UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PŘIRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

Užití geometrických souřadnic při řešení úloh z analytické geometrie lineárních útvarů

Bakalářská práce

Autor: Marie Žvaková

Studijní obor: Fyzika - Matematika

Vedoucí práce: doc. RNDr. Marek Jukl, Ph.D.

Olomouc 2016

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením doc. RNDr. Marka Jukla, Ph.D. a za použití literatury uvedené v seznamu.

V Olomouci dne: Podpis autora:

Poděkování:

Ráda bych poděkovala svému vedoucímu práce doc. RNDr. Markovi Juklovi, Ph.D. za trpělivost, ochotu, vstřícnost a cenné rady.

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora: Marie Žvaková

Název práce: Užití geometrických souřadnic při řešení úloh z analytické geometrie lineárních útvarů

Typ práce: bakalářská

Pracoviště: Katedra algebry a geometrie PřF UP

Vedoucí práce: doc. RNDr. Marek Jukl, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2016

Počet stran: 49

Jazyk: český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname: Marie Žvaková

Title: Geometric coordinates in exercises on linear analytic geometry

Type of thesis: bachelor

Department: Department of Algebra and Geometry

Supervisor: doc. RNDr. Marek Jukl, Ph.D.

The year of presentation: 2016

Number of pages: 49

Language: czech

Obsah

Úvod

Tato práce pojednává o lineární kombinaci bodů. Nejprve si definuji co je to lineární kombinace bodů, za jakých podmínek existuje, jak ji využíváme, popř. zapisujeme.

Na jednoduchých příkladech aplikuji daná teoretická východiska. Uvádím nejenom příklady, ale i jejich řešení, včetně obrázků. Díky těmto názorným ukázkám by mělo být s využitím této bakalářské práce pro každého studenta snadné si danou problematiku představit, učivu porozumět a následně procvičit.

Nejprve uvádím příklady, pro které je použití lineární kombinace bodů výhodné. Následují příklady s aplikací teorie na vzájemné polohy podprostorů, vyjádření polorovin, poloprostorů, počítání obsahů a objemů mnohoúhelníků, konvexních a nekonvexních množin.

K ověření vědomostí slouží soubor obdobných neřešených příkladů s výsledky uvedenými na konci práce.

Lineární kombinace bodů se v našem životě používá, aniž bychom si toho všimli. Například GPS systém je založen na lineární kombinaci družic a RGB barvení na lineární kombinaci tří základních barev.

Teoretická část

Co vás napadne pod slovem lineární kombinace? Tento pojem by nám měl již být znám v souvislosti s vektory. Vždyť vektor *u* lze vyjádřit pomocí například součtu dvojnásobku vektoru a a trojnásobku vektoru b.

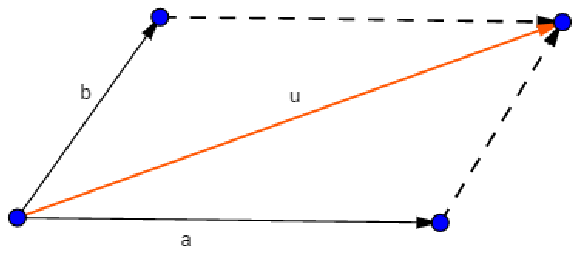
$$u = 2a + 3b$$

Kdyby vektory a, b měly v libovolné bázi souřadnice $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, pak souřadnice (u_1, u_2) výsledného vektoru *u* můžeme zapsat:

$$u_1 = 2a_1 + 3b_1$$

$$u_2 = 2a_2 + 3b_2$$

Grafická představa:



Pohybujeme-li se ve více dimenzích, vektory by měly pouze více souřadnic. Obecně tedy platí, že máme-li libovolnou lineární kombinaci souřadnic vektorů a, b v libovolné bázi, získáme souřanice vektoru *u* v dané bázi. Můžeme najít analogii postupu pro body z afinního prostoru?

Jaké by bylo grafické řešení tohoto zápisu?

$$U = A + B$$

Jestliže bychom zvolili body A, B různé a bod A by byl počátkem soustavy souřadné v některé bázi, pak $U = B$. V jiné bázi, kde by byl počátkem bod B, by platilo $U = A$. Z toho vyplývá, že $U = A = B$ což je spor s předpokladem, že body A a B jsou různé. Je tedy zřejmé, že na rozdíl od vektorů lineární kombinace bodů nebude vždy definována.

Znáte nějaký příklad, kdy lineární kombinaci intuitivně využíváte? Co střed dvojice bodů?

$$S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$$

$$(s_1, s_2) = \frac{1}{2}(a_1, a_2) + \frac{1}{2}(b_1, b_2)$$

Bude-li P libovolný bod (např. počátek) soustavy souřadné, můžeme střed S zavést i tímto způsobem:

$$S = P + \frac{1}{2}(A - P) + \frac{1}{2}(B - P)$$

Rozepíšeme-li rovnost, je zřejmá nezávislost na volbě bodu P, tedy na volbě báze.

$$S = P + \frac{1}{2}(A - P) + \frac{1}{2}(B - P) = A + \frac{1}{2}(B - A)$$

Také rozdílem dvou bodů dostáváme vektor, který je nezávislý na volbě báze:

$$u = X - Y$$

$$(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

Daný zápis bychom mohli zapsat:

$$u = X + (-Y)$$

Pozměníme-li zápis:

$$u = X + Y$$

Vektor u již není definován. Kdyby bod X byl počátkem v dané bázi, bod Y by se rovnal vektoru u, což nelze.

Jak můžeme tedy korektně zavést lineární kombinaci bodů?
Mějme body $L_1, L_2, L_3, \dots L_k \in A_n$ a skaláry $c_1, c_2, c_3, \dots c_k \in \boldsymbol{T}$. Zvolme bod $P \in A_n$.
Sestrojíme-li libovolný bod L:

$$L = P + c_1(L_1 - P) + c_2(L_2 - P) + c_3(L_3 - P) + \cdots + c_k(L_k - P),$$

a hledejme, kdy nebude bod L závislý na volbě bodu P. Což nastane, jestliže pro libovolný bod $K \neq P$ bude platit, že $L = T$, kde $T = K + c_1(L_1 - K) + c_2(L_2 - K) + c_3(L_3 - K) + \cdots + c_k(L_k - K)$.

$$\mathrm{P} + c_1(L_1 - P) + c_2(L_2 - P) + c_3(L_3 - P) + \ \dots + c_k(L_k - P)$$
$$= K + c_1(L_1 - K) + c_2(L_2 - K) + c_3(L_3 - K) + \cdots + c_k(L_k - K)$$

$$P - K + c_1((L_1 - P) - (L_1 - K))$$
$$+ c_2((L_2 - P) - (L_2 - K)) + c_3\big((L_3 - P) - + c_3(L_3 - K)\big) + \ \dots$$
$$+ c_k\big((L_k - P) - (L_k - K)\big) = \mathrm{L} - \mathrm{T}$$

Můžeme také zapsat:

$$(c_1 + c_2 + \cdots + c_k - 1)(K - P) = o.$$

Aby tato rovnost platila, součet koeficientů $c_1 + c_2 + \cdots + c_k$ se musí rovnat 1 a bod L bude nezávislý na volbě bodu P. Dostaneme tak lineární kombinaci bodů $L_1, L_2, L_3, \dots, L_k$, kterou označujeme symbolem

$$L = c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3 + \dots + c_kL_k$$

kde $\{c_1, c_2, c_3, \dots, c_k\}$ jsou koeficienty bodu L lineární kombinace bodů $L_1, L_2, L_3, \dots, L_k$.

Analogicky odvodíme, kdy vektor $u \in V$ bude nezávislý na volbě bodu P.

$$u = c_1(L_1 - P) + c_2(L_2 - P) + c_3(L_3 - P) + \ \dots \ + c_k(L_k - P)$$

Vektor u bude nezávislý na bodě P, jestliže pro libovolný bod $K \neq P$ bude platit, že $u = v$, jestliže: $v = c_1(L_1 - K) + c_2(L_2 - K) + c_3(L_3 - K) + \cdots + c_k(L_k - K)$.

$$c_1(L_1 - P) + c_2(L_2 - P) + c_3(L_3 - P) + \ \dots + c_k(L_k - P)$$
$$= \big(c_1(L_1 - K) + c_2(L_2 - K) + c_3(L_3 - K) + \cdots + c_k(L_k - K)\big)$$

$$c_1((L_1 - P) - (L_1 - K))$$
$$+ c_2((L_2 - P) - (L_2 - K)) + c_3\big((L_3 - P) - + c_3(L_3 - K)\big) + \ \dots$$
$$+ c_k\big((L_k - P) - (L_k - K)\big) = u - v$$

$$(c_1 + c_2 + \cdots + c_k)(K - P) = o$$

Aby platila rovnost, musí se součet skalárů $c_1 + c_2 + c_3 + \ ... \ + c_k$ rovnat 0 a vektor u bude nezávislý na volbě bodu P. Dostaneme tak lineární kombinaci bodů $L_1, L_2, L_3, \dots, L_k$, kterou označujeme symbolem

$$u = c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3 + \dots + c_kL_k$$

kde $\{c_1, c_2, c_3, \dots, c_k\}$ jsou koeficienty lineární kombinace vektoru u.

Všimněme si, že vyjádření pomoci lineární kombinace bodů bodu a vektoru jsou tatáž. Proto věnujme pozornost koeficientům a jejich součtu!

<u>Definice 1:</u>

Mějme body $P, L_1, L_2, L_3, \dots L_k \in A_n$ a skaláry $c_1, c_2, c_3, \dots c_k \in \boldsymbol{T}$.

Je-li součet čísel $c_1 + c_2 + c_3 + \ ... \ + c_k = 1$ nazveme bod

$$\mathrm{P} + c_1(L_1 - P) + c_2(L_2 - P) + c_3(L_3 - P) + \ ... \ + c_k(L_k - P)$$

lineární kombinací bodů $L_1, L_2, L_3, \dots L_k$, s koeficienty $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ a vyjadřujeme jej

$$c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3 + \dots + c_kL_k.$$

Analogicky nadefinujeme vektor.

<u>Definice 2:</u>

Mějme body $P, L_1, L_2, L_3, \dots L_k \in A_n$ a skaláry $c_1, c_2, c_3, \dots c_k \in \boldsymbol{T}$.

Je-li součet čísel $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_k = 0$ nazveme vektor

$$c_1(L_1 - P) + c_2(L_2 - P) + c_3(L_3 - P) + \cdots + c_k(L_k - P)$$

lineární kombinací bodů $L_1, L_2, L_3, \dots, L_k$ s koeficienty $c_1, c_2, c_3, \dots c_k$ a vyjadřujeme jej

$c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3 + \dots + c_kL_k$.

Jak budou vypadat souřadnice bodu, resp. vektoru?

Předpokládejme, že máme dánu afinní bázi $< P; f_1, f_2, f_3, \dots f_n >$ a body $L_1, L_2, L_3, \dots L_k \in A_n$ máme dány v lineární soustavě souřadnic:

$$L_1 = [l_{11}, l_{12}, \dots , l_{1n}]$$
$$L_2 = [l_{21}, l_{22}, \dots , l_{2n}]$$
$$\vdots$$
$$L_k = [l_{k1}, l_{k2}, \dots , l_{kn}]$$

Mějme dán součet koeficientů pro bod 1 a vektor 0. Snažme se určit souřadnice bodu, resp. vektoru $c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3 + \dots + c_kL_k$. Označme hledané souřadnice $s_1, \dots , s_n$. Jelikož bod P je počátek afinní báze, budou jeho souřadnice $[0, 0, \dots , 0]$. Pak pro jednotlivé rozdíly bodů a počátku platí: $L_i - P = (l_{i1}, l_{i2}, l_{i3}, \dots, l_{in})$, pro všechna $i = (1, \dots, k)$. Tedy libovolná m-tá souřadnice bodu, resp. vektoru bude ve tvaru:

$$s_m = c_1 l_{1m} + c_2 l_{2m} + c_3 l_{3m} + \dots + c_k l_{km}, \quad m = 1, \dots, n$$

V dalším textu budeme předpokládat, že symbol $c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3 + \dots + c_kL_k$ je definován, tedy součet koeficientů nabývá vždy přípustné hodnoty $\{0, 1\}$.

Věta 1:

Buď C libovolná báze afinního prostoru. Je-li $U = [u_1, u_2, \dots, u_n]_C$, resp. $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]_{C_0}$, lineární kombinací bodů $L_1, L_2, L_3, \dots L_k \in A_n$, přičemž $L_m = [l_{m1}, l_{m2}, \dots, l_{mn}]_C$ pro všechna $m = 1, \dots, n$. Pro m-tou souřadnici bodu U, resp. vektoru u, platí:

$$u_m = \sum_{j=1}^{k} c_j l_{jm}.$$

Věta 2:

Mějme body $W, X, Y, Z \in A$, a čísla $a, b, c, d, e, f \in \boldsymbol{R}$. Nechť je splněn jeden z předpokladů:

1) $a + b = 1, \quad c + d = 1, \quad e + f = 1$

2) $a + b = 1, \quad c + d = 1, \quad e + f = 0$

3) $a + b = 0, \quad c + d = 0.$

Potom platí:

$$e(aW + bX) + f(cY + dZ) = eaW + ebX + fcY + fdZ.$$

Důkaz:

Stačí ověřit, že lineární kombinace na pravé straně rovnosti je definována, a že na levé straně je stejný objekt (tedy bod, nebo vektor), jako na pravé straně. Postačující podmínkou pro tuto rovnost je rovnost jejich souřadnic v některé (pak ale zároveň ve všech) bázi.

Stejným způsobem bychom postupovali, kdybychom měli více bodů. Ale to už zde uvádět nebudeme.

Věta 3:

Nechť máme libovolný konečný počet bodů $L_1, L_2, L_3, \ldots L_k \in A$, skaláry $c_1, c_2, c_3, \ldots c_k \in \boldsymbol{T}$, které mají tu vlastnost, že jejich součet $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_k = 0$, tedy

$$c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3 + \ldots + c_kL_k = u.$$

Pak je-li $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_m = 0$ pro $m \in \boldsymbol{N}$ a zároveň $1 \leq m \leq k$ je

$$c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3 + \ldots + c_mL_m = u - (c_{m+1}L_{m+1} + \ldots + c_kL_k).$$

Je-li ale $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_m = d$ kde $d \neq 0$, pak platí:

$$\frac{c_1}{d}L_1 + \frac{c_2}{d}L_2 + \frac{c_3}{d}L_3 + \cdots + \frac{c_m}{d}L_m = \frac{1}{d}u - \left(\frac{c_{m+1}}{d}L_{m+1} + \cdots + \frac{c_k}{d}L_k\right).$$

Věta 4:

Nechť máme libovolný konečný počet bodů $L_1, L_2, L_3, \dots L_k \in A$, skaláry $c_1, c_2, c_3, \dots c_k \in \boldsymbol{T}$, které mají tu vlastnost, že jejich součet $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_k = 1$, tedy

$$c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3 + \dots + c_kL_k = U.$$

Pak je-li $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_m = 0$ pro $m \in \boldsymbol{N}$ a zároveň $1 \leq m \leq k$ je

$$c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3 + \dots + c_mL_m = U - (c_{m+1}L_{m+1} + \dots + c_kL_k).$$

Je-li ale $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_m = d$ kde $d \neq 0$, pak platí:

$$\frac{c_1}{d}L_1 + \frac{c_2}{d}L_2 + \frac{c_3}{d}L_3 + \cdots + \frac{c_m}{d}L_m = \frac{1}{d}U - \left(\frac{c_{m+1}}{d}L_{m+1} + \cdots + \frac{c_k}{d}L_k\right).$$

Důkaz:

Stejným způsobem jak v důkaze věty 2 stačí ověřit, zda se na obou stranách jedná o objekty téhož druhu a že mají stejné souřadnice.

Zavedeme lineární závislost, popřípadě nezávislost bodů.

Definice 3:

Řekneme, že body $L_1, L_2, L_3, \dots L_k \in A_n$ jsou **lineárně nezávislé**, jestliže $c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3 + \dots + c_mL_m = o$ pak $c_i = 0,$ pro $i = 1, \dots, m.$ Nejsou-li body lineárně nezávislé, jsou **lineárně závislé**.

Z předešlé definice vidíme, že lineární závislost bodů je naprosto analogická s lineární závislosti vektorů.

Platí-li, že vektory $L_2 - L_1, \dots, L_k - L_1$ budou lineárně nezávislé, pak i body $L_1, L_2, L_3, \dots L_k$ jsou lineárně nezávislé a naopak určují-li podprostor dimenze $k - 1$, pak musejí být lineárně nezávislé.

Věta 5:

Mějme lineárně nezávislé body $L_1, L_2, L_3, \dots L_k \in A_n$ a libovolný podprostor $A_{k-1} \subseteq\subseteq A_n$. Pak bod ***X* náleží podprostoru $\boldsymbol{A_{k-1}}$** právě tehdy, jestliže existují čísla $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_k \in \boldsymbol{T}$ tak, že:

$$X = c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3 + \dots + c_kL_k.$$

Věta 6:

Buď podprostor A_{k-1} určen lineárně nezávislými body $L_1, L_2, L_3, \dots L_k \in A_n$ a nechť V_{k-1} je jeho zaměření. Vektor ***s* náleží podprostoru $\boldsymbol{V_{k-1}}$**, právě tehdy existují-li koeficienty $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k \in \boldsymbol{T}$, pro které platí:

$$s = c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3 + \dots + c_kL_k.$$

Definice 4:

Body $L_1, L_2, L_3, \dots L_k$ z vět 5, 6 se nazývají **geometrická báze afinního podprostoru** A_{k-1}. Skaláry $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$ se nazývají **geometrické** (barycentrické) **souřadnice** bodu X, resp. vektoru s, vzhledem ke geometrické bázi $< L_1, L_2, L_3, \dots L_k >$.

Simplex

Definice 5:

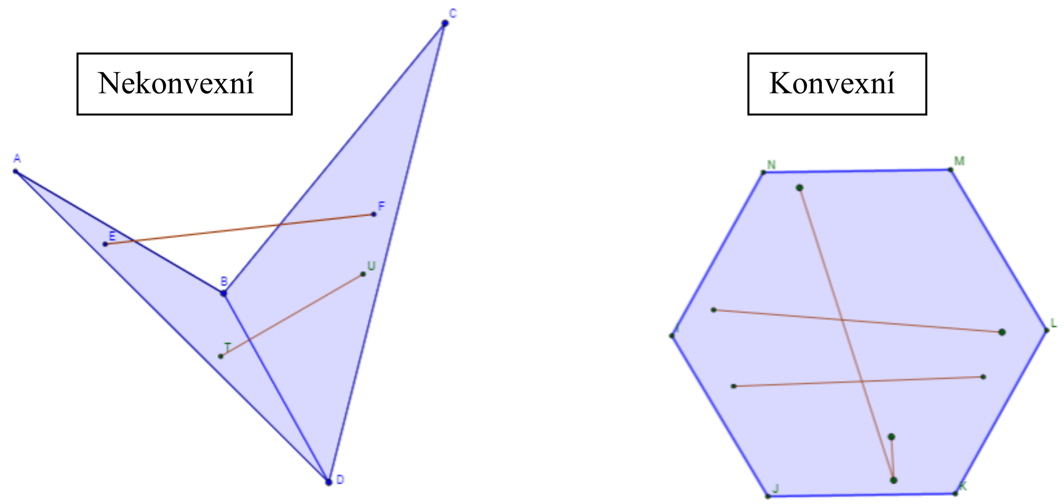
Mějme lineárně nezávislé body $L_1, L_2, L_3, \dots L_k \in A_n$. Pak **otevřeným *k-1* rozměrným simplexem** nazveme množinu $K(L_1, L_2, L_3, \dots L_k)$ pro kterou platí:

$K(L_1, L_2, L_3, \dots L_k) = \{X \in A_n : X = c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3 + \dots + c_kL_k;\ c_i > 0, 1 \le i \le k\}$.

Uzavřeným *k-1* rozměrným simplexem nazveme tutéž množinu, pro kterou ale platí $c_i \ge 0$ a budeme ji značit $\overline{K}(L_1, L_2, L_3, \dots L_k)$.

Co je konvexní množina?

Konvexní množina je množina bodů, v které když spojíme dva libovolné body, tak všechny body na dané úsečce náleží množině. Názorně:



V prvním případě lze najít dva body, na jejichž spojnici leží body, které neleží v předem dané množině. Proto se jedná o nekonvexní množinu. V druhém obrázku spojíme-li jakékoli dva body, vždy budou body úsečky náležet množině. Proto je množina konvexní.

Vynecháme-li požadavek lineární nezávislosti bodů, dostáváme konvexní obal množiny bodů, což je nejmenší konvexní množina obsahující dané body. Jednoduše tuto množinu můžeme získat sjednocením simplexů.

Jak vypadá poloprostor interpretován lineární kombinací bodů?

Věta 7:

Mějme lineárně nezávislé body $L_1, L_2, L_3, \dots L_{n+1}$ v A_n. Pak **poloprostor** určený nadrovinou $L_1, L_2, L_3, \dots L_n$ a bodem L_{n+1} je roven

$$\{X \in A_n : X = c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3 + \dots + c_{n+1}L_{n+1};\ \ c_{n+1} > 0\}.$$

Uzavřený poloprostor:

$$\{X \in A_n : X = c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3 + \dots + c_{n+1}L_{n+1};\ \ c_{n+1} \geq 0\}$$

Věta 8:

Mějme lineárně nezávislé body L_1, L_2, L_3, …, L_k v A_n. Jestliže N_j , $1 \leq j \leq k$, označíme-li nadrovinu určenou body $\{L_1, L_2, L_3, \dots, L_k\}/\{L_j\}$ symbolem $N_j(B_j)$, pak musí platit: $K(L_1, L_2, L_3, \dots L_k) = \bigcap_{1 \leq j \leq k} N_j(B_j)$.

Uzavřeným simplexem v afinních prostorech dim 1 je úsečka, dim 2 trojúhelník a dim 3 čtyřstěn.

Jestliže bychom měli v A_2 lineární kombinaci bodů L_1, L_2, L_3, ... L_k , pak konvexní obal této množiny nazýváme konvexní mnohoúhelník. V A_n by tato lineární kombinace byla konvexním mnohostěnem.

Řešené úlohy

1. **Jsou tyto lineární kombinace bodů definovány?**
   a) $K = 2L + M - 3N - O + 2P$
   b) $K - 2L = M - 3N - O + 2P$
   c) $3K + S = 2L - 3N + M$
   d) $2O - 3P + Q = 2K - L - M$
   e) $u = -3A + B + C + D$
   f) $u = 3\left(-A + \frac{1}{3}B\right) + (C + D)$
   g) $u = \left(-A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}D\right)$
   h) $u + 3A = B + C + D$
   i) $u - (2A - 2B) = \left(-\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D\right)$
   j) $A = B + C - D$
   k) $A - B = C - D$
   l) $A - (B + C) = -D$

Řešení:

Vždy sečteme koeficienty na obou stranách rovnice. Máme-li některý výraz v závorkách, musí i on být definován. Jestliže tedy na obou stranách rovnice máme součet koeficientů 1, nebo 0 a totéž platí pro oddělené výrazy, pak je tato lineární kombinace definována. Pozor! Na pravé a levé straně rovnice musí být vždy **tentýž** součet (buď 0, nebo 1).

a)
Na levé straně máme bod. Součet koeficientů je 1.
Na pravé straně rovnice máme součet koeficientů $2 + 1 - 3 - 1 + 2 = 1$. Což je také dle definice bod.
$1 = 1$ tedy tato lineární kombinace je definována.
b)
L: $1 - 2 = -1$ pro tento součet není definována lineární kombinace. Proto druhou stranu rovnice nemusíme vyšetřovat.
c)
L: $3 + 1 = 4$

P: $1-3+1=0$

L≠P Lineární kombinace není definována.

d)

L: $2-3+1=0$ Výraz je dle definice vektor.

P: $2-1-1=0$ Výraz je dle definice vektor.

L=P Lineární kombinace je definována.

e)

L: 0 Výraz je dle definice vektor.

P: $-3+1+1+1=0$ Výraz je dle definice vektor.

L=P Lineární kombinace je definována.

f)

L: vektor

P: 1. závorka $\left(-1+\frac{1}{3}\right)= -\frac{2}{3}$ Výraz není definován, proto celý výraz nebude definován.

g)

L: 0 …vektor

P: $\left(-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=0$ …vektor

L= P Lineární kombinace je definována.

h)

L: $1+1+1=3$ Výraz není definován.

i)

L: $(2-2)=0$ Kombinace bodů v závorce je vektor. Odečteme-li od vektoru vektor, dostáváme vektor.

P: $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=0$ Výraz je dle definice vektor.

Na obou stranách rovnice máme vektory. Lineární kombinace bodů je definována.

j)

L: 1 Výraz je dle definice bod.

P: $1+1-1=1$ Výraz je dle definice bod.

L=P Lineární kombinace je definována.

k)

L: $1-1=0$ Výraz je dle definice vektor.

P: $1-1=0$ Výraz je dle definice vektor.

L=P Lineární kombinace je definována.

l)

L: $1 + 1 = 2$ Výraz v závorce není definován.

P: -1 Také není definován.

Lineární kombinace není definována.

2. Napište obecný vztah pro výpočet těžiště trojúhelníku pomocí lineární kombinace bodů. A poté odvoďte obecný vztah pro výpočet těžiště mnohoúhelníku.

Řešení:

Nejprve potřebujeme průsečík těžnic, což jsou spojnice středů stran a protilehlých vrcholů. Zvolíme si bázi $C = \langle A; B - A, C - A \rangle$ ve které mají body *A*, *B*, *C* souřadnice $A = [0,0], B = [1,0], C = [0,1]$. Střed strany AB označme S_1 a jeho souřadnice budou $S_1 = \left[\frac{1}{2}, 0\right]$. Střed *AC* označme $S_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

$CS_1: x_1 = \frac{1}{2}m; x_2 = 1 - m$

$CS_2: x_1 = 1 - n; x_2 = \frac{1}{2}n$

Vyřešením dvou rovnic o dvou neznámých zjistíme, že průsečíkem je bod $T = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

Těžiště vyjádřené pomocí lineární kombinace bude ve tvaru:

$T = c_1A + c_2B + c_3C,$

kde $c_1 + c_2 + c_3 = 1$

$$\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] = c_1[0,0] + c_2[1,0] + c_3[0,1]$$

Řešením soustavy rovnic je: $c_2 = \frac{1}{3};\ c_3 = \frac{1}{3};\ c_1 = v.$

Jelikož víme, že součet koeficientů musí být jedna: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + v = 1;\ \ v = \frac{1}{3}$.

Obecný vztah pro těžiště trojúhelníku: $T = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C.$

Kdybychom počítali těžiště čtyř lineárně nezávislých bodů *A*,*B*,*C*,*D*, došli bychom k závěru: $T = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}D$. V libovolné bázi prostoru A_n libovolné dimenze n-1, bude T těžiště n lineárně nezávislých bodů: $T = \frac{1}{n}A_1 + \frac{1}{n}A_2 + \cdots + \frac{1}{n}A_n$.

3. **Najděte těžiště mnohoúhelníku ABCDE v $\boldsymbol{\varepsilon_4}$:** $\boldsymbol{A = [0, 0, 0, 0]}$; $\boldsymbol{B = [1, 0, 3, 3]}$; $\boldsymbol{C = [3, 2, 4, 2]}$; $\boldsymbol{D = [-4, 1, -2, 1]}$; $\boldsymbol{E = [0, 1, 0, 0]}$.

Řešení:

Z úlohy 2 vyplývá obecný vztah těžiště pro libovolný počet bodů:

$T = \frac{1}{s}A + \frac{1}{s}B + \frac{1}{s}C + \cdots + \frac{1}{s}J$; kde s je počet bodů z nichž vycházíme.

$$T = [t_1, t_2, t_3, t_4] = \frac{1}{5}[0,0,0,0] + \frac{1}{5}[1, 0, 3, 3] + \frac{1}{5}[3, 2, 4, 2] + \frac{1}{5}[-4, 1, -2,1] + \frac{1}{5}[0, 1, 0, 0]$$

$$t_1 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} - \frac{4}{5} = 0$$

$$t_2 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$t_3 = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{-2}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$$t_4 = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

$$T = \left[0, \frac{4}{5}, 1, \frac{6}{5}\right]$$

4. **Rozhodněte, zda jsou body lineárně závislé:** $\boldsymbol{K = [1; 1; 1], L = [1; 2; 1], M = [1; 2; 2]}$.

Řešení:

$$aK + bL + cM = o$$

$$a[1; 1; 1] + b[1; 2; 1] + c[1; 2; 2] = [0; 0; 0]$$

$$a + b + c = 0$$

$$a + 2b + c = 0$$

$$a + 2b + 2c = 0$$

Možné je také řešit složitější rovnice pomocí matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jediným řešením soustavy rovnic je $a = 0; b = 0; c = 0$. Body K, L, M jsou tedy lineárně nezávislé.

Dalším možným způsobem řešení je zjištění závislosti vektorů:

$$u = L - K = (0; 1; 0)$$

$$v = M - K = (0; 1; 1)$$

Vektory u a $v$jsou lineárně nezávislé, tedy body K, L, M také.

5. **Mějme trojúhelník $\boldsymbol{ABC}$ zadán souřadnicemi: $\boldsymbol{A} = [\mathbf{2}; \mathbf{2}], \boldsymbol{B} = [\mathbf{10}; \mathbf{4}], \boldsymbol{C} = [\mathbf{4}; \mathbf{8}]$. Rozhodněte o poloze bodů $\boldsymbol{D} = [\mathbf{3}; \mathbf{5}], \boldsymbol{E} = [\mathbf{5}; \mathbf{5}], \boldsymbol{F} = [\mathbf{6}; \mathbf{1}]$ vůči trojúhelníku $\boldsymbol{ABC}$.**

Řešení:

Obecně platí:

X leží uvnitř $\Delta ABC \;\Leftrightarrow X = aA + bB + cC;\; a, b, c > 0$

X náleží rovině ΔABC, ale nenáleží $\Delta ABC \;\Leftrightarrow X = aA + bB + cC;\; a < 0 \,\vee\, b < 0 \,\vee\, c < 0$

X náleží jedné ze stran $\Delta ABC \;\Leftrightarrow X = aA + bB + cC;\; a = 0 \,\vee\, b = 0 \,\vee\, c = 0$

$$X = a[2; 2] + b[10; 4] + c[4; 8];\; X[x, y]$$

$$x = 2a + 2b + 4c$$
$$y = 2a + 4b + 8c$$
$$1 = a + b + c$$

Zjišťujeme, v jakém vztahu je bod *X* (v našem případě body *D*, *E*, *F*) k ΔABC.

Dosadíme-li za bod *X* náš bod *D*:

$$3 = 2a + 2b + 4c$$
$$5 = 2a + 4b + 8c$$
$$1 = a + b + c.$$

Řešením soustavy tří rovnic o třech neznámých je: $a = \frac{1}{2}; b = 0; c = \frac{1}{2}$. Jelikož je jeden koeficient roven nule, bod *D* bude náležet ΔABC, a to jedné z jeho stran.

Obdobně můžeme za neznámý bod $X = [x, y]$ dosadit bod *E* a *F*, u kterých nám koeficienty lineární kombinace vyjdou $E = [5; 5]$: $a = \frac{37}{34}; b = \frac{18}{34}; c = -\frac{21}{34}$ a pro bod $F = [6; 1]$: $a = \frac{23}{36}; b = -\frac{55}{36}; c = -\frac{7}{6}$.

Dle výše uvedených vztahů můžeme říci, že body *E* a *F* nenáleží trojúhelníku *ABC*, protože mají záporné koeficienty.

6. **Pomocí výpočtu zjistěte, zda body *S, T, U* leží v konvexním úhlu *AVB*, na jeho ramenech, nebo vně.** $\boldsymbol{S = [5; 0]; T = [3; 2]; U = [1; 2]; V = [3; 2]; A = [4; 0]; B = [5; 3]}$

Řešení:

X náleží úhlu $AVB \Leftrightarrow X = vV + aA + bB;\ a, b \geq 0$

$$S = v[3; 2] + a[4; 0] + b[5; 3];\ X[5,0]$$
$$1 = a + b + v$$
$$5 = 3v + 4a + 5b$$
$$0 = 2v + 3b$$
$$1 = a + b + v$$

Vyřešením rovnic dostáváme pro bod $S = [5; 0]$: $v = -\frac{3}{5}; a = \frac{6}{5}; b = \frac{2}{5}$. Koeficienty *a*, *b* jsou kladné, tedy bod *S* leží v konvexním úhlu *AVB*.

Dosadíme-li na levé strany rovnic souřadnice bodu $T = [3; 2]$: $v = 1; a = 0; b = 0$. Bod T náleží rameni úhlu *AVB*, protože koeficienty *a*, *b* jsou nulové. Obdobně budeme počítat s bodem $U = [1; 2]$: $v =\ v = \frac{11}{5};\ a = -\frac{7}{5}; b = -\frac{4}{5}$. Bod U leží mimo konvexní úhel *AVB*.

7. **a) Stanovte dimenzi nejmenšího podprostoru $\boldsymbol{\alpha}$, který obsahuje body *A, B, C:*** $\boldsymbol{A = [2; -1; 1], B = [5; 2; -3], C = [1; 0; 2]}$.

b) Náleží podprostoru $\boldsymbol{\alpha}$ bod $\boldsymbol{D} = [\mathbf{3}; \mathbf{2}; \mathbf{5}]$?

c) Jestliže máme poloprostor určený podprostorem $\boldsymbol{\alpha}$ a bodem *D*, leží v něm body $\boldsymbol{E} = [\mathbf{0}; \mathbf{0}; \mathbf{0}]$ a $\boldsymbol{F} = [\mathbf{4}; \mathbf{2}; \mathbf{1}]$?

Řešení:

a) Zjistíme, zda jsou body A, B, C lineárně nezávislé. Musí platit:

$aA + bB + cC = 0 \Rightarrow a = b = c = 0.$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Matice má hodnost tři, tedy body jsou lineárně nezávislé. Určují tedy rovinu.

b) Náleží bod $D = [3; 2; 5]$ rovině? Jednotlivé souřadnice jsou označeny např. $A = [a_1;\ a_2;\ a_3]$.

Musí platit:

$$D = aA + bB + cC;\ a + b + c = 1$$
$$d_1 = a_1 a + b_1 b + c_1 c$$
$$d_2 = a_2 a + b_2 b + c_2 c$$
$$\underline{d_3 = a_3 a + b_3 b + c_3 c}$$
$$3 = 2a + 5b + c$$
$$2 = -a + 2b$$
$$5 = a - 3b + 2c$$
$$\underline{1 = a + b + c}$$

Tato soustava nemá řešení, proto bod *D* nenáleží rovině.

c) Máme poloprostor určený rovinou a bodem *D*. Body *E* a *F* mohou náležet poloprostoru, hraniční rovině, nebo poloprostoru opačnému.

Obecně platí, že libovolný bod X náleží danému poloprostoru $\overrightarrow{ABCD}$ určenému rovinou ABC a bodem D:

$$\{X = \mathrm{aA} + \mathrm{bB} + \mathrm{cC} + \mathrm{dD};\ \ d > 0\}.$$

Libovolný bod X náleží hraniční rovině, jestliže platí:

$$\{X = \mathrm{aA} + \mathrm{bB} + \mathrm{cC} + \mathrm{dD};\ \ d = 0\}.$$

Jestliže poslední koeficient d bude záporný, bod X bude náležet opačnému poloprostoru.

Sestavíme si soustavu rovnic pro hledanou pozici bodu E:

$$0 = 2a + 5b + c + 3d$$
$$0 = -1a + 2b + 2d$$
$$0 = a - 3b + 2c + 5d$$
$$\underline{1 = a + b + c + d}$$

Vyjádříme si jednu z neznámých např.: $a = 1 - b - c - d$. Doplníme do zbylých rovnic za neznámou a a máme tři rovnice o třech neznámých. Sečtením rovnic je vyřešíme. Soustředíme se na hodnotu koeficientu *d*, jehož hodnota rozhoduje o poloze bodu. Koeficient *d* vyjde záporný, proto bod $E = [0; 0; 0]$ nenáleží danému poloprostoru. Leží tedy v opačném poloprostoru.

Při řešení polohy bodu $F = [4; 2; 1]$ vzhledem k poloprostoru budeme postupovat obdobně. Sestavíme si soustavu rovnic:

$$4 = 2a + 5b + c + 3d$$
$$2 = -1a + 2b + 2d$$
$$1 = a - 3b + 2c + 5d$$
$$\underline{1 = a + b + c + d}$$

Řešením bude kladný koeficient *d*, proto bod *F* leží v poloprostoru daném rovinou *ABC* a bodem *D*.

8. Pomoci lineární kombinace bodů rozhodněte o vzájemné poloze přímek *p* a *q*, jestliže: $\boldsymbol{p = \overleftrightarrow{AB} : A = [1; 1; 1], B = [3; 0; 2]}$ a *q* je dána body:

a) $\boldsymbol{C = \left[2; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right], D = [7; -2; 4]}$

b) $\boldsymbol{E = [5; 2; 4], F = [1; 4; 2]}$

c) $\boldsymbol{G = [8; 1; 3], H = [2; 5; 1].}$

Řešení:

Při řešení vzájemných poloh dvou podprostorů zjistíme, jaký je průnik zaměření dvou podprostorů a zda mají společné body.

a) $C = \left[2; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right], D = [7; -2; 4]$

Vyšetření společného směru:

$$aA + bB = cC + dD;\ a + b = 0;\ c + d = 0.$$

$$a[1; 1; 1] + b[3; 0; 2] = c\left[2; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right] + d[7; -2; 4]$$

Dostáváme soustavu rovnic:

$$a + 3b = 2c + 7d$$
$$a + 0b = \frac{1}{2}c - 2d$$
$$a + 2b = \frac{3}{2}c + 4d$$
$$a + b = 0$$
$$c + d = 0$$

Máme pět rovnic o čtyřech neznámých. Vyřešením soustavy dospějeme k výsledkům:

$$d = t \text{ (parametr)}, c = -t, b = \frac{5}{2}t, a = -\frac{5}{2}t.$$

Body jsou tedy lineárně závislé a přímka p a q mají společný směr.

Hledáme-li společné body přímek:

$$aA + bB = cC + dD;\ a + b = 1;\ c + d = 1.$$

Obdržíme obdobnou soustavu rovnic:

$$a + 3b = 2c + 7d$$
$$a + 0b = \frac{1}{2}c - 2d$$
$$a + 2b = \frac{3}{2}c + 4d$$
$$a + b = 1$$
$$c + d = 1$$

Řešení soustavy rovnic je $d = t$ (parametr); $a = \frac{1}{2} - t;\ b = \frac{1}{2} + t; c = 1 + 2t$. Přímky budou mít ne jeden, ale přímku společných bodů. Přímky $p: \overleftrightarrow{AB}\ a\ q: \overleftrightarrow{CD}$ jsou totožné.

b) $E = [5; 2; 4], F = [1; 4; 2]$

$$aA + bB = eE + fF$$

$$a[1; 1; 1] + b[3; 0; 2] = e[5; 2; 4] + f[1; 4; 2]$$

$$a + 3b = 5e + f$$
$$a + 0b = 2e + 4f$$
$$a + 2b = 4e + 2f$$

Vyšetřujeme-li společný směr, přidáme k rovnicím tyto dvě: $a + b = 0;\ e + f = 0$. Řešením pak bude $b = -2f$. Proměnné jsou závislé na jednom parametru, tedy přímky mají společný směr. O tom jestli budou rovnoběžné různé, nebo totožné rozhodnou společné body.
Vyšetřujeme-li společné body, přidáváme k rovnicím tyto podmínky: $a + b = 1;\ e + f = 1$.
Soustava rovnic nebude mít žádné řešení. Přímky $p: \overleftrightarrow{AB}\ a\ q: \overleftrightarrow{EF}$ jsou tedy rovnoběžné, různé.

c) $G = [8; 1; 3], H = [2; 5; 1]$

$$aA + bB = gG + hH$$

$$a[1; 1; 1] + b[3; 0; 2] = g[8; 1; 3], +h[2; 5; 1]$$

$$a + 3b = 8g + 2h$$
$$a + 0b = g + 5h$$
$$a + 2b = 3g + h$$

Společný směr: $a + b = 0;\ g + h = 0$.
Společné body: $a + b = 1;\ g + h = 1$.
Zjistíme, že řešení pro společné směry je pouze triviální a to nulový vektor a že přímky nemají žádný společný bod. Přímky $p: \overleftrightarrow{AB}\ a\ q: \overleftrightarrow{GH}$ jsou mimoběžné.

9. V A_4 rozhodněte o vzájemné poloze dvou rovin:

$\boldsymbol{\alpha = \overleftrightarrow{KLM}: K = [4; 2; 2; 2], L = [5; 2; 5; 4], M = [5; 2; 2; 1]}$,

$\boldsymbol{\beta = \overleftrightarrow{OPG}: O = [-2;\ -2; 2; 0], P = [-3;\ -2; 7; 0], Q = [0; 0; 3; 0]}$.

Řešení:

$$kK + lL + mM = oO + pP + qQ$$

$$k[4; 2; 2; 2] + l[5; 2; 5; 4] + m[5; 2; 2; 1]$$
$$= o[-2;\ -2; 2; 0] + p[-3; -2; 7; 0] + q[0; 0; 3; 0]$$

$$4k + 5l + 5m = -2o - 3p$$
$$2k + 2l + 2m = -2o - 2p$$
$$2k + 5l + 2m = 2o + 7p + 3q$$
$$2k + 4l + m = 0$$

Hledáme-li společné směry těchto rovin, přidáme k výše uvedeným čtyřem rovnicím o šesti neznámých: $k + l + m = 0$ a $o + p + q = 0$. Soustava rovnic má pouze triviální řešení. Roviny α a β nemají žádný společný směr.

Pro výpočet společných bodů zadaných rovin víme, že součet koeficientů lineární kombinace bodů musí na obou stranách být jedna. Proto soustavu doplníme o rovnice:
$k + l + m = 1; o + p + q = 1.$
Řešením je: $k = -\frac{2}{3}; l = -\frac{1}{9}; m = \frac{16}{9}; o = 0; p = -1; q = 2.$
Z výpočtů můžeme závěrem říci, že roviny mají společný pouze jeden bod, jsou tedy různoběžné.

10. Mějme rovinu $\boldsymbol{\gamma}$: $\overleftrightarrow{XYZ}$: $X = [2; -2; 1], Y = [0; 0; 1], Z = [1; -1; 4]$ a přímku k, určenou body:

a) $\overleftrightarrow{AB}$: $A = [0; 2; 3], B = [-6; -4; 3]$
b) $\overleftrightarrow{AD}$: $A = [0; 2; 3], D = [4; -2; 3]$
c) $\overleftrightarrow{EF}$: $E = [1; -1; -2\ ], F = [3; -3; 4]$
d) $\overleftrightarrow{GH}$: $G = [4; -2; 3], H = [2; 1; 5]$
Určete vzájemnou polohu přímky a roviny.

Řešení:

a) $\overleftrightarrow{AB}$: $A = [0; 2; 3], B = [-6; -4; 3]$

$$xX + yY + zZ = aA + bB$$

Nejprve vyšetříme společný směr. Musí tedy platit: $x + y + z = 0; a + b = 0.$ Vyjádřením a a y z rovnic dostáváme: $a = -b; y = -z - x$.

$$2x + z = -6b$$
$$-2x - z = 2a - 4b$$
$$x + y + 4z = 3a + 3b$$

Dosadíme $a = -b;\ y = -z - x$:

$$2x + z = -6b$$
$$-2x - z = -2b - 4b$$
$$x - z - x + 4z = -3b + 3b$$

Řešením soustavy těchto tří rovnic o třech neznámých je: $z = 0; x = 0; b = 0; a = 0; y = 0$. Přímka nemá s rovinou společný směr. Jak to bude se společnými body? Protože jde o A_3, očekáváme, že bude jediný. Přesvědčme se o tom:

$$2x + z = -6b$$
$$-2x - z = 2a - 4b$$
$$x + y + 4z = 3a + 3b.$$

Musí platit: $x + y + z = 1; a + b = 1$.

$$2x + z = -6b$$
$$-2x - z = 2(1 - b) - 4b$$
$$x + (1 - x - z) + 4z = 3(1 - b) + 3b$$

Řešením soustavy je $b = \frac{1}{6};\ z = \frac{2}{3}; a = \frac{5}{6}; x = -\frac{5}{6}; y = \frac{5}{6}$. Přímka má s rovinou jeden společný bod $R = [-1; 1; 3]$.

Přímka $\overleftrightarrow{AB}$ je různoběžná s rovinou γ.

b) $\boldsymbol{\overleftrightarrow{AD}: A = [0; 2; 3], D = [4; -2; 3]}$

$$xX + yY + zZ = aA + dD$$

Nejprve vyšetříme společný směr. Musí tedy platit:

$x + y + z = 0; a + b = 0.$

$$\underline{\begin{aligned}2x+z&=4d\\-2x-z&=2a-2d\\x+y+4z&=3a+3d\end{aligned}}$$

Řešením soustavy rovnic je $d = t$ (parametr); $a = -t; y = 2t; z = 0; x = -2t$.

Přímka $\overleftrightarrow{AD}$ má společná směr s rovinou γ.

Vyšetřujeme-li společné body, řešíme tuto soustavu:

$$2x + z = 4d$$

$$-2x - z = 2a - 2d$$

$$x + y + 4z = 3a + 3d$$

$$x + y + z = 1$$

$$\underline{a + d = 1}$$

$$2x + z = 4d$$

$$-2x - z = 2(1 - d) - 2d$$

$$\underline{x + 1 - x - z + 4z = 3(1 - d) + 3d}$$

$$2x + z = 4d$$

$$-2x - z = 2 - 4d$$

$$3z = 2, z = \frac{2}{3}.$$

Po dosazení z do soustavy rovnic zjistíme, že daná soustava nemá řešení. Přímka s rovinou nemají společné body a přitom mají společný směr, proto musí být navzájem rovnoběžné.

c) $\overleftrightarrow{\boldsymbol{EF}}: \boldsymbol{E} = [\mathbf{1}; -\mathbf{1}; -\mathbf{2}\,], \boldsymbol{F} = [\mathbf{3}; -\mathbf{3}; \mathbf{4}]$

Společný směr roviny γ a přímky:

$$2x + z = 1e + 3f$$

$$-2x - z = -1e - 3f$$

$$x + y + 4z = -2e + 4f$$

$$x + y + z = 0$$

$$\underline{e + f = 0}$$

Řešením soustavy rovnic je: $x = 0; y = 2e; z = -2e; f = -e$. Přímka má tedy společný směr s rovinou γ.

Společné body podprostorů:

$$2x + z = 1e + 3f$$
$$-2x - z = -1e - 3f$$
$$x + y + 4z = -2e + 4f$$
$$x + y + z = 1$$
$$\underline{e + f = 1.}$$

Řešením dané soustavy rovnic je $x = 2 - 2t; y = 2 - 4t; z = -3 + 6; e = 1 - t;\ f = t$ (parametr). Přímka má s rovinou společný směr a přímku bodů. Můžeme tedy říci, že přímka $\overleftrightarrow{EF}$ náleží rovině γ.

d) $\overleftrightarrow{\boldsymbol{GH}}$: $\boldsymbol{G} = [\mathbf{4}; -\mathbf{2}; \mathbf{3}], \boldsymbol{H} = [\mathbf{2}; \mathbf{1}; \mathbf{5}]$

Vyšetříme společný směr daných podprostorů:

$$2x + z = 4g + 2h$$
$$-2x - z = -2g + 1h$$
$$x + y + 4z = 3g + 5h$$
$$x + y + z = 0$$
$$\underline{g + h = 0}$$

Soustava rovnic má pouze triviální řešení. Přímka $\overleftrightarrow{GH}$ nemá s rovinou γ žádný společný směr. Při hledání společných bodů změníme poslední dvě rovnice na součet 1. Vyřešením soustavy dostáváme toto řešení: $x = 3; y = -4; z = 2; g = 3; h = -2$. Průsečík roviny s přímkou je $R = [8; -8; 1]$. Z čehož vyplývá, že přímka $\overleftrightarrow{GH}$ je různoběžná s rovinou γ.

11. Vypočtěte obsah čtyřúhelníků:

a) ***ABCD*:** $\boldsymbol{A} = [\mathbf{1}; \mathbf{0}], \boldsymbol{B} = [\mathbf{4}; \mathbf{0}], \boldsymbol{C} = [\mathbf{5}; \mathbf{3}], \boldsymbol{D} = [\mathbf{4}; \mathbf{1}]$

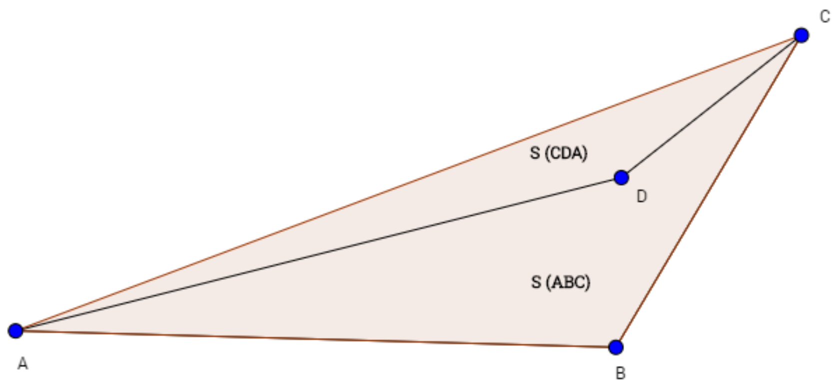
b) ***KLMN*:** $\boldsymbol{K} = [\mathbf{1}; \mathbf{0}], \boldsymbol{L} = [\mathbf{4}; \mathbf{0}], \boldsymbol{M} = [\mathbf{5}; \mathbf{3}], \boldsymbol{N} = [\mathbf{4}; \mathbf{4}]$

Řešení:

Nejdříve zjistíme, zda jsou body ABCD lineárně nezávislé (postup viz výše). Poté si vybereme u daného čtyřúhelníku pouze tři body *ABC* a pomocí kladných či záporných koeficientů bodů zjistíme, zda bod *D* leží uvnitř, nebo vně trojúhelníku *ABC*.

Leží-li uvnitř, je čtyřúhelník nekonvexní a musíme od $S_{\Delta ABC}$ odečíst $S_{\Delta CDA}$. Je-li naopak bod *D* vně ΔABC, pak je čtyřúhelník konvexní obsah $S_{\Delta CDA}$ přičteme k $S_{\Delta ABC}$. K správné představě nám pomůže obrázek.

a) *ABCD*: $A = [1;0], B = [4;0], C = [5;3], D = [4;1]$



$$aA + bB + cC = D; a + b + c = 1$$

$$a + 4b + 5c = 4$$
$$3c = 1; c = \frac{1}{3}; a = \frac{2}{3}; b = \frac{5}{12}$$

Jelikož jsou koeficienty *a*, *b*, *c* kladné, bod *D* leží uvnitř trojúhelníku *ABC*. Čtyřúhelník je nekonvexní. Nastal tedy první případ.

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta CDA}$$

Obsah trojúhelníku ABC vypočteme dle vztahu:

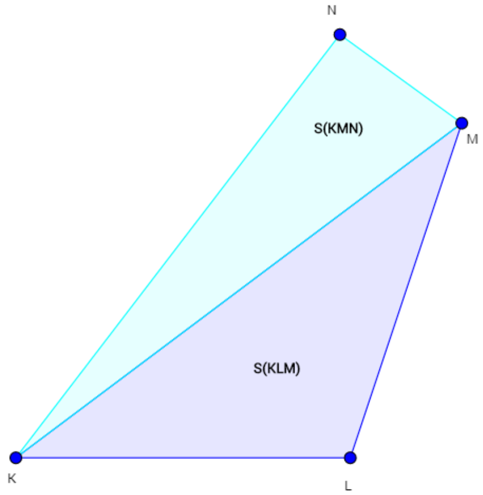
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2!}|[(C-A)(B-A)]| = \frac{1}{2}|[(4;3)(3;0)]| =$$
$$= \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}4 & 3\\ 3 & 0\end{matrix}\right\| = \frac{9}{2}$$

Následně dopočteme obsah trojúhelníku *CDA*:

$$S_{\Delta CDA} = \frac{1}{2!}|[(A-D)(C-D)]| = \frac{1}{2}|[(-3;-1)(1;2)]| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}-3 & -1\\ 1 & 2\end{matrix}\right\| = \frac{5}{2}$$

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta CDA} = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 2$$

b) *KLMN:* $K = [1;0], L = [4;0], M = [5;3], N = [4;4]$



$$kK + lL + mM = N; k + l + m = 1$$

$$k + 4l + 5m = 4 \to k + 4(1 - m - k) + 5m = 1$$
$$3m = 4;\ m = \frac{4}{3}$$
$$k = \frac{4}{9}; l = -\frac{7}{9}$$

Jelikož je jeden koeficient záporný, bod *D* leží vně trojúhelníku *ABC*. Čtyřúhelník je konvexní. Nastal tedy druhý případ.

$$S_{KLMN} = S_{\Delta KLM} + S_{\Delta MNK}$$

Obsah trojúhelníku *ABC* bude stejný jako KLM, tedy: $S_{\Delta KLM} = \frac{9}{2}$.

Následně dopočteme obsah trojúhelníku *MNK*:

$$S_{\Delta MNK} = \frac{1}{2!}|[(K-N)(M-N)]| = \frac{1}{2}|[(-3;-4)(1;-1)]| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} -3 & -4 \\ 1 & -1 \end{matrix}\right\| = \frac{7}{2}$$

$$S_{KLMN} = S_{\Delta KLM} + S_{\Delta MNK} = \frac{9}{2} + \frac{7}{2} = \frac{16}{2}$$

12. Najděte souřadnice vrcholu $\boldsymbol{C}$ trojúhelníku $\boldsymbol{ABC}$, víte-li, že bod C leží na stejné přímce jako body $\boldsymbol{X = [1;1;1]}$ a $\boldsymbol{Y = [-1;-7;17]}$. Vrcholy $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ mají souřadnice $\boldsymbol{A = [-1;1;-5], B = [3;2;4]}$ a obsah trojúhelníku *ABC* je 30.

Řešení:

Bod $C = [c_1, c_2, c_3]$ můžeme vyjádřit pomocí lineární kombinace bodů *X* a *Y*:

$$C = xX + yY; x + y = 1.$$

Vyjádříme si *y* a dosadíme do rovnic:

$$c_1 = x - y = 1 - 2y$$
$$c_2 = x - 7y = 1 - 8y$$
$$c_3 = x + 17y = 1 + 16y.$$

Pro náš příklad budeme počítat s vektory:

$a = B - A = (4; 1; 9)$

$b = C - A = (c_1 + 1;\ c_2 - 1;\ c_3 + 5).$

Vektorový součin $a \times b = (l_1, l_2, l_3)$ můžeme vyjádřit:

$$l_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$
$$l_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$$
$$l_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Doplněním souřadnic vektorů *a*, *b* dostáváme rovnice:

$$l_1 = c_3 + 5 - 9 \cdot (c_2 - 1) = c_3 - 9c_2 + 14$$
$$l_2 = 9 \cdot (c_1 + 1) - 4(c_3 + 5) = 9c_1 - 4c_3 - 11$$
$$l_3 = 4 \cdot (c_2 - 1) - c_1 - 1 = 4c_2 - c_1 - 5.$$

Za souřadnice bodu *C* dosadíme již dříve vyjádřené souřadnice pomocí bodů *X*, *Y*.

$$l_1 = 6 + 88y$$
$$l_2 = -6 - 82y$$
$$l_3 = -2 - 30y$$

Dopočítáme příklad. Obecně platí:

$$S = \frac{1}{2}|a \times b|$$

$$|a \times b| = \sqrt{{l_1}^2 + {l_2}^2 + {l_3}^2}$$

$$30 = \frac{1}{2}\sqrt{{l_1}^2 + {l_2}^2 + {l_3}^2}$$

$$1921y^2 + 270y - 440{,}5 = 0$$

Rovnice má dvě řešení: $y_{1,2} \doteq \frac{-270 \pm \sqrt{3457702}}{3842}$.

Pro y_1 budou souřadnice vrcholu *C*:

$$c_1 = 1 - 2y = \frac{2191 - \sqrt{3457702}}{1921}$$

$$c_2 = 1 - 8y = \frac{3001 - \sqrt{55323232}}{1921}$$

$$c_3 = 1 + 16y = \frac{-239 + \sqrt{221292928}}{1921}.$$

Pro y_2 budou souřadnice vrcholu *C*:

$$c_1 = 1 - 2y = \frac{2191 + \sqrt{3457702}}{1921}$$

$$c_2 = 1 - 8y = \frac{3001 + \sqrt{55323232}}{1921}$$

$$c_3 = 1 + 16y = \frac{-239 - \sqrt{221292928}}{1921}.$$

13. Vypočtěte střed šestiúhelníku KLMNOP, jestliže znáte souřadnice dvou vrcholů $\boldsymbol{K = [4; 0]}$ a $\boldsymbol{L = [2; 2\sqrt{3}]}$. Poté pomocí lineární kombinace bodů vypočtěte souřadnice zbylých bodů šestiúhelníku KLMNOP.

Řešení:

Nalezení souřadnic bodu $\boldsymbol{S = [s_1; s_2]}$:

Nejprve nalezneme střed úsečky KL, tím povedeme přímku *p*, která bude kolmá na úsečku KL. Je zřejmé, že přímka *p* bude procházet hledaným středem *S* šestiúhelníku *KLMNO*.

$$S_{LK}: \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}K = \frac{1}{2}[4; 0] + \frac{1}{2}\left[2; 2\sqrt{3}\right] = \left[3;\ \sqrt{3}\right]$$

$$u = L - K = \left[2;\ 2\sqrt{3}\right] - [4; 0] = \left(-2; 2\sqrt{3}\right)$$

Směrový vektor u je normálovým vektorem přímky p. Vytvoříme obecnou rovnici přímky p:

$$p\colon -2x_1 + 2\sqrt{3}x_2 + c = 0.$$

$$S_{LK} \in p, p\colon -2x_1 + 2\sqrt{3}x_2 = 0$$
$$\sqrt{3}x_2 = x_1$$

Víme, že vnitřní úhel mezi $\overrightarrow{KS}$ a $\overrightarrow{KL}$ je 60°.

$$u = \overrightarrow{KL} = \left(-2; 2\sqrt{3}\right)$$
$$v = \overrightarrow{KS} = (s_1 - 4;\ s_2)$$

Ze známého vzorce:

$$\cos 60° = \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\left|-2(s_1 - 4) + 2\sqrt{3}\, s_2)\right|}{4\sqrt{(s_1 - 4)^2 + {s_2}^2}}$$

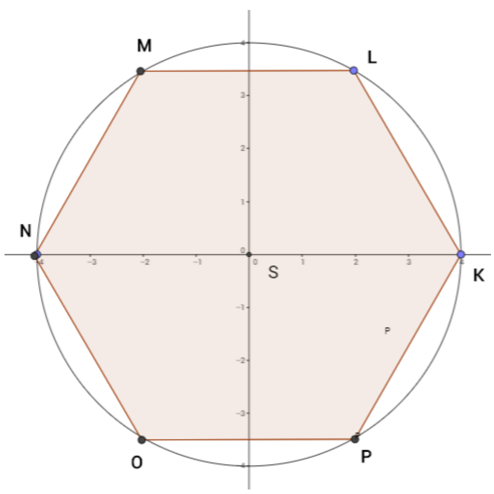
$$s_2\left(s_2 - 2\sqrt{3}\right) = 0$$

Řešením jsou dva kořeny: $s_{2_1} = 0; s_{2_2} = 2\sqrt{3}$. Dosazením do rovnice $\sqrt{3}x_2 = x_1$ vypočteme druhou souřadnici středu. $s_{1_1} = 0;\ s_{1_2} = 6$. Dostáváme tedy dva možné středy:

$$S_1 = [0; 0], S_2 = \left[6; 2\sqrt{3}\right].$$

Dále budeme počítat souřadnice vrcholů šestiúhelníku *KLMNOP* jen pro střed $S_1 = [0; 0]$. Pro druhý střed bychom postupovali analogicky.

Představme si zadaný šestiúhelník:



Můžeme provést výpočet souřadnic vrcholů šestiúhelníku např. těmato dvěma způsoby:

1. Známe souřadnice tří bodů a to K, L a S, pomocí kterých můžeme vyjádřit zbylé body. K nalezení těchto kombinací můžeme využít obrázku.

$$O = 2S - L$$
$$N = 2S - K$$
$$P = S + K - L$$
$$M = S + L - K$$

Dosadíme souřadnice bodů:

$$O = 2[0;0] - \left[2;2\sqrt{3}\right] = \left[-2;-2\sqrt{3}\right]$$
$$N = 2[0;0] - [4;0] = [-4;0]$$
$$P = [0;0] + [4;0] - \left[2;2\sqrt{3}\right] = \left[2;-2\sqrt{3}\right]$$
$$M = [0;0] + \left[2;2\sqrt{3}\right] - [4;0] = \left[-2;2\sqrt{3}\right].$$

Dostáváme souřadnice všech vrcholů šestiúhelníku KLMNOP.

2. Způsob výpočtu je poněkud méně vhodný. Víme, že ΔKLS a ΔPKS jsou rovnostranné. Spojíme-li body LP můžeme vidět, že úsečka dělí SK v půli a je na ni kolmá. Nejdříve zjistíme bod S_{SK}, ve kterém PL půlí úsečku SK:

$$S_{SK} = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}K$$
$$S_{SK} = \frac{1}{2}[0;0] + \frac{1}{2}[4;0]$$
$$S_{SK} = [2;0].$$

Podobným způsobem vypočteme souřadnice vrcholu $\boldsymbol{P = [p_1, p_2]}$**:**

$$S_{SK} = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}L$$
$$2 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}\cdot 2$$
$$0 = \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}$$
$$p_1 = 2;\ p_2 = -2\sqrt{3}$$
$$P = \left[2;-2\sqrt{3}\right].$$

Vrchol $\boldsymbol{O} = [\boldsymbol{o_1};\ \boldsymbol{o_2}]$ vypočteme:

$$S_{SP} = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}S$$

$$s_1 = \frac{1}{2}2 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 1$$

$$s_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(-2\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot 0 = -\sqrt{3}$$

$$S_{SP} = [1; -\sqrt{3}]$$

$$S_{SP} = \frac{1}{2}O + \frac{1}{2}K$$

$$1 = \frac{1}{2}o_1 + \frac{1}{2} \cdot 4$$

$$-\sqrt{3} = \frac{1}{2}o_2 + \frac{1}{2} \cdot 0$$

$$o_1 = -2;\ o_2 = -2\sqrt{3}$$

$$O = [-2; -2\sqrt{3}.]$$

Ostatní vrcholy bychom vypočetli analogicky.

14. Pomocí lineární kombinace bodů vyjádřete obecný vztah dělícího poměru tří bodů na přímce.

Řešení:

Obecně dělící poměr tří kolineárních bodů vyjádříme vztahem:

$$(A - X) = \delta(B - X).$$

Chceme vyjádřit tento zápis ve tvaru:

$$X = aA + bB.$$

Úpravou zjistíme koeficienty a, b:

$$A - X = \delta B - \delta X$$

$$\frac{\delta}{(\delta - 1)}X - \frac{1}{(\delta - 1)}X = \frac{\delta}{(\delta - 1)}B - \frac{A}{(\delta - 1)}$$

$$X = \frac{\delta}{\delta - 1}B - \frac{1}{\delta - 1}A$$

$$X = \frac{1}{1-\delta}A + \left(-\frac{\delta}{1-\delta}\right)B.$$

Hledáme-li vyjádření dělícího poměru pomocí lineární kombinace krajních bodů úsečky *AB* a bodu X, zjistíme, že koeficienty jsou rovny: $a = \frac{1}{1-\delta}; b = -\frac{\delta}{1-\delta}$. Pro ověření existence tohoto vyjádření, sečteme koeficienty a musí se rovnat jedné, protože na druhé straně rovnice vyjadřujeme bod.

$$a + b = \frac{1}{1-\delta} + \left(-\frac{\delta}{1-\delta}\right) = \frac{1-\delta}{1-\delta} = 1$$

15. V A_3 jsou dány dvě mimoběžky: $\boldsymbol{a = \overleftrightarrow{AB}: A = [1; -2; 0], B = [2; 0; 3]; b = \overleftrightarrow{CD}: C = [3; 0; 4], D = [5; -1; 3]}$. Najděte příčku mimoběžek procházející bodem $\boldsymbol{R = [-1; 6; 14]}$.

Řešení:

Zvolíme-li si jednu z přímek a rozšíříme podprostor o bod *R*, dostáváme nový podprostor $\alpha = ABR$.

Najdeme průnik tohoto podprostoru s druhou ze zadaných přímek, tedy přímkou *b*. Jejich průsečíkem bude bod, jímž bude procházet příčka *p*.

$$\alpha \cap b: aA + bB + rR = cC + dD; a + b + r = 1; c + d = 1.$$

$$a[1; -2; 0] + b[2; 0; 3] + r[-1; 6; 14] = c[3; 0; 4] + d[5; -1; 3]$$

Dostáváme soustavu rovnic:

$$a + b + r = 1$$

$$c + d = 1$$

$$a + 2b - 1r = 3c + 5d$$

$$-2a + 6r = -1d$$

$$3b + 14r = 4c + 3d.$$

Máme pět rovnic o pěti neznámých. Soustava má právě jedno řešení: $a = -5; b = \frac{26}{3}; c = -5; d = 6; m = -\frac{8}{3}$. Průnikem roviny α a přímky *b* je bod. Dosazením koeficientů můžeme vypočíst souřadnice bodu, který označíme $K = [x_1, x_2, x_3]$.

$$x_1 = -5 \cdot 1 + \frac{26}{3} \cdot 2 + \frac{8}{3} \cdot 1 = 15$$

$$x_2 = -5 \cdot (-2) + \frac{26}{3} \cdot 0 - \frac{8}{3} \cdot 6 = -6$$

$$x_3 = -5 \cdot (0) + \frac{26}{3} \cdot 3 - \frac{8}{3} \cdot 14 = -\frac{34}{3}$$

Hledaná příčka *p* bude dána body *K* a *R*.

$$p: S = kK + rR, k + r = 1$$

Za jednu z proměnných zvolíme parametr t.

Po úpravě parametrické vyjádření přímky *p* můžeme zapsat:

$$p: s_1 = -1 + 16t$$
$$s_2 = 6 - 12t$$
$$s_3 = 14 - \frac{76}{3}t.$$

16. Mějte v $\boldsymbol{A_2}$ polorovinu danou přímkou $\boldsymbol{p}: \overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}: \boldsymbol{A} = [\mathbf{1}; \mathbf{4}], \boldsymbol{B} = [\mathbf{4}; \mathbf{3}]$ a bodem $\boldsymbol{C} = [\mathbf{6}; \mathbf{5}]$.
Rozhodněte, v které polorovině leží body $\boldsymbol{D} = [\mathbf{3}; \mathbf{5}]$; $\boldsymbol{E} = [\mathbf{2}; \mathbf{2}]$; $\boldsymbol{F} = [\mathbf{7}; \mathbf{2}]$.

Řešení:

Poloprostor můžeme zadat nadrovinou daného prostoru a bodem, který nenáleží nadrovině prostoru. V A_2 je nadrovinou přímka dána body *A*, *B* a bod *C* určující kladný směr poloroviny.

Odvoďme si podmínky pro libovolný bod. Jak poznáme, že leží v dané, či opačné polorovině?

$$X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A) = A + t_1B - t_1A + t_2C - t_2A$$
$$X = (1 - t_1 - t_2)A + t_1B + t_2C$$

Jakých hodnot mohou nabývat hodnoty, aby daný bod ležel v polorovině? V první řadě musí platit pro součet koeficientů: $(1 - t_1 - t_2) + t_1 + t_2 = 1$. Tato rovnost platí vždy. Bude-li t_1 záporné změní se nám polorovina? Ne, nezmění. Směr vektoru $B - A$ bude opačný, ale bude stále náležet zadané polorovině. Jak bude záležet na koeficientu t_2? Tento koeficient máme před vektorem: $t_2(C - A)$. Bude-li tedy záporný, bod již nebude náležet dané polorovině, ale opačné polorovině. Pokud je koeficient t_2 kladný, nebo roven nule, bod náleží zadané uzavřené polorovině.

Bude platit, že bod *X* náleží polorovině, právě tehdy jestliže splňuje:

$$X = aA + bB + cC; c \geq 0.$$

$\boldsymbol{D = [3; 5]}$**:**

$$D = aA + bB + cC; a + b + c = 1;$$
$$3 = 1a + 4b + 6c$$
$$5 = 4a + 3b + 5c$$
$$1 = a + b + c$$

Řešením soustavy rovnic je $a = \frac{3}{4};\ b = -\frac{3}{8};\ c = \frac{5}{8}$. Koeficient *c* je kladný, bod *D* tedy náleží dané polorovině.

$\boldsymbol{E = [2; 2]}$**:**

$$E = aA + bB + cC; a + b + c = 1;$$
$$2 = 1a + 4b + 6c$$
$$2 = 4a + 3b + 5c$$
$$1 = a + b + c$$

Řešením soustavy je $a = 0;\ b = \frac{3}{2}; c = -\frac{1}{2}$. Jelikož je $c < 0$, bod *E* náleží opačné polorovině.

$\boldsymbol{F = [7; 2]}$:

$$E = aA + bB + cC; a + b + c = 1;$$
$$7 = 1a + 4b + 6c$$
$$2 = 4a + 3b + 5c$$
$$1 = a + b + c$$

Řešením soustavy rovnic je $a = -1; b = 2; c = 0$. Koeficient *c* je nulový. Nastal poslední možný případ. Bod *F* náleží hraniční přímce.

17. Mějte v $\boldsymbol{A_4}$ poloprostor dán nadrovinou $\boldsymbol{\rho = \overleftrightarrow{KLM}}$: $\boldsymbol{K = [1; 1; 1; 1], L = [3; 1; 2; 1], M = [2; 1; 3; 2]}$ a bodem $\boldsymbol{N = [6; 2; 4; 5]}$. Rozhodněte o vzájemné poloze poloprostoru $\boldsymbol{\rho}$ a bodů $\boldsymbol{X = [3; 5; 1; 1]}$ a $\boldsymbol{Y = [-1; 2; 2; 3]}$.

Řešení:

$$X = kK + lL + mM + nN; k + l + m + n = 1$$

Hodnoty koeficientu *n* mohou nabývat hodnot:

$n > 0$ ...Bod bude ležet v zadaném poloprostoru.

$n < 0$ ... Bod bude náležet opačnému poloprostoru.

$n = 0$ ... Bod bude náležet hraniční nadrovině.

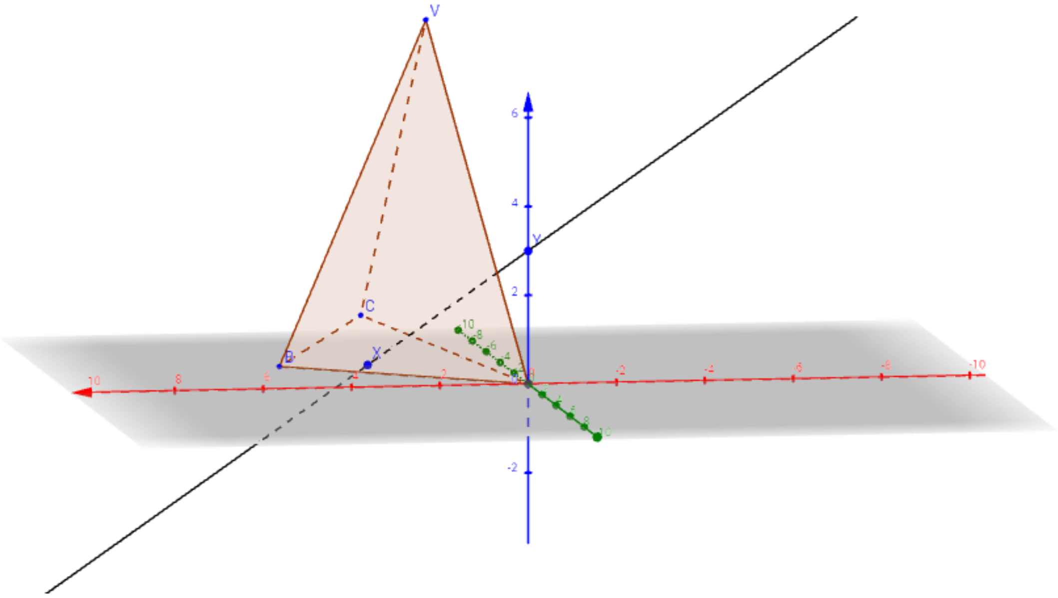
$$3 = 1k + 3l + 2m + 6n$$
$$5 = 1k + 1l + 1m + 2n$$
$$1 = 1k + 2l + 3m + 4n$$
$$1 = k + l + 2m + 5n$$
$$1 = k + l + m + n$$

Řešením rovnic je $k = 7; l = -8; m = -2; n = 4 > 0$, tedy bod *X* náleží zadanému poloprostoru.

Vyšetřujeme-li, zda bod *Y* náleží danému poloprostoru, změníme v předešlých rovnicích levé strany rovnic, za souřadnice bodu *Y*. Řešením takto upravené rovnice je: $k = \frac{34}{33}; l = -\frac{41}{33}; m = \frac{46}{33}; n = -\frac{2}{11} < 0$, tedy bod *Y* leží v opačném poloprostoru.

18. Přímka $\boldsymbol{p = \overleftrightarrow{XY}: X = [3; -4; 0], Y = [0; 0; 3]}$ prochází konvexním čtyřstěnem ABCV, kde $\boldsymbol{A = [0; 0; 0], B = [5; -4; 0], C = [3; -5; 1], V = [2; -2; 8]}$. Pomocí lineární kombinace bodů vypočtěte body průniku přímky a tělesa. Jaké budou koeficienty lineární kombinace těchto bodů?

Řešení:



Uvedeme dva možné postupy řešení. Nejprve přímým způsobem vypočteme část přímky, která protíná čtyřstěn. V níže uvedeném postupu, budeme hledat průsečíky se stěnami čtyřstěnu.

1) Vypočtěme pomocí lineární kombinace bodů průnik čtyřstěnu s přímkou.

$$Xx + yY = aA + bB + cC + vV$$

$$x + y = 1$$

$$a + b + c + c = 1$$

$$3x = 5b + 3c + 2v$$

$$-4x = -4b - 5c - 2v$$

$$3(1 - x) = c + 8v$$

Pomocí matice vyřešíme soustavu rovnic jejíž řešením jsou koeficienty:

$a = t$ (parametr); $b = \frac{115-190t}{305}$; $c = \frac{52-70t}{61}$; $v = \frac{-140+470t}{305}$; $x = \frac{81-102t}{61}$; $y = \frac{-20-102t}{61}$.

Pro libovolný bod, který bude náležet přímce a zároveň čtyřstěnu musí platit, že koeficienty *a*, *b*, *c*, *v* musejí být větší, nebo rovny nule. Hledejme tedy podmínky pro parametr t:

$$\frac{52 - 70t}{61} \geq 0$$

$$\frac{-140 + 470t}{305} \geq 0$$

$$\frac{115 - 190t}{305} \geq 0$$

$$t \geq 0.$$

Parametr t vyhovuje výše uvedeným nerovnicím v intervalu $\langle\frac{14}{47};\frac{23}{38}\rangle$.

Body vyhovující souřadnicím bodu $S = [s_1, s_2, s_3]$:

$$s_1 = \frac{243 - 306t}{61}$$
$$s_2 = \frac{-324 + 408t}{61}$$
$$s_3 = \frac{-60 - 306t}{61}$$

a pro něž bude parametr t v intervalu $\langle\frac{14}{47};\frac{23}{38}\rangle$, budou náležet průniku čtyřstěnu a přímky *p*.

2) Přímka p:

$$xX + yY = L; x + y = 1$$
$$l_1 = +3x$$
$$l_2 = -4x$$
$$l_3 = 3 - 3x$$

Nejprve vyšetříme průsečík $\Delta ABC \cap p$:

$$aA + bB + cC = Q; a + b + c = 1.$$

Bod *Q* je bod průniku.
Soustava rovnic má tvar:

$$5b + 3c = 3x$$
$$-4b - 5c = -4x$$
$$c = 3 - 3x$$
$$a + b + c = 1.$$

Řešením soustavy rovnic je $x = \frac{39}{47};\ a = \frac{14}{47};\ b = \frac{9}{47}; c = \frac{24}{47}$. Koeficienty $a, b, c\ \geq 0$, tedy přímka *p* prochází tímto trojúhelníkem. Parametr *t* dosadíme do parametrického vyjádření přímky *p* a vypočteme souřadnice bodu *Q*.

$$Q = [\frac{117}{47}; -\frac{156}{47}; -\frac{114}{47}]$$

Kterou další stranou bude nejspíše přímka procházet? Zkusíme průsečík trojúhelníku *ABV* a přímky p.

$$aA + bB + vV = Z, a + b + v = 1$$

Postupovat budeme analogicky jako v předchozím případě. Po vyřešení soustavy rovnic nám vyjde záporný koeficient *b*. Přímka tedy neprochází touto stranou čtyřstěnu.
Dalším pravděpodobnou stranou je $\Delta ACV \cap p$:

$$aA + cC + vV = Z, a + c + v = 1.$$

Koeficienty a, c, *v* jsou nezáporné. Tedy přímka *p* prochází tímto trojúhelníkem. Jaké budou souřadnice bodu *Z*? Ze soustavy rovnic je parametr $t = \frac{6}{19}$. Dosazením parametru *t* do parametrického vyjádření přímky *p* zjistíme souřadnice bodu *Z*.

$$Z = [\frac{18}{19}; -\frac{24}{19}; \frac{39}{19}]$$

Úsečka QZ je vnitřní částí čtyřstěnu *ABCV*. Vyjádříme-li body úsečky QZ pomocí vrcholů čtyřstěnu, všechny body budou mít nezáporné koeficienty.

19. Pás je ohraničen přímkami $\boldsymbol{p = \overleftrightarrow{XY}: X = [1; 6], Y = [2; 4]}$ a $\boldsymbol{q = \overleftrightarrow{KL}: K = [4; 4], L = [2; 8]}$. Různoběžná přímka $\boldsymbol{s = \overleftrightarrow{QZ}: Q = [6;\ 0],\ Z = [0; 8]}$ protíná tento pás. Pomocí lineární kombinace bodů nalezněte body přímky ležící na průniku pásu a přímky *s*.

Řešení:

Pro libovolný bod *F*, který náleží průniku přímky *s* a pásu *p*, *q* musí platit:

$$F = t_1 L + t_2 K + t_3 Y;\ t_1 + t_2 + t_3 = 1;\ t_1 \geq 0$$

a zároveň musí platit:

$$F = k_1 Y + k_2 X + k_3 L;\ k_1 + k_2 + k_3 = 1;\ k_3 \geq 0.$$

Označme krajní body úsečky, na níž leží právě všechny body, které náleží pásu i přímce *s* body *M* a *N*.

$$M: q \cap s$$
$$M \in q: M = lL + kK$$
$$M \in s: M = qQ + zZ$$

Soustava rovnic bude ve tvaru:

$$lL + kK = qQ + zZ$$
$$2l + 4k = 6q + 0z$$
$$8l + 4k = 0q + 8z$$
$$k + l = 1$$
$$q + z = 1.$$

Řešením soustavy je $l = -1; k = 2; q = 1; z = 0$. Dosazením koeficientů do libovolné z dvou rovnic, které pomocí lineární kombinace dvou bodů vyjadřují bod M, dostaneme souřadnice: $M = [6; 0]$.

Analogicky vypočteme druhý krajní bod úsečky, bod N:

$$N: p \cap s$$
$$N \in p: N = xX + zZ$$
$$N \in s: N = qQ + zZ.$$

Soustava rovnic bude ve tvaru:

$$xX + zZ = qQ + zZ$$
$$x + 2y = 6q + 0z$$
$$6x + 4y = 0q + 8z$$
$$x + y = 1$$
$$q + z = 1.$$

Řešením soustavy je $x = 2; y = -1; q = 0; z = 1$. Dosazením koeficientů do libovolné z dvou rovnic, které pomocí lineární kombinace dvou bodů vyjadřují bod N, dostaneme souřadnice: $N = [0; 8]$.

Průnik pásu přímek p, q a přímky s bude úsečka MN. Body M, N jsou náhodou totožné s body Q, Z. V případě kde by přímka s byla zadána jinými body, postup by se nezměnil.

20. Rovnoběžnostěn $ABCDEFGH$ má objem 150. Vrchol D leží na přímce $l = \overleftrightarrow{XY}$. Vypočtěte souřadnice bodu D.

$\boldsymbol{A = [2; 3; 6]}$, $\boldsymbol{B = [8; 4; 1]}$, $\boldsymbol{E = [0; 0; 0]}$, $\boldsymbol{X = [4; -3; 1]}$, $\boldsymbol{Y = [-6; 2; 1]}$

Řešení:

Bod D můžeme vyjádřit pomocí lineární kombinace bodů X a Y.

$$D = xX + yY; x + y = 1$$
$$d_1 = 4x - 6(1 - x) = 10x - 6$$
$$d_2 = -3x + 2(1 - x) = -5x + 2$$
$$d_3 = x + (1 - x) = 1$$

Objem rovnoběžnostěnu můžeme vypočítat pomocí vnějšího součinu těchto tří vektorů:

$$B - A = (6; 1; -5)$$
$$D - A = (d_1 - 2;\ d_2 - 3; d_3 - 6)$$
$$E - A = (-2; -3; 6)$$

Za souřadnice bodu D dosadíme námi již vyjádřené souřadnice bodu D na koeficientu x.

$$D - A = (10x - 8; -5x - 1; -5)$$

Výpočet objemu:

$$V = |[B - A, D - A, E - A]|$$

$$\left|\begin{vmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & -6 \\ (10x - 8) & (-5x - 1) & -5 \end{vmatrix}\right| = 150$$

$$\left|\begin{vmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & -6 \\ (10x - 8) & (-5x - 1) & -5 \end{vmatrix}\right| = 202 + 440x$$

$$|202 + 440x| = 150$$

$$x_1 = -\frac{4}{5};\ x_2 = -\frac{13}{110}$$

Dosazením koeficientu x do rovnic pro souřadnice bodu D dostáváme dvě možná řešení:

$x_1: D = [2; -2; 1\ ]$a pro $x_2: D = [-\frac{79}{11}; \frac{57}{22}; 1]$.

Neřešené úlohy

21. Jaké souřadnice těžiště bude mít ΔABC: $A = [0; 5], \mathrm{B} = [6; 8], \mathrm{C} = [3; 5]$.

$(\mathrm{T} = [3; 6\,])$

22. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

a) $\mathrm{p} = \overleftrightarrow{XY}$: $\mathrm{X} = [1; 1], \mathrm{Y} = [3; 5]$; $\mathrm{q} = \overleftrightarrow{Z\check{Z}}$: $\mathrm{Z} = [2; 3], \check{\mathrm{Z}} = [4; 1]$

b) $\mathrm{a} = \overleftrightarrow{AB}$: $\mathrm{A} = [2; 7], \mathrm{B} = [4; 9]$; $\mathrm{b} = \overleftrightarrow{CD}$: $\mathrm{C} = [1; 6], \mathrm{D} = [-4; 1]$

c) $\mathrm{k} = \overleftrightarrow{RS}$: $\mathrm{R} = [0; 2], \mathrm{S} = [-2; 6]$; $\mathrm{l} = \overleftrightarrow{TU}$: $\mathrm{T} = [6; 11], \mathrm{U} = [0; -1]$

(a) různoběžné, b) totožné, c) rovnoběžné)

23. Rozhodněte, zda bod $\mathrm{M} = [3; 2]$ leží v konvexním úhlu AVB: $\mathrm{A} = [3; 3], \mathrm{V} = [1; 1], \mathrm{B} = [4; 1]$.

(Ano)

24. Rozhodněte, kde leží body M, N, O vůči ΔABC:

$\mathrm{A} = [1; 1], \mathrm{B} = [1; 1], \mathrm{C} = [1; 4], \mathrm{M} = [1; 3], \mathrm{N} = [2; 2], \mathrm{O} = [4; 2]$.

$(\mathrm{M} \in \overleftrightarrow{\mathrm{AC}}; \mathrm{N} \in \Delta\mathrm{ABC};$ 0 leží vně $\Delta\mathrm{ABC})$

25. Vypočtěte obsah nepravidelného čtyřúhelníku OPQR:

$\mathrm{O}=[0; 0], \mathrm{P} = [5; 0], \mathrm{Q} = [6; 3], \mathrm{R} = [4; 2]$.

$(S_{\mathrm{OPQR}} = 387)$

26. Určete vzájemnou polohu přímky p: $x_1 = 2 + t;\ x_2 = 1 + 2t;\ x_3 = 2 + t$ a roviny $\rho = \overleftrightarrow{ABC}$: $\mathrm{A} = [0; 0; 3], \mathrm{B} = [2; 1; 1], \mathrm{C} = [5; 0; 2]$.

(přímka je různoběžná s rovinou ρ, společný bod $\mathrm{X} = [\frac{21}{10}; \frac{12}{10}; \frac{21}{10}]$

Závěr

V analytické geometrii je používání metody lineární kombinace bodů pro řešení úloh většinou neobvyklý způsob. Přiznám se, že mně samotné se nepodařilo nalézt příklady řešené touto metodou. Proto jsem se rozhodla vypracovat bakalářskou práci na dané téma.

V první části práce jsem vysvětlila danou problematiku, nutnou k pochopení řešených příkladů. Zahrnuje základní definice a teoretické souvislosti.

Následovaly řešené úlohy. Nejdříve bylo uvedeno, kdy je lineární kombinace bodů definována, vyšetřování těžiště, lineární závislost bodů a poloha bodu vůči konvexním množinám, poloprostorům a prostorům. Následovala řešení vzájemných poloh přímek, rovin, mimoběžných podprostorů, pásu a přímky, dělící poměr, obsahy a objemy těles. Konec části řešených úloh uzavíraly poloroviny, poloprostory a průnik přímky s tělesem.

Častým problémem studentů je představivost, proto u složitějších úloh jsem přiložila obrázky. Myslím si, že řešení bylo vždy popsáno jasně, dostatečně podrobně a srozumitelně. V případě, že byl postup řešení uveden v některé výše uvedené úloze, nebyl už dále tak podrobně rozepsán.

Závěrečnou část jsem doplnila o několik neřešených příkladů s uvedeným výsledkem. Student se tedy může pokusit vyřešit úlohy samostatně a tak procvičit získané znalosti.

Doufám, že tato práce pomohla studentům přiblížit metodu lineární kombinace bodů, jak teoreticky, tak prakticky, a splnila tak svůj cíl.

Seznam použité literatury

[1] JUKL, Marek. *Analytická geometrie*. Univerzita Palackého, 2014, 352 s. ISBN 978-80-244-3963-1

[2] SEKANINA, Milan. *Geometrie 1*. Praha : SPN - pedagogické nakladatelství, 1986. 14-462-86.

[3] ZLATOŠ, Pavol. *Lineárna algebra a geometrie,*. 2011, 744 s. ISBN 978-80-811-4111-9.