



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

ANALÝZA KMITÁNÍ DESEK

VIBRATION ANALYSIS OF PLATES

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Filip Kubeš

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Ondřej Rubeš

BRNO 2020

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Filip Kubeš
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Mechatronika
Vedoucí práce:	Ing. Ondřej Rubeš
Akademický rok:	2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Analýza kmitání desek

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Cílem práce je popsat možnosti určení vlastních tvarů kmitání desek, zejména využití Chladniho obrazců. Dále je požadována demonstrace Chladniho obrazců na experimentální soustavě buzené desky navržené dle MKP modelu.

Cíle bakalářské práce:

1. Rešerše určení vlastních tvarů kmitání desek, zejména využití Chladniho obrazců.
2. Tvorba MKP modelu desky pro účely určení vlastních tvarů a frekvencí.
3. Výroba desky dle návrhu z modelu a experimentální ověření vlastních frekvencí a tvarů.

Seznam doporučené literatury:

KRATOCHVÍL, Ctirad a Jaromír SLAVÍK. Mechanika těles: dynamika. Vyd. 4., V Akademickém nakl. CERM 2. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 978-80-214-3446-2.

BREPTA, Rudolf, František TUREK a Ladislav PŮST. Mechanické kmitání. Praha: Sobotáles, c1994. Technický průvodce, 71. ISBN 80-901684-8-5.

ZEMAN, Vladimír a Zdeněk HLAVÁČ. Kmitání mechanických soustav. 2. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2004. ISBN 80-7043-337-X.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Cílem práce je popsat možnosti určení vlastních tvarů kmitajících desek, zejména využitím Chladniho obrazců. Dále je požadována demonstrace Chladniho obrazců na experimentální soustavě buzené desky navržené dle MKP modelu. Model byl vytvořen pomocí softwaru Ansys 2019 využitím modulu Workbench. Daný experiment byl poté proveden na desce z plexiskla a dále i na ocelové čtvercové a ocelové obdélníkové desce, a porovnaly se s frekvencemi a tvary získanými z modelu. Při experimentu byla deska buzena za pomoci Elektrodynamického shakeru od společnosti The Modal shop, inc. (model K2007E01).

Summary

The focus of this bachelor thesis is finding natural frequencies and shapes of thin plate, by using mainly the Chladni figures. Then there is required an experimental demonstration on plate excited, designed according to FEM model. FEM model was created using software Ansys 2019 workbench. The experiment have been done on plexiglass plate, steel square plate and steel rectangular plate, and acquired frequencies and shapes were compared with the model results. The plates were excited by electrodynamic shaker from the company The Modal shop, inc. (type K2007E01).

Klíčová slova

Tenká deska, Chladniho obrazce, Ansys, MKP - metoda konečných prvků

Keywords

Thin plate, Chladni figures, Ansys, FEM - Finite element method

Bibliografická Citace

KUBEŠ, F. *Analýza kmitání desek*. Brno, 2020. Dostupné také z: <<https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/121593>>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2020. 46 s., Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí bakalářské práce: Ing. Ondřej Rubeš.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Analýza kmitání desek“ vypracoval samostatně pod vedením vedoucího Ing. Ondřeje Rubeše a s využitím zdrojů uvedených v seznamu literatury.

Filip Kubeš

Brno

.

Rád bych poděkoval panu Ing. Ondřeji Rubešovi za vedení, ochotu a trpělivost při psaní práce. Dále bych chtěl poděkovat svým rodičům za podporu, kterou mi poskytli během celého studia.

Filip Kubeš

Obsah

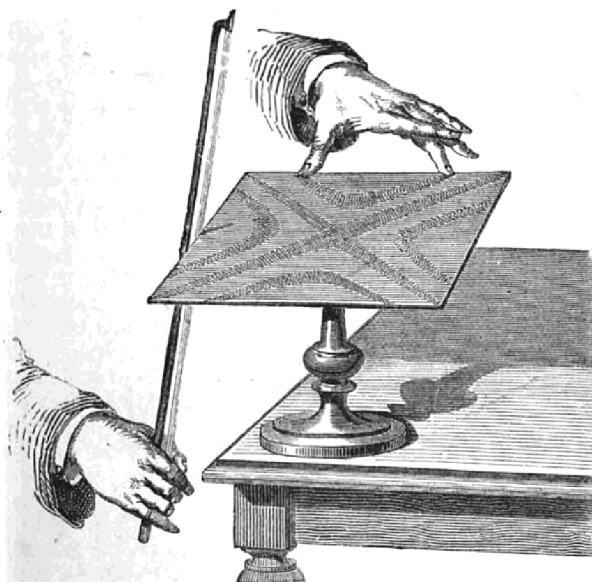
1	Úvod	9
2	Pohybové rovnice kmitající desky	11
2.1	Matematicko-fyzikální popis Chladniho obrazců	11
2.1.1	Fyzikální rovnice desky	11
2.1.2	Vnitřní síly na desce	15
2.1.3	Rovnice rovnováhy desky	16
2.1.4	Okrajové podmínky	19
2.1.5	Řešení deskové rovnice	20
2.2	Metoda konečných prvků	20
3	MKP model kmitající desky	22
3.1	Model desky	22
3.1.1	Vlastnosti materiálu	22
3.1.2	Vytvoření modelu desky	23
3.2	Sít - Mesh	23
3.2.1	Prvek SHELL181	23
3.2.2	Optimalizace sítě	23
3.3	Modální analýza	27
3.3.1	Vyhodnocení výsledných tvarů	27
3.3.2	Vlastní frekvence získané z modální analýzy	27
3.3.3	Vybrané vlastní tvary	29
3.4	Harmonická analýza	30
3.4.1	Nastavení harmonické analýzy	30

3.4.2	Výsledky harmonické analýzy	31
4	Experiment - kmitající desky	34
4.1	Deska z plexiskla	35
4.2	Čtvercová deska z oceli	36
4.3	Obdélníková deska z oceli	38
4.4	Odchylky výsledků	39
5	Závěr	41
	Literatura	42
6	Seznam použitých zkratek a symbolů	43
7	Seznam příloh	44
	Seznam obrázků	45

1 Úvod

Ernst Chladni nebyl první, kdo se zabýval vlastními tvary rozkmitaných desek. Na tuto problematiku narazil již G. Galilei, který si povšiml, že se na zvučných deskách hudebních nástrojů shluky prachu v určitých místech pohybují velmi výrazně, kdežto v jiných se nepohybují vůbec. Dalším průkopníkem byl R. Hook, který 8. června 1680 provedl experiment skleněných deskách, které posypal moukou a následně je rozkmital smyčcem. Zásluhy za objev tohoto jevu jsou ale připisovány E. Chladnimu, protože byl první kdo se problematikou zabýval podrobněji a zpracoval tuto problematiku pro několik pravidelných tvarů desky (čtverec, kruh, obdélník). [9]

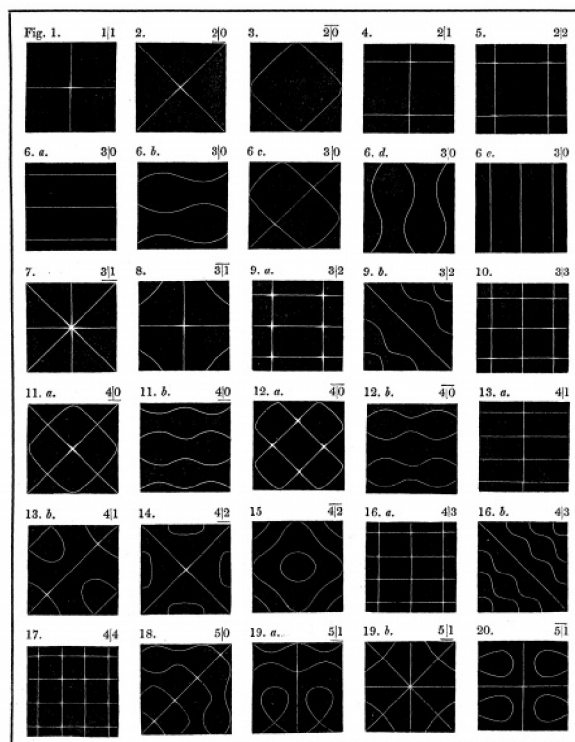
Poznatky o vlastních tvarech kmitající desky publikoval Ernst Chladni ve své knize: *Entdeckungen über die Theorie des Klanges* v roce 1787. Experiment byl proveden tak, že středem upevněn kovový plát, na který se nanese jemný písek, byl rozkmitán pomocí smyčce. Rozkmitáním desky se písek začal seskupovat v místech desky, kde se vyskytovaly vlnové uzly (nulová výchylka stojatého vlnění). Tak vznikaly náznaky daných vlastních tvarů desky (obr. 1.1). E. Chladni ovlivňoval obrazce přidržetím desky nebo smýkáním smyčce



Obrázek 1.1: Znázornění experimentu E. Chladniho (převzato z: [8])

na různých místech. Přidržetím desky do daného místa vnutil vlnový uzel a změnil tak vzniklý obrazec. Naopak v místě, kde se smýká smyčcem, je na plát vnutená maximální výchylka. Některé získané obrazce E. Chladnim je možné vidět na obrázku 1.2.

1 ÚVOD



Obrázek 1.2: Znázornění experimentu E. Chladniho (převzato z: [9])

Resonanční frekvence představují závažný problém u všech strojů. I sebemenší vibrace může napáchat velmi závažné škody pokud bude zesílena resonancí. K zjištění vlastních frekvencí se v praxi dá velmi dobře využít modální a harmonické analýzy a odhalit tak případné rizikové frekvence a předejít tak problémům bez větších následků.

2 Pohybové rovnice kmitající desky

2.1 Matematicko-fyzikální popis Chladniho obrazců

K popisu desky může být použita *Kirchhoffova teorie tenkých desek* (známa také jako Kirchhoff-Love teorie desek). Tato teorie předpokládá desku o dvou výrazně větších rozměrech než je rozměr třetí (rozměry desky jsou výrazně větší než její tloušťka), a vychází z Euler-Bernoulliho teorie pro ohyb prutu. [6]

Předpoklady, které G. R. Kirchhoff zavedl, a A. E. H. Love potvrdil byly:

1. Střednicová plocha se deformuje jen velmi málo.
2. Normálové napětí (σ_z) je v porovnání s napětími σ_x a σ_y zanedbatelně malé.
3. Body ležící na přímce kolmé ke střednicové ploše před deformací, na ní leží i po deformaci. Dále zůstávají i ve stejné vzdálenosti od střednice a platí $\varepsilon_z = 0$
4. Body ležící na střednicové ploše desky se při deformaci posouvají pouze po ose z (musí platit, že je symetrický tvar i materiál desky).

Na základě těchto předpokladů lze přetvoření vyjádřit jako funkci ohybu střednicové plochy $w(x, y)$. [3], [6]

Zkosení γ_{xz}, γ_{yz} jsou na základě předpokladů nulová

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

a protože je posun w nezávislý na souřadnici z ($\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$), tak pro posun bodu o souřadnicích (x, y, z) platí:

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y), \quad v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y), \quad (2.2)$$

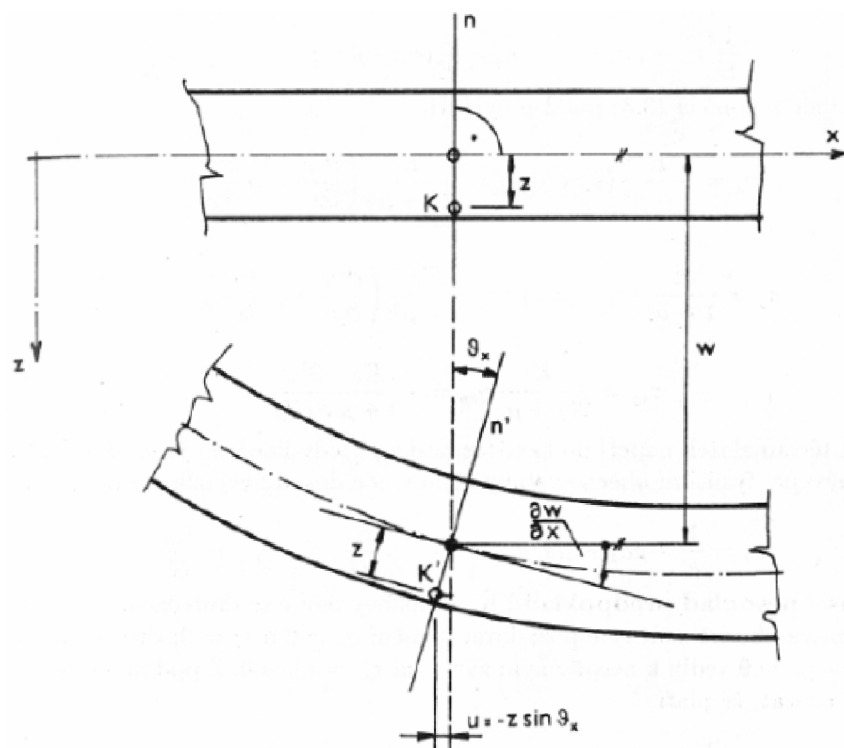
kde u_0 a v_0 reprezentují posuvy u a v v bodě $(x, y, 0)$ (bod ležící na střednicové ploše).

2.1.1 Fyzikální rovnice desky

Z obrázku 2.1 je patrné uplatnění Kirchhoffových předpokladů.

- Střednicová plocha se pohybuje pouze ve směru osy (z).

2 POHYBOVÉ ROVNICE KMITAJÍCÍ DESKY



Obrázek 2.1: Geometrie desky ohýbané za uvažování Kirchhoffových předpokladů. (Převzato z [3])

- Normála (n) ke střednicové ploše před deformací, zůstává normálou (n') i po deformaci.
- Posunutí bodu mimo střednicovou plochu (bod K do bodu K') lze vyjádřit jako funkci $u = f_1(w)$, popř. $v = f_2(w)$.

Na základě geometrie znázorněné v obrázku 2.1 získáme pro vektory posunutí (2.3):

$$\begin{aligned} u &= -z\vartheta_x = -z\frac{\partial w}{\partial x}, \\ v &= -z\vartheta_y = -z\frac{\partial w}{\partial y}, \\ w &= w(x, y), \end{aligned} \tag{2.3}$$

a deformace (2.4, 2.5):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-z\frac{\partial w}{\partial x} \right) = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-z\frac{\partial w}{\partial y} \right) = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

2 POHYBOVÉ ROVNICE KMITAJÍCÍ DESKY

$$\begin{aligned}
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-z \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-z \frac{\partial w}{\partial y} \right) = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-z \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} = -1 \frac{\partial w}{\partial x} - \cancel{z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-z \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} = -1 \frac{\partial w}{\partial y} - \cancel{z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0,
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dle Hookůva zákona rozšířeného pro rovinnou napjatost (2.6) (předpoklad tenké desky) můžeme ze vztahů pro přetvoření odvodit vztahy pro jednotlivé složky napětí (2.7).

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y) \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x) \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) = -\frac{E z}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
 \sigma_y &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) = -\frac{E z}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma_{xy} = -\frac{E z}{1 + \mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Pro jednotlivé složky tenzoru napětí tedy platí:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) = -\frac{E z}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \neq 0 \\
 \sigma_y &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) = -\frac{E z}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \neq 0 \\
 \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma_{xy} = -\frac{E z}{1 + \mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \neq 0
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Abychom určili vztah pro smyková napětí (τ_{yz}, τ_{xz}), musíme vyjít ze statické rovnováhy prvku. Pro určení τ_{xz} vyjdeme z rovnice pro statickou rovnováhu ve směru x :

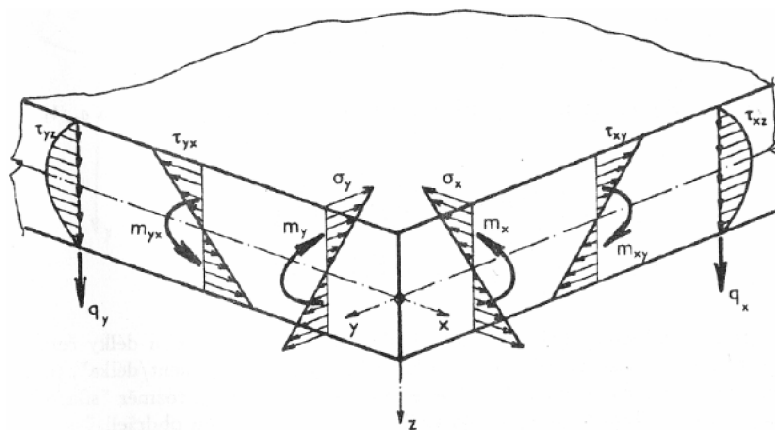
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \tag{2.9}$$

Jednoduchou úpravou si vyjádříme τ_{xz} :

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \implies \tau_{xz} = \int_{-\frac{h}{2}}^z \left(-\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz, \tag{2.10}$$

kde $-\frac{h}{2}$ značí krajní vlákno průřezu desky a z značí z -tovou souřadnici vyšetřovaného

2 POHYBOVÉ ROVNICE KMITAJÍCÍ DESKY



Obrázek 2.2: Napětí a síly působící na prvek desky (Převzato z: [3])

bodů. Pro získání τ_{xz} dosadíme do rovnice 2.9 za σ_x a τ_{xy} z rovnic 2.7 a provedeme příslušné derivace.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \mu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\end{aligned}\quad (2.11)$$

Získáme pak vztah pro τ_{xz} , který lze následně upravit.

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \int_{-\frac{h}{2}}^z \left(-\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz = \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^z \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \mu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} dz = \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^z \frac{Ez}{(1+\mu)(1-\mu)} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \mu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} dz = \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^z \frac{Ez}{(1+\mu)(1-\mu)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(\frac{Ez}{(1+\mu)(1-\mu)} \mu + \frac{Ez}{1+\mu} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} dz = \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^z \frac{Ez}{(1+\mu)(1-\mu)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{Ez}{(1+\mu)(1-\mu)} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} dz = \\ &= \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^z z \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) dz = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{-\frac{h}{2}}^z \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)\end{aligned}\quad (2.12)$$

Nyní když se dosadí horní a dolní mez do zintegrovaného členu, získá se finální tvar pro τ_{xz} .

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right] \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \\ &= -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)\end{aligned}\quad (2.13)$$

2 POHYBOVÉ ROVNICE KMITAJÍCÍ DESKY

Stejným postupem jako v 2.12 se získá vztah pro τ_{yz} :

$$\tau_{yz} = -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \quad (2.14)$$

2.1.2 Vnitřní síly na desce

Měrné vnitřní síly jsou takové síly, které reprezentují intenzitu vnitřních sil. Jejich jednotky a hodnoty jsou vztaženy na jednotkovou délku řezu a značí se malými písmeny. Na desce celkem působí 2 měrné ohybové momenty (m_x , m_y), 1 měrný kroutící moment (m_{xy}) a 2 měrné posouvající síly (q_x , q_y). Jednotlivé měrné vnitřní síly jsou závislé na příslušných napětích. Například, integrací napětí σ_x po tloušťce desky se získá měrný ohybový moment m_x .

$$\begin{aligned} m_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z \, dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z \, dz = \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\frac{Ez^2}{1-\mu^2} \, dz \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\ &= -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

kde D označuje tuhost desky a platí:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad (2.16)$$

Stejným postupem získáme i vztah pro měrný ohybový moment m_y ve tvaru:

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.17)$$

Vztah pro měrný kroutivý moment m_{xy} určíme integrací smykového napětí τ_{xy} přes tloušťku desky v mezích pro z od $-\frac{h}{2}$ do $\frac{h}{2}$.

$$\begin{aligned} m_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z \, dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\frac{Ez^2}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \, dz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \\ &= -\frac{E}{1+\mu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \, dz = -\frac{E}{1+\mu} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \\ &= -\frac{E}{1+\mu} \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{1-\mu}{1-\mu} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Vztah mezi složkami napětí a měrnými vnitřními silami lze odvodit porovnáním výrazů

2 POHYBOVÉ ROVNICE KMITAJÍCÍ DESKY

pro normálová napětí σ_x, σ_y (2.7) a měrné ohybové moment m_x, m_y (2.15, 2.17).

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_x}{m_x} &= -\frac{Ez}{(1-\mu^2)D} \frac{1}{D} = \frac{Ez12(1-\mu^2)}{(1-\mu^2)Eh^3} \\ \sigma_x &= \frac{12m_x}{h^3}z\end{aligned}\quad (2.19)$$

Obdobně lze postupovat pro měrný kroutící moment m_{xy} a smykové napětí τ_{xy} .

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{xy}}{m_{xy}} &= \frac{-\frac{Ez}{1+\mu}}{-\frac{E}{1+\mu}\frac{h^3}{12}} = \frac{12z}{h^3} \\ \tau_{xy} &= \frac{12m_{xy}}{h^3}z\end{aligned}\quad (2.20)$$

Jednotlivé složky napětí na desce tedy lze určit z příslušných měrných vnitřních sil. Konkrétně z měrných ohybových (m_x, m_y) a měrných kroutících (m_{xy}) momentů.

$$\sigma_x = \frac{12m_x}{h^3}z, \sigma_y = \frac{12m_y}{h^3}z, \tau_{xy} = \frac{12m_{xy}}{h^3}z \quad (2.21)$$

Aby bylo později možné z rovnice statické rovnováhy elementárního prvku určit pohybovou rovnici desky, tak je ještě potřeba vyjádřit vztahy pro měrné posouvající síly působící na prvek. Měrnou posouvající sílu q_x získáme integrací smykového napětí τ_{xz} přes tloušťku desky.

$$\begin{aligned}q_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) dz = \\ &= -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \left[\frac{h^2 z}{4} - \frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \\ &= -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)\end{aligned}\quad (2.22)$$

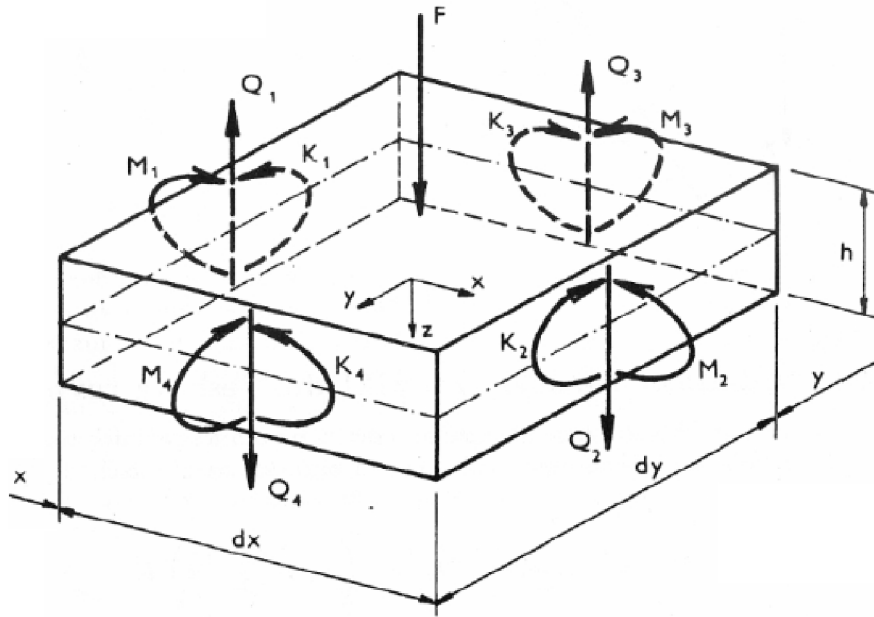
Obdobným postupem se získá i vztah pro měrnou posouvající sílu q_y .

$$q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \quad (2.23)$$

2.1.3 Rovnice rovnováhy desky

Vezmeme si elementární prvek tenké desky o rozměrech $dx \cdot dy \cdot h$ a vyjádříme si vztahy pro jednotlivá zatížení působící na tento prvek. Pomocí těchto vztahů a rovnic pro statickou rovnováhu ve směrech os x, y a z se dopracujeme k pohybové rovnici tenké desky. Na uvolněném prvku, dle obrázku 2.3, máme vyznačené vnitřní síly, pro které dokážeme

2 POHYBOVÉ ROVNICE KMITAJÍCÍ DESKY



Obrázek 2.3: Uvolněný elementární prvek tenké desky (Převzato z [3])

následujícími vztahy určit jejich hodnotu. Pro ohybové momenty M_1, M_2, M_3, M_4 platí:

$$\begin{aligned} M_1 &= m_x dy \\ M_2 &= \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx \right) dy \\ M_3 &= m_y dx \\ M_4 &= \left(m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y} dy \right) dx \end{aligned} \quad (2.24)$$

pro kroutící momenty K_1, K_2, K_3, K_4 platí:

$$\begin{aligned} K_1 &= m_{xy} dx \\ K_2 &= \left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy \right) dx \\ K_3 &= m_{yx} dx \\ K_4 &= \left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} dx \right) dy \end{aligned} \quad (2.25)$$

a pro posouvající síly Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 platí:

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_x dy \\ Q_2 &= \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy \\ Q_3 &= q_y dx \\ Q_4 &= \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx \end{aligned} \quad (2.26)$$

2 POHYBOVÉ ROVNICE KMITAJÍCÍ DESKY

Tímto máme vyjádřené výslednice jednotlivých měrných momentů a sil. Nyní je možné sestavit rovnice rovnováhy spjaté k těžišti elementárního prvku.

$$\begin{aligned}\sum M_{i,x} &= 0, \\ \sum M_{i,y} &= 0, \\ \sum F_{i,z} &= 0,\end{aligned}\tag{2.27}$$

Dosadíme za všechny síly a momenty do příslušných rovnic.

$$\begin{aligned}\sum M_{i,x} &= M_1 - M_2 + K_1 - K_2 + Q_1 \frac{dx}{2} + Q_2 \frac{dx}{2} = 0 \\ \sum M_{i,x} &= m_x dy - \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx \right) dy + m_{xy} dx - \left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy \right) dx + q_x \frac{dx}{2} dy = 0 \\ \sum M_{i,x} &= -\frac{\partial m_x}{\partial x} dx dy - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dx dy + \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{dx dy}{2} + q_x dx dy = 0\end{aligned}\tag{2.28}$$

Rovnici 2.28 podělíme členem $-dx dy$ a člen $\frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{dx dy}{2}$ předpokládáme v porovnání s ostatními členy zanedbatelně malý, tudíž ho zanedbáme. [2] Tím pádem se nám rovnice zjednoduší na:

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}\tag{2.29}$$

Obdobným způsobem přistoupíme ke zbývajícím rovnicím rovnováhy a dostaneme vztahy ve tvaru:

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x}\tag{2.30}$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p = 0,\tag{2.31}$$

kde p reprezentuje spojitě plošné zatížení a platí $p = F dx dy$ Když rovnice 2.29 a 2.30 dosadíme do rovnice 2.31 a provedeme příslušné derivace, získáme rovnici ve tvaru:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p\tag{2.32}$$

Nyní do rovnice 2.32 dosadíme z rovnic 2.15, 2.17 a 2.18 vztahy pro ohybové a kroutící momenty a získáme tím po úpravě pohybovou rovnici tenké desky ve tvaru:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}\tag{2.33}$$

Jedná se o parciální, lineární a nehomogenní diferenciální rovnici čtvrtého řádu. [3] Pro případ řešení kmitání desky, musí být do diferenciální rovnice přidán člen, vycházející z 2. Newtonova pohybového zákona a to ve tvaru: $\rho t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ [7]. Výsledná rovnice pro kmitající

2 POHYBOVÉ ROVNICE KMITAJÍCÍ DESKY

desku by pak tedy měla tvar:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\rho t}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{p}{D}, \quad (2.34)$$

kde ρ je hustota materiálu, ze kterého je deska vyrobená a $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ je zrychlení ve směru osy z .

2.1.4 Okrajové podmínky

Kirchhoffova teorie je obdobou teorie ohybu prutu, kde je ohyb prutu dán Bernoulliho diferenciální rovnicí (diferenciální rovnice ohybové čáry) a proto se dá i k okrajovým podmínkám přistupovat obdobně jako u ohybu prutu. Rovnice desky je diferenciální rovnice 4. řádu, a má 2 proměnné x a y . Obecně pro řešení rovnice ($w(x, y)$) musíme čtyřikrát zintegrovat rovnici desky podle x a čtyřikrát podle y . Tím nám vznikne 8 integračních konstant, které musíme určit na základě okrajových podmínek, popisujících uložení desky. Okrajové podmínky by pro jednotlivá uložení desky vypadaly následovně.

Prostý podepřený okraj

Podpěra brání průhybu desky v jednom směru a když se jedná pouze o podepřenou desku, nemá na ní jak vzniknout žádný ohybový moment přímo na okraji desky. Tudíž pro prostě podepřený okraj desky sestavíme okrajové podmínky jako nulový průhyb a nulový ohybový moment v daném směru.[3] [7]

$$w = 0 \quad m_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.35)$$

Z deformační podmínky 2.35 plyne, že:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.36)$$

Volný okraj

Pro volný okraj desky je nulový ohybový moment a posouvající síla:

$$M_x = 0 \quad Q_x = 0, \quad (2.37)$$

tyto podmínky platí, protože na volném okraji na desku nepůsobí žádné síly, tudíž tam nemají jak vzniknout reakční síly.

Vetknutý okraj

Vazba vetknutím odebírá všechny stupně volnosti, tudíž předpokládáme nulový průhyb i natočení a platí:

$$w = 0 \quad \vartheta_x = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (2.38)$$

Stejně tak musí být nulová i křivost, tedy druhá derivace průhybu:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \dots = \frac{\partial^i w}{\partial y^i} = 0 \quad (2.39)$$

Z vnitřních sil je nulový kroučící moment w_{xy} a tvar ohybových momentů m_x a m_y se zjednoduší.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= 0 \\ m_x &= -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ m_y &= -D\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \mu m_x \end{aligned} \quad (2.40)$$

2.1.5 Řešení deskové rovnice

Jelikož byla rovnice desky (2.33) odvozena na základě Hookova zákona, je použitelná pouze pro případy s deskou z Hookovského materiálu. To znamená, že materiál musí být izotropní a lineárně pružný. Rovnice je řešitelná pouze v jednoduchých případech. Konkrétně, má-li deska tvar obdélníku nebo čtverce, je jednoduše zatížená a podepřená. Pro případ kruhové desky se v teorii pružnosti a pevnosti využívá symetrie a odvození pro válcový souřadnicový systém. Pro složitější případy je potřeba využít numerických metod. Například:

- Metoda hraničních prvků
- Ritzova metoda
- Metoda sítí
- Metoda konečných prvků (MKP)

Na základě zadání, bude při tvorbě modelu využito metody konečných prvků (MKP).

2.2 Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků je variační metoda vycházející z *Lagrangeova variačního principu*, který lze formulovat: „Mezi všemi funkcemi posuvů, které zachovávají spojitost tělesa a splňují geometrické okrajové podmínky, se realizují ty, které udílejí celkové potenciální

2 POHYBOVÉ ROVNICE KMITAJÍCÍ DESKY

energii Π stacionární hodnotu.“ [5] Hodnota Π lze určit jako:

$$\Pi = W - P, \quad (2.41)$$

kde W představuje energii napjatosti tělesa Ω

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot dV \quad (2.42)$$

a P představuje potenciál vnějšího zatížení

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{o} \cdot dV + \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p} \cdot dS \quad (2.43)$$

Ve vztazích 2.42 a 2.43 vystupují sloupcové matice:

- posuvů	$\mathbf{u}^T = [u, v, w]$
- přetvoření	$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}]$
- napětí	$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}]$
- objemového zatížení	$\mathbf{o}^T = [o_x, o_y, o_z]$
- plošného zatížení	$\mathbf{p}^T = [p_x, p_y, p_z]$

3 MKP model kmitající desky

Na základě zadání bylo rozhodnuto o vytvoření modelu desky a následných výpočtů vlastních tvarů a frekvencí, za pomoci metody konečných prvků (MKP). Pro vytvoření modelu desek, a provedení výpočtů, byl využit software *ANSYS Workbench 2019*. První byla navržena plexisklová deska, na které došlo k seznámení s prostředím softwaru. Poté byly navrženy další dvě desky z oceli.

3.1 Model desky

Pro vytvoření výpočtového modelu, je v Ansysu potřeba nastavit několikero věcí ohledně zkoumaného tělesa. Je třeba zavést vlastnosti použitého materiálu, vytvořit model tělesa, vytvořit výpočtovou síť tělesa, vybrat typ analýzy a nastavit parametry analýzy.

3.1.1 Vlastnosti materiálu

Do bloku „Engineering Data“ v modelu, který definuje materiál, je třeba nastavit vlastnosti materiálu. Jmenovitě: Youngův modul pružnosti v tahu - E , hustota materiálu - ρ , Poissonův poměr - κ a případně koeficient teplotní roztažnosti. Jako materiál desky bylo zvoleno plexisklo a ocel, a tak byly v modelu nastaveny hodnoty parametrů (viz tabulka 3.1 a 3.2):

Parametr	Hodnota
E	$3,25GPa$
ρ	$1,18 \cdot 10^{-6}kg/m^3$
κ	$0,45$

Tabulka 3.1: Tabulka vlastností plexiskla

Parametr	Hodnota
E	$210GPa$
ρ	$7850kg/m^3$
κ	$0,3$

Tabulka 3.2: Tabulka vlastností oceli

3.1.2 Vytvoření modelu desky

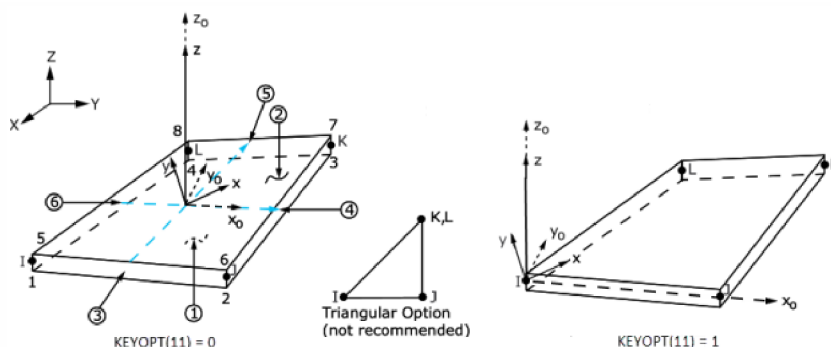
V ANSYSu je možné vytvořit model tělesa ve dvou různých prostředích. Buď „Design Modeler“ anebo „SpaceClaim“. Obě prostředí jsou pro znázornění desky vhodná. Pro vytvoření modelu desky bylo využito prostředí Design Modeleru. Pro vytvoření modelu stačí těleso (v našem případě desku) načrtnout a z náčrtku lze vytvořit těleso buď jako skořepinový útvar pomocí elementárních prvků typu SHELL, nebo jako těleso na základě 3D elementárních prvků (např.: SOLID). Jelikož tenká deska má velmi podobný charakter skořepině, je vhodné využít prvku SHELL.

3.2 Síť - Mesh

MKP funguje na principu rozdělení tělesa na malé části, tzv. prvky. Tyto prvky tvoří síť a mají na vrcholech uzly, pro které se vypočítají jednotlivé veličiny a pro vyobrazení se využije aproximace výsledné hodnoty všech uzlů na jednom prvku. Tloušťka desky se zadává jako vstupní parametr.

3.2.1 Prvek SHELL181

SHELL181 je prvek vhodný pro analýzy tenkostěnných struktur jako jsou tenké desky. Každý prvek má čtyři uzly a šest stupňů volnosti. Na obrázku 3.1 jsou uzly označeny



Obrázek 3.1: Geometrie elementárního prvku SHELL181 (Převzato z [1])

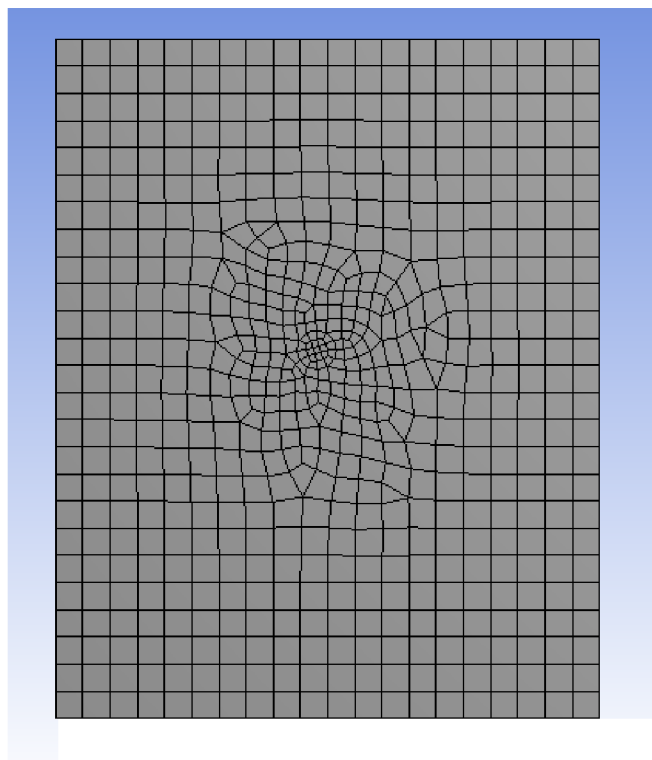
písmeny I, J, K, L . 2D prvek má výhodu oproti prostorovým prvkům v tom, že má méně uzlů, tudíž je menší náročnost výpočtu.

3.2.2 Optimalizace sítě

Pro vytvoření optimální sítě je potřeba vyřešit dva základní problémy. První problém, který nastal bylo vytvoření symetrické sítě a druhý problém bylo zvolení velikosti prvků, aby byl výsledek relevantní.

Symetrie sítě

Jelikož bylo modelováno uložení desky upevněné ve středu za pomoci kulatého šroubu. Zároveň je deska tímto šroubem i buzená. Kulatý otvor se čtvercovými prvky opisuje velmi obtížně, a proto se při automatické tvorbě sítě začnou prvky v okolí kruhového otvoru zmenšovat a síť se v dané oblasti nahustí. Nahuštěním se síť stává značně nesymetrickou (viz obrázek 3.2) a to v důsledku výrazně ovlivňuje výsledky výpočtů: Jelikož bude mo-



Obrázek 3.2: Příklad nesymetrické sítě

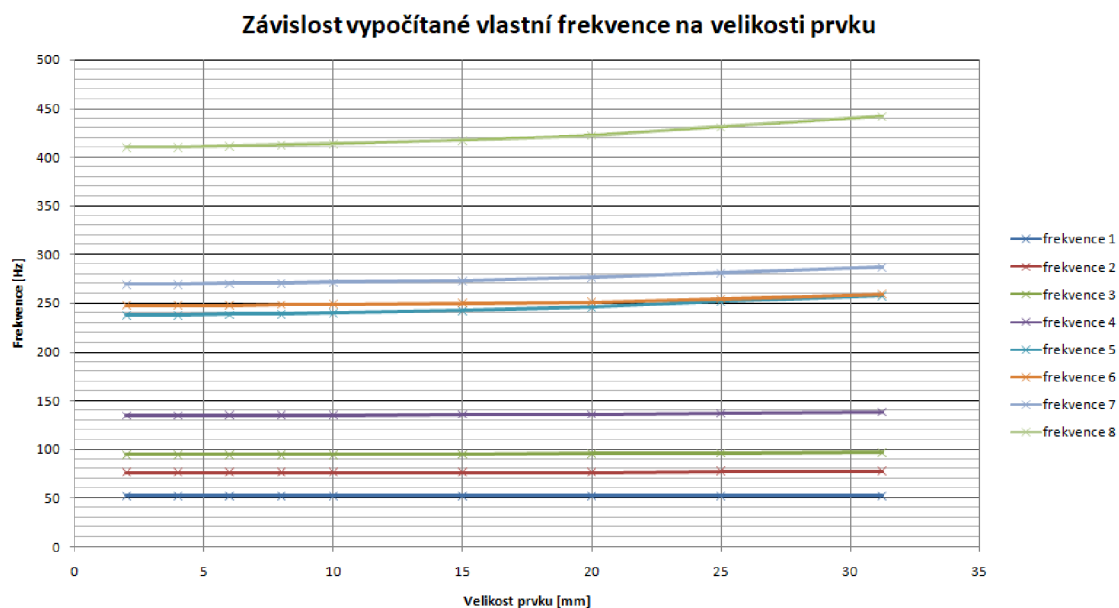
delována deska buzená středem, je pro zatížení nezbytné, mít oddělenou oblast, a proto nelze kruhovou plochu ve středu desky jednoduše vypustit. Se sítí lze pracovat několika způsoby. Lze nastavit maximální velikost prvku a dále lze rozdělit síť do několika oblastí.

Volba velikosti prvku

MKP je přibližná výpočetní metoda a její přesnost je úměrná parametrům sítě tělesa, především tedy velikosti jednotlivých prvků sítě. Čím jemnější je síť, tím přesnější je výsledek. Na druhou stranu s jemnější sítí se výrazně prodlužuje doba výpočtu a to by mohlo u složitějších těles být problém, jelikož by jeden výpočet mohl trvat i několik dní. Deska modelována je na studentské licenci softwaru *ANSYS Workbench 2019*. Ve studentské verzi je omezený maximální rozměr výpočtové matice a to omezuje nejmenší možná rozměr prvku sítě pro náš výpočet.

Z grafu na obrázku 3.3 je dobře vidět, že vypočtené vlastní frekvence z modální analýzy jsou pro malé frekvence téměř stejné, nezávislé na velikosti prvku sítě. Pro vyšší frekvence

3 MKP MODEL KMITAJÍCÍ DESKY



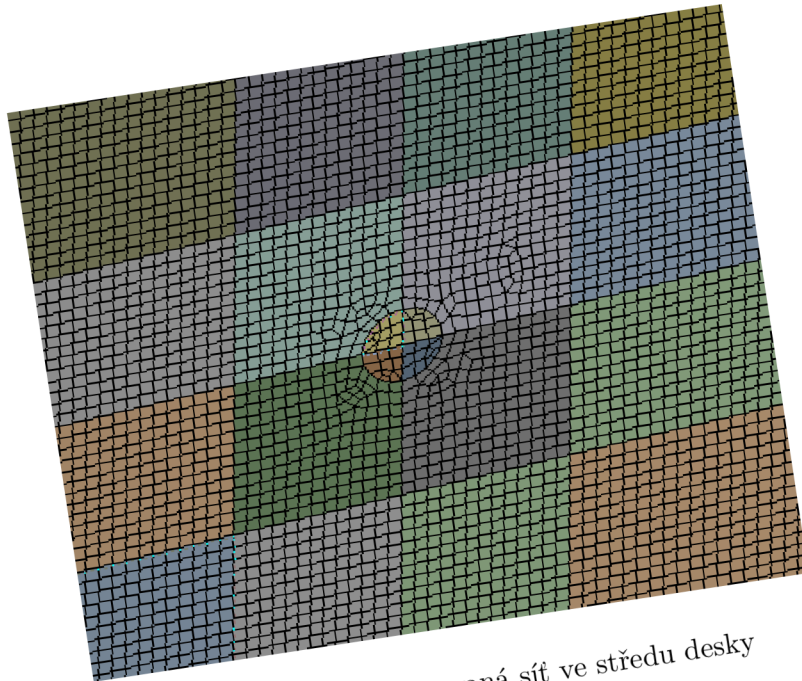
Obrázek 3.3: Graf závislosti vypočítaných vlastních frekvencí na velikosti prvku sítě

jsou tyto rozdíly ve výsledku ovšem znatelné a proto je potřeba nastavit jemnější síť, aby se dosáhlo přesnějších výsledků. Spodní hranicí pro omezení velikosti prvku je maximální povolené množství uzlů sítě a převedeno na rozměr kovové desky $250 \times 250 \text{ mm}$ vychází nejmenší možný prvek na necelé 2 mm . Pro výpočty byl tedy pro všechny případy nastaven rozměr prvku na 2 mm

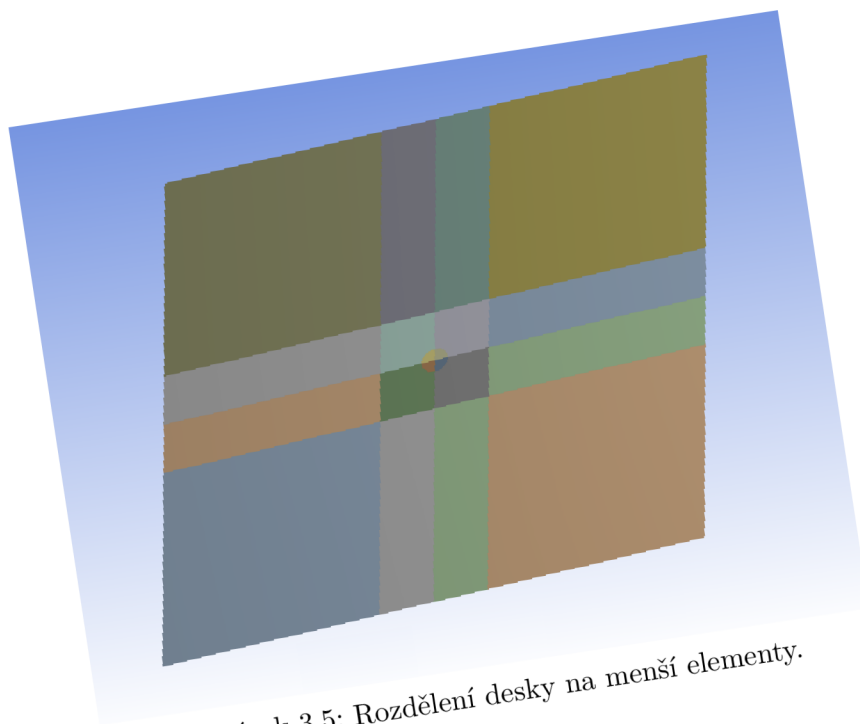
Rozdělení na podoblasti

Při tvoření modelu desky v ANSYSu je možné rozřezat desku na menší části, které budou mít pouze oddělenou síť, ale budou se nadále chovat jako jedno těleso. Tímto rozdělením se zabrání deformaci sítě po celé desce a tato deformace zůstane pouze v menší středové oblasti (viz. obrázek 3.4). Tímto omezením se zároveň deformace sítě stane menší a vznikají tak menší nesymetrie (viz. obrázek 3.4 v porovnání s 3.2). Výsledné rozdělení desky na elementy je možné vidět na obrázku 3.5.

3 MKP MODEL KMITAJÍCÍ DESKY



Obrázek 3.4: Deformovaná síť ve středu desky



Obrázek 3.5: Rozdělení desky na menší elementy.

3.3 Modální analýza

Modální analýza je metoda výpočtu, kterou lze využít pro identifikaci základních modálních vlastností tělesa (vlastní frekvence, vlastní tvar, ...). Těleso je možné upevnit vazbami, a tím ovlivnit okrajové podmínky, a tím pádem i výsledné tvary a vlastní frekvence. V modální analýze byla nasimulována deska s omezeným pohybem ve středu desky pro směr osy z . Rozsah vyšetřované oblasti je možné omezit buď počtem nalezených módů nebo rozsahem zkoumaných frekvencí. V plánovaném experimentu byl rozsah frekvencí omezen parametry elektrodynamického shakeru na rozsah ($0\text{Hz} - 1\text{kHz}$). Je možné nastavit maximální počet vypočtených vlastních tvarů v nastavení analýzy. Modální analýza byla provedena pro tři desky. První deska byla vyrobena z plexiskla ve tvaru obdélníku o rozměrech $291 \times 246\text{mm}$ a tloušťku $3,7\text{mm}$. Následovaly dvě desky z oceli. První byla čtvercová deska o rozměrech $250 \times 250\text{mm}$ a s tloušťkou 1mm . Druhá deska byla navržena ve tvaru obdélníku o rozměrech $350 \times 175\text{mm}$ a a tloušťce 1mm .

3.3.1 Vyhodnocení výsledných tvarů

Z modální analýzy vyjde řada frekvencí a jím příslušících vlastních tvarů. Je důležité podotknout, že ne všechny tvary, které se získají z modální analýzy, je možné vyvolat libovolným buzením. V našem případě je simulováno buzení desky středem, a ne všechny tvary, které vyšly z modální analýzy, jsou reálně tímto buzením dosažitelné.

3.3.2 Vlastní frekvence získané z modální analýzy

Z modální analýzy byly získány vlastní tvary a frekvence desek. V následujících tabulkách 3.3, 3.4 a 3.5 je uvedeno prvních 30 módů pro každou desku.

Další charakteristický tip výsledku je prvních 5 vlastních tvarů. Omezením pohybu ve směru osy z je desce odebrán jeden stupeň volnosti. Tím pádem zůstane 5 stupňů volnosti a pro každý z nich vyjde vlastní tvar při nulové frekvenci a pohybu v daném směru do teoretického nekonečna. Když má některý z těchto prvních pěti vlastních tvarů frekvenci různou od nuly, je to způsobené drobnou nesymetrií či nepravidelností sítě. Z praktického hlediska jsou to ovšem nepodstatné výsledky a čísla jsou tak malá, že jsou v podstatě rovné nule.

3 MKP MODEL KMITAJÍCÍ DESKY

Mode	Frekvence [Hz]	Mode	Frekvence [Hz]
1	0	16	369,43
2	0	17	417,63
3	0	18	450,38
4	1,5915e-004	19	495,37
5	1,8441e-004	20	500,74
6	48,847	21	637,9
7	53,075	22	639,88
8	83,753	23	644,98
9	132,18	24	699,63
10	149,66	25	733,67
11	198,77	26	766,97
12	226,1	27	870,02
13	264,26	28	913,75
14	311,41	29	960,73
15	356,86	30	982,9

Tabulka 3.3: Vlastní frekvence získané z modální analýzy desky z plexiskla

Mode	Frekvence [Hz]	Mode	Frekvence [Hz]
1	0	16	356,38
2	0	17	409,87
3	0	18	409,87
4	0	19	458,34
5	0	20	511,39
6	45,08	21	511,39
7	52,74	22	563,92
8	76,99	23	597,19
9	135,27	24	630,81
10	135,27	25	771,78
11	184,42	26	771,78
12	237,67	27	794,28
13	237,67	28	834,85
14	269,27	29	837,28
15	301,6	30	837,28

Tabulka 3.4: Vlastní frekvence získané z modální analýzy čtvercové desky

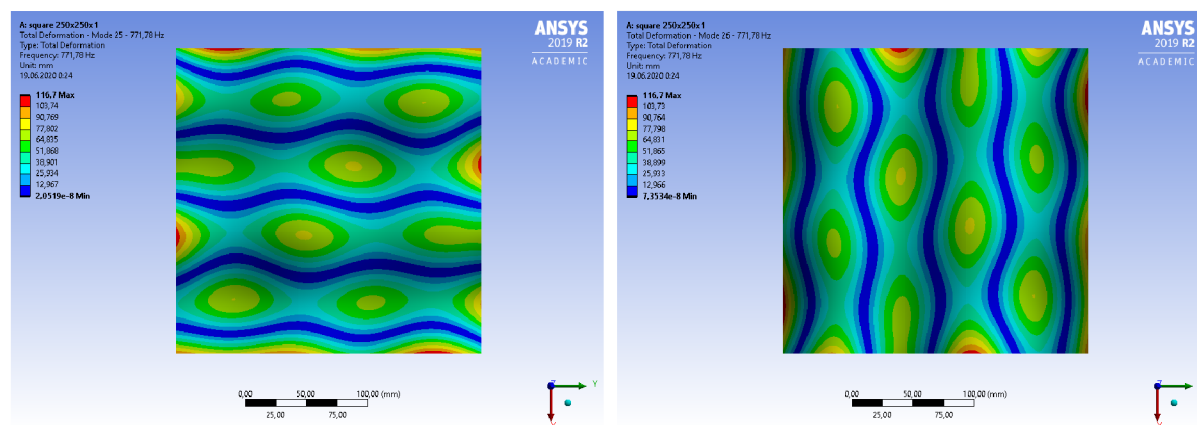
3 MKP MODEL KMITAJÍCÍ DESKY

Mode	Frekvence [Hz]	Mode	Frekvence [Hz]
1	0	16	384,62
2	0	17	401,54
3	3,536e-004	18	440,66
4	2,0961e-003	19	467,94
5	2,2688e-003	20	486,76
6	27,63	21	517,75
7	23,163	22	565,02
8	112,03	23	586,62
9	115,98	24	669,67
10	118,31	25	698
11	202,33	26	710,77
12	206,36	27	753,58
13	211,57	28	820,21
14	247,69	29	859,89
15	317,84	30	900,32

Tabulka 3.5: Vlastní frekvence získané z modální analýzy obdélníkové desky

3.3.3 Vybrané vlastní tvary

Všechny vlastní tvary a vlastní frekvence získané z modální analýzy lze najít v Přílohách. Příloha A - pro desku z plexiskla, příloha B - pro čtvercovou desku z oceli, a Příloha C - pro obdélníkovou desku z oceli.



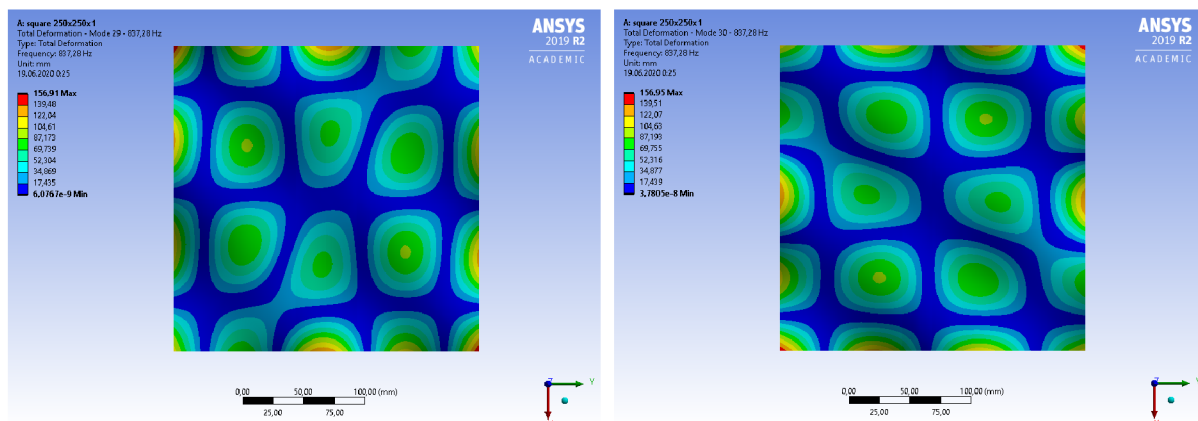
(a) Mode 25 čtvercové desky

(b) Mode 26 čtvercové desky

Obrázek 3.6: Dva módy o stejné frekvenci

U pravidelných desek, jako je například čtverec, může během modální analýzy nastat situace, kdy máme dva vlastní tvary pro jednu vlastní frekvenci. Tvary jsou totožné, akorát každý případ je natočený pro jiný směr. Tato situace nastane pouze v modelu s dostatečně pravidelnou sítí a můžeme ji vidět u modů čtvercové desky (viz obrázky 3.6, 3.7) nebo v tabulce vypočítaných hodnot 3.4. Pokud by v síti nastala znatelná nesymetrie nebo nepravidelnost sítě, pak by módy měli mírně odlišnou frekvenci.

3 MKP MODEL KMITAJÍCÍ DESKY

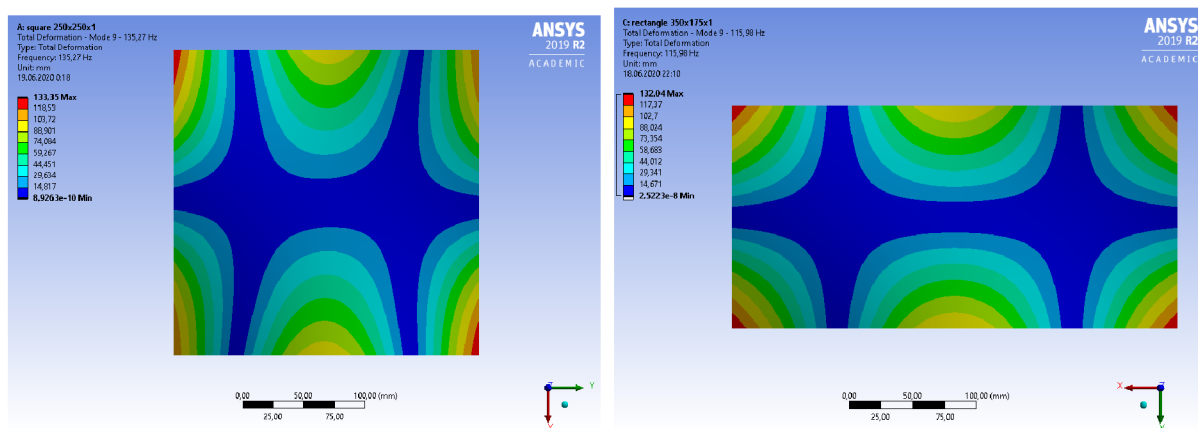


(a) Mode 29 čtvercové desky

(b) Mode 30 čtvercové desky

Obrázek 3.7: Dva módy o stejné frekvenci

Některé vlastní tvary pravoúhlých desek jsou si velmi podobné, ikdyž je poměr stran výrazně rozdílný (1 : 1 a 2 : 1). Tento jev je dobře vidět na obrázcích 3.8a a 3.8b.



(a) Mode 9 čtvercové desky

(b) Mode 9 obdélníkové desky

Obrázek 3.8: Obdobné vlastní tvary obdélníkové a čtvercové desky

3.4 Harmonická analýza

Druhý tip analýzy, kterému byly desky podrobeny, je harmonická analýza. Výpočet proběhl za pomoci modulu „Harmonic response“. Tato analýza, na rozdíl od analýzy modální, zohlední i způsob buzení desky a získáme tak pouze vlastní frekvence odpovídající našemu způsobu buzení desky.

3.4.1 Nastavení harmonické analýzy

Pro harmonickou analýzu lze nastavit rozsah frekvencí, pro které se provede výpočet. Lze zadat na kolik částí se má frekvenční rozsah rozdělit. Po výpočtu ANSYS vykreslí

3 MKP MODEL KMITAJÍCÍ DESKY

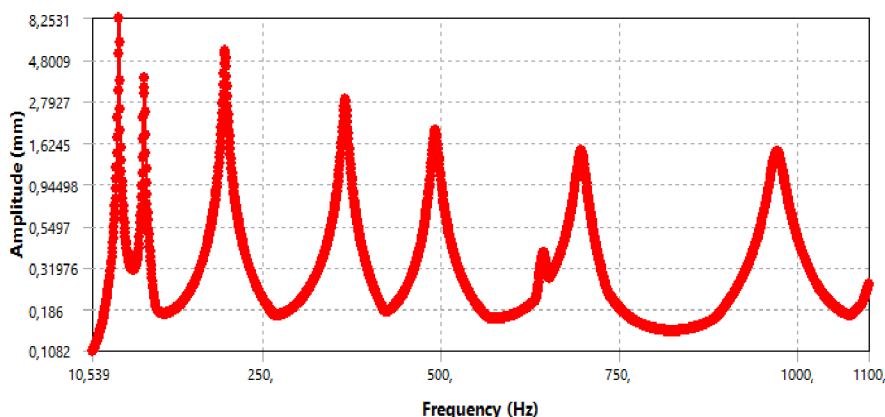
frekvenční charakteristiku, ze které se vyčtou rezonanční frekvence a maximální výchylky.

Zvolené parametry harmonické analýzy

Vlastnosti materiálu (viz tabulka: 3.1 a 3.2) a síť byla nastavena totožně s nastavením v modální analýze, protože Ansys umožňuje sdílet data mezi jednotlivými analýzami, tím se zajistí i adekvátní provázání obou analýz. Zkoumaný rozsah frekvencí byl navolen opět na (0Hz - 1kHz) a byl rozdělen na 3000 intervalů. Deska byla buzená „definovaným posuvem“ ve směru osy z o hodnotě $0,1\text{mm}$.

3.4.2 Výsledky harmonické analýzy

Analýzou se snažíme odhadnout, jaké vlastní tvary se podaří vyvolat na desce buzené ve středu desky. Jelikož projev Chladniho obrazců je podstatná výchylka desky ve směru z , zkoumáme deformaci desky ve směru osy z . Vykreslením amplitudy výchylky v závislosti na frekvenci získáme frekvenční charakteristiku desky.



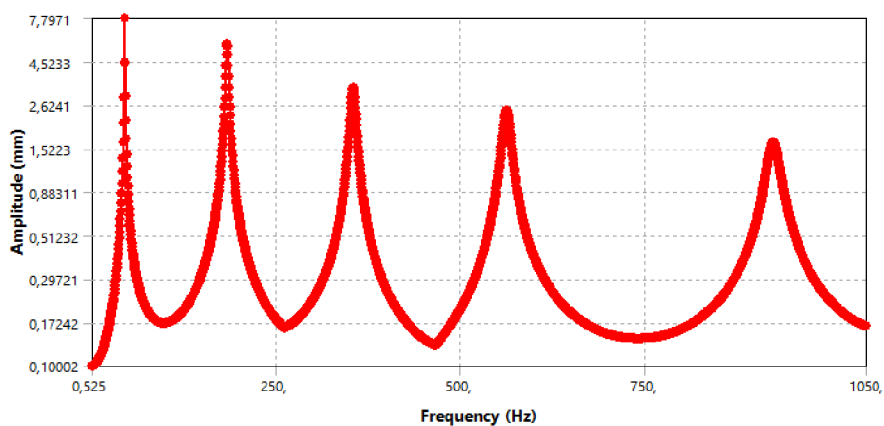
Obrázek 3.9: Závislost amplitudy výchylky ve směru osy z na frekvenci - plexi-deska

Vlastní tvar [poř. č.]	Frekvence [Hz]
1	48,24
2	83,24
3	196,87
4	365,43
5	491,99
6	696,1
7	971,29

Tabulka 3.6: Vlastní frekvence získané z Harmonické analýzy plexi-desky

Z grafů 3.9, 3.10 a 3.11 lze vidět, že výchylky při rezonanční frekvenci jsou mnohonásobně větší než výchylky o jiných frekvencích. Teoreticky by pro přesnou rezonanční frekvenci měly výchylky vyjít nekonečně, reálně však taková situace nemůže nastat. Z harmonické

3 MKP MODEL KMITAJÍCÍ DESKY



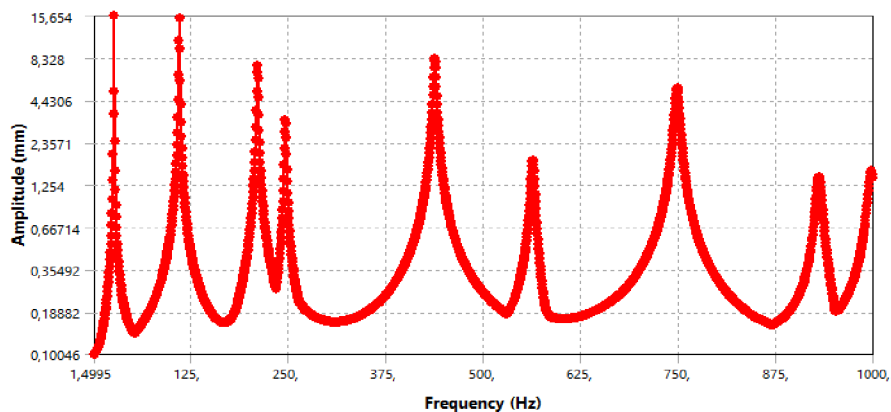
Obrázek 3.10: Závislost amplitudy výchylky ve směru osy z na frekvenci - čtvercová deska

Vlastní tvar [poř. č.]	Frekvence [Hz]
1	44,63
2	183,75
3	354,9
4	562,8
5	924,53

Tabulka 3.7: Vlastní frekvence získané z Harmonické analýzy čtvercové desky

analýzy byly tímto získány vlastní frekvence desky odpovídající jejímu uložení a tyto tvary bude snaha najít během experimentu.

3 MKP MODEL KMITAJÍCÍ DESKY



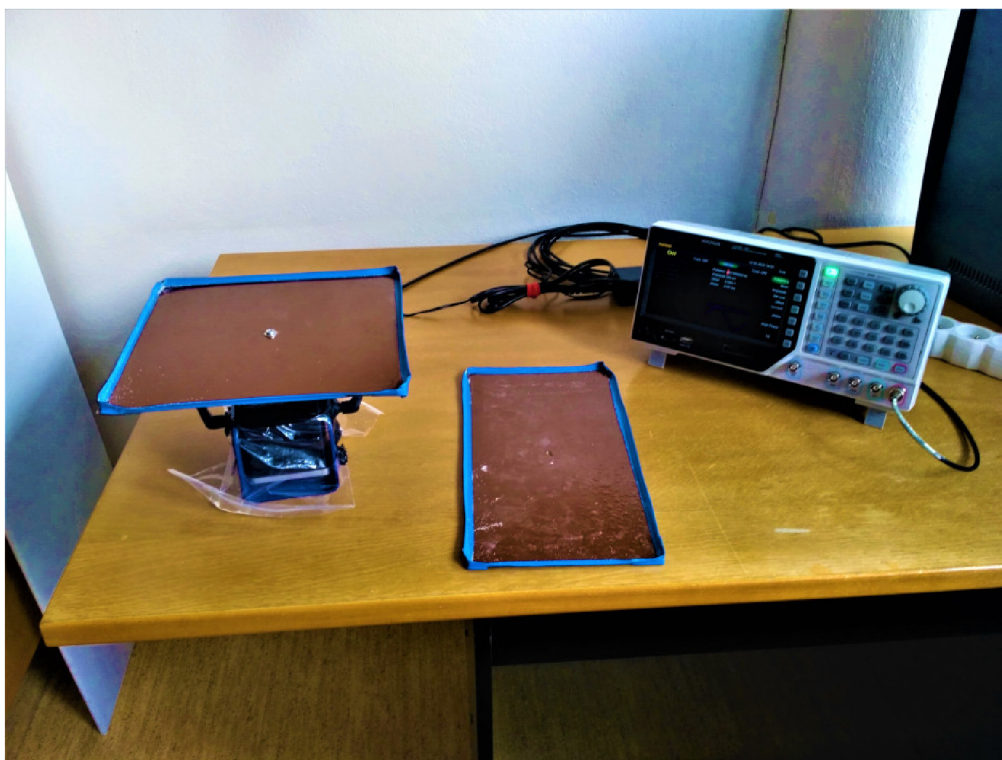
Obrázek 3.11: Závislost amplitudy výchylky ve směru osy z na frekvenci - obdélníková deska

Vlastní tvar [poř. č.]	Frekvence [Hz]
1	27,47
2	111,39
3	211,29
4	247,25
5	438,56
6	564,44
7	749,25
8	931,57
9	998
10	1102,3
11	1223,5

Tabulka 3.8: Vlastní frekvence získané z Harmonické analýzy obdélníkové desky

4 Experiment - kmitající desky

Pro experiment byly navrženy celkem tři desky. První deska byla vyrobená z plexiskla a měla rozměry $291 \times 246 \times 3,7 \text{ mm}$. Pomocí této desky proběhlo první ověření výsledků z Ansysu. Po drobných úpravách modelu byly navrženy další dvě desky, tentokrát z oceli. Ocelové desky mají rozměry $250 \times 250 \text{ mm}$ pro čtvercovou a $175 \times 350 \text{ mm}$ pro obdélníkovou desku. Obě desky byly z ocelového plechu o tloušťce 1 mm . Během experimentu byly desky buzeny elektro-dynamickým shakerem K2007E01, ke kterému byla deska středem připevněna, a do kterého byl přiváděn sinusový signál z generátoru (viz obrázek 4.1). Na generátoru bylo možné nastavit frekvenci a amplitudu budícího signálu a tím se řídilo buzení desky v průběhu experimentu.

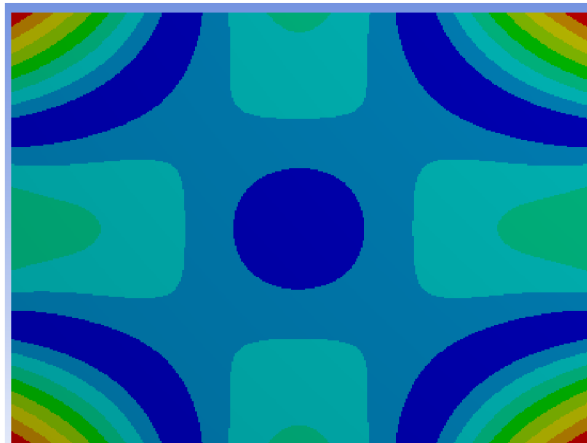


Obrázek 4.1: Experimentální soustava

Cílem experimentu najít vlastní tvary a frekvence desek, a porovnat je s výsledky z modelu v Ansysu. Experimentálně se vlastní frekvence daly najít podle sluchu. Jelikož při rezonančních frekvencích byl zvuk vydávaný deskou znatelně intenzivnější, bylo snadné rezonanční frekvence detekovat.

4.1 Deska z plexiskla

Pro desku z plexiskla byly nalezeny tři vlastní tvary shodující se s modelem. (4.2, 4.3, 4.4)

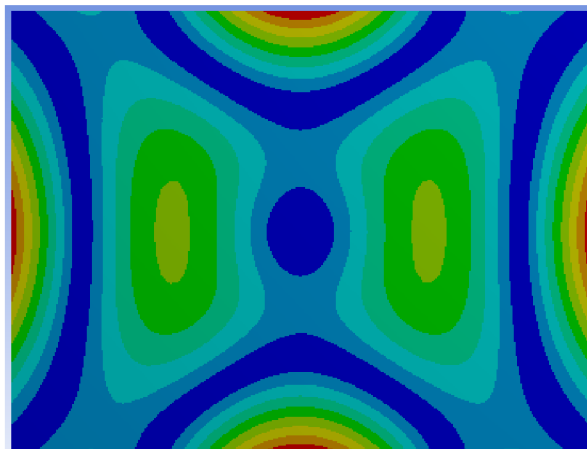


(a) Ansys - 196 Hz



(b) Experiment - 240 Hz

Obrázek 4.2: První nalezený vlastní tvar plexi-desky

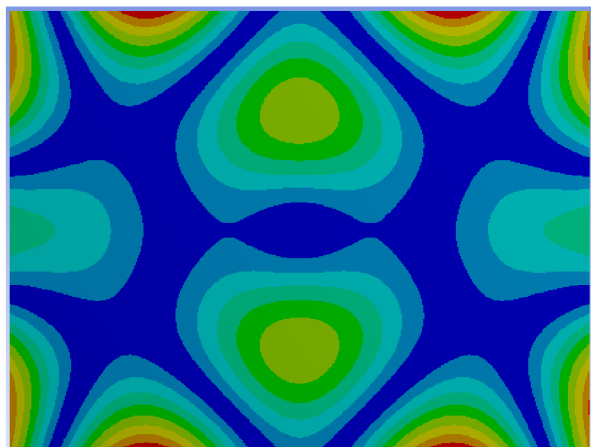


(a) Ansys - 365 Hz



(b) Experiment - 406 Hz

Obrázek 4.3: Druhý nalezený vlastní tvar plexi-desky



(a) Ansys - 421,99 Hz

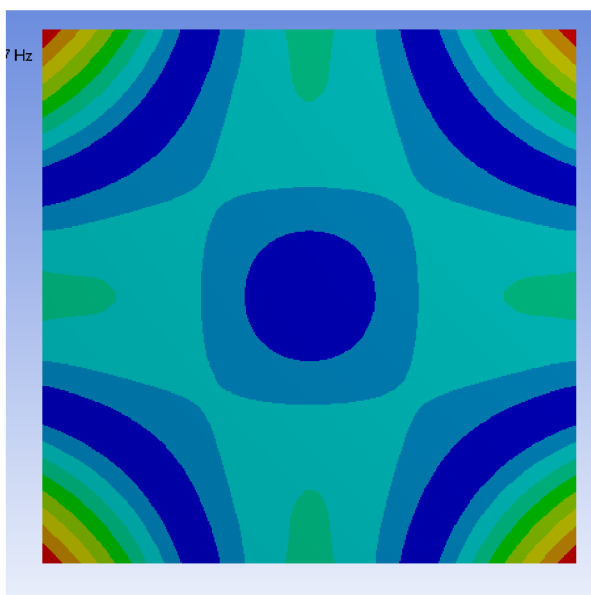


(b) Experiment - 538 Hz

Obrázek 4.4: Třetí nalezený vlastní tvar plexi-desky

4.2 Čtvercová deska z oceli

Pro čtvercovou ocelovou desku se podařilo najít čtyři vlastní tvary, které odpovídají modelu. (4.5, 4.6, 4.7, 4.8)



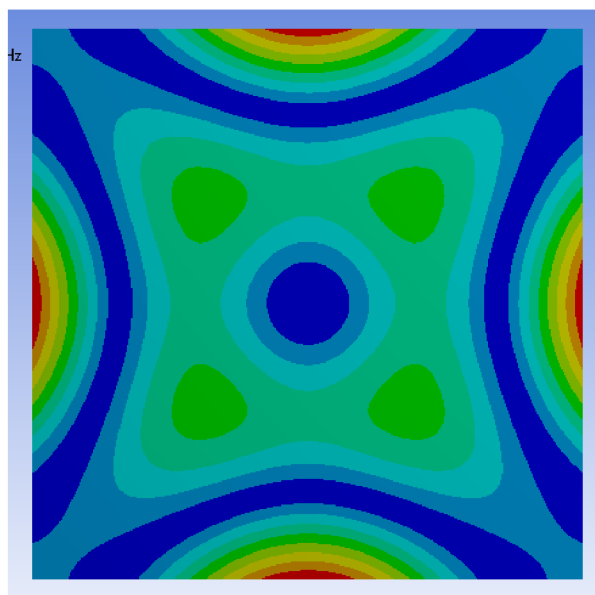
(a) Ansys - 183,75 Hz



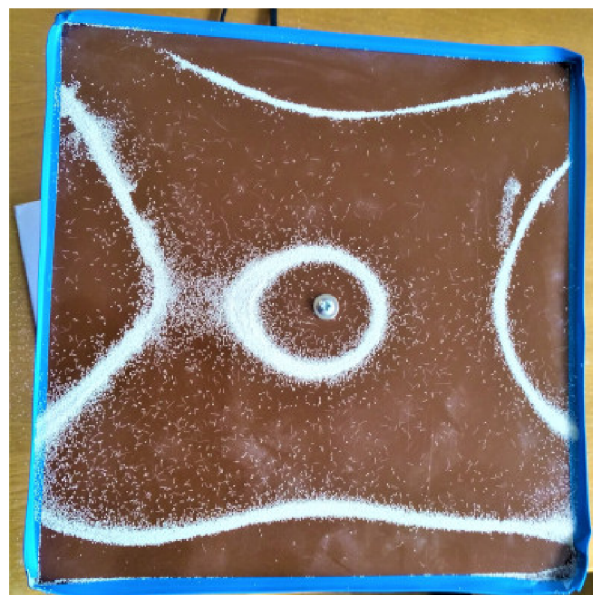
(b) Experiment - 211 Hz

Obrázek 4.5: První nalezený tvar čtvercové desky

4 EXPERIMENT - KMITAJÍCÍ DESKY

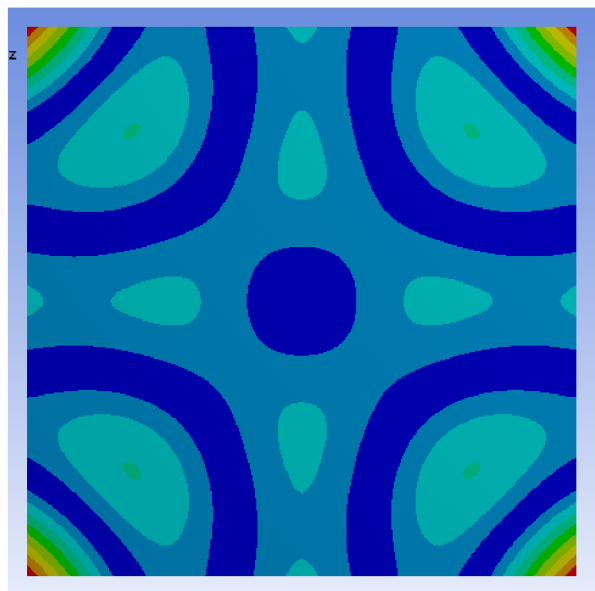


(a) Ansys - 354,9 Hz

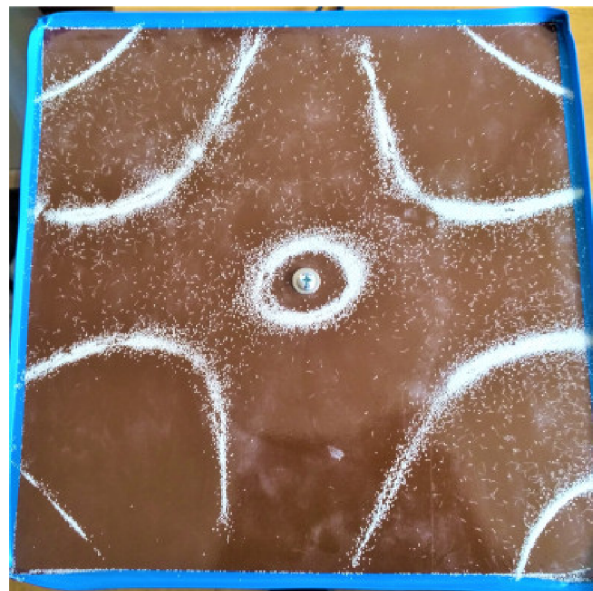


(b) Experiment - 370 Hz

Obrázek 4.6: Druhý nalezený tvar čtvercové desky

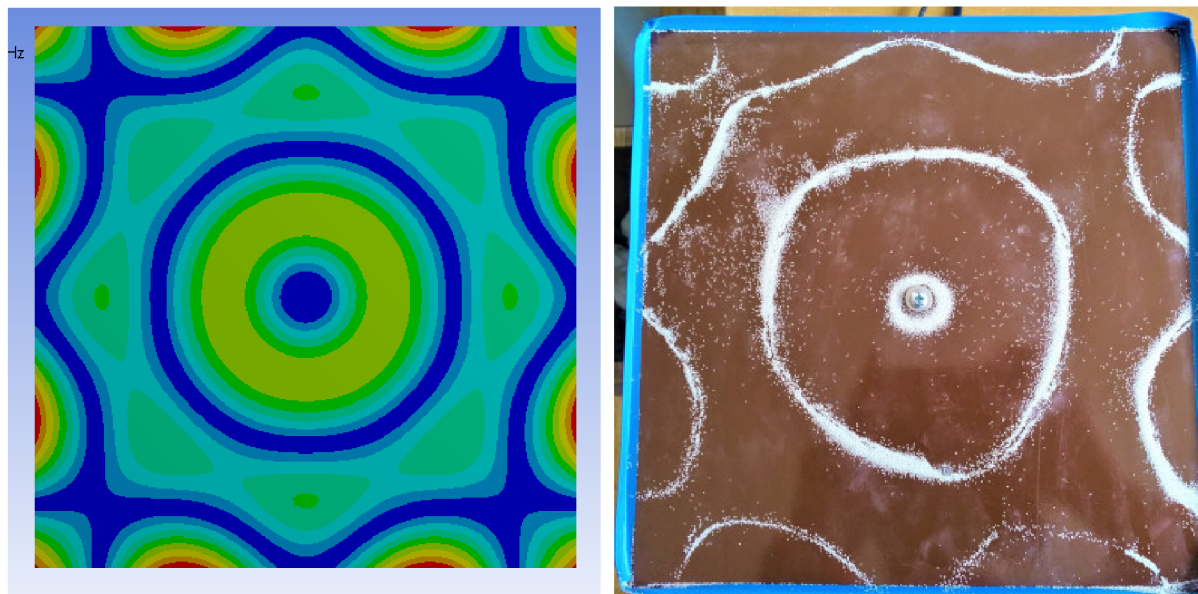


(a) Ansys - 562,8 Hz



(b) Experiment - 547 Hz

Obrázek 4.7: Třetí nalezený tvar čtvercové desky



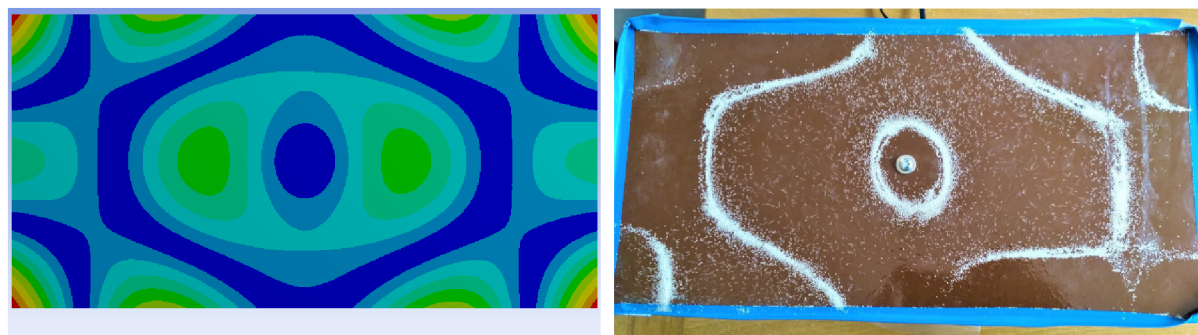
(a) Ansys - 924,53 Hz

(b) Experiment - 877 Hz

Obrázek 4.8: Čtvrtý nalezený tvar čtvercové desky

4.3 Obdélníková deska z oceli

Pro obdélníkovou desku vyrobenou z oceli se podařilo najít tři vlastní tvary odpovídající modelu. (4.9, 4.10, 4.11)

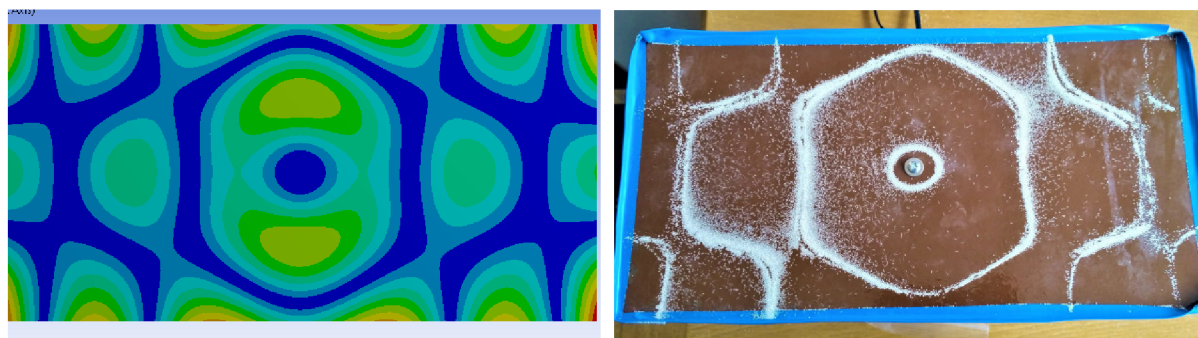


(a) Ansys - 439 Hz

(b) Experiment - 367 Hz

Obrázek 4.9: První nalezený vlastní tvar obdélníkové desky

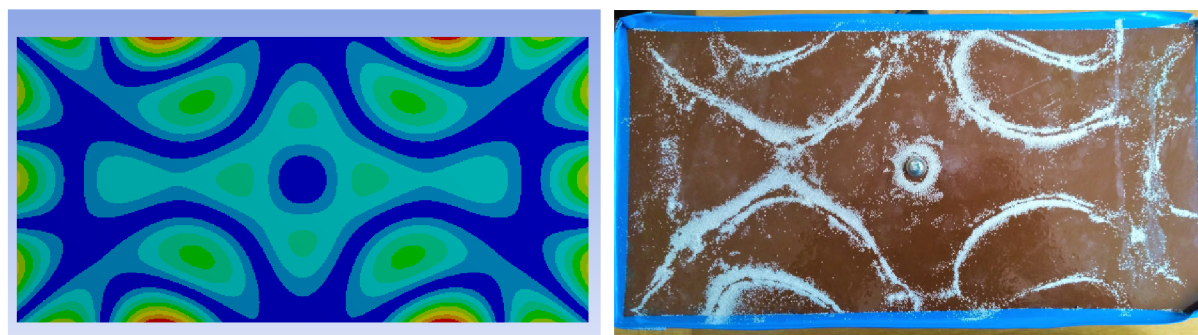
4 EXPERIMENT - KMITAJÍCÍ DESKY



(a) Ansys - 749 Hz

(b) Experiment - 601 Hz

Obrázek 4.10: Druhý nalezený vlastní tvar obdélníkové desky



(a) Ansys - 1223,5 Hz

(b) Experiment - 970 Hz

Obrázek 4.11: Třetí nalezený vlastní tvar obdélníkové desky

4.4 Odchylky výsledků

Frekvence jednotlivých naměřených vlastních tvarů se oproti frekvencím získaných z modelů liší. Tato odchylka je zapříčiněna tím, že model počítá s ideálním materiálem, izotropním po celém tělese. Na reálné desce se ale podepisují vady materiálu. Jde například o nečistoty v materiálu nebo degradaci materiálu mechanickou úpravou (např. řezání desky,...). Na fotkách z experimentu je vidět značné deformace tvarů. Další aspekt odlišnosti frekvencí je způsob zjišťování experimentálních frekvencí. Ačkoli jde o rezonanční frekvenci sluchem vcelku dobře rozeznat, obtížně se treťí daná frekvence naprosto přesně.

Frekvence Ansys [Hz]	Frekvence experiment [Hz]	Odchylka [%]
196	240	18,3
365	406	10,1
422	538	21,5

Tabulka 4.1: Odchylka frekvencí - plexi-deska

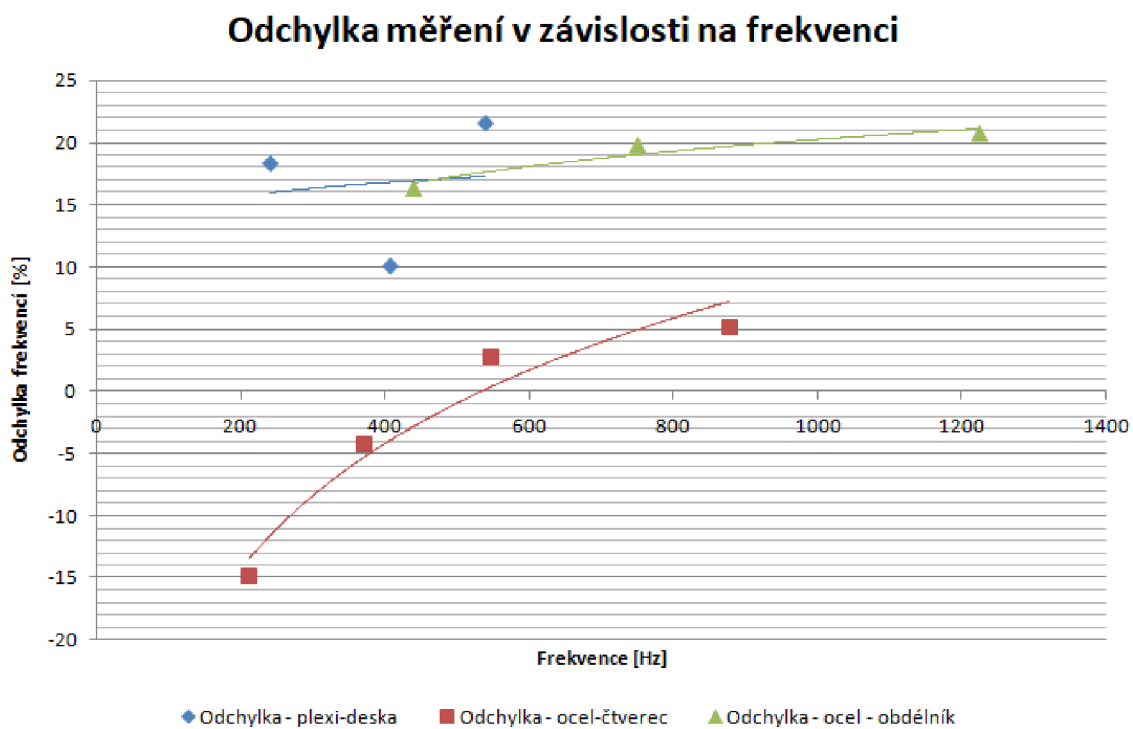
4 EXPERIMENT - KMITAJÍCÍ DESKY

Frekvence Ansys [Hz]	Frekvence experiment [Hz]	Odchylka [%]
183,75	211	-14,8
354,9	370	-4,3
562,8	547	2,8
924,53	877	5,1

Tabulka 4.2: Odchylka frekvencí - ocel-čtverec

Frekvence Ansys [Hz]	Frekvence experiment [Hz]	Odchylka [%]
438,56	367	16,3
749,25	601	19,8
1223,5	970	20,7

Tabulka 4.3: Odchylka frekvencí - ocel-obdélník



Obrázek 4.12: Graf: Závislost odchylky na frekvenci kmitání desky.

5 Závěr

Tato práce je rozdělena do tří hlavních částí. V první části je představena Kirchhoffova teorie tenkých desek, pomocí které byla odvozena pohybová rovnice tenké desky. Platí předpoklady, že deformace střednicové plochy jsou malé, že napětí σ_z je výrazně menší než σ_x a σ_y a zanedbává se, že body ležící na normále ke střednicové ploše před deformací, na ní leží i po deformaci (a ve stejné vzdálenosti od střednicové plochy), a že se body střednicové plochy pohybují pouze ve směru osy z . Odvodila se pohybová rovnice desky. Jedná se o nehomogenní parciální diferenciální rovnici čtvrtého řádu, která je platná pro Hookovský materiál, a je analyticky řešitelná pouze pro základní tvary desky jako je čtverec nebo obdélník. Pro složitější tvary se musí řešit za pomoci numerických metod.

V druhé části práce bylo popsáno vytvoření MKP modelu desky v softwarovém prostředí *ANSYS Workbench 2019*. Byly provedeny dvě výpočtové analýzy - Modální a Harmonická k navržení celkem tří desek. První navržená deska byla vyrobena z plexiskla o rozměrech $291 \times 246 \times 3,7 \text{ mm}$. Další dvě desky byly vyrobeny z oceli. První byla čtvercová o rozměrech $250 \times 250 \times 1 \text{ mm}$ a druhá byla obdélníková o rozměrech $350 \times 175 \times 1 \text{ mm}$. Z modální analýzy byly pro každou desku vypočítány vlastní tvary a frekvence. Modální analýza ovšem nezohledňuje způsob buzení desky, a proto byla provedena ještě harmonická analýza, která vyselektovala frekvence a tvary desek odpovídající buzení elektrodynamickým shakerem ve středu desky. MKP je přibližná metoda, a je důležité mít na paměti, že s rostoucími frekvencemi budou narůstat i početní nepřesnosti.

Třetí část práce popisuje experiment s reálnými deskami, které byly buzeny ve středu elektrodynamickým shakerem. Během experimentu byla snaha najít vlastní tvary a frekvence, získané z modelu, na reálné desce. Oblast zkoumaných frekvencí byla omezena parametry shakeru na rozsah přibližně 1 Hz - 1 kHz. Frekvence nalezených tvarů byly porovnány s hodnotami získaných z modelů. Odchyly pro plexi desku byly přibližně 10-20%, pro ocelovou čtvercovou desku přibližně 5-15% a pro ocelovou obdélníkovou desku přibližně 15-20%. Odchyly jsou poměrně velké a jsou způsobené nejspíše vadami materiálu vyrobených desek, například degradace materiálu při řezání plechu. Tyto vady se podepisují také na deformovaných tvarech obrazců. S rostoucí nepřesností modelu pro vyšší frekvence, narůstají i odchyly s frekvencemi získanými z experimentu.

Literatura

- [1] *ANSYS help database*, [Online databáze] Ansys Inc. [cit. 2020-05-20] Dostupné z URL: <https://ansyshelp.ansys.com/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v194/ans_elem/Hlp_E_SHELL181.html>
- [2] BROZOVSKY, Jiří a Materna Alois *Základy matematické teorie pružnosti* [online] Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západo-česká univerzita v Plzni [cit. 2020-05-12] Dostupné z: <http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/mat_teorie_pruznosti.pdf>
- [3] JIROUSEK, Ondřej *Přednáška 7, Desky, Kirchhoffova teorie tenkých desek, Odvození deskové rovnice*. [online] Ústav mechaniky a materiálů, Fakulta dopravní ČVUT [cit. 2020-04-05] Dostupné z: <http://mech.fd.cvut.cz/education/master/18tik/download/prednasky-2016-2017/07_desky.pdf>
- [4] KRATOCHVÍL, Ctirad a Jaromír SLAVÍK. *Mechanika těles: dynamika*. Vyd. 4., V Akademickém nakl. CERM 2. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 978-80-214-3446-2.
- [5] PETRUŠKA, Jindřich *MKP v inženýrských výpočtech* Skripta k předmětu RIV - MKP v inženýrských výpočtech, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
- [6] REDDY, J. N. (Junuthula Narasimha). *Theory and analysis of elastic plates and shells. 2nd ed.* [online] Boca Raton: CRC Press, 2007, xix, 547 s. : il. Dostupné z: <<https://books.google.cz/books?id=qA9A54UD0gkC>> ISBN 978-0-8493-8415-8.
- [7] SALAJKA, Vlastimil *Pružnost a plasticita* přednášky. [online] Středoevropské centrum pro vytváření a realizaci inovovaných technicko-ekonomických studijních programů [cit. 2020-05-11] Dostupné z: <<http://www.zbynekvlk.cz/cepri/CD03/CD03.pdf>>
- [8] STONE, W. H. *Elementary Lessons on Sound* [online], Macmillan and Co., London, 1879, p. 25, [cit. 2020-03-16] Dostupný z: <<https://archive.org/details/elementary-lesson00stonrich/page/n6/mode/2up>>
- [9] WHEATSTONE, C. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London (1776-1886) On the Figures Obtained by Strewing Sand on Vibrating Surfaces, Commonly Called Acoustic Figures* [online]. 1833-01-01. 593–633 [cit. 2020-03-17] Dostupný z: <<https://archive.org/details/philtrans07365800/mode/2up>>

6 Seznam použitých zkratek a symbolů

h Tloušťka desky

x Souřadnice kartézského souřadného systému.

y Souřadnice kartézského souřadného systému.

z Souřadnice kartézského souřadného systému.

u Posuv ve směru osy x .

v Posuv ve směru osy y .

w Posuv ve směru osy z .

E Youngův modul pružnosti v tahu.

G Youngův modul pružnosti ve smyku. $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$

ρ Hustota materiálu.

κ Poissonovo číslo.

MKP Metoda konečných prvků.

ε, γ Deformace.

σ Napětí.

τ Smykové napětí

m_x, m_y Měrné vnitřní momenty.

m_{xy} Měrný kroutící moment.

q_x, q_y Měrné posouvající síly.

Π Celková potenciální energie.

W Energie napjatosti tělesa.

P Potenciál vnějšího zatížení.

K2007E01 Model elektrodynamického shakeru použitého během experimentu.

7 Seznam příloh

- Příloha A - Modální analýza desky z plexiskla
- Příloha B - Modální analýza čtvercové desky
- Příloha C - Modální analýza obdélníkové desky

Seznam obrázků

1.1	Znázornění experimentu E. Chladniho (převzato z: [8])	9
1.2	Znázornění experimentu E. Chladniho (převzato z: [9])	10
2.1	Geometrie desky ohýbané za uvažování Kirchhoffových předpokladů. (Převzato z [3])	12
2.2	Napětí a síly působící na prvek desky (Převzato z: [3])	14
2.3	Uvolněný elementární prvek tenké desky (Převzato z [3])	17
3.1	Geometrie elementárního prvku SHELL181 (Převzato z [1])	23
3.2	Příklad nesymetrické sítě	24
3.3	Graf závislosti vypočtených vlastních frekvencí na velikosti prvku sítě	25
3.4	Deformovaná síť ve středu desky	26
3.5	Rozdělení desky na menší elementy.	26
3.6	Dva módy o stejné frekvenci	29
3.7	Dva módy o stejné frekvenci	30
3.8	Obdobné vlastní tvary obdélníkové a čtvercové desky	30
3.9	Závislost amplitudy výchylky ve směru osy z na frekvenci - plexi-deska	31
3.10	Závislost amplitudy výchylky ve směru osy z na frekvenci - čtvercová deska	32
3.11	Závislost amplitudy výchylky ve směru osy z na frekvenci - obdélníková deska	33
4.1	Experimentální soustava	34
4.2	První nalezený vlastní tvar plexi-desky	35
4.3	Druhý nalezený vlastní tvar plexi-desky	35
4.4	Třetí nalezený vlastní tvar plexi-desky	36
4.5	První nalezený tvar čtvercové desky	36
4.6	Druhý nalezený tvar čtvercové desky	37

SEZNAM OBRÁZKŮ

4.7	Třetí nalezený tvar čtvercové desky	37
4.8	Čtvrtý nalezený tvar čtvercové desky	38
4.9	První nalezený vlastní tvar obdélníkové desky	38
4.10	Druhý nalezený vlastní tvar obdélníkové desky	39
4.11	Třetí nalezený vlastní tvar obdélníkové desky	39
4.12	Graf: Závislost odchylky na frekvenci kmitání desky.	40