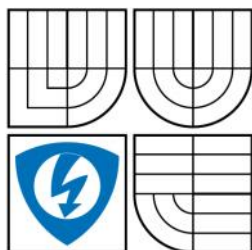


**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



**FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH  
TECHNOLOGIÍ  
ÚSTAV RADIOENERGIÍ**

**FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION  
DEPARTMENT OF RADIO ELECTRONICS**

# **MINIMALIZACE MĚŘENÝCH DAT PŘI MAPOVÁNÍ STATICKÉHO MAGNETICKÉHO POLE**

**MINIMIZATION NUMBER OF MEASURED DATA FOR MAGNETOSTATIC FIELD MAPPING**

## **BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

### **AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**GÁBOR CSONKA**

### **VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**doc. Ing. JARMILA DĚDKOVÁ. CSc.**

BRNO 2007

# LICENÍ SMLOUVA POSKYTOVANÁ K VÝKONU PRÁVA UŽÍT ŠKOLNÍ DÍLO

uzavřená mezi smluvními stranami:

## 1. Pan/paní

Jméno a příjmení: Gábor Csonka

Bytem: Vodná 24/12, 945 01 Komárno, SR

Narozen/a (datum a místo): 19.01.1986, Želiezovce

(dále jen „autor“)

a

## 2. Vysoké učení technické v Brně

Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií

se sídlem Údolní 53, Brno, 602 00

jejímž jménem jedná na základě písemného pověření děkanem fakulty:

prof. Dr. Ing. Zbyněk Raida, předseda rady oboru Elektronika a sdělovací technika

(dále jen „nabyvatel“)

### I. 1

#### Specifikace školního díla

1. Předmětem této smlouvy je vysokoškolská kvalifikační práce (VŠKP):

disertační práce

diplomová práce

bakalářská práce

jiná práce, jejíž druh je specifikován jako

.....

(dále jen VŠKP nebo dílo)

Název VŠKP: .....

Vedoucí/školitel VŠKP: .....

Ústav: .....

Datum obhajoby VŠKP: .....

VŠKP odevzdal autor nabyvateli v\*:

tištěné form – počet exemplářů 2

elektronické form – počet exemplářů 2

---

\* hodící se zaškrtněte

2. Autor prohlašuje, že vytvořil samostatnou vlastní tvorbu díla shora popsané a specifikované. Autor dále prohlašuje, že při zpracovávání díla se sám nedostal do rozporu s autorským zákonem a písemně souvisejícími a že je dílem původním.
3. Dílo je chráněno jako dílo dle autorského zákona v platném znění.
4. Autor potvrzuje, že listinná a elektronická verze díla je identická.

## **Článek 2**

### **Udělení licenčního oprávnění**

1. Autor touto smlouvou poskytuje nabyvateli oprávnění (licenci) k výkonu práva uvedeného díla nevyděleně užívat, archivovat a zpřístupnit ke studijním, výukovým a výzkumným účelům v elektronické podobě a rozmnožením.
2. Licence je poskytována celosvětově, pro celou dobu trvání autorských a majetkových práv k dílu.
3. Autor souhlasí se zveřejněním díla v databázi přístupné v mezinárodní síti  
ihned po uzavření této smlouvy  
1 rok po uzavření této smlouvy  
3 roky po uzavření této smlouvy  
5 let po uzavření této smlouvy  
10 let po uzavření této smlouvy  
(z důvodu utajení v ní obsažených informací)
4. Nevydělené zveřejnění díla nabyvatelem v souladu s ustanovením § 47b zákona č. 111/1998 Sb., v platném znění, nevyžaduje licenci a nabyvatel je k němu povinen a oprávněn ze zákona.

## **Článek 3**

### **Závazná ustanovení**

1. Smlouva je sepsána ve třech vyhotoveních s platností originálu, přičemž po jednom vyhotovení obdrží autor a nabyvatel, další vyhotovení je vloženo do VŠKP.
2. Vztahy mezi smluvními stranami vzniklé a neupravené touto smlouvou se řídí autorským zákonem, občanským zákoníkem, vysokoškolským zákonem, zákonem o archivnictví, v platném znění a případně dalšími právními předpisy.
3. Licenční smlouva byla uzavřena na základě svobodné a pravé vůle smluvních stran, s plným porozuměním jejímu obsahu i důsledkům, nikoliv v tísni a za nepříznivých podmínek.
4. Licenční smlouva nabývá platnosti a účinnosti dnem jejího podpisu oběma smluvními stranami.

V Brně dne: .....

.....  
Nabyvatel

.....  
Autor

# Minimalizace m ěných dat p i mapování statického magnetického pole

## Abstrakt

Bakalá ská práce se zabývá problematikou mapování statického magnetického pole a metod analýzy m ěných dat. Práce je zam ěná na vyhodnocení mapy magnetického pole v pracovním prostoru MR tomografu z dat zm ěných na povrchu zvoleného objemu.

Pro uvedenú problematiku je zde uvedeno ěšení a vyhodnocení výsledk .Výsledkem bakalá ské práce je návrh vhodné matematické metody pro mapování statického magnetického pole, a v programu MATLAB sestavit algoritmus pro vyhodnocení mapy magnetického pole.

V práci je dále zahrnutý výpo et výsledné hodnoty koeficient pro výpo et indukce magnetického pole v libovolném bode zvoleného objemu. M ěním byly experimentáln ov eny hodnoty, tj. zadané hodnoty, ze který práce vychází, pomocí MR tomografu.

Výslednou navrženou metodu je možné využít na výpo et koeficient pro magnetické indukce v jakémkoli bode zvoleného objemu, ze zadaných hodnot indukce zvoleného objemu.

## Klí ová slova

Minimalizace m ěných dat, mapování magnetického pole, zobrazení magnetické indukce, MR tomografie, metoda gradientního echa

# Minimization number of measured data for magnetostatic field mapping

## Abstract

This work deals with questions of mapping static magnetic field and methods of analyses plumbed dates. There is mentioned solving of problems and interpretation of results. Work is centered on evaluation map of the magnetic field in workspace of MR tomography from data measured on surface shere.

Imposition of submission is proposition acceptable mathematical method and trough program MATLAB compile algorithm for interpretation map magnetic field.

In work is further included calculation resulting values of coefficients for induction of magnetic field for the selected parts of a sphere. By force of admeasurement were experimentally be verified values wich from the work proceed.

The proposed method is possible to use for calculation of coefficeints for magnetic flux density at any point on the sphere from booked up dates.

## Keywords

Minimisation measured numbers, mapping of magnetic field, projection of induction, MR tomography, metod gradient echo

## **Bibliografická citace**

CSONKA, G. *Minimalizace měřených dat při mapování statického magnetického pole*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2007. 45 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Jarmila Dvořáková, CSc.

# Prohlášení

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma „ **Minimalizace m ených dat p i mapování statického magnetického pole**“ jsem vypracoval(-a) samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce s použitím odborné literatury a dalších informa ních zdroj , které jsou všechny uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

V Brn dne .....

.....

podpis autora

# Pod kování

D kuji vedoucímu bakalářské práce doc. Ing. Jarmile D dkové, CSc. za ú innou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady p i zpracování mé bakalářské práce.

V Brn dne .....

.....

podpis autora

## Obsah

<b>1</b>	<b>ÚVOD</b> .....	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>CHARAKTERISTIKA MAGNETICKÉHO POLE</b> .....	<b>2</b>
2.1	DEFINICE ZÁKLADNÝCH VELIČÍN A POJM .....	2
2.2	MAGNETICKÉ POLE .....	3
2.3	MATEMATICKÝ POPIS MAGNETICKÉHO POLE A MAXWELLOVY ROVNICE .....	5
2.4	ZVLÁŠTNÍ PŘÍPADY MAGNETICKÉHO POLE:.....	7
2.5	VLASTNOSTI MAGNETICKÉHO POLE .....	9
<b>3</b>	<b>MĚŘENÍ SLOŽEK VEKTOR MAGNETICKÉHO POLE</b> .....	<b>10</b>
3.1	METODA GRADIENTNÍHO ECHA .....	10
3.2	VLIV MAGNETICKÉ SUSCEPTIBILITY NA MR OBRAZ.....	11
<b>4</b>	<b>ZOBRAZOVACÍ SYSTÉMY</b> .....	<b>12</b>
4.1	MAGNETICKÉ REZONANCE - MR TOMOGRAFIE.....	12
4.1	SIGNÁLOVÝ TOK MR ZOBRAZENÍ .....	14
4.2	PRIMÁRNÍ PARAMETRICKÉ POLE MR ZS .....	14
4.3	ZÁKLADNÍ ZOBRAZOVACÍ METODY PRO NMR .....	14
<b>5</b>	<b>MAPOVÁNÍ POLE VE VYMEZENÉM PROSTORU</b> .....	<b>15</b>
5.1	LEGENDROVY POLYNOMY-DEFINICE.....	15
5.1.1	LEGENDROVÉ POLYNOMY – PŘÍKLADY DVOJČLÁNKOVÝCH FUNKCE.....	16
5.1.2	APROXIMACE.....	16
<b>6</b>	<b>KONTROLNÍ APROXIMACE - <math>B_K</math></b> .....	<b>20</b>
<b>7</b>	<b>ALGORITMUS</b> .....	<b>24</b>
<b>8</b>	<b>ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ</b> .....	<b>26</b>
<b>9</b>	<b>MĚŘENÍ MAGNETICKÉ INDUKCE</b> .....	<b>26</b>
9.1.	VÝSLEDKY MĚŘENÍ.....	27
9.2.	VÝSLEDKY MĚŘENÍ NA POVRCHU KOULE .....	29
9.3.	VÝSLEDKY MĚŘENÍ VE VŘEŠTU KOULE.....	29
9.4.	VÝPOČTENÉ HODNOTY MAGNETICKÉ INDUKCE .....	30
9.5.	ZOBRAZENÍ VÝSLEDKŮ POMOCÍ PROGRAMU MATLAB.....	31
9.6.	KONTROLNÍ APROXIMACE NAMĚŘENÝCH HODNOT .....	33
<b>10</b>	<b>ZÁVĚR</b> .....	<b>35</b>
	Seznam použitých symbol .....	36
	Seznam obrázk .....	37
	Literatura.....	38



# 1 ÚVOD

Bakalářská práce se zabývá problematikou mapování statického magnetického pole a metod analýzy měřených dat. Úkolem je předložit návrh vhodné matematické metody pro mapování pole z hodnot naměřených v konkrétních bodech prostoru, sestavit algoritmus, a v programu MATLAB odladit program pro vyhodnocení mapy magnetického pole v pracovním prostoru MR tomografu z dat naměřených na povrchu zvoleného objemu.

Práce se dále zabývá experimentálním měřením. V rámci měření byly ověřeny hodnoty magnetické indukce, získané v první části zadání.

## 2 CHARAKTERISTIKA MAGNETICKÉHO POLE

Magnetické pole je druh silového pole, které vytváří vodič s proudem, pohybující se částice nebo těleso s elektrickým nábojem, zmagnetované těleso (např. magnet) a proměnné elektrické pole. Magnetické pole je zvláštní případ pole elektromagnetického.

Magnetické pole se projevuje silovými účinky a můžeme ho prokázat různými způsoby. V nejjednodušším případě zjistíme magnetické pole magnetkou.

Existenci magnetických sil pozoroval např. Aristoteles, který popsal přitahování železných pilin magnetovcem ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ). Podle města Magnesia, z jehož blízkosti ruda pocházela, nazval tyto jevy magnetickými. Kvantitativním zkoumáním elektrických a magnetických jevů se zabýval William Gilbert (1540-1603), který v roce 1600 vydal spis „O magnetu, magnetických tělesech a velkém magnetu Zemi“. viz [2]

### 2.1 DEFINICE ZÁKLADNÝCH VELIČÍN A POJMŮ

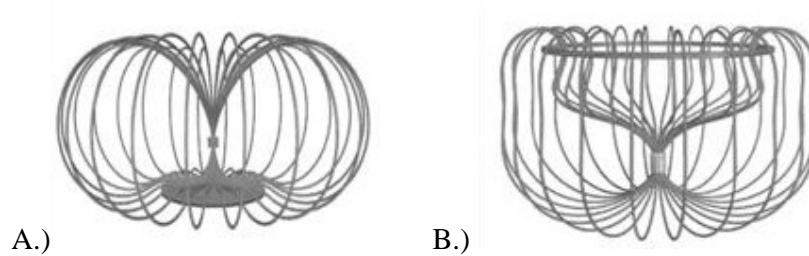
**Polem** rozumíme obecnou funkci, která popisuje danou fyzikální veličinu v prostoru a v čase. Je-li daná fyzikální veličina skalár, je její velikost v závislosti na prostoru a čase popsána **skalárním polem**. Příkladem skalárního pole může být pole elektrického potenciálu  $(x, y, z, t)$ , teplotní pole, rozložení hustoty náboje nebo energie. Skalární pole se v tčínou zobrazuje **ekvipotenciálami** (hladinami s konstantní hodnotou fyzikální veličiny), tj. plochami na kterých je v daném čase  $(x, y, z, t)$  konstantní. Trojrozměrná skalární pole se zobrazují vhodně zvolenými řezy v rovinách rovnoběžných např. s osami.

**Vektorové pole** definuje v závislosti na prostoru a čase kromě velikosti také směr dané vektorové fyzikální veličiny. Jako příklad vektorového pole můžeme uvést pole vektorového potenciálu  $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ , pole intenzity a indukce elektrického nebo magnetického pole. viz [4]

**Vektorové pole** zobrazujeme pomocí siloár nebo pomocí vektorů zobrazených ve vybraných bodech prostoru. Siloára daného vektoru je křivka, jejíž tečný vektor je v každém bodě oblasti s daným vektorem rovnoběžný. Siloára vektoru  $\mathbf{A}$  je popsána diferenciální rovnicí

$$\frac{dx}{A_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{A_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{A_z(x, y, z, t)} \quad (2.1)$$

Zobrazení se zpravidla provádí v rovině; trojrozměrné pole se zobrazí vždy v navzájem kolmých rovinách. viz [4] Příklady silových ar:



**Obr. 1.1** Silové čáry magnetického pole

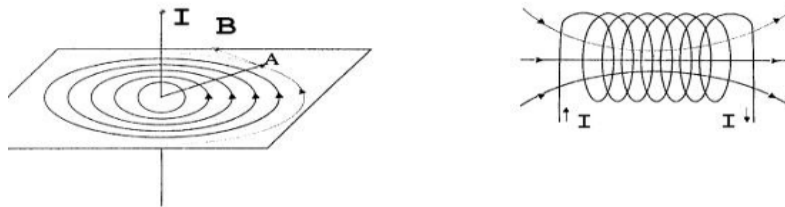
Obr. 1.1.A.) ukazuje silové čáry magnetického pole permanentního magnetu levitujícího nad dokonale vodivým diskem (nulový elektrický odpor).

Obr. 1.1.B.) vidíme silové čáry magnetického pole magneticky zavěšeného magnetu pod dokonale vodivým prstencem

Viz.literatura [4]

## 2.2 MAGNETICKÉ POLE

Magnetické pole můžeme znázornit pomocí magnetických indukčních čar. Magnetické indukční čáry jsou uzavřené orientované křivky, jejichž tečny mají v daném bodě směr osy velmi malé magnetky umístěné v tomto bodě. Severní pól magnetky určuje orientaci magnetické indukční čáry viz[4]:



**Obr. 2.1** Magnetická indukce okolo vodiče a cívky

Magnetické pole, jehož charakteristické veličiny (např. magnetická indukce) se s časem nemění, je stacionární magnetické pole. Vytváří ho nepohybující se vodič s konstantním proudem, proud částic s nábojem při pohybu rovnoměrným přímočaře a nepohybující se magnet.

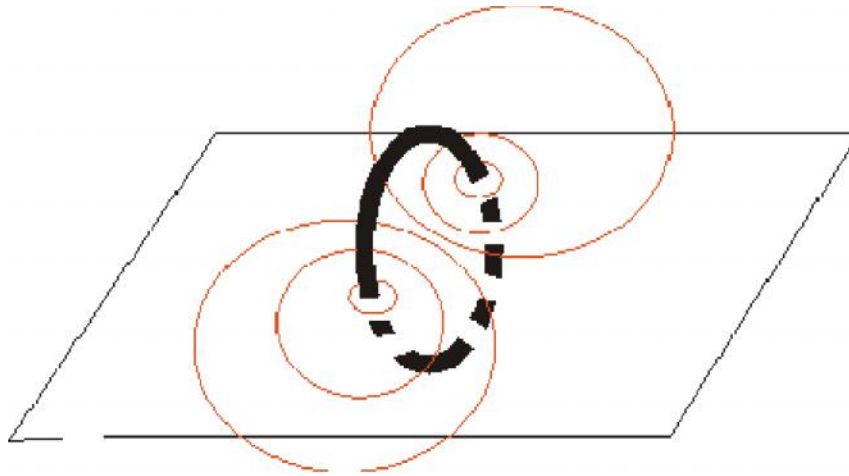
Magnet vytváří pole v každém bodě prostoru kolem sebe, které můžeme popsat veličinou **B**, kterou nazýváme **magnetická indukce**.

Hlavní jednotkou magnetické indukce je 1 **T** (Tesla). Místo názvu Tesla se používá někdy název weber na čtverečný metr ( $\text{Wb m}^{-2}$ ) nebo voltsekunda na  $\text{m}^2$  ( $\text{Vs m}^{-2}$ ). viz[1]

**Magnetická indukce:** ve středě kruhového závitu poloměru  $r$ , kterým prochází proud  $I$ , má velikost:

$$B = \frac{\mu I}{2r} \quad (2.2.1)$$

kde  $\mu$  je konstanta charakterizující prostředí, ve kterém je závit umístěn. Nazývá se **permeabilita prostředí**. Je dána vztahem  $\mu = \mu_r \mu_0$ , kde  $\mu_0$  je permeabilita vakua a  $\mu_r$  je relativní permeabilita prostředí. viz [1]



**Obr. 2.2**

Silové čáry magnetického pole v rovině proložené kruhovým závitem s proudem

**Magnetická indukce** uvnitř solenoidu délky  $l$ , která má  $N$  závitů a prochází jí proud  $I$ , má velikost

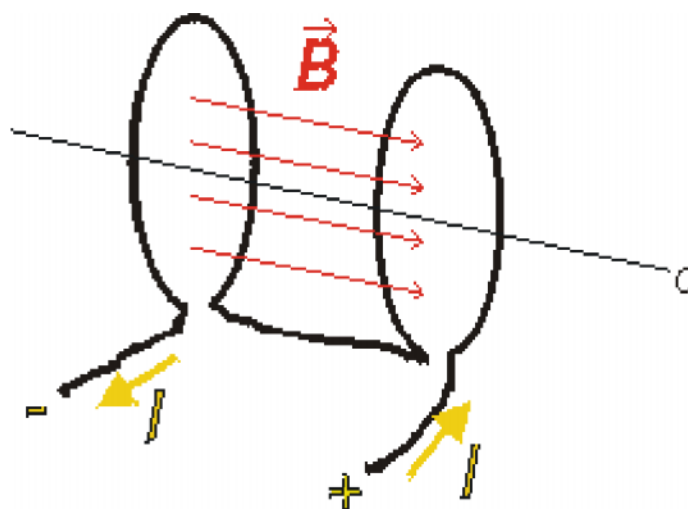
$$B = \mu \frac{NI}{l} \quad (2.2.2)$$

Magnetická indukce ve vzdálenosti  $d$  od přímého vodiče délky  $l$ , kterým protéká proud  $I$ , má velikost

$$B = \frac{\mu I}{2\pi d} \quad (2.2.3)$$

V praxi se také hodně používá *toroid* - prstencová cívka. Je to cívka navinutá na jádru tvaru prstence. Je-li toroid uzavřený, je uvnitř magnetické pole, jehož silové čáry jsou soustředné kružnice, a vně je magnetické pole nulové.

Homogenní magnetické pole se dá nejjednodušším způsobem vytvořit mezi *Helmholtzovými cívkami* - dva kruhové závity na společné ose za sebou, jejichž vzdálenost je rovna jejich poloměru



Obr.2.3. Helmholtzovy cívky

**Intenzita magnetického pole  $H$**  je vektorová veličina, jejíž rozměr je  $\text{Am}^{-1}$ , n, kdy se používá i název ampér závit na metr ( $\text{Az m}^{-1}$ ). Intenzita magnetického pole je vektor odvozený, pomocný, přímo nezměřitelný, jeho zavedení však usnadňuje výpočet magnetických obvodů.

Ve vakuu nebo ve vzduchu je intenzita magnetického pole  $H = \frac{B}{\mu_0}$ , kde je  $\mu_0$  je magnetická

konstanta, jejíž velikost vyplývá ze soustavy jednotek. Obecně bývá popisována permeabilitou vakua. Pro jednotky soustavy SI má velikost  $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$ . Pro nízké kmitočty je permeabilita reálné číslo, pro vyšší komplexní. viz [1]

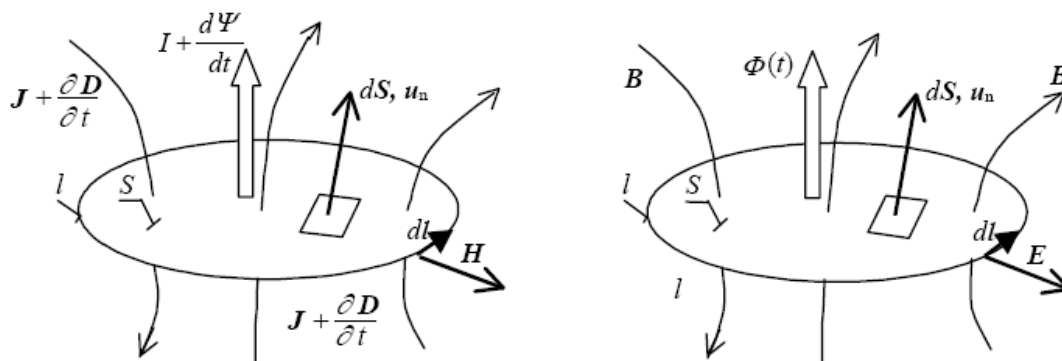
## 2.3 MATEMATICKÝ POPIS MAGNETICKÉHO POLE A MAXWELLOVY ROVNICE

K teorii elektromagnetických jevů přispěl nejvíce James Clark Maxwell (1831-1879). Nejprve matematicky vyjádřil výsledky Faradayových pokusů s elektromagnetickou indukcí a v r. 1862 předal k proudům vodičů teoreticky zdůvodněné proudy posuvné. Tyto proudy, které existují ve vakuu a v dielektriku a jejichž hustota je úměrná časové změně elektrického pole, mají magnetické účinky stejné jako proudy vodičové. Vytvořil tak soustavu rovnic, známou dnes v elegantním vektorovém zápisu jako **Maxwellovy rovnice**:

I. *Maxwellova rovnice* představuje Faradayův indukční zákon

$$\oint_l E \cdot dl = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (2.3.1)$$

$$\text{rot} E = - \frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.3.2)$$



Obr. 2.4 K výkladu 1. a 2. Maxwellovy rovnice

Cirkulace vektoru  $E$  po orientované křivce  $l$  je rovna záporné změně magnetického toku, který prochází plochou  $S$ , ohraničenou křivkou  $l$ . Lze orientaci stanovit několika pravidly. Nejjednodušší je pravidlo pravé ruky: Je-li palec ve směru kladné normály plochy  $S$  (ukazuje směr šípký magnetického toku), ukazují prsty směr orientace křivky  $l$ . viz [4]

II. *Maxwellova rovnice* představuje Ampèreův zákon celkového proudu, doplněný Maxwellem o posuvný proud

$$\oint_l H \cdot dl = I + \frac{d\Psi}{dt} \quad (2.3.3)$$

$$\text{rot} H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (2.3.4)$$

Cirkulace vektoru  $H$  po orientované křivce  $l$  je rovna celkovému vodivému proudu  $I$  a posuvnému proudu  $d\Psi/dt$ , který prochází v kladném směru plochy  $S$ , ohraničené křivkou  $l$ . Vzájemná orientace křivky a plochy je určena stejným pravidlem pravé ruky, jako v předchozí rovnici a nezávisí na směru vektoru  $J$  nebo  $D$ . viz [4]

III. *Maxwellova rovnice* vyjadřuje Gaussovu vztah (viz. [4]) elektrostatiky pro tok elektrické indukce

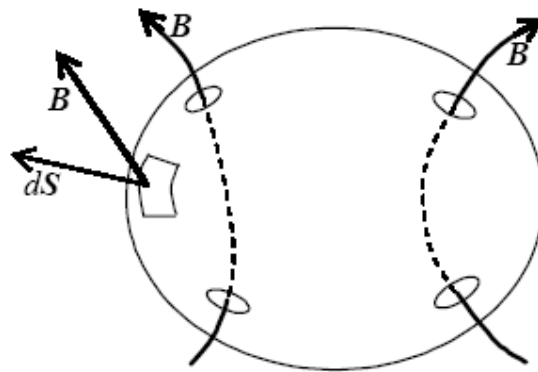
$$\oint_S D \cdot dS = Q \quad (2.3.5)$$

Tok vektoru indukce  $D$  je roven celkovému náboji v objemu  $V$ , který je uzavřený plochou  $S$ . viz [2]

IV. *Maxwellova rovnice* vyjadřuje zákon kontinuity silové magnetické indukce

$$\oint_S B \cdot dS = 0 \quad (2.3.6)$$

$$\text{div} B = 0 \quad (2.3.7)$$



Obr. 2.5 K výkladu 4. Maxwellovy rovnici

Výtok vektoru magnetické indukce z uzavřené plochy je vždy nulový. viz [4]

## 2.4 ZVLÁŠTNÍ PŘÍPADY MAGNETICKÉHO POLE:

- 1. Magnetostatické pole:** je pole, ve kterém jsou proudy nulové. Vektory pole jsou v aze konstantní a derivace podle aasu nulové. Maxwellovy rovnice popisují magnetické pole jak se jevílo fyzik m do konce 18. století

$$\text{rot}H = 0 \quad (2.4.1)$$

$$\text{div}B = 0 \quad (2.4.2)$$

$$B = \mu H + \mu_0 M_0 \quad (2.4.3)$$

Soustava popisuje pole magnetostatické, jehož zdrojem jsou permanentní magnety s magnetizací  $M_0$  a část obvodu tvoří magneticky m kký materiál s permeabilitou  $\mu$ . viz [2]

- 2. Magnetické pole stacionární:** je pole, ve kterém se náboje pohybují konstantní rychlostí, tj. pole stejnosm rných proud . V Maxwellových rovnicích vynecháme derivace podle aasu, ale ponecháme proudy. Magnetické pole stacionární je popsáno rovnicemi

$$\text{rot}H = J \quad (2.4.4)$$

$$\text{div}B = 0 \quad (2.4.5)$$

$$B = \mu H + \mu_0 M_0 \quad (2.4.6)$$

Zdrojem magnetického pole jsou stejnosm rné proudy ve vodi ích a permanentní magnety. viz [2]

**3. Pole kvazistacionární:** Při výpočtu časově proměnného pole ve vodičích lze zanedbat posuvné proudy, ale je třeba respektovat proudy vodivé, spojené s indukčním zákonem. V dobrém vodiči již malá hodnota  $\partial B / \partial t$  způsobí značné proudy. Naproti tomu jsou ve vodiči zanedbatelné proudy posuvné. Takto počítáme pole a ztráty ve všech vodičích včetně vlnovodů, vlastnosti indukčních snímacích, stínících a časově proměnných polí a problémy spojené s elektromagnetickou kompatibilitou. Pole je popsáno rovnicemi viz [2]

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.4.7)$$

$$\operatorname{rot} H = J \quad (2.4.8)$$

$$\operatorname{div} B = 0 \quad (2.4.9)$$

$$B = \mu H \quad (2.4.10)$$

Diferenciální rovnice neplatí na plochách, kde se materiálové konstanty  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$  mění skokem. Normálová nebo tečná složka vektoru pole se mění skokem a derivace podle souřadnic zde neexistují. Diferenciální tvar Maxwellových rovnic je pak třeba nahradit podmínkami spojitosti vektoru pole  $H$ ,  $B$ . Připomejme si, že při průchodu rozhraním, ve kterém se neakumuluje náboj, se mění spojit

- tečná složka vektoru intenzity  $H$ ,
- normálová složka vektoru spojených s tokem -  $B$

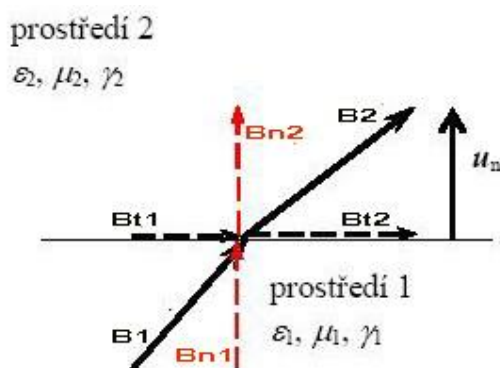
Příklad změny vektoru  $B$  při průchodu rozhraním je na obrázku. Vektory v prostředí 1, 2 mají odpovídající index, tečná složka je doplněna indexem  $t$ , normálová  $n$ . Jednotková normála k rozhraní  $u_n$  směřuje do prostředí 2. V rozhraní bez plošného náboje nebo plošného proudu splývají tečné složky obou intenzit  $H$

$$H_{t1} - H_{t2} = 0$$

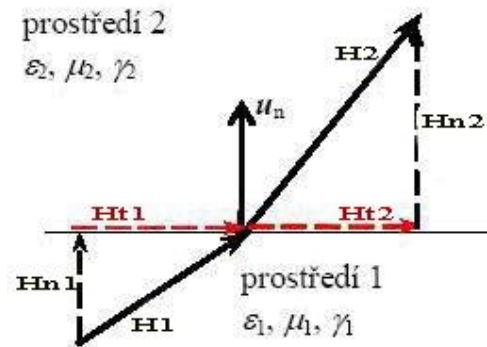
a normálové složky vektoru vyjadřující hustoty toku  $B$

$$B_{n1} - B_{n2} = 0$$

Z těchto vzorců dostaneme s použitím materiálových vztahů také známé výrazy pro lom silnicar v rozhraní. viz [4]



Obr. 2.6

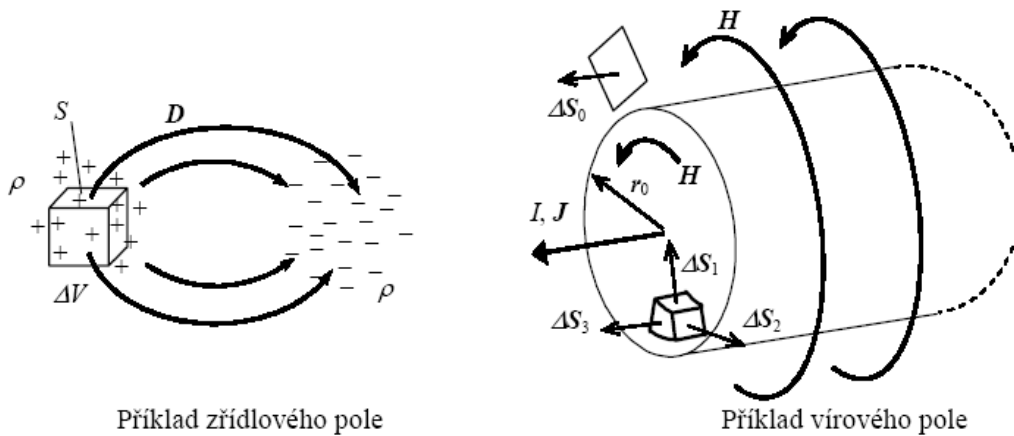


Obr. 2.7

Podmínky na rozhraní

## 2.5 VLASTNOSTI MAGNETICKÉHO POLE

Podle tvaru silových čar lze každé vektorové pole klasifikovat jako pole zdrojové nebo vírové. Zdrojové pole je například pole elektrostatische, gravitační nebo ustálené pole teplotní. Silové čáry v něm vycházejí ze zdroje - zdrojů typu skalární funkce a stejnorodě. Zdrojem silových čar elektrostatischeho pole jsou kladné a záporné náboje bodové nebo rozložené v prostoru s hustotou objemovou, plošnou nebo délkovou. Na obrázku jsou silové čáry elektrostatischeho pole od náboje spojitě rozloženého v objemu  $\Delta V$ . viz [2]



Obr. 2.8

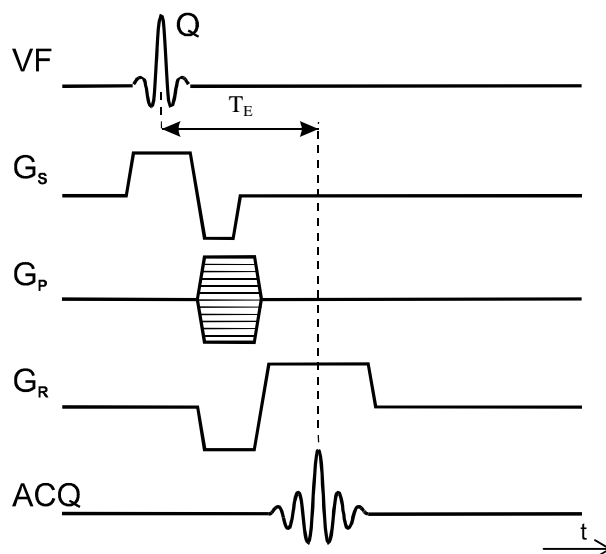
Vírové pole je například pole vektoru intenzity magnetického pole podle obrázku, jehož zdrojem je vektorové pole proudové hustoty. Silové čáry vírového pole jsou vždy uzavřené křivky.



## 3 MĚNĚNÍ SLOŽEK VEKTORU MAGNETICKÉHO POLE

### 3.1 Metoda Gradientního echa

Pro měření složky  $B_z$  vektoru magnetické indukce se použije MR technika gradientního echa, pomocí níž se získá obraz se zakódovanou hodnotou složky  $B_z$ . Gradientní echo (GE, v literatuře též označovaná jako FE – Field Echo) je jeden ze základních, hojně využívaných zobrazovacích metod MR. viz [3]



**Obr.3.1** Základní impulsní sekvence pro metodu gradientního echa (GE)

Excitace jader probíhá v  $\pi/2$ -impulzem, kdy dojde ke sklopení vektoru magnetizace  $\mathbf{M}_0$ , jehož původní směr je shodný s vektorem magnetické indukce  $\mathbf{B}_0$  základního pole, o  $90^\circ$  do transverzální roviny  $x'y'$ . Vlivem energie excitacího impulsu se sfázují všechny spiny jader, které v měřeném vzorkem proudí s různou fází.

Před excitací je aktivní vymežovací gradient  $G_s$  ve směru osy  $z$ , vymežující ve vzorku excitovanou vrstvu požadované tloušťky. Pro soběsamostatné kódování  $x$ -ové polohy jader, zároveň je pomocí fázovacího gradientu  $G_p$  ve směru osy  $y$  kódována  $y$ -ová poloha jader do fáze MR signálu.

Vlivem spin-spinové interakce i vlivem gradientů dochází k rozfázování jednotlivých vektorů magnetizace, proto se inverzí amplitudy gradientu  $G_R$  po skonění excitace provede sfázování spinů. Akvizice dat se provádí v době  $T_E$  po vyslání excitacího impulsu.

### 3.2 Vliv magnetické susceptibility na MR obraz

Ve výše uvedeném matematickém popisu dosud nebyly zahrnuty relaxační efekty, které mají vliv na kontrast v obraze, čímž se situace dále zkomplikuje. Během časového zpoždění mezi excitací a echem je magnetizace snížena faktorem  $e^{-(T_E/T_2)}$ . Za předpokladu, že  $T_E$  je srovnatelné s  $T_2$ , vzniká váhování obrazu spin-spinovým relaxačním časem  $T_2$ . Podobně spin-spinový relaxační čas  $T_1$  způsobuje váhování obrazu za předpokladu  $T_R \approx T_1$ .

Pro transversální magnetizaci v ose  $T_E$  po excitaci jader platí pro kombinaci obou váhování vztah

$$\mathbf{M}_\perp(T_E) = \mathbf{M}_0 \left(1 - e^{-\frac{T_R}{T_1}}\right) e^{-\frac{T_E}{T_2}} \quad (3.1.1)$$

Je zřejmé, že pro  $T_1 \ll T_R$  a  $T_2 \ll T_E$  se redukuje na tvar  $\mathbf{M}_\perp = \mathbf{M}_0$ , kdy velikost přijatého signálu závisí pouze na protonové hustotě, která je vyjádřena magnetizací  $\mathbf{M}_0$ .

Jednou z vlastností metody GE popsané v 4.1 je její citlivost na nehomogenity základního magnetického pole a nehomogenity vyvolané lokální změnou susceptibility excitovaného objemu materiálu. Ve výsledných obrazech se díky tomu objevují artefakty. Změny v obraze mohou být v rozsahu lokálního zkreslení v místě a blízkém okolí nehomogenity až po úplnou ztrátu části obrazu, která vznikne lokálním rozfázováním magnetických momentů jader v důsledku silnější nehomogenity magnetického pole. Tyto efekty, nazývané také mimořezonaní, jsou důsledkem poklesu relaxačního času  $T_2$ . Z rovnice vyplývá, že při použití sekvence GE musíme pracovat s krátkým echo časem  $T_E$ . Citlivost GE na rozfázování má tedy za následek zkreslení v reálném obraze, v praxi se používají vždy obrazy modulované.

Pro další účely zavedeme reakční pole s indukcí  $\Delta\mathbf{B}$ , pro kterou platí

$$\Delta\mathbf{B}(x, y, z) = \mathbf{B}(x, y, z) - \mathbf{B}_0 \quad (3.1.2)$$

Základní artefakty v obraze vznikají díky efektům jako je  $T_2$  relaxace a rezonanční ofset (vliv nehomogenity pole), protože relaxaci  $T_2$  nelze zabránit a je také nemožné vytvořit úplně homogenní pole v magnetu konečné délky. Namísto ideálních hodnot celkové transversální magnetizace proto méně získáme

$$\mathbf{M}'_\perp(T_E) = \mathbf{M}_\perp(T_E) e^{-\frac{T_E}{T_2^*}} e^{-j\gamma \Delta\mathbf{B}T_E} \quad (3.1.3)$$

kde exponenciální člen  $e^{-\frac{T_E}{T_2^*}}$  popisuje pokles magnetizace daný rozfázováním magnetických momentů jader vlivem kombinovaného relaxačního času  $T_2^*$  a člen  $\Delta\mathbf{B}$  zohledňuje odchylky magnetického pole od základního pole.

Rovnice pro distribuci transversální magnetizace pro metod GE je

$$\mathbf{m}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-j\gamma \Delta\mathbf{B}T_E} \iint_{k_x, k_y} \left( \mathbf{M}_\perp(k_x, k_y) e^{j(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} e^{-\frac{T_E}{T_2^*}} \right) dk_x dk_y \quad (3.1.4)$$

len  $e^{-j\gamma \Delta B T_E}$  vyjaduje fázovou modulaci MR obrazu způsobenou rozdílovým polem s indukci  $\Delta \mathbf{B}$ . Vyhodnocením signálu získaného metodou GE dostaneme MR obraz, v jehož fázi

$$\Delta \psi = \gamma \Delta B T_E \quad (3.1.5)$$

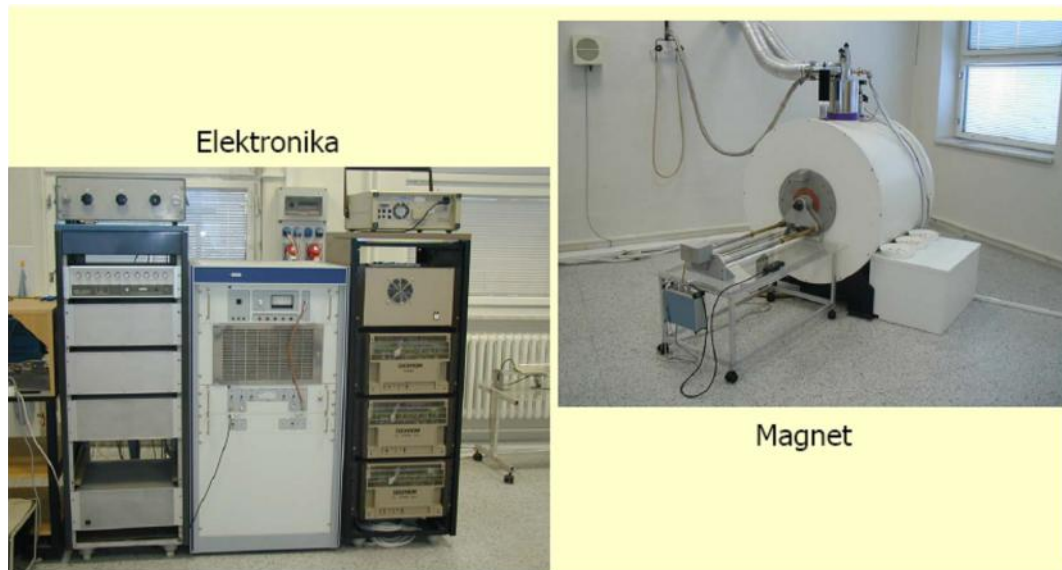
je zakódováno prostorové rozložení reakčního magnetického pole vzorku. Pokud je reakční pole  $\Delta \mathbf{B}$  vyvoláno magnetickou susceptibilitou vzorku, lze při vhodném uspořádání experimentu vyhodnotit velikost magnetické susceptibility neznámého materiálu. Naopak, jsou-li známy změny susceptibility je možné vyhodnotit použitím poslední rovnice velikost reakčního pole  $\Delta \mathbf{B}$ . Metoda je popsána v [3]

## 4 ZOBRAZOVACÍ SYSTÉMY

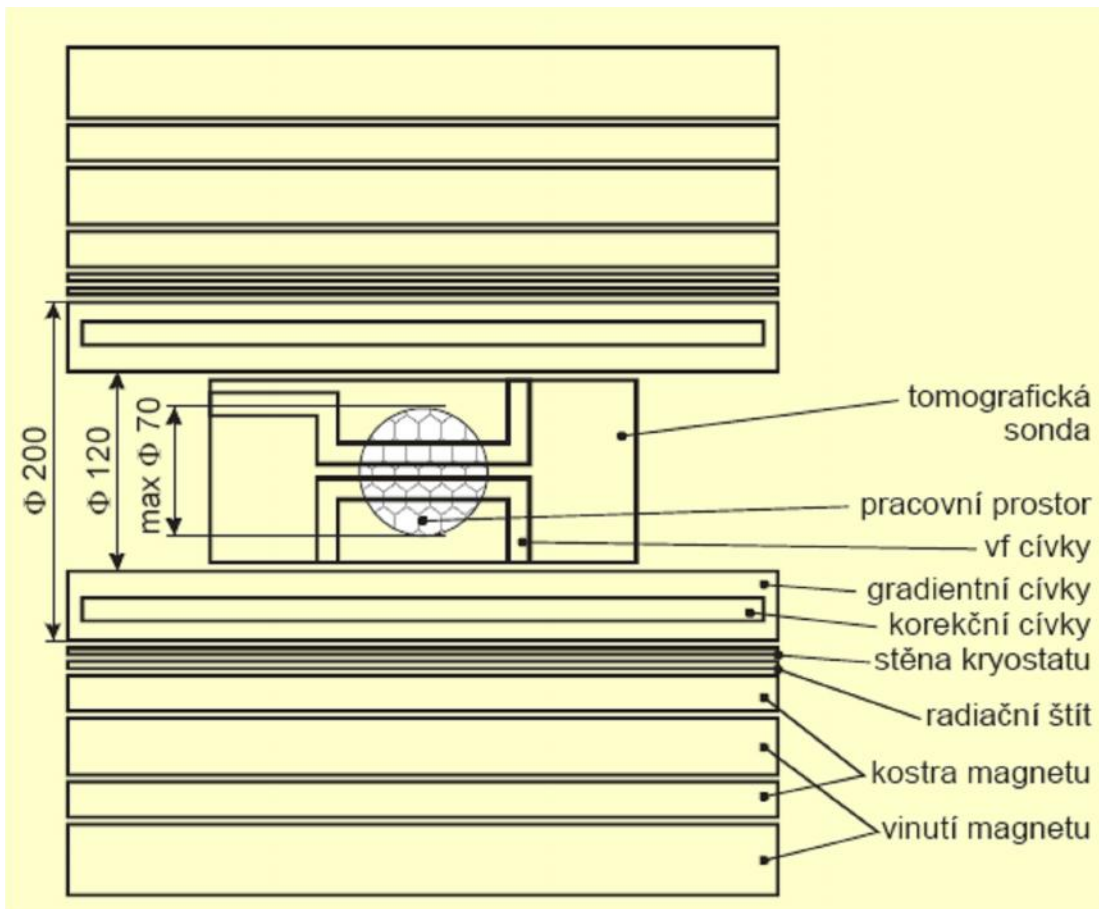
### 4.1 MAGNETICKÉ REZONANCE - MR TOMOGRAFIE

Zobrazovaná scéna musí ležet uvnitř homogenního magnetického pole  $B_0$ , aby mohla nastat rezonance. K vybudění rezonance je vysílána generovaná na vhodné frekvenci vysokofrekvenční signál (VF), který excituje rezonující jádra (protony) na kterých atomů vykazujících spin do vyššího energetického stavu. Tento stav se v součinnosti s  $B_0$  projevuje precesním pohybem jednotlivých spinujících protonů vybuděných do rezonance. Po ukončení RF signálu se vlivem relaxačních mechanismů popsaných relaxačními časovými konstantami  $T_1$  resp.  $T_2$ , jádra vrací do základního stavu termodynamické rovnováhy za současně emise elektromagnetického vlnění na frekvenci, která je charakteristická pro daná jádra atomů, tzv. FID/echo signál resp. volně indukovaný signál. Velikost FID/echo signálu, která je úměrná počtu rezonujících jader vybuděných atomů, případně je váhována velikostí relaxačního času  $T_1$ ,  $T_2$  nebo proudem vybuděných atomů, je měřena pomocí přijímací cívky. Podrobně popsána v [6]

Popsaný děj by vybudil do rezonance celý objem snímané scény, který se nachází v homogenním magnetickém poli  $B_0$  a v poli vysílací a přijímací VF cívky. K vybudění rezonance pouze ve zvolené tomografické rovině se využívá gradientní magnetické pole. Pouze protony, které jsou na vhodné pozici ve směru-z gradientního se vrací do termodynamické rovnováhy vlivem relaxačních mechanismů popsaných veličinami  $T_1$  a  $T_2$ , pomocí dalších gradientních magnetických polí ( $G_x$ ,  $G_y$ ), orientovaných ve vhodném směru roviny ( $x$ ,  $y$ ) je možno získat spektrum FID/echo signálu, které reprezentuje jednu projekci ve vybraném směru. Natočením gradientního pole v rovině ( $x$ ,  $y$ ) lze získat další projekce v jiných akvizitních úhlech a tím i data pro rekonstrukci obrazu z projekcí. Vzhledem k časové náročnosti se však u současných komerčních systémů rekonstrukce obrazu z projekcí nepoužívá. Metoda je jen pro ilustraci principu metody zobrazení MR a pozice kódování.



Obr. 4.1. MR tomografický systém ÚPT



Obr.4.2. MR systém ÚPT – ez magnetem a sondou

## 4.1 Signálový tok MR zobrazení

Zobrazovací systémy MR využívají k přenosu informace o snímané scéně (primárním parametrickém poli) elektromagnetické vlnění v vysokofrekvenční (VF) oblasti elektromagnetického spektra (FID signál resp. echo signál). Frekvence signálu závisí na použitém hlavním magnetickém poli  $B_0$  a na zobrazovaném prvku. Pro MR systémy používané v lékařství je frekvence signálu řádově jednotky až desítky megaherc, viz [6]

## 4.2 Primární parametrické pole MR ZS

Proces MR zobrazení může být buď jednoparametrický nebo víceparametrický v závislosti na volbě budící sekvence RF signálu, pomocí které je zobrazovaná scéna excitována do rezonance. Volbou tzv. akvizitních parametrů procesu (sledu a časování budících RF impulzů) je možno specifikovat dominantní vliv vybraných fyzikálních parametrů na modulaci MR obrazu, tzv. váhování obrazu zvoleným parametrem. Lze provádět selekci mezi zobrazenými základními primárními parametry:

- hustoty protonových jader (v tštinou molekul vody), tj. počet jader v jednotce objemu zobrazované scény. V případě molekul vody tak odpovídá hustota protonových jader fyzikální veličině reprezentující koncentraci vody v zobrazované tkáni
- relaxační doby  $T_1$  a  $T_2$
- proud protonů

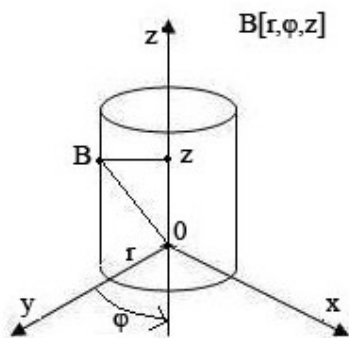
Volbou techniky sběru obrazových dat lze dosáhnout i víceparametrické zobrazení s modulací vytvořenou kombinací několika uvedených parametrů. Fyzikální veličiny  $T_1/T_2$  mající rozměr [s] jsou ovlivněny i chemickými vazbami molekul vody v zobrazované scéně. Reprezentují tedy nejen fyzikální ale i chemické vlastnosti snímané scény, viz [6]

## 4.3 Základní zobrazovací metody pro NMR

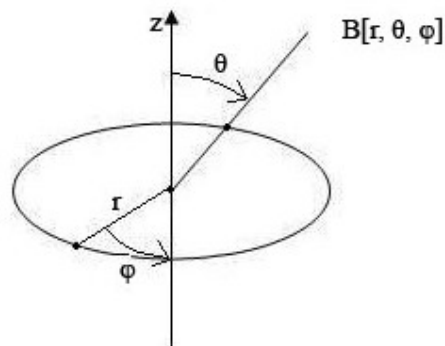
Pro sběr obrazových dat při MR zobrazení se v tštinou nevyužívá excitace menšího objemu jedním RF impulzem, ale k excitaci se využívají periodicky se opakující pulsy tvořené jednotlivými RF impulzy. V závislosti na skladbě pulsu (kombinaci RF impulzů) a na jejich časování lze získat signály váhované požadovaným počtem (početem) protonových jader  $N$  ( $H$ ),  $T_1$ ,  $T_2$  a proudem. Je známá celá řada metod měření magnetizace – početem rezonujících jader a relaxačních časů  $T_1$ ,  $T_2$ . Základní jsou SR/STE metoda, IR metoda, spin-echo metoda a gradient-echo metoda, viz [6]

## 5 MAPOVÁNÍ POLE VE VYMEZENÉM PROSTORU

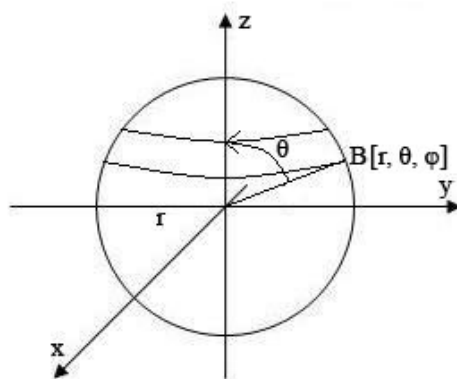
Mapování znamená grafické zpracování naměřených nebo vypočtených hodnot, na daném povrchu nebo objemu. Mění se provádí v bodech, které jsou definovány v souřadnicích. (obr. 5.1., obr. 5.2., obr. 5.3.)



Obr. 5.1 Válcové souřadnice



Obr. 5.2 Kulové souřadnice



Obr. 5.3 Bod v souřadnicích kulových

### 5.1 Legendrové polynomy-definice

Legendrovým polynomem prvního druhu stupně (řádu)  $n$  rozumíme polynom (viz [5])

$$P_n(z) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n!} \left[ z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} z^{n-4} - \dots \right] \quad (5.1.1)$$

Tvar Legendrových polynomů nultého a prvního stupně

$$P_0(z) = 1 \quad (5.1.2)$$

$$P_1(z) = z = \cos \theta \quad (5.1.3)$$

Tvar dalších polynomů následujícího stupně získáme užitím rekurentního vztahu

$$P_{n+1}(z) = \left[ (2n+1) \cdot z \cdot P_n(z) - n \cdot P_{n-1}(z) \right] / (n+1) \quad (5.1.4)$$

### 5.1.1 Legendrové polynomy – p idružené funkce

P idružené Legendrové polynomy, jsou dány jejich derivací uvedených polynom , a m žeme je vyjád it pomocí následujících vztah :

$$P_0^1(z) = 0 \quad (5.1.5)$$

$$P_2^1(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1) \quad (5.1.6)$$

$$P_{n+1}^m(z) = \left[ (2n+1) \cdot z \cdot P_n^m(z) - (n+m) \cdot P_{n-1}^m(z) \right] (n-m+1) \quad (5.1.7)$$

$$P_n^{m+2}(z) = \frac{2 \cdot (m+1) \cdot z}{\sqrt{1-z^2}} \cdot P_n^{m+1} - (n-m) \cdot (n+m+1) \cdot P_n^m(z) \quad (5.1.8)$$

### 5.1.2 Aproximace

Indukci magnetického pole m žeme aproximovat v libovolném bod  $[r, \theta, \varphi]$  pomocí Legendrových polynom . Aproximací vztah v kulových sou adnicích je dán výrazem:

$$B_a(r, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{N_k} \sum_{m=0}^{m=k} r^k \cdot P_{m,k}(\cos \theta) \cdot [A_{m,k} \cos m \cdot \varphi + B_{m,k} \sin m \cdot \varphi] \quad (5.1.9)$$

kde  $N_k$  je nejvyšší stupe Legendrova polynomu pro zvolenou aproximaci ve vztahu (5.1.9),  $A_{m,k}$  a  $B_{m,k}$  jsou neznámé koeficienty.

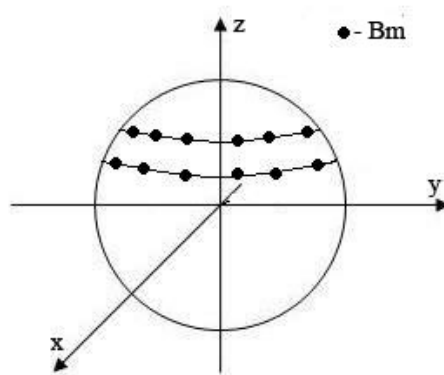
$N_k$  je dán podle vzorkovacího teorému po tem m ených bod na kružnicích  $N_b$  :

$$N_k = \frac{N_b}{2} - 1 \quad (5.2.1)$$

**Koeficienty**  $A_{m,k}$  a  $B_{m,k}$  je možné nalézt například použitím metody nejmenších tverc (Least Square, LS), kdy hledáme minimum výrazu:

$$\Psi = \min \sum_{i=1}^{N_m} (B_{im} - B_{ia})^2 \quad (5.2.2)$$

Kde  $B_m$  jsou naměřené hodnoty indukce například na kouli (počet naměřených bodů na jedné kružnici 12):



Obr. 5.4. Měřené body na kouli

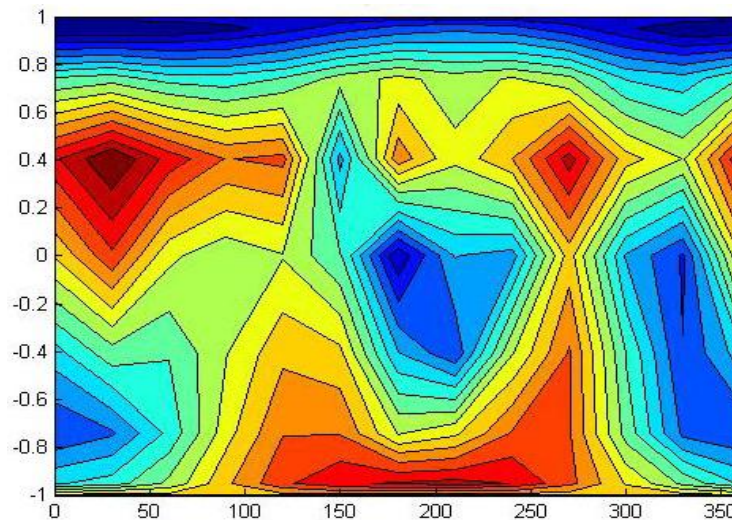
Na obr. 5.4. jsou znázorněny body na povrchu koule pro měřené hodnoty indukce  $B_m$ .

Tabulka naměřených hodnot  $B_m$ :

PB	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$B_m[\mu T]$	590	590	591	594	599	605	610	612	610	604	597	591
	632	635	629	628	632	640	645	641	644	639	625	622
	672	685	671	661	663	618	659	645	655	676	652	643
	650	666	645	639	643	632	597	620	617	652	619	607
	623	635	632	643	654	651	620	609	643	662	631	608
	608	613	627	647	661	661	643	648	662	662	635	612
	625	628	639	654	666	672	674	675	673	663	649	636

Tab. 5.1. Naměřené hodnoty indukce  $B_m$  na povrchu koule

Tabulka 5.1. znázorňuje naměřené hodnoty magnetické indukce na kružnicích. PB – počet bodů



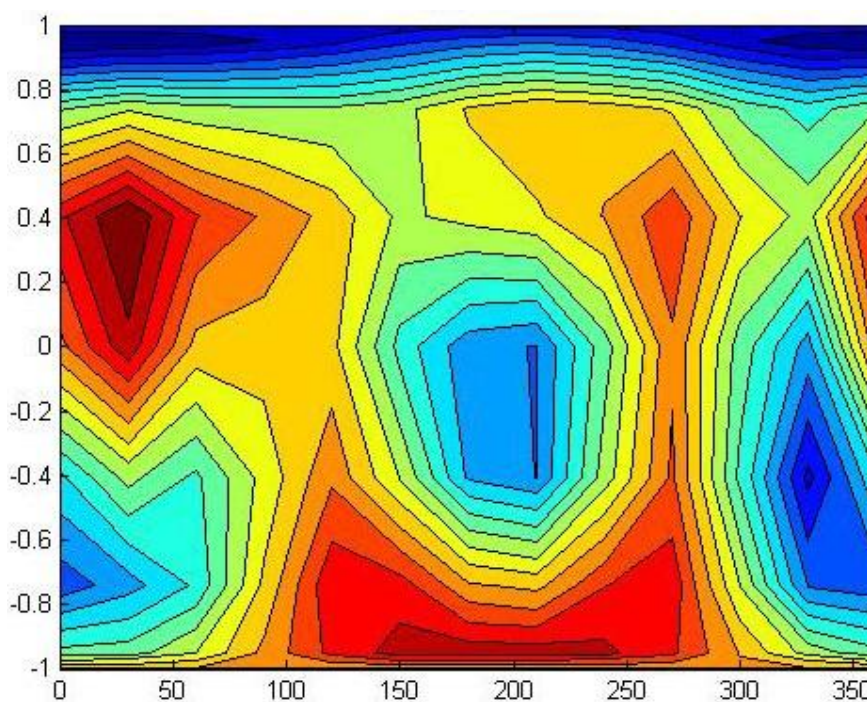
Obr. 5.5. Zobrazení indukce  $B_m$  na kouli pomocí programu Matlab



PB	1	2	3	4.	5	6
B <sub>a</sub> [μT]	588,249	588,840	590,750	593,914	598,234	603,354
	633,024	638,463	635,711	634,574	634,891	637,293
	666,708	679,284	662,647	655,721	642,371	638,322
	655,043	672,023	648,958	647,826	636,841	626,013
	621,199	635,524	626,712	641,300	650,024	639,081
	607,534	614,216	623,452	646,329	665,081	665,081
	629,858	630,943	639,261	652,181	664,060	670,057
PB	7	8	9	10	11	12
B <sub>a</sub> [μT]	607,966	609,741	607,572	602,174	595,383	590,131
	645,837	650,219	648,929	644,366	632,500	625,511
	641,406	644,184	651,104	660,982	645,265	637,200
	613,074	610,676	631,263	655,443	631,108	614,277
	615,978	610,966	636,657	657,655	626,621	598,138
	651,869	649,047	662,020	665,656	639,132	610,478
	670,953	670,564	669,339	663,204	650,525	637,045

**Tab. 5.2.** Vypo tené hodnoty indukce B<sub>a</sub> na povrchu koule

Tabulka (5.2.) **vypo tených** hodnot indukce B<sub>a</sub> na kouli (po et bod na jedné kružnici je 12).



**Obr. 5.6.** Zobrazení indukce B<sub>a</sub> na kouli pomocí programu Matlab

Zobrazení indukce magnetické pole v programu Matlab (obr.5.6.). Vypo tené hodnoty indukce jsou uloženy do matice pro znázornění intenzity v m ených bodech.

**Vypo tená relativní odchylka v nam ených bodech:**

$$\delta = \frac{|B_m - B_a|}{B_m} \cdot 100\% \quad (5.2.3)$$

$\delta$ [%]											
0,30	0,20	0,04	0,01	0,13	0,27	0,33	0,37	0,40	0,30	0,27	0,15
0,16	0,55	1,07	1,05	0,38	0,42	0,13	1,44	0,77	0,84	1,20	0,56
0,79	0,83	1,24	0,80	2,18	3,29	2,67	0,13	0,59	2,22	1,03	0,90
0,78	0,90	0,61	1,38	0,59	0,95	2,69	1,50	2,31	0,53	1,96	1,20
0,29	0,08	0,84	0,26	0,23	1,83	0,65	0,32	0,99	0,66	0,69	1,62
0,08	0,20	0,57	0,10	0,38	0,62	1,38	0,16	0,00	0,55	0,65	0,25
0,78	0,47	0,04	0,28	0,29	0,29	0,45	0,66	0,54	0,03	0,23	0,16

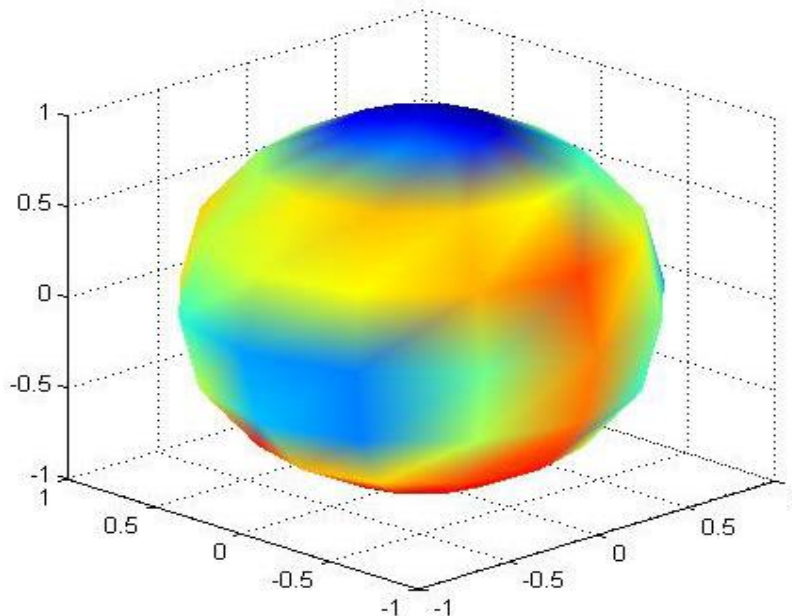
**Tab. 5.3.** Výpočetná relativní odchylka v měřených bodech

$N_k$	Počet koeficientů $k$	Time [s]	max. chyba [%]
2	4	0,48	7,11
3	9	1,10	7,24
4	24	3,27	4,61
5	25	7,92	3,28
6	36	21,33	2,84
7	49	34,10	1,92
8	64	65,51	0,97
9	81	106,58	0,69
10	100	206,44	0,22
11	121	234,44	0,07

**Tab.5.4.** Řád Legendrových polynomů, počet koeficientů

Tabulka 5.4. obsahuje počet koeficientů, čas pro výpočet a maximální chybu aproximace v závislosti na řádu ( $N_k$ ) Legendrova polynomu.

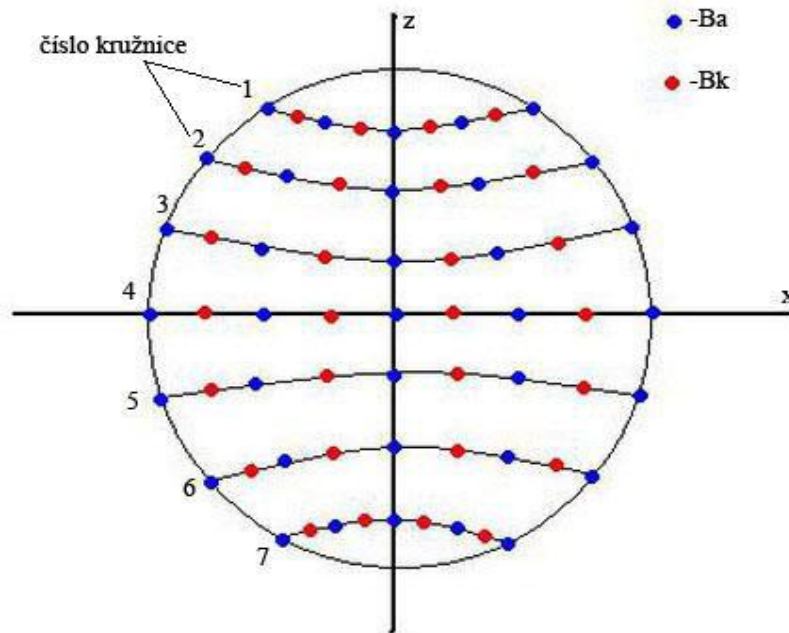
$k = (N_k + N_k \cdot (N_k - 1))$ , je chyba výpočetná pomocí programu MATLAB



**Obr. 5.7.** Zobrazení indukce  $B_a$  na kouli pomocí programu Matlab

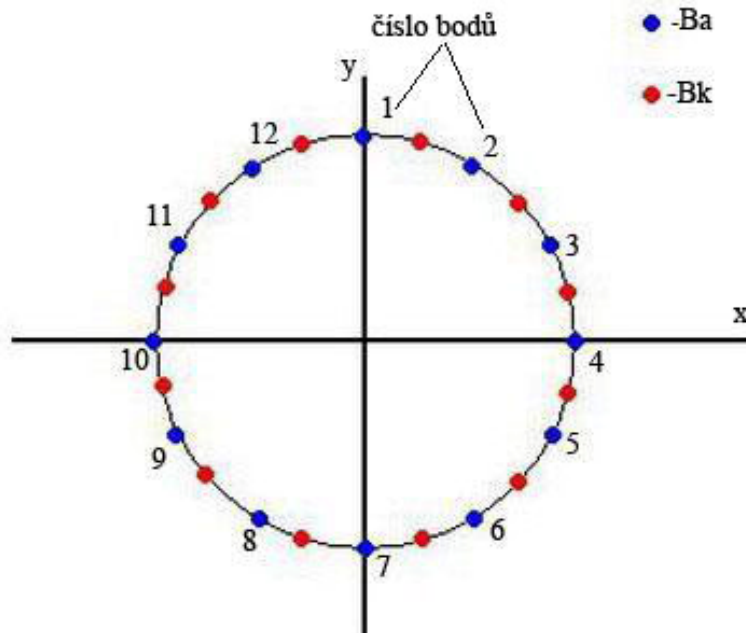
## 6 KONTROLNÍ APROXIMACE - $B_k$

Byla provedená kontrola správnosti algoritmu pro stanovení neznámých koeficient v kontrolních bodech mimo měřené body. Měření a výpočet je realizován na 7 kružnicích:



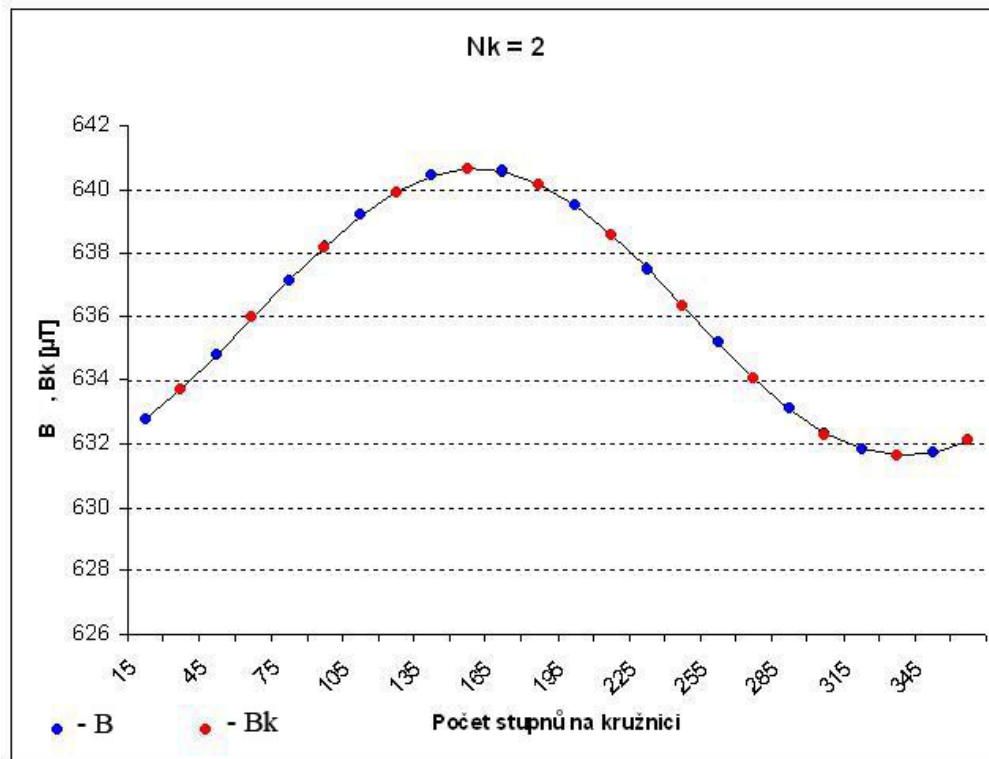
**Obr. 6.1.** Aproximované ( $B_a$ ) a kontrolní body ( $B_k$ ) na kružnicích, pohled z boku

Na každé kružnici bylo naměřeno a aproximováno 12 bodů, mezi které jsou umístěny kontrolní body  $B_k$ , které jsou prvkem této kontrolní aproximace.

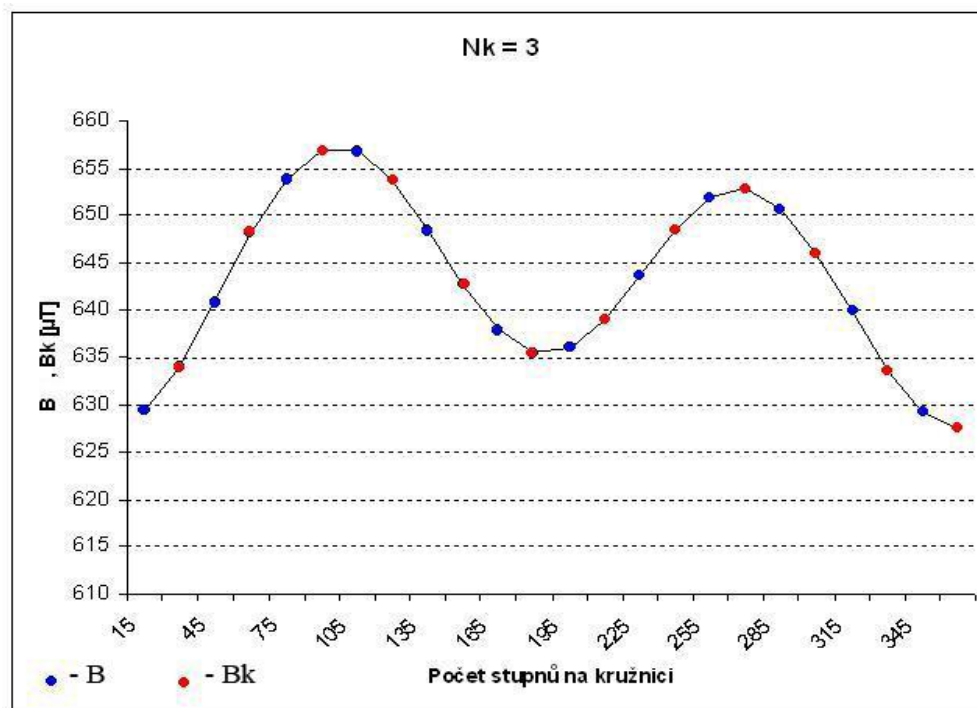


**Obr. 6.2.** Pohled na libovolnou kružnici shora

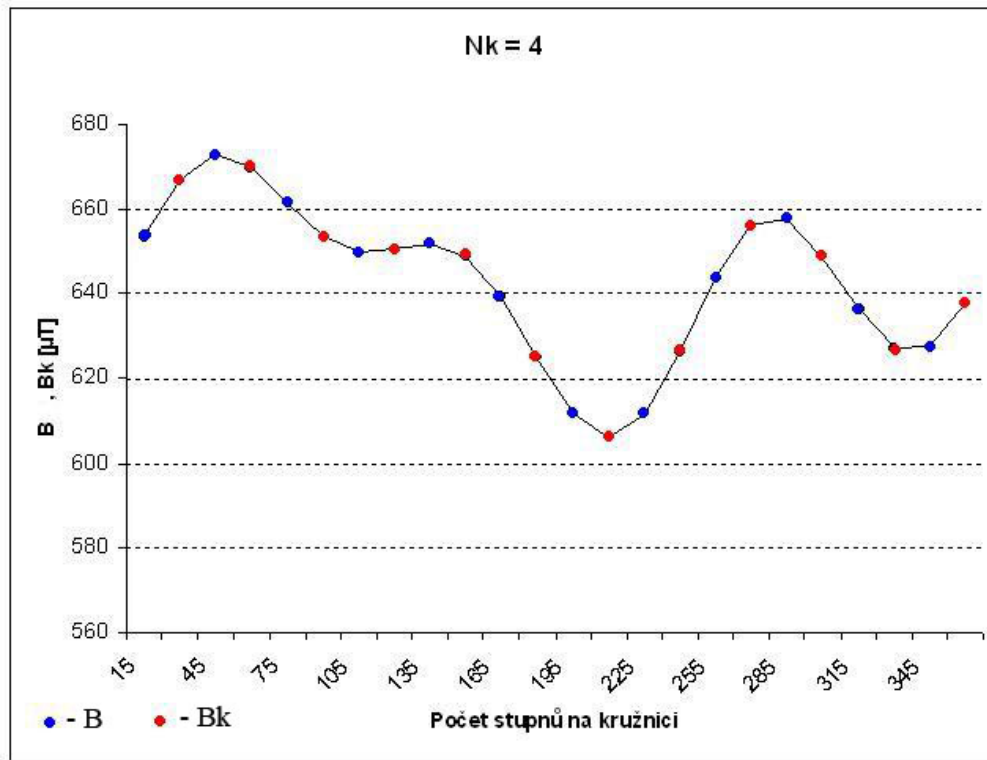
Kontrolní aproximace je závislá na zvoleném  $N_k$  - řád Legendrova polynomu. Důkazy jsou uvedeny níže. Grafy znázorní kružnici číslo 4. (obr. 6.1.), a příslušné vypočtené hodnoty  $B_a$  a hodnoty  $B_k$  v kontrolních bodech:



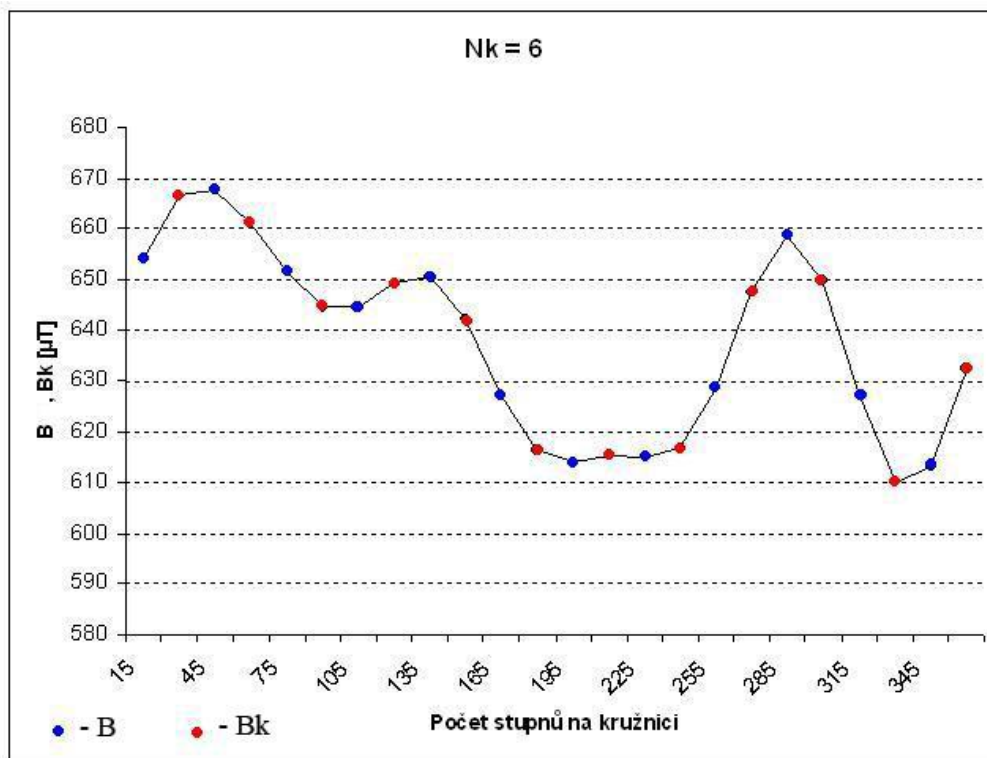
Obr. 6.3. Vypočtené hodnoty indukce ( $B_a$ ) a hodnoty kontrolních bodů ( $B_k$ ) pro  $N_k = 2$



Obr. 6.4. Vypočtené hodnoty indukce ( $B_a$ ) a hodnoty kontrolních bodů ( $B_k$ ) pro  $N_k = 3$

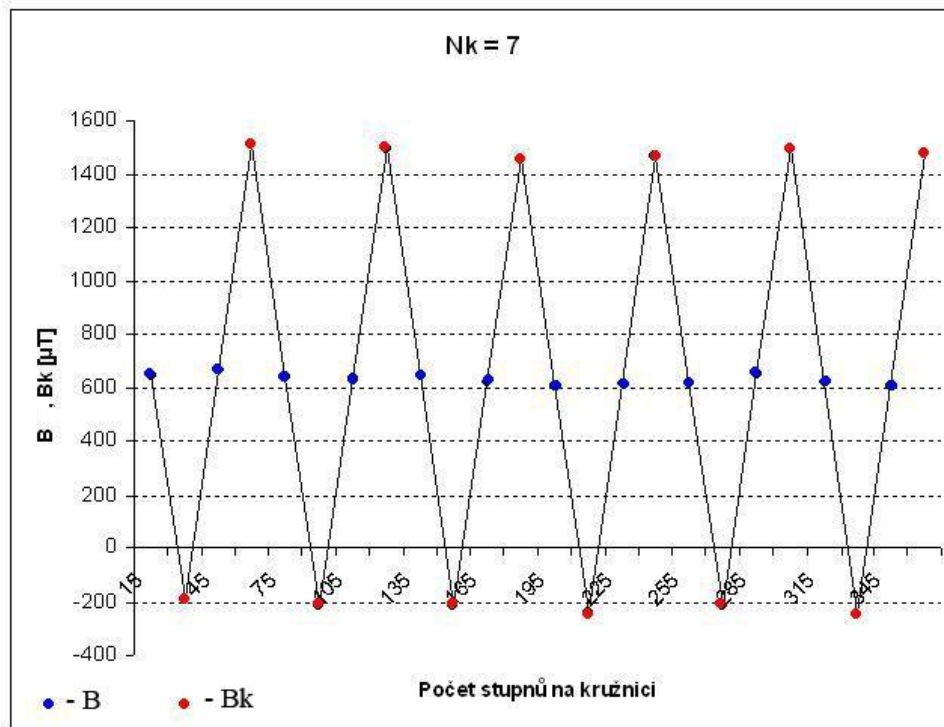


Obr. 6.5. Vypočtené hodnoty indukce ( $B_a$ ) a hodnoty kontrolních bodů ( $B_k$ ) pro  $N_k = 4$



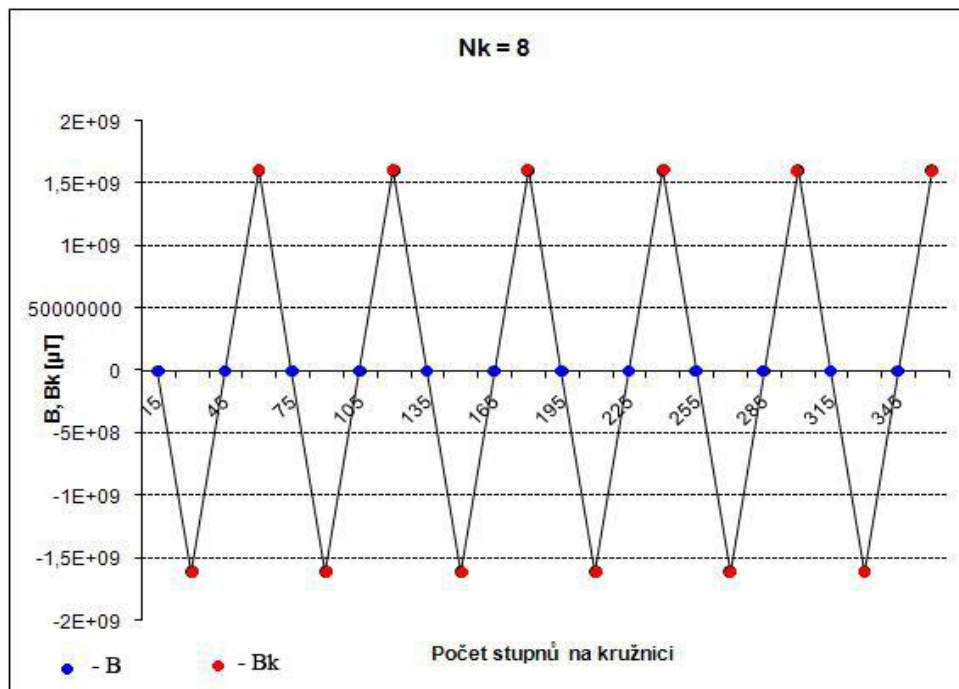
Obr. 6.6. Vypočtené hodnoty indukce ( $B_a$ ) a hodnoty kontrolních bodů ( $B_k$ ) pro  $N_k = 6$

Pro  $N_k = 7$  dochází k oscilacím kontrolních bodů (Obr. 6.7.). Zvyšováním řádu  $N_k$  oscilace kontrolních bodů rostou.



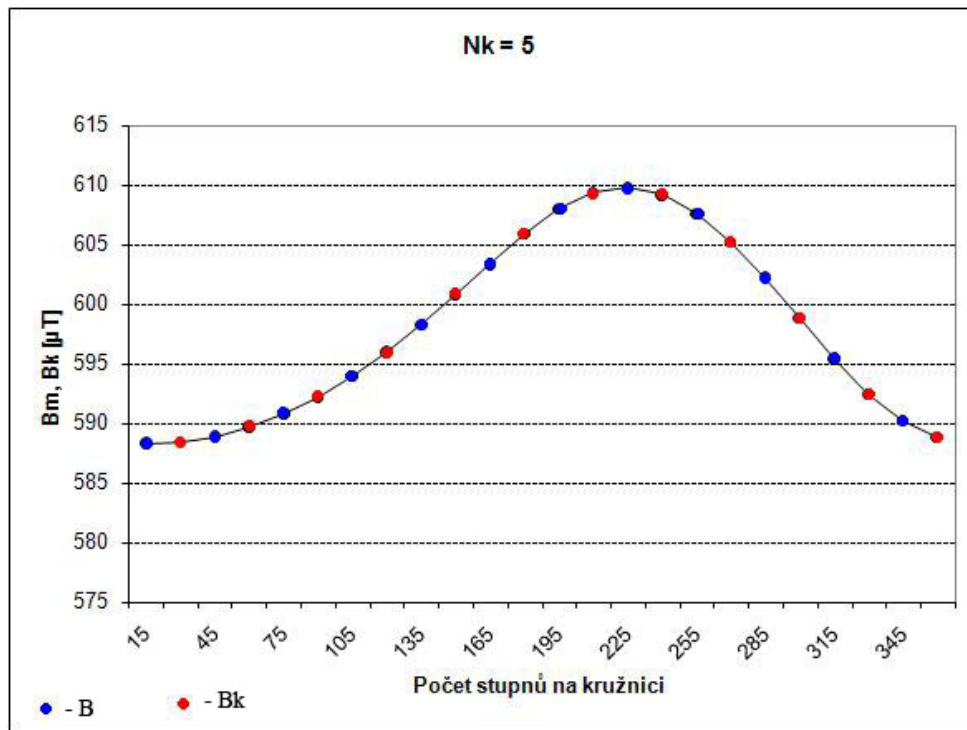
Obr.6.7. Vypočtené hodnoty indukce ( $B_a$ ) a hodnoty kontrolních bodů ( $B_k$ ) pro  $N_k = 7$

Pro  $N_k = 8$  dochází již k o řádově vyšším oscilacím (Obr.6.8.)



Obr.6.8. Vypočtené hodnoty indukce ( $B_a$ ) a hodnoty kontrolních bodů ( $B_k$ ) pro  $N_k = 8$

Jako optimální řád polynom by se mělo zvolit  $N_k = 5$ , vyplývá to z grafu (Obr.6.9). Vypočtené a kontrolní hodnoty v tabulce neoscilují.



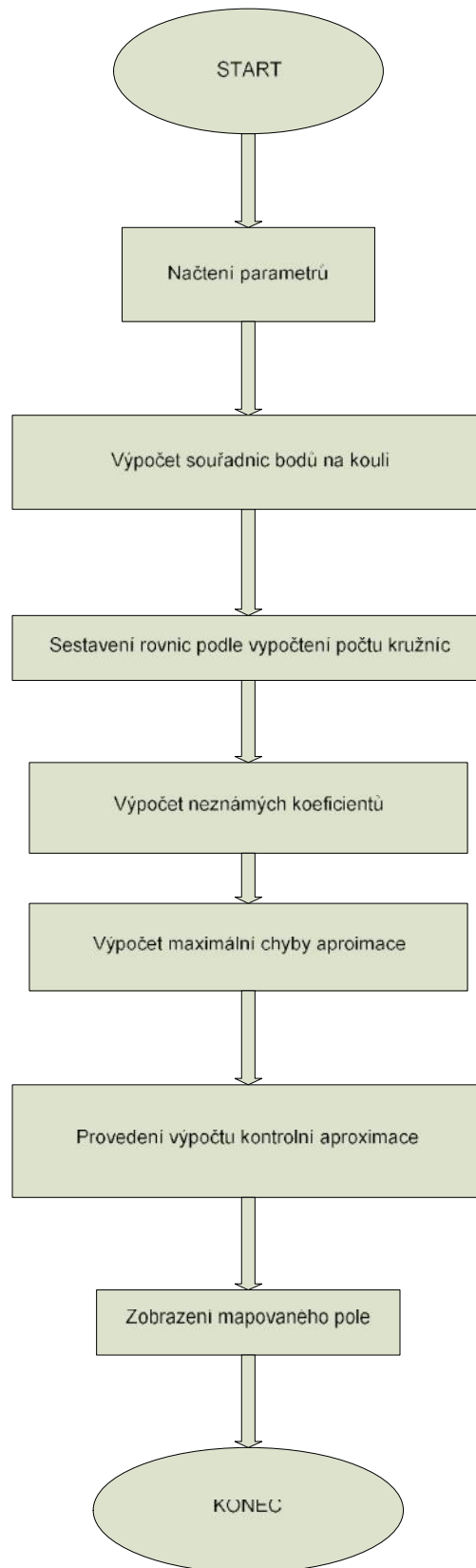
Obr.6.9. Vypočtené hodnoty indukce ( $B_a$ ) a hodnoty kontrolních bodů ( $B_k$ ) pro  $N_k = 5$

## 7 ALGORITMUS

Pro výpočet kontrolní aproximace a pro výpočet neznámých koeficientů byl navržen algoritmus v programu MATLAB. Výsledné blokové schéma algoritmu je uvedeno na obr. 7.1

Popis blok :

1. Program načte parametry
2. Vypočte souřadnice bodů na povrchu koule
3. Sestaví rovnice podle počtu bodů na kružnicích
4. Vypočte neznámé koeficienty vztahů
5. Vypočte maximální chybu aproximace
6. Provede kontrolní výpočet a aproximované hodnoty indukce mimo měřené body
7. Zobrazí mapované pole



**Obr. 7.1.** Blokové schéma algoritmu



## 8 ANALYTICKÉ EŠENÍ

Výpočet koeficientů, a nalezení neznámých hodnot se může provádět i pomocí analytické řešení. Kdy hledáme minimum výrazu (8.1.1) podle derivaci:

$$\Psi = \min \sum_{i=1}^{N_m} (B_m - B_a)^2 \quad (8.1.1)$$

Pro výpočet se upraví přibližný vztah (5.1.9), ze kterého dostaneme vzorce pro neznámé koeficienty:

$$K(r, \theta, \varphi) = r^k \cdot P_{m,k}(\cos \theta) \cdot \cos(m\varphi) \quad (8.1.2)$$

$$K(r, \theta, \varphi) = r^k \cdot P_{m,k}(\cos \theta) \cdot \sin(m\varphi) \quad (8.1.3)$$

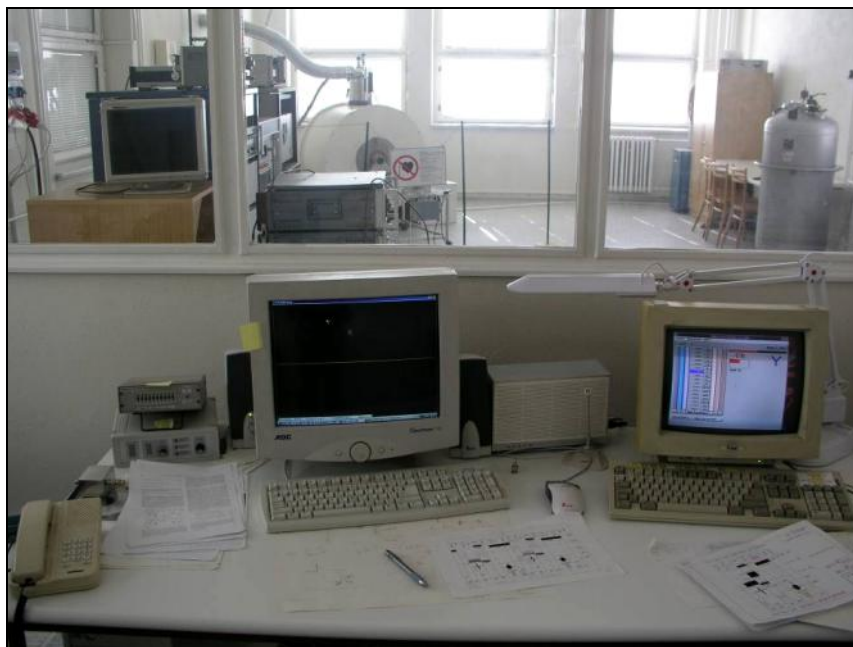
Podle získaných vztahů derivace první konstanty vyzerá:

$$\frac{\delta \Psi}{\delta a_{0,0}} = \sum_{i=1}^{N_m} 2 \cdot (B_m - B_a) \cdot \frac{\delta B_a}{\delta a_{0,0}} = r^0 \cdot P_{0,0} \cdot \cos(0 \cdot \varphi) \quad (8.1.4)$$

Stejným způsobem se vyjádří derivace pro ostatní koeficienty. Sestaví se soustava rovnic, pomocí kterého je možné nalézt neznámé hodnoty.

## 9 MĚŘENÍ MAGNETICKÉ INDUKCE

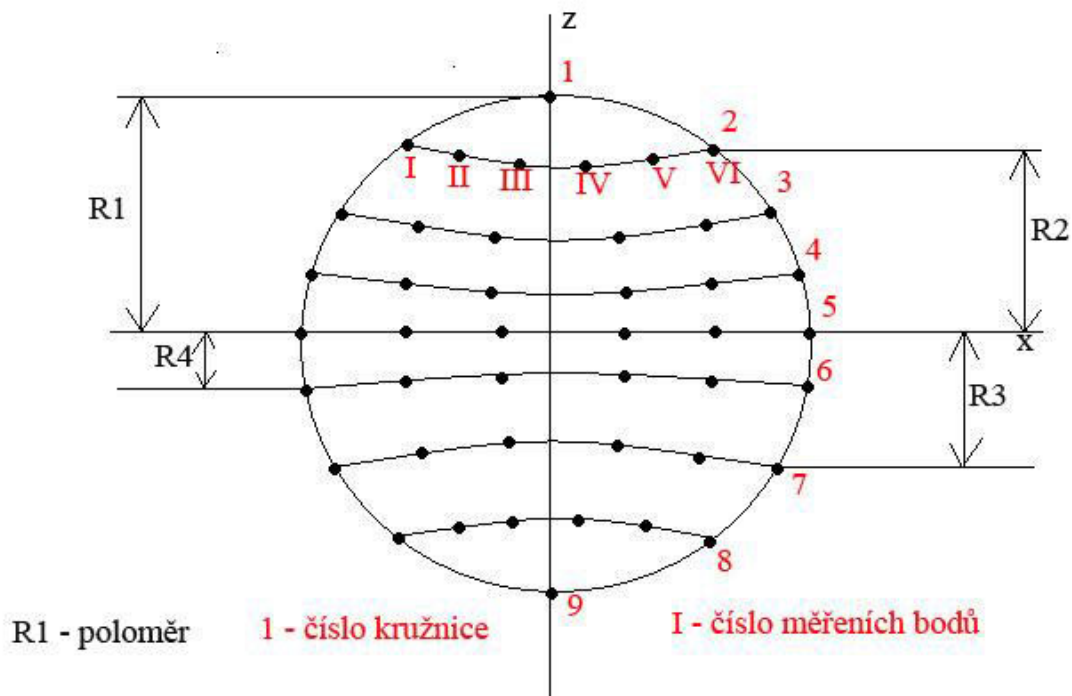
Měření magnetické indukce probíhalo na ÚPT (Ústav Přístrojové Techniky) VUT. Měření bylo uskutočněné na **MR tomografickém systému** (Obr.4.1) pomocí řídicího centru:



Obr. 9.1. Řídicí centrum MR tomografu

## 9.1. Výsledky měření

Rozložení měřících bodů jsou na obr. 9.2. Měření probíhalo na pracovišti řídícího centra MR tomografu (9.1.). Měřilo se kmitočet v jednotlivých bodech, které byly provedeny pomocí gyromagnetické konstanty na magnetické indukce.



**Obr.9.2.** Uspořádání měřících bodů na povrchu koule

Poznámky k obr.9.2. :

*R1 až R4:* jsou jednotlivé poloměry kružnic, na kterých bylo měření provedeno

$$R1 = 32 \text{ mm}$$

$$R2 = 30 \text{ mm}$$

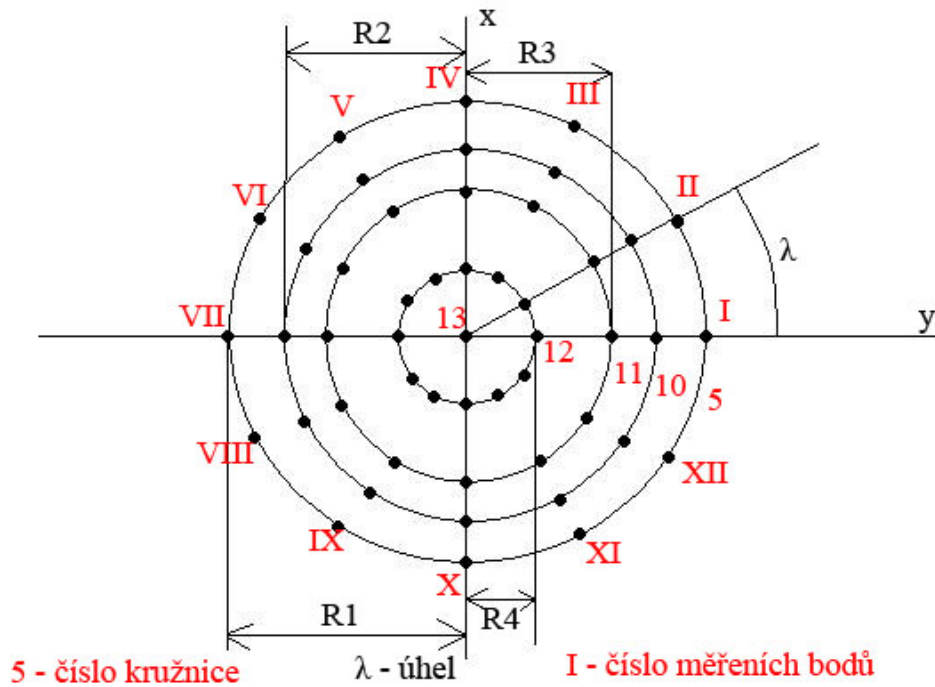
$$R3 = 23,2 \text{ mm}$$

$$R4 = 11,1 \text{ mm}$$

*1 až 9:* jsou pořadová čísla kružnic

*I až VI:* čísla bodů na kružnicích, na každé kružnici je celkem 12 bodů

Dále byla naměřena magnetická indukce v rovině (ezu) koule – tj. ezu v kružnici číslo 5 (obr.8.2) mimo body s hodnotami pro stanovení koeficientu.



**Obr.9.2.** ezu koule kružnicí číslo 5 (obr.8.1.)

Poznámky k obr.9.3. :

*I až XII* : čísla bodů na kružnicích , na každé kružnici je celkem 12 bodů

*R1 až R4*: jsou jednotlivé poloměry kružnic, na kterých bylo měření provedeno

R1 = 32 mm  
 R2 = 30 mm  
 R3 = 23,2 mm  
 R4 = 11,1 mm

– úhel mezi měřené body - 30°

*5 až 13* - jsou pořadová čísla kružnic

## 9.2. Výsledky měření na povrchu koule

čísla kružnic v tabulce odpovídají číslům kružnic na obr.8.1. resp. obr.8.2. Hodnoty

íslo bod	I	II	III	IV	V	VI
Úhel [°]	30	60	90	120	150	180
íslo kružnice	<b>Magnetická indukce B [μT]</b>					
1	-0,169	-0,169	-0,169	-0,169	-0,169	-0,169
2	-0,113	-9,329	-6,063	-3,572	-2,232	-2,491
3	-2,632	-1,057	1,974	3,149	3,666	5,898
4	5,499	5,640	6,298	2,890	-3,478	7,731
5	2,890	2,608	91,650	-6,180	9,987	-72,850
6	-1,050	77,550	-1,574	-0,106	-0,144	-3,000
7	-1,833	1,574	1,057	-2,091	-2,350	2,749
8	-1,175	77,550	1,057	28,850	51,700	2,232
9	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Tab. 9.1. Tabulka naměřených hodnot magnetické indukce na povrchu koule

íslo bod	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Úhel [°]	210	240	270	300	330	360
íslo kružnice	<b>Magnetická indukce B [μT]</b>					
1	-0,169	-0,169	-0,169	-0,169	-0,169	-0,169
2	-4,342	-7,238	-0,101	-0,122	-0,127	-0,126
3	6,157	1,974	-1,974	-1,574	-77,550	-1,715
4	1,365	7,332	1,880	7,543	0,124	8,900
5	8,413	3,266	-3,008	1,833	7,214	5,193
6	6,415	-25,850	-9,070	-5,660	-1,151	-1,833
7	5,381	0,000	-8,272	-0,111	-9,329	-6,321
8	2,608	14,100	-3,149	-5,522	-5,522	-3,407
9	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Tab. 9.2. Tabulka naměřených hodnot magnetické indukce na povrchu koule

## 9.3. Výsledky měření v ůezu koule

íslo bod	I	II	III	IV	V	VI
Úhel [°]	30	60	90	120	150	180
íslo kružnice	<b>Magnetická indukce B [μT]</b>					
	3,055	2,796	1,057	-6,227	-0,115	-1,809
	1,527	1,175	-21,150	-2,820	-4,747	-47,000
	91,650	51,700	-14,100	-1,175	-1,316	18,800

Tab. 9.3. Tabulka naměřených hodnot magnetické indukce v ůezu koule

íslo bod	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Úhel [°]	210	240	270	300	330	360
íslo kružnice	<b>Magnetická indukce B [μT]</b>					
	9,682	4,535	-3,478	1,527	7,684	5,452
	4,183	2,608	-39,950	70,500	2,350	2,044
	1,574	1,175	14,100	0,000	51,700	77,550

**Tab. 9.4.** Tabulka naměřených hodnot magnetické indukce v řezu koule

#### 9.4. Vypočtené hodnoty magnetické indukce

Vypočtené hodnoty pomocí navrženého algoritmu v programu MATLAB. Hodnoty na povrchu koule:

íslo bod	I	II	III	IV	V	VI	
Úhel [°]	30	60	90	120	150	180	
íslo kružnice	<b>Magnetická indukce B [μT]</b>						
	1	-1,603	-2,523	-2,744	-1,610	-0,023	1,330
	2	-2,513	-9,329	-6,063	-3,572	-2,232	-2,491
	3	-1,971	-1,057	1,974	3,149	3,666	5,898
	4	1,491	5,640	6,298	2,890	-3,478	7,731
	5	2,890	2,608	91,650	-6,180	9,987	-72,850
	6	-1,050	77,550	-1,574	-0,106	-0,144	-3,000
	7	-1,833	1,574	1,057	-2,091	-2,350	2,749
	8	-1,175	77,550	1,057	28,850	51,700	2,232
	9	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

**Tab. 9.5.** Tabulka vypočtených hodnot magnetické indukce na povrchu koule

íslo bod	VII	VIII	IX	X	XI	XII	
Úhel [°]	210	240	270	300	330	360	
íslo kružnice	<b>Magnetická indukce B [μT]</b>						
	1	-0,169	-0,169	-0,169	-0,169	-0,169	-0,169
	2	-4,342	-7,238	-0,101	-0,122	-0,127	-0,126
	3	6,157	1,974	-1,974	-1,574	-77,550	-1,715
	4	1,365	7,332	1,880	7,543	0,124	8,900
	5	8,413	3,266	-3,008	1,833	7,214	5,193
	6	6,415	-25,850	-9,070	-5,660	-1,151	-1,833
	7	5,381	0,000	-8,272	-0,111	-9,329	-6,321
	8	2,608	14,100	-3,149	-5,522	-5,522	-3,407
9	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	

**Tab. 9.6.** Tabulka vypočtených hodnot magnetické indukce na povrchu koule

íslo bod	I	II	III	IV	V	VI
Úhel [°]	30	60	90	120	150	180
íslo kružnice	Magnetická indukce B [ $\mu$ T]					
	3,186	4,314	4,409	3,420	2,031	0,965
	4,784	8,653	8,849	5,177	0,934	-1,166
	5,626	12,065	12,329	6,156	-0,467	-3,160

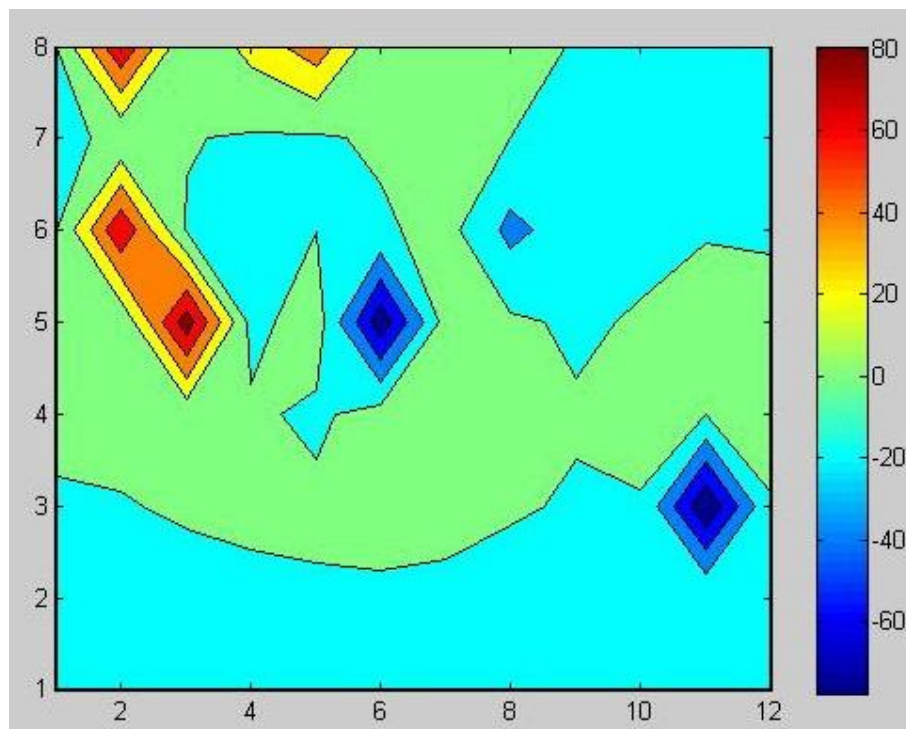
Tab. 9.7. Tabulka vypočtených hodnot magnetické indukce v  $z$  ose koule

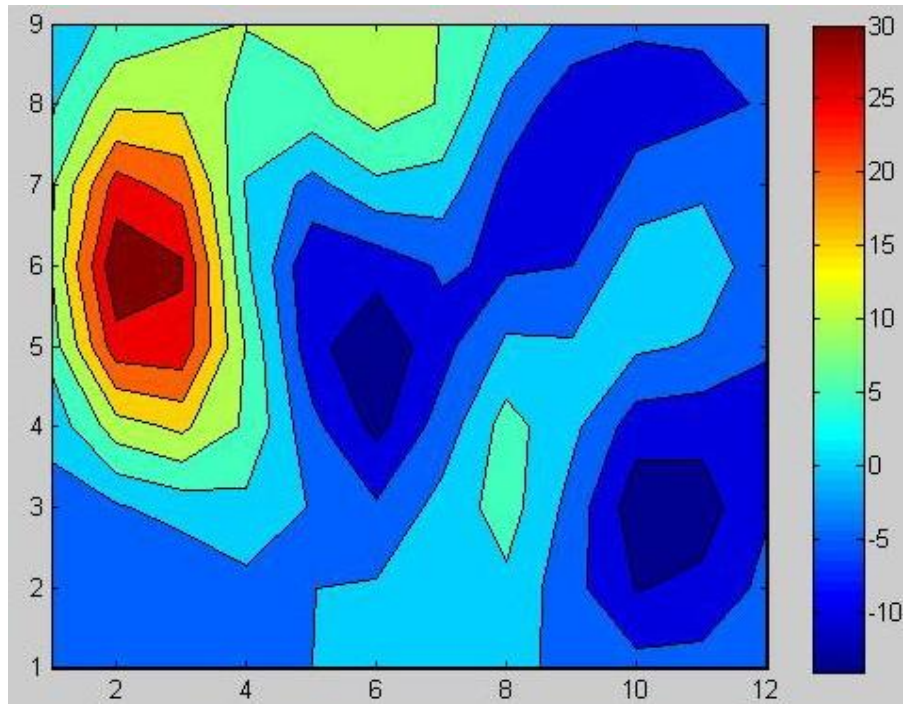
íslo bod	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Úhel [°]	210	240	270	300	330	360
íslo kružnice	Magnetická indukce B [ $\mu$ T]					
	0,423	0,188	0,082	0,191	0,709	1,763
	-1,086	-0,659	-0,888	-1,097	-0,717	0,968
	-2,075	-0,753	-1,049	1,424	-1,350	0,125

Tab. 9.8. Tabulka vypočtených hodnot magnetické indukce v  $z$  ose koule

## 9.5. Zobrazení výsledků pomocí programu MATLAB

Zobrazení výsledků bylo prováděno pomocí MATLAB. Výsledky byly uloženy do matice rozměru  $[8 \times 12]$ . Výsledné zobrazení je vidět na obrázku Obr.9.4. a Obr.9.5. Součástí obrázku je stupnice hodnot magnetické indukce, ve kterém barvy značí velikost pole.

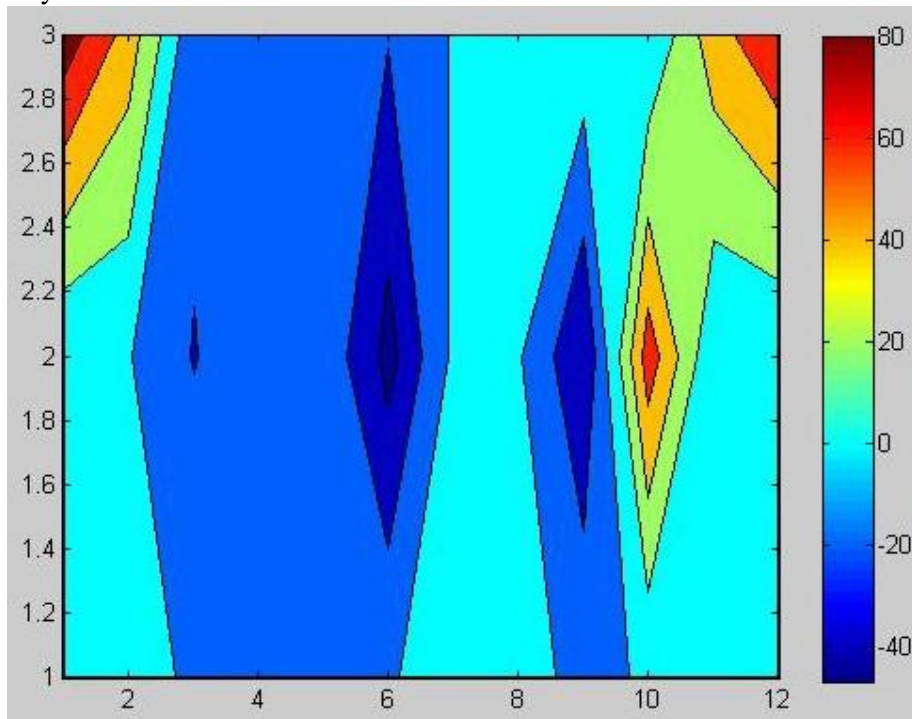
Obr.9.4. Naměřená magnetická indukce na povrchu koule [od  $-80 \mu\text{T}$  do  $80 \mu\text{T}$ ]



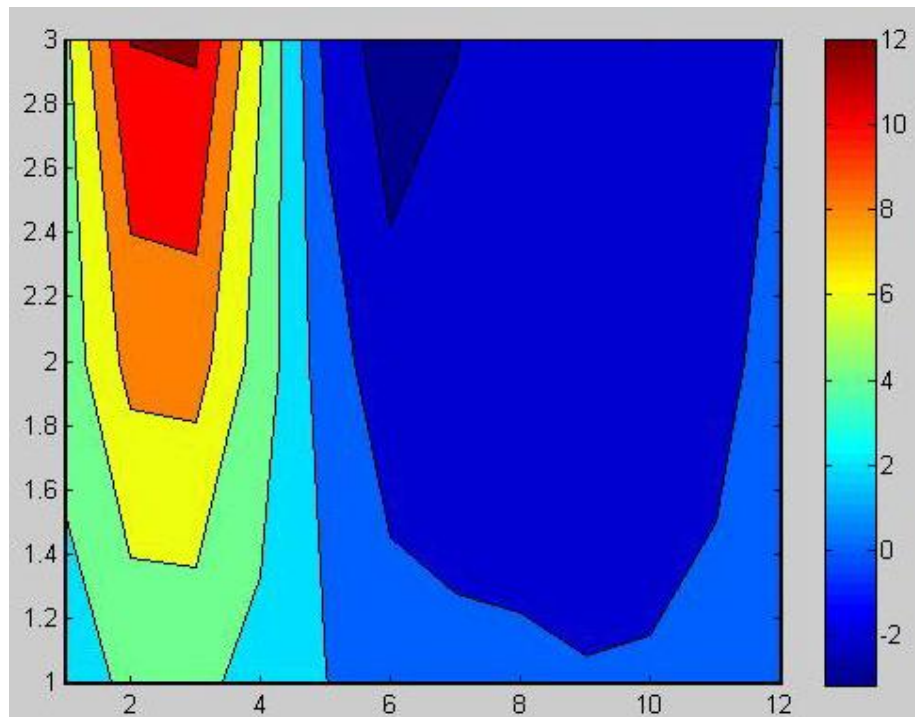
**Obr.9.5.** Vypočtené hodnoty magnetické indukce [od  $-20 \mu\text{T}$  do  $30 \mu\text{T}$ ]

### EZ KOULE:

Zobrazení výsledku v řezu koule:



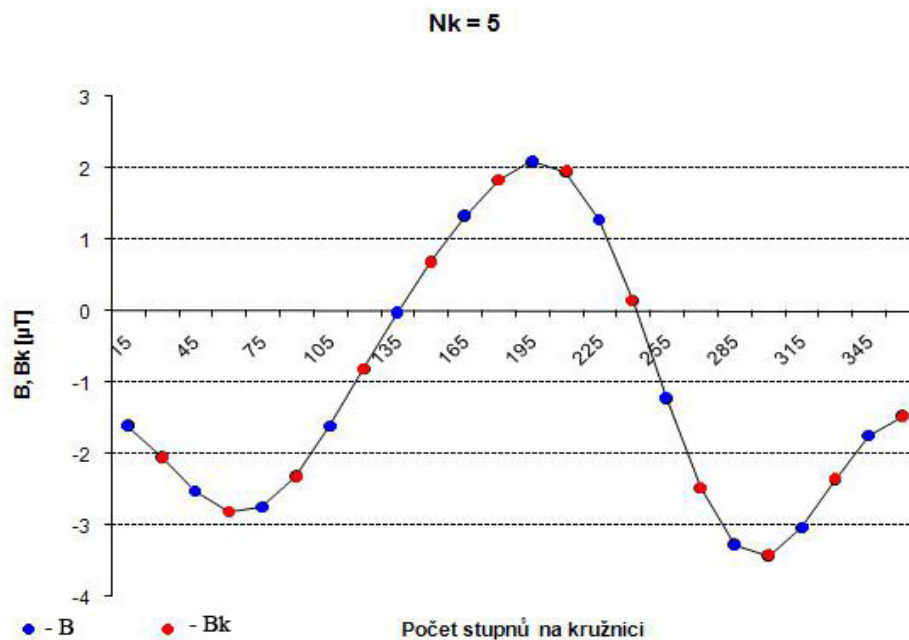
**Obr.9.6.** Naměřené hodnoty magnetické indukce v řezu koule



Obr. 9.7. Vypočtené hodnoty magnetické indukce v okraji koule

## 9.6. Kontrolní aproximace naměřených hodnot

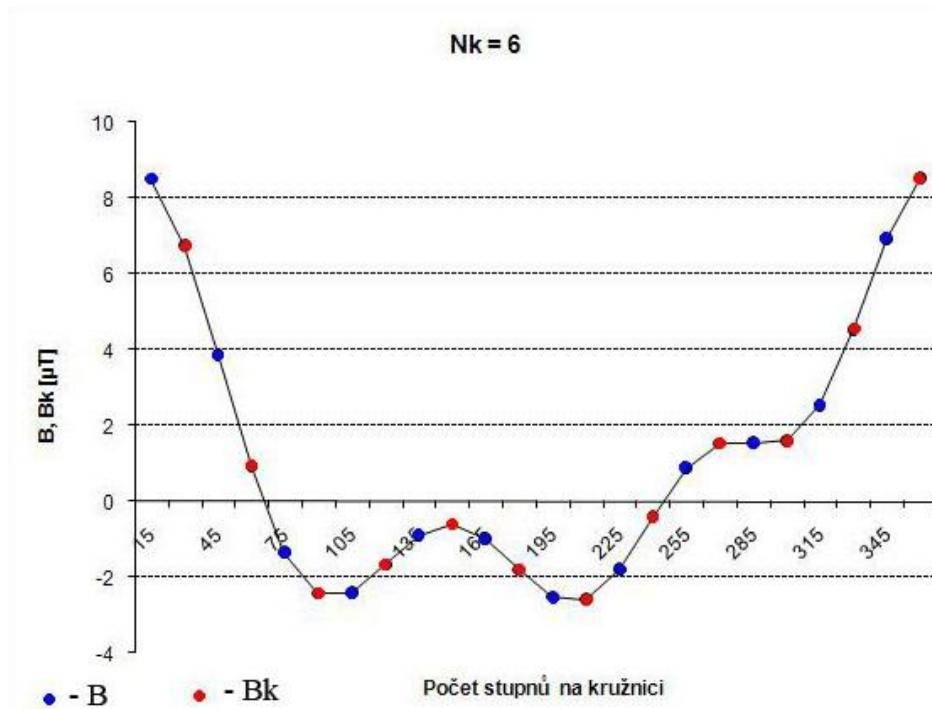
Kontrolní aproximace probíhala podle postupu v kapitole 6. Pomocí algoritmu se vypočítaly hodnoty magnetické indukce mimo naměřené hodnoty. Výsledky jsou na obrázku Obr. 9.8. pro  $N_k=5$ :



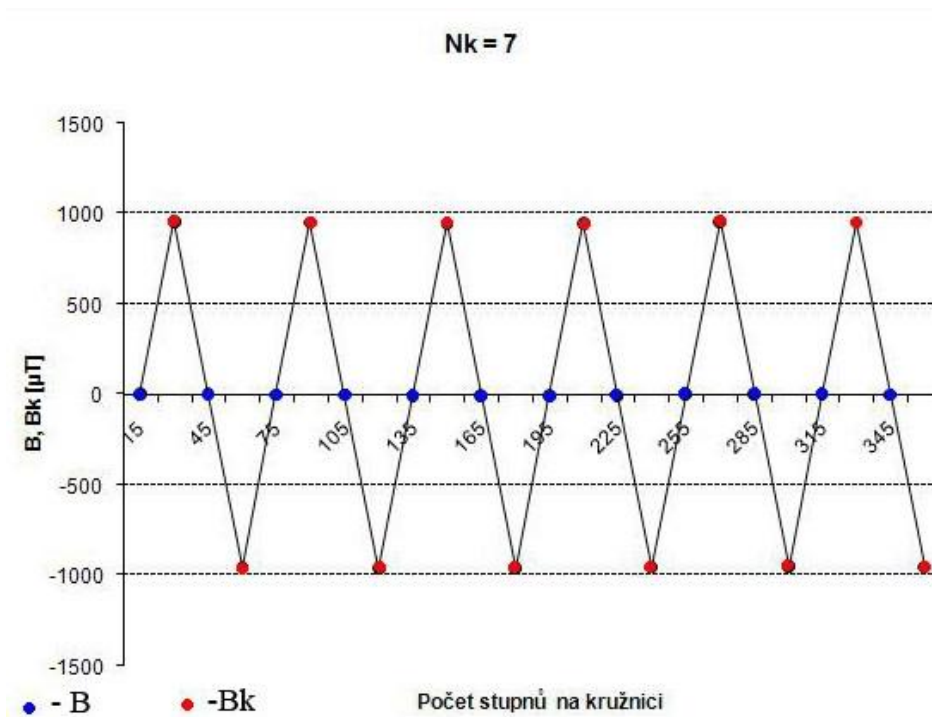
Obr.9.8. Vypočtené a kontrolní body pro  $N_k=5$



Kontrolní výpočet mimo vypočtené body, bylo provedeno pro  $N_k=6$  (Obr.9.9.) a pro  $N_k=7$  (Obr.9.10.). Oscilace bodů dochází při  $N_k=7$  (Obr.9.10.).



**Obr.9.9.** Vypočtené a kontrolní body pro  $N_k=6$



**Obr.9.10.** Vypočtené a kontrolní body pro  $N_k=7$

## 10 ZÁVĚR

V rámci bakalářské práce byla navržena metoda pro mapování statického magnetického pole na základě analýzy naměřených dat indukce magnetického pole. Indukce magnetického pole byla aproximována pomocí Legendrových polynomů v libovolném bodě  $[r, \theta]$  na kouli se zadaným poloměrem. Pro aproximaci bylo potřeba stanovit neznámé koeficienty  $A$  tak, aby odchylka mezi naměřenou a aproximovanou hodnotou indukce byla v zadaných bodech na povrchu koule minimální. Počet koeficientů  $A$  závisí na zvoleném stupni aproximace Legendrova polynomu  $N_k$ . Pro stanovení koeficientů byl navržen algoritmus a realizovaný byl v programu Matlab. Výsledné blokové schéma algoritmu, je uvedeno v kapitole 7. Pro výpočet byly staveny relativní chyby výpočtu pomocí programu MATLAB. Relativní chyba při řádu polynomu  $N_k=2$  je  $\Delta=7,11\%$ . Při řádu polynomů  $N_k=5$  je relativní odchylka  $\Delta=3,29\%$ .

Byla provedena také kontrolní aproximace mimo měřené body. Rozložení kontrolních bodů je uvedeno na obrázku 6.1. a obr. 6.2. Grafické znázornění výsledných hodnot  $B_k$  je uvedeno v grafech na obrázku 6.3 až 6.9. První graf je pro řád polynomu  $N_k=3$ . Jako optimální stupeň polynomu byl podle výpočtu a provedené kontrolní aproximace zvolen a navržen  $N_k=5$ . Při řádu polynomu  $N_k=5$  nedochází k oscilacím kontrolních bodů (Obr.6.9.). Oscilace kontrolních bodů dochází při  $N_k=7$ , obr. 6.7.

Uvedený výpočet je možné provést i analytickým výpočtem (kapitola 8), kdy se hledá derivace funkce 8.1.1. pro každý neznámý koeficient. Sestaví se soustava rovnic, pro nalezení neznámých hodnot.

Dalším úkolem bakalářské práce bylo naměření hodnot magnetické indukce na zvoleném objemu, pro ověření správnosti navrženého algoritmu. Zvolený objem – koule má parametry uvedené v kapitole 9. Rozložení měřicích bodů jsou uvedeny na obrázku 9.2 a obr. 9.3. Byly naměřeny hodnoty mimo povrch koule, tj. uvnitř koule (Obr.9.3). Zobrazení magnetické indukce pro daný povrch jsou na obrázku 9.4. až 9.7. Zobrazení kontrolních výpočetných bodů je vidět v grafech na obrázku 9.8. až 9.10. Při  $N_k=7$  dochází k oscilacím, jako v kapitole číslo 6, pro zadané hodnoty. Optimální řád polynomu je  $N_k=5$ . Při  $N_k=5$  je počet neznámých koeficientů 25. Minimální počet měřených dat potřebný pro vyhodnocení mapy pro zvolený objem je 86, tj. 7 kružnic, na kterém je 12 bodů, a k tomu měřené body na dvou pólech kružnic.

## SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOL

$\mathbf{H}_0$	vektor intenzity základního magnetického pole	$(\text{A}\cdot\text{m}^{-1})$
$\Delta\mathbf{H}$	intenzita reakčního pole	$(\text{A}\cdot\text{m}^{-1})$
$\mathbf{J}$	moment hybnosti jádra	$(\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1})$
$S$	plocha	$(\text{m}^2)$
$x, y, z$	prostorové souřadnice laboratorní soustavy	$(\text{m})$
$\mu$	permeabilita	$(\text{H}\cdot\text{m}^{-1})$
$\mu_0$	permeabilita vakua, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$	$(\text{H}\cdot\text{m}^{-1})$
$\mu_r$	relativní permeabilita	$(-)$
$\chi_m$	magnetická susceptibilita	$(\text{SI})$
$\tilde{\chi}_m$	molekulární magnetická susceptibilita	$(\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1})$
$\chi_\Delta$	diferenciální magnetická susceptibilita	$(\text{SI})$
$\mathbf{B}$	magnetická indukce	$(\text{T})$
$\mathbf{H}$	intenzita magnetického pole	$(\text{A}\cdot\text{m}^{-1})$
$\mathbf{B}_a$	aproximovaná (výpočetná) hodnota magnetické indukce	$(\text{A}\cdot\text{m}^{-1})$
$\mathbf{B}_m$	naměřená hodnota magnetické indukce	$(\text{A}\cdot\text{m}^{-1})$
$\mathbf{B}_k$	kontrolní hodnota magnetické indukce	$(\text{A}\cdot\text{m}^{-1})$
$\mathbf{PB}$	počet bodů	$(-)$
$\mathbf{MR}$	magnetická rezonance	$(-)$
	relativní odchylka	$(\%)$
$\mathbf{P}_{(n)}(\mathbf{z})$	Legendrovy polynomy	$(-)$
$\mathbf{N}_K$	řád Legendrova polynomu	$(-)$
$\mathbf{k}$	počet koeficientů	$(-)$
$\mathbf{R}$	poloměr kružnice	$(\text{mm})$

**SEZNAM OBRÁZK**

obr. 1.1	Sílo úhy magnetické pole.....	3
obr. 2.1	Magnetická indukce kolem vodiče a cívky.....	3
obr. 2.2	Sílo úhy magnetického pole v rovinně proložené kruhovým závitem s proudem.....	4
obr. 2.3	Helmotzovy cívky.....	5
obr. 2.4	Výklad 1. a 2. Maxwellovy rovnice.....	6
obr. 2.5	K výkladu 4. Maxwellovy rovnici.....	7
obr. 2.6	Lom sílo úhy na rozhraní.....	8
obr. 2.7	Lom sílo úhy na rozhraní.....	8
obr. 2.8	příklady magnetického pole.....	9
obr. 3.1	základní impulsní sekvence pro metodu gradientního echa.....	10
obr. 4.1	MR tomografický systém ÚPT.....	13
obr. 4.2	MR systém ÚPT – se magnetem a sondou.....	13
obr. 5.1	Válcové souadnice.....	15
obr. 5.2	Kulové souadnice.....	15
obr. 5.3	Bod v souadnicích kulových.....	15
obr. 5.4	Měřené body na kouli.....	17
obr. 5.5	zobrazení indukce $B_m$ na kouli pomocí programu MATLAB.....	17
obr. 5.6	Zobrazení indukce $B_a$ na kouli.....	18
obr. 5.7	Zobrazení indukce $B_a$ na kouli.....	19
obr. 6.1	Aproximované a kontrolní body – pohled z boku.....	20
obr. 6.2	pohled na libovolní kružnici shora.....	20
obr. 6.3	Vypočtené a kontrolní body pro $N_k=2$ .....	21
obr. 6.4	Vypočtené a kontrolní body pro $N_k=3$ .....	21
obr. 6.5	Vypočtené a kontrolní body pro $N_k=4$ .....	22
obr. 6.6	Vypočtené a kontrolní body pro $N_k=6$ .....	22
obr. 6.7	Vypočtené a kontrolní body pro $N_k=7$ .....	23
obr. 6.8	Vypočtené a kontrolní body pro $N_k=8$ .....	23
obr. 6.9	Vypočtené a kontrolní body pro $N_k=5$ .....	24
obr. 7.1	Blokové schéma algoritmu.....	25
obr. 9.1	řídící centrum MR tomografu.....	26
obr. 9.2	Uspořádání měřících bodů na povrchu koule.....	27
obr. 9.3	se koule kružnicí číslo 5.....	28
obr. 9.4	Naměřená magnetická indukce na povrchu koule [od $-80 \mu\text{T}$ do $80 \mu\text{T}$ ].....	31
obr. 9.5	Vypočtené hodnoty magnetické indukce [od $-20 \mu\text{T}$ do $30 \mu\text{T}$ ].....	32
obr. 9.6	Naměřené hodnoty magnetické indukce v ose koule.....	32
obr. 9.7	Vypočtené hodnoty magnetické indukce v ose koule.....	33
obr. 9.8	Vypočtené a kontrolní body pro $N_k=5$ .....	33
obr. 9.9	Vypočtené a kontrolní body pro $N_k=6$ .....	34
obr. 9.10	Vypočtené a kontrolní body pro $N_k=7$ .....	34

**Literatura:**

- [1] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: Fyzika, VUTIUM, skripta VUT, Brno, 2003
- [2] Děk, L. Děková, J.: Elektromagnetismus, VUTIUM, skripta VUT, Brno, 2000
- [3] Steinbauer, M. Disertační práce. Měření mg. Susceptibility metodou mg. Tomografie
- [4] Děk, J.: Modelování elektromagnetických polí, elektronická skripta VUT, 2005
- [5] ANGOT A., Užitá matematika, Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1972
- [6] Orešanská, H.: Sem. projekt 2: MR zobrazovací techniky měření nehomogenity vř. pole

**Detail použitého programu a počítače:**

- [1] MATLAB – The Language of Technical Computing: version 7.1.0.246 (R14) Service Pack 3
- [2] Microsoft office 2003, Service Pack 2
- [3] Notebook ASUS A9JC – Procesor Intel Centrino Duo T2050