zaměřena na *metodu konečných diferencí* a *metodu přímek*. Obě tyto metody si jsou podobné a ideou těchto metod je nahradit parciální derivace neznámé funkce v rovnici diferenčními vzorci.

Tím opět zjednodušíme řešený problém ze spojitého na diskrétní. Pod pojmem *diferenční vzorec* budeme rozumět takový vzorec, který aproximuje derivaci hledané funkce.

Metoda konečných diferencí nahradí všechny parciální derivace jejich odpovídajícími diferenčními vzorci a výsledkem je soustava algebraických rovnic. Neznámé v této soustavě jsou hodnoty aproximované funkce v uzlových bodech. Tato metoda je vhodná pro statické úlohy.

Metoda přímek nahradí všechny parciální derivace diferenčními vzorci a ponechá pouze derivace podle jedné, vhodně zvolené proměnné. Výsledkem je soustava obyčejných diferenciálních rovnic, jejichž vyřešením dostaneme hodnoty hledané funkce. Typicky se tato metoda používá pro úlohy, v nichž se vyskytuje časová proměnná. Prostorové derivace nahrazujeme konečnými diferencemi a ponecháváme derivace podle času.

Pro obě metody je klíčové nalézt vhodné diferenční vzorce, které vhodně aproximují derivaci hledané funkce. Používá se celá řada různých metod, které poskytují různé diferenční vzorce. Ty ovlivňují jak přesnost výsledku, tak rychlost konvergence řešení.

Zaměřme se na jádro metody *konečných diferencí* a tím jsou diferenční vzorce, kterými v uzlových bodech nahrazujeme derivaci. Tím mimo jiné zanášíme do výsledného řešení chybu.

Ve většině případů se pro diferenční vzorce používají interpolační polynomy. Mezi nejvýznamnější patří

- Lagrangeův interpolační polynom
- Newtonův interpolační polynom
- Taylorova řada

5.1 Lagrangeův interpolační polynom

Je polynom, procházející množinou zadaných bodů. Známe body $x_0, \dots x_n$ a funkční hodnoty $f(x_0), \dots f(x_n)$.

x_i	$f(x_i)$
0	1
1	3
2	1

Tabulka 5.1: Vybrané body funkce zadané tabulkou

Potom sestavíme lagrangeův polynom jako součet lokálních polynomů

$$L_f(x) = P_0(x) + P_1(x) + \ldots + P_n(x) \tag{5.1}$$

Ke každému x_i definujeme lokální polynom v tomto tvaru

$$P_i = f(x_i)\lambda_i(x) \tag{5.2}$$

Přičemž λ_i je polynom, který nabývá v bodě x_i hodnoty 1 a pro ostatní x_k, $k \neq i$ nabývá hodnoty 0.

$$\lambda_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \tag{5.3}$$

Sestavíme Lagrangeův interpolační polynom pro jednoduchý příklad zadaný tabulkou 5.1.

Nejprve sestavíme polynomy λ_i

$$\lambda_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{x^2-3x+2}{2} \tag{5.4}$$

$$\lambda_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -x^2+2x \tag{5.5}$$

$$\lambda_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x^2-x}{2} \tag{5.6}$$

$$\tag{5.7}$$

A nyní můžeme sestavit výsledný polynom

$$L_f(x) = 1\lambda_0 + 3\lambda_1 + 1\lambda_2 = -2x^2+4x+1 \tag{5.8}$$

Lagrangeův polynom relativně dobře interpoluje funkci na vnitřním intervalu $\langle x_0, x_n\rangle$. Mimo tento interval funkce rychle nabývá extrémních hodnot a není dobře použitelná.

5.2 Newtonův interpolační polynom

Newtonův polynom vychází podobně jako Lagrangeův polynom z $n+1$ bodů. Celý polynom hledáme ve tvaru

$$N(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)\ldots(x-x_n) \tag{5.9}$$

x_i	$f(x_i)$	fd^1	fd^2
$x_0 = 0$	$1 = a_0$		
$x_1 = 1$	3	$\frac{3-1}{1-0} = 2 = a_1$	
$x_2 = 2$	1	$\frac{1-3}{2-1} = -2$	$\frac{-2-2}{2-0} = -2 = a_2$

Tabulka 5.2: Tabulka pro výpočet Newtonova interpolačního polynomu

Přičemž koeficienty a_i se spočítají jako poměrné diference vyšších řádů. Poměrné diference prvního řádu se spočítá jako

$$df_i^1 = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \tag{5.10}$$

Diference druhého řádu se spočítají za pomoci dvou diferencí prvního řádu

$$df_i^2 = \frac{\frac{f(x_{i+2})-f(x_{i+1})}{x_{i+2}-x_{i+1}} - \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}}{x_{i+2} - x_i} \tag{5.11}$$

Koeficienty se počítají pomocí tabulky s poměrnými diferencemi. Celý postup budeme demonstrovat na stejném příkladě jako Lagrangeův polynom (5.2)

Výsledný polynom tedy bude ve tvaru

$$N_f(x) = 1 + 2(x - 0) - 2(x - 0)(x - 1) = -2x^2 + 4x + 1 \tag{5.12}$$

Výhodou Newtonova polynomu je, že pokud již máme existující polynom a získáme nový bod, kterým funkce musí procházet, nemusí se přepočítat všechny koeficienty, ale rozšíříme matici diferencí a přidáme jeden nový člen do existujícího polynomu.

5.3 Vzorce odvozené z Taylorovy řady

Taylorův rozvoj můžeme zapsat jako nekonečnou sumu

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' + \frac{h^2}{2!}y_i'' + \frac{h^3}{3!}y_i''' + \dots \tag{5.13}$$

S pomocí tohoto rozvoje můžeme spočítat obecně n-bodovou aproximaci. Jak je možné vidět na následujícím obrázku (kde je pro jednoduchost funkce $y = \log x$), máme nějakou funkci a známe několik jejích funkčních hodnot.

Nyní použijeme Taylorův rozvoj a vyjádříme naše funkční hodnoty pomocí Taylorova rozvoje

$$\begin{aligned} y_{k-1} &= y_k + \frac{-h}{1!}y_k' + \frac{(-h)^2}{2!}y_k'' \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{1!}y_k' + \frac{h^2}{2!}y_k'' \end{aligned}$$

Výslednou soustavu rovnic vyřešíme např. použitím systému Maple.

$$\begin{pmatrix} y_k' \\ y_k'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h & \frac{1}{2}h^2 \\ h & \frac{1}{2}h^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_{k-1} - y_k \\ y_{k+1} - y_k \end{pmatrix}$$

Výsledkem jsou diferenční vzorce aproximující první i druhou derivaci v bodě x_k

$$\begin{pmatrix} y'_k \\ y''_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h} \\ \frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2} \end{pmatrix}$$

Jak vidíme, pro druhou derivaci jsme dostali známou tříbodovou aproximaci derivace. Obecně existují tři typy diferenčních vzorců odvozených z Taylorova rozvoje. Jedná se o

- Zpětné diferenční vzorce
- Dopředné diferenční vzorce
- Kombinované diferenční vzorce

5.3.1 Zpětné diferenční vzorce

Metodu zpětných diferenčních vzorců ilustrujeme na obrázku 5.1.

S pomocí Taylorovy řady zapíšeme funkční hodnoty v uzlových bodech y_{k-1}, y_{k-2}, ... a dále budeme předpokladat, že známe y_k.

$$y_{k-1} = y_k + \frac{-h_1}{1!}y'_k + \frac{(-h_1)^2}{2!}y''_k + \frac{(-h_1)^3}{3!}y'''_k + \dots \tag{5.14}$$

$$y_{k-2} = y_k + \frac{-h_2}{1!}y'_k + \frac{(-h_2)^2}{2!}y''_k + \frac{(-h_2)^3}{3!}y'''_k + \dots \tag{5.15}$$

$$y_{k-3} = y_k + \frac{-h_3}{1!}y'_k + \frac{(-h_3)^2}{2!}y''_k + \frac{(-h_3)^3}{3!}y'''_k + \dots \tag{5.16}$$

$$\vdots \tag{5.17}$$

Soustavu zapíšeme v tomto tvaru

$$y_{k-1} = y_k + a_{B(1,1)}y'_k + a_{B(1,2)}y''_k + a_{B(1,3)}y'''_k + \dots \tag{5.18}$$

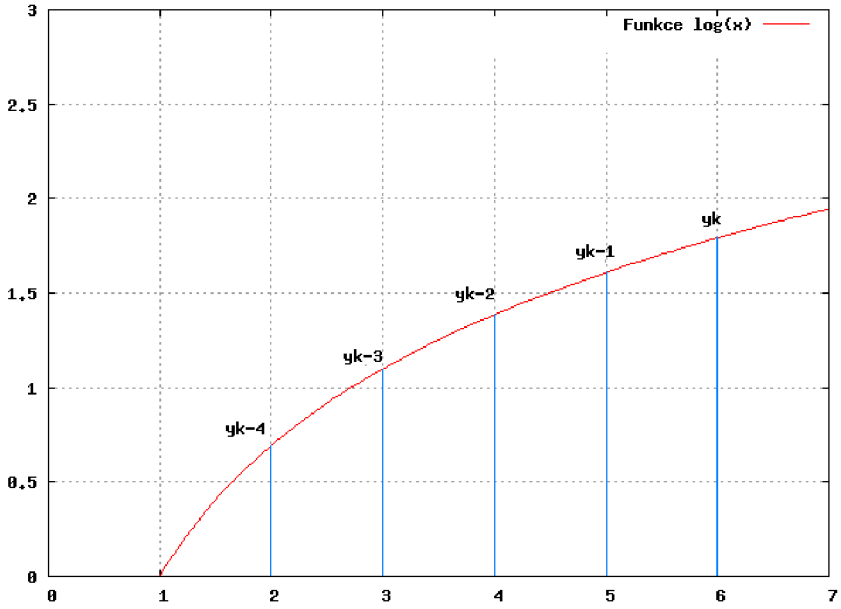
$$y_{k-2} = y_k + a_{B(2,1)}y'_k + a_{B(2,2)}y''_k + a_{B(2,3)}y'''_k + \dots \tag{5.19}$$

$$y_{k-3} = y_k + a_{B(3,1)}y'_k + a_{B(3,2)}y''_k + a_{B(3,3)}y'''_k + \dots \tag{5.20}$$

$$\vdots \tag{5.21}$$

Tuto soustavu rovnic můžeme zapsat pomocí matic

$$\begin{pmatrix} a_{B(1,1)} & a_{B(1,2)} & a_{B(1,3)} & \dots \\ a_{B(2,1)} & a_{B(2,2)} & a_{B(2,3)} & \dots \\ a_{B(3,1)} & a_{B(3,2)} & a_{B(3,3)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_k \\ y''_k \\ y'''_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{k+1} - y_k \\ y_{k+2} - y_k \\ y_{k+3} - y_k \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{5.22}$$



Obrázek 5.1: Zpětné diferenční vzorce

5.3.2 Dopředné diferenční vzorce

Metodu dopředných diferenčních vzorců ilustrujeme na obrázku 5.2

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h_1}{1!}y'_k + \frac{h_1^2}{2!}y''_k + \frac{h_1^3}{3!}y'''_k + \dots \tag{5.23}$$

$$y_{k+2} = y_k + \frac{h_2}{1!}y'_k + \frac{h_2^2}{2!}y''_k + \frac{h_2^3}{3!}y'''_k + \dots \tag{5.24}$$

$$y_{k+3} = y_k + \frac{h_3}{1!}y'_k + \frac{h_3^2}{2!}y''_k + \frac{h_3^3}{3!}y'''_k + \dots \tag{5.25}$$

$$\vdots \tag{5.26}$$

Soustavu zapíšeme ve tvaru

$$y_{k+1} = y_k + a_{F(1,1)}y'_k + a_{F(1,2)}y''_k + a_{F(1,3)}y'''_k + \dots \tag{5.27}$$

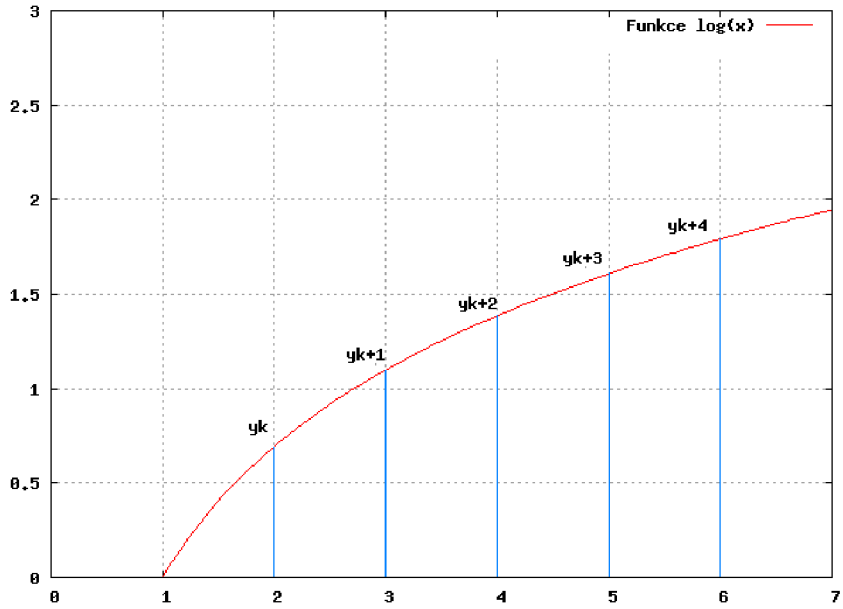
$$y_{k+2} = y_k + a_{F(2,1)}y'_k + a_{F(2,2)}y''_k + a_{F(2,3)}y'''_k + \dots \tag{5.28}$$

$$y_{k+3} = y_k + a_{F(3,1)}y'_k + a_{F(3,2)}y''_k + a_{F(3,3)}y'''_k + \dots \tag{5.29}$$

$$\vdots \tag{5.30}$$

A obecně v maticovém tvaru jako

$$\begin{pmatrix} a_{F(1,1)} & a_{F(1,2)} & a_{F(1,3)} & \dots \\ a_{F(2,1)} & a_{F(2,2)} & a_{F(2,3)} & \dots \\ a_{F(3,1)} & a_{F(3,2)} & a_{F(3,3)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_k \\ y''_k \\ y'''_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{k+1} - y_k \\ y_{k+2} - y_k \\ y_{k+3} - y_k \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{5.31}$$



Obrázek 5.2: Dopředné diferenční vzorce

5.3.3 Kombinované diferenční vzorce

Poslední jsou kombinované diferenční vzorce, jež počítáme z předchozích i z následujících kroků podobně jako je to na obrázku 5.3.

Opět vyjádříme jednotlivé kroky pomocí Taylorova rozvoje

$$y_{k-L} = y_k + \frac{-h_L}{1!}y'_k + \frac{(-h_L)^2}{2!}y''_k + \frac{(-h_L)^3}{3!}y'''_k + \dots \tag{5.32}$$

$$\vdots \tag{5.33}$$

$$y_{k-1} = y_k + \frac{-h_{L_1}}{1!}y'_k + \frac{(-h_{L_1})^2}{2!}y''_k + \frac{(-h_{L_1})^3}{3!}y'''_k + \dots \tag{5.34}$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h_{R_1}}{1!}y'_k + \frac{h_{R_1}^2}{2!}y''_k + \frac{h_{R_1}^3}{3!}y'''_k + \dots \tag{5.35}$$

$$\vdots \tag{5.36}$$

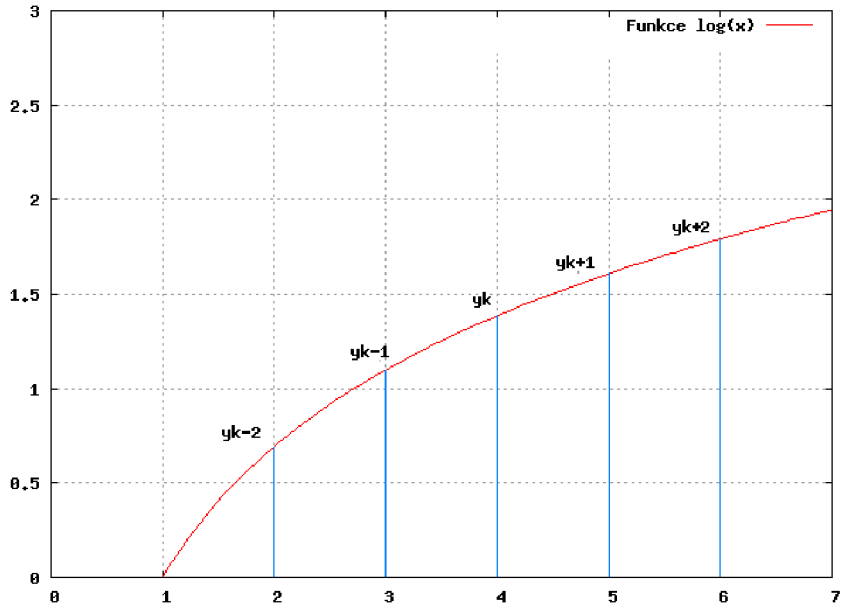
$$y_{k+R} = y_k + \frac{h_R}{1!}y'_k + \frac{h_R^2}{2!}y''_k + \frac{h_R^3}{3!}y'''_k + \dots \tag{5.37}$$

A obdržíme soustavu rovnic

$$y_{k-L} = y_k + a_{B(L,1)}y'_k + a_{B(L,2)}y''_k + a_{B(L,3)}y'''_k + \dots \tag{5.38}$$

$$\vdots \tag{5.39}$$

$$y_{k+R} = y_k + a_{F(R,1)}y'_k + a_{F(R,2)}y''_k + a_{F(R,3)}y'''_k + \dots \tag{5.40}$$



Obrázek 5.3: Kombinované diferenční vzorce

V maticovém zápisu budou kombinované vzorce vypadat takto

$$\begin{pmatrix} y'_k \\ y''_k \\ y'''_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{B(L,1)} & a_{B(L,2)} & \cdots & a_{B(L,L+R)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{B(1,1)} & a_{B(1,2)} & \cdots & a_{B(1,L+R)} \\ a_{F(1,1)} & a_{F(1,2)} & \cdots & a_{F(1,L+R)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{F(R,1)} & a_{F(R,2)} & \cdots & a_{F(R,L+R)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_{k-L} - y_k \\ \vdots \\ y_{k-1} - y_k \\ y_{k+1} - y_k \\ \vdots \\ y_{k+R} - y_k \end{pmatrix} \tag{5.41}$$

5.3.4 Příklad výpočtu diferenčních vzorců

Ilustrujme metodu výpočtu kombinovaných diferenčních vzorců a odvodíme metodu pětibodové aproximace derivace. Tedy budeme potřebovat střed y_k a čtyři okolní body y_{k-2}, y_{k-1}, y_{k+1} a y_{k+2} s uniformním krokem h (případně $2h$).

Jelikož máme pouze čtyři okolní body, sestavíme Taylorovy rozvoje do členu s h^4.

$$y_{k-2} = y_k + \frac{-2h}{1!}y'_k + \frac{(-2h)^2}{2!}y''_k + \frac{(-2h)^3}{3!}y'''_k + \frac{(-2h)^4}{4!}y_k^{(4)} \tag{5.42}$$

$$y_{k-1} = y_k + \frac{-h}{1!}y'_k + \frac{(-h)^2}{2!}y''_k + \frac{(-h)^3}{3!}y'''_k + \frac{(-h)^4}{4!}y_k^{(4)} \tag{5.43}$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1!}y'_k + \frac{h^2}{2!}y''_k + \frac{h^3}{3!}y'''_k + \frac{h^4}{4!}y_k^{(4)} \tag{5.44}$$

$$y_{k+2} = y_k + \frac{2h}{1!}y'_k + \frac{(2h)^2}{2!}y''_k + \frac{(2h)^3}{3!}y'''_k + \frac{(2h)^4}{4!}y_k^{(4)} \tag{5.45}$$

Po zjednodušení máme soustavu ve tvaru

$$\begin{pmatrix} y'_k \\ y''_k \\ y'''_k \\ y^{(4)}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2h & 2h^2 & -\frac{4}{3}h^3 & \frac{2}{3}h^4 \\ -h & \frac{1}{2}h^2 & -\frac{1}{6}h^3 & \frac{1}{24}h^4 \\ h & \frac{1}{2}h^2 & \frac{1}{6}h^3 & \frac{1}{24}h^4 \\ 2h & 2h^2 & \frac{4}{3}h^3 & \frac{2}{3}h^4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_{k-2} - y_k \\ y_{k-1} - y_k \\ y_{k+1} - y_k \\ y_{k+2} - y_k \end{pmatrix} \tag{5.46}$$

Výsledkem jsou diferenční vzorce pro přibližný výpočet derivace do čtvrtého řádu.

$$y'_k = -\frac{1}{12h}\left(-y_{k-2} + 8y_{k-1} - 8y_{k+1} + y_{k+2}\right) \tag{5.47}$$

$$y''_k = -\frac{1}{12h^2}\left(y_{k-2} - 16y_{k-1} + 30y_k - 16y_{k+1} + y_{k+2}\right) \tag{5.48}$$

$$y'''_k = \frac{1}{2h^3}\left(-y_{k-2} + 2y_{k-1} - 2y_{k+1} + y_{k+2}\right) \tag{5.49}$$

$$y^{(4)}_k = \frac{1}{h^4}\left(y_{k-2} - 4y_{k-1} + 6y_k - 4y_{k+1} + y_{k+2}\right) \tag{5.50}$$

Důležitou vlastností vyšších diferenčních vzorců je, že kladou vyšší nároky na výpočetní aritmetiku. Standardní čísla s dvojitou přesností umožňují zobrazení až na šestnáct míst. V rovnici vidíme, že používáme h^4, což při $h = 0.01$ znamená 10^{-8}. Při výpočtu inverzní matice (nebo jiném iteračním výpočtu) potřebujeme sčítat (odčítat) velká a malá čísla, čímž zanášíme do celého výpočtu velkou chybu. Při praktické implementaci se vyplatí použít metody analytického odvození vzorců.

5.3.5 Taylorova řada funkce více proměnných

Nyní se zaměřme na Taylorovu řadu funkce více proměnných. Obecně Taylorův rozvoj dvou proměnných vypadá jako

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(h_x\frac{\partial}{\partial x} + h_y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0) \tag{5.51}$$

Pokud se budeme držet zápisu Taylorovy řady funkce jedné proměnné, můžeme tuto řadu zjednodušeně zapsat ve tvaru

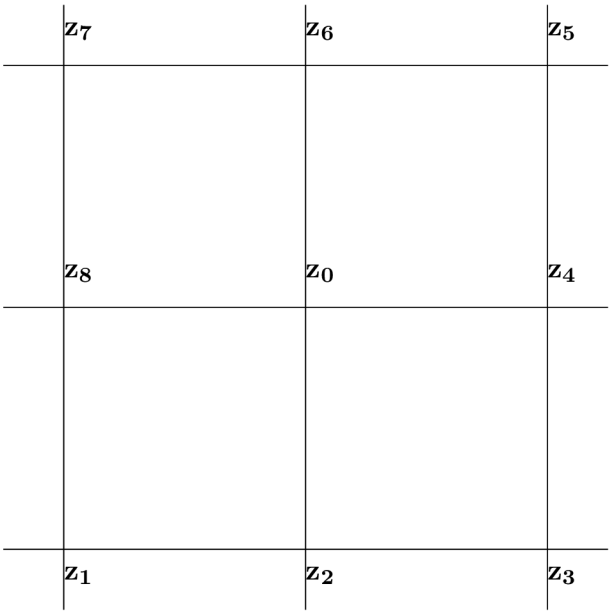
$$z_j = z_i + (h_x z_i^x + h_y z_i^y) + \left(\frac{h_x^2}{2!}z_i^{xx} + 2\frac{h_x h_y}{2!}z_i^{xy} + \frac{h_y^2}{2!}z_i^{yy}\right) + \dots \tag{5.52}$$

Přičemž je důležité si uvědomit, že krok h se změnil na vektor (h_x, h_y) a námi používaná posloupnost y_i, y_{i+1}, atd. přestává fungovat kvůli více roměrům

- z_i – je funkční hodnota v bodě $[x_i, y_i]$
- z_j – je výsledná hodnota v bodě $[x_j, y_j]$
- $h_x = x_j - x_i$, $h_y = y_j - y_i$
- $z_i^x, z_i^y, \dots$ jsou zkrácené zápisy parciálních derivací funkce v bodě $[x_i, y_i]$

Použití Taylorovy řady funkce více proměnných je však komplikovanější než Taylorovy řady funkce jedné proměnné. Problém spočívá v počtu použitých bodů. Zatímco v řadě jedné proměnné si můžeme říct kolik vrcholů použijeme, v Taylorově řadě funkce dvou proměnných to neplatí. Zde potřebujeme $2, 5, 9, \ldots$ bodů, protože vždy musíme použít celé členy a počet neznámých (parciálních derivací) narůstá kombinatoricky.

Pokusme se odvodit diferenční vzorce pro funkci dvou proměnných na mřížce zobrazené na obrázku 5.4.



Obrázek 5.4: Mřížka pro odvození diferenčních vzorců Taylorova rozvoje dvou proměnných

Odvodíme diferenční vzorce pro druhou derivaci podle x i y, tedy využijeme první tři členy rozvoje a budeme potřebovat celkem 6 bodů. Jak vidíme na obrázku, máme k dispozici 9 bodů, musíme proto z nich vybrat 5, přičemž náš výchozí bod bude bod z_0. I tak můžeme vybrat 56 různých kombinací, přičemž když 4 body budou $2, 4, 6, 8$, tak bez ohledu na to který zvolíme jako patý bude výsledkem pro vzorec druhých derivací vždy známá tříbodová aproximace.

V tomto případě byla řešena soustava 5 rovnic o 5 neznámých, přičemž vždy byly použity tyto čtyři rovnice

$$z_8 = z_0 - h_x\, z_0^x + \frac{1}{2}\, {h_x}^2 z_0^{xx} \tag{5.53}$$

$$z_6 = z_0 + h_y\, z_0^y + \frac{1}{2}\, {h_y}^2 z_0^{yy} \tag{5.54}$$

$$z_2 = z_0 - h_y\, z_0^y + \frac{1}{2}\, {h_y}^2 z_0^{yy} \tag{5.55}$$

$$z_4 = z_0 + h_x\, z_0^x + \frac{1}{2}\, {h_x}^2 z_0^{xx} \tag{5.56}$$

a jako pátá rovnice byla vybrána jedna z těchto rovnic

$$z_1 = z_0 - h_x\, z_0^x - h_y\, z_0^y + \frac{1}{2}\, {h_x}^2 z_0^{xx} + h_x\, h_y\, z_0^{xy} + \frac{1}{2}\, {h_y}^2 z_0^{yy} \tag{5.57}$$

$$z_3 = z_0 + h_x\, z_0^x - h_y\, z_0^y + \frac{1}{2}\, {h_x}^2 z_0^{xx} - h_x\, h_y\, z_0^{xy} + \frac{1}{2}\, {h_y}^2 z_0^{yy} \tag{5.58}$$

$$z_5 = z_0 + h_x\, z_0^x + h_y\, z_0^y + \frac{1}{2}\, {h_x}^2 z_0^{xx} + h_x\, h_y\, z_0^{xy} + \frac{1}{2}\, {h_y}^2 z_0^{yy} \tag{5.59}$$

$$z_7 = z_0 - h_x\, z_0^x + h_y\, z_0^y + \frac{1}{2}\, {h_x}^2 z_0^{xx} - h_x\, h_y\, z_0^{xy} + \frac{1}{2}\, {h_y}^2 z_0^{yy} \tag{5.60}$$

Výsledkem byly stejné diferenční vzorce pro z_0^x, z_0^y, z_0^{xx} a z_0^{yy} ve tvaru

$$z_0^x = \frac{z_4 - z_8}{2h_x} \tag{5.61}$$

$$z_0^y = \frac{z_2 - z_6}{2h_y} \tag{5.62}$$

$$z_0^{xx} = \frac{z_4 - 2z_0 + z_8}{h_x^2} \tag{5.63}$$

$$z_0^{yy} = \frac{z2 - 2z_0 + z_6}{h_y^2} \tag{5.64}$$

Rozdíl nastal až pro vzorec z_0^{xy}, který vyšel v následujících formách

$$z_0^{xy} = \frac{z_4 + z_2 - z_3 - z_0}{h_x h_y} \tag{5.65}$$

$$z_0^{xy} = \frac{z_1 - z_8 - z_2 + z_0}{h_x h_y} \tag{5.66}$$

$$z_0^{xy} = \frac{z_5 + z_0 - z_4 - z_6}{h_x h_y} \tag{5.67}$$

$$z_0^{xy} = \frac{z_7 + z_0 - z_8 - z_6}{h_x h_y} \tag{5.68}$$

Co je například možné Taylorovou řadou funkce více proměnných získat jsou diferenční vzorce pro následující schéma 5.5.

V tomto případě je opět několik možností výpočtu diferenčních vzorců. V tomto případě se jedná o body $z_0 \dots z_5$. Výsledné diferenční vzorce jsou v následujícím tvaru.

$$z_0^x = \frac{z_2 - z_5 + z_4 - z_1}{4h_x} \tag{5.69}$$

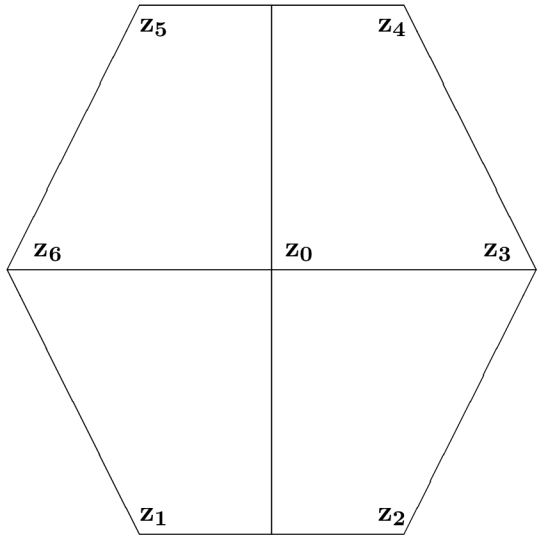
$$z_0^y = \frac{z_4 - z_1 - z_2 + z_5}{4h_y} \tag{5.70}$$

$$z_0^{xx} = \frac{2z_0 - z_2 + 2z_3 + z_5 - z_4 + z_1}{4h_x^2} \tag{5.71}$$

$$z_0^{xy} = \frac{z_1 + z_4 - z_2 - z_5}{4h_x h_y} \tag{5.72}$$

$$z_0^{yy} = \frac{z_5 - 6z_0 - 2z_3 + 3z_4 + 3z_2 + z_1}{4h_y^2} \tag{5.73}$$

Informace o Taylorově rozvoji a diferenčních vzorcích je možné najít v literatuře v [24], [5], [7], [21], [17], [15] a [20].



Obrázek 5.5: Složitější mřížka pro odvození diferečních vzorců Taylorova rozvoje dvou proměnných

5.4 Použití metody konečných diferencí

Metodu konečných diferencí i metodu přímek budeme ilustrovat několika příklady.

5.4.1 Příklad 1

Zde na příkladu ukážeme, jak vyřešit jednoduchou rovnici s pomocí metody konečných diferencí.

Řešme Laplaceovu rovnici $\nabla^2 T = 0$ na čtvercové oblasti $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. Jako okrajové podmínky zvolíme

$$T(x, 0) = 0 \tag{5.74}$$
$$T(0, y) = 0 \tag{5.75}$$
$$T(1, y) = 0 \tag{5.76}$$
$$T(x, 1) = \sin \pi x \tag{5.77}$$

Prvním krokem bude zvolení mřížky. Zvolme jednoduchou mřížku 5×5. Potom s pomocí okrajových podmínek můžeme už dopředu říct, že

$$T_{i,0} = 0 \tag{5.78}$$
$$T_{0,j} = 0 \tag{5.79}$$
$$T_{5,j} = 0 \tag{5.80}$$
$$T_{i,5} = \sin \frac{i\pi}{4}, \qquad i, j = 0 \ldots 5 \tag{5.81}$$

Nyní už se budeme zabývat vnitřními body. Zvolíme si asi nejjednodušší diferenční vzorec, který nahradí derivaci takto

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x} \cong \frac{T(x+\Delta x)-T(x)}{\Delta x} \tag{5.82}$$

Vidíme však, že Laplaceova rovnice obsahuje druhou derivaci. S tím si lehce poradíme a vypočítáme druhou derivaci s pomocí dvou prvních derivací (Využíváme toho, že derivace funkce je opět nějaká funkce). Tento vztah se také nazývá *tříbodová aproximace.*

$$\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} \cong \frac{\frac{T(x+\Delta x)-T(x)}{\Delta x} - \frac{T(x)-T(x-\Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{T(x+\Delta x)-2T(x)+T(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} \tag{5.83}$$

Laplaceova rovnice je ve tvaru $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$. Víme, že máme pravidelnou mřížku 5×5, tedy odtud odvodíme $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{4}$. Ve výsledku použijeme tyto diferenční vzorce

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} \cong \frac{T(x+\frac{1}{4},y)-2T(x,y)+T(x-\frac{1}{4},y)}{\frac{1}{4}} \tag{5.84}$$

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} \cong \frac{T(x,y+\frac{1}{4})-2T(x,y)+T(x,y-\frac{1}{4})}{\frac{1}{4}} \tag{5.85}$$

Vidíme, že ve vztahu se vyskytují funkční hodnoty z okolí, které v podstatě představují sousední uzlové body. Odvodíme tvar výsledných rovnic

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = 0 \tag{5.86}$$

$$\frac{T(x+\Delta x,y)-2T(x,y)+T(x-\Delta x,y)}{(\Delta x)^2} + \frac{T(x,y+\Delta y)-2T(x,y)+T(x,y-\Delta y)}{(\Delta y)^2} = 0 \tag{5.87}$$

Nyní můžeme nahradit hodnoty funkce T hodnotou v uzlovém bodě. Dále položíme $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{4} = h$.

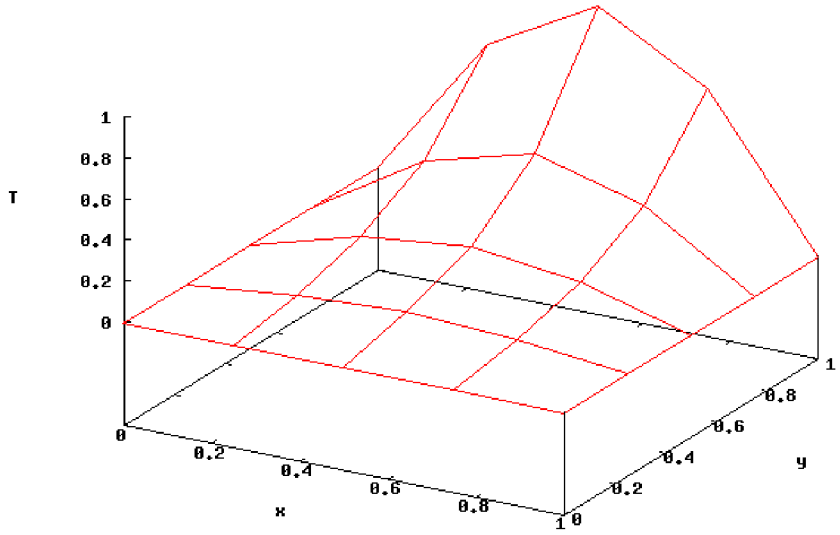
$$\frac{T_{i+1,j}-2T_{i,j}+T_{i-1,j}}{h^2} + \frac{T_{i,j+1}-2T_{i,j}+T_{i,j-1}}{h^2} = 0 \tag{5.88}$$

Všimněme si, že nula na pravé straně umožní další zjednodušení a můžeme z rovnice vyloučit h^2. Výsledný tvar je

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} = 4T_{i,j},\ i,j \in \{1,2,3\} \tag{5.89}$$

Řešení dané soustavy můžeme získat např. pomocí programu Maple, Matlab apod. Výsledek zobrazíme na tři platné číslice. Zde je matice výsledných čísel.

$$\begin{pmatrix} T_{1,5} & T_{2,5} & T_{3,5} & T_{4,5} & T_{5,5} \\ T_{1,4} & T_{2,4} & T_{3,4} & T_{4,4} & T_{5,4} \\ T_{1,3} & T_{2,3} & T_{3,3} & T_{4,3} & T_{5,3} \\ T_{1,2} & T_{2,2} & T_{3,2} & T_{4,2} & T_{5,2} \\ T_{1,1} & T_{2,1} & T_{3,1} & T_{4,1} & T_{5,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.707 & 1 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0.332 & 0.469 & 0.332 & 0 \\ 0 & 0.151 & 0.213 & 0.151 & 0 \\ 0 & 0.0584 & 0.0825 & 0.0584 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.90}$$



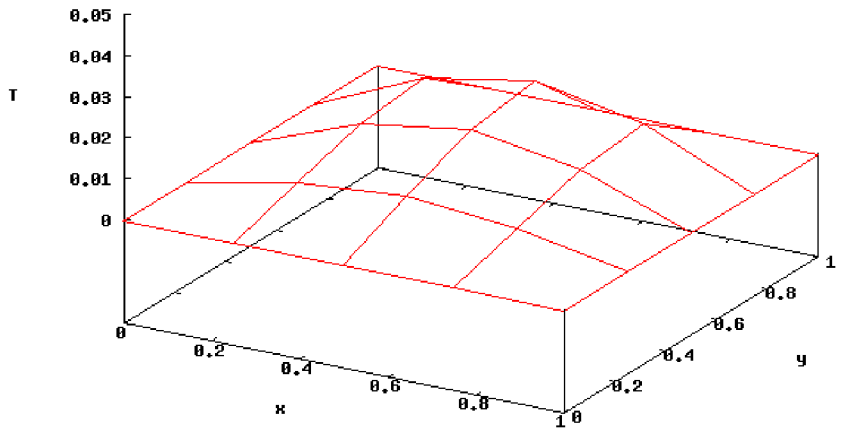
Obrázek 5.6: Řešení zadané okrajové úlohy na mřížce 5×5.

Na obrázku 5.6 můžeme vidět jak vypadá výsledné řešení v grafické podobě. Vidíme, že řešení je dosti „hrubé“. Abychom získlali hladší řešení, museli bychom zvolit jemnější mřížku.

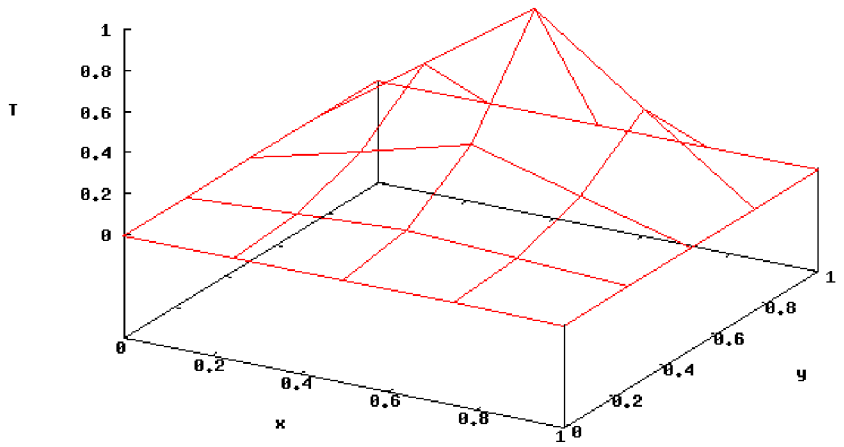
Na dalším grafu 5.7 můžeme vidět absolutní chybu řešení. Výhoda této rovnice je, že můžeme spočítat analytické řešení ve tvaru $T(x, y) = \frac{1}{\sinh \pi} \sin \pi x \sinh \pi y$. Vidíme, že chyba je v řádu 10^{-2}. Chyba řešení je v tomto případě hlavně ovlivněna přesností diferenčních výrazů, protože soustava algebraických rovnic je vyřešena analyticky.

Na posledním obrázku 5.8 je zobrazena relativní chyba řešení. Vidíme, že chyba je v rámci jednoho procenta.

Všimněme si, že grafy obsahují „bublinu“ uprostřed. Ta je způsobena tím, že známe přesné řešení na okrajích (okrajové podmínky) a chyba řešení se šíří směrem doprostřed. Chyba řešení v tomto případě závisí hlavně na použitém diferenčním vzorci.



Obrázek 5.7: Absolutní chyba řešení zadané okrajové úlohy na mřížce 5×5.



Obrázek 5.8: Relativní chyba řešení zadané okrajové úlohy na mřížce 5×5.

5.4.2 Metoda přímek – příklad

Zkusíme touto metodou vyřešit časově závislou úlohu. Mějme jednoduchou hyperbolickou parciální diferenciální rovnici popisující vlnění. Víme, že ve vlnění se vyskytuje časová proměnná. Pro jednoduchost uvažujme jednorozměrnou strunu kterou popíšeme rovnicí

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} \tag{5.91}$$

V této metodě jde o to nahradit derivace podle proměnné x a ponechat pouze derivaci podle času. Výsledkem bude soustava obyčejných diferenciálních rovnic, které lze vyřešit.

Stanovme pro jednoduchost délku struny 1. Ve výsledku budeme řešit rovnici na oblasti

$$\langle 0,1\rangle \times \langle 0,\infty) \tag{5.92}$$

Budeme uvažovat o okrajových podmínkách. Budeme držet strunu na obou koncích, tedy

$$T(0,t) = 0 \ \wedge \ t \in \langle 0,\infty) \tag{5.93}$$

$$T(1,t) = 0 \tag{5.94}$$

Abychom dále byli schopni rovnici vyřešit, potřebujeme počáteční podmínku pro čas $t = 0$. Zvolme následující počáteční podmínky

$$T(x,0) = \sin \pi x \tag{5.95}$$

$$\frac{\partial T(x,0)}{\partial t} = \pi \sin \pi x \tag{5.96}$$

Nyní nastává fáze, kdy je nutné nahradit derivaci podle x konečnou diferencí. Pro jednoduchost zvolíme mřížku pěti uzlových bodů. Nahradíme derivaci podle x a ponecháme jen derivaci podle času. Použijeme vzorec z předchozího příkladu $\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}-2T_i+Ti-1}{h^2}$. Můžeme z původní rovnice odvodit tvar diferenciálních rovnic.

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} \tag{5.97}$$

$$\frac{1}{h^2}\left(T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}\right) = \frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2} \tag{5.98}$$

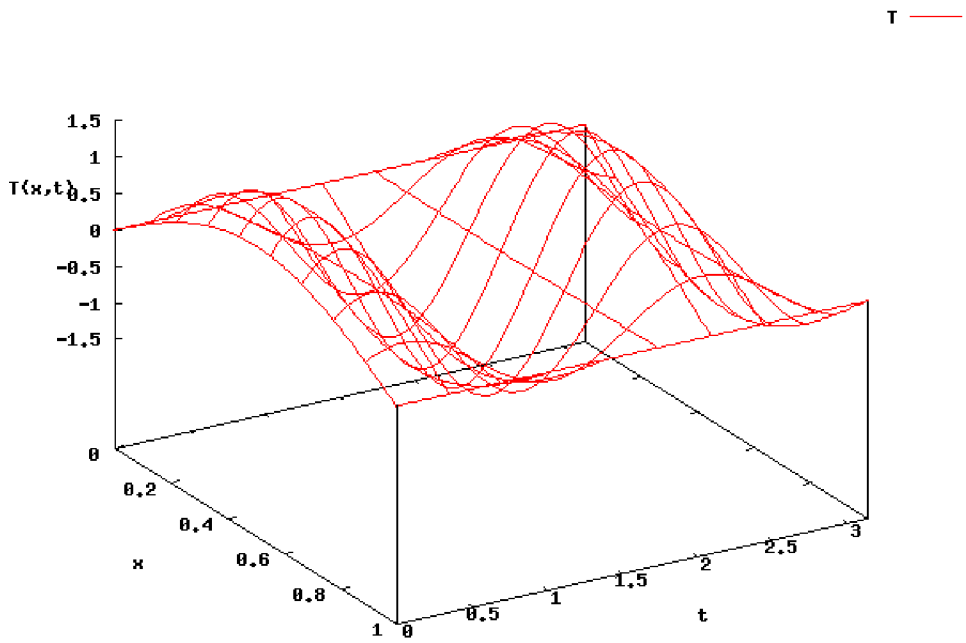
Výsledkem těchto úprav je soustava 3 diferenciálních rovnic

$$T_2'' = \frac{1}{h^2}\left(T_3 - 2T_2\right) \ \wedge \ T_2(0) = \sin \pi/4, \ T_2'(0) = \pi \sin \pi/4 \tag{5.99}$$

$$T_3'' = \frac{1}{h^2}\left(T_4 - 2T_3 + T_2\right) \ \wedge \ T_3(0) = \sin \pi/2, \ T_3'(0) = \pi \sin \pi/2 \tag{5.100}$$

$$T_4'' = \frac{1}{h^2}\left(T3 - 2T_4\right) \ \wedge \ T_3(0) = \sin 3\pi/4, \ T_4'(0) = \pi \sin 3\pi/4 \tag{5.101}$$

Metodou separace proměnných můžeme odvodit analytické řešení této rovnice, které je $T(x,t) = \sin \pi x \left(\cos \pi t + \sin \pi t\right)$. Řešení je možné vidět na následujícím grafu 5.9.



Obrázek 5.9: Řešení vlnové rovnice

5.5 Odporové sítě

Ve světě analogových počítačů se také řešily parciální diferenciální rovnice. Narozdíl od číslicových počítačů, je potřeba nahradit rovnici nějakým elektrickým obvodem, na kterém změříme např. elektrické napětí, které odpovídá hodnotě neznámé funkce v daném bodě.

5.5.1 Laplaceova rovnice

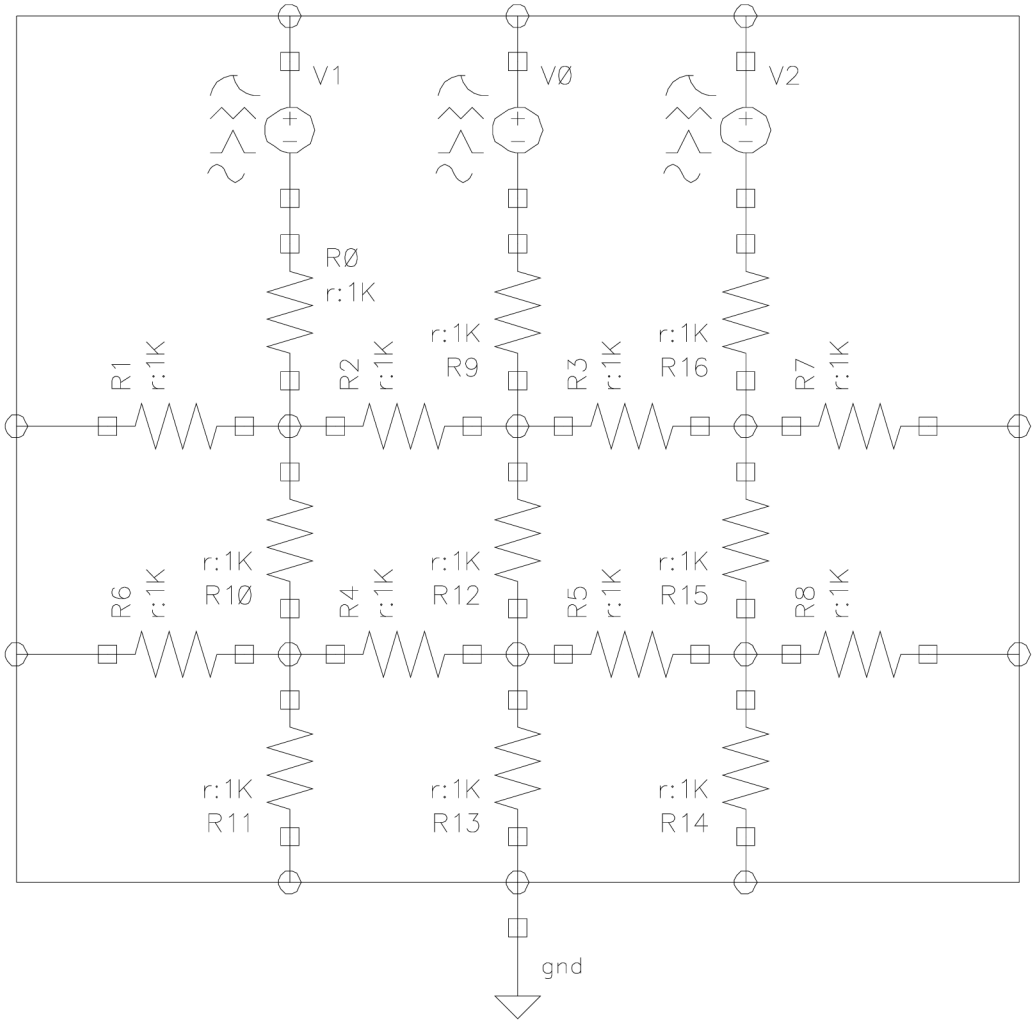
Pokud budeme uvažovat Laplaceovu rovnici, tak modelem v analogovém počítači bude odporová síť, na kterou připojíme stejnosměrné napětí, které musí reflektovat okrajové podmínky. V každém uzlu odporové sítě můžeme změřit napětí odpovídající řešení Laplaceovy rovnice. Schéma můžeme vidět na následujícím obrázku 5.10.

5.5.2 Rovnice vedení tepla

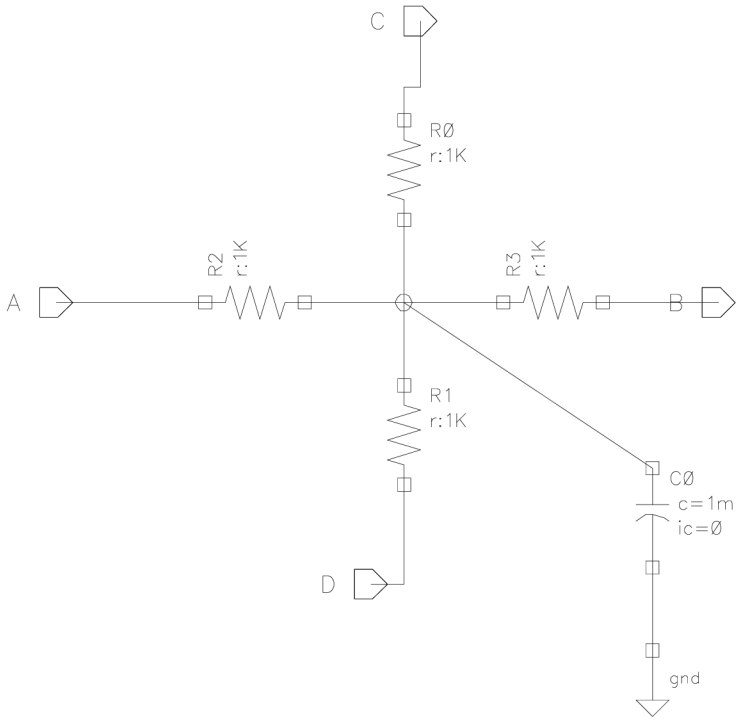
V případě rovnice vedení tepla opět použijeme odporovou síť podobnou pro řešení Laplaceovy rovnice, s tím, že nám v každém uzlu přibydou kondenzátory, které jsou jednou nožičkou uzemněny.

Schéma pro každý uzlový bod vypadá následujícím způsobem 5.11.

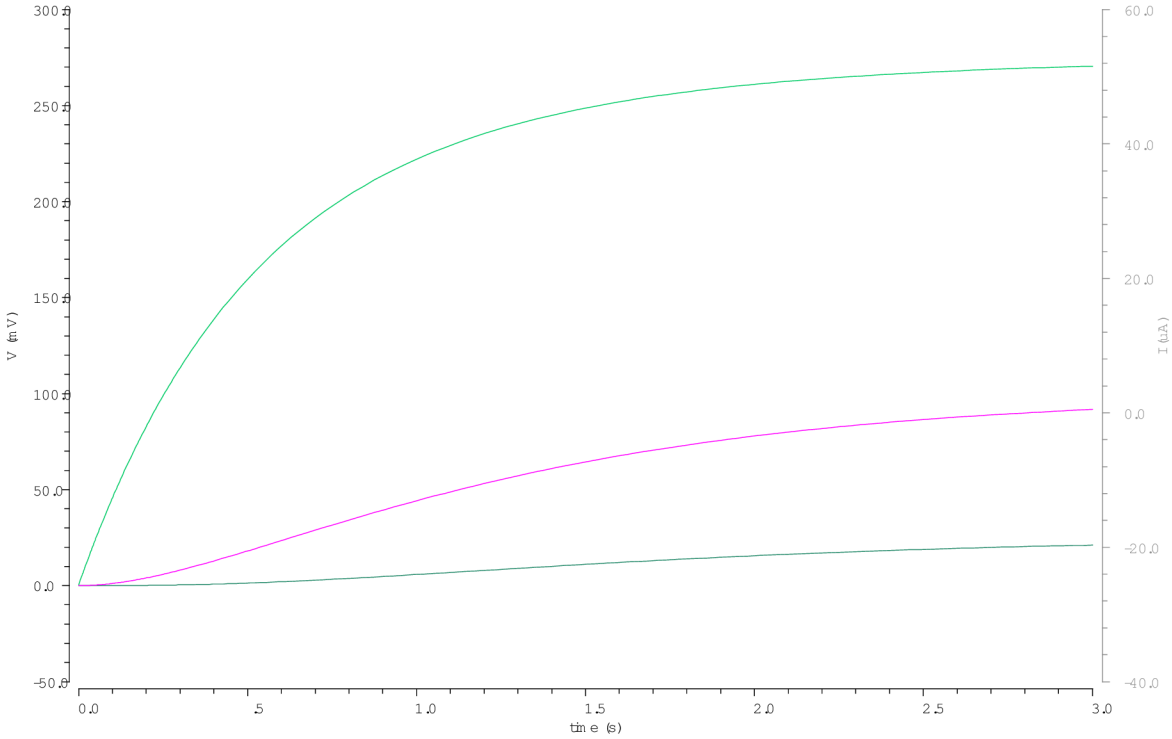
Řešení této okrajové úlohy bylo získáno pomocí simulatoru Cadence Spectre, který patří k nejpoužívanějším v technické praxi. Výsledky simulace jsou na obrázku 5.12.



Obrázek 5.10: Model pro řešení Laplaceovy rovnice pomocí odporové sítě



Obrázek 5.11: Model pro řešení rovnice vedení tepla pomocí odporové sítě



Obrázek 5.12: Řešení rovnice vedení tepla ve vybraných uzlech

5.6 Varianty metody konečných diferencí

Postupným objevováním a prozkoumáváním metody konečných diferencí se našly dvě varianty této metody. Těmito dvěma základními variantami jsou

- *implicitní*
- *explicitní*

Implicitní metoda provede náhradu derivací konečnými diferencemi a řeší výslednou soustavu. Explicitní metoda pracuje podobně. Rozdíl je, že se jedná o iterativní metodu. Čili je zde zadán rekurentní předpis pro každý uzlový bod. Mějme uzlový bod T^n v iteraci n. Potom máme zadán předpis

$$T^{n+1} = \psi(T^n) \ \wedge \ n > 1 \tag{5.102}$$

$$T^n = \phi \ \wedge \ n = 1 \tag{5.103}$$

Kde ϕ je nějaká počáteční hodnota, a funkce ψ je funkce, kterou odvodíme s pomocí diferenčních vzorců. Celkově tento předpis značí, že implicitní metoda začíná na nějaké počáteční hodnotě a postupně iteruje k řešení.

Zkusme ukázat základní explicitní metodu konečných diferencí na Laplaceově rovnici $\nabla^2 T = 0$. V předchozím příkladě jsme ukázali tříbodovou aproximaci druhé derivace. Dále předpokládejme pravidelnou mřížku. Odvodíme tento vzorec

$$T_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4}\left(T_{i-1,j}^{k} + T_{i+1,j}^{k} + T_{i,j-1}^{k} + T_{i,j+1}^{k}\right) \tag{5.104}$$

Iterativní proces ukončíme při dosažení přesnosti ϵ. Přesnost definujeme přes všechny uzlové body jako

$$\max_{i,j}\left|T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^{k}\right| \leq \epsilon \tag{5.105}$$

Vylepšováním implicitní metody byly vymyšleny různé způsoby pro zrychlení konvergence. Tím se snižuje počet iterací nutných k dosažení zadané přesnosti.

Mezi hlavní varianty patří

- *SOR - Successive Over-Relaxation*
- *ADSOR - Alternative Direction Successive Over-Relaxation*

Variant *SOR* se snaží zrychlit konvergenci použitím hodnot aktuální iterace. Mějme zadání Laplaceovy rovnice (3.74), potom tuto metodu vyjádříme následující vzorec

$$T_{i,j}^{k+1} = (1-\omega)\,T_{i,j}^{k} + \omega\frac{1}{4}\left(T_{i-1,j}^{k+1} + T_{i+1,j}^{k} + T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^{k}\right) \tag{5.106}$$

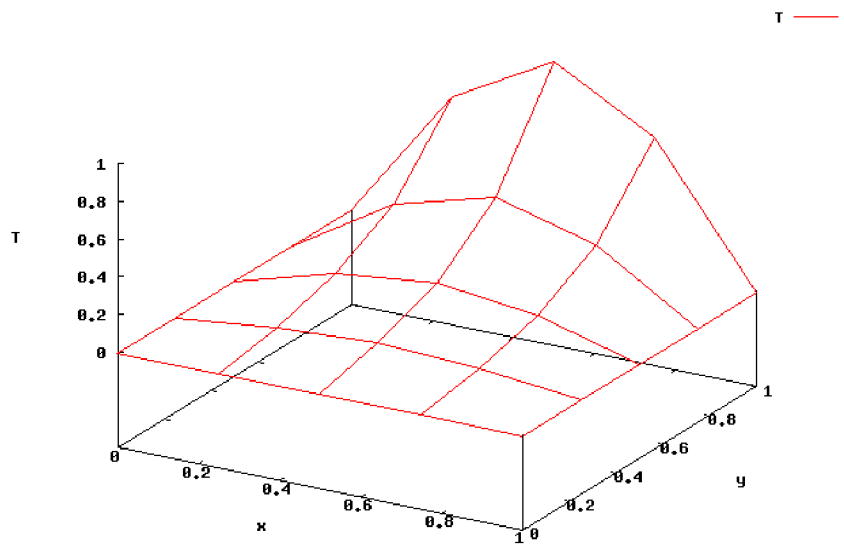
Všimněme si, že se v rovnici objevil parametr ω, který může ovlivnit konvergenci metody. Druhá varianta je metoda *ADSOR*. Podobná metodám Runge-Kutta používající hodnotu funkce v mezikroku. V tomto případě je nutné uvést vzorec i pro výpočet hodnoty v mezikroku.

$$T_{i,j}^{k+1/2} = (1-\omega_1)\, T_{i,j}^{k} + \omega_1 \frac{1}{4}\left(T_{i-1,j}^{k+1/2} + T_{i+1,j}^{k} + T_{i,j-1}^{k+1/2} + T_{i,j+1}^{k}\right) \tag{5.107}$$

$$T_{i,j}^{k+1} = (1-\omega_2)\, T_{i,j}^{k+1/2} + \omega_2 \frac{1}{4}\left(T_{i-1,j}^{k+1} + T_{i+1,j}^{k+1/2} + T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^{k+1/2}\right) \tag{5.108}$$

S pomocí těchto variant jsem vyřešil Laplaceovu rovnici $\nabla^2 T = 0$ s výše uvedenými okrajovými podmínkami.

Při použití základní varianty, přesnosti $\epsilon = 1.0e-15$ jsem získal následují řešení. Celkem proběhlo 95 iteračních cyklů. Výsledná funkce T je na následujícím obrázku 5.13.

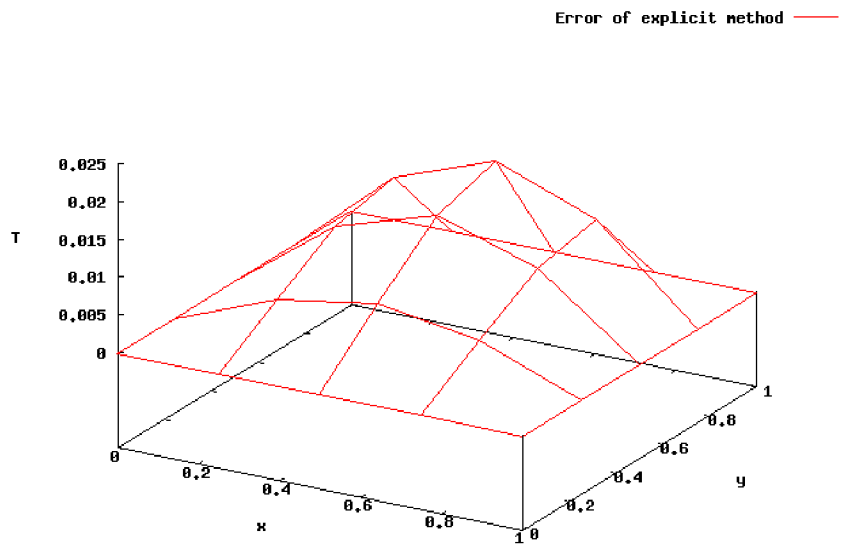


Obrázek 5.13: Řešení Laplaceovy rovnice

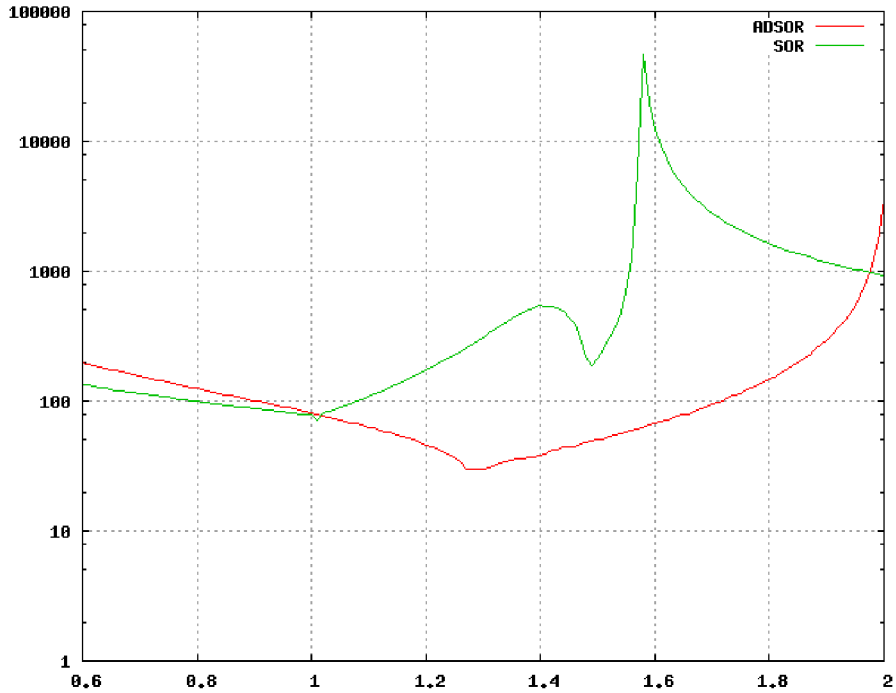
Absolutní chyba řešení je zobrazena na následujícím obrázku 5.14

U variant metody je výsledné řešení velmi podobné. Co je však zajímavější je závislost počtu iterací na parametru ω. Následující grafy 5.15 zobrazují počet iterací závisejících na ω. Vidíme, že metoda *ADSOR* má pro $\omega = 1.28$ minimum a to je celkem 42 iterací. Na druhé straně metoda *SOR* má minimum okolo $\omega = 1.01$, kde vyřešení rovnice potřebovalo 71 iterací.

Informace zmíněné v této kapitole jsem čerpal z [28], [19].



Obrázek 5.14: Absolutní chyba řešení Laplaceovy rovnice explicitní metodou



Obrázek 5.15: Graf závislosti počtu iterací na parametru ω. Zelený zobrazuje metodu SOR, červený medotu ADSOR

Kapitola 6

Metoda váhování

Jádrem této práce je aproximace derivace získaná metodou váženého průměru. V této kapitole se zaměříme právě na tuto metodu na triangulaci obsahující buď trojúhelníky, anebo rovnoběžníky.

Představíme zde 2 metody. První metoda bude zaměřena na triangulaci obsahující trojúhelníkové a druhou metodu obsahující rovnoběžníkové elementy. Rozdíl v těchto dvou metodách je především ten, že pro výpočet gradientu (derivaci podle x i y) na trojúhelníkových sítích jsou potřeba 2 váhove vektory a na rovnoběžníkových sítích je potřeba pouze 1 váhový vektor pro obě složky gradientu.

Metoda váhování funguje pouze pro netupoúhlé triangulace. Budeme předpokládat že všechny úhly ve všech trojúhelnících v triangulaci musí být v rozmezí $0 \ldots \frac{\pi}{2}$. Budeme předpokládat že každý vrchol je obsažen alespoň 4 trojúhelníky. V případě 4 trojúhelníků se jedná o 4 pravé úhly.

Informace pro tuto kapitolu byly převzaty z [12], [13]

6.1 Příprava triangulace

Metoda je založena na okruzích obklopujících elementů. Pod pojmem okruh okolo vrcholu $\mathbf{a}$ budeme rozumět uspořádanou n-tici $r_{\mathbf{a}} = (\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_n})$.

Uzly $\mathbf{b_i}$ jsou seřazeny proti směru hodinových ručiček. Pro seřazení uzlů triangulace jsme použili úhel α mezi vektory $\mathbf{ab}$ a $(0, 1)$ pomocí vzorce

$$\lambda = \sqrt{(\mathbf{b_x} - \mathbf{a_x})^2 + (\mathbf{b_y} - \mathbf{a_y})^2} \tag{6.1}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\mathbf{b_y} - \mathbf{a_y}}{\lambda}\right) \wedge \mathbf{b_x} < \mathbf{a_x} \tag{6.2}$$

$$\alpha = 2\pi - \arccos\left(\frac{\mathbf{b_y} - \mathbf{a_y}}{\lambda}\right) \wedge \mathbf{b_x} >= \mathbf{a_x} \tag{6.3}$$

Tento vzorec zaručí rozsah úhlu v rozsahu $0 \ldots 2\pi$.

6.2 Podmínka konzistence

Základem celé metody váhování je podmínka konzistence, která se dá slovně popsat jako

Vážený průměr parciálních derivací interpolantů funkce p v bodě $\mathbf{a}$ musí být roven parciální derivaci funce p v bodě $\mathbf{a}$ pro všechny obklopující elementy T_i a všechny kvadratické polynomy p dvou proměnných.

anebo matematicky zapsat takto

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\Pi[p]_{T_i}}{\partial z}(\mathbf{a}) = \frac{\partial p}{\partial z}(\mathbf{a}), \forall p \in \mathcal{P}^2 \tag{6.4}$$

přičemž

- $\mathbf{a}$ je střed okruhu $\mathbf{r_a}$
- $(w_1 \dots w_n) = \mathbf{w}$ je váhový vektor
- $(T_1 \dots T_n) = \mathbf{r_a}$ je okruh elementů okolo $\mathbf{a}$
- $p(x, y)$ je libovolný polynom dvou proměnných, druhého stupně ve tvaru $p(x, y) = a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2$
- $\Pi[p]_{T_i}$ je interpolant funkce p na elementu T_i
- z je směr výpočtu parciální derivace, jedná se pouze o možnost x a y, vektory $(1, 0)$, $(0, 1)$
- $\mathcal{P}^2$ je prostor všech polynomů dvou proměnných druhého stupně

Dokázat tuto podmínku pro všechny polynomy dvou proměnných druhého stupně je problematické. Jelikož obě strany podmínky jsou lineárně závislé na funkci p, stačí odvodit rovnice pro libovolnou sadu bazických funkcí druhého stupně, např. $(1, x, y, xy, x^2, y^2)$.

6.3 Trojúhelníkové sítě

Celá tato práce vychází právě z metody váhování na trojúhelníkové síti, kterou odvodil doc. Dalík. V této kapitole bude popsána metoda ze které vychází odvození pro rovnoběžníkové sítě.

Víme, že trojúhelník je jednoznačně určen třemi vrcholy a tyto tři vrcholy jednoznačně určí lineární funkci dvou proměnných ve tvaru

$$f(x, y) = a + bx + cy \tag{6.5}$$

Pokud uvážíme triangulaci $\mathcal{T}$ obsahující pouze trojúhelníkové elementy, můžeme pro každý vrchol $\mathbf{a}$ vytvořit okruh trojúhelníků $r_\mathbf{a} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ obklopující vrchol $\mathbf{a}$, přičemž $T_1 = (\mathbf{a}, \mathbf{b^n}, \mathbf{b^1}), \dots, T_n = (\mathbf{a}, \mathbf{b^{n-1}}, \mathbf{b^n})$ jsou navzájem různé trojúhelníky v triangulaci $\mathcal{T}$, které neobsahují tupé úhly. V obecném případě budeme předpokládat, že počet trojúhelníků (velikost) v okruhu $r_\mathbf{a}$ je vždy větší nebo roven čtyřem.

Cílem bude spočítat dva váhové vektory $\mathbf{w_x}$ a $\mathbf{w_y}$ na okruhu $r_\mathbf{a}$, které budou sloužit pro výpočet parciální derivace podle x a podle y, přičemž použijeme podmínku konzistence.

V odvození výpočtu budeme používat směrový vektor $\mathbf{z}$ který bude určovat směr ve kterém derivaci budeme počítat. Pro derivaci podle x bude vektor $\mathbf{z} = (1, 0)$ a pro derivaci podle y bude vektor $\mathbf{z} = (0, 1)$.

celý výpočet váhových vektorů provedeme v lokálních souřadnicích (ϕ, ζ), které mají počátek v bodě $\mathbf{a}$. Víme, že transformace z globálních souřadnic (x, y) do lokálních (ϕ, ζ) je lineární ve tvaru

$$\phi = \mathbf{z}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \tag{6.6}$$
$$\zeta = \mathbf{z}^{\perp}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \tag{6.7}$$

kde

- ϕ, ζ jsou lokální souřadnice
- $\mathbf{z}$ je směrový vektor, ve kterém počítáme parciální derivace
- $\mathbf{a}$ je střed okruhu
- $\mathbf{x} = [x, y]$ je libovolný bod v globálních souřadinicích

Tento nový lokální souřadný systém nám definuje novou sadu bazických funkcí $(1, \phi, \zeta, \phi\zeta, \phi^2, \zeta^2)$.

Nyní v lokálních souřadnicích a pro všechny trojúhelníky $T_i \in r_{\mathbf{a}}$, $i = 1 \dots n$ a funkci u můžeme zapsat

$$\frac{\partial \Pi_{T_i}[u]}{\partial \mathbf{z}} = \frac{u(\mathbf{b^{i-1}})\zeta_i - u(\mathbf{b^i})\zeta_{i-1}}{\phi_{i-1}\zeta_i - \phi_i\zeta_{i-1}} \tag{6.8}$$

Odtud odvodíme soustavu čtyř lineárních algebraických rovnic o n neznámých ve tvaru $\mathbf{M}(r)\mathbf{w} = \mathbf{d}$, kde

- $\mathbf{M}(r)$ je matice koeficientů spočítaných z geometrie mřížky

$$\mathbf{M}(r) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \frac{\phi_n^2\zeta_1 - \phi_1^2\zeta_n}{\phi_n\zeta_1 - \phi_1\zeta_n} & \dots & \frac{\phi_{n-1}^2\zeta_n - \phi_n^2\zeta_{n-1}}{\phi_{n-1}\zeta_n - \phi_n\zeta_{n-1}} \\ \frac{\zeta_n\zeta_1(\phi_n - \phi_1)}{\phi_n\zeta_1 - \phi_1\zeta_n} & \dots & \frac{\zeta_{n-1}\zeta_n(\phi_{n-1} - \phi_n)}{\phi_{n-1}\zeta_n - \phi_n\zeta_{n-1}} \\ \frac{\zeta_n\zeta_1(\zeta_n - \zeta_1)}{\phi_n\zeta_1 - \phi_1\zeta_n} & \dots & \frac{\zeta_{n-1}\zeta_n(\zeta n - 1 - \zeta_n)}{\phi_{n-1}\zeta_n - \phi_n\zeta_{n-1}} \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

- d vektor pravých stran, který je vždy konstantní

$$d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

- $\mathbf{w}$ váhový vektor

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

6.3.1 Okrajové vrcholy

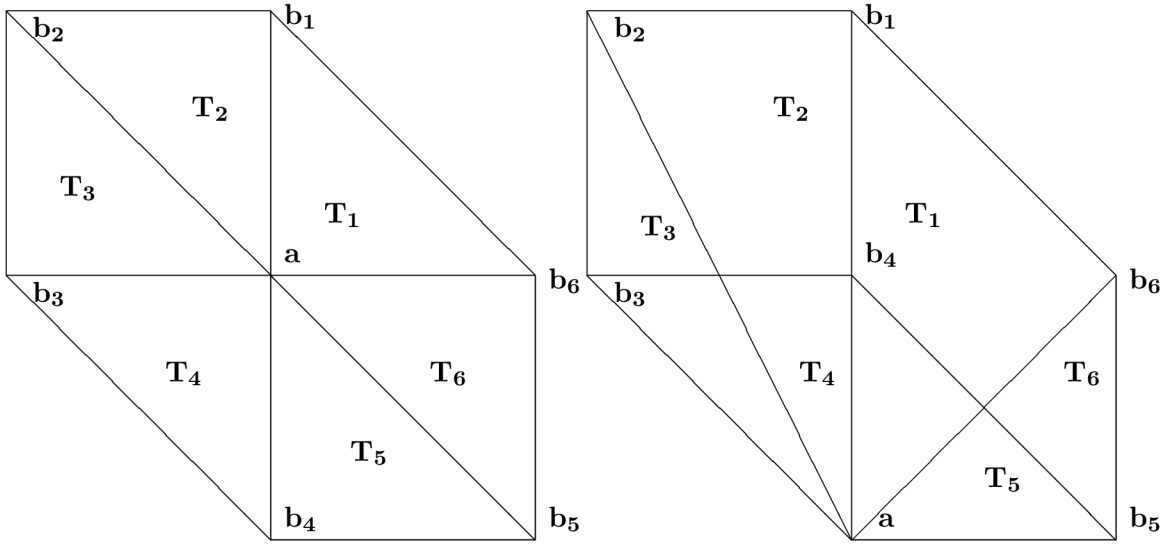
Pro výpočet váhových vektorů používáme okruh vrcholu. Pokud se jedná o vnitřní vrcholy, je celý okruh triviální, problém nastane pokud začneme uvažovat i vrcholy na hranici oblasti Ω. Pro tyto vrcholy není možné jednoduše sestavit okruh r.

Naše řešení spočívá v jednoduché myšlence překlopení prostoru. Představme si, že naší triangulaci nakreslíme na list papíru a ten přehneme podle hran trojúhelníků, přičemž náš vrchol $\mathbf{a}$ bude ve středu přehnutí.

Vlastní algoritmus je velice jednoduchý z hlediska implementace. Pro hraniční vrchol $\mathbf{a}$ najdeme v jeho okolí vnitřní vrchol $\mathbf{c}$, u kterého známe okruh $r_{\mathbf{c}}$. Okruh $r_{\mathbf{a}}$ bude potom kopie okruhu $r_{\mathbf{c}}$, ale prohodíme v okruhu vrchol $\mathbf{a}$ a $\mathbf{c}$. Pokud žádný vnitřní vrchol není dostupný, potom není možné tuto metodu váhování použít.

Známe okruh $r_{\mathbf{c}} = (\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{a}, \ldots, \mathbf{b_n})$, přičemž $\mathbf{c}$ je vnitřní vrchol a okruh pro hraniční vrchol $\mathbf{a}$ bude potom $r_{\mathbf{a}} = (\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{c}, \ldots, \mathbf{b_n})$.

Je důležité si uvědomit, že v okruhu $r_{\mathbf{a}}$ budou vytvořeny a použity nové trojúhelníky, které se v původní triangulaci nevyskytují. Nový okruh znázorňují následující obrázky 6.1. Obrázek vlevo zobrazuje okruh $r_{\mathbf{a}}$ vnitřního vrcholu $\mathbf{a}$ a obrázek vpravo zobrazuje okruh okrajového vrcholu $\mathbf{a}$.



Obrázek 6.1: Schéma okruhu okolo vrcholu. Vlevo je okruh vnitřního vrcholu $\mathbf{a}$, vpravo je okruh okrajového vrcholu $\mathbf{a}$.

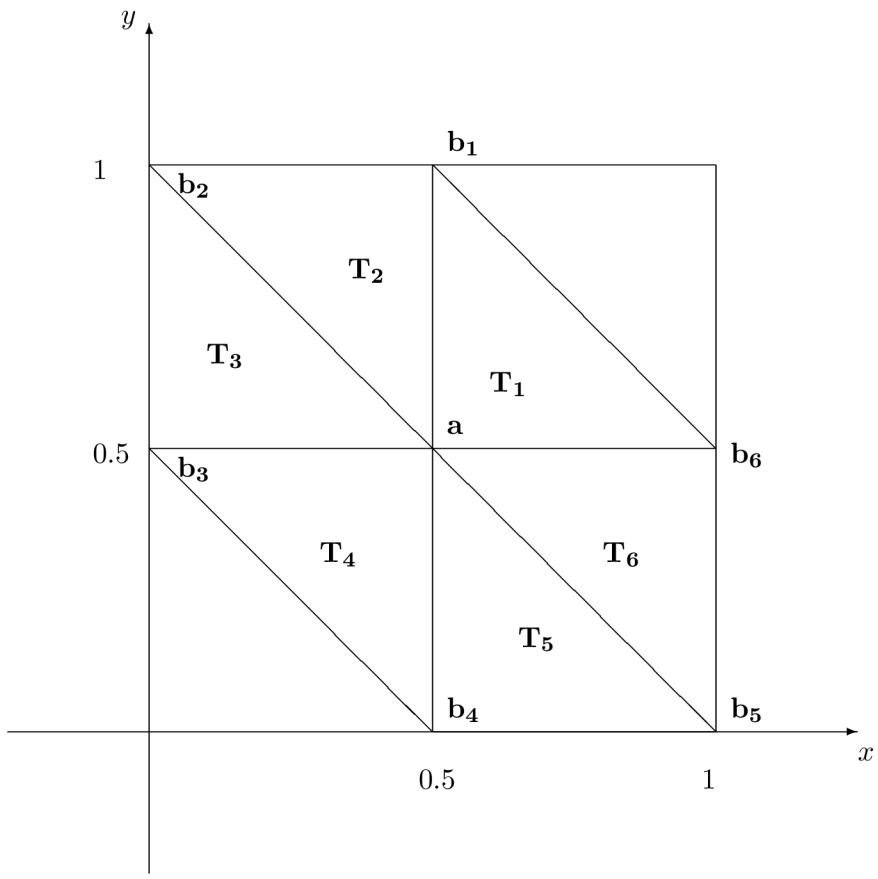
Z obou obrázků je patrné, že okruhy obsahují následující trojúhelníky. Pro jednoduchost jsou oba okruhy číslovány stejným způsobem.

$$r_{\mathbf{a}} = (\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}, \mathbf{b_4}, \mathbf{b_5}, \mathbf{b_6}) => \begin{array}{l} T_1 = \overline{\mathbf{ab_1b_6}} \\ T_2 = \overline{\mathbf{ab_2b_1}} \\ T_3 = \overline{\mathbf{ab_3b_2}} \\ T_4 = \overline{\mathbf{ab_4b_3}} \\ T_5 = \overline{\mathbf{ab_5b_4}} \\ T_6 = \overline{\mathbf{ab_6b_5}} \end{array} \tag{6.12}$$

Z obrázku je vidět, že nově vzniklé trojúhelníky mají delší hrany a přináší větší chybu do výpočtu.

6.3.2 Praktický výpočet

V této kapitole se pokusíme demonstrovat výpočet váhového vektoru na trojúhelníkové síti. Předpokládejme následující triangulaci tvořenou osmi trojúhelníky.



Obrázek 6.2: Schéma sítě použité pro demonstraci výpočtu.

Náš středový vrchol **a** má souřadnice $[0.5, 0.5]$. Odtud jednoduše odvodíme okruh okolo **a** ve tvaru $r_{\mathbf{a}} = ([0.5, 1], [0, 1], [0, 0.5], [0.5, 0], [1, 0], [1, 0.5])$. Nejprve provedeme převod globálních souřadnic všech vrcholů do lokálních souřadnic, se středem v bodě **a**. Transformace bude ve tvaru

$$\begin{array}{ll} \phi_x = b_x - a_x & \phi_y = b_y - a_y \\ \zeta_x = b_y - a_y & \zeta_y = -b_x + a_x \end{array}$$

přičemž (ϕ_x, ζ_x), resp. (ϕ_y, ζ_y) jsou lokální souřadnice pro výpočet váhového vektoru pro derivaci podle x, resp. y.

Souřadnice shrnuje následující tabulka 6.1.

Výpočet budeme tedy počítat na okruzích

- $r_(\phi_x, \zeta_x) = ([0, 0.5], [-0.5, 0.5], [-0.5, 0], [0, -0.5], [0.5, -0.5], [0.5, 0])$

vrchol	x	y	ϕ_x	ζ_x	ϕ_y	ζ_y
a	0.5	0.5	0	0	0	0
$\mathbf{b_1}$	0.5	1	0	0.5	0.5	0
$\mathbf{b_2}$	0	1	-0.5	0.5	0.5	0.5
$\mathbf{b_3}$	0	0.5	-0.5	0	0	0.5
$\mathbf{b_4}$	0.5	0	0	-0.5	-0.5	0
$\mathbf{b_5}$	1	0	0.5	-0.5	-0.5	-0.5
$\mathbf{b_6}$	1	0.5	0.5	0	0	-0.5

Tabulka 6.1: Okruh $r_{\mathbf{a}}$ v globálních souřadnicích (x, y) a v obou lokálních (ϕ_x, ζ_x), (ϕ_y, ζ_y)

- $r_(\phi_y, \zeta_y) = ([0.5, 0], [0.5, 0.5], [0, 0.5], [-0.5, 0], [-0.5, -0.5], [0, -0.5])$

Nyní můžeme začít sestavovat rovnice, ze kterých spočítáme váhové vektory pro oba okruhy. Celkem sestavíme dvě nezávislé soustavy lineárních algebraických rovnic (jedna soustava pro derivaci podle x, druhá pro derivaci podle y) ve tvaru $\mathbf{M}(r)\mathbf{w} = \mathbf{d}$. Víme, že pravé strany $\mathbf{d}_x$ i $\mathbf{d}_y$ obou soustav budou vždy ve tvaru

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \tag{6.13}$$

Váhové vektory $\mathbf{w}_x$ a $\mathbf{w}_y$ budou v tomto případě ve tvaru

$$\mathbf{w}_x = \begin{bmatrix} w_{x1} & w_{x2} & w_{x3} & w_{x4} & w_{x5} & w_{x6} \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

$$\mathbf{w}_y = \begin{bmatrix} w_{y1} & w_{y2} & w_{y3} & w_{y4} & w_{y5} & w_{y6} \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

Poslední krok je sestavení matic $\mathbf{M}_x$ a $\mathbf{M}_y$. ve tvaru

$$m_{1,i} = 1 \tag{6.16}$$

$$m_{2,i} = \frac{\phi_{i-1}^2\zeta_i - \phi_i^2\zeta_{i-1}}{D_i} \tag{6.17}$$

$$m_{3,i} = \frac{\zeta_{i-1}\zeta_i(\phi_{i-1} - \phi_i)}{D_i} \tag{6.18}$$

$$m_{4,i} = \frac{\zeta_{i-1}\zeta_i(\zeta_{i-1} - \zeta_i)}{D_i} \tag{6.19}$$

Kde si dopředu můžeme vypočítat konstantu

$$D_i = \phi_{i-1}\zeta_i - \phi_i\zeta_{i-1} \tag{6.20}$$

Po dosazení do vzorců obdržíme dvě shodné soustavy lineárních algebraických rovnic

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.21}$$

Víme, že soustavy mají nekonečně mnoho řešení, ale my vybereme to s nejmenší normou pomocí metody Moore-Penrose pseudoinverze. V našem případě jsou oba váhové vektory shodné

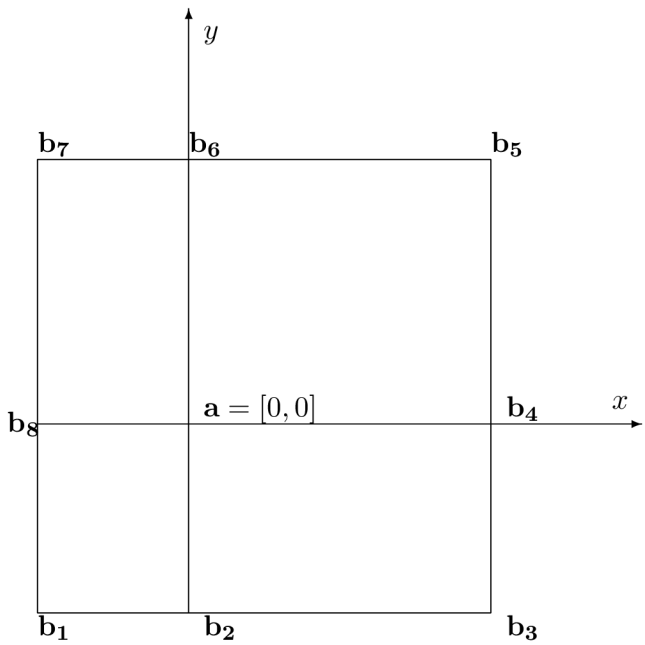
$$\mathbf{w_x} = \mathbf{w_y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \tag{6.22}$$

6.4 Rovnoběžníkové sítě

V této kapitole bude popsána hlavní část této práce zaměřená právě na rovnoběžníkové sítě.

6.4.1 Idea metody

Zaměřme se nyní na rovnoběžníkovou triangulaci. Pro jednoduchost nejprve předpokládejme zjednodušené schema, kdy středový bod $\mathbf{a}$ leží ve středu souřadné soustavy a hrany elementů jsou rovnoběžné s osami x a y. Celkem budeme uvažovat čtyři obdélníky T_1, T_2, T_3, T_4, které jsou definovány body $\mathbf{b_1}...\mathbf{b_8}$ umístěných proti směru hodinových ručiček. Schéma je zobrazeno na obrázku 6.3.



Obrázek 6.3: Jednoduché schéma čtyř obdélníků pro odvození idey metody

V tomto případě budeme uvažovat sadu bazických funkcí $(1, x, y, xy)$ a nějakou funkci $u = u(x, y) \in C^3(\Omega)$. Potom pro každý uzel b^i definujeme jeho odpovídající hodnotu jako $u_i = u(\mathbf{b^i})$ pro $i = 1..8$ a $u_0 = u(\mathbf{a})$.

Všimněme si, že pro nás bude klíčových ne 8 bodů, ale pouze čtyři vzdálenosti. Uvedu jejich výpočet včetně středového bodu $\mathbf{a}$, ikdyž víme, že se jedná vždy o nuly.

- $x_1 = a_x - b_x^8$
- $x_3 = b_x^3 - a_x$
- $y_2 = a_y - b_y^2$
- $y_6 = b_y^6 - a_y$

S pomocí hodnot x_1, x_3, y_2, y_6 a sady bazických funkcí sestavíme funkce L_i^j, kde i bude číslo elementu 1...4 a j bude bod $\mathbf{b_i}$ nebo $\mathbf{a}$. Připomeňme, že funkce L_i^j bude bilineární funkce ve tvaru $a + bx + cy + dxy$, která ve vrcholu j elementu T_i nabývá hodnoty 1 a ve zbývajících vrcholech nabývá hodnoty 0.

Funkce budou definovány pro všechny vrcholy všech 4 elementů.

$$T_1: \quad L_1^1(x,y) = \frac{1}{x_1 y_2} xy \tag{6.23}$$

$$L_1^2(x,y) = -\frac{1}{x_1 y_2} y(x + x_1) \tag{6.24}$$

$$L_1^a(x,y) = \frac{1}{x_1 y_2}(x + x_1)(y + y_2) \tag{6.25}$$

$$L_1^8(x,y) = -\frac{1}{x_1 y_2} x(y + y_2) \tag{6.26}$$

$$T_2: \quad L_2^a(x,y) = -\frac{1}{x_3 y_2}(x - x_3)(y + y_2) \tag{6.27}$$

$$L_2^2(x,y) = \frac{1}{x_3 y_2} y(x - x_3) \tag{6.28}$$

$$L_2^3(x,y) = -\frac{1}{x_3 y_2} xy \tag{6.29}$$

$$L_2^4(x,y) = \frac{1}{x_3 y_2} x(y + y_2) \tag{6.30}$$

$$T_3: \quad L_1^1(x,y) = \frac{1}{x_3 y_6}(x - x_3)(y - y_6) \tag{6.31}$$

$$L_1^2(x,y) = -\frac{1}{x_3 y_6} x(y - y_6) \tag{6.32}$$

$$L_1^a(x,y) = \frac{1}{x_3 y_6} xy \tag{6.33}$$

$$L_1^8(x,y) = -\frac{1}{x_3 y_6} y(x - x_3) \tag{6.34}$$

$$T_4: \quad L_1^1(x,y) = -\frac{1}{x_1 y_6}(x + x_1)(y - y_6) \tag{6.35}$$

$$L_1^2(x,y) = \frac{1}{x_1 y_6} y(x + x_1) \tag{6.36}$$

$$L_1^a(x,y) = -\frac{1}{x_1 y_6} xy \tag{6.37}$$

$$L_1^8(x,y) = \frac{1}{x_1 y_6} x(y - y6) \tag{6.38}$$

Dále definujeme interpolanty funkce u $\Pi[u]_i$ pro každý obdélník $i = 1..4$.

$$\Pi[u]_1(x,y) = u_1 L_1^1(x,y) + u_2 L_1^2(x,y) + u_0 L_1^a(x,y) + u_8 L_1^8(x,y) \tag{6.39}$$
$$\Pi[u]_2(x,y) = u_2 L_2^2(x,y) + u_3 L_2^3(x,y) + u_4 L_2^4(x,y) + u_0 L_2^a(x,y) \tag{6.40}$$
$$\Pi[u]_3(x,y) = u_0 L_3^a(x,y) + u_4 L_3^4(x,y) + u_5 L_3^5(x,y) + u_6 L_3^6(x,y) \tag{6.41}$$
$$\Pi[u]_4(x,y) = u_8 L_4^8(x,y) + u_0 L_4^a(x,y) + u_6 L_4^6(x,y) + u_7 L_4^7(x,y) \tag{6.42}$$

Potom budeme hledat koeficienty (f_1, f_2, f_3, f_4) tak, aby platila podmínka konzistence. V tomto případě

$$f_1 \frac{\partial \Pi[p]_1}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_2 \frac{\partial \Pi[p]_2}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_3 \frac{\partial \Pi[p]_3}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_4 \frac{\partial \Pi[p]_4}{\partial x}(\mathbf{a}) = \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{a}) \tag{6.43}$$
$$f_1 \frac{\partial \Pi[p]_1}{\partial y}(\mathbf{a}) + f_2 \frac{\partial \Pi[p]_2}{\partial y}(\mathbf{a}) + f_3 \frac{\partial \Pi[p]_3}{\partial y}(\mathbf{a}) + f_4 \frac{\partial \Pi[p]_4}{\partial y}(\mathbf{a}) = \frac{\partial p}{\partial y}(\mathbf{a}) \tag{6.44}$$

Pro všechny kvadratické polynomy $p(x,y)$. Jelikož obě strany vztahu jsou lineární funkce, můžeme vztah zjednodušit na sadu bazických funkcí $(1, x, y, x^2, xy, y^2)$.

V případě $P^{(3/2)}$ polynomů, tedy funkce u je jedna z následujících čtyř $(1, x, y, xy)$ platí, že interpolant $\Pi[u](x,y) = u(x,y)$ je shodný s interpolovanou funkcí.

Pokud uvážíme první část podmínky konzistence obsahující parciální derivaci podle x, tak v případě bazických funkcí $(1, y, y^2)$ platí

$$\frac{\partial 1}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y^2}{\partial x} = 0 \tag{6.45}$$

Stejně to dopadne pokud uvážíme druhou část podmínky konzistence s parciální derivací podle y a bazické funkce $(1, x, x^2)$.

$$\frac{\partial 1}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial x^2}{\partial y} = 0 \tag{6.46}$$

Z těchto kombinací bazických funkcí odvodíme rovnici $0 = 0$, kterou můžeme ignorovat.

Zajímavější je použití bazických funkcí x resp. y v případě parciální derivace podle x, resp. y. Po dosazení do podmínky konzistence můžeme vztah zjednodušit.

$$f_1 \frac{\partial \Pi[p]_1}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_2 \frac{\partial \Pi[p]_2}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_3 \frac{\partial \Pi[p]_3}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_4 \frac{\partial \Pi[p]_4}{\partial x}(\mathbf{a}) = \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{a}) \tag{6.47}$$
$$f_1 \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_2 \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_3 \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_4 \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{a}) = \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{a}) \tag{6.48}$$
$$(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{a}) = \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{a}) \tag{6.49}$$
$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \tag{6.50}$$

Poslední úpravu operací dělení můžeme provést, protože nikdy nebudeme dělit nulou.

Zbyla nám poslední bilineární bazická funkce xy pro obě parciální derivace. Víme, že počítáme derivace v bodě $\mathbf{a} = [0, 0]$ a parciální derivace vypadají následujícím způsobem

$$\frac{\partial xy}{\partial x}(\mathbf{a}) = y(\mathbf{a}) = 0 \tag{6.51}$$
$$\frac{\partial xy}{\partial y}(\mathbf{a}) = x(\mathbf{a}) = 0 \tag{6.52}$$

Bod u_i	Bazická funkce x^2	Bazická funkce y^2
u_0	0	0
u_1	x_1^2	y_2^2
u_2	0	y_2^2
u_3	x_3^2	y_2^2
u_4	x_3^2	0
u_5	x_3^2	y_6^2
u_6	0	y_6^2
u_7	x_1^2	y_6^2
u_8	x_1^2	0

Tabulka 6.2: Tabulka interpolantů pro bazické funkce druhého stupně

V tomto případě je opět výsledkem rovnice $0 = 0$.

Zbyly nám poslední dvě bazické funkce x^2, resp. y^2 a jejich parciální derivace podle x resp. y v bodě $\mathbf{a} = [0, 0]$.

Nyní už bazická funkce není rovna interpolantu bazické funkce, tak musíme spočítat interpolanty pro všechny 4 obdélníky. Vycházíme z následující tabulky 6.2

$$\Pi[x^2]_{T_1} = \Pi[x^2]_{T_4} = -x_1 x \tag{6.53}$$
$$\Pi[x^2]_{T_2} = \Pi[x^2]_{T_3} = x_3 x \tag{6.54}$$
$$\Pi[y^2]_{T_1} = \Pi[y^2]_{T_2} = -y_2 y \tag{6.55}$$
$$\Pi[y^2]_{T_3} = \Pi[y^2]_{T_4} = y_6 y \tag{6.56}$$

Jejich odpovídající parciální derivace v bodě $\mathbf{a}$.

$$\frac{\partial \Pi[x^2]_{T_1}}{\partial x}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \Pi[x^2]_{T_4}}{\partial x}(\mathbf{a}) = -x_1 \tag{6.57}$$
$$\frac{\partial \Pi[x^2]_{T_2}}{\partial x}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \Pi[x^2]_{T_3}}{\partial x}(\mathbf{a}) = x_3 \tag{6.58}$$
$$\frac{\partial \Pi[y^2]_{T_1}}{\partial y}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \Pi[y^2]_{T_2}}{\partial y}(\mathbf{a}) = -y_2 \tag{6.59}$$
$$\frac{\partial \Pi[y^2]_{T_3}}{\partial y}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \Pi[y^2]_{T_4}}{\partial y}(\mathbf{a}) = y_6 \tag{6.60}$$

Pokud uvážíme tyto hodnoty a dosadíme do podmínky konzistence dostaneme následující rovnice

$$f_1 \frac{\partial \Pi[x^2]_1}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_2 \frac{\partial \Pi[x^2]_2}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_3 \frac{\partial \Pi[x^2]_3}{\partial x}(\mathbf{a}) + f_4 \frac{\partial \Pi[x^2]_4}{\partial x}(\mathbf{a}) = 0 \tag{6.61}$$
$$f_1(-x_1) + f_2 x_3 + f_3 x_3 + f_4(-x_1) = 0 \tag{6.62}$$

$$f_1 \frac{\partial \Pi[y^2]_1}{\partial y}(\mathbf{a}) + f_2 \frac{\partial \Pi[y^2]_2}{\partial y}(\mathbf{a}) + f_3 \frac{\partial \Pi[y^2]_3}{\partial y}(\mathbf{a}) + f_4 \frac{\partial \Pi[y^2]_4}{\partial y}(\mathbf{a}) = 0 \tag{6.63}$$
$$f_1(-x_2) + f_2(-x_2) + f_3 y_6 + f_4 y_6 = 0 \tag{6.64}$$

Výsledkem celé procedury je soustava 3 lineárních algebraických rovnic o 4 neznámých, přičemž neznámé jsou váhy pro jednotlivé elementy.

$$
\begin{aligned}
f_1 + f_2 + f_3 + f_4 &= 1 && (6.65)\\
-f_1x_1 + f_2x_3 + f_3x_3 - f_4x_1 &= 0 && (6.66)\\
-f_1y_2 - f_2y_2 + f_3y_6 + f_4y_6 &= 0 && (6.67)
\end{aligned}
$$

Řešení existuje nekonečně mnoho, ale v tomto případě budeme uvažovat jako řešení vektor s minimální normou. Tyto váhy je možné použít pro ortogonální triangulaci.

6.4.2 Zobecnění metody

Podívejme se nyní na zobecněnou situaci s rovnoběžníkem T. Budeme uvažovat referenční čtverec $\hat{T}$ v jeho lokálních souřadnicích $\hat{x}, \hat{y}$, který má souřadnice vrcholů $\hat{\mathbf{a^1}} = [-1, -1]$, $\hat{\mathbf{a^2}} = [1, -1]$, $\hat{\mathbf{a^3}} = [1, 1]$ a $\hat{\mathbf{a^4}} = [-1, 1]$.

Budeme uvažovat lineární mapovací funkci $F_T : \hat{T} \to T$ definovanou jako

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_x^2 - a_x^1 & a_x^4 - a_x^1 \\ a_y^2 - a_y^1 & a_y^4 - a_y^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_x^2 + a_x^4 \\ a_y^2 + a_y^4 \end{bmatrix} \tag{6.68}
$$

Inverzní mapování F_T^{-1} je ve tvaru

$$
\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \frac{2}{D(a^1, a^2, a^4)} \begin{bmatrix} a_y^4 - a_y^1 & a_x^1 - a_x^4 \\ a_y^1 - a_y^2 & a_x^2 - a_x^1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_x^2 + a_x^4 \\ a_y^2 + a_y^4 \end{bmatrix} \right) \tag{6.69}
$$

Pro každý lokální vrchol definujeme bázovou funkci $\hat{L}(\hat{x}, \hat{y})$ ve tvaru

$$
\begin{aligned}
\hat{L}^1(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{1}{4}(1 - \hat{x})(1 - \hat{y}) && (6.70)\\
\hat{L}^2(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{1}{4}(1 + \hat{x})(1 - \hat{y}) && (6.71)\\
\hat{L}^3(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{1}{4}(1 + \hat{x})(1 + \hat{y}) && (6.72)\\
\hat{L}^4(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{1}{4}(1 - \hat{x})(1 + \hat{y}) && (6.73)
\end{aligned}
$$

Víme, že bázové funkce i inverzní mapovací funkce jsou lineární. Potom můžeme složením těchto funkcí získat bázove funkce pro obecný element T

$$
L_T^j(x, y) = \left(\hat{L}^j \circ F_T^{-1} \right)(x, y) \tag{6.74}
$$

S pomocí Lagrangeovy bázové funkce můžeme zapsat bázove funkce ve tvaru

$$
L_T^j(\mathbf{x}) = \frac{\left[D(\mathbf{x}, a^{j-1}, a^j) - D(a^{j-1}, a^j, a^{j+1})\right] \left[D(\mathbf{x}, a^j, a^{j+1}) - D(a^{j-1}, a^j, a^{j+1})\right]}{D(a^{j-1}, a^j, a^{j+1})} \tag{6.75}
$$

přičemž

- $\mathbf{x}$ je bod o složkách (x, y)

- a^j je j-tý vrchol elementu T pro $j = 1..4$, přičemž budeme uvažovat cykličnost a $a^0 = a^4$ a $a^5 = a^1$.

Odtud můžeme zapsat derivaci bázové funkce ve tvaru

$$\frac{\partial L_T^j(\mathbf{x})}{\partial x} = -\frac{(a_y^j - a_y^{j-1})D(\mathbf{x}, a^j, a^{j+1}) + (a_y^{j+1} - a_y^j)D(a^{j-1}, a^j, \mathbf{x})}{D(a^{j-1}, a^j, a^{j+1})^2} - \frac{(a_y^{j-1} - a_y^{j+1})}{D(a^{j-1}, a^j, a^{j+1})} \tag{6.76}$$

$$\frac{\partial L_T^j(\mathbf{x})}{\partial y} = \frac{(a_x^j - a_x^{j-1})D(\mathbf{x}, a^j, a^{j+1}) + (a_x^{j+1} - a_x^j)D(a^{j-1}, a^j, \mathbf{x})}{D(a^{j-1}, a^j, a^{j+1})^2} + \frac{(a_x^{j-1} - a_x^{j+1})}{D(a^{j-1}, a^j, a^{j+1})} \tag{6.77}$$

S pomocí těchto bazických funkcí definujeme interpolant

$$\Pi_T[u](\mathbf{x}) = u(a^1)L_T^1(\mathbf{x}) + u(a^2)L_T^2(\mathbf{x}) + u(a^3)L_T^3(\mathbf{x}) + u(a^4)L_T^4(\mathbf{x}) \tag{6.78}$$

Nyní přejdeme o kousek dál a budeme uvažovat okruh $r = (\mathbf{b^1}, \mathbf{b^2}, \mathbf{b^3}, \mathbf{b^4})$ okolo bodu $\mathbf{a}$. Zavedeme operátor W

$$W_x[u](\mathbf{a}) = f_1 \frac{\partial \Pi_1[u]}{\partial x}(\mathbf{a}) + \ldots + f_n \frac{\partial \Pi_n[u]}{\partial x}(\mathbf{a}) \tag{6.79}$$

Dále zjednodušíme situaci, a řekneme, že $b_x^1 = \lambda b_x^3$ a $b_y^2 = \mu b_y^4$. Víme, že bod $\mathbf{a}$ je vnitřní když $\lambda < 0$ a $\mu < 0$, jinak se jedná o hraniční bod. Bez újmy na obecnosti můžeme z rovnoběžníků vypustit čtvrtý bod a uvažovat pouze trojúhelníky, protože pokud známe v rovnoběžníku tři body, čtvrtý je jednoznačně určen.

Podmínka konzistence je splněna, když platí rovnice $W_x[u](\mathbf{a}) = \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{a})$ a $W_y[u](\mathbf{a}) = \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{a})$ pro všechny funkce u z $\mathcal{P}^{(2)}$, podobně jako v úvodní časti. Celou soustavu můžeme zapsat v maticovém tvaru jako

$$Mf = d \tag{6.80}$$

kde $f = [f_1, f_2, f_3, f_4]^T$ a $d = [1, 0, 0]^T$ a matice M je ve tvaru

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{(b_x^2)^2 b_y^8 - (b_x^8)^2 b_y^2}{D(b^8, b^2, a)} & \frac{(b_x^4)^2 b_y^2 - (b_x^2)^2 b_y^4}{D(b^2, b^4, a)} & \frac{(b_x^6)^2 b_y^4 - (b_x^4)^2 b_y^6}{D(b^4, b^6, a)} & \frac{(b_x^8)^2 b_y^6 - (b_x^6)^2 b_y^8}{D(b^6, b^8, a)} \\ \frac{(b_y^2)^2 b_y^8 - (b_y^8)^2 b_y^2}{D(b^8, b^2, a)} & \frac{(b_y^4)^2 b_y^2 - (b_y^2)^2 b_y^4}{D(b^2, b^4, a)} & \frac{(b_y^6)^2 b_y^4 - (b_y^4)^2 b_y^6}{D(b^4, b^6, a)} & \frac{(b_y^8)^2 b_y^6 - (b_y^6)^2 b_y^8}{D(b^6, b^8, a)} \end{bmatrix} \tag{6.81}$$

Pokud uvážíme $\alpha = (b_x^8)^2 b_y^6$ a $\beta = (b_x^6)^2 b_y^8$, potom můžeme celou rovnici zapsat s pomocí parametrů λ, μ jako

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha - \lambda\beta & \mu\alpha - \lambda\beta & \mu\alpha - \beta & \alpha - \beta \\ b_y^8 - \lambda b_y^6 & \mu b_y^8 - \lambda b_y^6 & \mu b_y^8 - b_y^6 & b_y^8 - b_y^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.82}$$

Celou kalkulaci je možné zjednodušit na

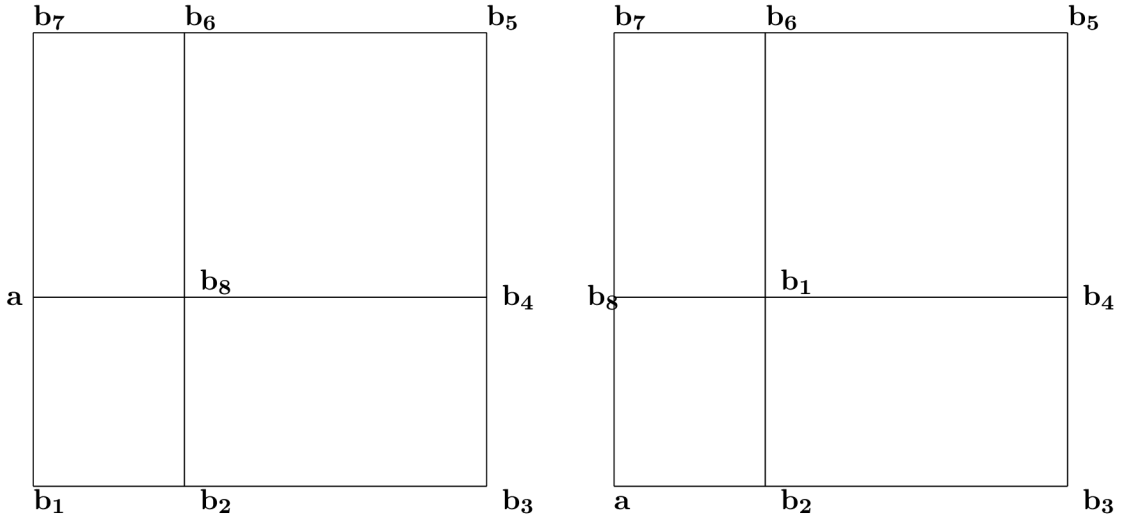
$$\mathbf{f} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2(1-\lambda)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2(1-\mu)} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{6.83}$$

6.4.3 Okrajové vrcholy

Podobně jako u trojúhelníkových sítí, je potřeba speciálním způsobem řešit okrajové vrcholy i v rovnoběžníkových sítích. Použili jsme stejný přístup, díky kterému vzniknou nové rovnoběžníky, které mají větší rozměry a opět přináší větší chybu do výpočtu.

Při výpočtu mohou nastat tyto dvě možnosti (ilustrace na obrázku 6.4).

- *hranový* uzel
- *vrcholový* uzel



Obrázek 6.4: Vlevo schéma hranově vnořeného vrcholu, vpravo schéma vrcholově vnořeného vrcholu

V případě hranově vnořeného vrcholu budeme uvažovat následující čtyři obdélníky

$$\mathbf{a}\mathbf{b_1}\mathbf{b_2}\mathbf{b_8} \tag{6.84}$$
$$\mathbf{a}\mathbf{b_1}\mathbf{b_3}\mathbf{b_4} \tag{6.85}$$
$$\mathbf{a}\mathbf{b_8}\mathbf{b_6}\mathbf{b_7} \tag{6.86}$$
$$\mathbf{a}\mathbf{b_4}\mathbf{b_5}\mathbf{b_7} \tag{6.87}$$
$$\tag{6.88}$$

V případě vrcholově vnořeného vrcholu budeme uvažovat následující čtyři obdélníky

$$\mathbf{ab_2b_1b_8} \tag{6.89}$$
$$\mathbf{ab_3b_4b_8} \tag{6.90}$$
$$\mathbf{ab_2b_6b_7} \tag{6.91}$$
$$\mathbf{ab_3b_5b_7} \tag{6.92}$$
$$\tag{6.93}$$

Kapitola 7

Dosažené výsledky

V této kapitole budou popsány veškeré testy a experimenty, využívající metodu váženého výpočtu gradientů a metody Taylorovy řady. Mezi významné praktické aplikace patří aposteriorní odhad chyby, který je možné použít v iteračním výpočtu k získání jemnější mřížky.

Nejvíc jsem se zabýval metodami pro řešení Laplaceovy rovnice s okrajovými podmínkami. Víme, že se jedná o statickou (časově invariantní) úlohu.

7.1 Výpočet gradientu

Metoda váhování představuje numerickou metodu výpočtu gradientu. Víme, že metoda funguje analyticky přesně pro polynomy do druhého stupně včetně. Pro ostatní funkce je chyba v řádu $O(h^2)$.

Testování bylo provedeno na několika vybraných funkcích dvou proměnných na obdélníkové mřížce a jejich chyba v závislosti na nejdelší hraně mřížky h je zobrazena na následujících obrázcích 7.1, 7.2 a 7.3. Je zde zobrazena chyba gradientu na vnitřním (červená barva) a okrajovém vrcholu (zelená barva).

Poslední funkce pro demonstraci je funkce druhého stupně, ve které se promítnou pouze zaokrouhlovací chyby a chyby zobrazení čísel v plovoucí řádové čárce, proto je chyba téměř nulová (na hranici zobrazení) 7.4.

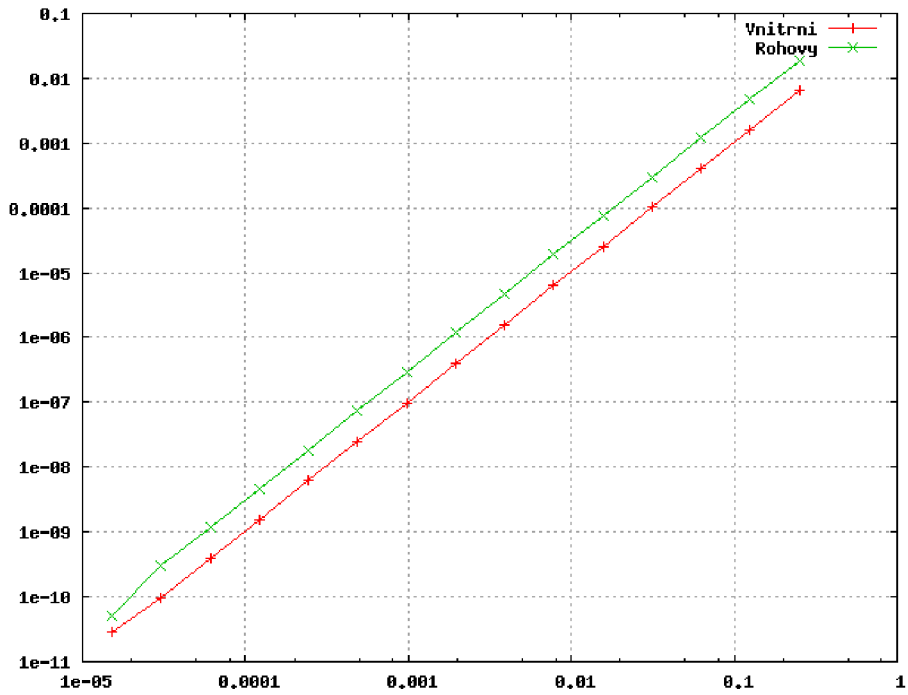
7.2 Aposteriorní odhad chyby

Při praktickém řešení úloh s parciálními diferenciálními rovnicemi je potřeba nalézt kompromis mezi rychlostí a přesností. Při použití rovnoměrné mřížky s velkými elementy sice získáme rychle řešení, ale s poměrně malou přesností. Naopak při použití husté mřížky získáme sice přesnější řešení, ale výpočet bude trvat dlouho. Optimální je použít dostatečně malé elementy v oblastech kde je to potřeba a jinde použít větší elementy. Pro identifikaci oblasti, kde se vyplatí použít více malých elementů použijeme aposteriorní odhad chyby.

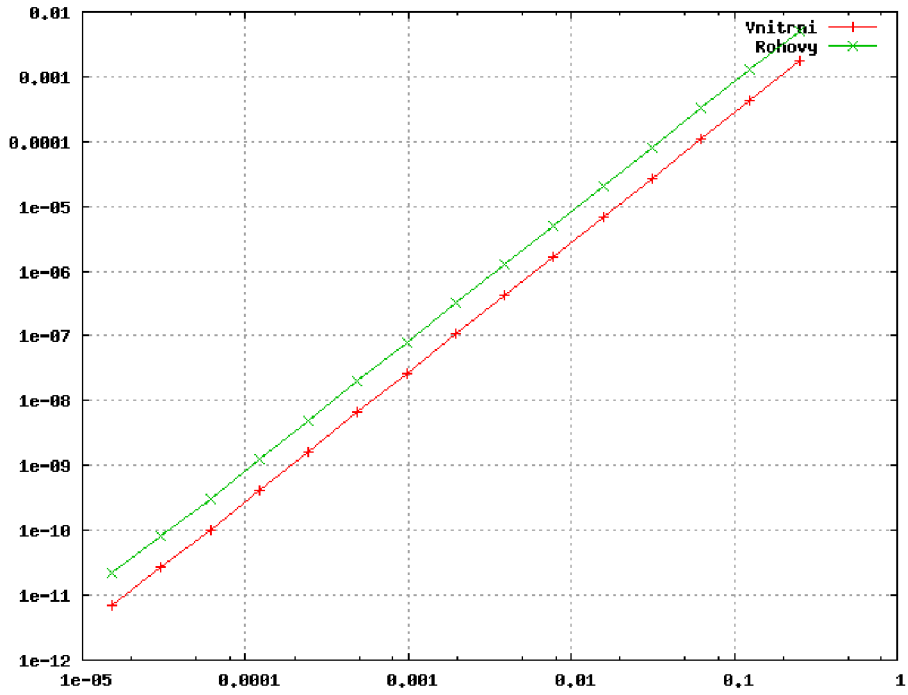
Idea aposteriorního odhadu chyby je použít numerické řešení a aktuální triangulaci. Výsledkem metody je přiřazení odhadu chyby ke každému elementu triangulace. Potom jsme schopni zjistit v jaké oblasti máme velkou chybu a mřížku zjemnit. Velkou výhodou je, že nepotřebujeme znát analytické řešení.

Informace pro tuto kapitolu jsem prevzal z [1], [29] a [3].

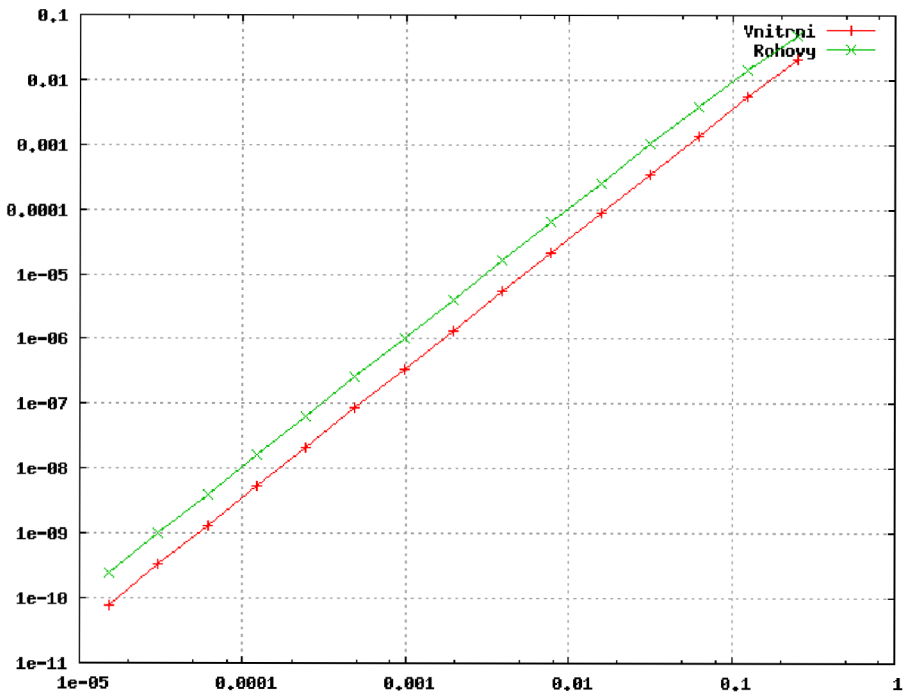
Pojem *aposteriorní odhad chyby* nedefinuje nějaký konkrétní vzorec, jedná se spíš o obecný postup. Pro účely v této práci nadefinujeme výpočet aposteriorního odhadu chyby



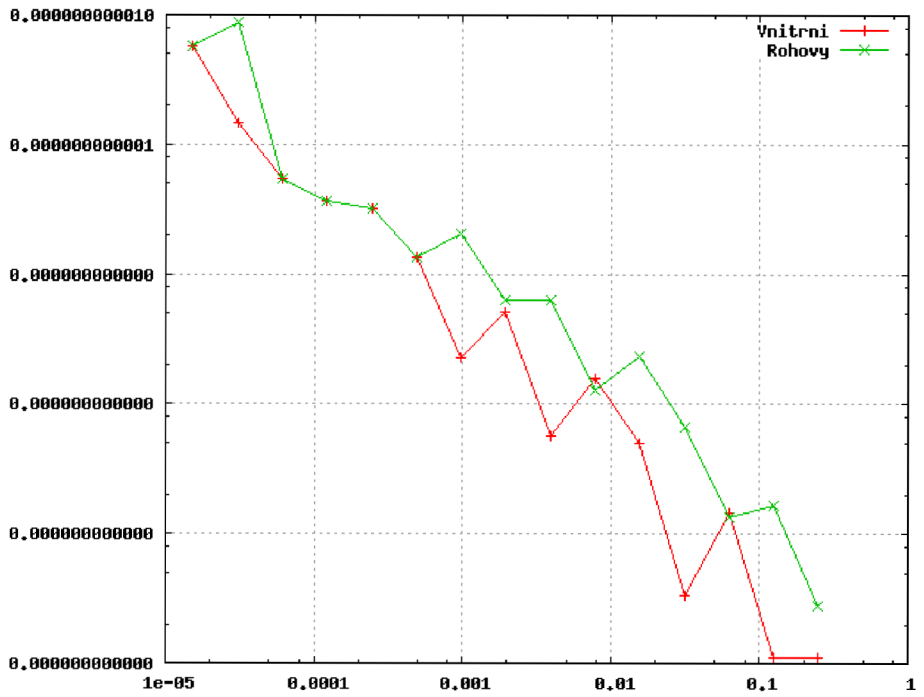
Obrázek 7.1: Absolutní chyba při výpočtu gradientu funkce $\sin \frac{x}{y}$



Obrázek 7.2: Absolutní chyba při výpočtu gradientu funkce $\sin(x)\cos(y)$



Obrázek 7.3: Absolutní chyba při výpočtu gradientu funkce $\frac{1}{\sinh \pi} \sin \pi x \sinh \pi y$



Obrázek 7.4: Absolutní chyba při výpočtu gradientu funkce $x^2 + y^2$

pomocí Superaproximace gradientu. Půjde o to spočítat rozdíl mezi P^0 a P^1 gradientem pro trojúhleníkové a rozdíl mezi $P^{0.5}$ a P^1 gradientem v případě rovnoběžníkových elementů.

Nejprve nějakým způsobem vyřešíme zadanou parciální diferenciální rovnici a získáme její řešení $u(x, y)$. Potom pro každý element t z triangulace vytvoříme linární nebo bilineární interpolant $\Pi_t[u](x, y)$. Potom v každém vrcholu triangulace spočítáme gradienty pomocí Superaproximace gradientu. Vzniknou nám nové dvě po částech spojité funkce (na všech elementech) $\Pi_t[u_x](x, y)$ a $\Pi_t[u_y](x, y)$.

Nyní spočítáme aposteriorní odhad chyby τ na elementu t.

$$\tau = \frac{1}{|t|} \int_t \left(\frac{\partial \Pi_t[u]}{\partial x} - \Pi_t[u_x] \right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi_t[u]}{\partial y} - \Pi_t[u_y] \right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{7.1}$$

- $|t|$ je plocha elementu. Ve vzorci provádíme normalizaci, protože větší elementy by měly větší chybu než malé elementy.
- $\Pi_t[u]$ je interpolant numerického řešení u na elementu t.
- $\Pi_t[u_x]$, $\Pi_t[u_y]$ jsou interpolanty Superaproximace gradientu numerického řešení u na elementu t.
- Každý rozdíl umocňujeme, čímž získáme kladné číslo

Pokud se nad tímto vzorcem zamyslíme, vidíme, že se jedná o výpočet objemu vymezeného dvěma polynomiálními funkcemi, v nejhorším případě bilineárními.

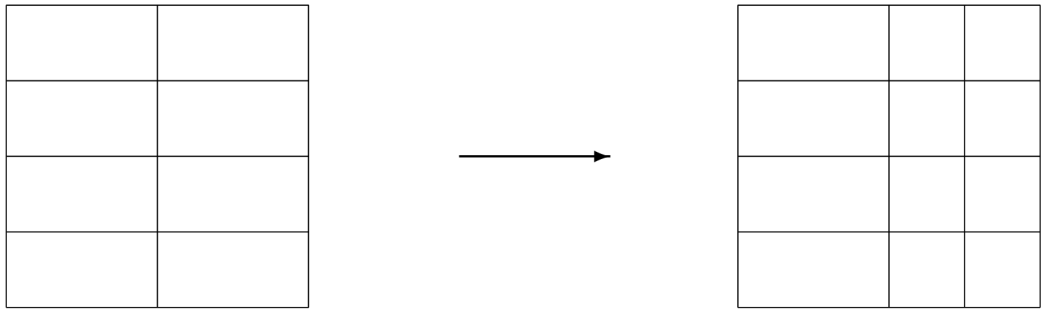
Tuto metodiku můžeme taktéž upravit a vzorec rozdělit na složku x a y, čímž nám vznikne pro každý element vektor, jehož složky jsou odhady chyby ve směru x a y.

7.2.1 Iterativní výpočet

Definujme postup iterativního výpočtu s využitím aposteriorního odhadu chyby. Tento postup je využíván ve všech algoritmech pro zjemňování mřížky použitých v této práci.

1. Inicializace – jedná se o sestavení hrubé triangulace
2. Výpočet okrajové úlohy – získáme řešení zadané okrajové úlohy (metodou konečných prvku, metodou přímek, metodou konečných diferencí)
3. Superaproximace gradientu – v každém vrcholu triangulace spočítáme superaproximaci gradientu
4. Aposteriorní odhad – v každém elementu spočítáme aposteriorní odhad chyby
5. Zjemnění mřížky – najdeme elementy s největším aposteriorním odhadem chyby a nahradíme je skupinou jiných elementu. V této práci se nezabývám metodami pro zjemňování mřížky, proto jsem zvolil 2 nejjednodušší metody
6. Revize chyby – pokud chyba řešení je stále vetší než zadaná limitní hodnota, pokračuj bodem 2.

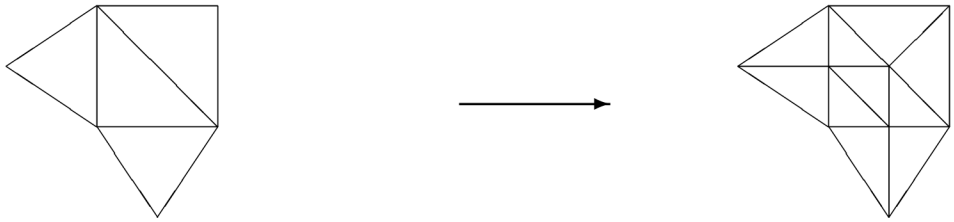
V celé práci jsem se zabýval dvěma typy mřížky. Prvním typem je obdélníková sít, která má hrany rovnoběžné s osou x nebo osou y. V těchto případech zjemňování probíhá rozpůlením příslušných obdélníku v řádku nebo sloupci aby byla zachovaná definice triangulace. Rozdělení je ilustrováno na následujícím obrázku 7.5.



Obrázek 7.5: Zjemňování obdélníkové mřížky pomocí vertikálního zjemnění

V případě trojúhelníkových sítí je situace složitější. Každý trojúhelník sousedí s maximálně třemi trojúhelníky. Vnitřní trojúhelník je rozdělen na čtyři menší trojúhelníky pomocí středních příček - každou hranu rozpůlíme. Tím nám vzniknou 3 nové vrcholy které je potřeba připojit v okolních trojúhelnících. Každý sousední trojúhelník rozdělíme na dva nové, ze středu hrany vnitřního trojúhelníku na protilehlý vrchol sousedního trojúhelníku.

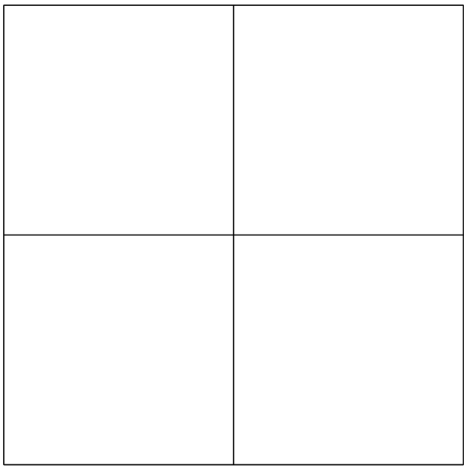
Postup je opět zobrazen na obrázku 7.6.



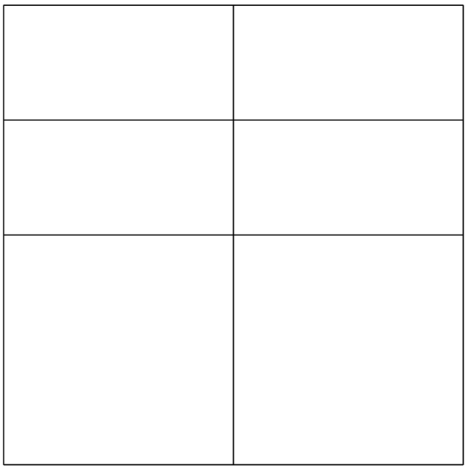
Obrázek 7.6: Zjemnění trojúhelníkové mřížky

7.2.2 Aposteriorní odhad chyby na obdélníkové síti

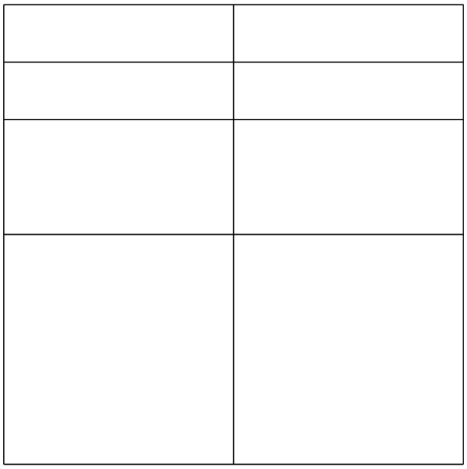
Tento příklad bude ilustovat použití metody Superaproximace gradientu odvozeného v tomto texu. Řešit budeme okrajovou úlohu (3.74) a použijeme iterační výpočet a aposteriorní odhad chyby. Nejprve začneme s hrubou sítí, kterou budeme postupně zjemňovat. Několik sítí je zobrazeno na následujících obrázcích 7.7, 7.8, 7.9, 7.10, 7.11, 7.12.



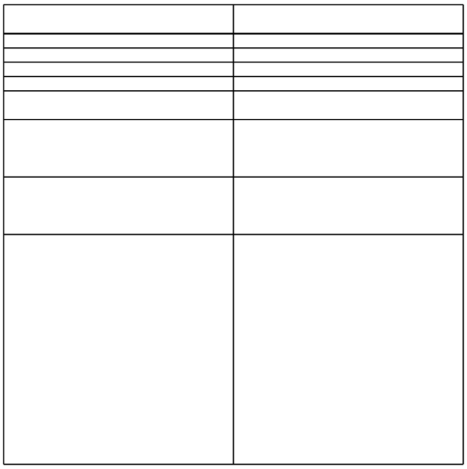
Obrázek 7.7: Počáteční mřížka



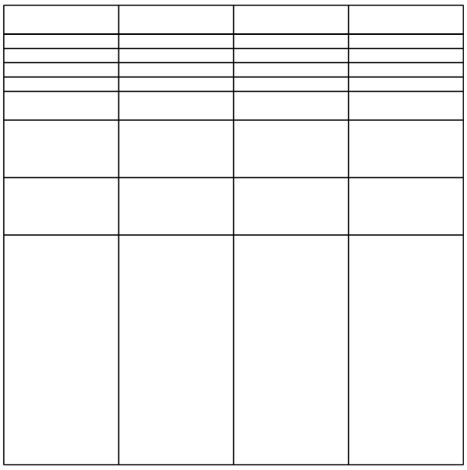
Obrázek 7.8: Mřížka po prvním zjemnění



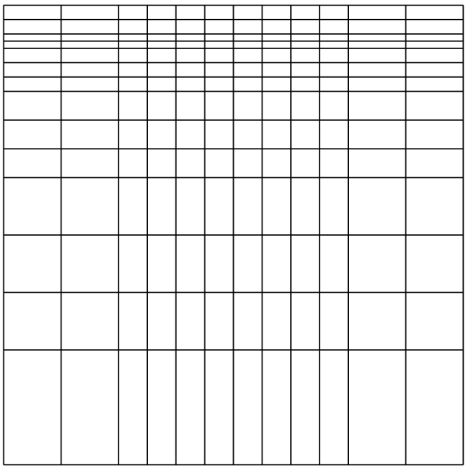
Obrázek 7.9: Mřížka po druhém zjemnění



Obrázek 7.10: Mřížka po sedmém zjemnění



Obrázek 7.11: Mřížka po desátém zjemnění



Obrázek 7.12: Finální mřížka

Všimněme si, že Následují tabulky s jednotlivými aposteriorními odhady chyby ve stejném pořadí jako mřížky 7.1, 7.2, 7.3, 7.4.

0.00464178	0.00464178
0.00464178	0.00464178

Tabulka 7.1: Tabulka s aposteriorním odhadem chyby v první iteraci

0.00260703	0.00260703
0.00278922	0.00278922
0.00148571	0.00148571

Tabulka 7.2: Tabulka s aposteriorním odhadem chyby po prvním zjemnění

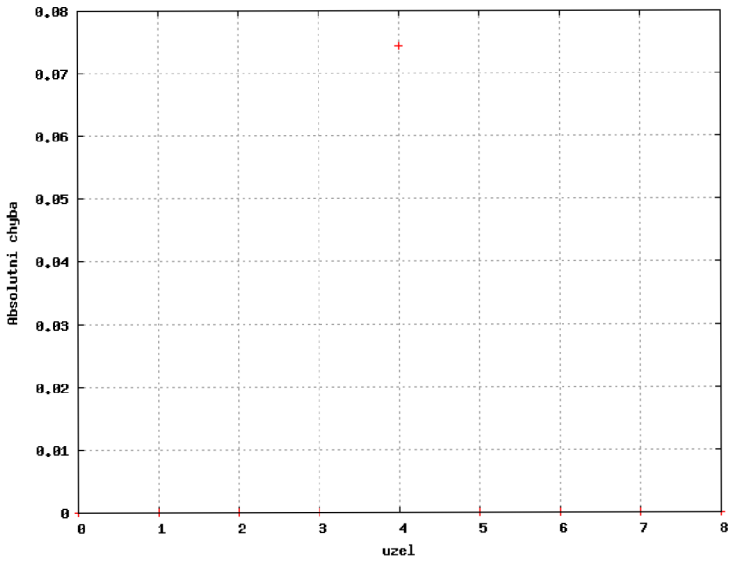
0.00247571	0.00247571
0.00255475	0.00255475
0.00113783	0.00113783
0.000479382	0.000479382

Tabulka 7.3: Tabulka s aposteriorním odhadem chyby po druhém zjemnění

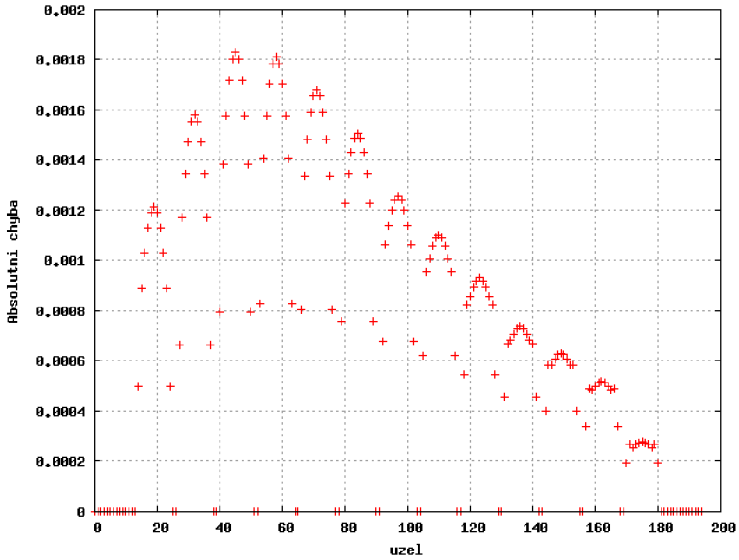
0.00201971	0.00201971
0.00102185	0.00102185
0.000969461	0.000969461
0.00040885	0.00040885
0.000166703	0.000166703
0.000130841	0.000130841
8.50618e-005	8.50618e-005
3.15785e-005	3.15785e-005
3.44424e-008	3.44424e-008

Tabulka 7.4: Tabulka s aposteriorním odhadem chyby po sedmém zjemnění

Poslední dvě tabulky jsou příliš rozsáhlé a proto nejsou uvedeny. Následují obrázky zobrazující absolutní chybu řešení pro počáteční a koncovou mřížku. Pro lepší názornost byly grafy linearizovány. Vidíme, že absolutní chyba na počátku byla v řádu 0.01 (7.13) a na konci 0.001 (7.14).



Obrázek 7.13: Chyba na počátku výpočtu (zobrazen je pouze jeden vrchol s chybou a vrcholy na okrajové podmínce s nulovou chybou.

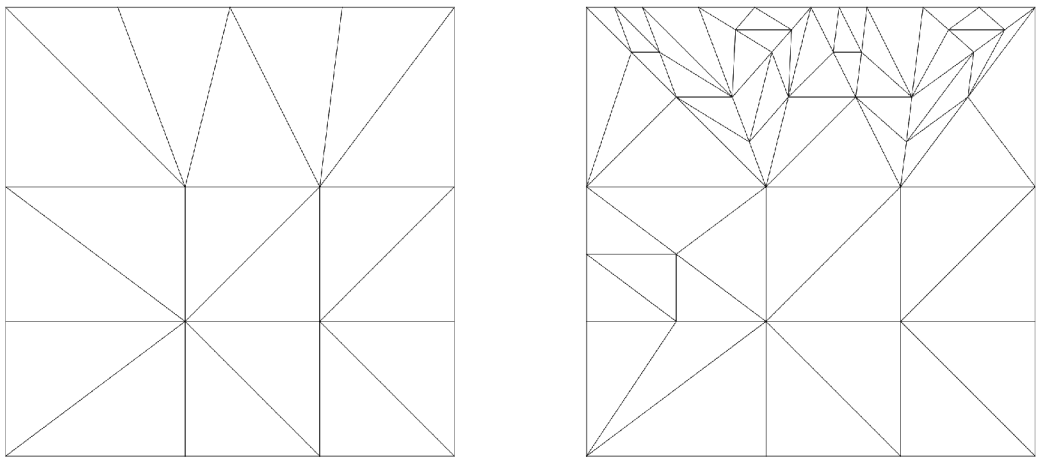


Obrázek 7.14: Chyba výpočtu na zjemněné mřížce. Výsledky jsou linearizovány

7.2.3 Aposteriorní odhad chyby na trojúhelníkové síti

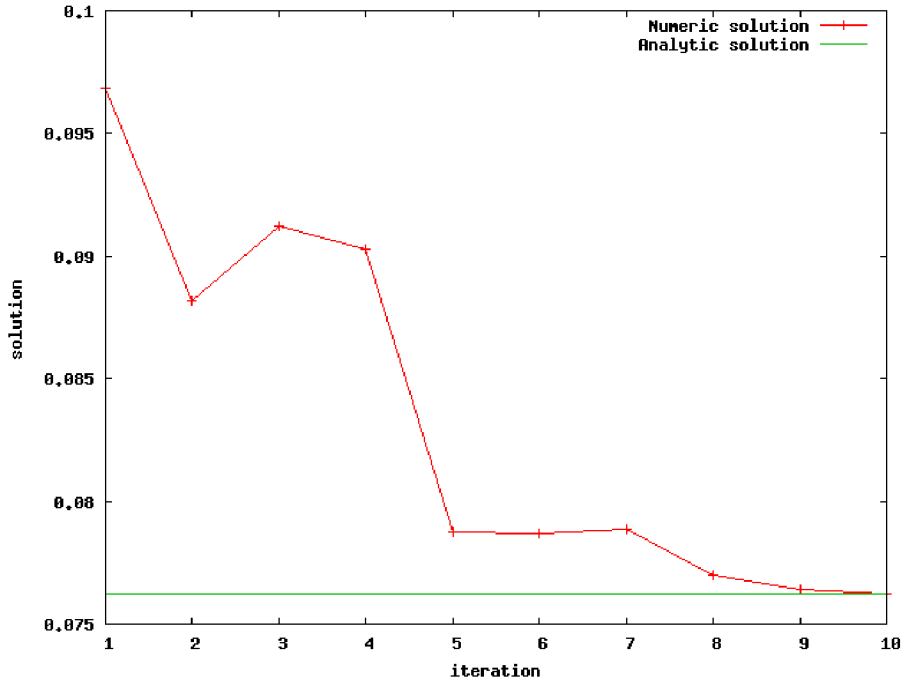
Stejnou metodou jako v předchozím příkladě jsme řešili stejnou rovnici, ale použita byla trojúhelníková síť. Opět řešíme okrajovou úlohu (3.74) s s využitím metody Konečných prvků.

Zobrazím pouze počáteční a koncovou triangulaci, které byly použity při iterativním výpočtu. Uspokojivě přesné řešení bylo vypočítáno při desáté iteraci 7.15

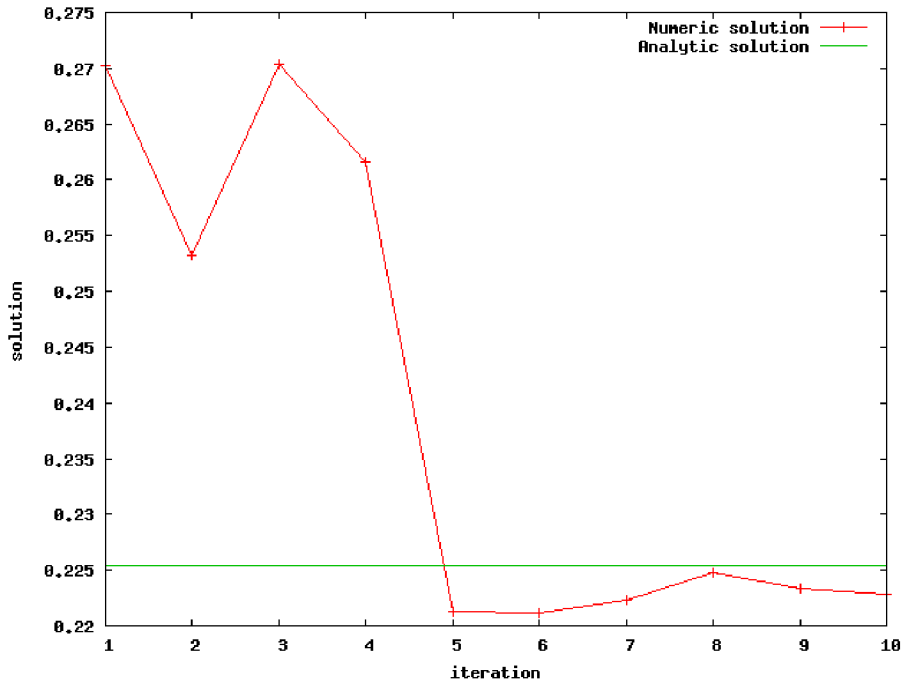


Obrázek 7.15: Vlevo počáteční triangulace, vpravo koncová triangulace při desáté iteraci.

Následuje průběh řešení ve dvou vnitřních vrcholech $[0.3, 0.3]$ (7.16) a $[0.3, 0.6]$ (7.17) v závislosti na iteraci. Vidíme, že jemnější mřížka produkuje přesnejší řešení.



Obrázek 7.16: Absolutní chyba řešení v bodě $[0.3, 0.3]$. Červená křivka představuje numerické řešení, zelené analytické řešení.



Obrázek 7.17: Absolutní chyba řešení v bodě $[0.3, 0.6]$. Červená křivka představuje numerické řešení, zelené analytické řešení.

7.3 Metoda konečných diferencí s vícebodovou aproximací

Vícebodová aproximace poskytuje větší přesnost řešení. Z Taylorova rozvoje je možné odvodit obecně n-bodový diferenční vzorec, kterým je možné vyjádřit derivaci s větší přesností. Nevýhodou vícebodové aproximace je, že výsledná soustava rovnic špatně konverguje.

Pokusil jsem se vytvořit porovnání tří a pětibodové aproximace, které jsem odvodil z Taylorova rozvoje. Použil jsem je na řešení Laplaceovy rovnice

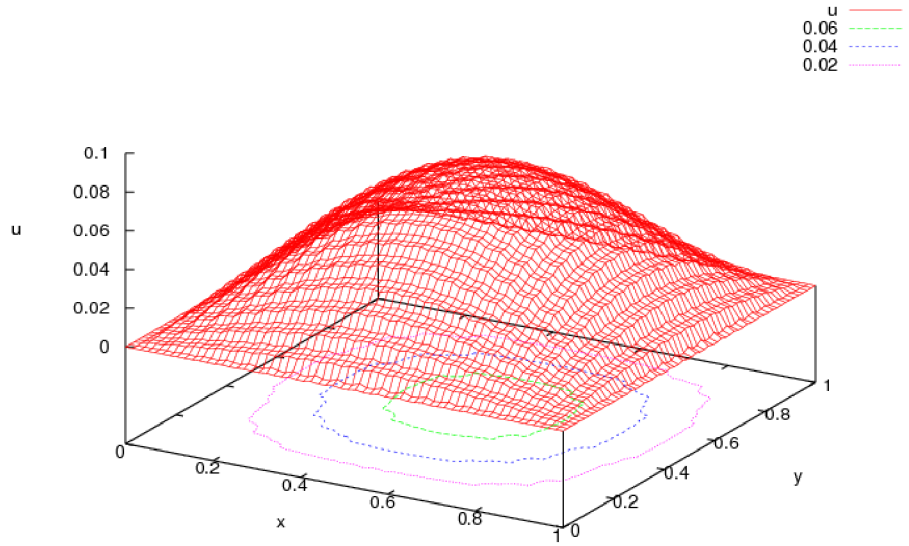
$$\nabla^2 u(x,y) = 0 \tag{7.2}$$

Okrajové podmínky jsou stejné jako v předchozím uvedeném příkladě (3.74). Následující grafy zobrazují chybu řešení od analytického řešení. Při výpočtech používám následující aproximace derivací odvozené z Taylorova rozvoje.

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2}[3] \sim \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \tag{7.3}$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2}[5] \sim \frac{1}{12}\frac{-u_{i+2,j} + 16u_{i+1,j} - 30u_{i,j} + 16u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{h^2} \tag{7.4}$$

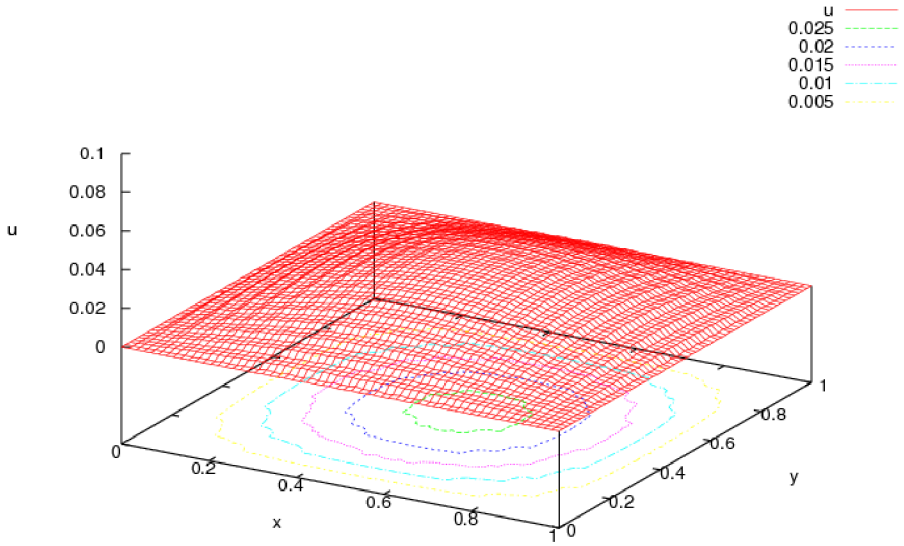
Zde je graf chyby řešení s tříbodovou aproximací derivace (7.18)



Obrázek 7.18: Absolutní chyba řešení při použití tříbodové aproximace derivace.

Zde je graf chyby řešení s pětibodovou aproximací derivace (7.19)

Pomocí Taylorovy řady je možné odvodit vzorec na výpočet derivace, avšak prakticky nejlépe použitelné jsou vzorce nízkého řádu a s rovnoměrným krokem. V případě nerovnoměrného kroku narůstá složitost výpočtu diferenčního vzorce. Navíc řešení využívající složité vzorce vyšších řádů konverguje pomaleji než řešení využívající vzorce nižších řádů.



Obrázek 7.19: Absolutní chyba řešení při použití pětibodové aproximace derivace.

7.4 Aposteriorní odhad chyby pro vlnovou rovnici

V této kapitole se budeme zabývat vlnovou rovnicí a využitím aposteriorního odhadu chyby pro zjemňování mřížky. Víme, že v této práci se zabýváme dvourozměrnými oblastmi, tudíž budeme řešit vlnovou rovnici funkce tří proměnných ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{7.5}$$

Pro jednoduchost budeme uvažovat oblast $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \times \langle 0,\infty)$ s dirichletovou okrajovou podmínkou

$$u(x,0,t) = u(x,1,t) = \sin \pi x \tag{7.6}$$

$$u(0,y,t) = u(1,y,t) = \sin \pi y \tag{7.7}$$

Pro jednoduchost budeme uvažovat následující počáteční podmínky

$$u(x,y,0) = \sin(\pi x)\sin(\pi y) \tag{7.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{7.9}$$

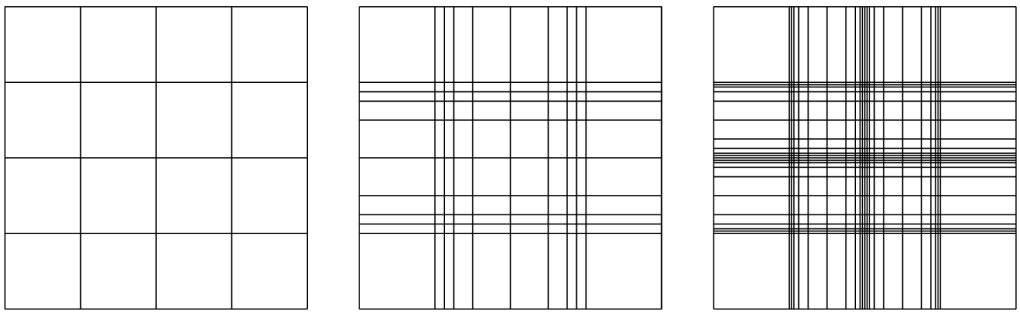
Prakticky tato rovnice popisuje vlnení pružné blány, kterou v čase $t = 0$ vychýlíme a pustíme.

Použijeme metodu přímek a vytvoříme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic, které budeme řešit Eulerovou metodou. Metoda aposteriorního odhadu je stále stejná a počítá se jako normalizovaný rozdíl dvou bilineárních funkcí.

Jelikož zde máme navíc časový rozměr, metoda byla upravena, aby uložila maximální aposteriorní odhad chyby v rámci řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic.

Protože očekáváme symetrickou funkci, provedeme zjemnění mřížky symetricky.

Tento výpočet je iterativní podobně jako v metodě použité pro výpočet Laplaceovy rovnice. Následuje několik triangulací použitých k výpočtu 7.20. Nejprve je zobrazena počáteční mřížka zobrazující 5×5 uzlu, postupně dochází v kritických místech k zjemňování mřížky.



Obrázek 7.20: Schéma mřížek použitých při řešení vlnové rovnice. Vlevo počáteční mřížka, vpravo koncová mřížka.

Kapitola 8

Závěr

Dnes existuje celá řada metod, kterými se dají řešit parciální diferenciální rovnice. Mezi základní metody patří *metoda Konečných diferencí* nebo *metoda Konečných prvků*, které jsou představeny v tomto textu. Společné těmto metodám je nahrazení spojitého prostoru diskrétním a z toho vyplývající nahrazení zadaného problému soustavou algebraických či obyčejných diferenciálních rovnic a jejich řešení konvenčními metodami. Vlastní přínos prezentovaný v této práci však leží mimo tyto metody a jedná se o odvození metody výpočtu gradientu na rovnoběžníkových sítích pomocí váženého průměru.

Metoda váženého průměrování není nová a používá se i v praxi. Varianta této metody představená v této práci, nazývaná *Superaproximace gradientu*, se od ostatních liší počtem rovnic, které je nutné řešit. Ostatní metody používají soustavy, kde je počet rovnic roven počtu vrcholů v okolí centrálního vrcholu, zatímco tato metoda má vždy právě tři rovnice. (Případně čtyři v případě trojúhelníkových sítí).

Metoda Superaproximace gradientu nachází uplatnění především v metodě aposteriorního odhadu chyby. Numerické metody se vždy nejakým způsobem snaží spojitý prostor diskretizovat na konečnou množinu vrcholu, ve kterých vypočítají přibližnou hodnotu řešení. Metoda diskretizace je klíčová. Nevhodné mřížky mohou způsobit velkou chybu řešení. Další problém je stanovení velikosti jednotlivých elementů. Na příliš řídkých mřížkách mají metody velkou chybu řešení. Naopak na příliš jemných mřížkách roste zaokrouhlovací chyba a zároveň je potřeba mnoho času pro vyřešení a celá soustava špatně konverguje.

Kompromisem je metoda aposteriorního odhadu chyby a řízené zjemňování mřížky. Pod pojmem *řízené zjemňování mřížky* rozumíme nahrazení vybraných oblastí s hrubou mřížkou a velkou chybou řešení jemnější mřížkou. Aposteriorní odhad chyby je zde použit právě pro identifikování problematických oblastí, ve kterých by bylo vhodné mřížku zjemnit.

Ve výsledku se jedná o iterativní výpočet začínající s hrubou mřížkou, na které získáme přibližné řešení velmi rychle. Postupně dochází k zjemňování mřížky v místech s velkou lokální chybou, a opakovanému řešení s použitím jemnější mřížky. Výhodou je rychlost a vyšší přesnost výpočtu narozdíl od srovnatelného rovnoměrného zjemnění.

V současnosti existují odvozené rovnice pro trojúhelníkové a rovnoběžníkové sítě. Další možná rozšíření se týkají odvození metody pro další typy elementů používaných v metodě konečných prvků, např. obecných čtyřúhelníků, případně některých dalších speciálních elementů. Metoda váženého průměru by se také mohla rozšířit do více než dvou rozměrů, protože většina praktických problémů je řešena v trojrozměrném prostoru.

Literatura

[1] Ainsworth, M.: A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis. 2000.

[2] Angot, A.: *Uľitá matematika pro elektrotechnické inľenýry.* Praha: SNTL, 1972.

[3] Babuška, I.: A posteriori error estimates for the finite element method. 1978.

[4] Babuška, I.: The Finite Element Method and Its Reliability. 2001.

[5] Barton, D.: *Taylor Series Methods for Ordinary Differential Equations, ISBN 369-390, 1971.* Academic Press, New York, 1971.

[6] Barton, D.: *On Taylor Series and Stiff Equations, ISBN 280-294,1980.* ACM Trans. on Mathematical Software, 1980.

[7] Barton, D.: *On Taylor Series and Stiff Equations*. 1980.

[8] Bartsch, H. J.: *Matematické vzorce, ISBN 80-204-0607-7.* Praha: Mladá fronta, 2000.

[9] Beckmann, P.: *Historie čísla pí, ISBN 80-200-0655-9.* Praha: Academia, 1998.

[10] Cowan, B.: *Solutions of Laplace's equation in 3d*. 1999.
URL
`<http://personal.rhul.ac.uk/UHAP/027/PH2130/PH2130_files/lapeq.pdf>`

[11] Dalík, J.: Matematika, numerické metody. 2008.

[12] Dalík, J.: Averaging of directional derivatives in vertices of nonobtuse regular triangulations. 2010.

[13] Dalík, J.: Approximations of the partial derivatives by averaging. 2012.

[14] Devlin, K.: *Problémy pro třetí tisíciletí, ISBN 80-7203-739-0.* Mladá fronta.

[15] Ernst Hairer, G. W.: *Solving Ordinary Differential Equations II, ISBN 3-540-60452-9.* Springers Verlag, 2002.

[16] Feynman, R.: *Feynmanovy přednášky z fyziky, ISBN 80-7200-420-4.* Fragment, 2001.

[17] Hairer, E.: *Solving Ordinary Differential equations I. nonstiff problems, ISBN 3-540-56670-8.* Springers Verlag, 1993.

[18] Herod, J.: Notes for Studies in Classical Linear Partial Differential Equations, [online 2003]. 2003.
URL `<http://people.math.gatech.edu/~herod/PDEText/PDEnotes.html>`

[19] Jia, Y.-B.: *Boundary-Value Problems*. 2002.
URL
<http://www.cs.iastate.edu/~cs577/handouts/ode-boundary-value.pdf>

[20] Kunovský, J.: *Modern Taylor Series Method, Habilitacní práce*. FEI-VUT Brno, 1994.

[21] Kunovský, J.: *Prednáška ADIUS*. 2000.

[22] Malý, J.: Matematika IV – Parciální diferenciální rovnice – zápisky z přednášek. 2008.

[23] Nave, C. R.: LaPlace's and Poisson's Equations, [online 2005]. 2005.
URL
<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/laplace.html>

[24] Rektorys, K.: *Přehled užité matematiky II, ISBN 80-85849-92-5*. Nakladatelství Prometheus, 1995.

[25] Sayas, F.-J.: *A gentle introduction to the Finite Element Method*. 2008.

[26] Sehnalová, P.: *Konvergence soustav algebraických rovnic*. FIT VUT Brno, 2007.

[27] Szántó, L.: *Maxwellovy rovnice, ISBN 80-7300-096-2*. Praha: BEN - technická literatura, 2003.

[28] Urroz, G.: *Numerical Solution of Laplace Equation*. 2004.
URL <http://ocw.usu.edu/Civil_and_Environmental_Engineering/Numerical_Methods_in_Civil_Engineering/LaplaceDirichletTemperature.pdf>

[29] Verfurth, R.: A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh Refinement Techniques. 1995.

[30] Škrášek, J.: *Základy aplikované matematiky II*. SNTL, 1986, str. 601.

[31] Šátek, V.: Analýza stiff soustav diferenciálních rovnic. 2012.

[32] Řezáč, D.: *Stiff Systems of Differential Equations and Modern Taylor Series Method, [online 2004]*. Dizertační práce, 2004.
URL <http://www.fit.vutbr.cz/research/view_pub.php?id=7611>

Publikace

1. Valenta V., *Moderní metody řešení eliptických parciálních diferenciálích rovnic*, ISBN 978-80-214-3868-2

2. Kunovský J., Šátek V., Valenta V., *Progresivní řešení parciálních diferenciálních rovnic*, ISBN 0-7803-8226-9

3. Valenta V., *Generátory náhodných čísel*, DSM Data Security Management. 2011, vol. 2011, no. 1, pp. 34-37. ISSN 1211-8737

4. Kunovský J., Sehnalová P., Valenta V., *Convergence of partial differential equations*, International Conference on Computer Modelling and Simulation. Brno, 2011, pp. 1-8

5. Dalík J., Valenta V., *Averaging of gradient in the space of linear triangular and bilinear rectangular finite elements*, Central European Journal of Mathematics. 2012, vol. 2012, no. 1, pp. 1-16. ISSN 1895-1074

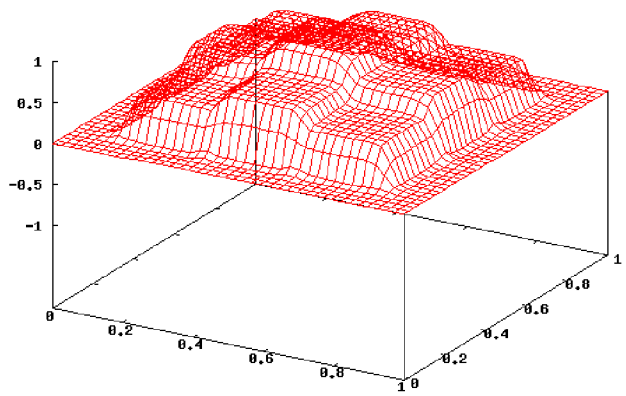
6. Valenta V., Šátek V., Kunovský J., Humená P., *Adaptive Solution of Laplace Equation*, Proceedings of the 11th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics. Rhodes: American Institute of Physics, 2013, pp. 2285-2288. ISBN 978-0-7354-1184-5. ISSN 0094243X

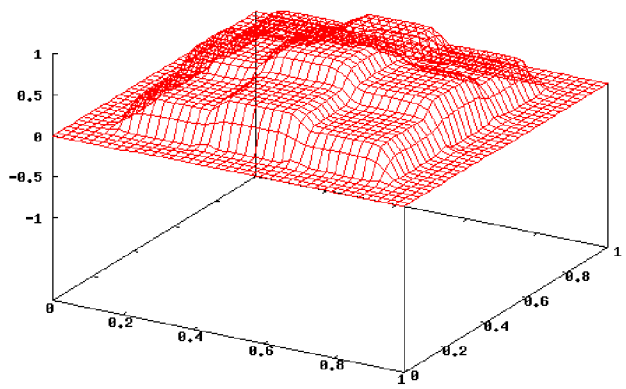
7. Kunovský J., Šátek V., Valdman J., Valenta V., *Construction of P1 Gradient from P0 Gradient by Averaging*, 12th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics. Rhodes, 2014, pp. 1-4

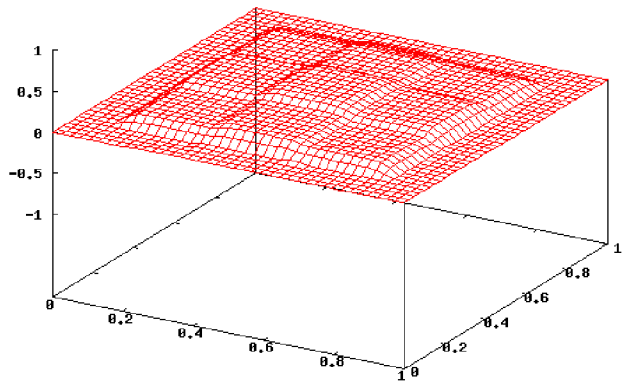
Příloha A

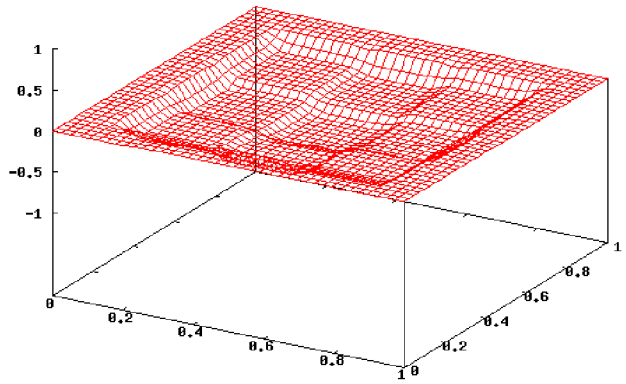
Řešení vlnové rovnice

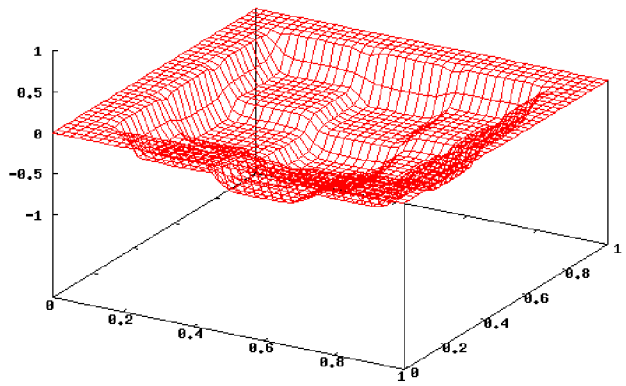
V této části bude zobrazeno několik obrázků, které vznikly pri řešení rovnice 7.5. Obrázky jsou s vygenerovány s časovým krokem $\frac{1}{30}$ sekundy.

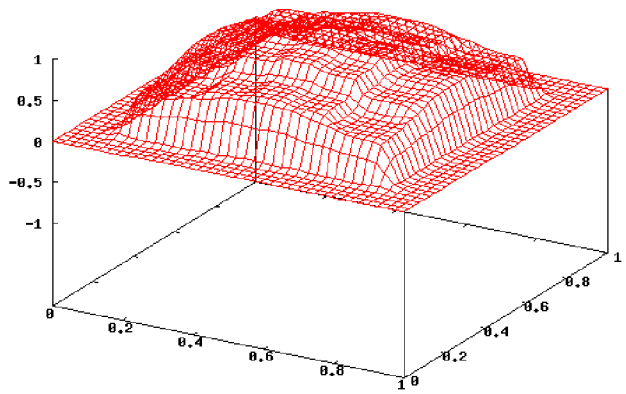


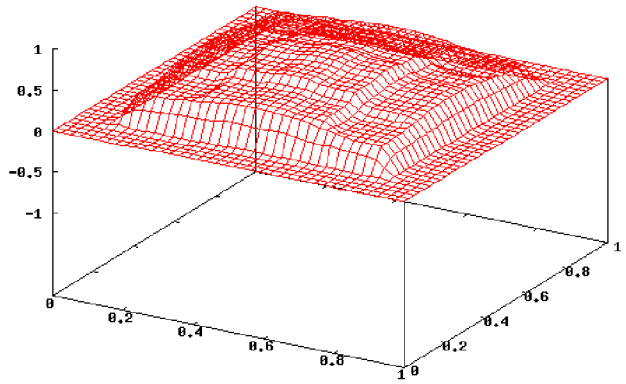


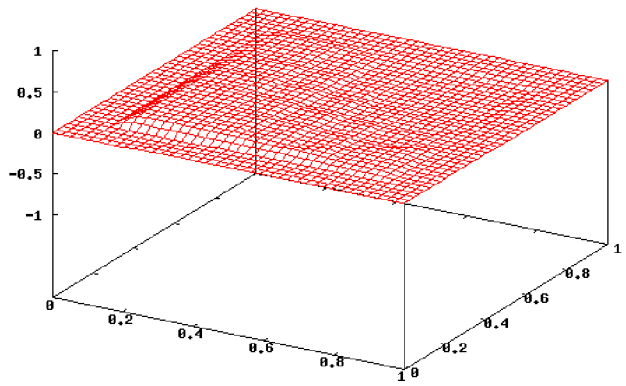

1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1