UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

HEURISTIKA VE VYUČOVÁNÍ

Disertační práce

Autor: Mgr. Alena Fleková

Školitel: doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.

OLOMOUC 2013

Autor:	Mgr. Alena Fleková
Název disertační práce:	Heuristika ve vyučování
Studijní obor:	Pedagogika
Školitel:	doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.
Pracoviště:	Pedagogická fakulta Univerzity Palackého v Olomouci, Ústav pedagogiky a sociálních studií, Katedra matematiky
Rok obhajoby disertační práce:	2013

Tato disertační práce je duševním vlastnictvím Mgr. Aleny Flekové a podléhá právní ochraně podle § 2 zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem disertační práci vypracovala samostatně a použila jen uvedených pramenů a literatury.

V Olomouci dne 30. 8. 2013 ……………..………………………..

Mgr. Alena Fleková

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji školitelce doc. RNDr. Jitce Laitochové, CSc., za odborné vedení disertační práce, poskytování rad a morální podpory a doc. PhDr. Bohumilu Novákovi, CSc., za poskytnutí podnětných rad a materiálních podkladů.

Děkuji ředitelům spolupracujících škol, kolegům, zvláště Mgr. Haně Mahnelové z Gymnázia Nymburk, žákům základních škol, žákům gymnázia a studentům Univerzity Palackého v Olomouci, kteří se podíleli na realizaci výzkumných šetření, za vstřícný přístup a spolupráci.

Zvláštní poděkování patří mé rodině a přátelům za pomoc a podporu.

OBSAH

I. TEORETICKÁ ČÁST

II.EMPIRICKÁ ČÁST

„Nejlepší způsob, jak se něčemu naučit, je objevit si to sám!"

G. Polya

ÚVOD

„Aktivita, samostatnost a tvořivost jsou hlavními ideály, ke kterým směřujeme a jsou náplní celého života. Tvořivost je vrcholným projevem osobnosti každého člověka v různé míře. Pojem aktivní, samostatné a tvořivé práce se v dějinách školy a pedagogiky objevuje již v dílech J. A. Komenského, J. J. Rousseau, J. Dewey a dalších myslitelů."[1] I v dnešní době je naší snahou vytvořit podnětné a tvůrčí školní prostředí, které stimuluje nejschopnější žáky, povzbuzuje méně nadané, chrání i podporuje žáky nejslabší a zajišťuje, aby se každé dítě prostřednictvím výuky přizpůsobené individuálním potřebám optimálně vyvíjelo v souladu s vlastními předpoklady pro vzdělávání. Přátelská a vstřícná atmosféra vybízí žáky ke studiu, práci i činnostem podle jejich zájmu a poskytuje jim prostor a čas k aktivnímu učení a k plnému rozvinutí jejich osobnosti. Žákům musí být dána možnost zažívat úspěch, nebát se chyby a pracovat s ní.[2]

Současné vzdělávací kurikulum, Rámcový vzdělávací program, předpokládá ve školní výuce využití metod, které aktivizují žáky, podporují rozvoj jejich tvůrčího myšlení a dalších složek osobnosti. Mezi takové aktivizující metody patří, mimo jiné, metody heuristické. Tyto metody vycházejí z přesvědčení, že žáci budou učivu lépe rozumět, když budou vidět, jak se nové poznatky tvoří a když si toto vytváření sami na jim odpovídající úrovni vyzkoušejí. Žáci přicházejí do školy s mnoha otázkami „Proč?" a „Jak?" a s touhou dostat na všechny své otázky odpovědi. Bohužel tyto žákovské touhy znát, vědět a objevovat jsou často špatnou metodou, např. pouhou transmisí poznatků, potlačovány.

Využití metod, jejichž podstatou je heuristika, není žádnou novinkou. Tyto metody jsou v historii známy již od filosofa Sokrata, který je využíval ve zvláštním druhu rozhovoru. *„Obvyklý vztah, kdy se žák ptá a učitel odpovídá, je u něho obrácen. Sokrates je tím, kdo se táže. Často svou úlohu srovnával s uměním babickým, povoláním své matky a říkal, že jeho úlohou není moudrost rodit, nýbrž pouze pomáhat při zrození myšlenek druhým."*[3]

Metody využívající heuristické přístupy přinášejí žákům zajímavý způsob učení, který je baví, při kterém se sami podílejí na získávání nových poznatků, které potřebují. Za pomoci těchto metod se spojuje pěstování tvořivosti žáka s osvojováním znalostí a dovedností. Takové

---

[1] PECINA, Pavel. *Tvořivost ve vzdělávání žáků*. Brno: PdF MU, 2008. ISBN 978-80-210-4551-4. s. 5

[2] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. [online 25.8.2013].

[3] STÖRIG, Hans Joachim. *Malé dějiny filosofie*. Kostelní Vydří: Karmelitánské nakladatelství, 2000. ISBN 80-7192-500-4 s. 115.

vyučování vychází z myšlenky *„nejlepší způsob, jak se něčemu naučit, je objevit si to sám*“, a tím poskytuje možnost žákům zažít pocit objevitelského nadšení. Také zde hraje velkou roli trvalejší osvojení vědomostí a schopnost využívat je při řešení problémů.

Pokud chceme u žáků rozvíjet myšlení pomocí heuristických strategií, jako jsou např. zobecnění, ilustrace či analogie, potřebujeme dostatek času, což bývá velkým problémem. Tento problém se dá částečně kompenzovat cíleným zaměřením zkoumaného problému a také vědomím, že tato metoda není na úkor kvality vědomostí a rozvíjí nejen znalosti, ale i dovednosti a postoje žáků. Kromě rozvoje základních poznávacích procesů je tento typ vyučování důležitý také pro rozvoj procesů citových a volních, žáci se mimo jiné učí formulovat a obhajovat své názory, přijímají zodpovědnost za výsledky své práce a tím také rozvíjejí klíčové kompetence.

Snahou moderního vyučování je vrátit se k podstatě věci, nechat žáky řešit situace zkoumáním a objevováním jako vědce a badatele. Tato metoda tedy představuje v dnešní době ve světě *„významný způsob zefektivnění a modernizace výchovně-vzdělávacího procesu. Učení se pomocí tvořivého řešení problémů, stejně jako vyučování touto metodou a strategií, představuje vrchol v jednotlivých druzích a způsobech vyučování a učení*.“[4]

Hlavním tématem disertační práce je vzhledem k aktuálnosti tohoto tématu objevitelská metoda, heuristika. Pro využití heuristické metody v přírodovědném vzdělávání hovoří také výsledky výzkumu[5], které vedly ke zjištění, že žáci nemají až takový problém s osvojováním přírodovědných poznatků a teorií, ale slabinou je uvažovaní o problémech a jejich zkoumání. Dalším dokladem aktuálnosti potřeby využití badatelských metod je rozsáhlá komparativní studie z roku 2008 o stavu přírodovědného vzdělávání v zemích EU[6], která konstatovala klesající úroveň matematických a přírodovědných znalostí žáků. V této studii byly popsány hlavní problémy a následně byly dány návrhy a doporučení, která by měla vést ke změnám potřebným k žádoucí proměně. Jedno z doporučení bylo zaměřeno k inovaci výukových metod směrem k zavádění badatelsky orientovaných způsobů práce se žáky ve výuce a také ke vzdělávání učitelů tak, aby dokázali tyto metody ve výuce efektivně využívat.

---

[4] ZELINA, Miron. *Tvořivost v matematice*. Olomouc: Krajský pedagogický ústav Ostrava, 1990. ISBN 80-900158-9-1. s. 66

[5] Projekt PISA - výzkumná aktivita Organizace pro hospodářskou spolupráci a rozvoj zaměřená na oblast měření výsledků ve vzdělávání.

[6] Zpráva pro Nuffieldovu nadaci; Osborne a Dillon Science Education in Europe: Critical reflections, 2008.

Cílem disertační práce je v teoretické části zpracování uceleného pohledu na problematiku heuristických přístupů a jejich využití ve vyučování a to na podkladě studia odborné literatury a zdrojů, dostupných dokumentů a dosavadních výzkumů.

Dílčí cíle teoretické části disertační práce jsou:

- vymezit základní pojmy;
- analyzovat a komparovat jednotlivá teoretická východiska metod a forem práce využívajících heuristické přístupy;
- zpracovat přehled výukových metod a forem práce využívajících heuristické přístupy, popsat jejich základní zásady, východiska a postupy;
- popsat možnosti využití heuristických přístupů ve vyučování matematice.

Hlavním cílem empirické části disertační práce je zjistit volbu strategií žáků a studentů při řešení slovních úloh.

Dílčí cíle empirické části jsou:

- zjistit volbu strategií žáků základní školy při řešení slovních úloh;
- zjistit volbu strategií žáků střední školy při řešení slovních úloh;
- zjistit volbu strategií studentů vysoké školy při řešení slovních úloh;
- srovnat volby strategií podle stupně školy;
- zjistit, zda zvolené strategie řešení slovních úloh závisí na stupni navštěvované školy.

Dílčím cílem empirické části práce je také vytvoření sborníku heuristických úloh.

Disertační práce je strukturována do dvou základních částí, které se dále člení na konkrétní kapitoly a podkapitoly. Nedílnou součástí celé práce jsou obrázky, tabulky a grafy, které doplňují odborný text.

Teoretická část se skládá celkem ze tří hlavních kapitol, které představují komplexní pohled na problematiku heuristiky a jejího využití ve vyučování. Hlavní kapitoly tvoří *Základní vymezení pojmů, Heuristika a Metody heuristických přístupů ve vyučování.* Tyto hlavní kapitoly jsou dále rozčleněny na menší celky, podkapitoly, které dané téma podrobně rozpracovávají.

Zpracování teoretické části obnášelo intenzivní práci s odbornou literaturou a prameny, bylo využito jak knihovnických, tak internetových zdrojů a služeb. Prostudovaná literatura v rámci zaměření disertační práce byla složena z českých i zahraničních pramenů, monografií i odborných článků ve sbornících. Zaměřili jsme se jak na literaturu, příspěvky a publikace nejnovější, tak na literaturu staršího data, která dotvářela ucelenější pohled na problematiku heuristiky. Vzhledem k nejednotnosti názorů a pojmů na tuto problematiku byla práce na teoretické části velmi náročná. S výběrem odborné literatury a pramenů pomohla také rešerše zpracovaná pracovníky Knihovny Univerzity Palackého v Olomouci.

Empirická část je věnována pedagogickému výzkumu. Klíčový problém tvořila otázka, zda volba strategií řešení slovních úloh je závislá na stupni vzdělání. Výzkumné šetření uskutečněné v rámci disertační práce je založeno na kvalitativním srovnávání jednotlivých strategií doplněné o závěrečné shrnutí. Formou nestandardizovaného didaktického testu byly zjištěny strategie řešení slovních úloh u žáků základních a středních škol a studentů vysoké školy. Hlavní náplní výzkumu je komparace těchto zvolených strategií doprovázená ukázkami jednotlivých řešení žáků a studentů. Tato kvalitativní analýza je doplněna shrnutím ve formě tabulek a grafů a závěrečným zhodnocením výzkumu.

Mimo výše uvedenou teoretickou a empirickou část je nepostradatelnou součástí práce také přílohová část, kterou tvoří celkem pět dokumentů doplňující teorii i empirii disertační práce.

Přínosem práce pro pedagogickou teorii je v teoretické rovině komplexní zpracování teorií heuristických přístupů a ucelený pohled na tuto problematiku jak z teoretického hlediska, tak z možnosti využití ve školní praxi.

Ve výzkumné části je hlavním přínosem zjištění zvolených strategií a sborník činností, aktivit a zejména slovních úloh využívajících heuristických přístupů pro rozvoj matematických kompetencí žáků a studentů.

Teoretická oblast práce společně se zpracovanými výsledky výzkumného šetření mohou být využity v odborných didaktikách a jsou využitelné v profesní přípravě studentů učitelství na budoucí povolání.

Disertační práce má přínos také v oblasti pedagogické praxe. Teoretické informace, výsledky výzkumného šetření a sborník úloh mohou být zdrojem informací a inspirace pro učitele základních a středních škol o možnostech využití heuristických přístupů ve vyučování matematice.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 VYMEZENÍ ZÁKLADNÍCH POJMŮ

V odborné literatuře je s tématem heuristických přístupů spojeno mnoho klíčových pojmů. Pro naši práci bychom je uvedli v tzv. širším a užším kontextu.

V širším kontextu je výběr pojmů, které souvisejí s podstatou či východisky heuristických přístupů. Mezi ty základní patří konstruktivistický přístup, výukové metody, zvláště ty aktivizující, dále pojmy aktivita, samostatnost a tvořivost žáka a motivace. Důvodem výběru právě těchto pojmů je fakt, že východiskem heuristických metod je konstruktivistické pojetí, jsou zařazovány mezi aktivizační výukové metody, využívají aktivity, samostatnosti a tvořivosti žáků a jsou vhodnou motivací k učení.

Do užšího kontextu jsme zařadili pojmy související s heuristickým přístupem – tj. heuristika, heuristické metody, problém a jeho řešení, problémové situace a problémové úlohy, problémové vyučování, badatelsky orientované vyučování, metoda (řízeného) objevování a v neposlední řadě také metoda výzkumného přístupu. Vymezení a obsahy uvedených pojmů se často navzájem překrývají. Všechny termíny bezesporu spojuje důraz na aktivitu žáka a jeho tvořivé myšlení. Za podstatu uvedených pojmů můžeme považovat základní charakteristiky heuristiky.

V následujících podkapitolách jsou uvedeny stručné charakteristiky základních pojmů v širším kontextu. Pojmům v užším kontextu, jejichž základem je heuristika, je věnována samostatná 2. kapitola, neboť jsou ústředním tématem disertační práce.

1.1 Charakteristika základních pojmů v širším kontextu v souvislosti s heuristikou

Výše jsme v této práci rozdělili základní pojmy do širšího a užšího kontextu. Mezi pojmy v širším kontextu jsou zařazeny termíny konstruktivistický přístup, výukové metody (zvláště se zaměříme na aktivizující výukové metody), dále pojmy aktivita, samostatnost a tvořivost žáka a také motivace. V dalších podkapitolách jsou všechny tyto pojmy definovány, je uvedena jejich základní charakteristika, návaznost na téma heuristiky a možnosti využití ve vyučování matematice.

1.1.1 Výukové metody

Pojem metoda je výraz odvozený z řeckého slova *methodos* a znamená ve volném překladu cestu určitým směrem k danému cíli. V odborné literatuře nalezneme rozmanité definice pojmu výuková či vyučovací metoda. Tento pojem lze definovat jako *„cestu k dosažení stanovených výukových cílů“*[7] nebo také jako *„způsob záměrného uspořádání činností učitele i žáků, které směřují ke stanoveným cílům“*[8]. Pro naši problematiku se zdá nejbližší definice Maňáka a Švece: *„Výukovou metodu lze vymezit jako uspořádaný systém vyučovacích činností učitele a učebních aktivit žáků směřujících k dosažení daných výchovně-vzdělávacích cílů“*[9].

Existují různé definice a klasifikace výukových metod – např. dle pedagogického slovníku můžeme výukové metody dělit např. podle fází vyučovacího procesu (utváření, upevňování, prověřování vědomostí), podle způsobu prezentace (slovní, názorné, praktické), podle charakteru specifické činnosti (uplatňované v jednotlivých předmětech) nebo obecně podle způsobu interakce mezi učitelem a žákem (frontální, skupinové, individuální) atd.[10]

Definic a vymezení je nespočetně mnoho, ale ze všech vyplývá, že výuková metoda představuje komplex všech činností, které učitel užije k tomu, aby dosáhl vytyčeného výchovně-vzdělávacího cíle.

---

[7] KALHOUS, Zdeněk a Otto OBST. *Školní didaktika.* Praha: Portál, 2002. ISBN 80-7178-253-X. s. 307

[8] SKALKOVÁ, Jarmila. *Obecná didaktika.* Praha: Grada, 2007. ISBN 978-80-247-1821-7. s. 181

[9] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5. s. 23

[10] PRŮCHA, Jan, WALTEROVÁ, Eliška a Jiří MAREŠ. *Pedagogický slovník*. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-647-6.

Při výběru konkrétních metod by měl učitel pokaždé vycházet z konkrétní edukační situace – zohlednit zákonitosti výukového procesu (logické, psychologické, didaktické), cíle a úkoly výuky, obsah a metody daného oboru, úroveň psychického a fyzického rozvoje žáků (učební styly, stupeň rozvoje samostatnosti a tvořivosti), zvláštnosti třídy, skupiny žáků (vztahy hoši / dívky, žáci se speciálními potřebami, neformální vztahy), apod. Jedním z důležitých faktorů je i osobnost učitele, styl jeho výuky, metodické vybavení i zkušenosti. Už teď je zřejmé, že není snadné při výuce zohlednit všechny aktuální faktory a možnosti, zrealizovat mnohdy náročné činnosti (časově i prostorově) a přinášet do výuky stále nové inovační myšlenky. I přes zohlednění všech faktorů nezávisí osvojení vědomostí zcela na systému výukových metod, které se v praxi používají, ale závisí do značné míry také na tom, jaké formy poznávací činnosti žáků se stimulují a jak jsou usměrňovány procesy učení. Používání různých metod neznamená jen změny vnějších forem činnosti učitele, ale především změny ve vnímání a osvojování učiva žáky. Dle studií se mnoho výukových metod používaných v současném školství stále zaměřuje spíše na techniku a organizaci učitelovy práce než na žákovo učení.

Díky nové struktuře školství[11] se objevují nové možnosti, které se snaží vtáhnout žáka do výuky a maximálně zefektivnit vyučovací proces. Žák si během vyučování vlivem několika odlišných výukových metod osvojuje také klíčové kompetence, které jsou vázané na konkrétní obsah výuky. Je to např. organizace a provádění úkolů, komunikace a kooperace, aplikace technik učení a technik duševní práce, samostatnost a zodpovědnost, snášení zátěže a tvořivé řešení situací a problémů. Klíčové kompetence jsou určitou vybaveností, kterou žák získává do života. Výběrem metod lze ovlivnit, do jaké míry si kterou kompetenci osvojí. Proto bychom měli při volbě metod dbát na to, aby se utvářel žádoucí vztah mezi metodami, které vedou k osvojování hotových poznatků a těmi, které organizují hledání, řešení teoretických i praktických problémů a rozvíjejí samostatné produktivní myšlení.

Dosavadní výzkumy ukázaly, že i přes různé inovační snahy převládá stále často jednostranná orientace na metody typu objasňujícího, ilustrativního a reproduktivního. Jen zřídka jsou v hodinách využívány metody, které vyžadují vyšší úroveň aktivity, myšlenkové samostatnosti, které rozvíjejí tvořivost a dávají prostor pro praktické činnosti žáků. Proto je v současné didaktice kladen důraz na metody s výraznou aktivizací žáků, zvláště na metody heuristické, problémové, které rozvíjí tvořivost, vedou k objevování nových poznatků a nalézání dosud neznámých řešení [12].

[11] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. [online].
[12] SKALKOVÁ, Jarmila. *Obecná didaktika.* Praha: Grada, 2007. ISBN 978-80-247-1821-7.

1.1.1.1 Klasifikace metod

K tomu, aby učitel mohl vybírat optimální metodu pro svou výuku vzhledem k aktuální pedagogické situaci, je třeba množství existujících metod roztřídit do kategorií. Existuje široká škála členění, různí autoři použili pro svá třídění odlišná kritéria. Ze soudobých autorů např. Lerner využívá hledisko míry aktivity a využití heuristiky (heurističnosti) a člení výukové metody na informačně-receptivní, reproduktivní, metody problémového výkladu, metody heuristické a výzkumné. Dle pedagogického slovníku[13] můžeme výukové metody dělit např. podle fází vyučovacího procesu (utváření, upevňování, prověřování vědomostí), podle způsobu prezentace (slovní, názorné, praktické), podle charakteru specifické činnosti (uplatňované v jednotlivých předmětech) atd.

Zde budeme vycházet z komplexního moderního pojetí klasifikace výukových metod, které je jednoduché a názorné, tedy klasifikace dle Maňáka a Švece (obr. 1[14]). Autoři vycházejí z kritéria stupňujících se edukačních vazeb mezi subjekty a vymezují tři kategorie – metody klasické, metody aktivizační a metody komplexní.[15]

[13] PRŮCHA, Jan, WALTEROVÁ, Eliška a Jiří MAREŠ. *Pedagogický slovník*. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-647-6.

[14] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5. s. 49 (upraveno autorem)

[15] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5.

Klasické výukové metody	- Metody slovní	- Vyprávění - Vysvětlování - Přednáška - Práce s textem -Rozhovor
	- Metody názorně-demonstrační	-Předvádění a pozorování - Práce s obrazem - Instruktáž
	- Metody dovednostně-praktické	- Napodobování -Manipulování, laborování a experimentování - Vytváření dovedností - Produkční metody
Aktivizující metody	- Metody diskusní - Metody heuristické, řešení problémů - Metody situační - Metody inscenační - Didaktické hry	
Komplexní výukové metody	- Frontální výuka - Skupinová a kooperativní výuka - Partnerská výuka - Individuální a individualizovaná výuka, samostatná práce žáků - Kritické myšlení - Brainstorming - Projektová výuka - Výuka dramatem - Otevřené učení - Učení v životních situacích - Televizní výuka - Výuka podporovaná počítačem - Sugestopedie a superlearning - Hypnopedie	

Obr. 1: Klasifikace výukových metod

Klasické výukové metody jsou v současnosti převládající skupinou používaných metod ve výuce, i když podle posledních výzkumů se jejich efektivita snižuje a proto jsou doplňovány používáním jiných aktivizujících či komplexních metod. Mezi klasické metody řadíme metody *slovní*, *metody názorně-demonstrační* a *metody dovednostně-praktické*. Pojem tradiční neboli klasické neznamená zastaralé, ale spíše fakt, že jde o metody dlouho používané, osvědčené v praxi. Tyto tradiční metody představují základnu, kterou je třeba ovládat, ale také je třeba ji doplňovat, obměňovat a někdy i překonávat.

Nejvýznamnější složkou z těchto tradičních metod je metoda slovní, která je významnou součástí edukačního procesu. Umožňuje přímý a rychlý přenos poznatků, ale hrozí zde nebezpečí verbalismu a odtržení žáka od reálného života omezením se na pojmy a vědomosti z knih bez zkušeností. V hodinách matematiky se z těchto slovních metod nejvíce využívá vysvětlování, přednáška, práce s textem a rozhovor.

V souvislosti se změnami ve školství a zavedením Rámcového vzdělávacího programu byly ustanoveny požadavky na individualitu žáka, změny v pojetí vyučování, klimatu školy apod. Důraz je kladen na dítě a jeho maximální rozvoj, čímž dochází k překonání transmisivního pojetí vyučování (jehož podstatou je předávání poznatků zejména verbálními metodami) a orientaci na konstruktivistické přístupy (zdůrazňující aktivní učení, hledání, objevování a konstruování poznatků na základě vlastních činností a zkušeností v interakci s učitelem a spolužáky). Na tomto základě dochází k doplnění, modifikaci, modernizaci tradičních výukových metod a většího využití aktivizujících a komplexních metod výuky. Ty svou podstatou aktivizují žáky, podporují rozvoj jejich tvůrčího myšlení a dalších složek osobnosti.

Druhou skupinou metod jsou **aktivizující výukové metody**. Mezi ty se řadí takové metody, které podporují aktivitu a iniciativu individua, jeho přirozené potřeby objevování, produktivní přemýšlení o věci, hledání a jednání. Aktivizující a alternativní výukové metody s aktivitou žáků plně počítají. Žáci se při nich do činnosti osobně angažují, používají již známé dovednosti a aktivně spoluvytváří své nové zkušenosti, znalosti a dovednosti. Pozice žáka a učitele se v tomto případě významně mění oproti tradičním metodám výuky, dochází k přímé interakci učitel - žák. Učitel se stává žákovi partnerem.

Aktivizující metody ve výuce se vymezují jako postupy, které vedou výuku tak, aby se výchovně–vzdělávacích cílů dosahovalo hlavně na základě vlastní učební práce, přičemž důraz je kladen na myšlení žáků, řešení problémů, myšlenkovou a charakterovou tvořivost, samostatnost a zodpovědnost.

V současné době se objevuje velké množství výukových metod a aktivizujících postupů ve výuce, jejich modifikací a možností. Mezi ty základní řadí autoři Maňák a Švec *metody diskusní*, *heuristické*, *situační*, *inscenační* a *didaktické hry*. V hodinách matematiky využíváme nejčastěji metody diskusní, heuristické a oblíbené jsou také didaktické hry. Aktivizující metody jsou pro výuku matematiky velice vhodné, protože při práci s abstraktními pojmy žáci jen nememorují definice, poučky a vzorce, ale pomocí heuristických metod či didaktických her si pravidla sami odvodí a tím si je lépe zapamatují, dokážou je aplikovat a využít v dalších situacích.

Třetí skupina metod, **komplexní výukové metody,** v sobě propojuje prvky aktivizujících i tradičních výukových metod a doplňuje je o nové postupy, které se snaží přiblížit modernímu pojetí výuky a zefektivnění vyučovacího procesu. Komplexní výukové metody jsou složité metodické útvary, které zahrnují základní prvky didaktického systému - metody, organizační formy výuky a didaktické prostředky. Při jejich využití dochází k propojování teoretických poznatků a praktických zkušeností. V literatuře bývají též označovány jako modely, koncepce, projekty, edukační plány, kooperační formy výuky nebo životní situace.

V reálné situaci většinou učitel ve výuce potřebuje využít několik výukových metod, didaktických prostředků a organizačních forem výuky a tím vytvořit tzv. didaktický model. Ten prezentuje zobecnění teoreticky nesourodých, ale organizačně funkčně svázaných projevů vyučovací praxe. I přes propojení různých didaktických prostředků zůstává dominantní právě ta výuková metoda, která vyjadřuje směr modelu ke stanovenému cíli (projektová výuka, frontální výuka, atd.).

Mezi nejpoužívanější modely v hodinách matematiky patří skupinová a kooperativní výuka, samostatná práce žáků, u žáků oblíbená projektová výuka a také výuka pomocí počítačů[16].

1. 1.1.2 Aktivizující výukové metody

V průběhu vývoje společnosti se k tradičním metodám přidávaly a vymýšlely metody nové a do osvědčených postupů se začleňovala progresivní řešení a inovace. Rozhodující obrat je spojen s novým pohledem na žáka v edukačním procesu. Tento obrat se dlouho připravoval - důkazem je tzv. kopernikovská revoluce, reformní hnutí, inovativní proudy apod., což vyústilo ve vytvoření koncepce aktivizačních výukových metod. Dle kolektivu autorů Janovcová, Průcha, Koudela se dají podle aspektu účasti žáků na výuce definovat aktivizující metody jako *„postupy, které vedou výuku tak, aby se výchovně-vzdělávacích cílů dosahovalo hlavně na základě vlastní učební práce žáků, přičemž důraz se klade na myšlení a řešení problémů."*[17]

Aktivizující metody přispívají k rozvoji osobnosti žáka, zvláště jeho samostatnosti, tvořivosti a zodpovědnosti. Tyto metody umožňují žákům zapojit se do edukačního procesu,

---

[16] Ve vyučování matematice je možno využít mezipředmětové vazby s Informatikou a nechat žáky pracovat se speciálními programy, které dokáží reálně vymodelovat zadanou situaci, např. cabri geometrie, maple, imagine logo, apod.

[17] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5. s. 105

mohou ovlivňovat konkrétní cíle výuky a přizpůsobí se individuálním potřebám jednotlivých žáků. Aktivizující metody mají také pozitivní vliv na vytváření příznivého školního klimatu.
Škola a vyučování se stává pro žáky přitažlivější a zajímavější. Řada výzkumů u nás i v zahraničí poukazuje na skutečnost, že v úrovni dosažených vzdělávacích výsledků je efektivnější tradiční výuka, zatímco netradiční přístup více rozvíjí kreativitu žáků, jejich nezávislost, zvídavost a pozitivní postoj ke škole a učení. Na učiteli a na jeho schopnostech správně volit jednotlivé metody a vytvářet dobré podmínky poté závisí dosažení vyváženého rozvoje osobnosti každého žáka. Učitel, který používá aktivizující metody již není jen zprostředkovatelem informací, ale je také nositelem metodických kompetencí. Za pomoci aktivizujících metod se žáci naučí metodickým schopnostem a racionálnímu učení a poté jsou schopni se zapojit aktivně do výuky a efektivně se podílet na řešení problémů, realizaci projektů apod.

Vyjmenovat a popsat všechny aktivizující metody je prakticky nemožné. Těchto metod a jejich modifikací je nesčetné množství. V této práci zmíníme pouze hlavní zástupce aktivizačních metod, zatímco kombinace a složitější systémy přenecháme k řešení jiné práci.

Aktivizační metody se dle výše uvedené klasifikace dělí na:

- metody diskusní;
- metody heuristické, řešení problémů;
- metody situační;
- metody inscenační;
- didaktické hry.

Vzhledem k tomu, že hlavním zaměřením této práce je jedna z těchto oblastí, představíme si stručně jednotlivé metody v následujícím textu. Při popisu bude dodržována struktura – východisko metody, základní myšlenky, možný přínos a zkušenosti z praxe.

Metody diskusní

Tato metoda navazuje na metodu rozhovoru, která je popsána jako jedna z modifikací klasických metod v závěru této podkapitoly.

„Výuková metoda diskuse je forma komunikace učitele a žáků, při níž si účastníci vyměňují názory na dané téma, na základě svých znalostí pro svá tvrzení uvádějí argumenty, a tím společně nacházejí řešení daného problému.“[18]

Tato aktivizační metoda se často využívá v řešení situací a problémových úloh, kde je možné a zároveň žádoucí mít na dané řešené téma různé názory, kdy se navzájem účastníci diskuse

[18] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5. s. 108

seznamují s novými poznatky a zkušenostmi. Její užití není vhodné pro řešení témat obsahujících nesporná fakta.

Aby diskuse byla přínosná a správně provedena, je zapotřebí dodržovat daná pravidla. Glöckel a Kammann je označují jako specifické nároky, jež obsahují:[19]

- vhodně zvolené téma (zajímavé pro účastníky, obsahující podněty, rozpory);
- řízení průběhu jednacím řádem v předem daných fázích (vymezení tématu, prezentace a výměna názorů, argumentace a zdůvodňování, shrnutí výsledků diskuse);
- předběžný a průběžný výcvik žáků v dovednostech diskutovat (aktivní zapojení, zrakový kontakt, sledování diskuse, naslouchání jiným, zvládání řečnických technik, jasná a zřetelná řeč, přesná formulace myšlenek, respektování cizích názorů, schopnost argumentace,...);
- prostor a čas na přípravu na samotnou diskusi (včasné oznámení tématu, příprava argumentů, znalost problematiky,...);
- promyšlení otevřeného a současně pevného řízení diskuse (dodržování limitu, udělování slova, zařazení přestávek, formulování dílčích závěrů, držení se tématu,...),
- příznivé klima (otevřené, tolerantní, povzbudivé,...);
- dobré organizační a prostorové zajištění (rozesazení do podkovy či půlkruhu, vymezená doba, přestávky, občerstvení,...).

Diskuse při správném provedení rozvíjí u žáků schopnost pohotových myšlenkových operací, pochopení podstaty problému a přesné vyjadřování. Diskuse je efektivním nástrojem pro procvičování žáků v komunikaci, pro formování a obhajobu vlastních názorů a hodnotových postojů, tvořivého myšlení, řešení konkrétních případů, situací a umožňuje vyjádření vlastních názorů žáků v praxi. Žáci se díky dobře řízené diskusi naučí také veřejně vystupovat, formulovat své myšlenky, získají schopnost argumentovat a korigovat své názory díky zpětné vazbě od svých spolužáků.

Tato metoda je ve své čisté podobě v českých školách velice málo užívaná. V moderní době se spíše uplatňují její varianty, nové obměny a modifikace, např. diskuse na základě přednášky či referátu, diskuse v malých skupinách či debata.

V praxi jsme tuto metodu několikrát využili a to zejména v hodině občanské výchovy na druhém stupni základní školy. Vždy se jednalo o závěr dlouhodobě probíraného tematického celku (např. učiva o státní moci, volbách, městské samosprávě, apod.). Nejdříve byly uvedeny

---

[19] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5.

zásady správné diskuse, v dílčích hodinách nacvičeny schopnosti argumentovat, sdělit vlastní názor či přijmout zpětnou vazbu. Závěrečná diskuse se žákům velice líbila, vzhledem ke svému věku skvěle dokázali vystihnout podstatu problému, výborně argumentovat, akceptovat jiný názor a přijmout zpětnou vazbu. S dalšími zkušenostmi poté dokázali samostatně také zformulovat závěry diskuse.

Metody situační

Situační metody *„se vztahují na širší zázemí problému, na reálné případy ze života, které představují specifické, obtížné jevy, vyvolávající potřebu vypořádat se s nimi, vyžadují angažované úsilí a rozhodování“.* [20]

Vznik této metody je spojován s 20. a 30. léty minulého století a harvardskou vysokou školou, zvláště s právnickým a ekonomickými obory. Nejdříve se tato metoda uplatňovala ve vzdělávání dospělých, zvláště při nácviku řídících schopností, analýze událostí společenské praxe, apod. Postupně se začaly různé modifikace této metody uplatňovat na středních i základních školách.

Podstatou situační metody je řešení problémové situace, která odráží reálnou událost se všemi okolnostmi a vztahy. Hlavním pozitivem této metody je přesah nad rámec edukačního procesu a života školy. Žáci získají metodicky zpracovaný materiál odrážející reálnou problémovou situaci, jejíž řešení není jednoznačné. Při řešení této úlohy musejí žáci promyšleně jednat a překonávat problémy, které přináší praxe.

Při využití situační metody se pracuje v několika fázích[21]:

1, volba tématu musí být v souladu s cíli výuky a žáci na něj musí být připraveni;

2, seznámení žáků s materiály a důležitými fakty, které jsou pro řešení nezbytné;

3, studium a analýza situace – učitel může pomoci uvést žáky do problematiky, vytyčit cíle a sdělit pokyny či rady;

4, diskuse o návrzích řešení, přičemž vítězí řešení nejpropracovanější a nejvěrohodnější. Nabízí se možnost pokračování metodou hraní rolí či využití jiného vhodného zakončení.

[20] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5. s. 119

[21] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5.

Již při volbě této metody si musí být učitel jist, že žáci dokážou být ve své práci samostatní, mají z dané oblasti již nějaké vědomosti a zkušenosti a ovládají základní myšlenkové operace.

Mezi pozitivní stránky této metody řadíme zaměřenost na praxi, důraz na konkrétnost řešení, nácvik rozhodovací schopnosti, aplikaci teoretických poznatků, aktivní sociální učení apod. Za negativní stránky považujeme časovou a materiální náročnost, určité zjednodušení a zkreslení řešené problémové situace a větší důraz na analýzu situace než na hledání variant řešení.

Jako každá metoda prošla i tato vývojem a je k dispozici mnoho modifikací. Mezi nejčastěji užívané patří např. metoda rozboru situace, metoda incidentu, metoda řešení konfliktní situace.

Za přínosné u této metody je považováno překonání jednostrannosti výukových metod. Je zde překonána pasivita žáků, rozvíjí se dovednost komunikovat a do daných situací je zařazeno řešení příběhů z praxe. Stejně jako u metody diskusní se žáci učí vyjadřovat, sdělovat své nápady a myšlenky, argumentovat a obhajovat své názory.

Tuto metodu jsme v praxi vyzkoušeli při začlenění průřezového tématu Mediální výchova v hodině občanské výchovy. Vzhledem k věkové skupině žáků (2. stupeň základní školy) se jednalo o metodu incidentu, tedy o jednu z modifikací situačních metod. Žákům byl přečten krátký výstřižek z novin, ve kterém stála stručná informace o přepadení mladé dívky v nedalekém parku. Žáci si nejdříve ve skupinách rozpracovali své myšlenky a názory, sepsali si otázky k dané situaci. Poté byl vymezen čas na dotazy, formulaci podstaty problému a možná řešení dané situace. Žáci měli k dispozici upřesňující informace, výstřižky z jiných novin, výpovědi svědků, výtah z trestního zákoníku pro určení trestu, apod. I když vše probíhalo pod dohledem a občasným směrováním učitele, žáci si počínali v řešení situace velmi dobře. Naučili se nad daným tématem přemýšlet, třídit získané informace, orientovat se v neznámých dokumentech a odhadovat možný výsledek řešení.

Metody inscenační

Tento typ metody se užívá již od dob starého Říma a mezi jeho zastánce patřil J. A. Komenský, v moderní době jej prosazoval J. L. Moreno. Inscenační metody, v praxi spíše nazývány hraní rolí, situační metody, scénické hry či jen dramatizace (dramatická výchova), jsou v dnešní škole velmi oblíbené. Dle Bratské je *„podstatou inscenačních metod sociální učení* *v modelových situacích, v nichž účastníci edukačního procesu jsou sami aktéry předváděných situací"*[22] .

V podstatě jde o kombinaci hraní rolí a řešení problémové situace. V předváděné dramatizaci problémové situace si žáci prohlubují osvojené vědomosti, získávají nové dovednosti, mají možnost se vžít do situace. Žáci získají často nové a zároveň hluboké prožitky, mají možnost osvojit si vhodné způsoby chování v určitých situacích nebo se seznámit s formami vystupování typickými pro vybranou profesi.

Průběh inscenace můžeme obecně rozdělit do tří fází. První fází je příprava inscenace, což zahrnuje stanovení cíle, určení obsahu, rozdělení rolí, přibližný časový plán a naplánování postupu. Druhou fází je již samotná realizace inscenace, tedy od rozdání pokynů jednotlivým aktérům, přes nácvik až po samotnou inscenaci. Poslední, třetí fází, je hodnocení, které se koná nejlépe bezprostředně po jejím ukončení a pokud možno v pozitivním duchu.

I u této metody vznikly různé varianty, např. ve školní praxi jsou velmi časté strukturované inscenace (promyšlená stavba děje, předem připravený scénář), méně časté mnohostranné hraní rolí (několik malých skupin hraje stejnou problémovou situaci) a zcela výjimečné je využití nestrukturované inscenace (konkrétní případ z praxe bez předem zpracovaného scénáře).

Inscenační metody jsou velmi náročné na realizaci jak z pohledu přípravy, tak z pohledu získání žáků pro opravdové hraní, nejen pro legraci. Jako pozitivní lze ale označit celkový rozvoj osobnosti, zvláště představivosti, kreativity a emočních dovedností.

Hraní rolí v různých variantách se ve školní praxi objevuje celkem často, jak v hodinách občanské výchovy, cizích jazyků, ve výchově ke zdraví, tak třeba i v českém jazyce apod. Toto školní hraní má většinou povahu scénky menší skupiny žáků na dané téma. V českém jazyce často žáci ztvárňují postavy z pohádek, pověstí, bajek apod. V cizím jazyce žáci provádějí různé scénky či inscenace, které jsou zaměřeny na procvičení určitých gramatických jevů či jazykových kompetencí. Asi nejblíže základní povaze této metody jsou inscenace v předmětech občanská výchova a výchova ke zdraví, kde žáci řeší sami zadané problémové situace. Ať už se tato metoda objeví v jakémkoliv předmětu, většinou je u žáků velmi oblíbená.

---

[22] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5. s. 123

Didaktické hry

Hra je z obecného pohledu přirozená aktivita, která nás provází celým evolučním procesem. Hra je pro žáky zábavnou, svobodně zvolenou aktivitou. V edukačním procesu si při zařazování her musíme dát pozor, abychom nepřekryli povahu hry danými výukovými cíli nebo naopak, aby se ve volnosti hry neztratil cíl výuky. Hrou rozvíjíme sociální, kognitivní, kreativní, tělesné, volní a estetické kompetence žáků. Didaktická hra, v porovnání s hrou klasickou, ztrácí na své spontánnosti, svobodě a nezávaznosti, sleduje daný cíl. Didaktická hra je pedagogickými klasiky vymezována jako *„taková seberealizační aktivita jedinců nebo skupin, která svobodnou volbu, uplatnění zájmů, spontánnost a uvolnění přizpůsobuje pedagogickým cílům."*[23]

Dle Maňáka a Švece si didaktická hra zachovává většinu znaků hrových činností, takže si žáci jistou omezenost didaktické hry danou usměrňováním a cílovou orientací neuvědomují. Velkou roli zde sehrává také motivace žáků a zábavný charakter didaktických her.

Jako většina metod i didaktické hry zahrnují spoustu aktivit, různých variant a možností. Někteří autoři se pokusili o klasifikaci či rozdělení podle různých aspektů. Mayer je rozděluje podle obsahů a cílů na hry *interakční* (hry svobodné, sportovní, skupinové, společenské, myšlenkové, strategické, učební apod.), *simulační* (hraní rolí, řešení případů, konfliktní hry apod.) a *scénické* hry (divadelní představení). Jankovcová rozděluje didaktické hry podle *doby trvání* (krátkodobé, dlouhodobé), *místa konání* (třída, příroda, hřiště, školní klub), *převládající činnosti* (osvojování vědomostí, pohybové dovednosti) a *hodnocení* (kvantita, kvalita, čas výkonu, hodnotitel).[24]

Didaktické hry mají vzdělávací i výchovný charakter. Žáci se učí respektovat dohodnutá pravidla hry, což vede k posilování sebekontroly a socializace, získávají schopnost zmírňovat projevy emocí při úspěchu či neúspěchu, spontánně uplatňují poznávací aktivity a realizují poznávací činnosti. Mezi hlavními pozitivy bývá uváděna aktivita žáka při výuce, rozvoj jeho tvůrčího jednání a svobodné komunikace se spoluhráči. Kolektivní didaktické hry upevňují společenství třídy a rozvíjí pozitivní vztahy mezi žáky.

Didaktické hry mohou být aplikovány kdykoli v průběhu vyučovací jednotky. Je vhodné je použít při opakování a osvojování učiva, při výkladu nové látky nebo při řešení náročných učebních problémů. Žáci spontánně uplatňují poznávací aktivity a realizují poznávací činnost, což vede k nenásilnému učení (přirozenost hrové činnosti snižuje náročnost učení).

---

[23] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5. s. 127

[24] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5.

Hra ve vyučování efektivně pomáhá při učebních činnostech, přispívá k přirozenému rozvoji dítěte nenáročnou, zajímavou a zábavnou formou. Slouží jako prostředek motivační, iniciativní, aktivizační, ale také socializační.

Aktivit, které by se daly k didaktickým hrám přiřadit, je velké množství. Každý učitel v praxi za didaktickou hru považuje jinou aktivitu, často zařazuje pod název této metody i jiné výukové metody (hraní rolí, situační metoda, apod.). Důležitou součástí didaktické hry je také náročná metodická příprava, která kromě vytyčení cílů, pravidel, vhodného místa, času a pomůcek obsahuje také stanovení způsobu hodnocení a promyšlení případných možností. Didaktické hry se zavádí již od nejnižších tříd, kde jsou v oblibě jednodušší a časově méně náročné hry – např. kvízy, soutěže, rozhodovací hry, problémové úlohy, hraní rolí, apod. Často se metoda didaktických her využívá při výuce cizích jazyků, neboť vyvolávají u žáků chuť mluvit vyučovanou řečí, zapojit se do aktivity a často se tímto nevědomky nejvíce naučí.

Učení s pomocí didaktické hry, tedy spojování hry a práce, je pro žáky zajímavé, rozvíjí celou jejich osobnost, podporuje jejich aktivitu, samostatnost a tvořivost a navíc osvojené vědomosti a dovednosti jsou díky prožitku trvalejší.

V současné době existuje velké množství sbírek, encyklopedií a příruček plných didaktických her. Z praxe je známo, že si každý z učitelů podle vlastního vyučovacího stylu a vyučovaných předmětů vytvoří během praxe svou ověřenou baterii didaktických her, kterou využívá, doplňuje, upravuje. V příloze č. 1 nabízíme sbírku námi ověřených didaktických her a didaktických pomůcek.

Heuristické metody

Poslední kategorií aktivizačních metod námi zmíněné klasifikace jsou metody heuristické, které podrobně rozebereme vzhledem k zaměření práce v samostatné kapitole.

Modifikace klasických metod

Mezi výukové metody, které žáky aktivizují, rozvíjí jejich tvořivé a samostatné složky osobnosti, patří také některé z klasických metod - resp. jejich modifikace.

Ze **slovních výukových metod** zde řadíme *rozhovor*. V průběhu vývoje edukačního systému vznikla celá řada variant metody rozhovoru, ale ve své podstatě tato výuková metoda navazuje na běžné hovory, od nichž se liší svou zaměřeností, cílevědomostí a náročností. Jádrem je dvoustranná komunikace, výměna zkušeností a hledání odpovědí. Jednou z modifikací rozhovoru je tzv. *sokratický rozhovor*, některými autory uváděn později jako heuristický[25]. Ten proslavil již starořecký myslitel Sokrates, který ukázal rozhovor jako cestu k osvětlení smyslu jevů a k porozumění jejich podstatě. Tento typ rozhovoru má stále své uplatnění v dnešní škole a to spíše v rozvinuté podobě, kde je kladen důraz na heuristické řešení problémů a na spolupráci. Tato varianta rozhovoru se osvědčuje zejména při řešení matematických a filosofických problémových situací.

Ve výuce určuje úroveň a charakter řízení rozhovoru učitel. Ten může zvolit volnější rozhovor (debata, diskuse) nebo vázanější druhy rozhovoru (řízený rozhovor, rozhovor katechetický, zkušební). Z výzkumů jasně vyplývá, že v dnešní škole jednoznačně převažuje tzv. *výukový rozhovor*, který je prostředkem k aktivizaci žáků, povzbuzuje jejich pozornost a vyzývá je ke spolupráci. Další často využívanou variantou je tzv. *metoda řízeného rozhovoru*, při které žáci odpovídají na zadané otázky, jejichž obsah a cíl určuje učitel. Dle Mayera[26] se někdy od řízeného rozhovoru odlišuje tzv. *žákovský rozhovor*, kde žáci uvádějí, zpracovávají a hodnotí své vlastní zkušenosti a představy k dané problematice. Jde většinou o problémy, které se týkají celé třídy nebo školy.

Podle mnoha variant a širokého záběru by se mohlo zdát, že metoda rozhovoru je vždy efektivní a univerzální. Její účinnost a efektivita je ale dána podmínkami, které je nutno pro dosažení kýženého výsledku dodržet. Především musí být zvoleno vhodné téma, o němž žáci mají alespoň minimum vědomostí a zkušeností a učitel musí mít předem připravený okruh otázek a být připraven na všechny možnosti odpovědí.

Z dalších tradičních metod uplatňují aktivizační přístup také **metody dovednostně-praktické**. Tyto metody se řídí heslem: „Učíme se nikoli pro školu, ale pro život." („Non scholae, sed vitae discimus.“). U těchto výukových metod, jak jde již vidět z uvedeného motta, je kladen důraz na praktické vyučování. O prosazení rozsáhlejšího využití ve výuce se již pokusilo několik reformních hnutí v čele s velkými osobnostmi, mezi nimiž byl např. J. Dewey (learning by doing) H. Gaudig, W. A. Lay, C. Freinet, apod. V dnešní době je z těchto metod uplatňováno tzv. *činnostně orientované vyučování* (handlungorientierter Unterricht), jehož východiskem je materiální činnost žáků s cílem překonat odtržení reality života od školy. U aplikace této metody

[25] V některých publikacích je sokratický rozhovor (vyvozování závěrů na základě úsudku, zkušeností a porovnání) stavěn do protikladu s heuristickým rozhovorem (zdůrazňuje objevný charakter otázek, zkoumání reálných jevů).
[26] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5.

je důležitá aktivizace všech smyslů, odpovědná a metodická kompetence žáků a kooperativní jednání zaměřené na skutečný život.

Další výukovou metodou z této kategorie, která vzbuzuje aktivitu žáků, je *experiment*. Ten je charakterizován jako badatelský přístup k realitě, kterým se dle Maňáka *„na základě určité, teoreticky zdůvodněné hypotézy záměrně mění nebo ovlivňují některé stránky sledované skutečnosti (nezávislá proměnná), přičemž se existující podmínky udržují konstantní a provedené zásahy a dosažené výsledky se přesně registrují“*[27].

Z teoretické stránky je první fází experimentování praktické (zkoušení, ověřování, jež nás provází celým životem a je prazákladem každého pokroku), které přerůstá ve školní experimentování (což je poté základem pro výzkumnou a badatelskou činnost). U školního experimentování se dodržuje 5 fází, které jsou shodné s fázemi heuristického řešení problémů.

Vybrané komplexní výukové metody

Ač jsou komplexní výukové metody v samostatné skupině, dají se dle svých vlastností považovat také za metody aktivizační. Vybrané a níže popsané metody považujeme ve vyučování za nejpoužívanější. První vybranou komplexní metodou je **projektová výuka** nazývaná také jako výukové projekty. Projektovou výuku můžeme definovat dle Skalkové jako *“řešení komplexních teoretických nebo praktických problémů na základě aktivní činnosti žáků”*[28]. Při jeho realizaci se uplatňuje komplex aktivizačních metod, které mají v základu aktivní a samostatnou myšlenkovou práci žáků při plnění daných úkolů. Projektová výuka odstraňuje možné nedostatky běžné každodenní výuky (např. izolovanost poznatku, odtrženost od životní praxe, pamětní učení, zmechanizování školní práce). Projektovou metodu lze chápat jako zvláštní případ problémové metody. Ústředním tématem je řešení problému, ovšem v tomto případě by mělo jít o řešení komplexní povahy s širším praktickým uplatněním[29]. Při využití této metody žáci pracují nejen ve školních třídách, ale často také i mimo školní budovu, což má pro ně velký význam.

Výukový projekt má tyto fáze:

1. volba problémové situace, která je pro žáky zajímavá a přitažlivá, přiměřená věku i jejich dosavadním znalostem a zkušenostem s tím, že je žáky třeba vhodně motivovat;

---

[27] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5. s. 100

[28] SKALKOVÁ, Jarmila. *Obecná didaktika.* Praha: Grada, 2007. ISBN 978-80-247-1821-7. s. 234

[29] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5.

2. stanovení postupu při realizaci projektu, upřesnění dílčích úkolů, zapojení žáků a uplatnění jejich myšlenek a představ;
3. realizace projektu, což je hlavní a nejdůležitější „objevná část“ projektu, kde žáci vyhledávají, shromažďují a vyhodnocují informace (tyto činnosti otevírají žákům široké pole působnosti k bezprostřední aktivitě, samostatné práci a tvořivosti);
4. dokumentace a zveřejnění výsledků projektu.

Hlavní význam využití projektové výuky je spatřován ve vytváření cílené učební činnosti, která je promyšlená a organizovaná v teoretické i praktické rovině, vyhovuje potřebám žáků a přináší nové dovednosti i vědomosti cestou osobní zkušenosti.

Projektová metoda je s ohledem na klasické metody výuky mnohem náročnější na realizaci a je vhodné zapojení více pedagogických pracovníků. V průběhu školního roku probíhá projektová výuka občas v jednotlivých předmětech a třídách podle povahy předmětu, učiva a přístupu pedagoga. V posledních letech jsou oblíbené také rozsáhlejší projekty, kdy se do řešení zapojuje celá škola a jsou organizovány tzv. projektové dny či projektové týdny. Je to netradiční způsob výuky, který spočívá v řešení projektu za účasti celé školy a trvá jeden den či celý týden. V tomto případě je nutné, aby se do řešení zapojili všichni pedagogičtí pracovníci a připravili pro žáky vhodné pracovní prostředí. Tento způsob výuky je pro žáky atraktivní, zábavný, ale je pouze doplněním běžné výuky ideálně jednou až dvakrát ročně.

Ve své praxi jsme si organizaci a realizaci projektového dne vyzkoušeli na základní škole. Hlavním tématem projektového dne „Učení bez mučení” bylo představit běžné školní předměty zábavnější formou. Do projektového dne se zapojily třídy od třetího do devátého ročníku. Projekt byl realizován ve dvou fázích – zajištění organizace projektu, kdy si žáci sami vyhledali informace, nachystali různé úkoly a úlohy z jednotlivých předmětů, hry a problémové situace a fáze realizace projektu, kdy tyto připravené materiály předložili svým spolužákům z různých tříd a učili je učit se bez odporu a mučení.

Tento projektový den byl první takto organizovanou formou práce na této škole a měl velký úspěch. Žáci objevili, že předměty nemusí být jen nudné biflování vědomostí, že rada či náhled na problém od spolužáka je někdy velmi přínosná a že se jde učit s nadšením. Další informace o organizaci a realizaci tohoto projektového dne včetně fotogalerie uvádíme v příloze č. 2.

Další komplexní metodou, která je často využívána při heuristických metodách je **brainstorming**. Tato metoda byla popsána v roce 1953 v USA pod vedením Alexe Osborna jako metoda podněcování skupin k tvořivému myšlení. Brainstorming, tzv. „bouře mozku“ či “burza nápadů" je založen na produkci nápadů, návrhů na určité téma či řešení určité problémové situace a jejich posouzení v poměrně krátké době. Je zde ve velké míře uplatňováno tvůrčí myšlení a schopnost rozhodovat se. Autor této metody byl přesvědčen, že člověka mnohdy napadají myšlenky, které z důvodu obav nebo strachu ani nevysloví. Tyto zábrany v myšlení poté brzdí přirozenou tvořivost lidí.

Průběh brainstormingu probíhá ve skupině (3 - 12 osob) ve dvou fázích. První fází je vyprodukování co největšího množství originálních a nosných nápadů (ve strukturovaném či nestrukturovaném stylu) v souvislosti s řešením daného problému. V této fázi je nutné nekritizovat nápady, ale spíše podněcovat k přemýšlení. Vše je nutné pečlivě zaznamenávat. Druhou fází je hodnocení a detailní rozpracování nápadů – návrhy jsou představeny všem členům skupiny a je posuzována využitelnost, užitečnost, složitost a reálnost navrhovaných řešení. V této fázi se uplatňuje kritické myšlení a logické uvažování. Tato metoda se často využívá na začátku řešení problémové situace – ve fázi identifikace problému.

Tato metoda je náročná na čas, trpělivost, vytrvalost, ale především na motivaci, samostatnou tvořivou činnost a dobrý úsudek.[30]

Situace na českých školách v používání výukových metod je z výzkumů zcela jasná – stále se ve velké míře uplatňují tradiční výukové metody, ač jsou si učitelé vědomi toho, že *„výkonnost paměti úzce souvisí s jednáním, neboť z toho, co slyšíme, si pamatujeme jen 20%, z viděného 30%, zatímco 80% z toho, co sami formulujeme a 90% z toho, co sami děláme*."[31]

---

[30] Jedním z velkých kritiků metody brainstormingu je Edward de Bono, který tuto metodu přirovnává k *„poskakování opic po klavíru v naději, že složí symfonii"* [De BONO, E. Serious Creativity]. De Bono kritizuje živelnost a nesystematičnost této metody. Zastává názor, že skupinová metoda plně nepodporuje tvůrčí výkon jednotlivce a může působit spíše rušivě. Dle Bona bude jedinec při řešení určitých problémů úspěšnější, bude-li pracovat sám, jelikož nemusí například namáhavě prosazovat své názory ve velké skupině.

[31] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5. s. 91

1.1.2 Transmisivní a konstruktivistické pojetí výuky

Východiskem heuristických přístupů je konstruktivistické pojetí výuky. Pro podložení tohoto tvrzení uvedeme rozdíly mezi tradiční výukou (transmisivní, tzv. předávací přístup) a výukou zaměřenou na samostatnou kreativní práci žáků (konstruktivistický přístup).

Transmisivní vyučování je ztotožňováno s pojmem tradiční výuka a je charakteristické přímým osvojováním nových znalostí. Žáci jsou přitom pasivními příjemci hotových poznatků. Mezi nejvyužívanější výukové metody patří výklad zpravidla v kombinaci s metodou názorně demonstrační[32].

Transmisivní přístup tvoří dle některých autorů základ vyučovacího procesu a Pecina[32] uvádí situace, ve kterých je tento přístup k výuce přímo doporučován:

– zprostředkování těžce pochopitelného učiva, které vyžaduje širší znalosti i z dalších oblastí a odborných předmětů;

– zprostředkování abstraktního nebo složitého učiva;

– v jazykové výuce k zprostředkování pouček a pravidel.

Naproti tomu **konstruktivismus** je definován jako *„směr druhé poloviny 20. století, který zdůrazňuje aktivní úlohu člověka, význam jeho vnitřních předpokladů a důležitost jeho interakce s prostředím a společností“* [33].

Konstruktivistické vyučování zdůrazňuje proces konstruování poznatku učícím se žákem, který si sám buduje nové poznatky během aktivní činnosti, při níž pracuje s předloženými informacemi i svými dosavadními znalostmi a zkušenostmi[34].

Konstruktivistická výuka pracuje s „prekoncepty“ žáka a snahou vyvolat vědomí problému a pocitu napětí mezi dosavadní představou a novou informací. V první fázi konstrukce poznání je žákovi předložen nový předmět či myšlenka, což vede k nerovnováze – žák zjišťuje, že tato nová informace není v souladu s jeho dosavadní zkušeností. V následující fázi má dojít k nastolení nové rovnováhy změnou dosavadního poznání. Tato strategie získávání nového poznatku odpovídá základům problémové výuky.

---

[32] PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4834-8.

[33] MOLNÁR, Josef, SCHUBERTOVÁ, Slavomíra a Vladimír VANĚK. *Konstruktivismus ve vyučování matematice.* Olomouc: UP, 2007. s. 1

[34] PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4834-8.

Podstatnou složkou aktivity žáka v konstruktivistickém vyučování je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení a jejich dokazování.

Pro konstruktivistický přístup *„je charakteristické užívání různých druhů reprezentace téže informace a strukturální budování vědomostí. Dílčí zkušenosti a poznatky jsou různě orientovány, tříděny, hierarchizovány, vznikají obecnější a abstraktnější pojmy"*[35]. Tím je výstavba žákova poznání aktivním, činnostním procesem. Je nutné dát žákovi příležitost, aby s učivem pracoval - nejdříve fyzickou činností (manipulativní činnost s konkrétními předměty) a poté mentálními operacemi.

Konstruktivismus má celou řadu přívlastků podle preferovaného hlediska poznání a zdůraznění výuky, např. radikální, sociální, didaktický konstruktivismus atd.

Vzhledem k zaměření práce uvedeme také ve stručnosti základy tzv. *didaktického konstruktivismu*, který z obecného konstruktivistického pojetí transformují Hejný a Kuřina[36]. Autoři stanovují přitom deset zásad didaktického konstruktivismu, tzv. desatero, které aplikují na vyučování matematice. Hlavní body desatera jsou aktivita, řešení úloh, konstrukce poznatků, zkušenosti, podnětné prostředí, interakce ve třídě, reprezentace a strukturování, komunikace, vzdělávací proces a formální poznání.

Základní otázkou zůstává, zda je možné zcela nahradit jeden přístup tím druhým a zda nahrazením tradiční výuky konstruktivistickou nedojde ke zhoršení studijních výsledků. Průcha[37] odkazuje na výsledky mnoha srovnávacích studií z USA, které ukazují, že tradiční výuka je vhodnější k dosažení vyšší úrovně studijních výsledků. Dle těchto výzkumů jsou učební strategie odpovídající konstruktivistické výuce vhodnější k rozvoji kreativity, zvídavosti, samostatnosti a pozitivního vztahu ke škole a učení.

Další otevřenou otázkou zůstává, který z přístupů lépe odpovídá potřebám současné školy a společnosti. Domníváme se, že kombinace obou přístupů by mohla být ideální možností. Současný jedinec je denně zahrnován množstvím informací podaných transmisivním způsobem a je nutné jej naučit tyto informace kriticky a kreativně zpracovávat a třídit. Každý žák či student musí být schopen se orientovat v dostupných informačních zdrojích a vyhledávat informace nutné k řešení vzniklých problémů.

---

[35] NOVÁK, Bohumil. *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky (text pro distanční stadium učitelství 1. stupně).* Olomouc: UP. s. 5

[36] HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál, 2001. ISBN 80-7178-581-4.

[37] PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4834-8.

1.1.3 Aktivita, samostatnost a tvořivost žáků ve školní výuce

Jak již bylo naznačeno v úvodu této práce, aktivita, samostatnost a tvořivost jsou ideály, ke kterým jako jedinci směřujeme a jsou náplní celého našeho života[38]. Pojem aktivní, samostatná a tvořivá práce je zmiňován v dějinách pedagogiky již u J. A. Komenského, J. J. Rousseaua, L. N. Tolstého, J. Dewey aj. Dynamický rozvoj nastává s reformním hnutím v Evropě i USA na počátku 20. století. I dnes je otázka aktivity, samostatnosti a tvořivosti jak v pedagogické obci, tak u široké veřejnosti velmi diskutována.

Aktivita žáka je stav, kdy je tento žák přímo zapojen do konkrétní činnosti. Dle Maňáka[39] rozumíme *„aktivitou ve výchovně-vzdělávacím procesu zvýšenou, intenzivní činnost žáka, a to jednak na základě vnitřních sklonů, spontánních zájmů, emocionálních pohnutek nebo životních potřeb, jednak na základě uvědomělého úsilí, jehož cílem je osvojit si příslušné vědomosti, dovednosti, návyky a postoje nebo způsoby chování“*.

V odborné literatuře jsou rozlišovány tyto stupně žákovské aktivity:

1. aktivita vynucená;
2. aktivita navozená – ve školní práci nejčastější, žáci se zapojují na pokyn učitele a důležitou roli zde hraje míra motivace;
3. aktivita nezávislá – vlastní zájem žáka o činnost;
4. aktivita angažovaná – silná aktivizace žáků, připravenost řešit problémy relativně samostatně a uvědoměle.

Poslední stupeň aktivity žáka je předstupněm jeho samostatnosti.

Smékal[40] ukazuje na výsledky předběžných výzkumů, z nichž vyplývá, že učiteli se snáze daří rozvíjet samostatnost a tvořivost u žáků, pro něž je typická vyšší úroveň aktivity. Ostatní žáky je nutné předem vhodně aktivizovat.

Dle Maňáka je *„**samostatnost** chápána jako učební aktivita, při níž žáci získávají nové poznatky a dovednosti vlastním úsilím, relativně bez cizí pomoci, a to hlavně řešením problémů“*[41]. Žák je již schopen řešit problémy samostatně a do určité míry také problémy

---

[38] PECINA, Pavel. *Tvořivost ve vzdělávání žáků*. Brno: PdF MU, 2008. ISBN 978-80-210-4551-4.
[39] PECINA, Pavel. *Tvořivost ve vzdělávání žáků*. Brno: PdF MU, 2008. ISBN 978-80-210-4551-4. s. 10
[40] SMÉKAL, Vladimír. *Úloha školy v rozvíjení aktivity, samostatnosti a tvořivosti žák*ů. In *Tvořivá škola: sborník z celostátního semináře k problematice tvořivé školy*. Brno: Paido, 1998.
[41] PECINA, Pavel. *Tvořivost ve vzdělávání žáků*. Brno: PdF MU, 2008. ISBN 978-80-210-4551-4. s. 12

vyhledávat. Autor dále dodává, že zařazením samostatné práce do fáze osvojování si nového učiva přestává být vyučovací proces pouhým předáváním hotových poznatků. Mění se v usilovné hledání a poznávání nových faktů, v odhalování vztahů, souvislostí a zákonitostí mezi pozorovanými jevy, v objevování světa v jeho rozmanitých projevech a aktivní účasti na osvojování a ovládání skutečnosti.

Nejdůležitějším rysem učební látky vhodné pro samostatnou práci žáků je vhodně zvolený a přiměřený stupeň obtížnosti, novosti a problémovosti.

Pro názornost a správné strukturování metodiky samostatné práce uvádí Maňák[42] 6 stupňů žákovské samostatnosti podle jejího vývoje:

1. žákovská samočinnost, kdy učitel organizuje a řídí veškerou činnost;
2. řešení drobných problémů (problémové otázky, heuristický rozhovor, aj.), kde žáci mají vymezený prostor v rámci svých sledovaných cílů;
3. samostatnost v některých fázích řešení problému;
4. relativní samostatnost v celém průběhu řešení problému, kdy žáci již pracují bez neustálého zasahování a pomoci;
5. schopnost vidět problémy a samostatně je řešit – učitel již nezasahuje přímo a případná pomoc je individuální;
6. tvůrčí činnost, kde učitel již podává jen podněty, rady a osobní příklady.

Tvořivost je pak chápána jako nejvyšší a nejuznávanější stupeň aktivity žáka.

Tvořivost je v odborné literatuře definována např. podle Maňáka[43] jako „ *přirozená vlastnost člověka (různé síly a zaměřenosti) projevující se seberealizací individua při vzniku něčeho nového, kterou je potřeba rozvíjet, připravovat jí prostor a potlačovat bariéry, které se jí stavějí do cesty*“. Pecina[44] definuje tvořivost jako *„jev, při kterém žák správně a účelně řeší problémové situace (v teoretické i praktické rovině) projevující se ve vzniku něčeho nového a zároveň účelného. Je to v různé míře vlastnost každého žáka, kterou je třeba podle možností rozvíjet ve všech možných směrech“*.
V odborné literatuře bychom nalezli ještě několik desítek definic pojmu tvořivost, ale všechny se prolínají ve dvou bodech, které dle autorů Lokša, Lokšová *"spojují projev tvořivosti žáka*

[42] MAŇÁK, Josef. *Rozvoj aktivity, samostatnosti a tvořivosti žáků*. Brno: Masarykova univerzita, 1998. ISBN 80-210-1880-1.
[43] PECINA, Pavel. *Tvořivost ve vzdělávání žáků*. Brno: PdF MU, 2008. ISBN 978-80-210-4551-4. s. 14
[44] PECINA, Pavel. *Tvořivost ve vzdělávání žáků*. Brno: PdF MU, 2008. ISBN 978-80-210-4551-4. s. 15

(člověka) s novostí (originálností) a užitečností (hodnotností) a to jak v subjektivní, tak v objektivní rovině“ [45].

Na procesu tvořivosti se podílejí výkonnostní dispozice žáka, které se vztahují k psychickým procesům účastnícím se tvůrčího řešení problémů. Jednotlivé dispozice jsou navzájem provázány a podmíněny a při hledání nového řešení se sjednocují a doplňují. Mezi hlavní složky patří myšlení, představivost, paměť, fantazie, obrazotvornost a tvůrčí schopnosti - senzitivita, fluence, flexibilita, elaborace, originalita a redefinice[46].

Hlavsa[47] dále vymezuje tři operační složky tvořivosti: *imaginativní* (intuice, imaginace, fantazie), *heuristická* (řešení problémů, tvůrčí myšlení, semialgoritmické přístupy k tvoření) a *schematická* složka (základní myšlenkové operace, systémové myšlení, logika).

Tvořivost je ovlivňována také objektivními a subjektivními podmínkami tvůrčího procesu. Mezi *objektivní podmínky* zařazuje Pecina[48] příjemné prostředí, atmosféru beze strachu, motivaci žáka, respektování osobnosti žáka, rozvíjení zvědavosti a ochoty riskovat, vztah učitele a žáka, spravedlivé hodnocení, podporu tvořivých žáků a posílení produktivity, volnosti hry. *Subjektivní podmínky* tvůrčího procesu jsou vnímání, pozorování, všímavost, obrazotvornost, znázorňování a tvořivá obrazotvornost.

Maňák[49] uvádí, že mezi těmito třemi pojmy (aktivita, samostatnost, tvořivost) je vztah, který definuje posloupností – aktivita -> samostatnost -> tvořivost. Tyto pojmy prezentuje jako stupně angažovanosti a kvality žákovy činnosti, tedy jako fáze rozvoje tvořivosti žáka. Takové členění umožňuje strukturovat tvořivou výuku a pomáhá učiteli plánovat činnost k rozvoji kreativity žáka. Žák se z pasivního příjemce informací postupně stává aktivním žákem, samostatným žákem a konečně také kreativním žákem. Je nutné toto pořadí dodržet a na každou složku pohlížet jako na vývojový předstupeň dalšího rozvoje.

---

[45] PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4834-8. s. 23

[46] PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4834-8.

[47] HLAVSA, Jaroslav. *Psychologické základy teorie tvorby.* Praha: Academia, 1985.

[48] PECINA, Pavel. *Tvořivost ve vzdělávání žáků*. Brno: PdF MU, 2008. ISBN 978-80-210-4551-4.

[49] PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4834-8.

1.1.4 Motivace ve výuce

Jeden z nejobtížnějších úkolů, před kterým stojí všichni učitelé, je vytvořit pozitivně se rozvíjející vztah žáka k učení a ke škole. Také proto je hlavním a stále aktuálnějším tématem problematika motivace ve školním vyučování.

Pedagogický slovník definuje motivaci jako *„souhrn vnitřních i vnějších faktorů, které spouštějí lidské jednání, aktivují ho, dodávají mu energii, zaměřují toto jednání určitým směrem (snaha něčeho dosáhnout anebo něčemu se vyhnout), udržují ho v chodu, řídí jeho průběh i způsob dosahování výsledků, navozují hodnocení vlastního jednání a prožívání, vlastních úspěchů a neúspěchů, vztahů s okolím.“*[50]

Motivaci Hunterová vymezuje také jako ”*odhodlání učit se*”, Maňák jako *“souhrn činitelů, které podněcují, orientují a udržují chování člověka”*[51].

Motivace je dle Hunterové jeden z nejpodstatnější faktorů úspěchu při učení a proto je nutno si uvědomit, že motivace není vrozená, ale naučená. A co je naučené, lze i vyučovat a naučit se a že vyučování je už záležitostí učitele.[52]

V publikaci Moderní vyučování Petty výstižně formuloval nejčastější důvody motivace žáka k učení.[53]

Žáci se chtějí učit proto, že:

- věci, které se učí, se jim hodí;
- kvalifikace, kterou studiem získají, se jim hodí;
- při učení mají obvykle dobré výsledky a tento úspěch jim zvyšuje sebevědomí;
- když se budou dobře učit, vyvolá to příznivý ohlas učitele nebo spolužáků;
- když se nebudou učit, bude to mít nepříjemné důsledky;
- věci, které se učí, jsou zajímavé a vzbuzují jejich zvídavost;
- zjišťují, že vyučování je zábavné.

Vztah motivace žáka ke školní práci mohou ale ovlivnit mnohé psychologické potřeby.

[50] PRŮCHA, Jan, WALTEROVÁ, Eliška a Jiří MAREŠ. *Pedagogický slovník*. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-647-6. s. 158.

[51] PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4834-8. s. 30

[52] PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4834-8.

[53] PETTY, Geoffrey. *Moderní vyučování.* Praha: Portál, 2008. ISBN 978-80-7367- 427- 4.

Čáp a Mareš[54] uvádějí, že mezi tyto potřeby patří:

Potřeba poznávací: Žáci musí chápat smysluplnost předmětu. Pokud jde o činnosti při výuce problémového charakteru, žáci cítí potřebu vyhledávat chybějící informace k vyřešení problému a uspokojení své zvídavé potřeby.

Potřeba pozitivních vztahů: Důležitým požadavkem je pozitivní atmosféra v kolektivu, kde je žákova aktivita při vyučování pozitivně hodnocena. Nečinný žák naopak není oceňován učitelem ani spolužáky. Takového stavu lze dosáhnout v celkové příjemné uvolněné nestresující atmosféře při smysluplné činnosti.

*Výkonová potřeba***:** Žáci vykonávají i relativně obtížnou činnost, pokud mají naději být odměněni jak vlastním úspěchem, tak oceněním učitele a spolužáků. Kromě pozitivních vztahů v kolektivu je nutné dbát na přiměřenou obtížnost předkládaných úkolů.

Z psychologického hlediska je potřeba také rozlišit motivaci, resp. motivační činitele, *primární* (vnitřní) a *sekundární* (vnější). Primární motivace vychází z přirozených potřeb žáka, přičemž nemáme na mysli jen potřeby biologické, ale i duševní. Vychází ze žákova sebepojetí, jeho osobních cílů, aktuálních poznávacích potřeb a zájmů, z žákovy předchozí zkušenosti. Dalšími vnitřními činiteli jsou potřeba výkonu, potřeba vyhnutí se neúspěchu či dosažení úspěchu, potřeba pozitivního vztahu a prestiže. Sekundární motivace naopak vychází od učitele, spolužáků nebo rodičů žáka. Učitel působí na žáky prostřednictvím stanovených cílů výuky, sdělováním svých postojů a očekávání vůči žákovi, systémem odměn a trestů, volbou metod a forem práce ve vyučování. Mezi důležité vnější motivační činitele se řadí tedy známky, odměna a trest, soutěž nebo také vztah žáka k jiným lidem, k vlastní budoucnosti a ke společnosti.[55] Ve školním prostředí tradiční výuky jednoznačně převládá vnější motivace vyjádřená nejčastěji využitím různých odměn a trestů. V takovém prostředí nelze dosáhnout skutečného rozvoje kreativity, neboť ten vychází ze silné vnitřní motivace.

Ukazuje se, že na motivaci působí mnoho faktorů. Některé z nich (rodina, ostatní a dřívější učitelé, zkušenosti s učivem) ovlivnit nelze. Hunterová[56] uvádí šest faktorů, které můžeme jako pedagogové ovlivnit. Jsou to míra nejistoty, průvodní pocity, úspěch, zájem,

[54] ČÁP, Jan a Jiří MAREŠ. *Psychologie pro učitele.* Praha: Portál, 2001. ISBN 80-7178-463-X.

[55] MOLNÁR, Josef, SCHUBERTOVÁ, Slavomíra a Vladimír Vaněk. *Konstruktivismus ve vyučování matematice*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2008.

[56] PECINA, Pavel. *Tvořivost ve vzdělávání žáků*. Brno: PdF MU, 2008. ISBN 978-80-210-4551-4.

znalosti výsledků vlastní práce, vnitřní a vnější motivace. Za hlavní motivační prvky jsou označovány zájem žáka, radost z práce a úspěch.

Když se zaměříme na vyučování matematice, tak podstatou motivace je vzbudit v žácích zájem tak, aby sami chtěli v matematice něco zjistit, být aktivní, rozvíjet tvořivé myšlení a tím i zájem o předmět. Jedním ze způsobů motivace žáků v hodinách matematiky je využití nestandardních aplikačních a problémových úloh. Jejich řešení může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale je při něm nutné uplatnit logické myšlení. Nestandardní a problémové úlohy jsou důležitou součástí matematického vzdělávání a jako takové jsou zařazeny mezi tématické okruhy vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní školy. Další možností motivace je účast na matematických soutěžích, ve kterých se často problémové a nestandardní aplikační úlohy objevují.

Zadáváním nestandardních úloh a problémů může učitel vzbuzovat u žáků chuť je řešit, probudit zvídavost a nabídnout jim touto činností osvojování potřebných znalostí a dovedností. Příležitostí k motivaci se mohou stát i různé projekty a projektové dny realizované přímo na dané škole. Další možností motivace a efektivního osvojení různých druhů dovedností je celkově využití aktivizujících metod, soutěží, didaktických her a objevných metod.

Z vlastních zkušeností vyplývá, že žáky motivuje a zajímá to, co nejen poslouchají, ale mají možnost to vidět, slyšet a nejlépe i vyzkoušet.

Na závěr proto uvedeme zlaté pravidlo J. A. Komenského (Velká didaktika kapitola XX), které tyto zkušenosti jen potvrzuje: *„Proto budiž zlatým pravidlem, aby všechno bylo předváděno všem smyslům, kolika možno, totiž věci viditelné zraku, slyšitelné sluchu, vonné čichu, chutnatelné chuti a hmatatelné hmatu; a může-li být něco vnímáno více smysly, budiž předváděno více smyslům“.* [57]

[57] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5. s. 76

1.2 Charakteristika základních pojmů v užším kontextu

Po stručném přiblížení pojmů v širším kontextu se dostáváme k hlavnímu tématu disertační práce – heuristice.

Téma heuristiky a heuristických přístupů je v moderní době velmi aktuální, neboť z části jistě splňuje požadavky současného vzdělávání. Bohužel je v odborné literatuře absence přehledného systému metod, které těchto přístupů využívají. Cílem disertační práce je proto vytvořit ucelený přehled o heuristice a probrat tuto problematiku do větší hloubky.

Vybrané základní pojmy v užším kontextu - heuristika, heuristické metody, problémové vyučování, problém a jeho řešení, problémové situace a problémové úlohy, badatelsky orientované vyučování, metoda (řízeného) objevování a výzkumný přístup – budou podrobně popsány v další kapitole, kde uvedeme jak charakteristiku, tak i komparaci jednotlivých pojmů.

2 HEURISTIKA

V současné době společnost klade na školu požadavek rozvíjet aktivní a tvořivé osobnosti. Rámcový vzdělávací program předpokládá ve školní výuce využití metod, které aktivizují žáky, podporují rozvoj jejich tvůrčího myšlení a dalších složek osobnosti. Mezi takové aktivizující metody patří, mimo jiné, metody využívající tzv. „objevných“ postupů a strategií, označované také jako metody heuristické, metody řešení problémů, apod. Tyto metody vycházejí z přesvědčení, že žáci budou učivu lépe rozumět, když budou vidět, jak se dané poznatky tvoří a když si toto vytváření sami na jim odpovídající úrovni vyzkoušejí.

Na rozdíl od tradičních postupů učitel při heuristické metodě nesděluje žákům vědomosti přímo, ale snaží se získat žáky pro samostatnou učební činnost různými technikami a aktivitami, které podniká člověk při tvořivém řešení praktických, poznávacích a výzkumných úkolů. Jsou to činnosti, které podporují objevování, vynalézání, hledání a tvoření tedy např. kladení problémových otázek, expozice různých rozporů a problémů, seznamování se zajímavými případy a situacemi, vedení heuristického dialogu apod. Tyto postupy při správné aplikaci mohou u žáků zdokonalovat schopnosti vnímání a pozorování, rozvíjet fantazii a imaginaci, vést k osvojení metod a technik samostatné práce, rozvoji kritického a divergentního myšlení i dovednosti zpracovávat informace.

Tyto procesy žáky silně motivují neurčitostí výchozí situace, pomáhají jim osvojovat si potřebné vědomosti a dovednosti, vytvářejí žákům prostor pro takovou rozumovou činnost, která umožňuje uplatnění anticipačního významu cíle činnosti, podporují intenzivní rozumovou analýzu a umožňují jistou osobitost v utváření plánu řešení daného problému.

Metody s heuristickými přístupy přinášejí žákům zajímavý způsob učení, který je baví, při kterém se sami podílejí na získávání nových poznatků a na vytváření dovedností a zkušeností, které potřebují.

2.1 Heuristika obecně

Heuristika[58] je *„věda zkoumající tvůrčí myšlení, také heuristická činnost, tj. způsob řešení problémů"*[59], také *„moderní odborný termín označující významný rys lidských bytostí poznávat, odhalovat, objevovat v daném prostředí vše, co je důležité pro život"*[60].

Heuristika a heuristické přístupy jsou v dnešní době velmi aktuálním tématem, ale klasifikace a členění v odborných publikacích je velmi nejednotné. Proto jedním z hlavních cílů této práce je vytvoření srozumitelného přehledu heuristiky, vymezení pojmů a vytyčení hlavních zásad jednotlivých metod využívajících objevných přístupů.

Za základ považujeme heuristiku a tzv. heuristický přístup, který můžeme vymezit jako přístup objevitelský, založený na bádání, objevování, zkoumání apod.

Hlavní podkategorií heuristických přístupů je heuristická metoda, kterou řadíme již do výukových metod a je definována jako metoda řešení problémů bez dosavadní znalosti daného algoritmu.

Heuristická metoda je nadřazený pojem pro další metody, které využívají objevitelských postupů, např. metoda problémové výuky, badatelsky orientované vyučování či výzkumný přístup.

Základy heuristiky sahají až do starověkého Řecka. Známí antičtí filozofové jako Sokrates, Aristoteles, Cicero aj. uměli využít znalostí k působivému výkladu a zaujmout tak své posluchače. Do této doby jsou zařazovány také počátky metody heuristické.

Za otce heuristické metody je v odborné literatuře považován George Polya, který nejen podrobně rozpracoval heuristickou metodu a aplikoval ji na vyučování matematice, ale také z matematické práce odvodil heuristický postup pro tvůrčí řešení problémů. Jeho principy se dají uplatnit i v jiných vyučovacích předmětech a byly východiskem pro mnoho dalších autorů. S heuristikou aplikovanou na matematiku na něj navazuje Jan Kopka s výzkumným přístupem a Miron Zelina, který dodává matematickým úlohám také metodologické zpracování. Zelina ve svém přehledu považuje heuristiku za metodu tvůrčího řešení problémů a řadí ji mezi

[58] Heuristika je ze starořeckého „heuréka" - objevil jsem, nalezl jsem, které zvolal Archimédes ze Syrakus, když ověřil pravost koruny jejím ponořením do vody a objevení fyzikálních zákonů o hustotě těles.

[59] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5. s. 113.

[60] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5. s. 113.

alternativní vzdělávání. Přistupuje k ní spíše jako k uspořádání způsobů, jak problém řešit a nepopisuje charakteristiku heuristických metod obecně, ale spíše z pohledu přístupů různých autorů.

Dalšími, kdo se zajímali o heuristiku zvláště z pohledu tvořivosti, jsou autoři Lokša, Lokšová, kteří uvádějí, že heuristické metody považují za jednu z prioritních strategií tvořivého vyučování a zdůrazňují, že *„heuristické úlohy by měly vycházet z reálných životních situací, jež jsou žákům blízké, měly by je podněcovat ke hledání dalších poznatků, zkoumání, ověřování, případně k dalšímu studiu*.“[61]

O heuristice a heuristických metodách se ve svých publikacích zmiňuje řada autorů v rámci ucelených přehledů obecné pedagogiky a didaktiky či výukových metod. Někteří se zaměřují pouze na určité submetody, jiní uvádí účinné použití metody a výhody či nevýhody jejího užití v praxi.

Vzhledem k velkému množství různých heuristických schémat a postupů, které mají mnoho společného, ale zdůrazňují např. jiné specifické aspekty, se několik autorů v minulosti pokusilo o vytvoření systému heuristických postupů a metod.

A. Goralski (1980)[62] rozděluje všechna schémata a postupy založené na heuristických principech do tří oblastí:

1, *reflexní heuristika* – heuristiky vypracované do začátku 20. století (metody Sokratovy, Bolzanovy, kartézská heuristika apod.)

2, *pragmatické heuristiky* – od Polyovy metody je jich velký počet – mezi nejznámější patří postupy Deweyho, brainstorming, synektika, morfologická analýza, CPS (vypracovaná na Buffalské univerzitě – creativ problem solving) atd.

3, *informatické heuristiky* – do procesu řešení problémů už vstupuje pomoc počítačů – modelování a simulování za pomoci počítače, metoda MULTICOMP apod.

V následujícím textu rozebereme a popíšeme jednotlivé heuristické oblasti a schémata.

---

[61] LOKŠOVÁ, Irena a Jozef LOKŠA. *Tvořivé vyučování*. Praha: Grada Publishing a. s., 2003. ISBN 80-247-0374-2. s.108

[62] ZELINA, Miron. *Tvořivost v matematice*. Olomouc: Krajský pedagogický ústav Ostrava, 1990. ISBN 80-900158-9-1.

2.2 Heuristika - tvůrčí řešení problémů

Jedna z definic heuristiky vymezuje tento pojem jako *„metodu tvůrčího řešení problémů“*.[63] Kreativní či tvůrčí řešení problémů představuje užší pohled na problematiku tvořivosti, kde je kladen důraz na schopnosti a dovednosti jedince řešit problém tvořivými metodami, tedy na heuristickou složku kreativity. Důležitou roli zde také zastává imaginativní složka tvořivosti (fantazie, intuice). Dříve byla tvořivost v odborných publikacích zmiňována především ve smyslu umělecké tvorby a kognitivní proces řešení problémů býval v učebnicích psychologie a pedagogiky[64] samostatnou kapitolou. Jeden z největších systematiků v psychologii a odborníků na problematiku tvořivosti J. P. Guilford uvedl, že téma kreativity a řešení problémů mají tolik společného, že je lze považovat za tentýž fenomén. Upozornil, že ve skutečném procesu řešení problémů je vždy obsaženo něco kreativního a samozřejmě kreativní produkce je užívána jako prostředek k řešení problémů.[65]

Předmětem heuristiky jsou dle Zeliny *„činnosti, které podniká člověk při tvořivém řešení praktických, poznávacích a výzkumných úkolů. Pro heuristiku, jako metodologii tvořivého řešení problémů, je charakteristická specifikace typových činností, které se uplatňují při objevování, vynalézání, tvoření a specifikování norem a postupů tohoto procesu“*[66].

2.2.1 Proces tvůrčího řešení problémů

V literatuře nalezneme několik klasifikací fází tvůrčího procesu či procesu řešení problému. Všechny tyto modely jsou velice obdobné. Obsahují fázi, kdy je pociťován problém, dále je navrhováno a ověřováno řešení a v posledním kroku je zhodnocení a přijetí řešení. Na ukázku zde uvádíme fáze řešení problémů podle Deweye a fáze kreativní produkce podle Rossmana:

---

[63] ZELINA, Miron. *Tvořivost v matematice*. Olomouc: Krajský pedagogický ústav Ostrava, 1990. ISBN 80-900158-9-1. s. 66

[64] například v díle zakladatele americké pragmatické pedagogiky Johna Deweye

[65] Obdobně například Bakalář (v Kapitolách z psychologie tvořivosti) uvádí, že proces tvořivého myšlení v sobě neskrývá z hlediska fungování psychiky žádné odlišnosti od obecného procesu řešení problémů.

[66] ZELINA, Miron. *Tvořivost v matematice*. Olomouc: Krajský pedagogický ústav Ostrava, 1990. ISBN 80-900158-9-1. s. 67

Fáze řešení problémů podle Deweyho:	Fáze kreativní produkce podle Rossmana:
1. Je pociťována potíž. 2. Problém je lokalizován a definován. 3. Jsou naznačena možná řešení problému. 4. Jsou zvažovány důsledky. 5. Řešení je přijato.	1. Objevení obtíže či potřeby. 2. Formulace problému. 3. Objevení potřebných informací. 4. Formulace řešení. 5. Kritické posouzení navrhovaného řešení. 6. Formulace nových myšlenek. 7. Nové myšlenky kriticky ověřovány a přijaty.

Oba modely jsou velice podobné, ba navzájem paralelní. Na základě studia tradičních modelů a struktury intelektu navrhuje Guilford „Obecný operační model řešení problémů“, který nabízíme k nahlédnutí v příloze č. 3.

Guilfordův model je považován za nejkomplexnější model řešení problémů a model tvůrčího procesu vůbec. Je zde pouze absence zdůraznění jedné fáze řešení, tzv. fáze inkubace, která představuje zpravidla nevědomé „přemýšlení“ o problému. Do procesu tvůrčího řešení problémů je nutné zapojit tuto fázi, poskytnout pro ni prostor čas a to i přesto, že si samotný řešitel neuvědomuje, že v jeho podvědomí takový proces stále probíhá.

2.2.2 Zásady tvůrčího řešení problémů a tvůrčí zkušenost

Na tvůrčí proces řešení problémů působí mnoho vlivů, se kterými je nutno počítat, je nutno překonávat bariéry tvořivosti a osvojit si metody. Důležitou součástí je také osvojení určitých **zásad tvůrčího řešení**.

Bakalář[67] formuloval několik zásad tvůrčí práce při řešení problémů:

- První nejlepší nápad bývá často poslední dobrý.
- Odbourejte předsudky, rozvíjejte svou fantazii.
- Řešit problémy je těžké, těžší je problémy vidět.

(Pietrasinski[68] dodává *„Hlavní tajemství úspěchu je mnohdy ani ne tak v umění řešit problémy, jako spíše v umění objevovat je.“)*

- Buďte k sobě nároční! Sebeuspokojení nechte druhým.
- Nemějte strach z vlastních nápadů.
- Nezdržujte se s dobrými nápady. Jsou ještě lepší.

[67] BAKALÁŘ, Eduard a Pavel ERAZIM. *Kapitoly z psychologie tvořivosti*. Plzeň: Dům techniky ČSVTS, 1986.
[68] PIETRASINSKI, Zbigniew. *Psychologie správného myšlení.* Praha: Orbis, 1964.

Další důležitou součástí je tzv. **tvůrčí zkušenost**, kterou Petrová[69] definuje *„jako osvědčené a vyhovující postupy činností, které odpovídají vlastnostem tvůrce i druhům řešených problémů a upozorňuje, že se tato zkušenost může stát brzdnou silou tvořivosti“.* Zatímco v oblasti lidského života je množství nabytých zkušeností výhodné, u tvůrčí činnosti to může být naopak kontraproduktivní. Minulé zkušenosti můžou být přitěžující, je-li řešení problémů jednostranné a je vytvořen návyk využívat pouze určitý způsob řešení. Ten se ale již pro nové podmínky nemusí hodit. Petrová v této souvislosti hovoří o tzv. *funkční fixaci* - zvláštním druhu návyku, který nám často ztěžuje vyřešení určitého problému. V návaznosti na problematiku funkční fixace upozorňuje Petrová na nutnost existence určitého *provokativního podnětu*, jehož účelem je vytrhnout myšlení ze starých zaběhlých cest, které jsou brzdou tvůrčích postupů – Petrová[70] to vyjadřuje takto: *„Potřebujeme ránu, která nás vyrazí z našich navyklých vzorců myšlení*.“

Při dodržování zásad tvůrčího řešení a s tvůrčí zkušeností se již dostáváme k tvůrčímu řešení problémů, které se dle Zeliny uskutečňuje za pomocí heuristické metody.

2.3 Heuristická metoda

Heuristická metoda je zařazována dle klasifikace Maňáka a Švece (kap. 1.1.1) mezi aktivizační výukové metody. Ve srovnání s tradičními výukovými metodami spatřuje většina autorů hlavní rozdíl v přístupu učitele, jenž *„sám žákům přímo poznatky nesděluje, ale vede je k tomu, aby si je sami samostatně osvojovali, přičemž ovšem jim na začátku pomáhá, radí a jejich objevování řídí a usměrňuje“*.[71]

Název heuristická metoda je odvozen od slova „Heuréka“ a původně označuje náhlý záblesk objevitelovy intuice. Za základy jsou považovány metoda dialogu a prvky problémovosti.

Úroveň osvojení podle Bloomovy taxonomie je při užití této metody již v rovině aplikace, která je charakteristická psychickým procesem řešení různých typů problémových úloh. Při výuce heuristickou metodou učitel pozná, jak je který žák pohotový, pružný, originální, schopný nekonvenčních řešení a zda umí postihnout nejdůležitější problémy[72].

---

[69] PECINA, Pavel. *Tvořivost ve vzdělávání žáků*. Brno: PdF MU. 2008. ISBN 978-80-210-4551-4.
[70] PECINA, Pavel. *Tvořivost ve vzdělávání žáků*. Brno: PdF MU. 2008. ISBN 978-80-210-4551-4.
[71] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5. s. 113.
[72] KALHOUS, Zdeněk a Otto OBST. *Školní didaktika.* Praha: Portál, 2002. ISBN 80-7178-253-X.

Ve 20. století začalo být využití heuristické metody populární a našlo velké využití v technických oborech, ve velkých firmách a nadnárodních společnostech. Zdrojem síly byl masivní technický rozvoj podporovaný silným konkurenčním bojem, kde dobrý nápad může zajistit náskok nad konkurencí. Vzhledem k této situaci a faktu, že přirozeně vysoce kreativních lidí není v žádném oboru dostatečně velké množství, začaly postupně vznikat nové metody pro zvýšení efektivity tvůrčího řešení problémů. Mnohé z metod byly původně přejaty z technických oborů, kde sloužily jako prostředky k řešení reálných konstruktérských a designérských problémů. Poté byly doplněny o propracované heuristické přístupy a v různých modifikacích jsou zpracovány do různých počítačových softwarů pro snadnější využití. Většina z níže prezentovaných metod patří mezi metody kolektivní a jsou dobře využitelné v řešitelských týmech vědecko-technických oborů.

Prakticky využívané metody dělíme na metody individuální a kolektivní.

Metody individuální:

Metoda pokusů a omylů je často aplikovanou metodou i v běžném životě. Při heuristické metodě ji používáme na počátku řešení nového problému, o jehož řešení si zatím jen těžko děláme představu. Jako metodu ji zdokonalil americký filozof A. F. Osborn, který předpokládal, že při řešení problému napadne objevitele nějaká myšlenka, kterou dál zkoumá, zda bude vést k cíli či nikoliv.

Černá schránka (black box) spočívá v provedení systémové analýzy a odhalení nedostatků v informacích, čímž zpřesňuje zkoumaný problém. U této metody je nutný systémový přístup, neboť spěch může vést k chybným řešením.

Ideální konečný výsledek (IKV) je metoda, která může pomoci se vyvarovat metodě „pokus, omyl“. Principem je představa ideálního řešení, která naznačí správný směr, který vede ke skutečnému řešení.

Kolektivní metody:

Strategie podnětných otázek, tzv. sokratovské otázky, je založena na principu kladení souboru otázek, kterými je podněcována mnohostranná myšlenková aktivita řešitelů. Hlavním cílem je omezit živelnost, jednostrannost a stereotyp ve prospěch tvořivosti a soustavnosti[73].

Synektika (autor W. J. J. Gordon) vychází z předpokladu, že tvořivá činnost je nejen racionální, ale i emocionální. Využití této metody probíhá tak, že účastnící skupiny volně diskutují v příjemné atmosféře, všichni se vyjadřují k různým hlediskům a možnostem řešeného problému, aniž by hlavním cílem bylo jeho rychlé vyřešení. Typické pro tuto metodou je mj. hledání analogií (personálních, bezprostředních, symbolických a fantastických), metaforické vyjadřování a hledání originálních asociací s širokým asociačním polem - tím se projevuje originalita myšlení.

Metody podle TRIZ jsou nazývány podle akronymu TRIZ, který pochází z ruštiny a znamená „teorie řešení vynálezeckých zadání". Tyto teorie byly vyvozeny ze zákonitostí vynalézání, objevování, vysledovaných studiem desetitisíců spisů s cílem najít něco společného. Zakladatel G.S. Altšuller chtěl vymyslet metodu, jejímž cílem je dosažení ideálního výsledku odstraněním psychologické setrvačnosti a maximálním využití všech systémových zdrojů. Tento inženýr pracoval na své metodě od roku 1946 do konce svého života (1998) a neustále ji zdokonaloval. Základní tezí bylo odhalit zákony platné při rozvíjení technických systémů a využít je k vynalézání bez náhodného bloudění. Metoda TRIZ se rozšířila v Rusku, Finsku, Velké Británii, USA i České republice. Tato metoda v plném svém pojetí odpovídá na tři základní otázky: Co? Proč? a Jak?

Brainstorming, tzv. bouře mozku či burza nápadů vznikla v USA v době před 2. světovou válkou v oblasti reklamy, kde šlo o vymýšlení reklamních sloganů, tedy o volnou asociaci nápadů. Změnou a přínosem této metody v oblasti heuristiky je především oddělení samotného vymýšlení nápadů od jejich kritického posuzování a následného zpracování[74]. Mezi základní principy patří vytvoření co nejvíce nápadů, různost pohledů na jeden problém a následné kritické hodnocení vymyšlených možností řešení. Více jsme tuto metodu popsali v závěru kapitoly 1.1.1 při popisu komplexních metod.

---

[73] VOTRUBA, Ladislav. *Rozvíjení tvořivosti techniků.* Praha: Academia, 2000. ISBN 80-200-0785-7.
[74] ŠŤÁVA, Jan. *Brainstorming a myšlenkové mapy – metody pro tvořivé učení a řízení.* In *Alternativní metody a postupy*. Brno : Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity Brno, 1997. ISBN 80-210-1549-7.

Metoda Phillips 66, jejímž autorem je Donald Phillips, je založena na rychlém řešení, produkci mnoha nápadů a rychlém rozhodování několika týmů s následnou diskusí týmových vedoucích. Základem je několik skupin o šesti osobách (z nichž je jeden vedoucí), které šest minut diskutují o daném problému (s možností využití brainstormingu). Poté se všichni vedoucí shromáždí, prezentují názory a nápady skupiny a diskutují o možnosti řešení problému. Tato metoda kromě tvůrčího řešení problémů má také socializační charakter - zlepšuje mezilidské vztahy a sociální schopnosti, neboť všechny skupiny musí nakonec dojít ke společnému řešení.

HOBO metoda, jejímž autorem je Miroslav Borák, se dá charakterizovat jako metoda brainstormingu doplněná o čas na samostudium[75] nebo také jako metoda Phillips 66 doplněná o samostudium v rámci heuristického postupu. Realizace této metody probíhá ve třech fázích - přednáška zajistí základní informace (příprava a výběr několika problémů, jejich předložení, prezentace a výběr skutečně řešeného problému), dále individuální studium řešitelů a zpracování dílčích problémů (výsledky se písemně zaznamenávají), diskuse o problému ve skupině systémem oponentury. Následuje diskuse jednotlivých skupin v plénu.

Delfská metoda je založena na zpracování a vyplnění dotazníku k danému problému. Tento dotazník vyplní několik vybraných odborníků, nezávisle na ostatních, a vrátí jej zadavateli, který odpovědi zhodnotí. Poté jim zpracovaný materiál vrátí pro druhé kolo ankety, ve kterém dle zpětné vazby mohou, ale nemusí, svá stanoviska přehodnotit. Hlavním pozitivem této metody je vyloučení vzájemného ovlivňování, kterému se nelze při skupinové diskusi vyhnout.[76]

Metoda 635 - její podstatou je rozdělení účastníků do šesti skupin, přičemž každý z řešitelů zapíše do připraveného formuláře tři své návrhy a předá je dalšímu (ve směru hodinových ručiček) tak, aby formulář obešel postupně všechny zúčastněné. Celá akce se nejméně pětkrát opakuje.[77]

Metoda IDEALS G. Nadlera je založena na projektování či zlepšení starých, zejm. sociálních systémů. Název IDEALS je zkratkou počátečních písmen Ideal Design of Effective and Logical System.

---

[75] HONZÍKOVÁ, Jarmila. *Nonverbální tvořivost v technické výchov*ě. Plzeň: Západočeská univerzita, 2008. ISBN 978-80-7043-714-8.
[76] VOTRUBA, Ladislav. *Rozvíjení tvořivosti technik*ů. Praha: Academia, 2000. ISBN 80-200-0785-7.
[77] VOTRUBA, Ladislav. *Rozvíjení tvořivosti technik*ů. Praha: Academia, 2000. ISBN 80-200-0785-7.

O shrnutí a systematické analyzování dosavadních metod tvořivého řešení problémů se pokusil R. P. Povilejko z Novosibiřska, který ve své heuristické metodě **Matrice Explorace** určil deset hodnotících procesů (asimilace, adaptace, multiplikace, diferenciace, integrace, inverze, imputace, dynamizace, analogie, idealizace) a deset metod tvoření (geometrické, fyzikálně-mechanické, energetické, konstrukční a technologické ukazatele, ukazatele trvanlivosti a jistoty, využití ekonomické, stupeň standardizace a unifikace, výhody a bezpečnost obsluhy a ukazovatele konstruktivní), které jsou základy tvořivosti.

Všechny uvedené metody jsou velmi dobře využitelné v řešitelských týmech malých i velkých firem, často jsou využívány na vymýšlení nových firemních strategií a řešení problémů. Kromě popsaných metod uvádí literatura další, které jsou ovšem často pouze kombinacemi a drobnými modifikacemi zmíněných metod.

Heuristická metoda lze využít také při práci s dětmi. Jednou z takových metod je také INVENTIKA.

INVENTIKA (heuristická metoda manželů Fustierových) nazývána také jako funkční analýza, si klade za hlavní cíl přiblížení praxe dětem používáním skupinového řešení problémů za pomoci heuristických metod.

Hlavními východisky jsou:

- Pedagogika by měla více učit skutečné řešení problémů – výchovně-vzdělávací proces by se dle autorů měl přibližovat k praktickému životu. Navrhují, aby žáci více chodili do přírody, různých organizací apod. a přinášeli odtud problémy k řešení.
- Větší využití metod skupinového řešení problémů – v budoucím povolání je běžné pracovat v týmu či skupinách, proto je nezbytné učit děti spolupráci již ve škole.
- Využití heuristických metod – manželé Fustierovi zastávají názor, že každá dobrá heuristika je syntézou tvořivého řešení praktických problémů z rozličných oblastí života lidí.

Autoři určili 7 fází inventiky - funkcionální analýzy:

1. Vnímání a uvědomování si potřeby řešit problém. Sami žáci mají hledat problémy, neboť praktické cvičení v hledání nedostatků, problémů a z nich vycházející formování potřeby řešit problémy, jsou velmi důležitým krokem tvořivé práce.

2. Výzkum prostředí problému. Tento krok zahrnuje sběr informací, hledání, třídění, výběr toho podstatného, a to z literatury, vlastní anketou, výzkumem a jinými všemi dostupnými metodami.
3. Vyznačení funkcí. Tato fáze je důležitá v uvědomění si funkcí a základních problémů daného předmětu. Často se stává, že jsou funkce určeny chybně. Ke správnému určení je dobré odpovědět na otázky: Co potřebujeme? K čemu to bude sloužit?
4. Hledání idejí řešení, produkce nápadů. Podle autorů lze využít tyto techniky: metoda ideálního systému, metoda prolomení stereotypu, metoda morfologické analýzy, metody řešení pomocí analogie, brainstorming aj.
5. Hodnocení nápadů, myšlenek a výběr nejlepších řešení – výběr probíhá zhodnocením každé myšlenky vzhledem k funkci a cíli. Požaduje se za žádoucí vypracování kritérií k hodnocení.
6. Dopracování a domyšlení řešení - důsledková analýza.
7. Realizace řešení – doplněno zpětnou vazbou (poučení pro příští řešení podobných problémů).

Další typy heuristických metod, které se využívají zvláště ve vyučování, uvedeme ve 3. kapitole.

Závěrem bychom chtěli zdůraznit, že znalost a osvojení metod je pro úspěch tvůrčího řešení problémů velmi důležité. Samotná znalost metodologie však nezaručí úspěch při řešení konkrétního problému. Výše popsané metody zvyšují efektivitu tvůrčího procesu, dávají mu strukturu, podněcují tvořivost a poskytují prostor pro tvůrčí práci a vzájemnou spolupráci jednotlivců.

3 METODY HEURISTICKÝCH PŘÍSTUPŮ VE VYUČOVÁNÍ

Základy heuristiky, její principy a možnosti využití byly již popsány v předchozí kapitole. V této části práce nabízíme charakteristiky základních heuristických metod, které jsou využívány ve vyučování. Při klasifikaci heuristických metod je možné postupovat z hlediska různé míry nezbytné učitelovy pomoci žákům a sestavit hierarchickou stupnici spolupráce učitele a žáka, která vytvoří kontinuum od příkazových rad až k relativně samostatnému postupu žáka. Vše lze také sledovat v navazující linii – aktivita- samostatnost - tvořivost.[78]

Mezi základní principy účinného heuristického postupu patří princip aktivního učení, princip motivace, radosti, zážitků z učení, princip následnosti jednotlivých fází řešení problému a princip samostatnosti (tj. žák sám vyhledá všechny informace k řešení pro něj přiměřeného úkolu, které jsou pro něj dostupné, přiměřené a odpovídají jeho možnostem).

Někteří autoři uvádějí jako základní rozdělení heuristické metody členění na tzv. “malou” a “velkou” heuristickou metodu. Ač nelze udělat ostrý předěl, za "*malou*", nebo také dialogickou metodu (metoda otázek a odpovědí), je označována výuka zakládající se na dialogu mezi učitelem a žákem, přičemž učitel klade otázky, žák na ně odpovídá. Otázkami je postup objevování rozdělen do malých kroků.
"*Velká*" heuristická metoda spočívá v samostatném zpracování větších celků při objevování poznatků a v procházení jednotlivými částmi poznávacího cyklu. Žákovy činnosti mohou zahrnovat kladení otázek, pozorování, shromažďování a třídění dat, měření, hledání důkazů, srovnávání, analýzu, syntézu a hodnocení při řešení problémů.

V této práci se budeme držet v úvodu naznačené linie aktivity, samostatnosti a tvořivosti žáků. Mezi základní typy a modifikace heuristické metody, kde je uplatňována menší míra aktivity, samostatnosti a tvořivosti žáka, patří *metoda řízeného objevování.* Tato metoda bývá zařazována zejména v počátečních fázích výuky či při zavádění heuristických přístupů do vyučování. Základním rozdílem je to, že při této submetodě jsou intervence učitele častější a hlubší.

[78] MAŇÁK, Josef. *Stručný nástin metodiky tvořivé práce ve škole*. Brno: Paido, 2001. ISBN 80-7315-002-6.

Oblíbenou modifikací základní heuristické metody je tzv. *metoda sokratická* neboli *metoda řízené diskuse*. Ta se vyznačuje tím, že učitel klade většinu otázek sám a má také připraveny předem žádoucí závěry, ke kterým žáky směřuje.

Při nácviku využití heuristických postupů se uplatňuje také *technika odrazového můstku*, což je jistá forma motivačního impulsu v podobě zajímavých informací.

Poslední zmíněnou základní heuristickou metodou, ve které má stále vedoucí úlohu spíše učitel, je *heuristický dialog*. Tento typ heuristické metody je postaven na rozhovoru učitele se žáky, ve kterém učitel pomáhá žákům objevovat nové poznatky, vztahy a zákony. Heuristický dialog je obvykle součástí tzv. objevného vyučování jako teoretické a metodologické koncepce.

Když nahlédneme z druhé strany stupnice tvořivosti, můžeme za nejefektivnější a nepropracovanější heuristickou metodu považovat metodu řešení problémů tzv. problémovou výuku. Ta představuje myšlenkovou variantu učení pokusem a omylem, při níž se subjekt učí ze svých úspěchů, ale také chyb a nezdarů.

O heuristické metodě ve vyučování Maňák[79] říká, že jejím prostřednictvím „*se učitel snaží žáky získat pro samostatnou, odpovědnou učební činnost různými technikami, které mají podporovat objevování, pátrání, hledání, jako např. kladením problémových otázek, expozicí různých rozporů a problémů, seznamováním se zajímavými případy a situacemi apod*.“

3.1 Výuka heuristickými metodami

Maňák a Švec zdůrazňují[80], že učení cestou samostatného objevování představuje neobyčejně významný způsob poznávání a osvojování poznatků. Pokud učitel zvolí tuto metodu práce ve své výuce, musí pro úspěšnost zvolené metody ve výuce vybavit žáky předběžnými výchozími dovednostmi a vědomostmi. Také je učí, zda cíl, kterého mají dosáhnout, je jim jasný a přiměřený jejich silám. Proto je třeba, abychom s žáky nejdříve zvládli řadu pracovních návyků jako např. vyhledávání, shromažďování, třídění dat, údajů, informací a techniku řešení problémů.

[79] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5. s. 113
[80] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5.

Podstata této metody spočívá v tom, že nesdělujeme žákům vědomosti přímo. Ve výuce jsou vedeni k tomu, aby buď zcela samostatně, nebo s přiměřenou pomocí učitele došli k novým poznatkům vlastním myšlenkovým úsilím[81]. Žáci tedy nepracují zcela samostatně, zejména na začátku jim učitel radí a jejich objevování usměrňuje, ale i tak je jim poskytován dostatek prostoru, ve kterém musí spoléhat na vlastní síly. Není vždy nutné, aby žák své objevy popsal či vyjádřil, cennější je prožitek a chuť poznávat a objevovat.

Základním principem těchto metod je rozhovor mezi učitelem a žákem, tedy dialog. Učitel vyslovuje otázku a staví žáka před problém, který má řešit. Úlohy, které nelze řešit dle již známého schématu - algoritmu, pamětně aktivizují proces žákova myšlení. Učitelova otázka pouze naznačuje problémovou situaci. Problém řeší žák vlastními úvahami, pozorováním jevu a nalezením odpovědi.

Heuristická metoda je - jak ukazují dlouholeté a četné zkušenosti učitelů - velmi účinná, je-li ovšem dobře připravena a dobře provedena. Při jejím použití je třeba dodržovat určité podmínky a předpoklady:

Předpoklady učitele

Mezi hlavní předpoklady učitele patří především odborné znalosti, pedagogické dovednosti, porozumění psychice žáků, učitelovy postoje, osobnostní vlastnosti, řídící a organizační schopnosti, pohotovost a schopnost improvizace, tvořivost aj.

Předpoklady žáků

Heuristická metoda, je-li dobře vedena, účinně zapojuje naprostou většinu žáků, aniž by museli mít nějaké zvláštní předpoklady - motivuje je, vede k hlubšímu porozumění a snadnějšímu zapamatování učiva. Podle zkušeností učitelů používajících heuristickou metodu si žáci zvyklí na tradiční výuku musí na metodu objevování postupně zvykat a stranou zůstávají jen netečná jednotlivci, kteří nespolupracují a nejsou aktivní ani při tradiční výuce.

Vhodné téma

Většinu učebních témat je možné realizovat ve výuce heuristicky. Pro vyučování těmito metodami jsou méně vhodná témata abstraktní (kde není možné opřít se o názor), témata bez možnosti vyřešení žáky výzkumem, objevováním (např. témata historické povahy) a rovněž témata, v nichž chceme zdůraznit logickou strukturu (ta spíše vynikne v přehledném výkladu).

---

[81] PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4834-8.

Úkoly, které žáci dostávají k samostatnému zpracování

Zadané úkoly musí být žákům srozumitelné a zcela jasné tak, aby většina žáků byla schopna je splnit, ale nesmí být tak jednoduché, aby žáci znali odpověď předem bez nějakého podílu vlastní práce. Žáci musí mít všechny vědomosti a dovednosti potřebné k zvládnutí zadaných úkolů.

Řízení heuristické výuky učitelem

Učitel musí být schopen sledovat práci žáků. Jeho prací je poznat, kdy si žáci nevědí rady, nedokážou přijít na další postup, ocitnou se ve slepé uličce, ve které nerozpoznají svou chybu a neumějí se vrátit se ke správnému postupu. Učitel v takovém případě řídí práci žáků dodatečnými otázkami či instrukcemi. Velmi důležité je nechat žákům na zvládnutí otázky, úlohy či úkolu dostatek času - nenavádět je dodatečnými otázkami, když jsou schopni práci samostatně zvládnout.

Nutné shrnutí

Na konci heuristicky vedené vyučovací hodiny je nutno přehledně shrnout získané poznatky, jimž se mají žáci naučit.

Výuka za pomocí heuristických přístupů probíhá většinou tak, že učitel předkládá žákům problém (ve formě otázky, experimentu, apod.), nechá je diskutovat, navrhovat hypotézy k jeho řešení, ale také hledat cesty k ověření nebo vyvrácení hypotéz. Při použití heuristické metody žák prochází, zčásti za vedení učitele a zčásti samostatně, procesem objevování poznatku. Tento proces odráží ve zjednodušené podobě, odpovídající možnostem žáka, poznávací cyklus tak, jak probíhá ve vědě: od identifikace problému a formulace hypotéz přes projekt výzkumu, jeho provedení a zpracování jeho výsledků, k interpretaci výsledků a vyslovení závěrů s ohledem na testovanou hypotézu.

Při výuce vedené heuristickou metodou se tedy žák aktivně spolupodílí na hledání, objevování poznatků, jimž se má učit. Poznatky vznikají společnou prací učitele a žáků, přičemž míra samostatného aktivního podílu žáků může být různá. Učitel řídí proces objevování poznatků prostřednictvím otázek a instrukcí, a tím žákům tento proces rozděluje do větších či menších kroků, v nichž pracují aktivně a samostatně. Délku a obtížnost kroků učitel volí v závislosti na věku a úrovni žáků, na jejich předchozí zkušenosti se samostatnou prací, na druhu učiva apod. Žáci se přitom učí nebát se vyslovit svoje názory, nestydět se za chybu, kterou udělali a současně se neposmívat spolužákovi, kterému se něco nepodařilo. Kritériem pravdy je přitom v maximální možné míře nikoliv autorita učitele, ale realita dané situace.

Heuristické metody využívají přirozený lidský proces poznávání. Učitel by měl v žácích podněcovat rozvoj těchto heuristických aktivit, neboť metody vychází z přirozené touhy člověka po objevování. Za pomoci těchto metod se spojuje pěstování tvořivosti žáka s osvojováním vědomostí a dovedností. Takové vyučování vychází z myšlenky *„nejlepší způsob, jak se něčemu naučit, je objevit si to sám"*, a tím poskytuje možnost žákům zažít pocit objevitelského nadšení. Také zde hraje velkou roli trvalejší osvojení vědomostí a schopnost využívat je při řešení problémů.

Vzhledem k náročnosti na přípravu učitele má heuristická metoda ve škole svá úskalí a realizační potíže. I přes splnění všech podmínek nelze heuristickou metodu použít za všech okolností a ve všech případech výuky, nelze jí nahradit všechny ostatní metody a přístupy. Tato metoda je velmi náročná jak na přípravu učitele, na schopnosti a dovednosti žáků, tak i na čas věnovaný realizaci.

3.1.1 Pozitivní a negativní stránky využití heuristické metody ve vyučování

Vyučování heuristickými metodami má své pozitivní a negativní stránky. Obě tyto strany jsou často diskutovanou otázkou, nazývanou také pedagogickým minovým polem.[82]

Mezi přínosy této metody se řadí trvalejší osvojení vědomostí žáků a schopnost využívat je při řešení problémů. Mezi další uváděná pozitiva řadíme rozvoj nejen znalostí, ale i dovedností a postojů. Žáci získávají schopnost formulovat a obhajovat své názory, přijímat zodpovědnost za výsledky své práce. Dochází zde k hlubšímu pochopení učiva, k odhalení širších souvislostí s dosavadními znalostmi i s každodenními zkušenostmi žáka. Využití této metody žáky silně motivuje a aktivizuje. Žáci mají radost z toho, že sami něco vyřeší, dokážou, objeví. Vnímají učení heuristickými metodami jako činnost, kterou konají samostatně (ne jako něco, co je na nich vykonáváno zvenčí). Tato metoda využívá a procvičuje u žáků myšlenkové operace vyššího řádu - analýzu, syntézu, ilustraci a hodnocení. Žáci se učí řešit problémy, srovnávat, shromažďovat a třídit data, identifikovat problém, atd. V neposlední řadě heuristické metody také rozvíjí tvořivost žáků. Petty za hlavní výhody považuje to, že je tato *„metoda aktivní,*

---

[82] PETTY, Geoffrey. *Moderní vyučování.* Praha: Portál, 2008. ISBN 978-80-7367-427-4.

motivující a zábavná; vede k jasnému pochopení látky prostřednictvím dosavadních znalostí a zkušeností; vyžaduje od žáků myšlenkové pochody vyššího řádu; žáci jsou nuceni vnímat učení jako činnost, kterou provádějí oni sami a umožňuje žákům, aby se těšili z toho, že sami věci řeší.“

Tato metoda je nejen velmi efektivní s ohledem na žáky, přináší mnoho pozitivního i učiteli. Vyučujícím přináší větší uspokojení z práce a možnost rozvíjet vlastní vědomosti, dovednosti a schopnosti řešit nestandardní úlohy. Tato metoda rozvíjí jejich tvořivost, udržuje motivaci, vede je přirozeně k sebevzdělávání. Práce, která žáky i učitele baví, přináší uspokojení z pedagogické praxe. Navíc má učitel ve vyučování heuristickou metodou průběžně zpětnou vazbu, je informován o postupu žáků a jejich pochopení učiva.

Mezi často zmiňované negativní stránky metody objevování patří časová náročnost v závislosti na menším objemu odučeného učiva. Zkušení učitelé namítají, že pokud je vše dobře připraveno, tak stihnou se žáky probrat vše potřebné a přitom si žáci učivo osvojí mnohem kvalitněji co do hloubky porozumění, vnímání souvislostí, tak i trvalosti zapamatování.

Mezi další argumenty proti využívání heuristických metod se řadí fakt, že je nelze použít na všechna vyučovaná témata. Nevhodná jsou taková, která jsou založena na faktech nebo u nichž je nepravděpodobné, že by žáci příslušný poznatek sami objevili, případně je-li téma úplně nové a žáci se nemají při objevování poznatků o co opřít.

V některých diskusích se uvádí také poznámka, že otázky, jimiž učitel řídí postup žáků, mohou být sugestivní, odpověď již může být obsažena v samotných otázkách. Tuto negativní stránku snadno vyloučí správná odborná příprava učitele.

Občas se také vyskytne názor, že se žáci vedení ve výuce výhradně heuristickou metodou nenaučí naslouchat souvislému výkladu. Toto má své opodstatnění zvláště ve vyšších ročnících středních škol, kde je třeba žáky připravovat na vysokoškolský způsob studia. Je ale nutné také konstatovat, že není žádné zařízení, kde by se vyučovalo výhradně heuristickou metodou.

Důležitou poznámkou na straně odpůrců je fakt, že žáci, zvláště na základní škole, nejsou někdy schopni dospět k očekávaným výsledkům a jejich motivace k práci poté výrazně klesá. Zde se projevuje také poslední často zmiňovaná nevýhoda využívání této metody, a to náročnost na přípravu učitele. Bezesporu je výuka za pomocí heuristické metody náročnější a únavnější než při využití tradičních metod, zvláště pro méně zkušené učitele. Uvádí se také, že učitel s delší dobou praxe může naopak cítit nebezpečí rutiny, stereotypu, nudy a hledat nové přístupy. V tu chvíli se jeví heuristická metoda jako dobrá volba pro změnu a poskytuje učiteli i žákům jednu z nejpřínosnějších možností využití výukových metod.

V každém případě lze říci, že heuristickou metodu nelze použít za všech okolností a ve všech fázích výuky. Je časté, že učitel zpočátku využívá například metody řízeného objevování nebo metodu řízené diskuse. V těchto případech učitel klade většinu otázek sám, má závěry připravené předem. Vzhledem k náročnosti na přípravu učitele má heuristická metoda ve škole svá úskalí a realizační potíže. Je nutné ji tedy doplňovat jinými postupy.

Ke shrnutí bychom využili slov Zeliny: *„V dnešní době tato metoda představuje ve světě významný způsob zefektivnění a modernizace výchovně-vzdělávacího procesu. Učení se pomocí tvořivého řešení problémů, stejně jako vyučování touto metodou a strategií, představuje vrchol v jednotlivých druzích a způsobech vyučování a učení.“*[83]

3.1.2 Výzkumy využití heuristiky ve vyučování

V minulosti bylo provedeno několik výzkumných experimentů zaměřených na efektivitu tzv. objevných, heuristických metod ve vyučování, zvláště problémové výuky a to ve vztahu k tvořivosti. V této podkapitole několik z nich krátce představíme.

Mezi prvními námi uvedenými je výzkum H. Pochankeho, který proběhl ve školním roce 1961/62 v Zelené Hoře. Tento výzkum byl zkoumán ve čtyřech třídách šestého ročníku a ověřoval přednosti problémové výuky v technickém vyučování na základní škole. Pro experiment byla zvolena jedna třída jako kontrolní skupina, v níž bylo vyučováno tradičními metodami. Ve třech zbývajících třídách, experimentálních skupinách, se vyučovalo pomocí problémové výuky. Výsledky výzkumu ukázaly, že žáci z experimentálních skupin mají lepší znalosti.[84]

Problémová výuka přírodovědných předmětů - zvláště fyziky a chemie se stala zájmem zkoumání Czeslawa Kupisiewicze, který provedl experiment ve dvou osmých a třech devátých třídách Lycea J. Slovackého ve Varšavě v roce 1962. Experimentu se zúčastnilo 202 žáků a výsledky jasně prokázaly, že vyučování metodou laboratorně–problémovou bylo ze třech zkoumaných metod nejefektivnější.

---

[83] ZELINA, Miron. *Tvořivost v matematice*. Olomouc: Krajský pedagogický ústav Ostrava, 1990. ISBN 80-900158-9-1. s. 66

[84] PECINA, Pavel. *Tvořivost ve vzdělávání žáků*. Brno: PdF MU, 2008. ISBN 978-80-210-4551- 4.

Mezi dalšími, kteří realizovali výzkum v oblasti efektivity problémové výuky, byli M. Kožuchová, Z. Pomšár a I. Kožuch. Tito pedagogové realizovali experiment na základních školách v Bratislavě, v Kežmaroku a v Lehote pod Vtáčnikom. Cílem bylo zjistit, jaký vliv má zadávání problémových úkolů na rozvoj tvořivosti žáků na 1. stupni ZŠ. Třídy byly rozděleny na experimentální a kontrolní. Získané výsledky prokázaly, že ve všech faktorech tvořivosti došlo u experimentálních skupin k přírůstkům, které byly potvrzeny na hladině významnosti 1%.

V nedávné době provedl výzkum v rámci své disertační práce P. Pecina, jeden z českých současných odborníků na oblast problémové výuky. V druhém pololetí školního roku 2003/2004 realizoval experiment na I. Německém zemském gymnáziu v Brně, ve kterém ověřoval vliv problémové výuky na rozvoj tvořivosti žáků 2. ročníku víceletého gymnázia ve fyzice. Do experimentu, který trval 5 měsíců, byly zapojeny dvě třídy, z nichž jedna byla kontrolní, druhá experimentální. Vyhodnocení bylo na základě srovnání pretestu a posttestu (test tvořivosti), který byl zadán v obou třídách před a po skončení experimentu. Na základě srovnání výsledků obou testů konstatoval, že ve všech bodech testu došlo u experimentální skupiny ke zlepšení, ač mezi výsledky jednotlivých úkolů nebyly statisticky významné rozdíly. Autor výzkumu předpokládá, že pokud by experiment trval déle, rozdíly by byly statisticky významné ve prospěch problémové výuky.

3.2 Problémová výuka

Problémová výuka, nazývaná též jako problémová metoda či problémové vyučování, je metoda využívající heuristických principů.

Prvním iniciátorem rozvoje problémového vyučování byl Dewey (1910), na nějž navázaly další koncepce[85], např. Winetská soustava, Daltonský plán a metoda projektů. K hlubšímu rozpracování dané problematiky do školních podmínek přispělo mnoho pedagogů a psychologů, např. Kupisiewicz (1964), Okoň (1966), Stračár (1967), Kozielecki (1969), Maťuškin (1972), Machmutov (1975), Turek (1982), Kašpar (1982), Bransford, Stein (1995), Kožuchová (1995), Lokša, Lokšová (2003), Maňák, Švec (2003) a mnozí další. Již z přehledu jmen jde znát, že problematika problémového vyučování je v literatuře dostatečně zpracována.

[85] ČÁBALOVÁ, Dagmar. *Pedagogika*. Praha: Grada, 2011. ISBN 978-80-247-2993-0.

Problémová metoda umožňuje vysokou produktivitu myšlenkových procesů všech účastníků, samostatné a dynamické myšlení žáků a možnost jejich samostatného rozhodování. Dochází ke změně kvality vědomostí na základě hlubšího poznání problému a díky aktivní samostatnosti k hlubšímu zapamatování poznatků.

V praxi českého školství se problémová metoda stále vyskytuje zřídka. Mezi hlavní důvod této situace je chybějící dlouhodobá zaměřenost na tyto způsoby práce a nedostatečná připravenost žáků na samostatné a tvůrčí aktivity tohoto typu. V dnešní tzv. informační společnosti se ale také mění hodnoty ve školství. Je patrná tendence odklonu od hromadění informací a je kladen důraz na vnímání, pozorování, rozvoj fantazie a imaginace. Jsou ceněny schopnosti vyhledávat podstatné informace, třídit je a vyhodnocovat jejich kvalitu, dávat je do souvislostí s vlastními zkušenostmi a potřebami života. Vzhledem k tomuto směru rozvoje společnosti je důležité problémové metody výuky využívat, podněcovat aktivitu žáků samostatným objevováním a řešením problémů.

Někteří autoři[86] považují *problémové vyučování* za základ všech aktivizačních metod, za nadřazený pojem pro více výukových postupů[87], jiní je vymezují konkrétněji. Machmutov vymezuje problémové vyučování jako *„typ rozvíjejícího vyučování, ve kterém je spojena aktivní badatelská (objevitelská) činnost žáků s osvojováním poznatků. Je organizováno na principu problémovosti s ohledem na stanovené cíle“* [88]

Problémové učení je poté definováno jako aktivní a samostatná učební činnost žáků, při které dochází k osvojování vědomostí při řešení problémové situace. Učení probíhá samostatnou analýzou problémových situací (podle možností žáka s pomocí učitele), formulací problémů a jejich řešení.

Problémová metoda spočívá v předkládání úloh, k jejichž vyřešení žákovi nestačí pouhá reprodukce stávajících znalostí či použití osvědčených postupů. Žák musí buď zcela samostatně, nebo s přiměřenou pomocí učitele užít nové postupy, modifikovat známé cesty řešení, případně dohledat potřebné informace a dojít k novým poznatkům vlastním myšlenkovým procesem.

---

[86] KOTRBA, Tomáš a Lubor LACINA. *Praktické využití aktivizačních metod ve výuce*. Brno: Barrister a Principál, 2010. ISBN 978 – 80 – 87029-12-1.

[87] PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4834-8. s. 61

[88] PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4834-8. s. 61

Ústřední kategorií je *„problém“*, jehož vymezení a pojetí určuje metodické ztvárnění. Problémy vlastně člověk řeší neustále, neboť dle Poppera celý život je řešení problémů, ať se týkají situací a činností orientačních, rozhodovacích nebo výkonných[89].

Ve výuce chápeme problém jako druh specifické úlohy (situace), kterou žák není schopen řešit na základě své aktuální zásoby vědomostí. Jde o situaci novou, nejasnou, částečně obtížnou, leč řešitelnou. Žák se metodou pokus omyl učí ze svých úspěchů, ale také z chyb a nezdarů, stejně jako v životě. Problém je překážkou, rozporem, který žák musí řešit. Dle Okoně[90] je problém *„teoretická nebo praktická obtíž, kterou žák musí řešit aktivním zkoumáním, myšlením.“* Skalková[91] uvádí, že ač *„v pedagogických souvislostech se pojem chápe v různé šíři, ustálil se názor, že pedagogický problém představuje obtíž teoretické nebo praktické povahy, při jejímž řešení žák aktivně používá vlastní poznávací činnost. Řídí se určitými potřebami, směřuje k překonání obtíže, a tak získává nové poznání a nové zkušenosti.“*

Situace, v níž se žák setkává s problémem, rozporem mezi znalostmi nabytými a potřebnými k vyřešení úkolu, se nazývá *problémovou situací*. Ta u něj probouzí napětí, možnost prožívání nových jevů a schopnost jejich vstřebávání.

3.2.1 Problémové situace

„Problémová situace je stav, kdy žák při plnění zadaného úkolu narazí na potíž, na něco neznámého, co neví a nemůže to vyřešit na základě dosavadních poznatků“.[92]
Problémová situace má složku obsahovou (předmětovou) a složku osobnostní (motivační). Vyjadřuje nejen požadavky učitele, ale i zájmy, tužby, potřeby a možnosti studenta. Tím vzniká v problémové situaci u studentů poznávací potřeba, která umožňuje nejen uskutečnění procesu učení, ale i řízení a kontrolu průběhu tohoto procesu.

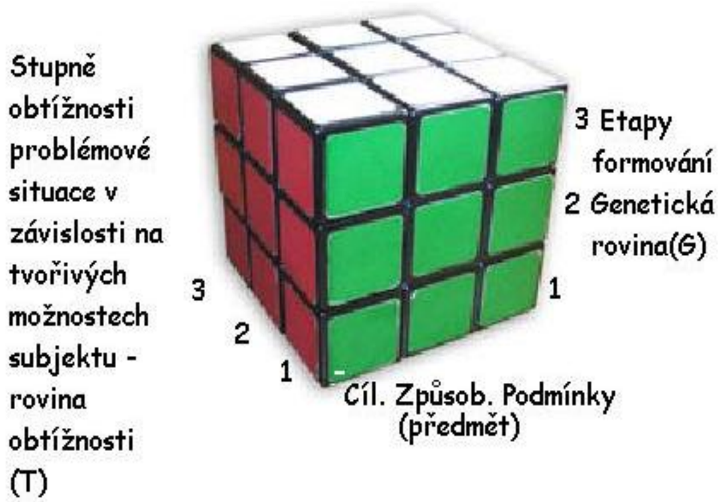
„Problémovou situaci může učitel navodit zadáváním problémových úkolů, úloh a otázek. Žáci poté výukový problém řeší na základně vlastní intenzivní myšlenkové činnosti a osvojených poznatků.”[93]

---

[89] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5.
[90] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5. s. 115
[91] SKALKOVÁ, Jarmila. *Obecná didaktika.* Praha: Grada, 2007. ISBN 978-80-247-1821-7. s. 157
[92] PECINA, Pavel. *Tvořivost ve vzdělávání žáků*. Brno: PdF MU, 2008. ISBN 978-80-210-4551. s. 42-43
[93] PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4834-8. s. 61

Podle A. M. Maťuškina, který vychází z myšlenek svého učitele S. L. Rubinštejna, je problémová situace *„každá situace, jejíž neznámé prvky vyvolávají u člověka zájem poznat je (poznávací zájem), vzbuzují v něm potřebu poznat je (poznávací potřebu) a navozují v něm činnosti pro toto poznání nezbytné (poznávací aktivitu)“*. [94]

Problémové situace, které vznikají při problémovém vyučování, lze třídit podle různých kritérií. Maťuškin vypracoval originální typologii problémových situací, kterou zobrazil na názorné pomůcce – krychli. V tomto trojrozměrném útvaru každá ze tří jeho rovin představuje jednu dimenzi problému. Autor tyto dimenze nazývá: rovina struktury činnosti, rovina rozvoje činnosti a rovina obtížnosti činnosti.



Obr. 2: Model typologie problémových situací

Každá z těchto tří dimenzí má kromě toho ještě tři zvláštní úrovně - tím dostává 27 znaků, kterými lze popsat jednotlivé konkrétní problémové situace a podle určitých kritérií je uspořádat do tříd a typů. Maťuškin také zavádí symbolický jazyk, jehož abeceda se skládá z deseti znaků – šesti písmen (D-struktura činnosti; G míra rozvoje činnosti, T obtížnost činnosti, P předmět činnosti, S způsob činnosti, U podmínky činnosti) a tři číslice (1 znamená nejnižší stupeň, 2 střední stupeň a 3 nejvyšší stupeň) a nakonec jeden grafický znak (implikace) pro strukturní vazbu – tyto znaky se podle pravidel sdružují a kombinují (DGT jsou hlavní znaky, zbytek vedlejší ke kterým přidává indexy). Tak vznikají zápisy o konkrétní úloze s možností kombinací triád a zápisu celých výukových baterií.[95]

[94] MAŤUŠKIN, A.M. *Problémové situácie v myslení a vo vyučování*. Bratislava: SPN, 1973. s. 23
[95] MAŤUŠKIN, A. M. *Problémové situácie v myslení a vo vyučování.* Bratislava: SPN, 1973.

Kašpar uvedl, že problémová situace plní ve výuce několik funkcí:[96]

- měla by upoutat žáka a vzbudit v nich zájem poznávat;
- vyvolává u žáků problém (obtíž, konflikt);
- vytvoří napětí mezi vznikající potřebou poznávání a nemožností ji uspokojit jen pomocí poznatků a dovedností, které má žák osvojeny – to aktivuje myšlenkovou činnost studenta;
- pomůže žákům odhalit podstatu problému, pochopit ji a hledat cestu k jeho řešení.

U Machmutova můžeme nalézt ještě doplnění o další funkci, a to, že problémová situace pomáhá určit hranice žádoucí aktualizace osvojených poznatků a ukazuje směr nejracionálnějšího východiska ze situace, ve které má obtíže.

Mezi zásadní metodickou otázku učitele patří volba adekvátní problémové situace, úkolu vzhledem k výukovým cílům i připravenosti žáka samostatně pracovat. Před řešením problému je nutné stanovit si postup, který ovlivňuje připravenost, obtížnost a dosažení cíle výuky.

Problémové situace[97] ve výuce můžeme rozlišovat podle charakteru. Jedna z klasifikací je rozděluje podle úkolu[98], který mají žáci vykonat a to na problémové úlohy, které mají neznámou v oblasti cíle, způsobu a podmínek úkolu.

- Problémové úlohy s problémem v oblasti cíle úkonu mají zejména teoretický charakter s cílem objasnit podstatu daného jevu a získat nové znalosti (např. pokusy).

- Problémové úlohy s problémem v oblasti způsobu úkonu jsou většinou praktické úlohy (např. početní úlohy, ověřovací, sestrojovací).

- Problémové úlohy s problémem v oblasti podmínek jsou úkoly, které vznikají při osvojování dovedností (např. sestavování pokusů, systémů).

Dále můžeme dělit výukové problémy[99] na:

- problémové úlohy, které mají jen jedno správné řešení – tzv. *uzavřené* (úlohy na odhalení principu činnosti, vysvětlení jevu apod.)

- problémové úlohy, které mají více možných řešení – tzv. *otevřené* (úlohy konstrukčního charakteru nebo úlohy typu navrhni, vymysli apod.)

---

[96] PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4834-8.

[97] PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4834-8.

[98] Úkol je definován jako takový prvek činnosti, který je zaměřen na dosažení daného cíle.

[99] PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4834-8.

U této problematiky se pojmy často prolínají a tak jsme se těmito klasifikacemi dostali již k dalšímu pojmu, a to pojmu problémové úlohy.

3.2.2 Problémové úlohy

Problémové úlohy jsou ve výuce důležitým prostředkem k aktivizaci a řízení učební činnosti žáků a zadávají se ve všech fázích výuky.

Nejdříve je zapotřebí definovat pojem učební úloha.

Učební úloha je jedním z nejvyužívanějších a nejdůležitějších nástrojů ve vyučování matematice. Prostřednictvím učební úlohy učitel aktivizuje žáky, vysvětluje a procvičuje učivo nebo také ověřuje plnění stanovených výukových cílů. Existuje mnoho definic pojmu učební úloha, např. Zdeněk Helus ve své práci popisuje, že: *„Učební úloha je každá pedagogická situace, která se vytváří proto, aby zajistila u žáků dosažení nějakého určitého učebního cíle, je zaměřena na všechny aspekty učení - obsahový, operační a motivační.“*[100] B. Novák uvádí: *„Učební úlohu můžeme vymezit jako každou situaci, podněcující řešitele (žáka) k uvědomělé činnosti, která směřuje k dosažení stanoveného učebního cíle. Tato činnost je zaměřena na všechny aspekty učení.“* [101]

Učební úlohy lze třídit podle různých kritérií. Nejznámější klasifikací je taxonomie učebních úloh vycházející z Bloomovy taxonomie kognitivních cílů Tollingerové. Učební úlohy jsou utříděny do pěti kategorií podle náročnosti poznávacích operací nutných k jejich řešení. V každé kategorii jsou pak ještě úlohy rozděleny do podkategorií.

1. Úlohy vyžadující pamětní reprodukci poznatků - obsahuje podkategorie: úlohy na znovupoznání, úlohy na reprodukci jednotlivých faktů, čísel, pojmů, úlohy na reprodukci definic, norem, pravidel, úlohy na reprodukci velkých celků, básní, textů, tabulek apod.
2. Úlohy vyžadující jednoduché myšlenkové operace s poznatky - rozděleno na: úlohy na zjišťování faktů (měření, vážení, jednoduché výpočty), úlohy na vyjmenování a popis faktů (výčet, soupis), úlohy na vyjmenování a popis procesů a způsobů činností, úlohy na rozbor a skladbu (analýzu a syntézu), úlohy na porovnávání a rozlišování (komparaci a diskriminaci), úlohy na třídění (kategorizaci a klasifikaci), úlohy na zjišťování vztahů

[100] HELUS, Zdeněk et al. *Psychologie školní úspěšnosti žáků.* Praha: SPN, 1979. s.220
[101] NOVÁK, Bohumil. *Matematika III. Několik kapitol z didaktiky matematiky.* Olomouc: UP, 2000. ISBN 80-7067-979-4. s. 43

mezi fakty (příčina, následek, cíl, prostředek, vliv, funkce, účel, nástroj, způsob), úlohy na abstrakci, konkretizaci a zobecňování, úlohy na řešení jednoduchých příkladů (s neznámými veličinami).

3. Úlohy vyžadující složité myšlenkové operace s poznatky. Tuto kategorii dále dělí na úlohy na překlad (translaci, transformaci), úlohy na výklad (interpretaci, vysvětlení smyslu, významu, zdůvodnění), úlohy na vyvozování (indukci), úlohy na odvozování (dedukci), úlohy na dokazování a ověřování (verifikaci), úlohy na hodnocení.
4. Úlohy vyžadující sdělení poznatků. Zde jsou úlohy na vypracování přehledu, výtahu, obsahu apod., úlohy na vypracování zprávy, pojednání, referátu apod., samostatné písemné práce, výkresy, projekty apod.
5. Úlohy vyžadující tvořivé myšlení. Tato kategorie obsahuje úlohy na praktickou aplikaci, řešení problémových situací, kladení otázek a formulace úloh, úlohy na objevování na základě vlastního pozorování, úlohy na objevování na základě vlastních úvah. [102]

Pokud se jedná o učební úlohy ve vyučování matematice, měl by žák při řešení úloh použít své teoretické znalosti, aplikovat je a následně posoudit výsledky své činnosti. K základním metodám řešení úloh řadíme metodu analytickou, syntetickou algoritmus a heuristickou metodu řešení.

Analytická metoda - při řešení vycházíme z otázky úlohy a hledáme další údaje, které jsou třeba k odpovědi na původní otázku. Klademe si otázky: K jakému výsledku máme dospět? Co hledáme? Co k tomu potřebujeme? Které údaje potřebujeme? Podstatou je analýza, což je rozložení úlohy na jednotlivé prvky, složky. Výhodou je, že student neustále sleduje cíl úlohy, co má zjistit a postup vede účinně a výkonně k cíli.

Syntetická metoda je opakem analytické - určujeme z daných údajů další údaje, až se dostaneme k odpovědi na otázky. Studenti využívají syntézu, což je skladba oddělených samostatných částí do jednoho komplexního celku s požadovanou a definovanou výslednou funkcí, je to spojení, sloučení údajů úlohy vyvozujících výsledek. Jako výhodu této metody můžeme uvést, že od počátku pracujeme s konkrétními údaji zadanými v úloze.

Často se také využívá kombinace těchto dvou metod - metoda analyticko-syntetická, která dává do vzájemné souvislosti analýzu a syntézu. Tato metoda se využívá spíše při řešení složitějších úloh.

[102] KALHOUS, Zdeněk a Otto OBST. *Školní didaktika*. Praha: Portál, 2002. ISBN 80-7178-253-X.

Algoritmem rozumíme nějaký předem daný, naučený a přesný postup. Pravidlo, které můžeme použít pro řešení nějaké konkrétní úlohy, nebo souboru úloh se stejnými znaky. Tato metoda vyžaduje postupnou aplikaci základních kroků, operací vedoucích ke správnému řešení. Algoritmus má konečný počet kroků, je kdykoliv opakovatelný a vede k řešení úlohy stejného typu, pro něž byl algoritmus vytvořen. Algoritmus by měl být dostatečně jednoduchý, aby byl přijat co největším počtem řešitelů úloh.

Heuristická metoda je metodou řešení problémů. Název vychází z řeckého Heuréka – objevil jsem, nalezl jsem. Je to postup vedoucí k nalezení optimálního způsobu řešení určitého problému, úlohy bez znalosti daného algoritmu. Je to proces tvůrčího řešení úloh, jejímž základem je objevování, invence, která může vést k řešení. Tato metoda se využívá často při řešení nestandardních problémových úloh.

Někteří autoři definují pojem učební úlohy již v souvislosti s problémovou situací. Například Novotná ve svém textu uvádí charakteristiku úlohy podle Fridmana (1977): *„Problémová situace vzniká, když se subjekt ve své činnosti (zaměřené na určitý objekt) setkává s určitou obtíží, překážkou. Tuto obtíž si uvědomí a hledá způsob, jak ji odstranit. Jakmile situaci navodíme záměrně, „uměle“, rodí se úloha. Úloha je model problémové situace fixovaný v jistém jazyce.… úloha je požadavek na provedení určitého explicitně či implicitně uvedeného operátoru k zadané podmínce*.“[103] O svém pojetí úloh také pojednává Květoň: „Jestliže je před jedincem vytyčen (přirozeným nebo umělým způsobem) cíl (úkol), určit v problémové situaci neznámý komponent (neznámé komponenty), tak pro daného jedince se problémová situace stává úlohou.“[104]

Učební úloha se stává problémovou v okamžiku, kdy v žákovi vyvolává vnitřní konflikt - problém, který ho aktivizuje k poznávací činnosti. Problémové úlohy navozují u žáků problémové situace.

Problémová úloha musí splňovat tato kritéria[105]:

1. Musí být v logické návaznosti s dosavadními poznatky žáků.
2. Musí být přiměřená jejich možnostem.
3. Musí mít problémový obsah (neznámou, obtíž, bílé místo).
4. Musí mít povahu nového poznatku.

[103] NOVOTNÁ, Jiřina. *Analýza řešení slovních úloh.* Praha: PdF UK, 2000. ISBN 80-7290-011-0. s. 7

[104] KVĚTOŇ, Pavel. *Kapitoly z didaktiky matematiky.* Ostrava: PdF, 1982. s. 212

[105] PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4834-8.

5. Musí u žáka vyvolat chuť poznávat.

Problémové úlohy, ač jsou zadávány ve všech fázích výuky, je však třeba striktně odlišit od úloh na procvičení učiva, či od úloh na aplikaci ukázaného algoritmu řešení. Účinek problémové metody spočívá v rozvoji myšlení, tvořivosti, představivosti, paměti a dalších poznávacích procesů. Úspěšné řešení problémů je podmíněno trpělivou prací při překonávání překážek a zadaných problémů.

Problémové úlohy může učitel zadávat žákům v různé podobě – ústně, písemně, graficky, experimentálně. Způsob zadání problémové úlohy závisí na stanoveném cíli, obsahu učiva a na možnostech žáků, stavu jejich intelektových možností a dosavadních znalostí. Aby žáci mohli problémový úkol řešit, musí mít řádně osvojeny předchozí znalosti, které jsou nutné k vyřešení problému. Všechny tyto aspekty musí učitel při výběru učiva brát v potaz a volit vhodně náročnost a způsob zadání. Příliš náročný úkol, ale ani příliš snadný, problémovou situaci nevyvolá. Je třeba počítat s tím, že v jedné třídě jsou žáci na různé intelektové úrovni. Proto může určitá úloha u jednoho žáka problémovou situaci vyvolat a u jiného nikoliv. Příprava problémové úlohy se tedy odvíjí od učiva, věkových a individuálních schopností žáků a připravenosti řešit problémové úlohy.

3.2.3 Průběh řešení problémů

Zejména v mladším školním věku jsou děti motivovány potřebou poznávat svět a vyznat se v něm. Toho je třeba při výuce využít. Žák se díky této metodě učí rozlišovat skutečné problémy od pseudoproblémů a mechanicky proveditelných úkolů (pamětné úlohy), naučí se odhalit podstatu (okolnosti, za kterých problém vzniká), pronikne do struktury problému a naučí se problémy řešit.[106]

V odborné literatuře je definováno několik způsobů, kterými lze problém řešit, např. pokusem a omylem, postřehem či rozvíjením myšlenkových operací žáků, naučeným algoritmem, apod. Řešení problémové úlohy doprovází kladení problémových otázek a řešení různých problémových situací. Problémová úloha rozvíjí myšlení, paměť a další poznávací procesy. Řešení je podmíněno trpělivostí při překonávání překážek a vyzrálostí žáků k řešení tohoto typu úloh.

[106] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5.

Průběh řešení problému lze rozdělit do určitých fází. Každý autor uvádí své rozdělení, i když východiska jsou u všech klasifikací stejná. Pro tuto práci jsme vybrali čtyři různá rozdělení.

I.M. Machmutov uvádí 8 fází přípravy problémových situací. [107]

- Navození situace, kdy se žáci setkávají s jevy nebo fakty, které vyžadují teoretické objasnění.
- Využití situace z denního života, které vzniknou při plnění praktických úkolů.
- Zadání problémové úlohy k vysvětlení určitého pojmu.
- Podněcování žáků k rozboru problémové situace.
- Tvorba hypotéz, formulace závěrů a jejich ověření v praxi.
- Podněcování žáků k srovnání faktů a důsledků k odhalení jejich stejných a odlišných stránek.
- Předběžné zobecnění faktu.
- Seznámení žáků se zdánlivě nevysvětlitelnými fakty, které ale vedly ke vzniku vědeckého problému.

Po přípravných fázích nastupují fáze řešení problémových úloh.

Pecina rozděluje řešení problémů na sedm fází řešení problému. Vychází při tom z šestibodové klasifikace Kožuchové (1995) a doplňuje ji sedmou fází a metodickými poznámkami: [108]

1. Definice problému a jeho vymezení.

V čem je problém? Žák si uvědomuje, že narazil na obtíž, kterou nedokáže vyřešit pomocí dosavadních poznatků. Většinou problém zadává učitel, může však vést žáky k tomu, aby problém objevili oni sami.

2. Naznačení ideálního řešení.

Čeho chceme dosáhnout?

3. Sběr informací a poznatků o problému.

Co musíme znát, abychom mohli problém vyřešit?

4. Návrhy řešení.

Toto je nejdůležitější fáze řešení problému. Dochází k objevování nových myšlenek žáka. Je to fáze náročná na představivost, fantazii, myšlení i volní úsilí.

5. Zhodnocení návrhů.

V této fázi zjistíme, zda je řešení dostačující. Pokud ne, vrátíme se zpět k první fázi.

6. Realizace návrhu.

---

[107] PECINA, Pavel. *Tvořivost ve vzdělávání žáků*. Brno: PdF MU, 2008. ISBN 978-80-210-4551-4.

[108] PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4834-8.

Odpovíme si na otázky: Co jsme vyřešili? Splnili jsme cíl? V případě úlohy, která má více řešení, se většinou vybírá nejvhodnější řešení.

7. Hodnocení a systematizace získaných poznatků.

V procesu řešení žáci mohou poznat různé pojmy a souvislosti, které je třeba zařadit do systému a upevnit.

Maňák rozděluje průběh řešení na pět fází, které vychází ze struktury heuristické metody (obr. 4)[109].

1, Identifikace problému, tj. jeho postižení, nalezení a vymezení.

Fáze identifikace problému je důležitá, ale i obtížná. Žák mnohdy nevidí problémové jevy, proto učitel pomáhá problém odhalit a formulovat, musí žáka seznámit se základy daného učiva. Učitel musí volit problém přiměřeně výchovně vzdělávacímu cíli, intelektovým možnostem žáka.

2, Analýza problémové situace, tj. proniknutí do struktury problému, odlišení známých a potřebných a dosud neznámých informací.

Při analýze problémové situace je třeba shromáždit všechna potřebná dostupná fakta, rozlišit důležité a irelevantní informace a doplnit či odhadnout údaje, které schází.

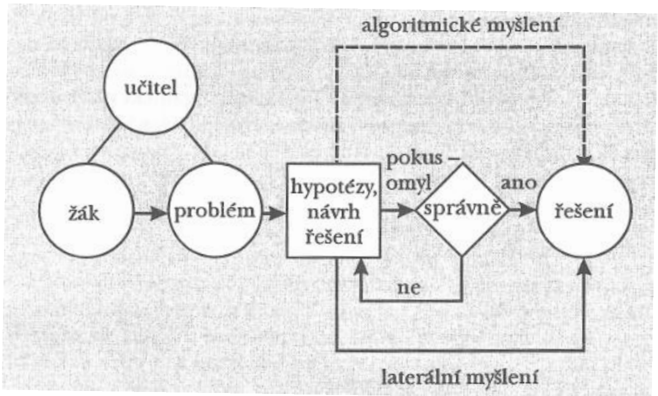
3, Vytváření hypotéz, domněnek, návrhy řešení.

Fáze vytváření hypotéz (návrhů řešení) odlišuje problémovou úlohu od algoritmického způsobu řešení, které sleduje pouze jeden směr.

4, Verifikace hypotéz, vlastní řešení problému.

Při verifikaci hypotéz dochází k jejich přijetí nebo odmítnutí, anebo oddálení rozhodnutí s nutností dohledat potřebné údaje.

5, Návrat k dřívějším fázím při neúspěchu řešení.



Obr. 3: Metoda objevování[110]

[109] MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5.

Musil navrhuje 5 stádií řešení problémů, které označuje *PASPSA*[111]:

1. Percepce – vnímání problému (P).
2. Analýza problému (A).
3. Syntéza a produkce návrhů řešení (SP).
4. Selekce – postupný výběr nejvhodnějších řešení (S).
5. Aplikace – uplatnění nápadů a překonání překážek (A).

Jako poslední uvedeme fáze podle "otce heuristiky", G. Polyi, který řešení problému zjednodušuje na 4 pracovní fáze[112]:

1. Porozumění problému.
2. Vytvoření plánu.
3. Realizování plánu.
4. Posouzení získaného řešení.

Praktickým využitím těchto postupů bylo zjištěno, že je zapotřebí dodržovat následující *zásady:*

- Zásada uvědomování si cíle (je potřeba vědět, z čeho vycházíme a čeho chceme dosáhnout).
- Zásada logické postupnosti (nejdříve důkladná analýza informací, kombinace jednotlivých prvků).
- Zásada klidného postupu (řešíme bez uspěchání, od jednoho kroku ke druhému postupujeme rozvážně, pokud dojde k nedorozumění, vrátíme se o krok zpět a vše znova promyslíme).
- Zásada pružného myšlení.
- Zásada dodržování správné duševní hygieny (student může být z řešení unaven, přejde na jinou činnost a vrátí se k řešení později).

Mezi *základní principy* účinného postupu při řešení problémů patří princip aktivního učení, princip motivace, radosti, zážitků z učení, princip následnosti jednotlivých fází řešení problému a princip samostatnosti. Pro výuku tímto způsobem je velmi významné, že chyba,

---

110 MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5. s.113

111 PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4834-8. s. 68

112 POLYA, George. *How to solve it*. London (UK): Penguin Books, 1990. ISBN 978-0-14-012499-6.

či drobný neúspěch není projevem žákovy neschopnosti, nýbrž důvodem k hledání nových přístupů a řešení.

Řešení problémových úloh je velice oblíbenou činností např. ve vyučování matematice. Více se na tento okruh zaměříme v kapitole 3.4.

3.3 Badatelsky orientované vyučování

Badatelsky orientované vyučování je systémem kladení otázek. Vychází z konstruktivistických teorií a je založeno na získávání znalostí pomocí řešení problémů a systémem kladení otázek. Papáček řadí badatelsky orientované vyučování mezi aktivizující metody problémového vyučování a charakterizuje funkci učitele jako *„zasvěceného průvodce při řešení problému a vede přitom žáka postupem obdobným jaký je běžný při reálném výzkumu“*[113] a konkretizuje: *„Od formulace hypotéz (Jak co asi funguje? Jakou to má roli …?), přes konstrukci metod řešení (Jak to zjistit …?), přes získání výsledků zjištěných metodikou, na které se žáci s učitelem dohodli (Co jsme pozorovali? Co jsme změřili? Co nám ukázal ten který experiment?) a jejich diskusi (Co může být jinak? Co lze formulovat jinak? Co tomu říkají informace na internetu a v literatuře?) až k závěrům (Takhle to je. Takhle by to mohlo být…)*“.

Když se Papáček zaměřuje na žáka, popisuje, že toto vyučování umožňuje *„relativně samostatně a v kooperaci se spolužáky formulovat problém prodiskutovaným způsobem, a tak aktivně získávat potřebné kompetence, znalosti, dovednosti a komunikační schopnosti“*[113].

V českých školách se často vyskytují skupiny učitelů, kteří se věnují tomuto konstruktivistickému vzdělávacímu a vyučovacímu směru. Toto „bádání, objevování, zkoumání, hledání pravdy" ve vyučování se často označuje zkratkou BOV („badatelsky orientované vyučování”). Poslední dobou se užívá také anglické zkratky IBE („inquiry-based education"), v přírodních vědách IBSE („inquiry-based science education”).

Skupiny nadšených učitelů se začaly rozrůstat a vznikly tak různé projekty jako např. český projekt Heuréka. Ten vznikl v roce 1991 z iniciativy několika kantorů, kteří se snaží o změnu přístupu žáků i učitelů k výuce fyziky. Tento projekt je zaměřen přímo na učitele,

[113] PAPÁČEK, M. Badatelsky orientované přírodovědné vyučování cesta pro biologické vzdělávání generací Y, Z a alfa? IN *Scientia in educatione 1.*

pro které jsou pořádány víkendové semináře, na kterých se sami vyučující dostávají do pozice žáků.[114]

Projekt s podobným zaměřením vznikl také na Slovensku. Projekt „Vyhrňme si rukávy" vznikl v roce 1995 z iniciativy profesora Charpaka, držitele Nobelovy ceny za fyziku z roku 1992. Tento projekt je určený pro základní školy a zaměřuje se na podporu vyučování přírodních věd založeného na postupu vědeckého zkoumání, bádání a experimentů[115].

Dalším projektem, zaměřeným na badatelsky orientované vyučování, je evropský projekt Fibonacci, zařazený do Sedmého rámcového programu, který vznikl jako volné pokračování evropských projektů POLLEN a SINUS, které úspěšně začlenili IBSME („inquiry-based science and mathematics education" badatelsky orientované vyučování v přírodních vědách a matematice) do mnoha škol v Evropě. V rámci projektu Fibonacci bylo zřízeno 12 Referenčních center a 24 Twin center, která mají za úkol řídit další postupy zařazovacího procesu tohoto typu vyučování do škol. Jedno z Twin center, které se zaměřují na badatelsky orientovanou výuku matematiky, sídlí v České republice, konkrétně na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. V rámci tohoto Twin centra bylo do projektu zapojeno několik učitelů ze základních a středních škol, kteří pečlivě mapovali výuku a za pomoci školitelů z Twin centra tvořili badatelsky orientované pracovní listy a vyzkoušeli je poté ve svých třídách. Katedra matematiky Univerzity Palackého v Olomouci byla oslovena českým Twin centrem ke spolupráci. V rámci této spolupráce jsme se zúčastnili seminářů, které byly pořádány pro učitele participující na projektu. Tyto zkušenosti pro nás byly velmi přínosné, neboť jsme měli možnost se aktivně zapojit to práce učitelů z praxe, kteří spolu se školiteli z Twin centra ukázali na několika případech, že metoda badatelsky orientovaného vyučování je pro vyučování matematice velmi přínosná.[116]

[114] Více informací na http://kdf.mff.cuni.cz/heureka/
[115] Více informací na pdf.truni.sk/vsr
[116] Více informací na http://www.fibonacci-project.eu/ nebo http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/fibo.html

3.4 Heuristické přístupy ve vyučování matematice

V této poslední kapitole bychom rádi zmínili ty heuristické přístupy, které byly již od svých autorů zpracovány na vyučování matematice.

Využití heuristických metod ve vyučování v matematice dokresluje také jeden z bodů již zmiňovaného desatera konstruktivismu Hejného a Kuřiny o řešení úloh: *„Podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení a jejich dokazování. Popsaný proces může probíhat v matematice samé nebo v libovolné jiné oblasti lidského poznání. Tvorba matematických modelů reality je pak jeho součástí*.“[117]

O rozvoj heuristiky v oblasti matematiky se zasloužili např. ve starověku Pappus, ve středověku Descartes a Leibniz a v 1. polovině 19. století český matematik a filozof Bolzano. Jejich úvahy byly zatím jen v úzkém okruhu. O rozšíření idejí i mezi učitele matematiky se zasloužil až George Polya, který psal o heuristice srozumitelným způsobem. Po zveřejnění jeho knihy byl poté zaznamenán velký nárůst zájmu o využití heuristiky v matematice.[118]

3.4.1 Heuristická metoda G. Polyi

George Polya, maďarský matematik přednášející na Standfordské univerzitě, je jak již bylo řečeno, považován za „otce heuristiky“. Jeho heuristika vychází do určité míry ze Sokratovy a kartézské heuristiky, které tvoří základy heurologie. Za jeho základní dílo je dodnes považována kniha z roku 1945 „How to solve it?“ („Jak to řešit?“), kde již načrtl základní myšlenky této metody. Dle Polyi není základem vyučování matematiky snaha naučit žáka daný úkol řešit, ale vést jej k pochopení způsobu řešení. Z metodického hlediska zdůraznil, že matematika, zvláště taková jako představuje Eukleides, je systematická deduktivní věda, zatímco matematika v procesu tvoření se stává vědou experimentální. Upozornil, že netvoříme žádný nový přístup, neboť oba tyto aspekty jsou tak staré, jako matematika sama. Dle Polyi je základní metodickou zásadou vyučování ukázat matematiku ve stavu zrodu, ukázat procesy a způsoby jejího tvoření.[119]

[117] HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál, 2001. ISBN 80-7178-581-4. s. 194.
[118] KOPKA, Jan. *Umění řešit matematické problémy*. Praha: HAV, 2013. ISBN 978-80-903625-5-0.
[119] ZELINA, Miron. *Tvořivost v matematice*. Olomouc: Krajský pedagogický ústav Ostrava, 1990. ISBN 80-900158-9-1.

Základní je dle Polyi rozlišení *dvou typů úloh*:

a, úlohy na dokazování, zdůvodňování, které rozvíjí hodnotící myšlení a úsudek (cílem je ukázat pravdivost nebo nepravdivost nějakého tvrzení);

b, úlohy na hledání a nacházení řešení, konstruování, objevování, identifikování apod.,

přičemž heuristickou metodu aplikoval více na druhý typ úlohy, tj. na úkoly, ve kterých se hledá něco neznámého.

Celou heuristickou metodu i metodiku tvořivého vyučování a její realizaci v praxi opírá o tři základní zásady:

1. aktivita žáka – žák musí sám objevovat, hledat, řešit;
2. motivace – žák řešením tohoto typu úloh heuristickou metodou získává vlastní, vnitřní zájem o řešení – formuje se vnitřní motivace;
3. dodržování pěti zásadních kroků při řešení úloh – žák organizuje své myšlení, učí se regulaci a auto-regulaci při řešení problémů a tvořivé práci.

Autor dále rozvíjí a popisuje pět zásadních kroků při řešení úloh typu objevování:

1. vymezení a porozumění problému (úloze);
2. vypracování plánu, řešení;
3. realizace plánu;
4. řešení, nalezení výsledku řešení;
5. reflexe – úvaha nad řešením, možnostmi využití, použití apod.

Pro jednotlivé kroky heuristické metody vytvořil pomocné otázky[120]. U první kroku *vymezení a porozumění problému* se ptá: „Co je potřeba? Co víme? Co máme v úloze dané? Jaké jsou podmínky? Co nevíme? Jakého druhu je tato úloha? Má spojitost s nějakou nám již známou úlohou?“ Dále se ptáme na klíčová fakta a *vytváříme plán řešení*. Ptáme se: „Je to všeobecný typ úlohy? Nebo specifický? Můžeme nejdříve řešit část úlohy? Nemůžeme úlohu zformulovat jinak? Pokusme se zformulovat kroky řešení…“.

Třetí fází je *realizace plánu* a Polya tvrdí, že dobře vypracovaný plán je programem, který postupuje od známých věcí k neznámým. Po každém kroku je dobré se vrátit a zkoumat, zda je dobře provedený. Ve čtvrtém kroku vypadá, že výsledek je už dobrý a dokonalý, neboť třetím krokem vše prověřujeme. Přesto Polya doporučuje otázku: „Jak můžeme výsledek dokázat? Jak můžeme dokázat jeho pravdivost? Můžeme k tomuto výsledku dojít i jiným způsobem? Bylo potřeba hledat všechna řešení?“. V posledním kroku, *reflexi nad způsobem řešení*,

[120] ZELINA, Miron. *Tvořivost v matematice*. Olomouc: Krajský pedagogický ústav Ostrava, 1990. ISBN 80-900158-9-1.

provedeme komentování jednotlivých kroků a fixujeme tak metodu řešení, vhodné otázky při jednotlivých krocích, apod.

Pro metodiku vyučování matematiky platí dodnes Polyovy zásady efektivní výuky matematiky - tzv. „*desatero*“ pro učitele matematiky[121]:

1, Buď fascinovaný, měj zájem o to, co učíš.

2, Dobře ovládej svůj předmět! Učitel nemůže dobře a zajímavě vykládat a vysvětlovat něco, čemu sám nerozumí.

3, Pamatuj, že nejlepším způsobem, jak se naučit cokoliv, je objevování této věci v průběhu vyučování.

4, Použij empatii! Uč se číst z tváře žáků jejich přání, pocity těžkosti a problémy, vžij se do jejich postavení a změň hned metodu, taktiku, když pozoruješ, že ti žáci nerozumějí nebo tě nesledují.

5, Poskytuj žákům nejen poznatky, ale také postoje, lásku, dovednosti, návyky metodické práce. Dobrý učitel je ten, kdo vede žáky tak, aby byli sami dobrými učiteli.

6, Uč žáky odhalovat řešení – veď je tím k odvaze myšlení, k užívání intuice pro odhady založené na analogii a indukci.

7, Nauč žáky umění odůvodňování, argumentace a dokazování pravdy.

8, Uč je takovým metodám řešení, které mohou použít i při řešení jiných úloh.

9, Neodhal hned celé tajemství úlohy, jejího řešení, ale odkrývej postupně, aby úloha svou dramatičností motivovala žáky.

10, Neříkej vždycky dopředu svůj názor, úsudek, postoje a hodnocení. Přenechej to žákům, tím dosáhneš jejich zainteresování na řešení i vyššího stupně tvořivosti ve všech krocích heuristické metody.

[121] ZELINA, Miron. *Tvořivost v matematice*. Olomouc: Krajský pedagogický ústav Ostrava, 1990. ISBN 80-900158-9-1. s. 71

3.4.2 Problémové úlohy ve vyučování matematice dle Zeliny

Zelina vycházel ve své koncepci heuristických metod z Polyovy heuristiky. Svou koncepci však posunul dále a zaměřil se na řešení problémových úloh.

Vzhledem k zaměřenosti Zelinovy koncepce na problémové úlohy ve vyučování matematice si dovolíme netradičně začít výsledky malé ankety.

Nezávislým respondentům dle náhodného výběru byla položena otázka, co si představují pod pojmem problémová úloha v kontextu vyučování matematice. Z odpovědí vybíráme ty názorově nejčastější, které respondenti uvedli:

„Když zavzpomínám na dobu, kdy v mém rozvrhu byla ještě matematika, tak si pod pojmem problémová úloha vybavím nějakou slovní úlohu, na jejíž řešení jsem nemohla přijít...“ (studentka VŠ, 24 let)

„Buď úloha, ve které se řeší nějaký problém, něco neznámého, nebo úloha, která nejde vyřešit...“ (studentka DSP, obor Pedagogika, 24 let)

„…úloha, která vyžaduje víc než naučené vědomosti, nějaký nový postup (algoritmus) řešení, kde žáci použijí svou kreativitu.“ (studentka DSP, obor Pedagogika, 26 let)

„Úloha, při jejímž řešení žáci musí být kreativní a jít na to po svém.“ (učitelka na gymnáziu, 26 let)

„Jasně, nestačí jen něco dosadit a vypočítat, musí sami přijít na to, jak problém vyřešit, tzn. zjistit, jak z příkladu udělat normální příklad, něco upravit, přidat, ubrat, atd. prostě kreativně myslet“ (student VŠ, 26 let)

„pro mě problémová úloha v MATEMATICE = téměř jakákoliv úloha (důkaz:“naše Janička už má 5 zubů“ já: „ je, to je milé, takže má 4 nahoře a 3 dole, že?“) (žena na mateřské dovolené, 30 let)

Z výsledků vyplývá, že pojem problémová úloha není široké veřejnosti zcela jasný a každý rozumí pod tímto pojmem něco jiného. Pro některé je problémovou úlohou složitější úloha, pro někoho dokonce triviální matematická úloha může být problémovou. Někteří uvedli, že při řešení problémové úlohy je nutná kreativita - tvořivost žáků a studentů.

Na tomto základě stavěl svou teorii a taxonomie také Zelina. Podnětem pro jeho úvahy o sestavení taxonomie problémových - tvořivých úloh byla zejména práce Gehlbacha (1987), který rozděluje tvořivé úlohy na proces a produkt a prokládá tento rozměr dimenzí otevřenosti a zavřenosti (rutiny), divergencí a konvergencí, algoritmy a heuristikou. Na základě kombinací těchto znaků dostává 4 základní možnosti: [122]

1, rutinní proces-rutinní produkt (RP-RP)

Tato kombinace vede k dobrému vzoru bezproblémové instrukce, ve školách se užívá především při shromažďování informací. Jde o typ uzavřené úlohy (přesně definované), dává přesnou instrukci, co má student udělat a k čemu dospět. Student k řešení využije známý, rutinní postup a dojde k jedinému výsledku. Míra tvořivosti je minimální.

Př. *„Pomocí Pythagorovy věty vypočítej délku přepony, když jsou délky stran odvěsen 3 cm a 4 cm."*

2, otevřený proces – rutinní produkt (OP-RP)

K tomuto typu patří většina úloh v matematice (pokud nepočítáme úlohy typu RP-RP). Jejich pomocí se student učí různým variantám řešení úloh (procvičení fluence a flexibility myšlení). Úlohy umožňují odhalit různé proměnné a vztahy mezi nimi, přispívají k osvojování metod (zvláště při zpětné vazbě – jakými metodami jste to řešili? Určete jejich výhody a nevýhody). V neposlední řadě mají tyto úlohy vysokou motivační hodnotu.

Příkladem může být známá úloha, kterou geniálně řešil Gaus.

„Najdi součet čísel od 1 do 100." (součet je jen jeden, ale metod výpočtu je mnohem více).

Př. *„Máš čísla od 1 do 5. Vytvoř jejich kombinace tak, abys dostal sčítáním 7."* nebo *„Ukaž, za jakých podmínek je možno sestrojit rovnoramenný trojúhelník."*

Učitel může vytvářet tyto úlohy transformací úloh RP-RP na typ OP-RP, a aby vyžadoval co nejvíce způsobů, kterými se dá dojít k výsledku.

3, rutinní proces – otevřený produkt (RP-OP)

V této kombinaci je typické opakování pokusů stejnou metodou (podmínky jsou stejné, mění se pokusný materiál). V matematice je obtížné najít příklady tohoto typu, protože chceme-li v matematice dojít k novému produktu, používáme i nové postupy. Principem tohoto typu úloh je, že na základě mechanických operací a postupů docházíme k různým poznatkům.

Př. *„Narýsujte přímku, která prochází bodem A."* (Student má uzavřený proces rýsování přímky, ale existuje nekonečně mnoho přímek, procházejících bodem A.)

[122] ZELINA, Miron. *Tvořivost v matematice*. Olomouc: Krajský pedagogický ústav Ostrava, 1990. ISBN 80-900158-9-1.

Řadíme zde i triviální úlohy, které by mohly být typem RP-RP, ale skrývají v sobě alespoň malou dávku divergence.

Např. *„Kolik výsledků menších než deset můžeme dostat sčítáním čísel od 1 do 10?“*

4, Otevřený proces – otevřený produkt (OP-OP)

Úlohy tohoto typu tvoří vrchol úloh rozvíjející tvořivost. Učitel takovou úlohu nestrukturuje (neudává, co a jakým stylem je nutno řešit, k jakému výsledku mají studenti dojít).

Př. *„Najděte 3 prvočísla menší než 100.“* Je otevřen jak proces (můžeme hledat různými způsoby), tak produkt (existuje zde více správných řešení).

Př. „Najděte číslo*, jehož součet dělitelů (krom sebe sama) dává to dané číslo - např. 6 = 1+2+3. Jde o tzv. dokonalá čísla.“*

Zelina k uvedenému doplňuje uzavřenost nebo otevřenost při vymezení problému samotného na základě analýzy heuristických schémat. Poté uvádí taxonomii tvořivých úloh kombinací možností tvůrčí náplně (obsahu) a potencionality úloh, problémů, cvičení a otázek. Zelina poté úlohy třídí podle stupně tvořivosti:

1, tvořivost nejnižšího stupně (RP-RP-RP) – úlohy mechanické, algoritmicky dané, směřující k jedinému správnému výsledku;

2, tvořivost druhého stupně (RP-RP-OP; RP-OP-RP;OP-RP-RP) - úlohy na využití reprodukce, aplikace známých znalostí a dovedností;

3, tvořivost třetího stupně se projevuje v úlohách typu RP-OP-OP, OP-RP-OP, OP-OP-RP – je zde při řešení nutné užití divergentního myšlení a variabilních postupů;

4, nejvyšší stupeň tvořivosti je v úlohách typu OP-OP-OP, jejichž řešení předpokládá otevřenost k využití divergentní produkce u nalezení a vymezení problému i u variability v použití metod a otevřenost na straně výsledku.[123]

Důležitým poznatkem je v této chvíli fakt, že problémová úloha se stává aktivizačním prostředkem. Tyto úlohy ve všech stupních se mohou zadávat ve všech fázích výuky, ale je nutné, aby na jednotlivé typy úloh byli žáci dostatečně připraveni. Poté při řešení problémové úlohy student získává jak nové poznatky, nový způsob činnosti, tak také radost ze své práce.

[123] ZELINA, Miron. *Tvořivost v matematice*.Olomouc: Krajský pedagogický ústav Ostrava, 1990. ISBN 80-900158-9-1. s. 40 -56.

Problémové úlohy lze samozřejmě také řešit postupem heuristickým. Zelina pro tuto metodu uvedl schéma, jehož akronym je DITOR. Základní myšlenkou jsou Polyovy zásady a Lernerovy vědecko-výzkumné metody řešení problémů. Systém je založen na 5 krocích: [124]

1, D - dáváme studentům jen podněty (příklady, věty, tvrzení), která mají vzbudit jejich pozornost, které jsou zajímavé, paradoxní – vše v napojení na učební látku. Žádáme, aby studenti vytvářeli úlohy a problémy, dávali otázky a úlohy. Studenti mají pocit, že řeší svoji úlohu, mají vyšší zájem o řešení. Hlavní cíl této fáze je na základě pozorované situace vytvořit problém, úlohu, zformulovat otázky.

2, I - INFORMUJ SE - rozbor zformulované otázky. Studenti analyzují, co vědí a co ne, co je ještě třeba vědět, za jakých podmínek, zda je k tomu potřeba získat nějaké informace (zjistit někde informace, zopakovat vzorce) – studenti se ptají učitele i spolužáků, co jim není jasné, které informace potřebují. Učitel je vede k samostatné práci, k používání knih, tabulek, podněcuje je k co největšímu počtu otázek.

3, T - TVOŘ - studenti mají vypracovat co nejvíce nejrozmanitějších a neobvyklých řešení – učitel si všímá, jakou metodou postupují (pokus - omyl, aplikace algoritmu, hledání nových způsobů řešení – podněcuje žáky k dalším návrhům – atmosféra je uvolněná, žádný strach z trestu nebo chyby. Důležité je také využití kooperace při hledání řešení.

4, O - OHODNOŤTE ŘEŠENÍ - vedeme studenty k hodnocení provedeného řešení - jednotlivá řešení i odpovědi jsou hodnoceny studenty (vede to k diskusi, sebehodnocení, argumentaci). Samozřejmostí je vypracování kritérií, zkoušek správnosti, metod dokazování, dokazování správnosti a efektivnosti jednotlivých řešení.

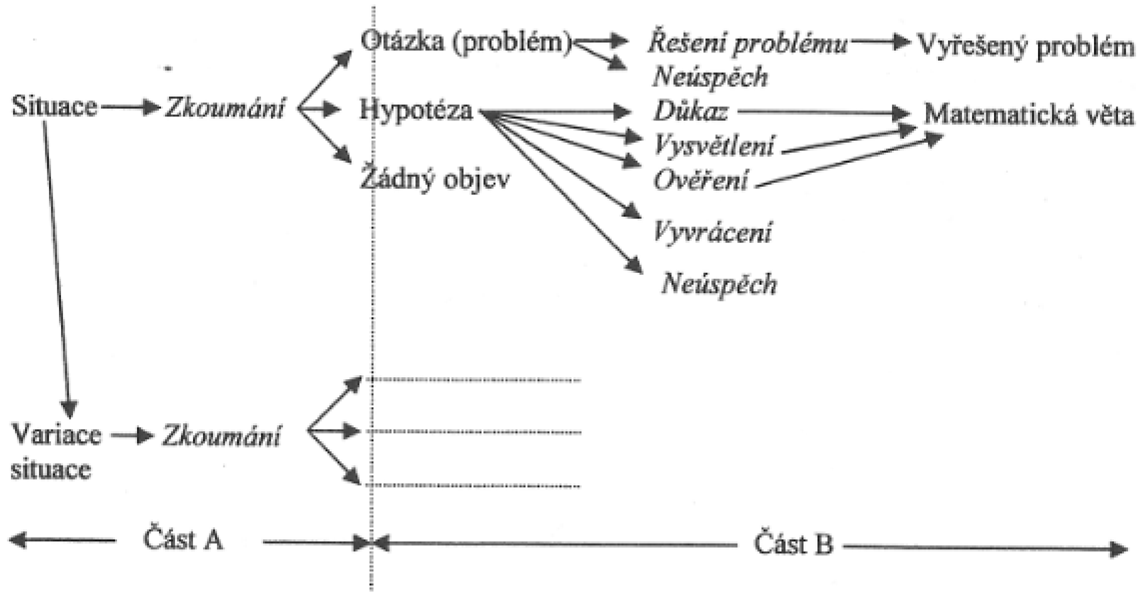
5, R - REALIZUJ V PRAXI – zde už je na místě fixace zkušenosti a poznatku. Dochází k úvaze nad řešením úkolu, vyvození ponaučení z konkrétních postupů – je zde možná zpětná vazba o chybách v postupu.

Ukázku řešení pomocí tohoto postup nabízíme ve sborníku úloh (úloha 5 v oddíle 5.3).

[124] ZELINA, Miron. *Tvořivost v matematice*. Olomouc: Krajský pedagogický ústav Ostrava, 1990. ISBN 80-900158-9-1. s. 73-75.

3.4.3 Kopkův výzkumný přístup

Mezi metody, které využívají heuristických přístupů patří bezesporu výzkumný přístup prof. Jana Kopky. Ten jej popisuje nejen jako pracovní metodu, ale také metodu výukovou. Výzkumný přístup je dle autora *„nejen metoda, pomocí které může učitel matematiky učit, ale je to i metoda, pomocí které se žák nebo student může matematice učit“*[125]. Podrobněji vysvětluje tento přístup pomocí schématu (obr. 4).



Obr. 4: Proces vlastního zkoumání dle Jana Kopky

Tvorba problému na základě situace, která je bližší běžnému životu, představuje část A. Možnosti a cesty řešení představuje část B. Označení výzkumné strategie *akceptování daného* odpovídá horní části schématu. Po vyřešení problému je zajímavé situaci obměnit. Jedná se o strategii *neakceptování daného* doprovázené otázkou „A co když ne?“, které odpovídá dolní části schématu. Přemýšlivější žáci tak lépe uvidí podstatu věci. Na sebe navazující zkoumání, které vychází z obměněné situace, nazýváme *řízené objevování*. [126]

Dle Kopky[127] se při vysvětlování slova „problém“ opíráme o tři hlavní složky. V první řadě jde tedy o **výchozí situaci,** v níž popisujeme souvislosti a poskytujeme informace nebo údaje.

[125] KOPKA, Jan. *Umění řešit matematické problémy*. Praha: HAV, 2013. ISBN 978-80-903625-5-0. s. 19
[126] KOPKA, Jan. *Výzkumný přístup při výuce matematiky*. Ústí nad Labem: UJEP, 2004. ISBN 80-7042-170-3.
[127] KOPKA, Jan. *Výzkumný přístup při výuce matematiky*. Ústí nad Labem: UJEP, 2004. ISBN 80-7042-170-3.

Poté nás zajímá **cíl**, kterého chce řešitel dosáhnout a jako třetí nás zajímá **cesta** od výchozí situace k cíli, která pro řešitele může, ale také nemusí, být zřejmá či dosažitelná.
Poté podle těchto daných bodů nám mohou vzniknout čtyři druhy problémů.

1, Pokud neznáme ani jeden z těchto tří bodů (výchozí situace, cíl, cesta) máme problém.

2, Jestliže výchozí situace je přesně popsána (situace je uzavřená), cíl je přesně zadán (cíl je uzavřen) a cesta je známá, pak problém nazýváme cvičení nebo rutinní problém.
(př. Jestliže žák umí řešit lineární rovnice a je mu zadána konkrétní lineární rovnice.)

3, Jestliže výchozí situace je přesně popsána (je uzavřená), cíl je přesně zadán (je uzavřený) a cesta není známa, pak problém nazýváme skutečný problém či úloha (nebo nerutinní problém). Příkladem může být důkaz nějaké věty, která má stavbu implikace pomocí přímého důkazu.

4, „Jestliže výchozí situace je přesně popsána, cíl není přesně zadán nebo není zadán vůbec a cesta k cíli samozřejmě nemůže být známa, pak hovoříme o matematickém zkoumání.“[128]

Problémy ve školské matematice můžeme tedy rozdělit do dvou hlavních skupin: rutinní (cvičení) a nerutinní (skutečné problémy). Rutinní problém je charakterizován tím, že známe samozřejmě výchozí situaci a cíl, a také cestu, jak se z výchozí situace dostat k cíli.
Nerutinní problém je popsán tak, že známe výchozí situaci a cíl, neznáme však cestu (neznáme prostředky), jak se k cíli dostat. Tuto cestu musíme najít nebo sestrojit. Snažíme se ji objevit některou ze strategií řešení problémů.
Hranice mezi rutinními a nerutinními problémy není ostrá. V některých chvílích může být pro některého žáka daný problém rutinní, pro jiného nerutinní. Navíc se u určitého jedince může stát z nerutinního problému, např. naučením algoritmu, problém rutinní.
My se v této chvíli budeme zabývat pouze nerutinními problémy. Proces jejich řešení může obsahovat nezodpovězené otázky, špatná zahájení či slepé konce.

Při řešení problémů vychází Kopka ze 4 fází řešení problémů dle Polyi. Zaměřuje se ale ve své práci spíše na strategie, zvláště pak právě na výzkumný přístup.

Nerutinní problémy řeší pomocí strategií. Strategie řešení problémů jsou *„nástroje, které nám pomáhají při hledání cesty k cíli.“*[129]

---

[128] KOPKA, Jan. *Hrozny problémů ve školské matematice*. Ústí nad Labem:UJEP, 1999. ISBN 80-7044-247-6.
[129] KOPKA, Jan. *Umění řešit matematické problémy*. Praha: HAV, 2013. ISBN 978-80-903625-5-0. s. 26

Mezi základní strategie řešení problémů řadí:[130]

- Strategie zobecňování a strategie konkretizace.
- Strategie experimentování a následné hledání vzorce.
- Strategie zkoumání jednodušších případů.
- Strategie určování bližších cílů.
- Strategie použití analogického (podobného) problému.
- Strategie cesta zpět.
- Geometrická cesta.
- Algebraická cesta.
- Strategie pokus – omyl**.**

Základem jsou dva postupy, které tvoří pravděpodobně základ matematického myšlení - jsou to specializace (konkretizace) a zobecnění (generalizace).

Konkretizace

Pokud vyslovíme větu či problém, kde se zjevně či nezjevně vyskytuje nějaký vzorec, tak si žáci nevědí rady. V tomto případě je nejlepší provést konkretizaci - dosadíme nějaký konkrétní případ, který popisuje tuto speciální situaci obsaženou v obecnější situaci.

Zobecnění

Představuje přechod od několika konkrétních případů k množině případů, která tyto konkrétní případy zahrnuje nebo zajistí přechod do nadmnožiny. Pro matematiku je obecnost charakteristická, ač konkrétní příklady jsou možná pro studenty lákavější.

O zobecnění L. C. Larson prohlašuje „Generalization are the life-blood of mathematics“. (Zobecnění je životní krví matematiky).

[130] KOPKA, Jan. *Zkoumání ve školské pedagogice*. Ružomberok: Katolícká univerzita v Ružomberoku, 2006. ISBN 80-8084-064-4.

Dalšími strategiemi jsou:[131]

Strategie experimentování a následné hledání vzorce

Tato strategie je složena ze dvou částí – z experimentování, při kterém zapisujeme výsledky do přehledné tabulky a následného hledání zákonitosti, popř. jejího zapsání do vzorce. Důležité je zdůraznit, že experimentovat je nutné dostatečně dlouho.

Strategie zkoumání jednodušších případů

Pokud daný problém neumíme vyřešit, pak např. postupným vypouštěním podmínek, které jsou v něm obsaženy, si problém zjednodušíme do takové fáze, že jej vyřešíme. Poté postupně opět všechny podmínky přidáme.

Strategie určování bližších cílů

Pokud si určíme bližší cíle, kterých postupně dosáhneme, mohou nás dovést až k řešení původního problému.

Strategie použití analogického (podobného) problému

Velmi oblíbená strategie u vyučujících v praxi. Analogický problém vznikne např. změnou číselného zadání, zatímco kontext úlohy zůstává stejný.

Strategie cesta zpět

Strategie často používaná např. v geometrii při rozboru konstrukční úlohy. Bohužel touto strategií nemusíme vždy nalézt celou cestu, která vede ke správnému řešení.

Geometrická cesta

Nebo–li strategie grafického znázornění. Je to velmi oblíbená strategie, neboť dovoluje si rychle vytvořit názornou geometrickou představu.

Algebraická cesta

Algebraická cesta, jinak nazývaná také jako strategie sestavení rovnice nebo soustavy rovnic, je často užívanou cestou při řešení mnoha matematických problémů.

[131] KOPKA, Jan. *Zkoumání ve školské pedagogice*. Ružomberok: Katolícká univerzita v Ružomberoku, 2006. ISBN 80-8084-064-4.

Strategie pokus – omyl

Jedná se o nesystematické experimentování. Je to nejjednodušší možná metoda, ale ne vždy vede k cíli. Zdokonalení této strategie je *Strategie odhad, ověření, oprava*, kdy je již vhodné své experimenty vkládat do tabulky.

Mezi základní strategie[132] – tzv. výzkumné, řadí systematické experimentování, pokus – omyl, strategii odhad – ověření – oprava, algebraickou a geometrickou cestu.
K tomu dodává, že zpravidla se neužívá jen jedna strategie, ale spíše jejich kombinace.

Kopka ve svých dílech rozebírá jednotlivé matematické úlohy a jejich řešení pomocí různých strategií. Využívá také metody generovaných problémů, tzn. že po vyřešení problému můžeme vytvářet nové problémy, které jsou podobné tomu původnímu. Vytváří se tedy tzv. *hrozen problémů* a metodu označuje jako metodu vytváření hroznů problémů[133].

---

[132] KOPKA, Jan. *Umění řešit matematické problémy*. Praha: HAV, 2013. ISBN 978-80-903625-5-0.
[133] KOPKA, Jan. *Hrozny problémů ve školské matematice*. Ústí nad Labem: UJEP, 1999. ISBN 80-7044-247-6.

II. EMPIRICKÁ ČÁST

4 VÝZKUMNÉ ŠETŘENÍ

Základem výzkumného šetření je kvalitativní analýza žákovských řešení slovních úloh problémového charakteru. Formou nestandardizovaného didaktického testu byly zjištěny strategie řešení slovních úloh u žáků základních a středních škol a studentů vysoké školy. Obsahem výzkumu je komparace těchto zvolených strategií doprovázená ukázkami jednotlivých řešení žáků a studentů. Tato kvalitativní analýza je doplněna shrnutím ve formě tabulek, grafů a zhodnocením závěru výzkumu.

4.1 Cíle a dílčí cíle výzkumného šetření

Základním cílem empirické části disertační práce je zjistit volbu strategií žáků a studentů při řešení slovních úloh.

Dílčí cíle empirické části jsou:

- zjistit volbu strategií žáků základní školy při řešení slovních úloh;
- zjistit volbu strategií žáků střední školy při řešení slovních úloh;
- zjistit volbu strategií studentů vysoké školy při řešení slovních úloh;
- komparovat volby strategií podle stupně školy.

Dílčím cílem empirické části práce je také vytvoření sborníku heuristických úloh.

4.2 Metody výzkumného šetření

Klíčový problém výzkumného šetření tvoří otázka, zda volba strategií řešení slovních úloh je závislá na stupni vzdělání. Výzkumné šetření uskutečněné v rámci disertační práce je založeno na kvalitativním srovnávání jednotlivých užitých strategií doplněné o závěrečné shrnující tabulky.

Formou nestandardizovaného didaktického testu byly zjištěny strategie řešení slovních úloh u žáků základních a středních škol a studentů vysoké školy. Do tohoto nestandardizovaného

didaktického testu byly zařazeny tři matematické slovní úlohy s problémovým charakterem. Výběr úloh byl konzultován s předními odborníky, prof. Hejným a prof. Molnárem.
K vyřešení zadaných úloh pomocí zvolené strategie postačuje znalost učiva nižších ročníků základní školy.

Nestandardizovaný didaktický test byl nejdříve ověřen předvýzkumem realizovaným na základní škole. Po vyhodnocení předvýzkumu byl upraven počet úloh.

4.3 Zadání úloh a řešení

Zadání:

Vyřeš následující úkoly (zkus najít více možností řešení, pokud je to možné):

1, Farmář pěstuje zelí vždy na čtvercovém záhonu. Tento rok má na svém čtvercovém záhonu o 23 hlávek více než loňský rok. Kolik hlávek zelí pěstuje letos?

2, V šatně bylo 62 bot a 22 čepic. Kolik žáků bylo ve škole bez čepice?

3, Ve školním klubu jsou čtyřnohé a trojnohé židličky. Dohromady je tam 66 nohou. Kolik je tam trojnohých a kolik čtyřnohých židliček?

Řešení:

Řešení u jednotlivých úloh provedeme vybranou strategií.

4.3.1 Zadání a řešení úlohy 1

Zadání úlohy 1:

1, Farmář pěstuje zelí vždy na čtvercovém záhonu. Tento rok má na svém čtvercovém záhonu o 23 hlávek více než loňský rok. Kolik hlávek zelí pěstuje letos?[134]

Rozbor: Tuto úlohu řadíme mezi úlohy problémové a můžeme říci, že byla ze zvolených úloh v didaktickém testu nejobtížnější. Žáci mohli řešit danou úlohou kteroukoliv metodou či strategií. Pokud si s touto úlohou žáci nevěděli rady, byli navedeni heuristickým rozhovorem. Uvádíme autentickou ukázku navedení žáků základní školy (6. a 7. ročník) na aritmetickou a geometrickou cestu řešení[135].

Vybrané řešení:

Návod na aritmetickou cestu – částečný experiment

U – učitel Ž – žáci

U: Zopakujeme si, co jsou to čtvercová čísla.

Ž: Čísla, která můžeme uspořádat do čtverce.

U: Například?

Ž: Například číslo 32.

U: Jak bys uspořádal číslo 32 do čtverce? Předveď na tabuli.

Ž: (žák zjistí, že to nelze – rozkládá číslo 32 u tabule) 32 můžeme rozložit na 8.4 …

U: Jaké základní informace víme o čtverci? O délce stran čtverce?

Ž: Že jsou všechny stejně dlouhé.

U: Dobře, tak zkus znova říct nějaké čtvercové číslo

Ž: Tak to je třeba 36 – 6x6 – (zakreslí na tabuli)

[134] KOPKA, Jan. *Zkoumání ve školské pedagogice*. Ružomberok: Katolícká univerzita v Ružomberoku, 2006. ISBN 80-8084-064-4.

[135] V *praxi byla vybrána v dané situaci pouze jedna z nabídnutých navigací.*

O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O

U: Výborně, a jaká další čísla jsou čtvercová?

Ž: (žáci vyvolávají z lavic čtvercová čísla) např. 5x5 je 25, 9 je 3x3, 16, 81 … (U je zapisuje na tabuli)

U: Dobře, a jak to tedy můžeme zobecnit? Např. za pomoci písmene *a.*

Ž: *axa*

U: Výborně. A když se vrátíme k úloze 1 – co víme o záhonu zelí?

Ž: Že byl o velikosti čtverce… takže počet hlávek je *axa.*

U: Fajn. A jak je to letos oproti loňskému roku? Je tam nějaká změna?

Ž: Letos je o 23 hlávek více než loni.

U: A jak bychom to zapsali?

Ž: *axa + 23* ?

U: Správně, mohli bychom tedy zapsat (U zapíše na tabuli): *axa + 23 = b x b* za podmínky, že $a \neq b$?

Ž: Ano.

U: A jaké je tedy *a* a jaké je *b*? Co můžeme dosadit?

Ž: (žáci začínají zkoušet čtvercová čísla – U může nabídnou zapisování do přehledné tabulky – sám ji načrtne na tabuli a zapisuje zde možnosti žáků)

5x5+23 = 48.. 48 není čtvercové

6x6+23 = 59 … 59 není čtvercové…

(žáci se zastaví na čísle 100: 100+23= 123- jde vidět zklamání a rozčarování, že nepřišli na řešení)

U: (povzbudí žáky a podporuje je k dalšímu bádání, připomene, že číslem 100 přirozená čísla nekončí)

Ž: (žáci zkouší dál… po chvíli z více lavic najednou volají, že mají výsledek)

U: Výborně - pojďte zapsat výsledek na tabuli!

Ž: 11x11+23=144 a 144= 12x12

U: Výborně - a myslíte si, že lze najít ještě jiný výsledek? Nějaká jiná možnost?

Ž: (nadšeni tím, že našli řešení, zkoušejí další možnosti)

12x12+23= 167

13x13=169

U: Zkusíme si to zapsat zase do naší tabulky. Podívejte se na jednotlivé dílčí výsledky (okýnka) (většinou na to žáci přijdou sami, popř. je učitel navede: zkusme se podívat, jaké rozdíly (vzdálenosti) mezi výsledky máme – popř. učitel dodá poslední řádek zapsáním diference (Tab 1).

Ž: shrnou závěry do odpovědi

axa	1x1 =1	2x2 =4	3x3 =9	4x4 =16	5x5 =25	6x6 =36	7x7 =49	8x8 =64	9x9 =81	10x10 =100	11x11 =121	12x12 =144	13x 13= 169
axa + 23	24	27	32	39	48	59	72	87	104	123	144	167	192
Rozdíl		27-24= 3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25

Tab.1: Ukázka heuristického rozhovoru s návodem na aritmetickou cestu řešení dané úlohy

Návod na geometrickou cestu:

Řešení:

X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	X
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	X
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	X
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	X
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	X
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	X
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	X
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	X
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	X
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	X
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	X

Rozhovor:

U – učitel Ž – žáci

U: Představme si čtverec – jaká je vlastnost všech stran?

Ž: Všechny strany mají stejnou délku.

U: Výborně. Když budeme chtít zvětšit stranu *a* o 1 jednotku, jak bychom to znázornili?

Čtverec o straně *a* = 4j

O	O	O	O
O	O	O	O
O	O	O	O
O	O	O	O

Čtverec o straně a = 4+1 j

X	X	X	X	X
O	O	O	O	X
O	O	O	O	X
O	O	O	O	X
O	O	O	O	X

U: Červené křížky nám znázorňují rozšíření o 1 jednotku. Kolik nám to v tomto případě udělalo křížků (jaký je rozdíl od původního čtverce)?

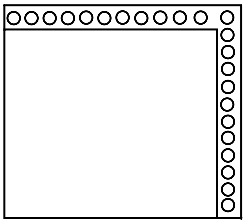
Ž: U původního čtverce 4x4 nám rozšíření strany o 1 jednotku „dalo“ 9 křížků.

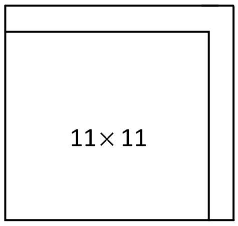
U: Dobře. A když se vrátíme k úloze – o kolik křížků - hlávek máme letos víc?

Ž: O 23 hlávek.

U: Zkuste zakreslit do čtverce o straně *a* dalších 23 hlávek.

Ž: (žáci sami zkouší)





U: Jak je zakreslíme? Jak dlouhá bude strana *a*?

Ž: 23:2 – 11,5 hlávky – takže nakreslíme 11 na každou stranu.

U: A co ta jedna hlávka – 11 + 11 je 22 - co ta 23. hlávka?

Ž: (delší pauza) … ta bude ta rohová - takže nahoře je 12 hlávek … a svisle taky!

U: O kolik jednotek - hlávek se záhon rozšířil na každé straně – v každém sloupci a řádku?

Ž: O 1 hlávku.

U: Kolik bylo tedy původně? Kolik hlávek bylo v jednom sloupci (řádku)?

Ž: 11 hlávek.

U: Kolik bylo tedy hlávek minulý rok a kolik letos?

Ž: Minulý rok jich bylo 11x11 a letos 12x12.

U: Správně.

Ž: (zapíší odpověď)

Odpověď: Farmář má letos zasazeno 144 hlávek zelí.

4.3.2 Zadání a řešení úlohy 2

Zadání úlohy 2:

2, V šatně bylo 62 bot a 22 čepic. Kolik žáků bylo ve škole bez čepice?

Rozbor: Tato slovní úloha je ze zadaných úloh nejjednodušší. Zvláště pro mladší žáky může mít problémový charakter. Volíme zde ukázku aritmetického řešení, neboť bylo ve vypracovaných didaktických testech nejčastější.

Vybrané řešení:

Počet bot … 62

Počet čepic… 22

Počet žáků bez čepic…. ?

Počet žáků…. 62:2 = 31

31 -22 = 9

Odpověď: Celkem 9 žáků bylo ve škole bez čepice.

4.3.3 Zadání a řešení úlohy 3

Zadání úlohy 3:

3, Ve školním klubu jsou čtyřnohé a trojnohé židličky. Dohromady je tam 66 nohou. Kolik je tam trojnohých a kolik čtyřnohých židliček?

Rozbor: Tato slovní úloha lze opět zařadit mezi úlohy problémové. Zde je uvedeno řešení za pomocí algebraické strategie. Toto řešení je možno považovat také za experiment vzhledem k zápisu do tabulky.

Vybrané řešení:

Počet nohou dohromady… 66

Počet trojnohých židliček… x

Počet čtyřnohých židliček …y

4x+3y=66

3.y = 66-4.x

$$y = \frac{66 - 4.x}{3}$$

x=1: 66-4=62(y=62:3=20,66)	x=7: 66-28=38 (y= 12,66)	x=13: 66-52=14(y= 4,66)
x=2: 66-8=58(y=19,33)	x=8: 66-32=34 (y=11,33)	x=14: 66-56=10(y=3,33)
x=3: 66-12=54 (y=18)	x=9: 66-36=30(y=10)	x=15: 66-60=6 (y=2)
x=4: 66-16=50 (y=16,66)	x=10: 66-40 =26 (y=8,66)	x=16: 66-64=2 (y=0,66)
x=5: 66-20=46 (y=15,33)	x=11: 66-44 =22 (y= 7,33)	x=17: 66-64 =X
x=6: 66-24 =42 (y=14)	x=12: 66-48=18 (y= 6)	

Tab. 2: Řešení úlohy 3

Odpověď: Pro počet židliček ve školním klubu je pět možností řešení:

a, jsou zde 3 čtyřnohé a 18 trojnohých;

b, je zde 6 čtyřnohých a 14 trojnohých;

c, je zde 9 čtyřnohých a 10 trojnohých;

d, je zde 12 čtyřnohých a 6 trojnohých;

e, je zde 15 čtyřnohých a 2 trojnohé.

4.4 Podmínky výzkumného šetření

Výzkumné šetření se uskutečnilo na třech stupních škol. Výzkum byl proveden na Základní škole v Tovačově a Základní škole v Rohatci, na Gymnáziu v Nymburku a u studentů oborů Učitelství 1. stupně a Učitelství 2. stupně (v kombinaci s matematikou) Univerzity Palackého v Olomouci.

Respondenti měli na vyřešení matematických úloh v didaktickém testu jednu vyučovací jednotku, tedy 45 minut. Test na základních školách a u studentů univerzity jsme zadávali osobně a po celou dobu jeho vypracovávání jsme byli přítomni. Na Gymnáziu Nymburk byl test zadán spolupracující učitelkou. V obou případech byli žáci před vypracováním poučeni, jak mají zadaný test vyplnit, úlohy byly pročteny a při neporozumění měli respondenti možnost dotazů. Žáci pracovali samostatně. Každý měl své zadání testu a řešení psali přímo do zadání.

4.4.1 Skladba vzorku respondentů

Celkový počet respondentů byl 136, z toho na základních školách se výzkumného šetření zúčastnilo 49 žáků, na gymnáziu 45 žáků a na univerzitě 42 studentů.

Respondenti nejnižšího stupně školy jsou ze dvou různých základních škol.
Předložený nestandardizovaný didaktický test vypracovávali žáci 6. a 7. ročníku Základní školy v Tovačově. Tito žáci patří svými vědomostmi v matematice do oblasti průměru (potvrzeno výsledky testování Stonožka 2013 společnosti SCIO). Žáci se běžně do výuky aktivně příliš nezapojují, nestandardní a problémové úlohy řeší velmi málo. Didaktický test pro výzkumné šetření jim byl zadán druhou vyučovací hodinu, žáci byli koncentrovaní a dobře spolupracovali.

Žáci Základní školy v Rohatci byli osloveni s vypracování didaktického testu během projektového dne, který se konal na jejich škole. Dle rozhovoru s vyučujícími žáci z této školy často řeší nestandardní a problémové úlohy ve vyučování matematice, jsou aktivnější a mají tvořivější přístup. Při vypracovávání didaktického testu měli vybraní žáci ztížené podmínky ve srovnání s žáky z Tovačova, neboť se test nepsal vzhledem k projektu ve standardní hodině matematiky.

Respondenti z Gymnázia Nymburk patří dle vyučující do oblasti průměru. Tato škola, resp. přímo zadávající učitelka, jsou zapojeni do projektu Fibonacci, který se zaměřuje na badatelsky orientované vyučování. Předpokládáme, že žáci řeší častěji problémové a nestandardní aplikační úlohy než žáci zúčastněných základních škol.

Studenti Univerzity Palackého v Olomouci, oborů Učitelství 1. stupně a Učitelství 2. stupně (v kombinaci s matematikou), měli zadán nestandardizovaný didaktický test k vypracování v rámci jedné z dílčích zkoušek studia. U studentů vysoké školy v oboru matematika je předpokládáno, že řešení problémových a nestandardních aplikačních úloh jim nezpůsobuje větší problémy.

4.5 Analýza žákovských / studentských řešení zadaných úloh

Předmětem analýzy není – v souladu s cíli výzkumu – kvantitativní posouzení úspěšnosti řešení jednotlivých úloh. Jde o kvalitativní analýzu řešitelských postupů, tzv. strategií.
Strategií řešení úlohy nazýváme *„rozhodnutí konkrétního řešitele užít při řešení posloupnost metod, o níž se domnívá, že by mohla vést k nalezení výsledku řešení dané úlohy“*[136]nebo dle Kopky *„nástroj, který nám pomáhá při hledání cesty k cíli“*[137].

Analýzu písemného řešení žáků / studentů budeme rozdělovat na jednotlivé fáze řešitelského procesu:

- Uchopení úlohy.
- Zápis zadání, znázornění úlohy.
- Řešení zvolenou strategií.
- Odpověď.

Ke každé fázi řešitelského procesu byly vybrány vhodné reprezentativní ukázky z celého vzorku, které byly analyzovány. V závěru výzkumného šetření je uveden přehledný souhrn.

4.5.1 Uchopení úlohy

Tato počáteční fáze je prvotním setkáním žáka / studenta se zadanou úlohou. Žák/student se v této fázi začíná v úloze orientovat, nachází a rozlišuje dané údaje a vztahy mezi nimi. V této fázi si uvědomuje, co je v úloze dáno a co má najít v souladu s požadavkem na řešení.

Všichni respondenti, kteří se o řešení úloh alespoň pokusili, provedli tuto počáteční fázi bez jediné chyby.

[136] TICHÁ, Marie. *K strategiím řešení úloh v učení žáků matematice na ZŠ*. Praha, 1982.
[137] KOPKA, Jan. *Umění řešit matematické problémy*. Praha: HAV, 2013. ISBN 978-80-903625-5-0. s. 26

4.5.2 Zápis zadání úlohy

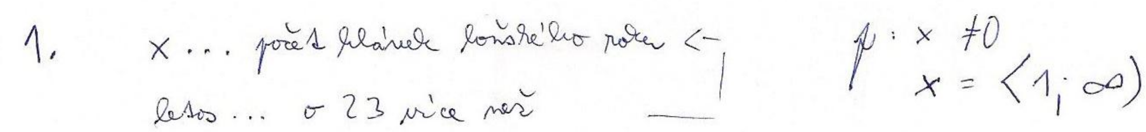
Druhým krokem je zápis zadání úlohy, tzv. matematizace, tj. žákova / studentova formulace úlohy v matematickém jazyce. Žák / student si své ujasněné představy o úloze zapíše a při následné fázi řešení z nich vychází. Transformuje zadání úlohy z přirozeného jazyka do matematické terminologie.

Přestože tento krok procesu řešení není pro nás klíčový, uvedeme několik ukázek zápisů z vypracovaných testů.

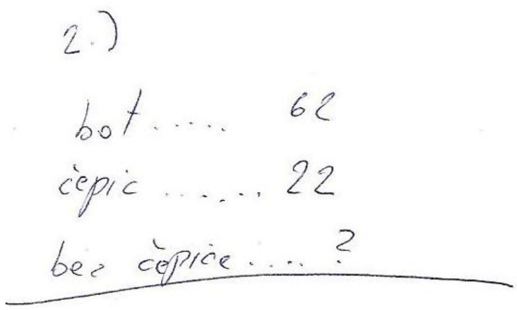
Žáci / studenti mohli volit různé druhy zápisů.

Tradiční zápis volili jak žáci základní školy, tak studenti vysoké školy.

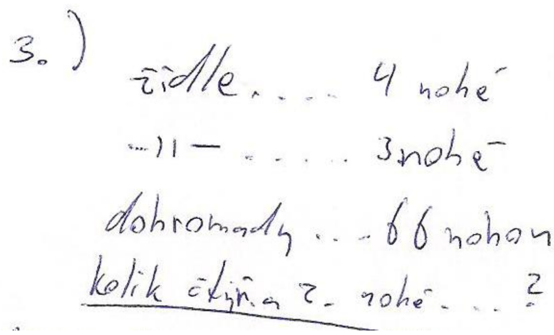
Obr. 5: Ukázka zapsání zadání studenta vysoké školy – zadání úlohy 1



Obr. 6: Ukázka zapsání zadání žáka základní školy – zadání úlohy 2

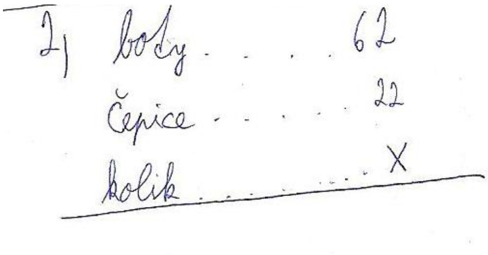


Obr. 7: Ukázka zapsání zadání žáka základní školy – zadání úlohy 3



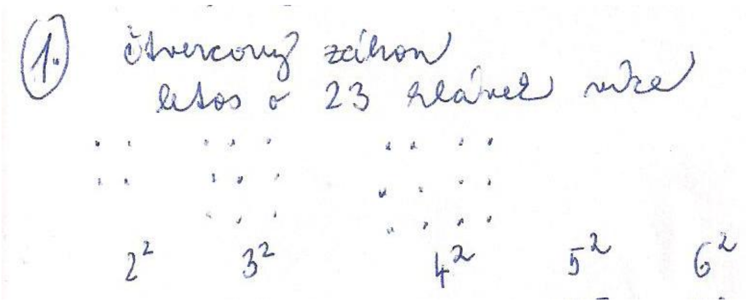
Chybně zapsaná slovní úloha může významně ovlivnit žákovo řešení. Uvádíme zde ukázku chybně zapsaného zadání u úlohy 2. Z tohoto zadání není zřejmé, co je předmětem žákova řešení.

Obr. 8: Ukázka zapsání zadání žáka základní školy – chybně zapsané zadání úlohy 2

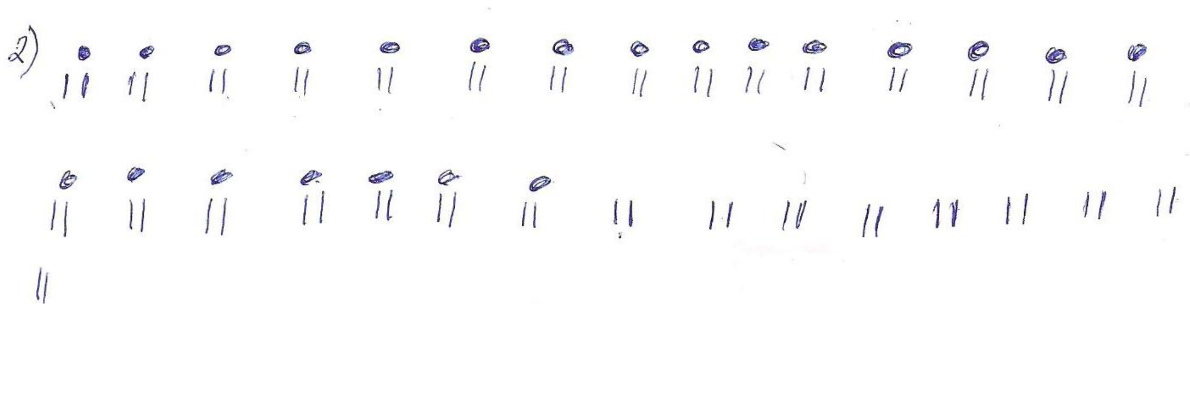


Žáci volili také nestandardní zápisy úloh, zvláště grafické a obrazové, ze kterých již odvodili řešení úlohy nebo rovnou i výsledné řešení.

Obr. 9: Ukázka zapsání zadání studenta vysoké školy – grafické znázornění zadání úlohy 1



Obr. 10: Ukázka zapsání zadání žáka základní školy – grafické znázornění zadání úlohy 2



Obr. 11: Ukázka zapsání zadání žáka základní školy – grafické znázornění zadání úlohy 3

4.5.3 Řešení úlohy vybranou strategií

V odborné literatuře je uvedeno mnoho postupů a možných řešení jednotlivých úloh. My zde pro hodnocení využijeme rozdělení strategií řešení problémových úloh dle Jana Kopky. Jednotlivá žákovská / studentská řešení jsme analyzovali a zařadili postupy řešení dle jednotlivých strategií.

Žáci z možných řešitelských strategií volili nečastěji tyto:

- *Geometrická cesta,* tzn. strategie grafického znázornění. Je to velmi oblíbená strategie, neboť dovoluje si rychle vytvořit názornou geometrickou představu.
- *Algebraická cesta,* jinak nazývaná také jako strategie sestavení rovnice nebo soustavy rovnic.
- *Strategie pokus – omyl,* tzv. nesystematické experimentování.

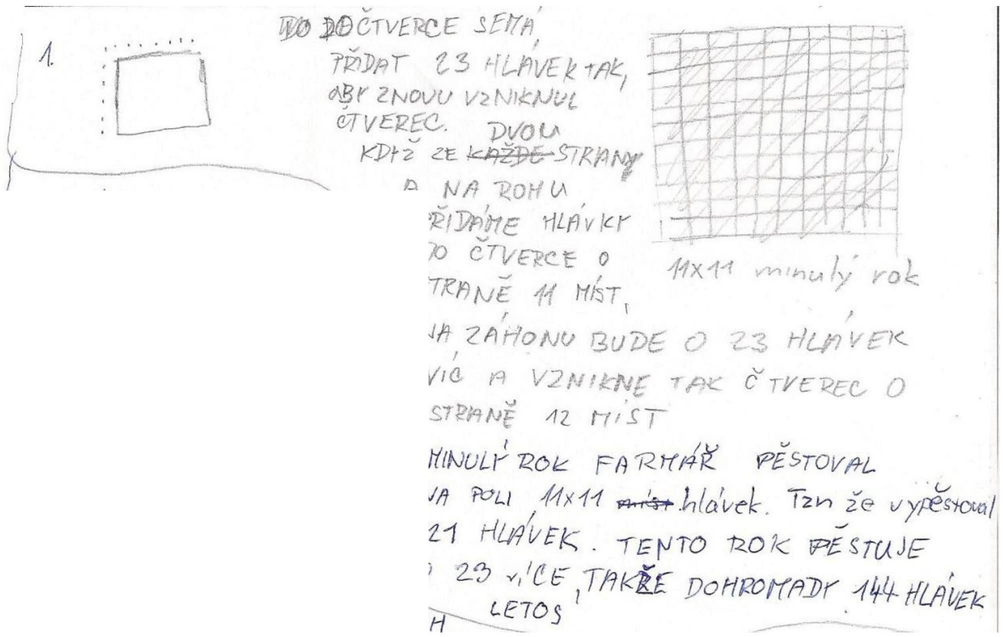
Žáci využili také řešení pomocí *aritmetické cesty* – numerického výpočtu, kde v průběhu řešení žák vypočítá na základě zápisu matematicky zformulovanou úlohu a dospěje k výsledku.

Někteří žáci také volili řešení pomocí *logické úvahy*, kde své myšlenky popsali bez matematických výpočtů.

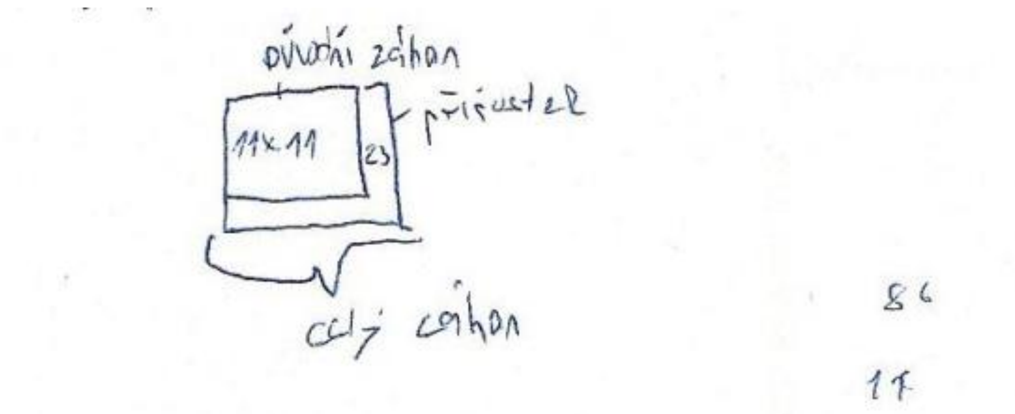
Ukázky řešení žáků a studentů rozdělujeme podle zvolených strategií na jednotlivé okruhy. Vybraná řešení žáků a studentů členíme podle jednotlivých úloh.

1, Geometrická cesta – grafické znázornění

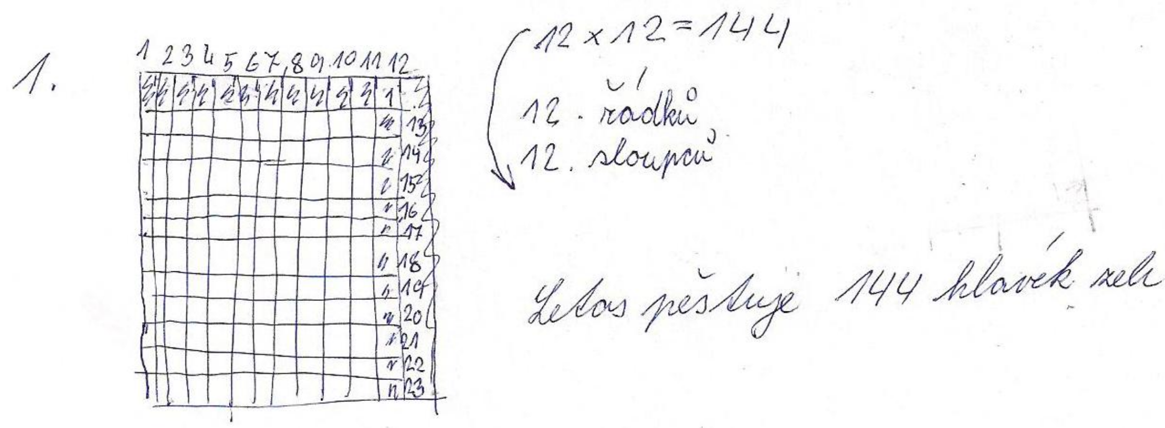
Obr. 12: Ukázka řešení pomocí geometrické cesty žáka základní školy – úloha 1

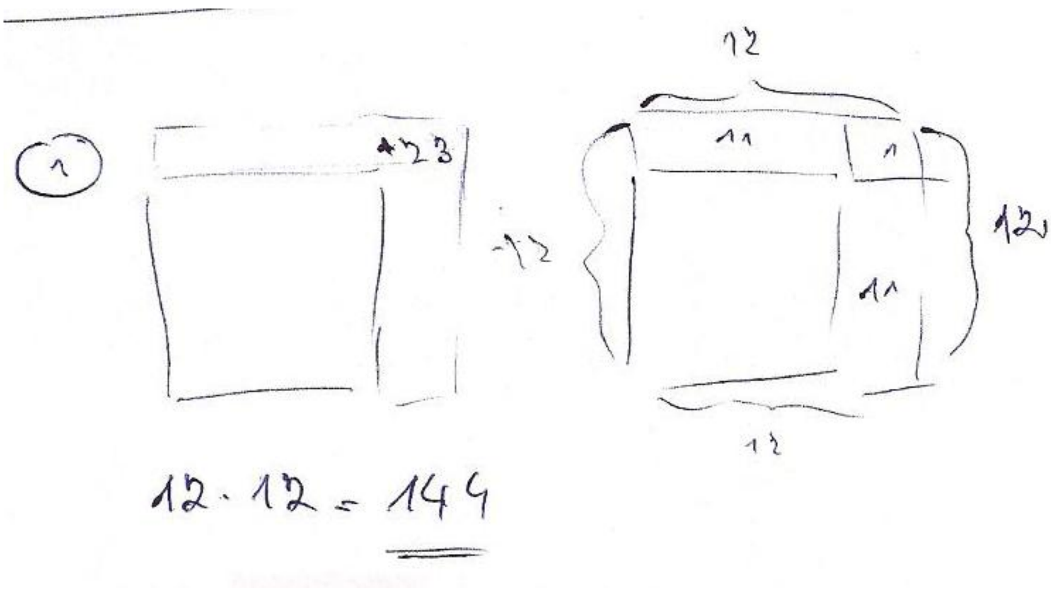


Obr. 13: Ukázka řešení pomocí geometrické cesty žáka střední školy – úloha 1



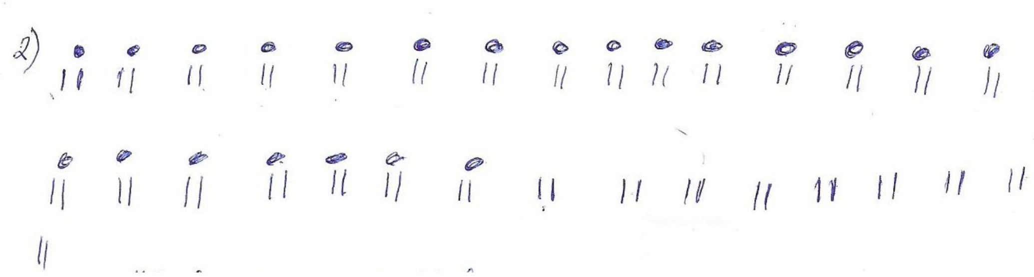
Obr. 14: Ukázka řešení pomocí geometrické cesty studentů vysoké školy – úloha 1



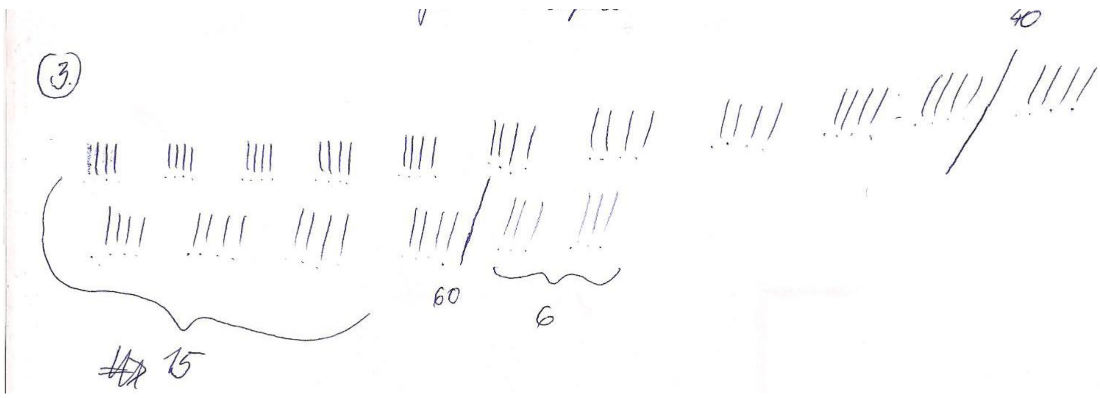


Na jednotlivých řešeních lze rozeznat, že zatímco žák základní školy si vše pečlivě načrtnul a popsal, žákům střední školy a studentům vysoké školy již stačí k vyřešení jen stručný náčrtek.

Obr. 15: Ukázka řešení pomocí geometrické cesty žáka základní školy – úloha 2



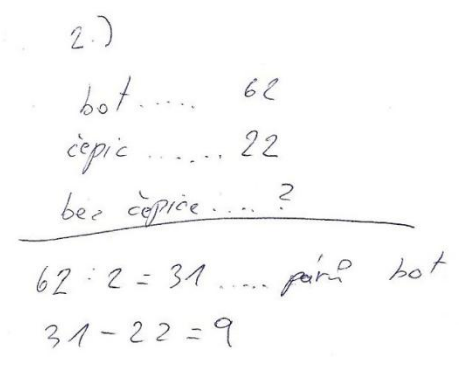
Obr. 16: Ukázka řešení pomocí geometrické cesty žáka základní školy – úloha 3



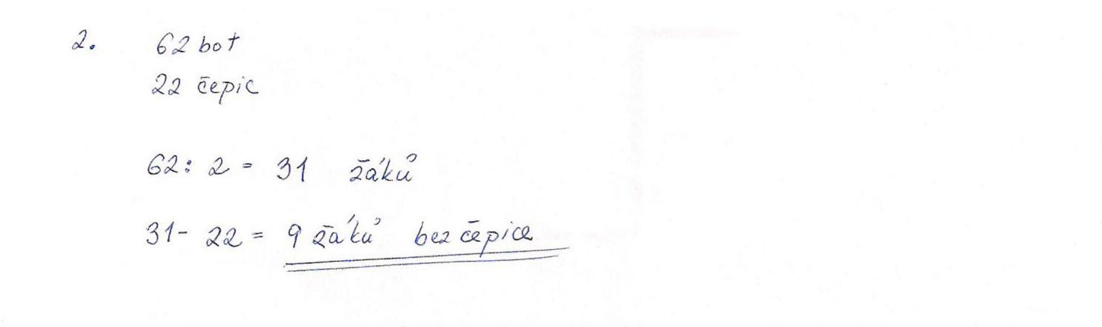
Úlohu 2 a 3 řešili geometrickou cestou pouze žáci základní školy. Žáci střední školy a studenti vysoké školy volili pro řešení těchto úloh jiné strategie.

2, Aritmetická cesta – numerický výpočet

Obr. 17: Ukázka řešení pomocí aritmetické cesty žáka základní školy – úloha 2

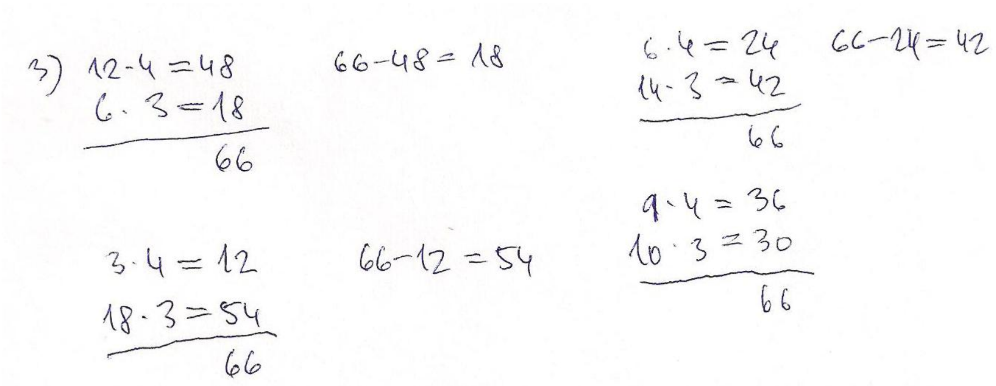

2.)
bot 62
čepic 22
bez čepice .... ?
62 : 2 = 31 .... párů bot
31 − 22 = 9

Obr. 18: Ukázka řešení pomocí aritmetické cesty studenta vysoké školy – úloha 2


2. 62 bot
22 čepic
62 : 2 = 31 žáků
31 − 22 = 9 žáků bez čepice

Při srovnání řešení pomocí numerického výpočtu jsme zjistili, že všichni žáci či studenti postupují stejným způsobem bez ohledu na stupeň vzdělání.

Obr. 19: Ukázka řešení pomocí aritmetické cesty studenta vysoké školy – úloha 3

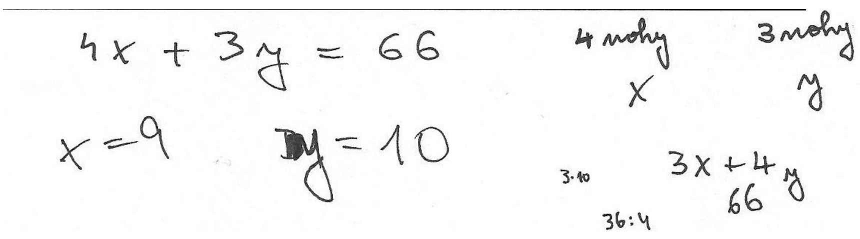

3) 12 · 4 = 48
6 · 3 = 18
66
66 − 48 = 18
6 · 4 = 24
14 · 3 = 42
66
66 − 24 = 42
3 · 4 = 12
18 · 3 = 54
66
66 − 12 = 54
9 · 4 = 36
10 · 3 = 30
66

Pro úlohu 3 si aritmetickou cestu řešení zvolilo jen minimum žáků či studentů. Většina žáků základní školy volila geometrickou cestu či experiment formou strategie pokus – omyl. Žáci střední školy a studenti vysoké školy volili algebraickou cestu nebo také experiment.

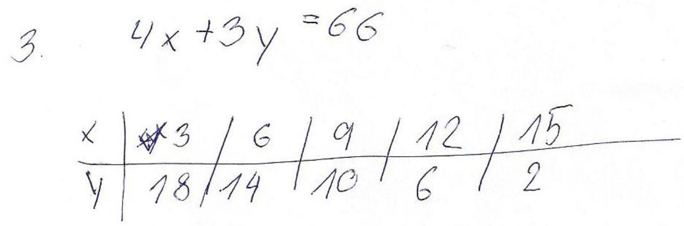
3, Algebraická cesta

Algebraickou cestu si pro řešení první či druhé úlohy nezvolili žádní žáci či studenti. Tato strategie se objevovala pouze v řešeních třetí úlohy.

Obr. 20: Ukázka řešení pomocí algebraické cesty žáka základní školy – úloha 3



Obr. 21: Ukázka řešení pomocí algebraické cesty studenta vysoké školy – úloha 3

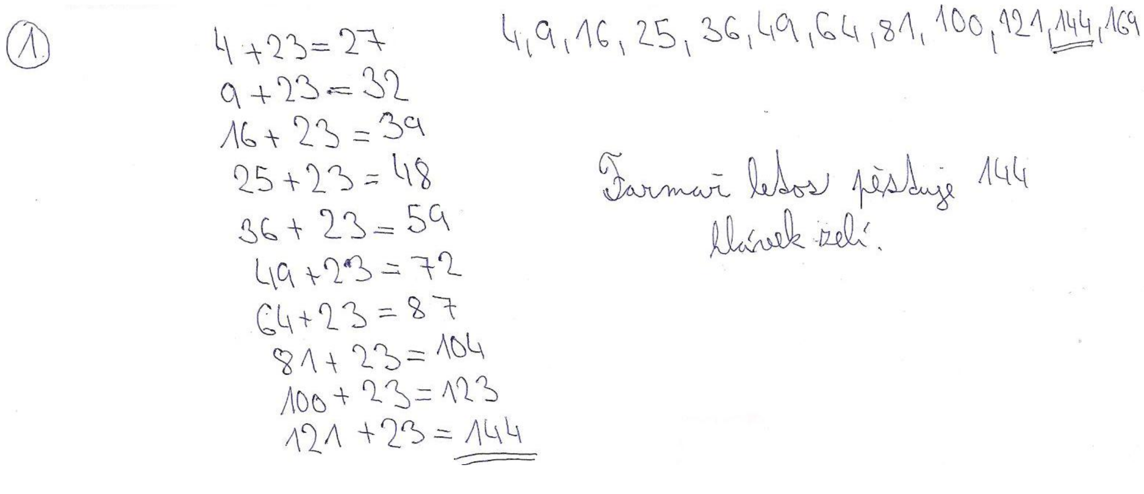


Žáci základní školy, kteří si pro řešení třetí úlohy vybrali algebraickou cestu, našli zpravidla pouze jedno správné řešení.

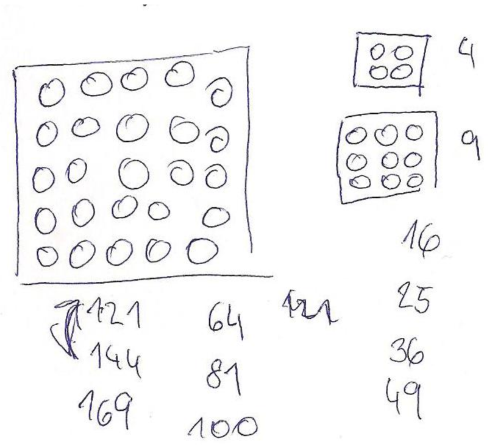
Studenti vysokých škol využili často pro zapsání algebraických řešení tabulku a došli až k pěti správným řešením.

4, Strategie pokus- omyl - experiment

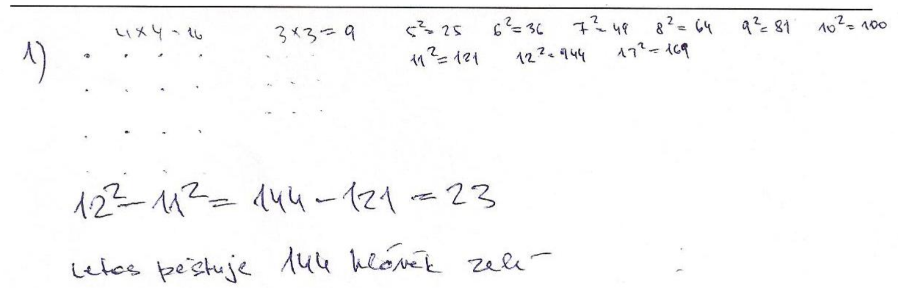
Obr. 22: Ukázka řešení pomocí experimentu žáka základní školy – úloha 1



Obr. 23: Ukázka řešení pomocí experimentu žáka střední školy – úloha 1

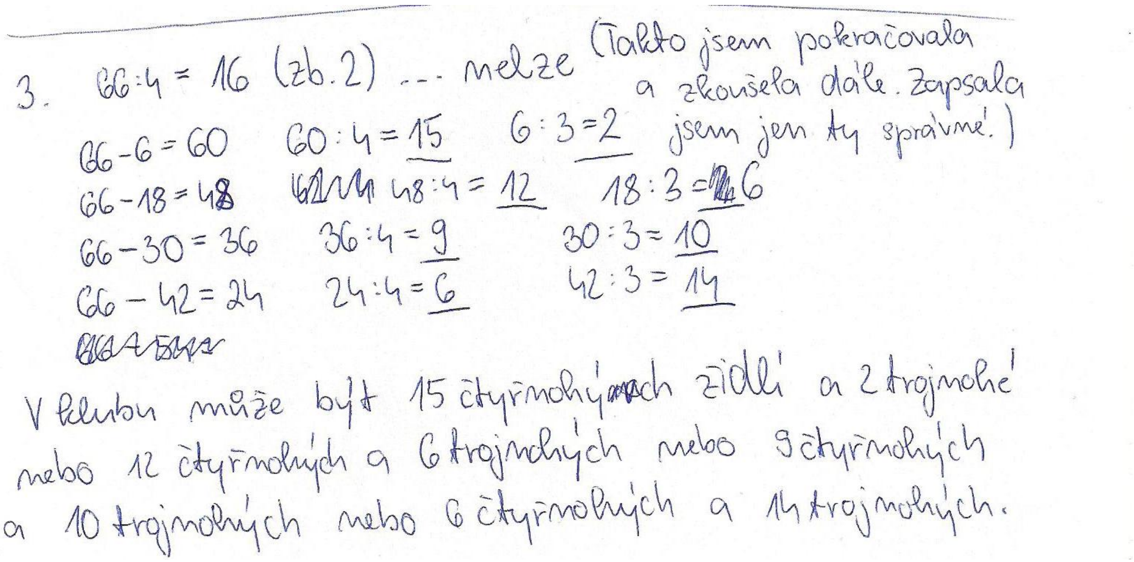


Obr. 24: Ukázka řešení pomocí experimentu studenta vysoké školy – úloha 1

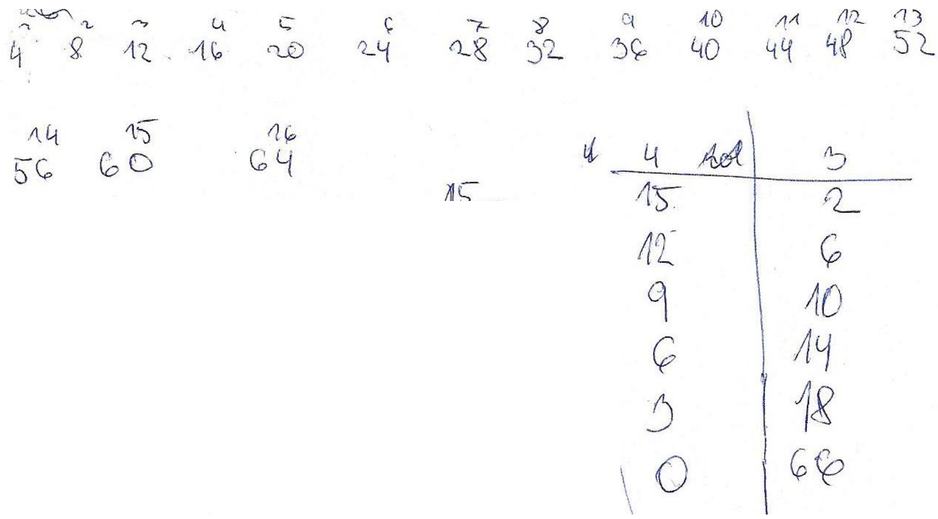


U řešení úlohy 1 za pomocí experimentu postupovali jak žáci základní i střední školy, tak studenti vysoké školy stejným způsobem. Vytvářeli druhé mocniny po sobě jdoucích čísel až do chvíle, než našli správnou diferenci.

Obr. 25: Ukázka řešení pomocí experimentu žáka základní školy – úloha 3



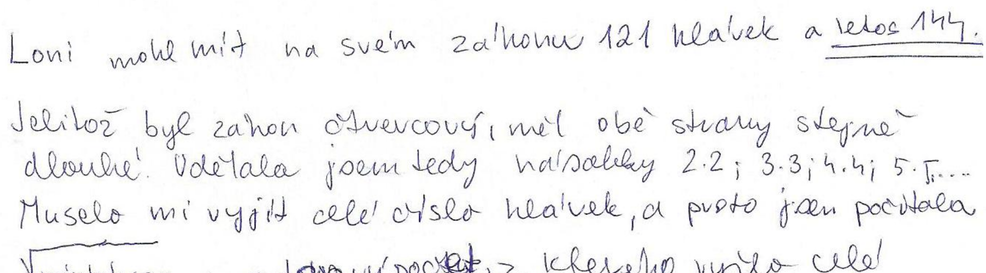
Obr. 26: Ukázka řešení pomocí experimentu žáka střední školy – úloha 3



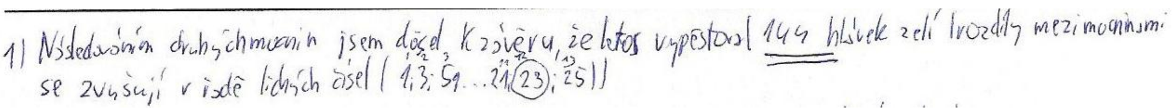
U řešení úlohy 3 pomocí experimentu je zřejmé, že zatímco žáci základní školy vypisovali jednotlivé možnosti do nepřehledných schémat, žáci střední školy již využili přehledné tabulky. Žáci základní školy přišli na jedno až tři správná řešení. Žáci středních škol, kteří využili tabulky a vedli experiment dostatečně dlouho, nalezli všech pět správných řešení.

5, Logická úvaha – slovní popis řešení

Obr. 27: Ukázka řešení pomocí logické úvahy žáka základní školy – úloha 1

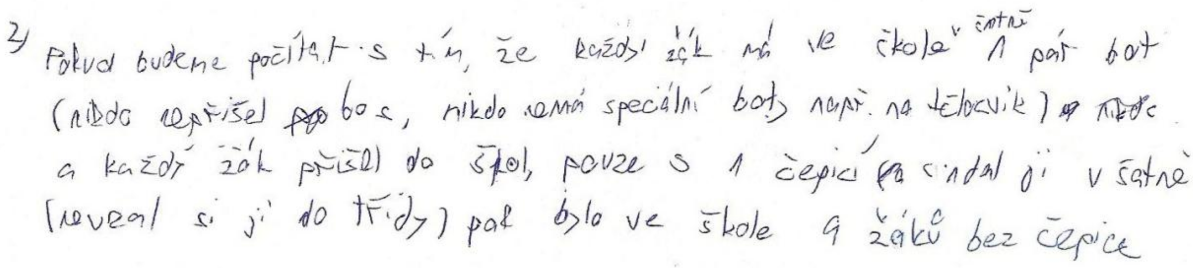


Obr. 28: Ukázka řešení pomocí logické úvahy žáka střední školy – úloha 1

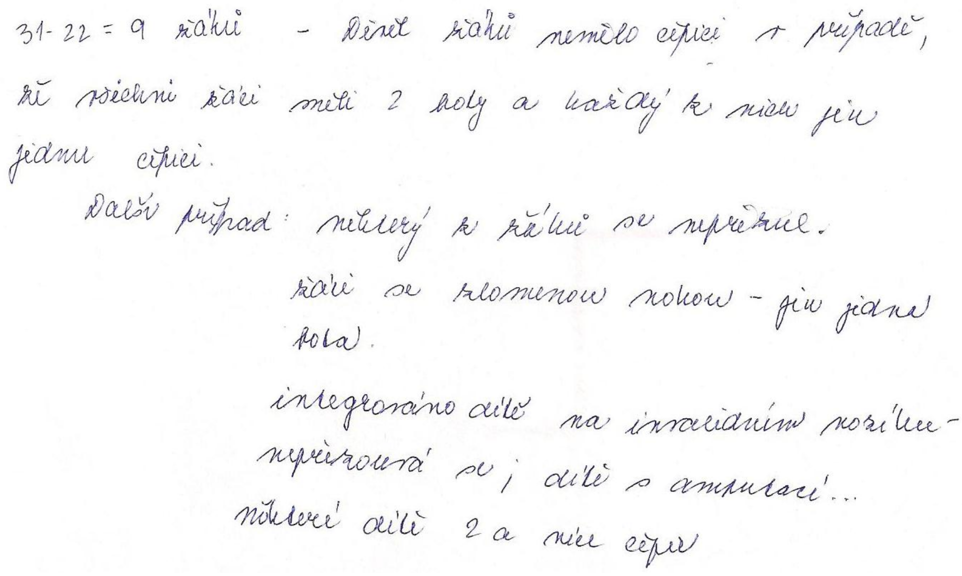


Žáci základní školy se při popisu své logické úvahy více rozepisovali, vyjmenovali každý krok a pečlivě jej zdůvodnili, zatímco žáci střední školy napsali jen stručný postup svých myšlenkových operací.

Obr. 29: Ukázka řešení pomocí logické úvahy žáka střední školy – úloha 2


2) Pokud budeme počítat s tím, že každý žák má ve škole v šatně 1 pár bot (nikdo nepřišel bos, nikdo nemá speciální boty např. na tělocvik) a každý žák přišel do škol pouze s 1 čepicí (a sundal ji v šatně [nevzal si ji do třídy) pak bylo ve škole 9 žáků bez čepice

Obr. 30: Ukázka řešení pomocí logické úvahy studenta vysoké školy – úloha 2


31 - 22 = 9 žáků – Devět žáků nemělo čepici v případě, že všichni žáci měli 2 boty a každý k nim jen jednu čepici.

Další případ: některý z žáků se nepřezul.

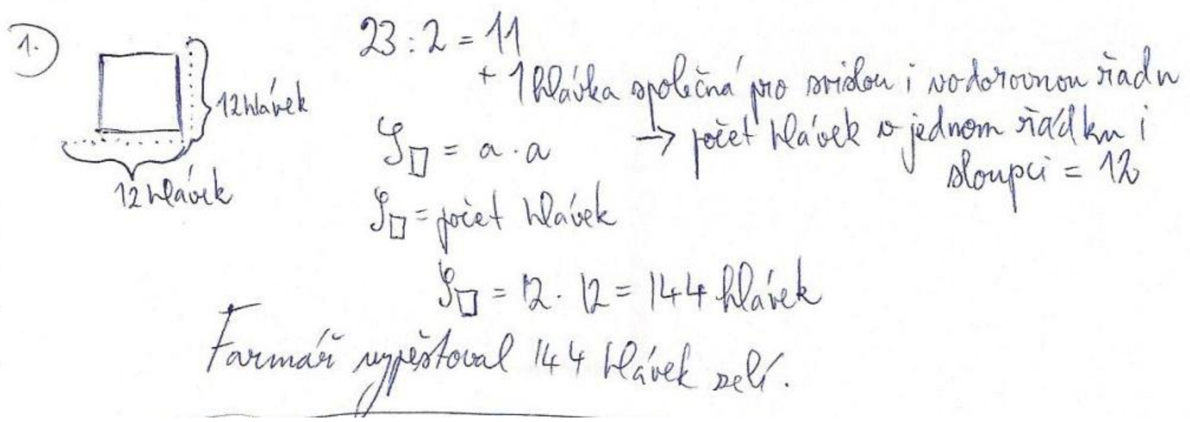
žáci se zlomenou nohou – jen jedna bota).

integrované děti na invalidním vozíku – nepřezouvají se; děti s amputací...

některé děti 2 a více čepic

Při řešení druhé úlohy zvolili tuto strategii většinou ti studenti, kteří chtěli vypsat všechny možné podmínky, při kterých řešení dané úlohy platí.

Při řešení problémových úloh se objevují také kombinace několika strategií. Uvádíme zde ukázku řešení první úlohy žákem střední školy.



1.

12 hlávek

12 hlávek

$23 : 2 = 11$

+ 1 hlávka společná pro svislou i vodorovnou řadu

$S_\square = a \cdot a$ → počet hlávek v jednom řádku i sloupci = 12

$S_\square$ = počet hlávek

$S_\square = 12 \cdot 12 = 144$ hlávek

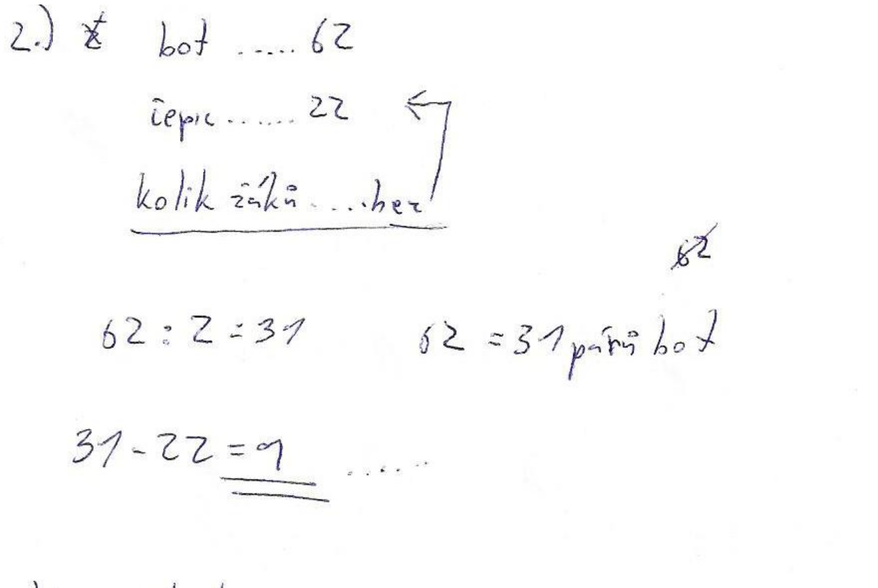
Farmář vypěstoval 144 hlávek zelí.

Obr. 31: Ukázka kombinace několika strategií při řešení úlohy 1

4.5.4 Odpověď jako součást řešení slovních úloh

Při souhrnném hodnocení dodržování postupu řešení slovních úloh musíme uvést, že ač byli jak žáci, tak studenti upozorněni na dodržování zásad – tj. psaní zadání, řešení a odpovědí, objevovala se tato kompletní řešení spíše výjimečně. Zde uvádíme ukázku dvou kompletních řešení žáků základní školy.

Obr. 32: Ukázka kompletního řešení žáka základní školy – úloha 2



2.) ~~Z~~ bot 62

čepic 22

kolik žáků ... bez

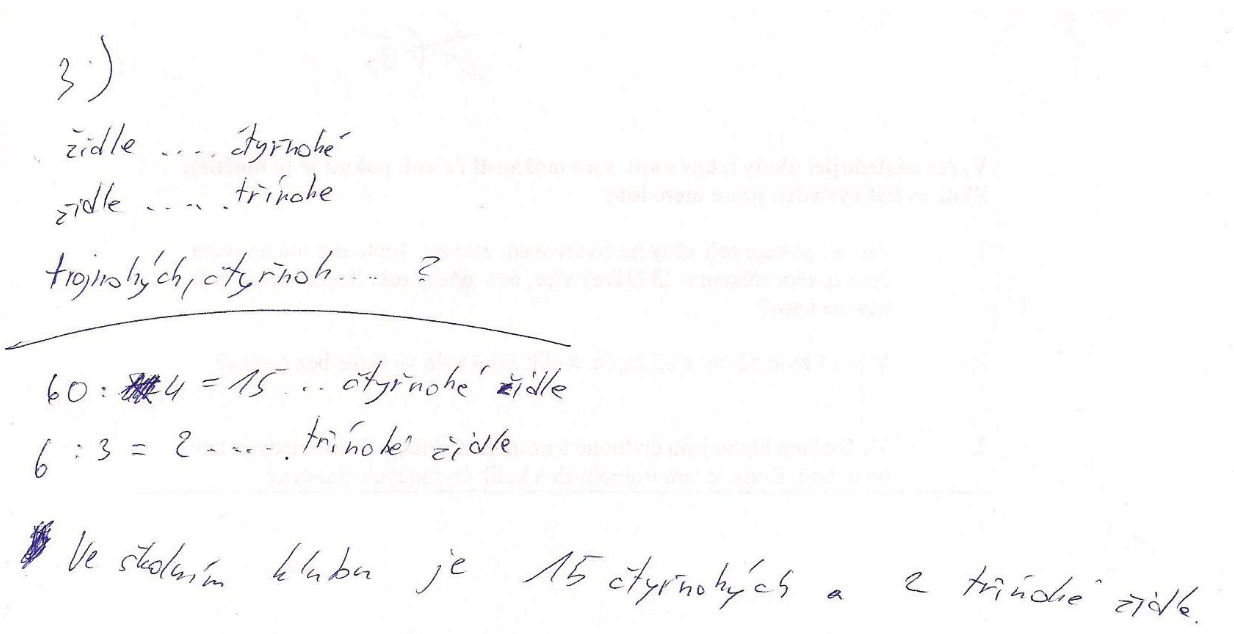
~~62~~

$62 : 2 = 31$ $62 = 31$ párů bot

$31 - 22 = 9$ .....

Ve škole bylo 9 žáků bez čepice.

Obr. 33: Ukázka kompletního řešení žáka střední školy – úloha 3


3)
židle ... čtyřnohé
židle ... třínohe
trojnohých, čtyřnoh... ?
60 : ~~4~~4 = 15 .. čtyřnohé židle
6 : 3 = 2 ... třínohé židle
Ve školním klubu je 15 čtyřnohých a 2 třínohé židle.

Zadání, odpovědi a kompletní řešení se spíše objevovala v testech žáků základní školy, než u žáků středních škol a studentů vysokých škol. Kompletní přehled podávají tabulky v následujícím textu.

Souhrnný přehled řešení nestandardizovaného didaktického testu ve formě tabulek a grafů:

Základní škola – 49 žáků:

Úloha	řešení			Zvolená strategie						zápis	odpověď	Kompletní řešení	Počet řešení
	Správné řešení	Pokus o řešení	neřešeno	Geometrická cesta	Aritmetická cesta	Algebraická cesta	Pokus-omyl	Logická úvaha	Bez výrazné strategie				
1.úloha	11	8	30	11	0	0	3	0	0	1	7	0	11
2. úloha	45	3	1	1	36	1	0	8	2	2	27	5	45
3. úloha	23	15	11	10	12	2	8	1	5	2	13	1	1. řeš: 23

Tab. 3: Přehled řešení slovních úloh žáky základní školy

Střední škola - 45 žáků

Úloha	řešení			Zvolená strategie						zápis		odpověď	Kompletní řešení	Počet řešení
	Správné řešení	Pokus o řešení	neřešeno	Geometrická cesta	Aritmetická cesta	Algebraická cesta	Pokus-omyl	Logická úvaha	Bez výrazné strategie					
1.úloha	14	16	15	6	4	6	0	5	9		0	10	0	14
2. úloha	45	0	0	0	40	0	0	2	3		0	30	0	45
3. úloha	27	12	6	0	16	3	1	5	2		0	0	0	1 řeš: 7 2 řeš.:3 3 řeš.: 6 4 řeš.: 4 5 řeš.: 7

Tab. 4: Přehled řešení slovních úloh žáky střední školy

Studenti vysoké školy – 42 studentů

Úloha	řešení			Zvolená strategie							zápis	odpověď	Kompletní řešení	Počet řešení
	Správné řešení	Pokus o řešení	neřešeno	Geometrická cesta	Aritmetická cesta	Algebraická cesta	Pokus-omyl	Logická úvaha	Bez výrazné strategie	Heurist. navedení				
1.úloha	20	15	7	11	4	6	1	3	0	10	1	14	0	20
2. úloha	39	0	3	0	35	0	0	4	0	0	0	29	1	39
3. úloha	25	12	5	1	12	11	6	6	1	0	4	3	0	1 řeš.: 12 2 řeš.: 4 3 řeš.: 4 4 řeš.: 0 5 řeš.: 5

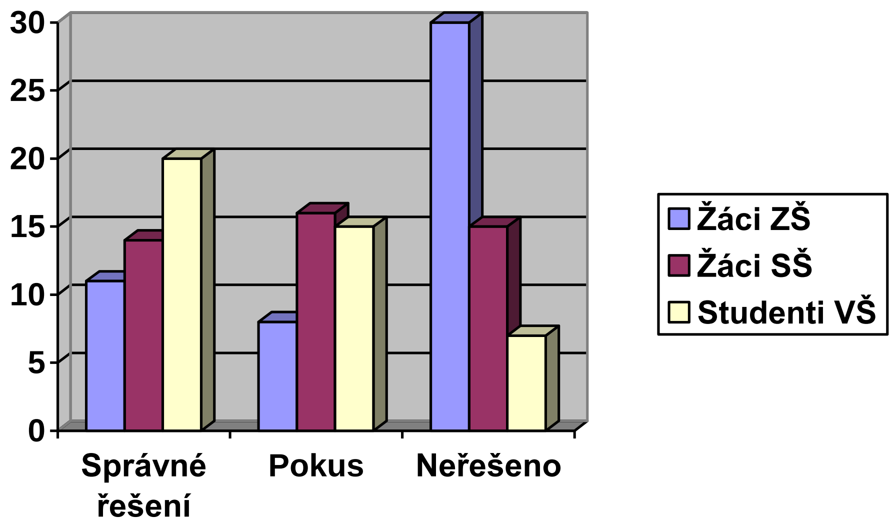
Tab. 5: Přehled řešení slovních úloh studenty vysoké školy

Podrobné rozpracování souhrnných tabulek nabízejí následující tabulky a grafy:

Tabulky číslo 6, 7, 8 vyznačují počty správných řešení, pokusů o vyřešení a neřešení úloh 1, 2, 3. Všechny tabulky jsou doplněny přehlednými grafy.

Úloha 1	Řešení		
	Správné řešení	Pokus o řešení	Neřešeno
Žáci ZŠ	11	8	30
Žáci SŠ	14	16	15
Studenti VŠ	20	15	7

Tab. 6: Přehled řešení úlohy 1



Graf 1: Přehled řešení úlohy 1

Porovnáním úspěšnosti úlohy 1 bylo zjištěno, že:

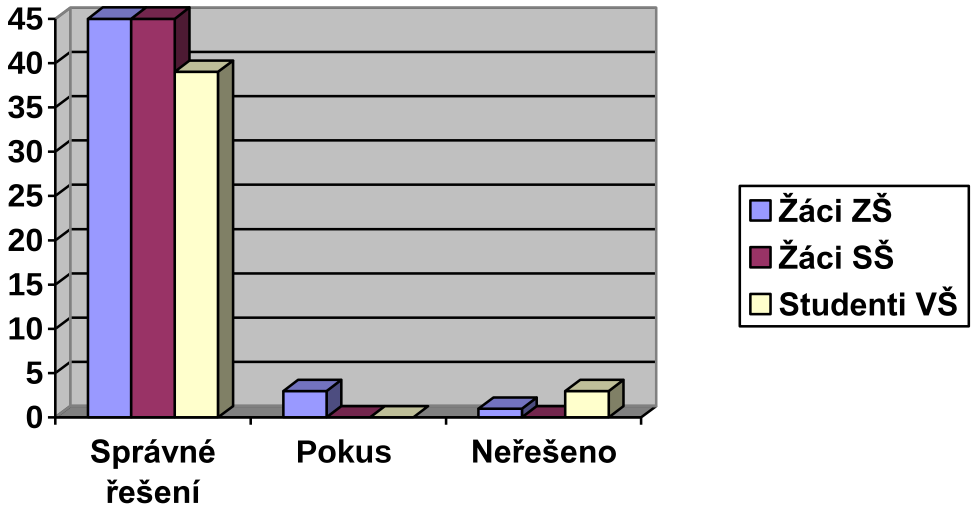
- Úlohu 1 správně vyřešilo 22,4 % žáků základní školy, 31,1% žáků střední školy a 47,6% studentů vysoké školy.

- O vyřešení se pokusilo 16,3% žáků základní školy, 35,5% žáků střední školy a 35,8% studentů vysoké školy.

- Úlohou se vůbec nezabývalo 61,3% žáků základní školy, 33,3% žáků střední školy a 16,6% studentů vysoké školy.

Úloha 2	Řešení		
	Správné řešení	Pokus o řešení	Neřešeno
Žáci ZŠ	45	3	1
Žáci SŠ	45	0	0
Studenti VŠ	39	0	3

Tab. 7: Přehled řešení úlohy 2



Graf 2: Přehled řešení úlohy 2

Porovnáním úspěšnosti úlohy 2 bylo zjištěno, že:

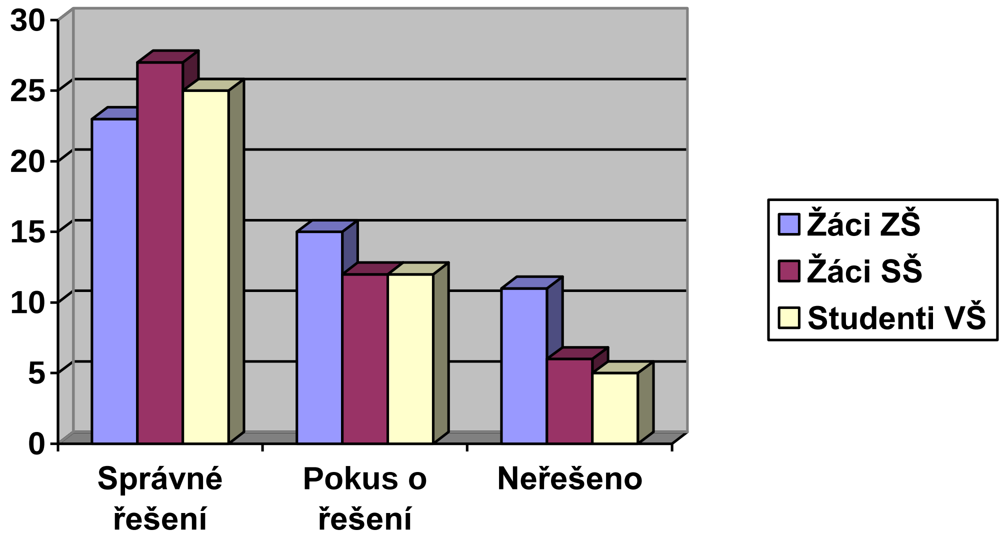
- Úlohu 2 správně vyřešilo 91,8 % žáků základní školy, 100% žáků střední školy a 92,8% studentů vysoké školy.

- O vyřešení se pouze pokusilo 6,12% žáků základní školy.

- Úlohou se vůbec nezabývalo 2,1% žáků základní školy a 7,2% studentů vysoké školy.

Úloha 3	Řešení		
	Správné řešení	Pokus o řešení	neřešeno
Žáci ZŠ	23	15	11
Studenti SŠ	27	12	6
Studenti VŠ	25	12	5

Tab. 8: Přehled řešení úlohy 3



Graf 3: Přehled řešení úlohy 3

Porovnáním úspěšnosti úlohy 3 bylo zjištěno, že:

- Úlohu 3 správně vyřešilo 46,9 % žáků základní školy, 60% žáků střední školy a 59,5% studentů vysoké školy.

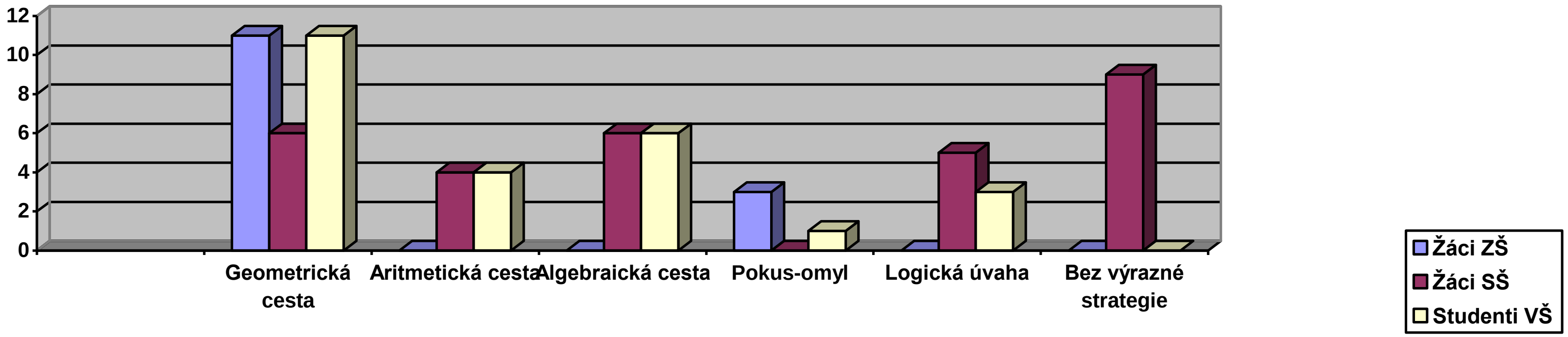
- O vyřešení se pokusilo 30,7% žáků základní školy, 26,6% žáků střední školy a 28,6% studentů vysoké školy.

- Úlohou se vůbec nezabývalo 22,4% žáků základní školy, 13,4% žáků střední školy a 11,9% studentů vysoké školy.

Tabulky s čísly 9, 10 a 11 nabízejí přehled zvolených strategií u jednotlivých stupňů škol. Opět jsou pro přehlednost doplněny grafy.

Úloha 1	Zvolená strategie						
		Geometrická cesta	Aritmetická cesta	Algebraická cesta	Pokus-omyl	Logická úvaha	Bez výrazné strategie
Žáci ZŠ		11	0	0	3	0	0
Žáci SŠ		6	4	6	0	5	9
Studenti VŠ		11	4	6	1	3	0

Tab. 9: Přehled zvolených strategií při řešení úlohy 1



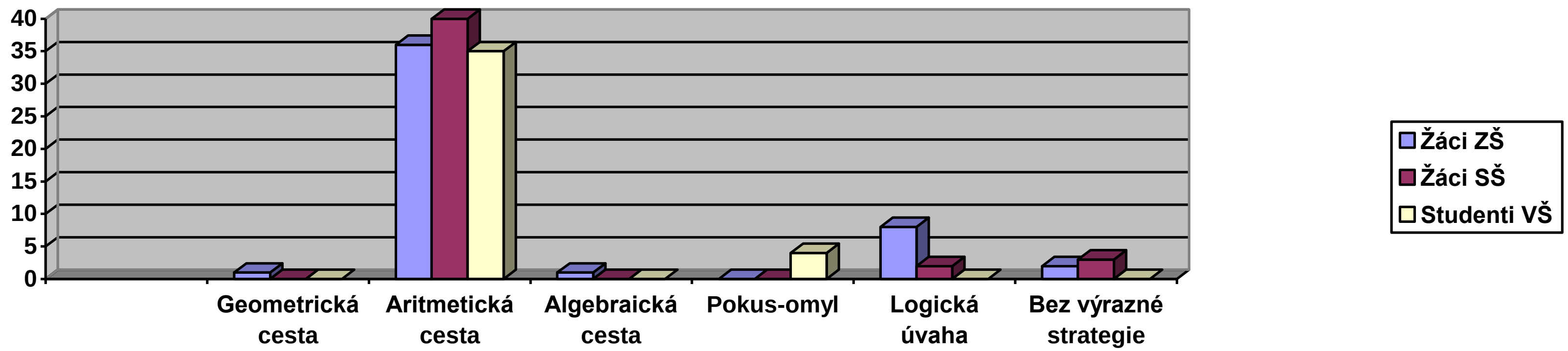
Graf 4: Přehled zvolených strategií při řešení úlohy 1

Při analýze zvolených strategií při řešení úlohy 1 bylo zjištěno, že:

- Úlohu 1 řešilo 78,6% žáků základní školy geometrickou cestou a 21,4% strategií pokus-omyl.
- Úlohu 1 řešilo 20% žáků střední školy geometrickou cestou, 13,4% aritmetickou cestou, 20% algebraickou cestou, 16,6% logickou úvahou a 30% žáků řešilo úlohu metodou bez výrazné strategie.
- Úlohu 1 řešilo 44% studentů vysoké školy geometrickou cestu, 16% aritmetickou cestou, 24% algebraickou cestou, 4% metodou pokus - omyl a 12% logickou úvahou.

Úloha 2	Zvolená strategie						
		Geometrická cesta	Aritmetická cesta	Algebraická cesta	Pokus-omyl	Logická úvaha	Bez výrazné strategie
Žáci ZŠ		1	36	1	0	8	2
Žáci SŠ		0	40	0	0	2	3
Studenti VŠ		0	35	0	4	0	0

Tab. 10: Přehled zvolených strategií při řešení úlohy 2



Graf 5: Přehled zvolených strategií při řešení úlohy 2

Při analýze volby strategií při řešení úlohy 2 bylo zjištěno, že:

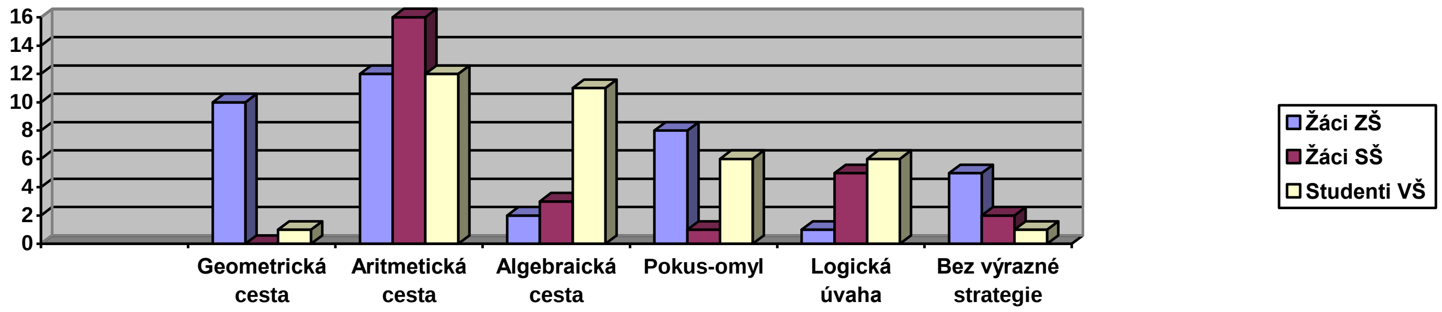
- Úlohu 2 řešila 2% žáků základní školy geometrickou cestou, 75% aritmetickou cestou, 2,2% algebraickou cestou a 16,6% logickou úvahou. 4,2% žáků nevyužila výrazné strategie.

- Úlohu 2 vyřešilo 88,8% žáků střední školy aritmetickou cestou, 4,5% logickou úvahou a 6,7% nemělo vyhraněnu jednu strategii.

- Úlohu 2 řešilo 89,7% studentů vysoké školy aritmetickou cestou a 10,3% volila metodu experimentu.

Úloha 3	Zvolená strategie						
		Geometrická cesta	Aritmetická cesta	Algebraická cesta	Pokus-omyl	Logická úvaha	Bez výrazné strategie
Žáci ZŠ		10	12	2	8	1	5
Žáci SŠ		0	16	3	1	5	2
Studenti VŠ		1	12	11	6	6	1

Tab. 11: Přehled zvolených strategií při řešení úlohy 3



Graf 6: Přehled zvolených strategií při řešení úlohy 3

Při analýze volby strategií při řešení úlohy 3 bylo zjištěno, že:

- Úlohu 3 řešilo 28,3% žáků základní školy geometrickou cestou, 32,6% aritmetickou cestou, 23,1% metodou pokus - omyl, 2,6% logickou úvahou a 13,4% žáků řešila metodou bez strategie.

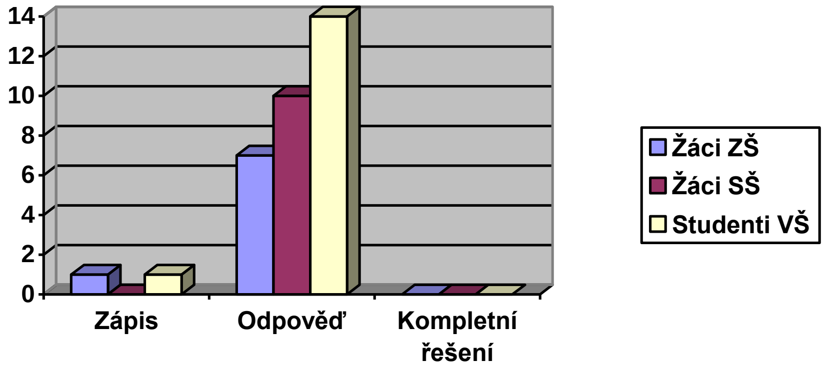
- Úlohu 3 řešilo 59,3% žáků střední školy aritmetickou cestou, 11,1% algebraickou cestou, 3,7% metodou pokus - omyl, 18,5% logickou úvahou a 7,4% žáků ji řešila bez výrazné strategie.

- Úlohu 3 vyřešilo 2,7% studentů vysoké školy geometrickou cestou, 32,4% aritmetickou cestou, 29,7% algebraickou cestou, 16,2% metodou pokus - omyl a 16,2% logickou úvahou. 2,8% studentů řešilo tuto úlohu bez užití výrazné strategie.

Tabulky s čísly 12, 13 a 14 znázorňují srovnání žáků a studentů při zapisování matematických zápisů, odpovědí a kompletních řešení při řešení úloh 1-3.

Úloha 1			
	Zápis	Odpověď	Kompletní řešení
Žáci ZŠ	1	7	0
Žáci SŠ	0	10	0
Studenti VŠ	1	14	0

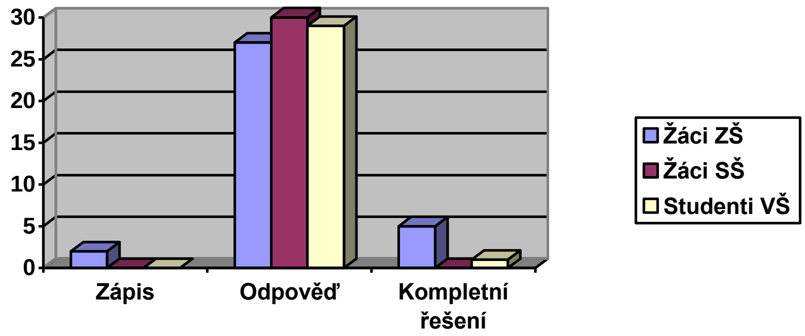
Tab. 12: Srovnání dodržování zásad kompletního řešení při řešení úlohy 1



Graf 7: Srovnání dodržování zásad kompletního řešení při řešení úlohy 1

Úloha 2			
	Zápis	Odpověď	Kompletní řešení
Žáci ZŠ	2	27	5
Žáci SŠ	0	30	0
Studenti VŠ	0	29	1

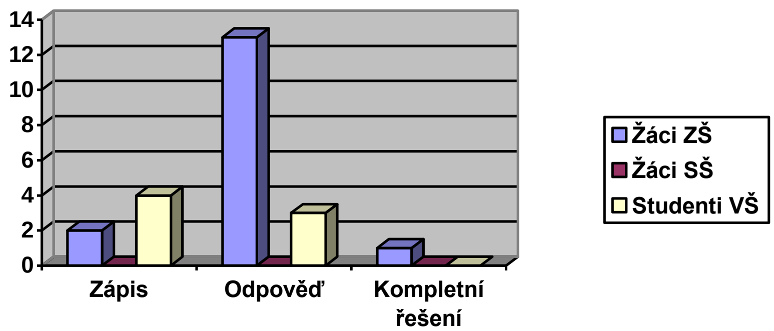
Tab. 13: Srovnání dodržování zásad kompletního řešení při řešení úlohy 2



Graf 8: Srovnání dodržování zásad kompletního řešení při řešení úlohy 2

Úloha 3			
	Zápis	Odpověď	Kompletní řešení
Žáci ZŠ	2	13	1
Žáci SŠ	0	0	0
Studenti VŠ	4	3	0

Tab. 14: Srovnání dodržování zásad kompletního řešení při řešení úlohy 3



Graf 9: Srovnání dodržování zásad kompletního řešení při řešení úlohy 3

Při porovnávání kompletnosti řešení nebyl zjištěn výrazný vztah mezi stupněm navštěvované školy a psaním kompletního řešení se zadáním a odpovědí. U úlohy 1 napsal zadání 1 žák základní školy a 1 student vysoké školy, odpověď vytvořilo 8 žáků základní školy, 10 žáků střední školy a 1 student vysoké školy. Při řešení úlohy 2 napsali zadání 2 žáci základní školy. 27 žáků základní školy, 30 žáků střední školy a 29 studentů vysoké školy zaznamenalo odpověď a 5 žáků základní školy a 1 student vysoké školy napsali kompletní řešení. U úlohy 3 žáci střední školy nezaznamenali ani v jednom případě zadání či odpověď, zatímco 2 žáci základní školy a 4 studenti vysoké školy poznamenali zadání a 13 žáků základní školy a 3 studenti vysoké školy vepsali odpověď . U jednoho žáka základní školy se objevilo také kompletní řešení.

4.6 Shrnutí a závěry výzkumného šetření

Výzkumné šetření bylo provedeno formou nestandardizovaného didaktického testu, který byl zadán na základních školách, střední a vysoké škole. Kvalitativní analýzou byly popsány strategie, které si žáci a studenti sami vybrali pro řešení zadaných úloh.

Vzhledem k tomu, že nebyl v jednotlivých výzkumných vzorcích stejný počet respondentů, nelze udělat srovnání dle četností. Dovolujeme si ale jednotlivé skupiny procentuálně srovnat.

Dle uvedených srovnávacích tabulek můžeme říci, že při srovnávání úspěšnosti při řešení úlohy 1 byli nejúspěšnější studenti vysoké školy, úlohu vyřešilo 47,6% testovaných studentů. Naopak 61,2% žáků základní školy se úlohou vůbec nezabývalo.

Při řešení úlohy 2 byli nejúspěšnější žáci střední školy (100%), ale i ve dvou zbývajících skupinách byla úspěšnost řešení nad 90%. Zajímavostí je, že 7,1% žáků vysoké školy se o řešení této úlohy vůbec nepokusilo.

V úloze 3 byli nejúspěšnější řešitelé žáci střední školy (60%), těsně za nimi jsou s úspěšností také studenti vysoké školy (59,5%). Žáci základní školy tuto úlohu vyřešili správně v 46,9% s tím, že ve všech případech nalezli pouze jedno z hledaných řešení.

Při analýze strategií řešení úlohy 1 bylo zjištěno, že žáci základní školy u problémové úlohy zvolili buď geometrickou cestu (78,6%) nebo strategii experimentu (21,4%).

Žáci střední školy se již nebáli vyzkoušet různé typy strategií. Při řešení neznámé problémové úlohy převažovalo v 30% řešení metodou bez jedné výrazné strategie (kombinace více strategií či nerozeznatelná strategie), následovalo řešení geometrickou cestou (20%) a algebraickou cestou (20%).

Studenti vysoké školy také volili již více strategií k řešení, ale v 44% sázeli na jistotu geometrické cesty nebo známého použití algoritmické cesty (24%).

Při analýze strategií řešení úlohy 2 bylo zjištěno, že žáci základní školy u klasické slovní úlohy zvolili v 75% aritmetickou cestu a v 16,6% logickou úvahu.
Žáci střední školy řešili tuto úlohu v 88,8% také aritmetickou cestou, popř. nevyužili žádné výrazné strategie (6,6%).
Studenti vysoké školy řešili tuto úlohu také aritmetickou cestou (89,7%) nebo zvolili metodu experimentu.

Úlohu 3 řešili všechny výzkumné skupiny převážně aritmetickou cestou, žáci základní školy v 31,6%, žáci střední školy v 59,3% a studenti vysoké školy v 32,4 %. Další nejčastěji volenou strategií byla u studentů vysoké školy algebraická cesta řešení (29,7%).

Při porovnávání kompletnosti řešení nebyl zjištěn významný vztah mezi stupněm školy a psaním kompletního řešení se zadáním a odpovědí. U všech typů škol a všech zadaných úloh se objevilo zadání jen u malého procenta žáků i studentů, zatímco odpověď se objevovala ve většině vyřešených úloh.

Zkoumáním četností projevených strategií v řešení zadaných úloh bylo zjištěno, že žáci základní školy volí nejčastěji názorné strategie - nejčastěji geometrickou cestu nebo cestu experimentu, zatímco aritmetickou cestu volí pouze při již známém postupu. Žáci základní školy řeší většinou jen úlohy toho typu, které znají nebo ve kterých vidí analogii s již dříve řešenými úlohami. Ve většině případů se žáci neznámou úlohu ani nepokusí řešit.
Žáci středních a studenti vysokých škol již předložené úlohy řeší různými strategiemi, zkouší nové možnosti řešení. Často vyzkouší více strategií a využijí k řešení tu, která jim v tu chvíli nejvíce vyhovuje. Většina studentů zadanou úlohu zkusí vyřešit jakoukoliv strategií, než aby ji neřešili vůbec.

5 SBORNÍK HEURISTICKÝCH ÚLOH

Sborník obsahuje soubor aktivit, námětů a ukázkových lekcí pro aktivní výuku matematiky na základních a středních školách.

5.1 Úlohy pro 1. stupeň základní školy

5.1.1 Úlohy podporující zápis čísla v desítkové soustavě, úlohy rozvíjející kombinační myšlení

<u>Úloha 1.</u> [138] Zvolte si tři různá jednociferná čísla. Pomocí těchto tří čísel zapište všechna trojciferná čísla, v jejichž zápisu se číslice neopakují. Všechny trojciferná čísla sečtěte. Vzniklý součet vydělte součtem tří původních jednociferných čísel. Co Vám vyjde? Ověřte to pro jiná tři jednociferná čísla.

Řešení:

Žáci zvolí tři jednociferná čísla, např. 2, 5, 8 a utvoří z nich všechna trojciferná čísla (258, 285, 528, 582, 825, 852). Je zapotřebí žáky navést, že těchto čísel bude šest a že musí najít všechny. Poté je necháme samostatně daná čísla sečíst a vydělit třemi. Jedno řešení napíšeme pro názornost na tabuli

258 + 285 + 528 + 582 + 825 + 852 = 3 330

3 330 : (2 + 5 + 8) = 222

Pokud žáci správně počítali, vyjde vždy 222. Většina si bude chtít tento výsledek ihned ověřit na dalších třech jednociferných číslech.

<u>Úloha 2.</u> Vyberte si libovolné trojciferné číslo z předcházející úlohy a zapište je dvakrát za sebou tak, abyste dostali číslo šesticiferné. Vydělte toto číslo sedmi, vzniklý podíl pak vydělte jedenácti, a tento další podíl vydělte třinácti.

Řešení:

Je dobré postup napsat např. ve formě početního hada na tabuli, aby žáci měli přehled, které operace po sobě následují. Žáci si zvolí jedno trojciferné číslo a zapíší jej dvakrát za sebou např. 528 528. Poté budou provádět zadané operace v daném pořadí:

---

[138] Inspirováno BLAŽKOVÁ, Růžena. *Několik nestandardních úloh k tematickému okruhu Číslo a proměnná*. Metodický portál RVP.

528 528 : 7 = 75 504

75 504 : 11 = 6 864

6 864 : 13 = 528

Pokud budou počítat správně, vyjde jim původně zvolené trojciferné číslo. Opět je vhodné zapsat jedno ukázkové řešení na tabuli.

Úloha 3. Zapište dvojciferné číslo, které udává vaši hmotnost (v celých kilogramech) a zapište toto číslo třikrát za sebou. Dostanete tak číslo šesticiferné, které pak vydělte třinácti, vzniklý podíl vydělte číslem 21 a nově vzniklý podíl vydělte číslem 37. Jaké číslo vám vyjde?

Řešení:

Postup je stejný jako u předcházející úlohy, ale v tuto chvíli se již žáci začnou zajímat, proč to tak je. Zde je prostor pro vysvětlení, že toto pravidlo vždy platí, když součin čísel, kterými dělíme, nám dává 10 101. Necháme žáky ověřit součin (13 . 21 . 37 = 10 101). Poté zvolíme obrácený postup a dokážeme, že vynásobíme-li toto číslo libovolným dvojciferným číslem, dostaneme šesticiferné číslo požadované vlastnosti. Žáci mohou ověřit nově objevený poznatek na předcházející úloze.

5.1.2 Kouzelná čísla

Úloha 1. [139] Číslo 100 je možné zapsat pomocí všech číslic od 1 do 9 a znamének pro sčítání a odčítání, popř. zápisu dvojciferného nebo trojciferného čísla. Nevěříte? Zkuste to!

Řešení:

Na začátek je vhodné uvést žákům příklad, jak mají postupovat:

Např. 100 = 123 – 45 – 67 + 89

Potom dále hledají další možnosti – po uplynutí doby na samostatnou práci nalezená řešení zapíšeme na tabuli.

Další řešení jsou např. 100 = 98 – 76 + 54 + 3 +21; 100 = 123 + 4 – 5 + 67 – 89; 100 = 9 – 8 + 76 + +54 – 32 + 1; 100 = 1 + 2 + 3 – 4 + 5 + 6 + 78 + 9; 100 = 9 – 8 + 76 – 5 + 4 + 3 +21; 100 = 1 + 23 – - 4 + 56 + 7 + 8 + 9; 100 = 98 – 7 – 6 + 5 + 4 + 3 + 2 +1; 100 = 12 – 3 – 4 + 5 – 6 + 7 + 89; 100 = 9 + + 8 + 76 + 5 – 4 + 3 + 2 + 1. S žáky poté hledáme další možnosti.

[139] BLAŽKOVÁ, Růžena. *Matematická kouzla.* Komenský. 2002, roč. 126, č. 1-2, s. 121-122. ISSN 0323-0449.

<u>Úloha 2.</u> Cvičená žabička Rosnička stála na hodinách na čísle 12. Hrála s Alenkou takovou hru: Alenka házela kostkou a kolik ok jí padlo, o tolik čísel Rosnička poskočila. Po prvním hodu skočila po směru chodu hodinových ručiček, po druhém hodu proti směru hodinových ručiček a po třetím hodu opět po směru hodinových ručiček. Víme, že Alence na kostce padla oka 2, 5 a 6, ale bohužel nevíme, v jakém pořadí. Zkuste odhadnout, na která čísla mohla Rosnička doskočit po třetím skoku?

Řešení:

Žáci si namalují hodiny a bádají, na která čísla mohla žabka doskočit. Po samostatné práci mohou žáci pracovat ve skupinách, radit se o řešení. Na závěr je vhodné probrat řešení společně. Po třech skocích žabky máme tyto možnosti:

Jak žabička skákala od čísla 12:	na která čísla se dostala:
+ 2 – 5 + 6	2, 9, **3**
+ 2 – 6 + 5	2, 8, **1**
+ 5 – 2 + 6	5, 3, **9**
+ 5 – 6 + 2	5, 11, **1**
+ 6 – 2 + 5	6, 4, **9**
+ 6 – 5 + 2	6, 1, **3**

Žába se tedy mohla dostat po třetím skoku na číslo 1 nebo 3 nebo 9.

<u>Úloha 3.</u> Sedm kamarádů pomáhalo mamince trhat jablka a natrhali každý jiný počet jablek do svého košíku. Natrhali do košíků 34, 19, 50, 44, 31, 28 a 37 jablíček. Maminka ale potřebovala jablka rozdělit na tři stejné hromádky – jednu na zavaření, jednu na běžnou konzumaci a ze třetí udělá pro kluky za pomoc voňavý štrúdl. Jak ale rozdělit jablíčka v košících do tří skupin tak, aby počet jablíček v každé skupině byl stejný? (Kamarádi nesměli jablka z košíčků vytahovat.)

Řešení:

Tuto úlohu je vhodné řešit ve dvojicích nebo menších skupinách, ve kterých mají žáci pocit, že jsou opravdu daní kamarádi a řeší skutečný problém. Po uplynutí doby na práci je vhodné nechat každou skupinu prezentovat svá řešení a poté uvést správné řešení na tabuli.

Celkem bylo (34 + 19 + 50 + 44 + 31 + 28 + 37) jablek = 243 jablek. Rozdělíme je do tří stejných skupin 243 jablek : 3 = 81 jablek. Protože jablka nesměli kluci z košíčků vytahovat, museli do každé skupiny vybrat takové košíčky, ve kterých součet všech jablek dával číslo 81.

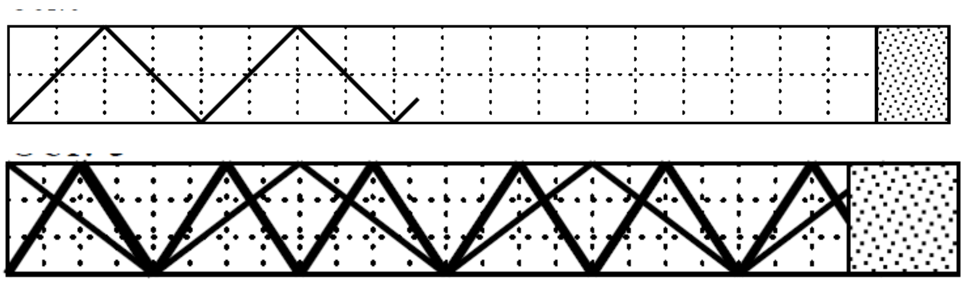
Řešení je potom jednoduché - do jedné skupiny vybrali košíky s 50 a s 31 jablky, do druhé skupiny košíky s 44 a s 37 jablky a ve třetí skupině zůstaly košíky s 34, 19 a s 28 jablky.

5.1.3 Výroba indiánské čelenky

Úloha 1:[140] Rozdáme žákům předem připravené čtverečkované čtvrtky (rozměr volíme tak, aby bylo možné vytvářet různé lomené čáry a tím vznikal na čelence pěkný vzor). Samotné výrobě čelenek ale musí předcházet vysvětlení a analýza celého úkolu. Žáci si nejdříve vyrobí pracovní náčrtek čelenky s tím, že každý si navrhne vlastní čelenku a vlastní zdobení lomenou čárou, popřípadě větším množstvím lomených čar. Vzniklé plochy lze poté vybarvit a čelenku tak dozdobit.

Řešení:

Žáci si zábavnou formou osvojí již předem učivo o násobcích a dělitelích přirozených čísel, je nutné jim vysvětlit, jak mají lomené čáry do předložených čtvrtek papíru zakreslovat, jakými pravidly se řídit.



Obr. 34: Indiánská čelenka

5.2 Úlohy pro 2. stupeň základní školy

V první části tohoto oddílu nabízíme úlohy, které byly vyzkoušeny v praxi na základní škole v 7. a 8. ročníku. Řešení úloh jsou doplněna žákovským řešením a fotodokumentací.

5.2.1 Cesta do školy (procházka městem)

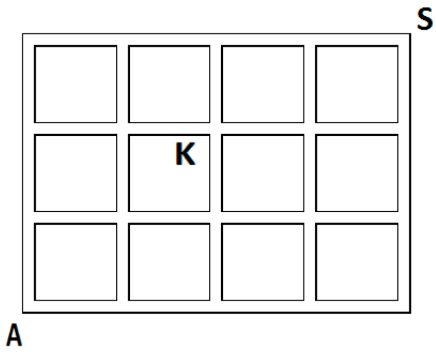
Úloha 1[141] Na obrázku 1 je plán města. Adam (A) může jít do školy (S) různými cestami, vždy ale jen dopředu, nesmí se vracet – tedy na plánu pouze nahoru - na sever (*s*) nebo doprava - na východ (*v*), ve směru šipek ↑ nebo →. Kolika různými způsoby (cestami) může do školy dojít?

[140] Inspirováno LIŠKOVÁ, Hana. *Postoje žáka k matematice*.

[141] Úloha je známá v literatuře jako *cesty ve čtvercové síti (Kopka, J., 1999).*

Řešení:

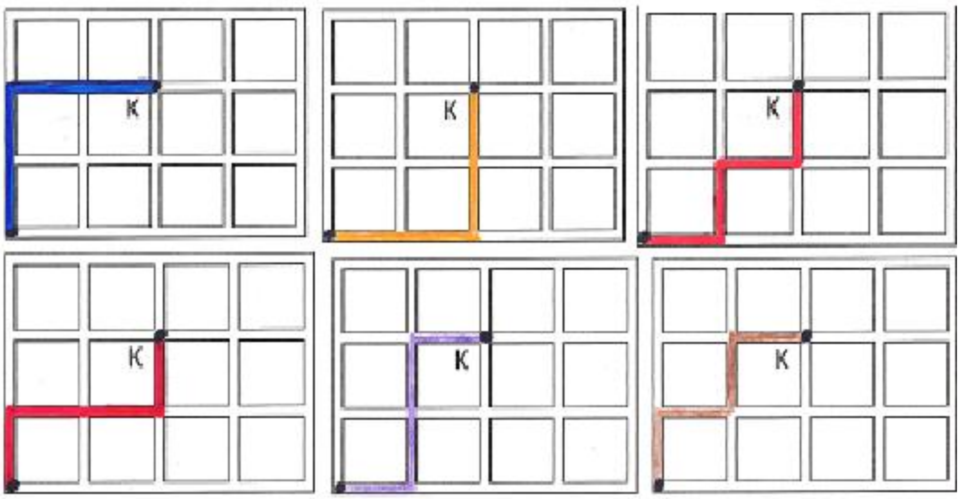
Objektem zkoumání je určení počtu cest, kterými lze ve čtvercové síti „projít z místa A do místa B“. Pro činnost se žáky je vhodné využít pracovní list s několika stejnými čtvercovými sítěmi, do nichž budou žáci jednotlivé cesty zakreslovat (experiment).



Obr. 35: Cesta do školy

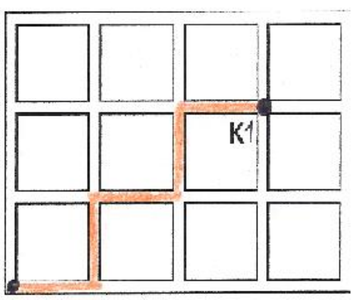
Na první čtvercové síti, kterou žáci dostanou, je vyznačena křižovatka (K), kterou Adam projde cestou do školy. Barevnými tužkami mají vyznačit, kolika různými cestami se ke křižovatce K dostanou a mají určit, kolik úseků na každé cestě projdou (úsek je vzdálenost mezi každými dvěma nejbližšími křižovatkami).

Řešení žáka základní školy:



Obr. 36: Cesta do školy – řešení I.

Žáci zjistili, že počet barevně vyznačených cest ke křižovatce K je 6, každá cesta má přitom 4 úseky. Ke každé křižovatce na sever nebo na východ od A se dostanou pouze jediným způsobem. Kolika způsoby se můžete dostat ke všem zbývajícím křižovatkám na plánu města?



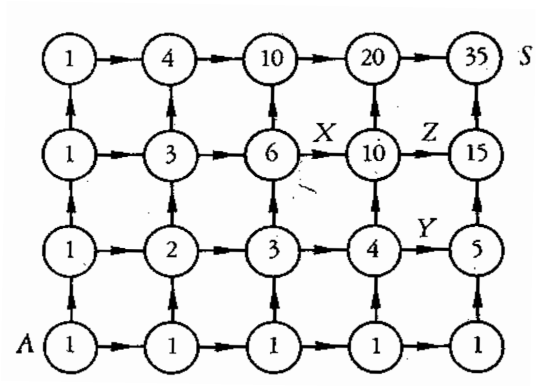
Obr. 37: Cesta do školy – řešení II.

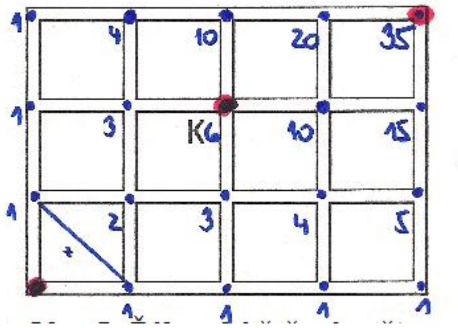
Žáci brzy přijdou na to, že ke křižovatce 2 lze dojít dvěma způsoby (1+1), ke křižovatce 3 lze dojít třemi způsoby (2+1), atd. Do školy S lze dojít 10 různými cestami, každá cesta bude mít 5 úseků.

Výsledné řešení tedy je:

Obr. 38: Naznačení řešené úlohy (Engel, T., Varga, T., Walser, W., 1974, s. 15):

žákovské řešení:





<u>Úloha 2.</u> Jednotlivé úseky cesty ke křižovatce K, vyznačené odlišnými barvami, zapište pomocí šipek, např. modrá cesta →→↑↑ nebo písmeny **vvss**. Zapište šipkami nebo písmeny všech 6 možností. Jak zdůvodníte, že uvedené cesty jsou opravdu všechny?

Řešení:

→→↑↑	↑↑→→	vvss	ssvv
→↑→↑	↑→↑→	vsvs	svsv
→↑↑→	↑→→↑	vssv	svvs

5.2.2 Odvození vzorce pro výpočet délky kružnice

<u>Úloha 1[142].</u> Za pomoci přiloženého provázku změřte obvody alespoň tří přiložených „kulatých" předmětů. Poté změřte také jejich průměry. Každé měření si pečlivě zapisujte. Srovnejte obvody s průměry jednotlivých předmětů.

Řešení:

Cíl úlohy je pomocí badatelsky orientovaných aktivit přijít na číslo π a poté zapsat vztah pro výpočet délky kružnice.

Obr. 39: Řešení žáků I.

142 Úloha je v literatuře velmi dobře známá, inspirováno na semináři DVU – Badatelsky orientované vyučování

Pro tuto činnost mají žáci připraveny pracovní listy (příloha 4) s danými instrukcemi k zadaným úlohám. Kromě pracovních listů mají připraveny pět předmětů denní potřeby, provázek a nůžky pro uskutečnění experimentu.

Žáci pracují s pracovním listem podle pokynů učitele. U některých žáků je nutné uvedení přesného postupu: *Z provázku odstřihněte díl představující obvod měřeného předmětu. Z dalšího provázku odstřihněte díl představující průměr měřeného předmětu. Přikládáním kratšího dílu k dílu představujícího obvod zjistěte přibližně, kolikrát je díl obvodu větší než díl průměru.*

Obr. 40: Řešení žáků II.

Žáci formulují v pracovní skupině hypotézu. Je jim nutno sdělit, že číslo, označují vztah mezi délkou kružnice a jejím průměrem, se označuje řeckým písmenem π (pí). Je vhodné toto objevení doplnit o informace z oblasti historie matematiky.

Žáci si ověří svůj objevený vztah na dalších dvou předložených předmětech.

5.2.3 Eulerova hádanka

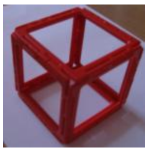
Úloha 1. Vytvořte modely čtyřstěnu, krychle, pravidelného čtyřbokého jehlanu, pravidelného pětibokého jehlanu, pravidelného šestibokého hranolu. Hledejte vztah mezi počtem stěn, vrcholů a hran v jednotlivých mnohostěnech.

Řešení:

Objektem zkoumání je zjišťování počtu vrcholů, hran a stěn konvexních mnohostěnů[143]. Pro činnost se žáky jsou vhodné moderní pomůcky typu Polydron, Geomag nebo Magformers, z nichž sestaví jednotlivé konvexní mnohostěny. V našem případě byla použita sada Polydron. Žáci postupují podle pracovního listu (příloha 5).

[143] Kopka, Jan. *Výzkumný přístup při vyučování matematice*. Ústí n.L.: UJEP, 2004. ISBN 80-7042-170-3.

Konečné řešení je:

					
počet	čtyřstěn	krychle	pravidelný čtyřboký jehlan	pravidelný pětiboký jehlan	pravidelný šestiboký hranol
vrcholů (v)	4	8	5	6	12
stěn (s)	4	6	5	6	8
v + s	8	14	10	12	20
hran (h)	6	12	8	10	18

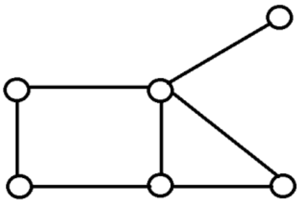
Tab. 15: Řešení Eulerovy hádanky

V příloze 5 je také ukázka řešení žáků 7. ročníku.

<u>Úloha 2.</u>[144] (pro využití na střední škole): Pokuste se najít analogii Eulerovy věty v teorii grafů, kde se mluví o počtu uzlů, hran a oblastí.

Řešení:

Na obrázku je znázorněn rovinný uzlový graf mající 6 uzlů, 7 hran a 3 oblasti (2 vnitřní, 1 vnější) a skutečně platí 6 + 3 - 7 = 2.



Obr. 41: Uzlový graf Eulerovy hádanky

5.2.4 Náměty problémových úloh

V této části uvedeme náměty na využití heuristických strategií v dalších úlohách. Bude ukázána problémová metoda a heuristický rozhovor přímo v praxi. Tyto zkušenosti jsou vybrány ze sborníku Jak učit matematice žáky ve věku 11–15 let[145].

---

[144] GRENÁROVÁ, Lenka. *Výzkumný přístup při řešení úloh* - závěrečná práce CCV

[145] STEHLÍKOVÁ,N. Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe In *Jak učit matematice žáky ve věku 11–15 let - Sborník příspěvků celostátní konference*. Hradec Králové: 2005. ISBN 80- 86843-08-4.

<u>Úloha 1.</u> Odhalování vět o shodnosti trojúhelníků – 8. ročník

Žáci po zopakování, co to jsou shodné trojúhelníky, dostali následující úkol: „Každý narýsuje jeden trojúhelník a pak bude diktovat ostatním ve skupině pokyny tak, aby oni narýsovali stejný trojúhelník. Pro kontrolu vzniklý trojúhelník vystřihněte a přiložte na původní trojúhelník. Úkolem je přijít na to, jaký je minimální počet údajů (velikost stran a úhlů), které musíte sdělit druhému, aby zreprodukoval váš trojúhelník.

Učitelka vysvětlí, co se bude dělat, zdůrazní hlavní cíl a řekne, že se mají ve skupině střídat a nemají se dívat na to, jaký trojúhelník dělá spolužák či spolužačka. V průběhu může prozradit, že hledají čtyři způsoby, jak vytvořit soubor instrukcí ke konstrukci shodného trojúhelníku.

Žáci pracují ve skupinách po dvou a po třech.

Nakonec je vhodné shrnout na tabuli věty o shodnosti trojúhelníků, přičemž je využito řešení žáků a jejich vyjádření.

<u>Úloha 2.</u> Otáčení o 90 stupňů - 8. třída

Ukázka heuristického rozhovoru:

Na tabuli jsou nakresleny dvě úsečky o délce 1 j. a 3 j.

U: „Máme-li úsečku délky 3 j. a úsečku na ni kolmou délky 1j. , co se stane, pokud to otočíme o 90 stupňů?

S: (vykřikují) „Jde to dokola“. „Doleva“ „Doprava“

U: „Jak to bude?“

S: „Jde to nahoru.“

Obr. 42: Úloha otáčení o 90°

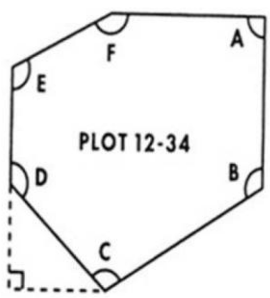
Učitel nechá žáky přemýšlet a diskutovat, popř. je navede návodnými otázkami na správný výsledek.

<u>Úloha 3.</u> Součet úhlů v mnohoúhelníku

Žáci měli doma změřit úhly v konvexním šestiúhelníku a sečíst je (viz obr. bez vyčárkovaných úseček). Učitel zjistí, zda všichni získali výsledek blízký 720 stupňům. Pak pokračuje:

U: „Kdybych vzal ten úhel D a přesunul ho sem dolů, změní se ten součet?“

S: „Ne.“



Obr. 43: Úloha Součet úhlů v mnohoúhelníku

U: „Neměl by, že? Proč? Stále mám kolik úhlů?“

S: „Stále máte šest.“

Učitel vede návodnou otázkou žáky k odpovědi. Ovšem žáci ještě nevědí, že počet vnitřních úhlů v mnohoúhelníku je klíčovou informací pro zjištění součtu úhlů! Hodina pokračuje problémovým vyučováním, popř. heuristickým rozhovorem.

<u>Úloha 4.</u> Figurální (obdélníková) čísla v aritmetice a geometrii

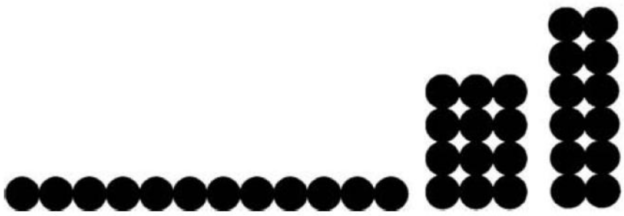
Metoda: Heuristická (objevování) – jednoduchost vede k pochopení.

Téma: Dělitelnost, obsahy pravoúhelníků.

Kompetence: Učí se hledat různá řešení, experimentují, tvoří závěry z vlastního poznání. Využívají již nabytých poznatků, podílejí se na společném objevování, vytvářejí logické úsudky.

Pomůcky: Mince či žetony, popř. čtverečkovaný papír.

Popis činnosti: Každý z žáků uspořádá daný počet mincí (popř. žetonů) do řad či sloupců tak, aby vznikl obdélník. Žáci hledají různá řešení, každý má nějaký nápad, všechny návrhy se zaznamenají na tabuli. Na základě tohoto experimentu žáci zjistí všechny dělitele čísla. Navíc zjišťují souvislosti mezi výpočtem obsahu obdélníka a děliteli či společným násobkem.



Obr. 44: Úloha Figurální čísla

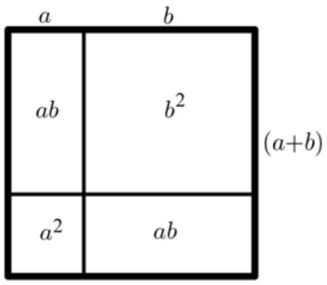
<u>Úloha 5.</u> Geometrie v algebře.

Metoda: Heuristická (objevování) – vhled vede k pochopení.

Téma: Výrazy, umocňování dvojčlenu.

Kompetence: Žáci využívají svých vědomostí z geometrie, sami zjišťují potřebné obsahy částí čtverce. Při práci spolupracují, rozvíjí své komunikační dovednosti, vyvozují závěry z vlastního poznání, které zapisují pomocí výrazu.

Popis činnosti: Žáci si zakreslí čtverec a rozdělí ho dvěma čarami tak, aby vznikly dva čtverce a dva obdélníky (vzor kapesníku). Popíšeme strany vzniklých útvarů (viz předloha). Zjistíme velikost strany původního čtverce a zapíšeme ve tvaru (a + b). Poté ze známých údajů



Obr. 45: Úloha Geometrie v algebře

vypočteme obsahy jednotlivých částí (vepíšeme do nákresu) a původního čtverce. Zapíšeme rovnost, kterou žáci objevili. Z obrázku vyčteme, že obsah čtverce $S = a^2 + 2ab + b^2$.

Poznámka: Tento přístup umožňuje vhled do podstaty umocňování dvojčlenu, žáci získávají uvědomělou dovednost a vnímají souvislosti mezi geometrií a algebrou. Metoda chrání (na rozdíl od algebraického přístupu výkladu) před formálním učením. V první fázi je vhodné pracovat s konkrétními číselnými údaji, např. $a = 2$, $b = 5$ a poté konkrétní příklady zobecnit a přejít na práci s proměnnou a výrazy. Je dobré i následují vztah odvodit a ověřit zjištěný závěr.

Algebraický přístup:

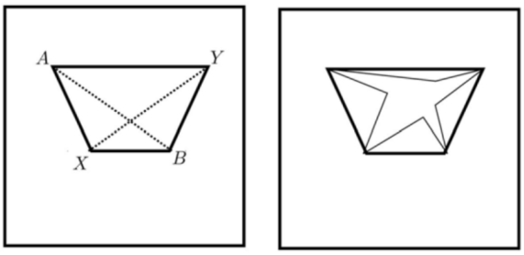
$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

<u>Úloha 6:</u> Geometrie papíru

Metoda: Manipulační činnost, objevování, experimentování.

Téma: Čtyřúhelníky.

Kompetence: Žáci zjišťují podstatné vlastnosti čtyřúhelníků experimentováním, učí se předvídat a odhadovat, bezprostředně pak své odhady ověřují a korigují.



Obr. 46: Úloha Geometrie papíru

Lze využít spolupráce a komunikace ve skupinách či dvojicích, přijímají navzájem objevy druhých, ty pak sami ověřují. Snaží se o vytvoření všech známých čtyřúhelníků. Toto cvičení podněcuje přirozený zájem žáků zjistit a ověřit všechny možné varianty polohy úhlopříček, které čtyřúhelníky generují. Při této činnosti se rozvíjí i kompetence pracovní.

Popis činnosti: Žáci experimentálně zjišťují, jak lze charakterizovat čtyřúhelníky pomocí úhlopříček. Na tvrdší papír žáci narýsují vždy dvě shodné protínající se úsečky v různých polohách (na obrázku 4 to jsou úsečky *AB*, *XY*). Podle narýsovaných úseček (*AB*, *XY*) se papír prořízne (nožíkem na podložce!) a opatrně přehnutím (podle spojnic *AY* , *BY* , *AX*, *BX*) naříznutých částí se odkrývají různé typy čtyřúhelníků. Samotné žáky překvapí, že takto nikdy nevytvoří rovnoběžník, zato se objeví např. deltoid a rovnoramenný lichoběžník.

S tímto motivem lze dále experimentovat.

Poznámka: Pokud žáci vědí, že práce budou sloužit k dekoraci třídy, rádi si vyhrají s různými motivy.

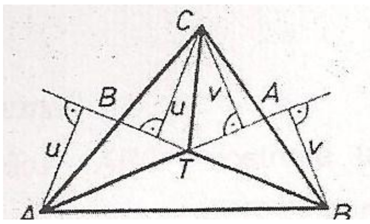
5.3 Úlohy pro vyučování matematice na střední škole

V této kapitole uvedeme vybrané problémové úlohy, kterými lze „oživit“ vyučování matematice na střední škole.

<u>Úloha 1.</u> Rozdělte trojúhelník úsečkami na tři části o stejném obsahu. [146]

Řešení:

Rozdělení trojúhelníku může být různé (např. na tři trojúhelníky se společným vrcholem, na jeden trojúhelník a dva lichoběžníky, na dva trojúhelníky a jeden lichoběžník…) Rozdělení trojúhelníku na tři části se stejným obsahem je možné jedině tehdy, když vytvoříme trojúhelníky ABT, ACT, BCT, kde T je těžiště daného trojúhelníku.



Obr. 47: Úloha 5.3.1

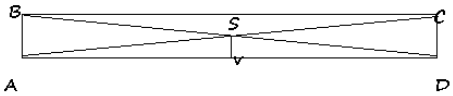
Trojúhelník ABT a ACT mají stejný obsah S, neboť mají společnou základnu AT a stejnou výšku v. Trojúhelníky ATB a CTB mají ze stejného důvodu stejný obsah Q. Platí tedy:

2S + Q = 2Q+S, z čehož vyplývá S = Q

<u>Úloha 2.</u> Existuje trojúhelník, jehož výšky jsou menší než 1 cm a jeho obsah je větší než 1m²?[147]

Řešení:

Můžeme sestrojit obdélník ABCD se stranami $|AB| = 1cm, |AD| = 500m.$ (náčrtek není uveden v přesném měřítku).



Obr. 48: Úloha 5.3.2

Jeho obsah je: S = a.b = 0,01.500 = 5 m^2. Trojúhelník ASD, kde S je střed obdélníka ABCD, má obsah S = 1,25 m^2 a všechny jeho výšky jsou menší než 1 cm. Tím je dokázáno, že takový trojúhelník existuje.

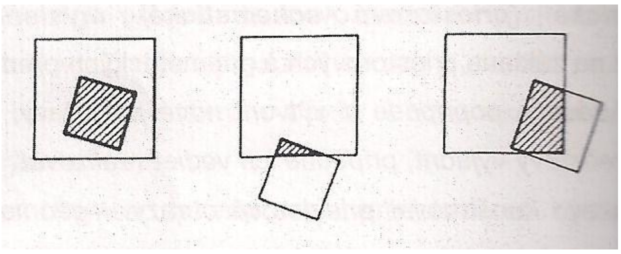
---

[146] ŠEDIVÝ, Ondrej a Josef Fulier. *Úlohy a humanizácia vyučovania matematiky*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2004. s. 151

[147] ŠEDIVÝ, Ondrej a Josef Fulier. *Úlohy a humanizácia vyučovania matematiky*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2004. s. 153

<u>Úloha 3.</u> Nakreslete dva čtverce tak, aby jejich průnik byl a, čtverec b, trojúhelník c, pětiúhelník. [148]

Řešení:



Obr. 49: Úloha 5.3.3

<u>Úloha 4.</u> Nakreslete útvar, který má tyto vlastnosti:

a, Je osově a středově souměrný

b, Je osově, ale není středově souměrný

c, Je středově, ale není osově souměrný

d, Má alespoň dvě různé osy souměrnosti

e, Má alespoň dva různé středy souměrnosti [149]

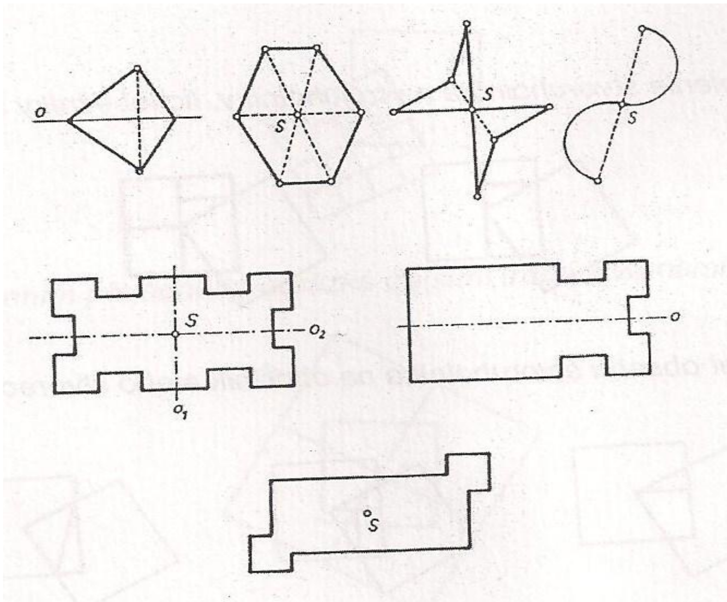
Řešení:

Lze postupovat dvojím způsobem:

1, Vybavit si geometrické útvary a podle jejich souměrností je přiřazovat do jednotlivých skupin

2, Na základě konstrukce obrazu bodu v souměrnosti sestrojit geometrický útvar požadovaného typu.

<u>Možnosti řešení:</u>



Obr. 50: Úloha 5.3.4

[148] ŠEDIVÝ, Ondrej a Josef Fulier. *Úlohy a humanizácia vyučovania matematiky*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2004. s. 210

[149] ŠEDIVÝ, Ondrej a Josef Fulier. *Úlohy a humanizácia vyučovania matematiky*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2004. s. 211.

<u>Úloha 5.</u> **Čtyři sídliště jsou umístěna v místech A,B,C,D do tvaru obdélníku o stranách AB=12km, AD=5 km. V bodě S, který je průsečíkem úhlopříček komplexu sídlišť, bude postavena teplárna, od níž povede teplovodní potrubí do každého sídliště. Náklady na výstavbu 26 km dlouhého potrubí činí 20 080 000 Kč. Šikovný matematik našel způsob, jak je možné zkrátit délku potrubí o více než 5 km. Svým nápadem ušetřil více než 4 000 000 Kč.** [150]

Řešení: Řešení této úlohy uvedeme za pomoci heuristického postupu dle akrynomu DITOR M. Zeliny.

D: Nakreslíme situaci – stavbaři postavili čtyři sídliště, která jsou na vrcholech obdélníku a doprostřed postavili teplárnu. Jaké problémy z toho mohou vzniknout? Zkuste vymyslet co nejvíce otázek, problémů,…

Studenti se dívají, kreslí a potom diskutují o možných problémech.

Učitel po diskusi stanoví problém: Jak vést potrubí do sídlišť?

I: Jak nejlépe položit potrubí? Aby mohli studenti vyřešit problém, je zapotřebí mnoho informací – studenti mají možnost se ptát - např. zda musí jít potrubí rovně, jaká je vzdálenost od teplárny k sídlišti, kolik stojí metr potrubí, kolik lidí tam bude pracovat a jaké mají stroje, apod.

Učitel namotivuje žáky např. známkou (kdo první ušetří svým návrhem 4 000 000 Kč a další budou ohodnoceni při dalších úsporách).

Ostatní potřebné informace žáci mohou zjistit ze zadání.

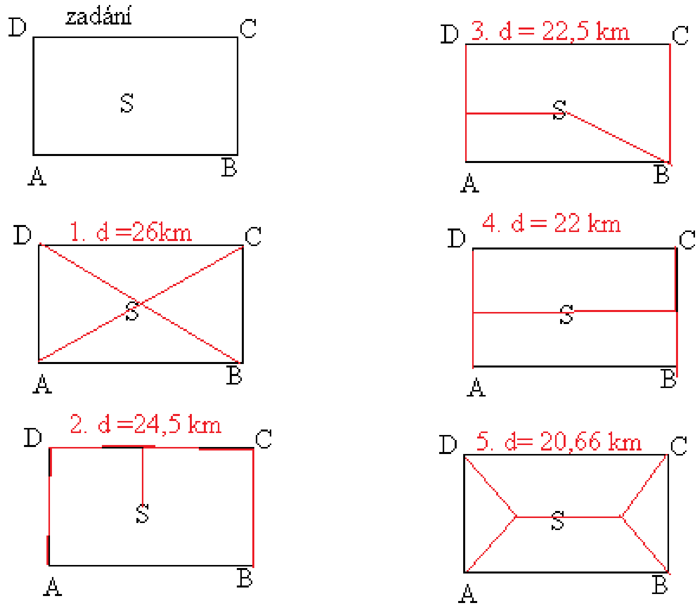
T: Studenti se pustí do práce – řeší, bádají a hledají co nejvíce možných způsobů, jak klást potrubí. Toto je etapa divergentní produkce. Studenti se hlásí, kreslí návrhy na tabuli, dokládají své návrhy výpočty, uvádějí důvody. Učitel podporuje v dalším a dalším bádání a hledání, vyzývá k fluenci myšlení, v hledání co nejvíce řešení každého ze studentů.

O: Až uplyne stanovený čas, přichází čas hodnocení – skupiny diskutují nad všemi možnostmi řešení, které byly nalezeny – zdůrazňují důvody, dokládají výpočty, každý si vyhodnotí svá řešení. Najde se nejlepší řešení a odůvodní.

R: V posledním kroku jde o zdůraznění výsledku a metody, jakou úlohu řešili (např. experiment, pokud-omyl, apod). a můžeme rozvést další diskusi o podobných či následných problémových úlohách a jejich případném řešení.

[150] ZELINA, Miron. *Tvořivost v matematice*. Olomouc: Krajský pedagogický ústav v Ostravě, 1990. ISBN 80-900158-9-1. s. 75 - 77

Výsledná řešení jsou:



Obr. 51: Úloha 5.3.5

6 ZÁVĚRY, PŘÍNOS A DOPORUČENÍ PRO PEDAGOGICKOU TEORII A PRAXI

Zpracovaná disertační práce je strukturována do dvou základních částí, které se dále člení na konkrétní kapitoly a podkapitoly.

Disertační práce si kladla v teoretické části za cíl zpracování uceleného pohledu na problematiku heuristických přístupů a jejich využití ve vyučování. Dílčí cíle obsahovaly vymezení základních pojmů, analyzování a komparaci jednotlivých teoretických východisek metod a forem práce využívajících heuristických přístupů, zpracování přehledu výukových metod a forem práce využívajících heuristických přístupů a strategií, jejich základní zásady, východiska a postupy a v neposlední řadě popsání možnosti využití heuristických přístupů ve vyučování matematice.

Teoretická část disertační práce vymezuje řešenou problematiku, popisuje její současný stav a vytváří teoretické zázemí pro realizaci výzkumného šetření.

Úvodní kapitola je věnována zamyšlení se nad aktuálností dané problematiky, stručně popisuje vymezení výzkumných problémů, cílů práce, její struktury a metodologii výzkumu.

První kapitola vymezuje základní pojmy. Ty byly pro účely disertační práce rozděleny do širšího a užšího kontextu. V této první kapitole jsou charakterizovány pojmy v širším kontextu, které souvisejí s podstatou či východisky heuristických přístupů. Mezi ty základní patří konstruktivistický přístup, výukové metody, zvláště ty aktivizující, dále pojmy aktivita, samostatnost a tvořivost žáka a motivace. Důvodem výběru právě těchto pojmů je fakt, že východiskem heuristických metod je konstruktivistické pojetí, jsou zařazovány mezi aktivizační výukové metody, využívají aktivity, samostatnosti a tvořivosti žáků a jsou vhodnou motivací k učení.

Druhá kapitola se zabývá teoretickými východisky a klíčovými pojmy v užším kontextu. Charakterizuje pojem heuristika jak z obecného hlediska, tak jako tvůrčí řešení problémů. Dále popisuje jednotlivé heuristické metody.

Třetí kapitola se zužuje již na heuristické metody ve vyučování a popisuje jednotlivé možnosti jejich využití. Podrobně charakterizuje heuristickou metodu a její submetody pro využití ve vyučování, zmiňuje pozitivní a negativní stránky výuky touto metodou a připomíná pedagogické výzkumy, které se zabývaly heuristickou metodou či problémovým vyučováním. Zaměřuje se dále na problémové vyučování, badatelsky orientované vyučování a na heuristické metody ve vyučování matematice.

Hlavním cílem empirické části bylo zjistit volbu strategií žáků a studentů při řešení slovních úloh a vytvořit sborník heuristických úloh.

Empirická část disertační práce je tedy rozdělena do dvou hlavních kapitol, které číselným označením navazují na kapitoly teoretické části práce.

Čtvrtá kapitola se věnuje výzkumnému šetření. Obsahuje vymezení cílů výzkumu, popisu metodiky, konkretizuje výzkumné problémy a otázky. Zabývá se použitými výzkumnými technikami, charakteristikou výzkumného vzorku a popisu průběhu výzkumného šetření. Jsou zde uvedena řešení jednotlivých úloh zadaného nestandardizovaného testu, v rámci kvalitativního výzkumu jsou popsány jednotlivé strategie řešení daných úloh a analyzována jednotlivá řešení respondentů. V závěru této kapitoly jsou popsány souhrnné výsledky výzkumu, které jsou doloženy na přehledných tabulkách a grafech.

Kapitola pátá obsahuje sborník heuristických úloh, které jsou využitelné ve vyučování matematice.

Celou práci uzavírá přílohová část, kterou tvoří celkem pět dokumentů doplňující teorii i empirii disertační práce.

6.1 Přínos práce

Za hlavní přínos disertační práce v rovině pedagogické teorie považujeme komplexní zpracování teorií heuristických přístupů a ucelený pohled na tuto problematiku jak z teoretického hlediska, tak z možnosti využití ve školní praxi. Empirická část přispívá zjištěním preferovaných strategií při řešení matematických úloh a jejich kvalitativní analýzy. Vytvořený sborník heuristicky řešených úloh je vhodnou pomůckou do hodin matematiky. Daný sborník nabízí souhrn aktivit a zejména slovních úloh využívajících heuristických přístupů pro rozvoj matematických kompetencí žáků a studentů.

Teoretická oblast práce společně se zpracovanými výsledky výzkumného šetření mohou být využity v odborných didaktikách a jsou využitelné v profesní přípravě studentů učitelství na budoucí povolání.

Disertační práce má přínos také v oblasti pedagogické praxe. Teoretické informace, výsledky výzkumného šetření a sborník heuristických úloh mohou být zdrojem informací a inspirace pro učitele základních i středních škol o možnostech využití heuristických přístupů ve vyučování matematice.

6.2 Doporučení pro vědu a praxi

Pro pedagogickou vědu může náš pokus o ucelený pohled na heuristiku sloužit jako podnět pro obohacení vysokoškolské pedagogiky, která by mohla tohoto zdroje informací využít jako studijního materiálu v obecné i odborné didaktice. Studenti učitelství mají s heuristicky orientovaným vyučováním malé nebo žádné zkušenosti, tvůrčí řešení problémů je jim cizí a poté při přechodu do praxe mají problém tyto metody ve výuce uplatnit.

Pro pedagogickou praxi doporučujeme budoucím i stávajícím učitelům prostudování základů heuristických metod a postupné zavádění badatelsky orientovaných přístupů do vyučování. Tento způsob práce si musí nejdříve osvojit učitelé, aby jej mohli ve vyučování efektivně využívat. Jak pro učitele, tak pro žáky, je tento způsob vyučování přínosný z hlediska rozvoje tvořivosti, logického uvažování a schopnosti řešit problémy.

7 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY A PRAMENŮ

AVERBACH, Bonne and Orin CHEIN. *Problem Solving Through Recreational Mathematics*. New York (USA): Dover Publications, 2000. ISBN 978-0-486-40917-7.

BAKALÁŘ, Eduard a Pavel ERAZIM. *Kapitoly z psychologie tvořivosti.* Plzeň: Dům techniky ČSVTS, 1986, ISBN 222970-90

BLAŽKOVÁ, Růžena. *Matematická kouzla.* Komenský. 2002, roč. 126, č. 1-2, ISSN 0323-0449.

BERTRAND, Yves. *Soudobé teorie vzdělávání*. Praha: Portál, 1998. ISBN 80-7178-216-5.

ČÁBALOVÁ, Dagmar. *Pedagogika*. Praha: Grada, 2011. ISBN 978-80-247-2993-0.

ČÁP, Jan a Jiří MAREŠ. *Psychologie pro učitele*. Praha: Portál, 2001. ISBN 80-7178-463-X

ENGEL, Arthur. *Problem-Solving Strategies. (Problem Books in Mathematics)*. Springer, 1997. ISBN 978-0387982199

ENGEL Arthur, VARGA, Tomas a Willi WALSER. *Zufall oder Strategie?* Stuttgart: Ernst Klett Verlag, 1974. ISBN 3-12-902000-4.

GAVORA, Peter. *Úvod do pedagogického výzkumu*. Brno: Paido, 2010. ISBN 978-80-7315-185-0.

GRENÁROVÁ, Lenka. *Výzkumný přístup při řešení úloh* - závěrečná práce CCV

HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál, 2001. ISBN 80-7178- 581-4.

HELUS, Zdeněk et al. *Psychologie školní úspěšnosti žáků.* Praha: SPN, 1979.

HENDL, Jan. *Kvalitativní výzkum.* Praha: Portál, 2008. ISBN 978-80-7367-485-4.

HLAVSA, Jaroslav. *Psychologické základy teorie tvorby.* Praha: Academia, 1985. ISBN 21-087-85.

HONZÍKOVÁ, Jarmila. *Nonverbální tvořivost v technické výchov*ě. Plzeň: Západočeská univerzita,2008. ISBN 978-80-7043-714-8.

Hrátky s matematikou. Příručka pro učitele. Olomouc: Votobia, 2008. ISBN 978-80 -7220-314-7.

CHRÁSKA, Miroslav. *Metody pedagogického výzkumu: základy kvantitativního výzkumu*. Praha: Grada, 2007. ISBN 978-80-247-1369-4.

KALHOUS, Zdeněk a Otto OBST. *Školní didaktika.* Praha: Portál, 2002. ISBN 80-7178-253-X.

KOPKA, Jan. *Hrozny problémů ve školské matematice.* Ústí nad Labem: UJEP, 1999. ISBN 80- 7044-247-6.

KOPKA, Jan. *Umění řešit matematické problémy*. Praha: HAV, 2013. ISBN 978-80-903625-5-0.

KOPKA, Jan. *Výzkumný přístup při výuce matematiky*. Ústí nad Labem: UJEP, 2004,. ISBN 80-7042-170-3.

KOPKA, Jan. *Zkoumání ve školské pedagogice*. Ružomberok: Katolícká univerzita v Ružomberoku, 2006. ISBN 80-8084-064-4.

KOTRBA, Tomáš a Lubor LACINA. *Praktické využití aktivizačních metod ve výuce.* Brno: Barrister a Principal, 2010. ISBN 978-80-87029-12-1.

KVĚTOŇ, Pavel. *Kapitoly z didaktiky matematiky.* Ostrava: PdF, 1982.

KYRIACOU, Chris. *Klíčové dovednosti učitele*: *Cesty k lepšímu vyučování*. Praha: Portál, 1996. ISBN 80-7178-022-7.

LOKŠOVÁ, Irena a Jozef LOKŠA. *Tvořivé vyučování*. Praha: Grada Publishing a. s., 2003. ISBN 80-247-0374-2.

LOKŠOVÁ , Irena a Josef LOKŠA. *Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole*. Praha: Portál, 1999. ISBN 80-7178-205-X.

MAREŠ, Jiří. *Styly učení žáků a studentů.* Praha: Portál, 1998.ISBN 80-7178-245-7.

MAŤUŠKIN, A. M. *Problémové situácie v myslení a vo vyučování.* Bratislava: Slovenské pedagogické nakladatelstvo, 1973. 67-447-73

MAŇÁK, Josef. *Rozvoj aktivity, samostatnosti a tvořivosti žák*ů. Brno: Masarykova univerzita, 1998. ISBN 80-210-1880-1.

MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5.

MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Cesty pedagogického výzkumu*. Brno: Paido, 2004. ISBN 80-7315-078-6.

MAŇÁK, Josef a kol. *Alternativní metody a postupy*. Brno: Masarykova univerzita,1997. ISBN 80-210-1549-7.

MAŇÁK, Josef. *Stručný nástin metodiky tvořivé práce ve škole*. Brno: Paido, 2001. ISBN 80-7315-002-6.

NOVÁK, Bohumil. *Matematika III. Několik kapitol z didaktiky matematiky.* Olomouc: UP, 2000. ISBN 80-7067-979-4.

NOVÁK, Bohumil. *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky 1 : pro učitelství 1. stupně ZŠ*. Olomouc : Univerzita Palackého, 2003. ISBN 80-244-0691-8.

NOVOTNÁ, Jarmila. *Analýza řešení slovních úloh.* Praha: PdF UK, 2000. ISBN 80-7290-011-0

OBST, Otto. *Didaktika sekundárního vzdělávání*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2006. ISBN 80-244-1360-4.

PECINA, Pavel. *Tvořivost ve vzdělávání žáků*. Brno: PdF MU, 2008. ISBN 978-80-210-4551-4.

PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. *Metody a formy aktivní práce žák*ů *v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4834-8.

PELIKÁN, Jiří. *Základy empirického výzkumu pedagogických jevů*. Praha: Karolinum, 2011. ISBN 978-80-246-1916-3

PETTY, Geoffrey. *Moderní vyučování.* Praha: Portál, 2008. ISBN 978-80-7367-427-4.

PIETRASINSKI, Zbigniew. *Psychologie správného myšlení.* Praha: Orbis, 1964. ISBN 11-127-64.

POLYA, George. *How to solve it*. London (UK): Penguin Books, 1990. ISBN 978-0-14-012499-6.

PRŮCHA, Jan, WALTEROVÁ, Eliška a Jiří MAREŠ. *Pedagogický slovník*. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-647-6.

PRŮCHA, Jan. *Moderní pedagogika.* Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-503-5.

PRŮCHA, Jan. *Pedagogická encyklopedie*. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-546-2.

PRŮCHA, Jan. *Přehled pedagogiky: úvod do studia oboru.* Praha: Portál, 2006. ISBN 80-7178-944-5.

SITNÁ, Dagmar. *Metody aktivního vyučování: spolupráce žáků ve skupinách.* Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-346-1.

SIVOŠOVÁ, Alica. *Heuristika v matematike na strednej škole: Použitie heuristickej metódy vyučovania vo vybraných celkoch učiva.* Nitra: Slovenské pedagogické nakladatelstvo v Bratislave, 1987. 67-013-87.

SKALKOVÁ, Jarmila. *Obecná didaktika.* Praha: Grada, 2007. ISBN 978-80-247-1821-7.

SKUTIL, Martin. *Základy pedagogicko-psychologického výzkumu pro studenty učitelství.* Praha: Portál, 2011. ISBN 978-80-7367-778-7.

SMÉKAL, Vladimír. *Úloha školy v rozvíjení aktivity, samostatnosti a tvořivosti žák*ů. In *Tvořivá škola: sborník z celostátního semináře k problematice tvořivé školy, který se konal dne 16.9.1998 na Pedagogické fakult*ě *MU v Brn*ě*.* Brno:Paido, 1998. ISBN 80-85931-63-X.

STEHLÍKOVÁ,Naďa. Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe In *Jak učit matematice žáky ve věku 11–15 let - Sborník příspěvků celostátní konference*. Hradec Králové: 2005. ISBN 80- 86843-08-4

STÖRIG, Hans Joachim. *Malé dějiny filosofie*. Kostelní Vydří: Karmelitánské nakladatelství. 2000. ISBN 80-7192-500-4.

ŠEDIVÝ, Ondrej a Jozef FULIER. *Úlohy a humanizácia vyučovania matematiky*. Nitra:

Univerzita Konštantína Filozofa, 2004. ISBN 80-8050-700-7.

ŠŤÁVA, Jan. *Brainstorming a myšlenkové mapy – metody pro tvořivé učení a řízení*. In *Alternativní metody a postupy*. Brno: Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity Brno, 1997. ISBN 80-210-1549-7.

TAO, Terence. *Solving mathematical problems.* New York (USA): Oxford university press., 2006. ISBN 978-0-19-920561-5.

TICHÁ, Marie. *K strategiím řešení úloh v učení žáků matematice na ZŠ*. Praha, 1982.

VALIŠOVÁ, Alena a Hana KASÍKOVÁ.(eds.) *Pedagogika pro učitele*. Praha: Grada Publishing, a.s., 2011. ISBN 978-80-247-3357-9.

VOTRUBA, Ladislav. *Rozvíjení tvořivosti techniků.* Praha: Academia, 2000. ISBN 80-200-0785-7.

ZELINA, Miron. *Aktivizácia a motivácia žiakov na vyučování.* Banská Bystrica: Metodické centrum v Banskej Bystrici, 1990. ISBN 80-85415-34-8.

ZELINA, Miron. *Tvořivost v matematice*. Olomouc: Krajský pedagogický ústav v Ostravě, 1990. ISBN 80-900158-9-1.

ZELINA, Miron a Eva JAŠŠOVÁ. *Tvořivost – piata dimenzi.* Bratislava: Smena, 1984. 73-053-84.

ZELINA, Miron a Milota ZELINOVÁ. *Rozvoj tvorivosti detí a mládeže.* Bratislava: SPN, 1990. ISBN 80-08-00442-8.

ŽILKOVÁ, Katarina. *Heuristika v informatizácii výučby matematiky*. Bratislava: Metodicko - pedagogické centrum, 2006. ISBN 80-8052-261-8.

ELEKTRONICKÉ ZDROJE:

BLAŽKOVÁ, Růžena. *Několik nestandardních úloh k tematickému okruhu Číslo a proměnná*. Metodický portál RVP. [online] poslední revize 7. 4. 2007. [cit. 14. 5. 2007]. Dostupný z http://www.rvp.cz.

http://www. pdf.truni.sk/vsr

http://kdf.mff.cuni.cz/heureka/

http://www.fibonacci-project.eu/ nebo http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/fibo.html

LIŠKOVÁ, Hana. *Postoje žáka k matematice*. [online]. [cit. 20.4.2011]. Dostupné na internetu: < class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/FileDownload.aspx?FileID=107>.

MOLNÁR, Josef, SCHUBERTOVÁ, Slavomíra a Vladimír VANĚK. *Konstruktivismus ve vyučování matematice*. [online]. [cit. 20.4.2010]. Dostupné na internetu: <http://esfmoduly.upol.cz/publikace/molnar.pdf>.

PAPÁČEK, M. Badatelsky orientované přírodovědné vyučování cesta pro biologické vzdělávání generací Y, Z a alfa? IN ***Scientia in educatione*** 1(1), 2010 s.40 [on line], [cit. 15.1.2013]. Dostupné na WWW: http://www.scied.cz/

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online 25.8.2013]. Dostupné na internetu: http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-skolstvi/upraveny-ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani<http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPZV_2007-07.pdf>.

8 SEZNAM PUBLIKAČNÍCH AKTIVIT A DALŠÍCH ČINNOSTÍ

Publikační činnost

ŠŤASTNÁ, Alena. *Dělitelnost v učivu základní školy*. In MAKOS 2009. Sborník materiálů z podzimní péče o talenty. 1.vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2010. s. 54-59. ISBN 978-80-244-2585-6.

ŠŤASTNÁ, Alena. *Řízené objevování v matematice na 1. stupni ZŠ*. In Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, Facultas Paedagogica, Mathematica - Matematické vzdělávání v kontextu proměn primární školy. Sborník příspěvků. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2010. s. 294-297. ISSN 0862-9765.

ŠŤASTNÁ, Alena. *Controlled discovering in mathematics education at primary school*. In Mathematical Education in a Context of Changes in Primary school. Sborník abstraktů. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2010. s. 62. ISBN 978-80-244-2512-2.

JANKŮ, Magdalena, ŠŤASTNÁ, Alena a Kateřina ŠUPÍKOVÁ. *1.ročník studentské grantové soutěže na UP - prezentace schválených projektů na katedře matematiky*. In Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, Facultas Paedagogica, Mathematica- Matematické vzdělávání v kontextu proměn primární školy. Sborník příspěvků. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2010. s. 330-332. ISSN 0862-9765.

ŠŤASTNÁ, Alena. *Řízené objevování v matematice na 1. a 2. stupni ZŠ*. In XXVIII. Mezinárodní kolokvium o řízení vzdělávacího procesu. Sborník abstraktů a elektronických verzí recenzovaných příspěvků na CD-ROMu. 1. vyd. Brno: Univerzita obrany, 2010. s. 42. ISBN 978-80-244-2512-2.

ŠŤASTNÁ, Alena. *Projekt „Heuristické přístupy ve vyučování matematice“*. In MAKOS 2010. Sborník materiálů z podzimní péče o talenty. Malá Skála u Turnova, 2010.

ŠŤASTNÁ, Alena. *Heuristické přístupy ve vyučování matematice*. In Aktuální problémy pedagogiky ve výzkumech studentů doktorských studijních programů VIII. Olomouc, 2010.

JANKŮ, Magdalena a Alena ŠŤASTNÁ. *Inspirace ze světové výstavy učebních pomůcek v Basileji.* In Tvořivost v počátečním vyučování matematiky. 1. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2011. s. 251-252. ISBN 978-80-7043-992-0.

ŠŤASTNÁ, Alena. *Heuristika v matematice*. In VIII. Vedecká konferencia doktorandov na Pedagogické fakultě Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre - „Človek ako subjekt edukácie a objekt pedagogickej vedy“. Nitra, 2011.

ŠŤASTNÁ, Alena a Magdalena JANKŮ. *Matematika, předmět propedeutického charakteru, pro studijní obor Informační výchova se zaměřením na vzdělávání*. In XXIX. Mezinárodní kolokvium o řízení vzdělávacího procesu. Sborník abstraktů a elektronických verzí recenzovaných příspěvků na CD-ROMu. 1. vyd. Brno: Univerzita obrany, 2011. s. 44. ISBN 978-80-7231-779-0.

FLEKOVÁ, Alena. *Řešení problémových úloh ve vyučování matematice na základní škole*. In X. Vedecká konferencia doktorandov „Výzvy a inšpirácie v pedagogických vedách“ na Pedagogické fakultě Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre. Nitra, 2013 – v tisku

FLEKOVÁ, Alena a Bohumil NOVÁK. *Inquiry-based mathematics education – a challenge and a chance*. In *Sborník z Č –P- S konference.* Litoměřice, 2013. V tisku.

Další odborné aktivity

Hlavní řešitelka projektu Studentské grantové soutěže na Univerzitě Palackého v Olomouci 2010 – projekt „Heuristické přístupy ve vyučování matematice“, reg. č. PdF_2010_054.

Spoluřešitelka projektu Studentské grantové soutěže na Univerzitě Palackého v Olomouci 2010 – projekt „Využití učebních pomůcek ve výuce matematiky“, reg. č. PdF_2010_044. Hlavní řešitelka: Mgr. Magdalena Janků

Spoluřešitelka projektu Studentské grantové soutěže na Univerzitě Palackého v Olomouci 2010 – projekt „Výzkum úrovně matematické gramotnosti studentů učitelství matematiky na fakultách připravujících učitele“, reg. č. PdF_2010_045. Hlavní řešitelka: Mgr. Kateřina Šupíková

Studijní zahraniční pobyt (25. – 30. 10. 2010) v Basileji (Švýcarsko) za účelem návštěvy mezinárodního veletrhu didaktické techniky WORLDDIDAC BASEL 2010 a Mathematisches Institut der Universität Basel.

Studijní zahraniční pobyt (1. – 5. 11. 2010) v Londýně (UK) za účelem studia zahraniční literatury, návštěvy univerzity University College London, vědecké knihovny a zdejší katedry matematiky.

Vystoupení na Didaktickém semináři katedry matematiky s příspěvkem „Inspirace ze světové výstavy v Basileji“, spolu s Mgr. Magdalenou Janků a Mgr. Kateřinou Šupíkovou. 10. 11. 2010, Pedagogické fakultě Univerzity Palackého v Olomouci.

Hlavní řešitelka projektu Fondu rozvoje vysokých škol na rok 2011 „Inovace a zkvalitnění předmětů Matematika I a Matematika II pro studijní obor Informační výchova se zaměřením na vzdělávání“, reg. č. 2108/2011.

Hlavní řešitelka projektu Studentské grantové soutěže na Univerzitě Palackého v Olomouci 2011 – projekt „Heuristika ve vyučování matematice“, reg. č. PdF_2011_032.

Spoluřešitelka projektu Studentské grantové soutěže na Univerzitě Palackého v Olomouci 2011 – projekt „Učební pomůcka ve vyučování matematice“, reg. č. PdF_2011_029. Hlavní řešitelka: Mgr. Magdalena Janků

Účast v projektu ESF „Inovativní přístup k přípravě budoucích učitelů matematiky s využitím modulů v anglickém jazyce", reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0104 hlavní řešitelka: PhDr. Radka Dofková, Ph.D.

9 SEZNAM TABULEK

10 SEZNAM GRAFŮ

11 SEZNAM OBRÁZKŮ

13 SEZNAM PŘÍLOH

Příloha 1 – Sbírka didaktických her

V příloze 1 uvádíme baterii odzkoušených didaktických her ve vyučování matematice na základní škole. Celou tuto část rozdělujeme na 3 základní okruhy – 1. stupeň základní školy, 2. stupeň základní školy a přehled didaktických pomůcek, které jsou vhodné pro aktivizování žáků, pro rozvoj jejich tvůrčího a logického myšlení, které je nezbytné pro následné použití heuristických strategií v praxi.

Popis jednotlivých didaktických her je pro lepší orientaci v textu uváděn s následující strukturou:

1) Název hry.
2) Pomůcky nezbytné pro danou hru.
3) Obtížnost s uvedením ročníku, pro který je hra vhodná.
4) Výchovně–vzdělávací cíle popisují, které schopnosti a dovednosti si žáci za pomoci dané hry procvičí a osvojí.
5) Popis hry, kde jsou uvedena pravidla hry a návod, jak hru realizovat ve výuce.
6) Vlastní hodnocení hry na základě pedagogické praxe na základní škole.

1. stupeň

Matematický král

<u>Pomůcky:</u> Zásoba zadání úloh pro učitele.

<u>Obtížnost:</u> 2.- 5. ročník.

<u>Cíl:</u> Žáci si procvičí učivo počítání malé násobilky z paměti.

<u>Popis hry:</u> „Matematický král“ je velmi oblíbenou hrou na 1. stupni, často ji žáci vyžadují i na 2. stupni ZŠ. Žáci jsou ve dvojicích, přičemž každé dvojici učitel řekne zadání. Oba žáci co nejrychleji vysloví výsledek. Ten z dvojice, který odpoví správně a rychleji, pokračuje ve hře dál a utváří novou dvojici s dalším výhercem. Poražení si sedají na svá místa, dávají pozor a fandí spolužákům. Hra končí, jakmile z poslední dvojice zůstane vítěz.

<u>Vlastní hodnocení hry:</u> Tato hra má velký úspěch. Vzhledem k požadavkům tuto hru hrát i na 2. stupni vznikla modifikace s názvem „NEJ matikář“.

Zamrzlík

Pomůcky: zásoba zadání úloh pro učitele.

Obtížnost: 2.- 5. ročník.

Cíl: Žáci si procvičí učivo počítání malé násobilky z paměti.

Popis hry: Hra „Zamrzlík“ je také hra na procvičování jako „Matematický král“. Zde ale prohrává ten žák, jenž zůstane stát poslední. Na začátku hry se všichni žáci postaví. Učitel vyvolá jedno z žáků a vysloví zadání úlohy. Pokud žák odpoví správně, tak si sedá na své místo a vyvolá spolužáka na další zadání. Jestliže žák odpoví špatně, zůstává stát a vyvolá dalšího žáka. Hra jde prakticky hrát také jako „matematický král“ ve dvojicích s tím, že kdo odpoví rychleji a správně, tak si sedá zpět na své místo.

Hra končí posledním stojícím žákem. Určitou modifikací je také způsob hry, kdy správně odpovídající žák sám vymýšlí nové zadání pro svého spolužáka.

Vlastní hodnocení hry: Tato hra patří mezi mladšími dětmi spíše k neoblíbeným hrám, neboť pro ně má demotivující účinek. Mladší žáci těžce nesou pocit, že nepatří k těm nejlepším. Starší žáci tuto hru již hrají rádi, ale raději soupeří ve dvojicích než odpovídají samostatně jako u zkoušení. Z vlastních zkušeností doporučujeme obě uvedené hry střídat.

2. stupeň

Soutěž v řadách

Pomůcky: Tabule, školní sešity, psací potřeby.

Obtížnost: Hra je určena pro žáky 1. i 2. stupně ve fázi procvičování či opakování učiva.

Cíl: Žáci si procvičí (zopakují) dané učivo matematiky – vhodné je na 1. stupni procvičování operací sčítání, odčítání, násobení, dělení. Na 2. stupni učivo o zlomcích, algebraických výrazech, lineárních rovnicích apod.

Popis hry: Žáci jsou v lavicích ve třech řadách – řadu u dveří označíme na tabuli písmenem **D**, řadu uprostřed písmenem **U** a řadu u okna písmenem **O**. Je nutné zajistit, aby počet žáků byl v řadách stejný. Poté hra začíná. Učitel zadá úlohu zapsání na tabuli, žáci pracují samostatně v lavicích počítáním do sešitu. Jakmile kterýkoliv z žáků příklad vypočítá do školního sešitu, zvedá ruku. Učitel sleduje počet zvednutých rukou a po uvážení řekne „stop“, žáci ihned ukončují práci a odkládají psací potřeby. Poté zapíše na tabuli správný výsledek a vyzve, aby se přihlásili ti žáci, kteří jej správně vypočítali. Spočítá po řadách počet zvednutých rukou a na tabuli připisuje bod té skupině žáků, kde bylo nejvíce správných odpovědí. Učitel provede namátkovou kontrolu, zda přihlášení žáci opravdu příklad správně vypočítali. Mezitím žáci, kteří měli zadaný příklad špatně vypočítaný, si jej opraví a hra pokračuje. Vyhrává ta skupina žáků, která má nejvíce bodů.

Vlastní hodnocení hry: Hra je výborná v tom, že se dá využít na jakékoliv učivo. Zařazovali jsme ji jako procvičení na začátek hodiny nebo jako opakování po ukončení tematického celku. Hra se výborně osvědčila také v suplovaných hodinách zvláště ve třídách, kde učitel běžně nevyučuje. Žáci, ač pracovali samostatně, táhli v řadě za jeden provaz. U starších ročníků byla nutná větší kontrola správných výsledků a oprava nesprávných řešení. Žáci mají tuto hru velmi v oblibě, neboť si procvičili probírané učivo zábavnou a soutěživou formou.

NEJ matikář

Pomůcky: Cedule z tvrdého papíru s nápisem „NEJ matikář“, zásoba zadání úloh pro učitele.

Obtížnost: 8. a 9. ročník

Cíl: Žáci si procvičí učivo druhých mocnin z paměti. Žáci si osvojí princip umocňování jak koeficientu, tak i proměnné na druhou.

Popis hry: „NEJ matikář“ je modifikací hry „Matematický král“ často hranou na 1. stupni při procvičování malé násobilky. Žáci jsou ve dvojicích, přičemž každé dvojici učitel řekne zadání. Oba žáci co nejrychleji vysloví výsledek. Ten z dvojice, který odpoví správně a rychleji, pokračuje ve hře dál a utváří novou dvojici s dalším výhercem. Poražení si sedají na svá místa, dávají pozor a fandí spolužákům. Hra končí, jakmile z poslední dvojice zůstane vítěz. Učitel předá žákovi ceduli s nápisem „NEJ matikář“, kterou si žák nechá před sebou na lavici do konce hodiny matematiky.

Vlastní hodnocení hry: Tato hra, tak jako „Matematický král“, má velký úspěch. Většina žáků 2. stupně si obě tyto varianty hry vždy ráda zahraje. Novinka v podobě cedule s nápisem „NEJ matikář“ žáky oslovila a vždy se snažili hru vyhrát. Nutností je u této modifikace hry dostatečná zásoba zadání úloh, které jsou přiměřené znalostem žáků.

Správná trojka

Pomůcky: Karty se zadáním úloh, židle pro žáky.

Obtížnost: 8. ročník ZŠ

Cíl: Žáci si osvojí užití vzorců pro umocňování $(a+b)^2$, $(a-b)^2$.

Popis hry: Pro realizaci je nutná mírná úprava třídy, tzn. postavení vedle sebe vždy tří židlí s tím, že další trojice je vždy za nimi - např. k prostřední řadě školních lavic vždy přidat jednu židli. Žáci utvoří libovolné trojice (nebo jsou trojice určeny učitelem) a posadí se na židle vedle sebe.

Učitel předá první trojici kartičku se zapsanou úlohou. Pokud všichni v trojici odpoví podle následujících kritérií správně, dostávají bod. Bodové skóre se zapisuje na tabuli a trojice žáků, jež získá nejvíce bodů, vyhrává.

Konkrétní příklad:

1) Učitel předloží žákům kartičku na níž je zadáno $(xy-4z)^2=$.
2) První žák umocní 1. člen. $\Rightarrow$ Vysloví x^2y^2.
3) Druhý žák doplní znaménko a prostřední člen trojčlenu. $\Rightarrow$ Vysloví $-8xyz$.
4) Poslední žák určí znaménko a umocní 2. člen. $\Rightarrow$ Dostáváme $+16z^2$.

Je nutné, aby se uskutečnily alespoň tři kola pro prostřídání všech žáků v odpovědích.

Vlastní hodnocení hry: Tato hra je zařazována na začátek hodiny, aby žáci mohli o přestávce nachystat židle. Žáky tato hra celkem zaujala, procvičování vzorců je takto bavilo víc, než jen při psaní do sešitu. Bohužel se často stává, že si žáci navzájem v trojici i mimo ni pomáhají, radí, že žáci hádají výsledek, aniž by se zamysleli, a tím tato hra ztrácí procvičovací charakter.

Kolo mlýnský

Pomůcky: Karty se zadáním úloh, židle pro žáky.

Obtížnost: 8. ročník ZŠ

Cíl: Žáci si procvičí umocňování pomocí vzorců $(a-b)^2, (a+b)^2, a^2-b^2$.

Popis hry: Hra má stejný postup jako hra „Správná trojka“ s rozdílem, že všichni žáci sedí v kruhu. Učitel vždy podá žákovi kartu se zadáním úlohy. Tato hra má dvě možnosti – buď nemá soutěžní charakter (nikdo nevyhrává), slouží jen k osvojení a procvičení učiva, anebo má soutěžní charakter s tím, že každý, kdo odpoví nesprávně, vypadává ze hry. Další kola potom hrají jen ti hráči, kteří odpověděli správně. Vyhrává ten, který vyřešil všechny zadané úlohy správně.

Pro názornost uvádím příklad:

1) Žák obdrží kartu se zadáním: $(2a-6b)^2=$ a umocní 1. člen. $\Rightarrow$ $4a^2$.
2) Žák sedící v kruhu po jeho levici doplní znaménko trojčlenu a prostřední člen. $\Rightarrow$ $-24ab$.
3) Další (třetí) žák po levici doplní příslušné znaménko trojčlenu a umocní 2. člen zadaného výrazu. $\Rightarrow$ $+36b^2$.
4) Učitel předá dalšímu žákovi následující kartu se zadáním úlohy a hra pokračuje dál.

Vlastní hodnocení hry: Hlavním pozitivem této hry je nutnost ostatní kontrolovat a soustředit se. Opět můžeme doporučit přípravu třídy před začátkem hodiny. Pravidla jsou pro žáky srozumitelná a celkově má tato hra úspěch. Žáci vždy raději hráli hru s možností vyřazování – tedy se soutěžním charakterem.

Zamrzlík II

Pomůcky: Zásoba zadání úloh pro učitele.

Obtížnost: 8. a 9. ročník.

Cíl: Žáci si procvičí (zopakují) učivo druhých mocnin s proměnnou, popř. učivo vytýkání a umocňování podle vzorců.

Popis hry: Hra „Zamrzlík II“ je úpravou hry „Zamrzlík“ a to pro 2. stupeň ZŠ. Pravidla jsou úplně stejná jako ve hře „Zamrzlík“. Prohrává ten žák, který zůstane stát poslední ve třídě. Žáci odpovídají z paměti, nic si nepíší, ostatní žáci naslouchají, dávají pozor, kontrolují.

Vlastní hodnocení hry: Na 2. stupni je tato hra již oblíbenější, zvláště varianta ve dvojicích. Zde už si žáci neberou poslední místo jako svou osobní prohru, ale spíše jako varování, že by měli doplnit mezery ve vzdělání. Žáci na 2. stupni jsou raději, když si mohou za správný výsledek sednout a berou jako odměnu to, že již nemusí řešit další úlohy. V případě procvičování vytýkání či umocňování pomocí vzorců, je vhodné žákům zadání napsat na tabuli nebo jej předložit na připravené kartě.

Hry a stavebnice

Ve vyučování matematice častou využíváme také krom již zmíněných her také stolní didaktické pomůcky a hry, které rozvíjejí logické myšlení, kombinatorické schopnosti a prostorovou představivost.

<u>Geometrické skládačky</u>

Existuje celá řada geometrických skládaček, s jejichž pomocí lze rozvíjet prostorovou představivost, jemnou motoriku, kreativitu žáků, logické a kombinační myšlení. Tyto typy her jsou charakteristické určitým počtem dílů, většinou geometrických tvarů. Kombinací a skládáním těchto částí je pak možné vytvořit jak základní tvar, tak celá řada jiných obrazců a figur.

Tangram

<u>Obtížnost hry:</u> 1. i 2. stupeň ZŠ.

<u>Popis hry:</u> Tangram je originální skládací hra pro jednoho i více hráčů. Za pomoci 7 kamenů (čtverec, rovnoběžník a pět trojúhelníků), jejich otáčením a skládáním vytvoří tisíce různých obrazců. Je to užitečná hra na rozvoj prostorové představivosti a tvořivosti.

<u>Vlastní hodnocení hry:</u> Tangram je věčná klasika, se kterou si rozumí žáci každého věku. Mladší žáci skládají podle přiložených šablon, starší žáci se již snaží modelovat zadané nebo libovolné obrazce sami. Často nejobtížnějším úkolem pro mnoho žáků je poskládat tangram zpět do formy. Žáky tato hra velmi baví, dokážou u ní strávit poměrně dost času. Velkou výhodou je, že je vhodná jak pro skupiny, tak pro jednotlivce.

Série skládaček Think fun

Obtížnost hry: 1. i 2. stupeň ZŠ.

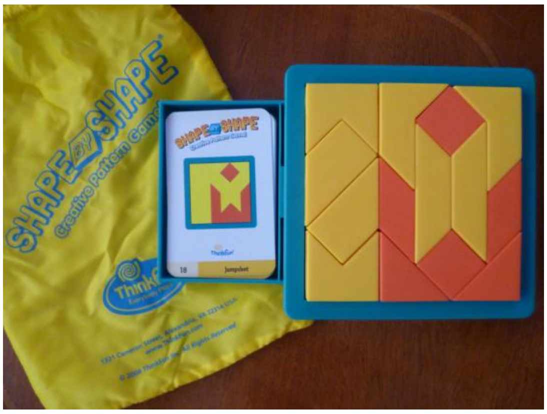
Popis hry: Série kreativních skládaček Think fun podporuje rozvoj prostorové představivosti, souměrností, logického uvažování a tvořivého myšlení. Balení obsahuje kromě dílků (prostorových či plochých na

hrací desce) také karty s různými modifikacemi zadání úloh včetně nápovědy a řešení.

Jednotlivé části série jsou:

Shape by Shape

Popis hry: Hra Shape by Shape nabízí hráčům netradiční abstraktní pohled na svět. Princip hry je podobný známé skládačce Tangram. Hra obsahuje 14 dílků a v každé ze 60 úloh má hráč za úkol vytvořit z červených a žlutých dílků ten správný obrazec. Hra je určena pro jednoho hráče, avšak lze soutěžit na čas, který z hráčů zvládne najít správné řešení dříve.



Square by Square

Popis hry: Také v této skládačce je úkolem hráčů vytvořit ze všech 14 přiložených hracích dílků přesně takový obrázek, jako je zobrazen na jedné z 60 karet se zadáním. Hráč trénuje především prostorovou představivost a logické myšlení.

Top This!

Popis hry: Top This je prostorová skládačka pro jednoho hráče. Dává možnost procvičit si schopnosti z oblasti prostorové představivosti a tvořivosti. Hra obsahuje 40 karet s úlohami včetně řešení a 20 herních kostek oranžové a modré barvy. Karty s úlohami určí, které oranžové a modré kostky bude žák při skládání potřebovat. Úkolem hráče je vytvořit dva stejné tvary, jeden z modrých kostek a druhý z oranžových. Obtížnosti Středně pokročilý a Expert potrápí při úlohách s ještě větším počtem dílků.

Block by Block

Popis hry: Kreativní prostorová skládačka pro jednoho hráče. Žák musí vždy zkombinovat všech sedm dílků skládačky tak, aby v každé ze 60 úloh vytvořil trojrozměrné dílo. Každý dílek skládačky je jiný, přičemž všechny jsou tvořeny různě uspořádanými krychličkami.

Brick by Brick

Popis hry: Princip hry je stejný jako u hry Block by Block. Také ve hře Brick by Brick se hráči pokouší umístit všech 5 dílků skládačky tak, aby vytvořili prostorový útvar zadaný na jedné ze 60 karet s úlohami. Každý dílek skládačky je jiný, všechny jsou ale tvořeny různě uspořádanými cihličkami (kvádry).

Vlastní hodnocení hry: Série skládaček This fun je velmi oblíbená u žáků na prvním stupni, kde si žáci s dílky spíše hrají, pokouší se skládat zadané tvary, jednotlivé dílky si spíše prohlížejí a pokouší se svou představu doplnit hmatovým vjemem. Starší žáci již rádi sáhnou po složitějších, trojrozměrných skládačkách (zejm. Block by Block), kde vytváří složité útvary a mohou procvičit svou prostorovou představivost.

Lonpos



<u>Obtížnost hry:</u> 1. i 2. stupeň ZŠ.

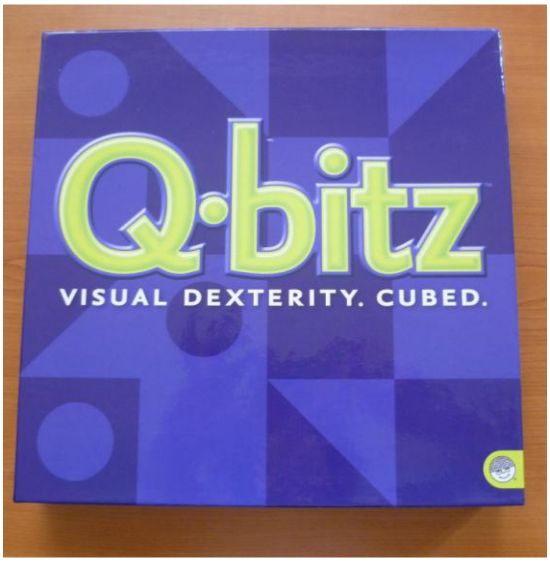
<u>Popis hry:</u> Lonpos je logická skládačka, které byla původně zakoupena jako novinka na švýcarském veletrhu didaktických pomůcek a techniky Worlddidac 2010, kde měla didaktická hra velký úspěch. V současné době je již běžně dostupná také v České republice. S pomocí této hry se rozvíjí hlavně logické a kombinační myšlení. Princip hry spočívá ve snaze dostat všechny dílky skládačky do připraveného rámu. Jednotlivé dílky skládačky jsou tvořeny různě seskupenými kuličkami, přičemž každý dílek je jiný a barevně odlišený.

Hra má několik úrovní obtížnosti podle toho, kolik dílků skládačky již máme podle zadání umístěno v rámu. Na trhu existují také různé varianty tvarů rámů, dílky však mají stejné tvary ve všech variantách. Obtížnější variantou je poskládat dílky do prostorového útvaru. Správným poskládáním všech dílků lze vytvořit čtyřboký jehlan (pyramidu).

<u>Vlastní hodnocení hry:</u> Lonpos je velmi oblíbená hra jak u mladších, tak i u starších žáků či dospělých. Je to hra pro jednotlivce, která většinou hráče zcela pohltí. Žák si do rámu vyskládá dílky podle zvolené úrovně a snaží se zaplnit volný prostor zbylými dílky. Žáci jsou ochotní a schopní skládat velmi dlouho, jen aby pokořili zvolenou úroveň. Přitom procvičují prostorovou představivost i logické myšlení.

Q.bitz

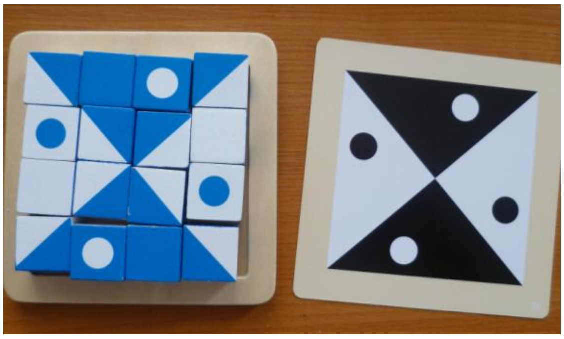
Obtížnost hry: 1. i 2. stupeň ZŠ.



Popis hry: Q.bitz je jednou z her přivezených z veletrhu v Basileji. S její pomocí lze rozvíjet prostorovou představivost a kreativitu žáků. Hra je určena pro 2 – 4 hráče. Cílem hry je co nejrychleji poskládat kostičky do podložky podle vzoru na kartě. Hrají se 3 sady po 3 kolech. Hráč s největším počtem karet vyhrává.

Každé kolo má svá vlastní pravidla. Na začátku si každý hráč vezme jednu podložku s 16 stejně barevně označenými kostičkami. Hromádka karet Q.bitz se zamíchá a položí lícem dolů doprostřed hrací plochy. Na začátku každého kola hry jsou všechny kostičky venku z podložky.

Kolo 1: Libovolný hráč otočí vrchní kartu Q.bitz. Hráči závodí ve vytvoření vzoru znázorněného na kartě za použití sady kostiček, jejich otáčením v jakémkoli směru. První hráč, který vytvoří vzor z karty, zakřičí: „Q.bitz!“ Pokud ostatní hráči souhlasí, že je vzor správný, vítěz získává kartu. Jestliže vzor není správný, hra pokračuje.



Kolo 2: Libovolný hráč otočí vrchní kartu Q.bitz. Hráči hodí všechny své kostičky na stůl jako při hodu hrací kostkou. S použitím hozených kostek (pouze jejich vrchní strany), se hráč snaží umístit do podložky tolik kostek, kolik je možné, aby vytvořil vzor z vybrané karty. Hráči závodí v opětovném házení nepoužitých kostiček, dokud nehodí tvar, který potřebují k dokončení vzoru. První hráč, který vytvoří zadaný vzor, zakřičí: „Q.bitz!“ Pokud ostatní hráči souhlasí, že je vzor správný, vítěz získává kartu. Jestliže vzor není správný, hra pokračuje.

Kolo 3: Libovolný hráč otočí vrchní kartu Q.bitz. Hráči mají 10 sekund na zapamatování karty. Poté je karta otočena lícem dolů a hráči se snaží sestavit kostičky na podložku zpaměti. Hráč, který si myslí, že vytvořil správně zadaný vzor nebo že má nejvíce kostek umístěných na správném místě, zakřičí: „Q.bitz!“. Hráč se správným vzorem nebo hráč s největším počtem správně umístěných kostek vyhrává kartu.

Vlastní hodnocení hry: Hra Q.bitz je, pokud se hraje podle pravidel na 9 kol, časově náročná. Přesto, že ji žáci mají možnost hrát v této podobě jen velmi zřídka, je u žáků 1. i 2. stupně oblíbená. Podložky s barevnými dílky používáme spíše pro názornou ukázku souměrností. Žáci podle zadaných obrázků sestaví zadaný tvar a bádají, která ze známých souměrností se v obrázku nalézá. Žáci tak kromě prostorové představivosti trénují zábavnou formou osovou či středovou souměrnost v praxi.

Hry dominového typu

Hry dominového typu jsou poměrně známé. Často se můžeme na školách setkat s ručně vyrobenými kartami domina. Cíl hry je vždy stejný – přiřadit jistému problému či úkolu jeho správné řešení. Je jen na učiteli, jaké zvolí učivo k procvičení. Matematická domina jsou k dostání také ve formě stolních her.

Domino – sčítání, odčítání, násobení

Obtížnost hry: 1. stupeň ZŠ.

Popis hry: Tyto hry dominového typu jsou vhodné pro 1. stupeň ZŠ na procvičení učiva. Dvojici žáků se rozdají jednotlivé dílky domina a žáci střídavě tvoří hada přiřazováním správných odpovědí k již vyloženým zadáním.

Vlastní hodnocení hry: Pro žáky je tato hra zpestřením a zábavnou formou procvičení naučených znalostí. Většinou tuto hru žáci hodnotí kladně, považují ji za zábavnou, i když nemá v hodinách matematiky soutěžní charakter.

Schubitrix

Obtížnost hry: 1. i 2. stupeň ZŠ (dle zvolené varianty hry).

Popis hry: Schubitrix je hra švýcarského výrobce. Protože se jedná o hru dominového typu, je jejím cílem přiřadit k určitému problému jeho správné řešení. Hra má několik variant podle učiva, např. násobení do 20, 100, 1000, dělení do 20, 100, 100, čas, obvod, obsah.

Schubitrix může hrát hrát jak jedtnotlivec, tak skupina žáků.

Hra pro jednotlivce je navržena jako výborná cvičná hra. Na začátku jsou všechny karty vyloženy. Jedna karta je vybrána jako výchozí a hráč hledá druhou kartu, kterou k ní lze umístit. Nakonec musí být umístěny všechny karty. Tvar poskládaných karet na konci hry poskytuje okamžitou sebekontrolu.

Schubitrix jako partnerská hra dodržuje známá pravidla domina. 24 karet je zamícháno lícem dolů. Každý hráč si vytáhne své karty: 2 hráči každý 8 karet, 3 hráči každý 5 karet, 4 hráči každý 4 karty. Zbytek karet tvoří tahací hromádku a leží lícem dolů v zásobníku na stole. Vrchní karta je otočena lícem vzhůru a zahajuje hru. První hráč může položit svou kartu ke kterékoli straně první karty, pokud problém a řešení sedí. Jestliže není možné s kartou hrát je ze zásobníku vytažena jiná. Jestliže ani s touto kartou není možné hrát, na řadě je další hráč. Vítězem je ten hráč, který již nemá žádné další karty.

<ins>Vlastní hodnocení hry:</ins> V praxi jsme vyzkoušeli varianty hry Procenta (přiřadit procenta ke grafickému znázornění, vypočítat a přiřadit hodnotu v procentech) a Zlomky (krácení zlomků, převedení zlomku na desetinné číslo) v 7. ročníku ZŠ. Žáci většinou potřebovali k nalezení správného řešení při ruce papír a tužku, aby si vše mohli názorně rozepsat. Některé žáky hra bavila, jiné nezaujala. Z hlediska vyučujícího tuto hru hodnotíme kladně, je velmi dobrá na procvičení či opakování učiva jiným než obvyklým způsobem.

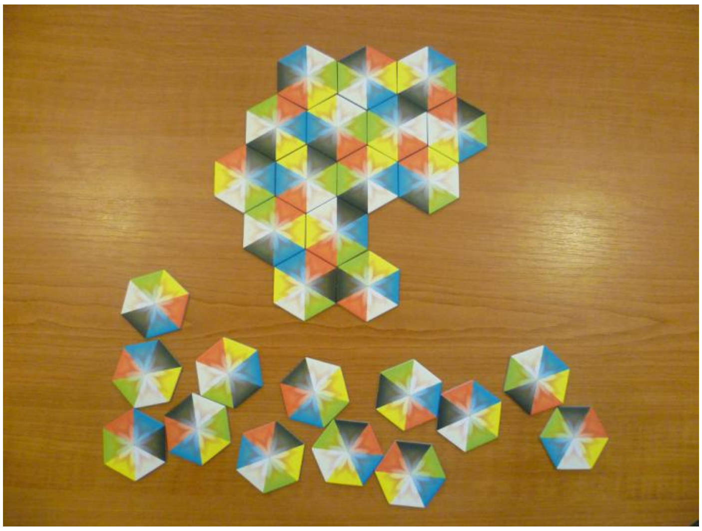
Hexeto

<ins>Obtížnost hry:</ins> 1. i 2. stupeň ZŠ.

<ins>Popis hry:</ins> Kombinační a logická hra Hexeto podporuje rozvoj tvořivého a logického myšlení.

Hra se skládá z 60 barevných šestiúhelníků (hexů). Cílem hry je získat co nejvíce bodů za správně přiložené hexy k hexům již ležícím na stole. Přičemž kladně se boduje každé propojení dvou stran shodnou barvou.

Základní hra je určena pro 2 - 6 hráčů, Hexeto je však skvělým hlavolamem i pro jednoho hráče.



<u>Vlastní hodnocení hry:</u> Většina žáků jde do této hry s velkým nadšením, že zde nemusí nic počítat a že je to jen „hra“. Po prvních několik tazích si ale uvědomí, že to není tak lehké, jak se na první pohled zdálo. Většina žáků se snaží najít všechna možná dostupná řešení. Zvláště u mladších ročníků se stává, že žáci hru vzdají, neboť se jim zdá příliš těžká. Tato hra se v hodinách matematiky moc nevyužívá, své uplatnění nachází spíše v projektových dnech nebo v suplovaných hodinách.

Domino - obrázkové

<u>Obtížnost hry:</u> 1. stupeň ZŠ.

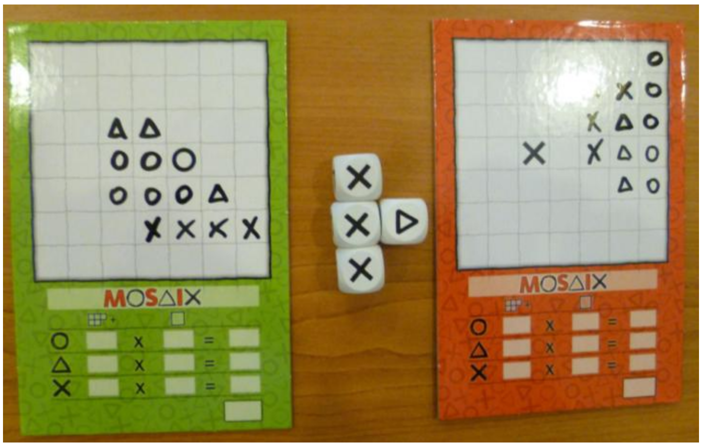
<u>Popis hry:</u> Následující hra nepatří mezi klasická domina, ale také rozvíjí logické a kombinační myšlení a prostorovou představivost. Obsahuje 84 hracích karet – čtverec rozdělený na dvě části podle úhlopříčky, každá část obsahuje jiný obrázek (barvu). Hráči si postupně tahají kartičky vyložené na stole lícem dolů. Hlavním úkolem každého hráče je sestavit čtverec 4x4 tak, aby stejné obrázky utvářely čtverce. Hráči mohou kdykoli během hry měnit umístění jednotlivých karet ve svém obrazci, avšak obrazec nesmí nikdy přesáhnout stanovenou velikost 4x4.

<u>Vlastní hodnocení hry:</u> Hra je vhodná dle našeho názoru spíše pro mladší žáky, i když dokáže potrápit i některé žáky ze starších ročníků. Tato hra je většinou pro žáky zábavná, bývá využita ve volnějších hodinách či projektových dnech.

<u>Logické hry</u>

Mosaix

<u>Obtížnost hry:</u> 1. i 2. stupeň ZŠ.



<u>Popis hry:</u> Tato logická hra obsahuje 4 přepisovatelné hrací karty s fixy a 4 kostky se symboly kolečko, trojúhelník a křížek. Všichni hráči postupně hází všemi 4 kostkami a podle svého uvážení je sestaví do libovolné formace. Symboly tohoto seskupení si všichni hráči napíší do tabulek na svých kartách. Hlavním cílem jednotlivých hráčů je utvoření ve své tabulce co největší seskupení stejných symbolů. Kdo má na konci nejvíce stejných symbolů, vyhrává.

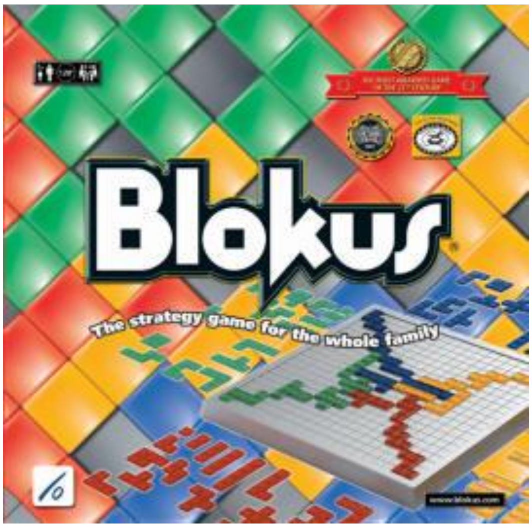
<u>Vlastní hodnocení hry:</u> Tato logická hra je pro žáky zajímavá, baví je a připomíná jim známou hru „Piškvorky“. Díky tabulkám, které se dají smazat, mohou žáci hry opakovat i několikrát za sebou. Hra je vhodná spíše na využití ve volném čase než ve vyučování. Ve škole se dá hrát ve volných hodinách nebo na projektových dnech.

Blokus

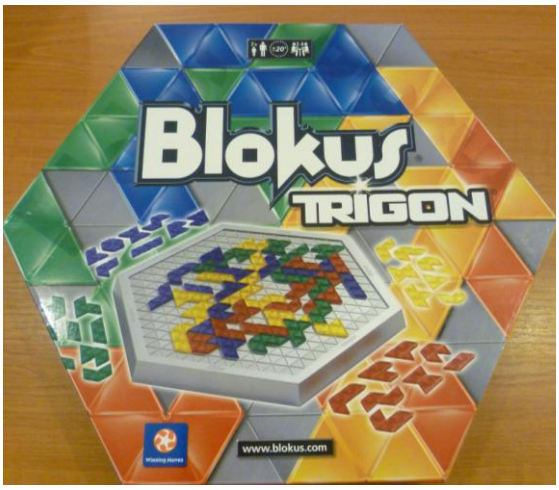
<u>Obtížnost hry:</u> 1. i 2. stupeň ZŠ.

<u>Popis hry:</u> Blokus je hra rozvíjející logické a strategické myšlení, jemnou motoriku a představivost. Hrací plocha je tvořena z malých dílků a hra obsahuje také hrací kameny ve čtyřech různých barvách. Hra Blokus má několik různých variant.

Blokus



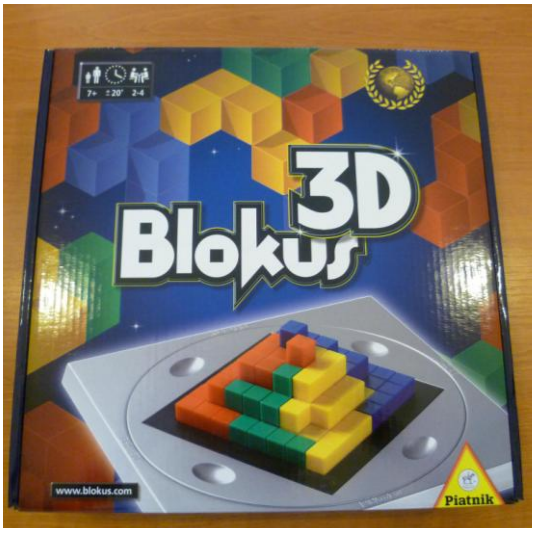
Cílem hry je z 21 hracích kamenů své barvy umístit jich na hrací plochu co největší počet. Hrací kameny přikládáme na plochu k dříve umístěným dílkům tak, aby se dotýkaly pouze vrcholem. Hrací kameny stejné barvy se tedy nemohou dotýkat celou plochou a nesmí mezi nimi být mezera. Principem hry je umístit hrací kameny své barvy tak, aby soupeř nemohl použít všechny své kameny (blokujeme ho). Hra končí, když ani jeden z hráčů nemůže umístit na plochu kámen. Za každý kámen, který se nepodařilo umístit na hrací plochu, se udělují trestné body, podle počtu dílků (čtverců), z kolika se skládá. Hráč s nejmenším počtem trestných bodů vyhrává.



Blokus Trigon

Princip hry je stejný jako u klasického Blokusu. Hrací plocha a jednotlivé hrací kameny jsou však tvořeny z malých trojúhelníčků. Cílem hry je opět umístit na hrací plochu co nejvíce kamenů vlastní barvy, co nejlépe zablokovat soupeře a získat nejméně trestných bodů.

Blokus 3D

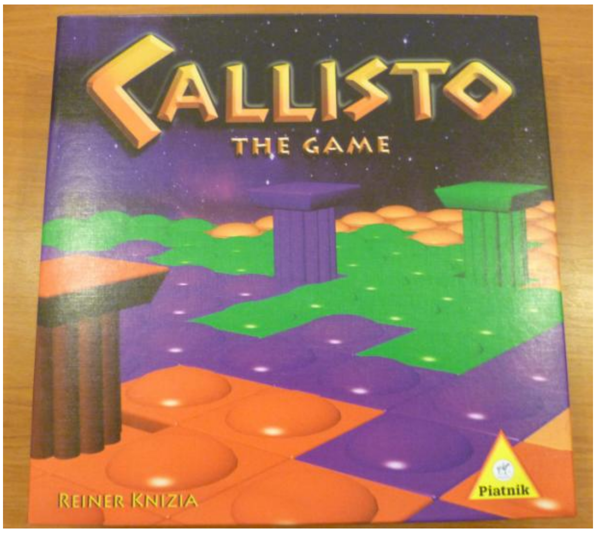


Na rozdíl od klasického Blokusu je tato varianta obohacena o třetí rozměr. Hra obsahuje 5 různých hracích ploch, 11 hracích kamenů různých tvarů vždy ve 4 různých barvách. Cílem hry je umístit na hrací plochu co nejvíce hracích kamenů tak, aby na konci hry byly viditelné shora. Kameny jsou umisťovány tak, aby se každý kámen dotýkal alespoň jednou stěnou již umístěného dílku stejné barvy. Kameny se umisťují pouze shora, žádná část dílku nemůže přesahovat stavební plán ani povolenou výšku struktury. Ve struktuře nesmí vznikat žádné mezery. Hra končí ve chvíli, kdy žádný z hráčů nemůže umístit žádný hrací kámen. Hráč dostane 1 bod za každou stěnu dílku jeho barvy viditelnou shora, za každý kámen, který neumístil na hrací plochu, si odečte body podle počtu jednotlivých dílků (krychliček). Hráč s nejvyšším počtem bodů vyhrává.

Vlastní hodnocení hry: Hra Blokus ve všech svých variantách je velice lákavá pro všechny věkové kategorie. Baví žáky mladší, kteří ještě tolik neuvažují nad strategií blokování, tak žáky starší, kteří si na logice své strategie pokouší vybojovat vítězství. Varianta 3D kromě logického a kombinačního myšlení rozvíjí také prostorovou představivost a je dle našeho názoru vhodná spíše pro starší žáky či studenty středních škol. Tato hra je velmi oblíbená, je využitelná opět spíše ve volných hodinách či školních projektech.

Callisto

Obtížnost hry: 1. i 2. stupeň ZŠ.



Popis hry: Callisto je abstraktní hra, která se podobá hře Blokus. Obsahuje 18 hracích dílků a 3 sloupy od každé ze 4 barev. Hráči se snaží umístit své dílky na hrací plochu tak, aby se dotýkaly již položených dílků či tří z pilířů, které má hráč k dispozici a které může umístit kdekoli na plochu kromě jejího středu. Dílky se však nesmí dotýkat pouze vrcholy, ale musí být spojeny svými stranami. Úkolem je využít všechny své díly a přitom zabránit soupeřům ve využití všech jejich dílků. Hra končí, když žádný hráč již nemůže umístit žádný ze svých dílků. Na konci je spočítáno skóre sečtením všech „bodů“ - zbývajících částí na dílcích každého hráče. Vítězí hráč s nejnižším počtem bodů.

Vlastní hodnocení hry: I když je tato hra velice podobná hře Blokus, není tak oblíbená. Dle našeho názoru je to méně výraznou barevností, větší velikostí dílků a jiným systémem ukládání jednotlivých dílků na herní plochu. Blokus je v uvedených bodech pro děti více lákavý. Ve využití a rozvoji schopností jsou tyto hry naprosto stejné.

100 Optische Illusionen / 50 Optical illusions

Obtížnost hry: 1. i 2. stupeň ZŠ.

Popis hry: Následující hra obsahuje karty s optickými iluzemi. Různé optické iluze jsou poměrně známé. Jejich využitím v hodinách matematiky můžeme rozvíjet u žáků hlavně logické myšlení a představivost. Ač zdánlivě na první pohled některé obrazy popírají realitu, mohou žáci zkusit matematicky ověřit správnost některých tvrzení.

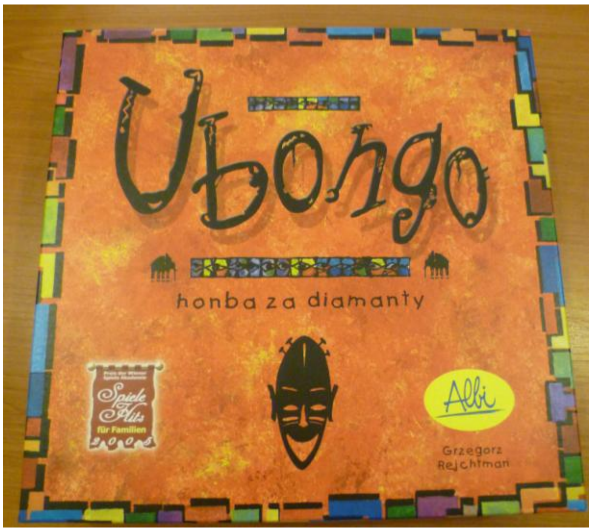
Na rozvoj představivosti jsou také vhodné karty s optickými klamy, na jejichž druhé straně jsou zadané úkoly a napsaná také správná řešení. Tato pomůcka je vhodná pro formu skupinové práce na rozvoj fantazie.

Vlastní hodnocení hry: Karty s optickými iluzemi jsou zajímavým zpestřením klasických hodin matematiky. U žáků jsou oblíbené, ale vždy je nutné jejich zařazení jen na chvilkové aktivizování, neboť žáci u jejich prohlížení neudrží dlouho pozornost. Jejich využití zařazujeme jako zpestření, když už jsou žáci velmi unavení a potřebujeme je aktivizovat nebo na konci hodiny ve zbývajícím čase. Karty s úkoly využíváme také na projektových dnech.

Ubongo

Obtížnost hry: 1. i 2. stupeň ZŠ.

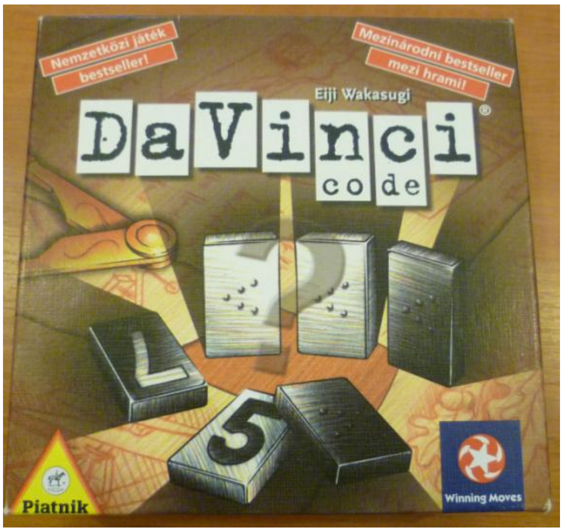
Popis hry: Hra Ubongo je vhodná na rozvoj logického, kombinačního myšlení a prostorové představivosti žáků. Cílem hry je co nejrychleji vyplnit předkreslená prázdná pole na vylosované hrací kartě již určenými barevnými dílky. Hráč, který nejrychleji zadaný útvar poskládá, postupuje na herním plánu a sbírá barevné kameny. Vyhrává hráč s největším počtem stejně barevných nasbíraných kamenů.



Vlastní hodnocení hry: Stolní hra Ubogo je zvláště mezi mladšími žáky velmi oblíbená. Karty s úkoly nabízejí možnost zvolit si mezi dvěma obtížnostmi a tak je hra vhodná i pro žáky 2. stupně. Žáci se většinou velice dobře baví skládáním tvarů do předlohy, při kterém musí logicky uvažovat a kombinovat jednotlivé dílky. Přitom jsou nuceni vše zvládnout do časového limitu, který je standardně stanoven na jednu minutu. Žáci si tuto hru velmi oblíbili a vyžadují ji ke hře vždy, když je volná chvíle. Pro účely matematického vyučování jsme vymysleli variantu, při které využíváme jen základní předlohy a jednotlivé dílky s tím, že všichni žáci zároveň skládají vybranou předlohu. Vyhrává ten, kdo poskládá předlohu z daných dílků jako první.

DaVinci Code

Obtížnost hry: 1. i 2. stupeň ZŠ.



Popis hry: Tato desková hra rozvíjí logické a strategické myšlení. Obsahuje 26 kostek s čísly (13 černých a 13 bílých s čísly 0 až 11 + jeden kámen s pomlčkou). Cílem hry je uhodnout soupeřův číselný kód dříve, než jeden ze soupeřů uhodne ten váš. Pravidla hry jsou celkem jednoduchá: Kameny se umístí hodnotou na desku stolu a dobře promíchají. Každý hráč si vylosuje čtyři libovolné kameny. Ty před sebe vyrovná do řady tak, že po levé ruce má kámen nejnižší hodnoty a dále jsou kameny srovnány ve vzestupné řadě. Černý kámen je vždy nižší hodnoty, než kámen bílý. Pomlčku je možné do řady umístit libovolně, slouží ke zmatení protihráče. Hráč na tahu si vylosuje jednu kostku ze zbývajících a umístí ji stranou své řady tak, aby jen on sám viděl její hodnotu. Pak se snaží uhodnout hodnotu některé z protivníkových kostek. Uhodne-li, musí protivník tuto kostku sklopit tak, aby byla její hodnota vidět. Hráč, který hádal, má teď dvě možnosti - pokusit se uhodnout další z protivníkových kostek (při hře ve více hráčích může hádat i kostku jiného hráče než prvně) nebo zařadit vylosovanou kostku na přísluśne místo svého kódu a tím ukončit svůj tah. Neuhodne-li, musí vylosovanou kostku zařadit na příslušné místo svého kódu, avšak tak, aby ji ostatní viděli. Jeho tah tím skončil. Vítězí hráč, který jako poslední nemá odhalen celý kód, tedy mu jako poslednímu zůstane nějaká nesklopená kostka.

Vlastní hodnocení hry: DaVinci Code je hra na logické uvažování, která baví především pro žáky, kteří chtějí „věcem přijít na kloub“. Někteří si tuto hru vždy s radostí vyberou, zatímco jiní ji ani nezkusí. V každém případě je vhodná pro zabavení ve volných chvílích.

Digit

Obtížnost hry: 1. i 2. stupeň ZŠ.

Popis hry: Hra připomíná známé sirkové hlavolamy. Obsahuje 5 dřívek a 55 karet. Cílem hry je přemístit dřívka tak, aby odpovídala tvaru na kartě. Na začátku jsou dřívka na stole rozmístěna podle obrazce na vzorové kartě. Každý hráč pak obdrží 5 karet. Hráči se postupně střídají, musí vždy přemístit pouze jedno dřívko, dřívka musí vždy tvořit souvislý obrazec. Hráč se snaží vytvořit obrazec, který je na jedné z jeho karet (počítají se i otočené obrazce či jejich zrcadlové zobrazení). Odpovídá-li obrazec tvaru na některé z hráčových karet, smí tuto kartu odložit. Pokud nemůže žádnou kartu odložit, musí si vzít z balíčku další. Pokud se obrazec shoduje s kartou jiného hráče, její vlastník ji smí odložit a hráč, který obrazec vytvořil, si již kartu brát nemusí. Vyhrává ten, komu se jako prvnímu podaří zbavit se všech karet.

Vlastní hodnocení hry: Hra Digit podporuje logické a kombinační myšlení a žáci základní školy ji rádi hrají. Je to pro ně forma hry jako při skládání hlavolamu, ale s tou výhodou, že zde je ještě soutěžní charakter této hry.

Summy

<u>Obtížnost hry:</u> 1. i 2. stupeň ZŠ.

<u>Popis hry:</u> Matematická pomůcka pro procvičování základních početních operací, ale také pro vytváření a počítání složitějších rovnic. Didaktická hra Summy připomíná známou hru se slovy Scrabble (popř. český KrisKros). Hra obsahuje 94 kostiček s číslicemi a operátory. Doprostřed hrací plochy se umístí kostka „=“, zbylé kostky jsou zamíchány a otočeny lícem dolů jako zásoba. Každý hráč si ze zásobníku vylosuje 8 kostiček, které si vyloží tak, aby je soupeř neviděl. Cílem je vytvořit ze svých kostiček a kostiček již vyložených platnou sumu. Kostičky musí navazovat ve vodorovném nebo svislém řetězci. Každá suma lze číst jen zleva doprava nebo shora dolů. Při hře samozřejmě platí základní pravidla pro provádění operací (operátory musí být mezi dvěma čísly, násobení a dělení mají přednost, asociativnost). Počet bodů získaných za vytvořenou sumu se rovná součtu číslic, které jsou v dané sumě použity. Hra končí, když nikdo nevytvoří sumu a zásoba kostiček je prázdná. Hráč s největším počtem bodů vítězí.

<u>Vlastní hodnocení hry:</u> Hra Summy připomíná žákům známou hru Scrabble, ale připadá jim hlavně zpočátku mnohem jednodušší. Později poznají, že to zas až tak jednoduché není, ale rádi u této hry zůstanou. Zvláště oceňujeme materiálové provedení této hry (dřevěné kostičky).

Imagination

<u>Obtížnost hry:</u> 1. i 2. stupeň ZŠ.

<u>Popis hry:</u> Didaktická pomůcka Imagination je vhodná na podporu prostorové představivosti a procvičení učiva osové souměrnosti. Součástí hry je 30 oboustranných hracích karet, zrcátko a 4 hrací kameny. Cílem hry je umístit zrcadlo k hrací kartě tak, aby hráč získal pokud možno co nejvíc bodů.

Po odkrytí karty musí hráči co nejrychleji umístit svůj hrací kámen k jedné z os souměrnosti. U každé osy smí být jen jeden kámen. Poté nastupuje fáze sčítání bodů. Na každé kartě jsou červené, modré, zelené a žluté koule. Po přiložení zrcátka k vybrané ose souměrnosti se počítají body. Počet červených a modrých koulí se od sebe odečte, za každou zelenou kouli se přičte 1 bod a za každou žlutou kouli se 1 bod odečte. Vítězí hráč, který získá největší počet bodů.

Vlastní hodnocení hry: Hra Imagination je výbornou pomůckou při vyučování osové souměrnosti. Žáci názorně vidí v zrcátku osově obrazy vzorů a dokáží potom lépe sami určovat osově souměrné útvary.

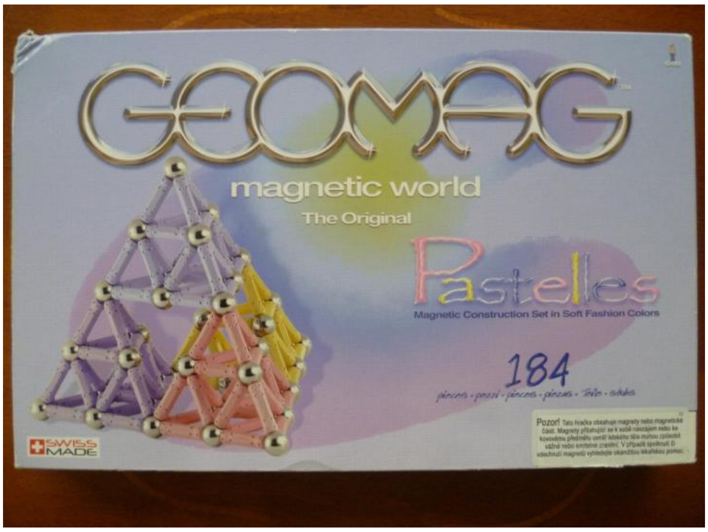
Stavebnice v matematice

Stavebnice jsou v matematice celkem běžně využívány. Žáci si často skládají z kostek různé stavby, ze složitějších stavebnicových systémů pak různé prostorové útvary a tělesa. Jejich využitím rozvíjíme u žáků prostorovou představivost, jemnou motoriku a fantazii. Známé stavebnicové systémy jsou především Lego, Polydron nebo Geomag.

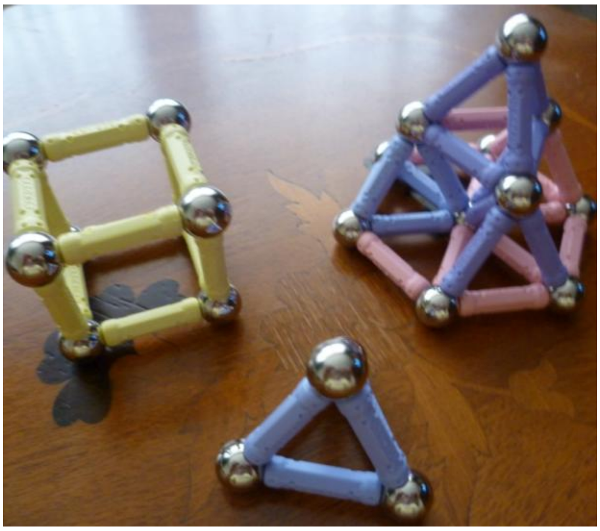
Geomag

Obtížnost hry: 1. i 2. stupeň ZŠ.

Popis hry: Geomag je magnetická stavebnice, která může sloužit jak u mladších žáků jen ke hraní, tak ve vyšších ročnících k modelování těles.



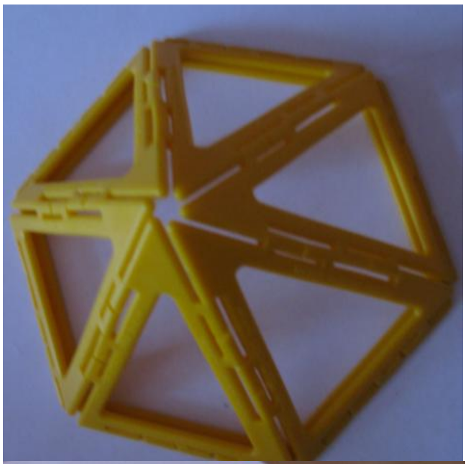
Vlastní hodnocení hry: Hra Geomag je výborným pomocníkem u mladších žáků k rozvoji jemné motoriky a představivosti. U starších žáků je výborným pomocníkem při učivu o tělesech, kdy žáci získají možnost si tělesa modelovat. Dle našich zkušeností z projektových dnů je tato hra vhodná i pro děti předškolního věku, které si s touto stavebnicí bez problému vyhrají a přitom procvičují motoriku a rozvíjí představivost.



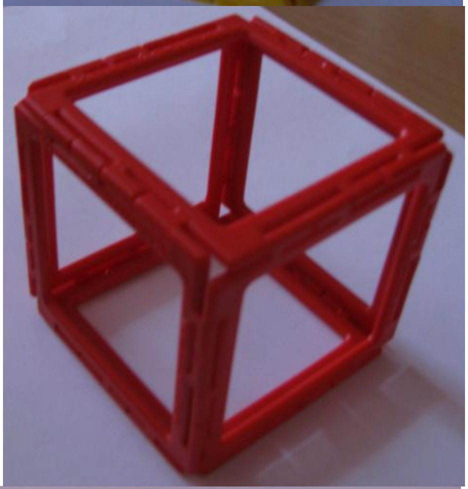
Oceňujeme lehkou manipulaci díky magnetům, zvláště kvůli mladším žákům. Nevýhodou je vysoká pořizovací cena.

Polydron

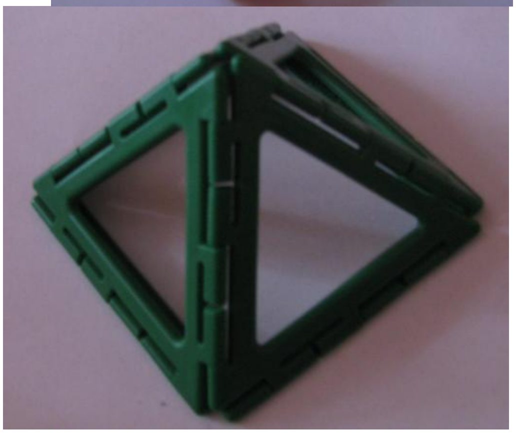
Obtížnost hry: 1. i 2. stupeň ZŠ.



Popis hry: Stavebnice Polydron, stejně jako Geomag, je stavebnice vhodná k modelování těles. Může také sloužit jak u mladších žáků jen ke hraní, tak ve vyšších ročnících k modelování těles.



Vlastní hodnocení hry: Stavebnice Polydron je výborným pomocníkem pro žáky základních a středních škol, pro vytvoření představy o tělesech a jejich vlastnostech. Stejně jako Geomag může sloužit také u mladších žáků k rozvoji jemné motoriky a představivosti, ale s touto stavebnicí není tak jednoduchá manipulace. Systém do sebe zapadajících patentů je dle našeho názoru pro mladší žáky obtížný. U žáků na druhém stupni základní školy je naopak tato stavebnice velmi oblíbená, využili jsme ji také pro ověření eulerova vztahu mezi hranami, stranami a vrcholy těles.



Příloha 2: Projektový den „Učení bez mučení“

V úterý 25. června 2013 se konal v Základní škole v Tovačově projektový den s názvem „Učení bez mučení“. Byl to první projektový den svého druhu na této škole. Hlavní iniciátorkou a organizátorkou akce byla paní učitelka Mgr. Alena Fleková za podpory vedení školy. Zkušenosti s organizací a průběhem takovéto akce nasbírala organizátorka během studia doktorského studijního programu Pedagogika na Univerzitě Palackého v Olomouci, kdy dvakrát navštívila projektové dny s názvem „Matematika trochu jinak“ na Základní škole v Rohatci v rámci spolupráce Rohatecké školy a Katedry matematiky Univerzity Palackého. Projektové dny zde měly již svou tradici, byly součástí projektu „Pavučina vědomostí“ realizovaném v rámci grantu CZ.1.07/1.1.02/02.0173-OP VK Zvyšování kvality ve vzdělání, Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost, spolufinancovaného ze státního rozpočtu ČR a Evropského sociálního fondu.

Po těchto nasbíraných zkušenostech bylo organizování projektu na Základní škole v Tovačově zábavou a radostí. Hlavní myšlenkou projektu bylo, aby si žáci od 5. ročníku výše s pomocí učitelského sboru připravili aktivity pro své mladší spolužáky a poté je v jeden den ukázali a předali dál. Jako soutěžící se účastnili žáci 3. - 9. ročníku místní základní školy. Všichni účastníci projektového dne vytvořili čtyřčlenné týmy a v několika kategoriích plnili dané úkoly na jednotlivých stanovištích. Celý projekt byl zaměřen na většinu z běžně vyučovaných předmětů. Žáci si mohli otestovat své schopnosti z českého jazyka i angličtiny a dozvědět se zajímavosti třeba také z historie. Naučili se skládat origami, tangram nebo pentomino. Vyzkoušeli si didaktické stolní hry, hlavolamy, stavění těles i řešení hlavolamu Kakuro či Sudoku i počítání v číselných soustavách. Mladší žáci si zopakovali elementární znalosti zábavnější formou, starší se seznámili s magickými čtverci, rýsovali složité ornamenty, dělili kruh a pochopili důležitost Pascalova trojúhelníku. V jazycích si procvičili porozumění textu, znalosti literárních postav a jejich autorů.

Práci skupinek odpovědně a spravedlivě hodnotili samotní žáci, kteří jednotlivé aktivity prezentovali. Za správně vyřešené úkoly získávaly skupinky žáků nejvíce 10 bodů. Po sečtení bodů byly vyhodnoceny nejlepší řešitelské skupiny, které byly odměněny zajímavými cenami. Ale tento den nikdo neodcházel s prázdnou – každý z žáků si odnesl účastnický diplom a jistě i dobrý pocit z příjemně stráveného dne.

Celá akce proběhla v naprosté pohodě a vládla zde skvělá atmosféra. Na závěr bychom připomněli vyjádření prof. RNDr. Milana Hejného k projektu v Rohatci, který dle našeho názoru můžeme využít i při zhodnocení projektového dne v Tovačově. Hejný uvádí, že taková akce pomáhá odbourávat u žáků strach z matematiky a učení celkově a zdůraznil také význam sociální. *„Obvykle, když se vytvoří soutěžní klima, vzniká v něm pnutí, ale to jsem tady nezažil. Děti se učí spolupracovat, starší žáci jsou schopni pro ty mladší připravovat úkoly a hodnotit je, a to je docela ojedinělé. Viděl jsem, že dítě ví, co říká, že nic nepapouškuje, protože se samo podílelo na tvorbě přednáškového materiálu. Tato schopnost vystoupit ve společnosti je u tak malých dětí, podle mého soudu, také ojedinělá*".

Celý den byl tedy pro všechny účastníky i žáky - organizátory inspirující, motivující a zábavný. Vše bylo díky pečlivé přípravě žáků dobře zorganizováno a každý si kromě nějaké drobnosti ve formě odměny odnesl také spoustu zážitků a pocit, že i předměty jako matematika, angličtina a český jazyk mohou být zajímavé a zábavné.

PROJEKTOVÝ DEN - 25.6.2013 – organizační pokyny, rozpis

Projektového dne se účastní žáci 3. A - 9. A ZŠ Tovačov.

Žáci 5. - 9. ročníku se dobrovolně přihlásili na přípravu úkolů a organizaci projektu. Měsíc předem je první informační schůzka, kde získají základní informace. Nejpozději týden před konáním projektového dne organizační skupiny předloží připravené materiály, které jsou jim po schválení nakopírovány v požadovaném množství.

Třídní učitelé obdrželi rozpis své třídy a úkolů dva dny před konáním akce.

Základní pravidla:

1, slušné chování,

2, spolupráce,

3, všechny přesuny jsou za doprovodu třídních učitelů. Ten je také přítomen v daných třídách při řešení soutěží. Dozor nad organizátory A. Fleková, P. Nemravová.

1. <u>Stupeň</u>

Akce porbíhá ve kmenových učebnách 3. A a 5. A.

Organizátoři z řad žáků:

V učebně 3. A – 4 skupinky – úkoly dávají žáci z 5. A

1, rébusy, hádanky – Mazáčová, Rohová

2, doplňovačky (ČJ, M) – Štýbnar, Mattová, Zavadil

3, skládačky, hry – Prachař, Humpa

4, tangram, kostky – představivost - Štramová, Vybíralová, Krátká

Každá aktivita je dané skupině ohodnocena 0 - 10 body podle splnění úkolu.

Vučebně 5. A - 4 skupinky – úkoly dávají žáci z 5. A

1, znalosti z vlastivědy a všeobecný přehled - Vojta Astr, Martin Frömel, Vojtašek

2, angličtina – hry, doplňovačky, kvízy –Terka Kulhánková, Partyková

3, PČ – dovednostně-praktické úkoly - Pospíšil, Kardoš, Almaši

4, hádanky, logické myšlení – Polzerová, Janášová, Milerová

1. Kolo (3. A ve své třídě, 4. A ve třídě 5. A)

8:30 třída 3. A vchází do své učebny za doprovodu třídního učitele – jsou zde nachystány 4 stanoviště. Každá ze soutěžních skupin 3. A obsadí jedno stanoviště a má 15 minut na plnění zadaných úkolů, her, doplňovaček podle zadání přiděleného stanoviště. Po 15 minutách se soutěžní skupiny vždy vymění tak, aby každá ze soutěžních skupin za 60 minut vyzkoušela všechna stanoviště.

Konec v 9:30, do 9:50 čas na svačinu ve své třídě.

8:30 třída 4. A vchází do učebny 5. A za doprovodu třídního učitele – jsou zde nachystány 4 stanoviště – každá ze soutěžních skupin 4. A obsadí jedno stanoviště a má 15 minut na plnění zadaných úkolů, her, doplňovaček podle zadání přiděleného stanoviště. Po 15 minutách se soutěžní skupiny vždy vymění tak, aby každá ze soutěžních skupin za 60 minut vyzkoušela všechna stanoviště.

Konec v 9:30, do 9:50 čas na svačinu ve své třídě.

9:50 -10:00 – třídy 3. A a 4. A si vymění za doprovodu třídních učitelů učebny.

2. Kolo (3. A ve třídě 5. A, 4. A ve třídě 3. A)

10:00 - 11:00 – 2. kolo probíhá stejným způsobem jako 1. kolo jen v jiné učebně s jinými stanovišti.

11:00-11:15 – shromažďování výsledků, vyhodnocení

11:20 -11:25 přesun do školní tělocvičny na vyhlášení výsledků

11:30 vyhlášení výsledků, předání cen

12:00 – odchod na oběd

2. stupeň

1. kolo – 8:30 - 9:30

- každá třída ve své učebně se svým třídním učitelem – průběh stejný jako u 1. stupně

V učebně 6. A – 4 skupinky – úkoly zadávají žáci z 7. tříd

1, rébusy, hádanky – Haukvicová, Křepelková, Fildánová

2, doplňovačky (ČJ, M) – Zdráhalová, Bocanová, Urbanová

3, skládačky, hry – Pover, Šálek P.

4, tangram, kostky – představivost - Navrátil L. , Roh, Šálek K.

- Každá aktivita je dané skupině ohodnocena 0-10 body podle splnění úkolu

V učebně 7. A (třídy 7. AB) - 4 skupinky – úkoly zadávají žáci z 8. tříd

1, znalosti ze zeměpisu, dějepisu a všeobecný přehled – Sejkorová, Bangová, Tomková

2, angličtina – hry, doplňovačky, kvízy – Chorá, Petrovská, Kopecká (6.A)

3, PČ – dovednostně-praktické úkoly - Zpěváková, Polzerová

4, hádanky, logické myšlení – Krajča, Bílek, Zelená, Pavelka

V učebně 8. B (třídy 8. AB) – 4 skupinky – úkoly zadávají žáci 9. A

1, znalosti – kvízy, hádanky -z dějepisu, přírodních věd – Zvonková, Fildánová M.

2, didaktické pomůcky Blokus – J. Haukvic

3, pracovní činnosti – Hakunová, Vanišová

4, kvízy a hádanky z angličtiny – Partyková, Mračková

V učebně 9. A – 4 skupinky - zadávají žáci 7. AB a 8. AB

1, znalosti z přírodních věd – Minaříková, Strejčková

2, angličtina – hry, doplňovačky, kvízy – Netopilová, Zavadilová

3, Matematika - Černá, Mračková

4, hádanky, logické myšlení – Vystavělová, Krajčová

9:30 -9:50 přestávka

2. <u>kolo</u>

9:50 – 10:10 výměna tříd

Výměna 6. A a 7. AB

Výměna 8. A a 9. A(9:50 -10:00)

10:00 -11:00 probíhá 2. kolo

3. <u>kolo</u>

11:00-11:10 výměna tříd

Výměna 6. A do učebny 8. B

Výměna 7. AB do učebny 9. A

Výměna 8. AB do učebny 6. A

Výměna 9. A do učebny 7. A

11:15 – 12:15 probíhá 3. kolo

12:15 -12:30 sběr výsledků

12:30 - 12:45 vyhodnocování

12: 50 vyhlášení a předání cen

13:10 – odchod na oběd

Účastnický list:

1. stupeň

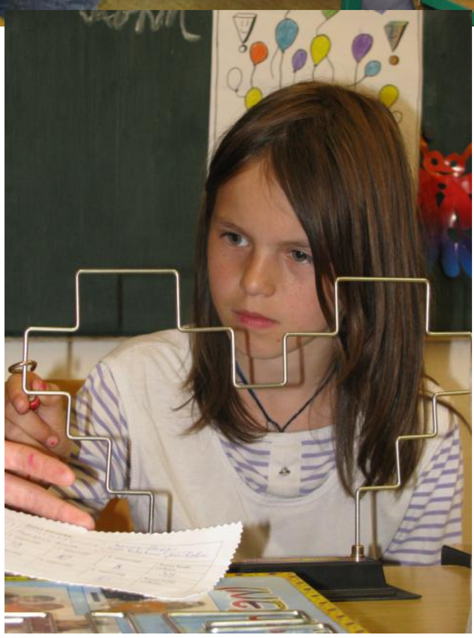
TŘÍDA:	**Jména účastníků:**			
1. kolo				
1. stanoviště	2. stanoviště	3. stanoviště	4. stanoviště	Počet bodů celkem
2. kolo				
1. stanoviště	2. stanoviště	3. stanoviště	4. stanoviště	Počet bodů celkem

2. stupeň

TŘÍDA:	**Jména účastníků:**			
1. kolo				
1. stanoviště	2. stanoviště	3. stanoviště	4. stanoviště	Počet bodů celkem
2. kolo				
1. stanoviště	2. stanoviště	3. stanoviště	4. stanoviště	Počet bodů celkem
3. kolo				
1. stanoviště	2. stanoviště	3. stanoviště	4. stanoviště	Počet bodů celkem

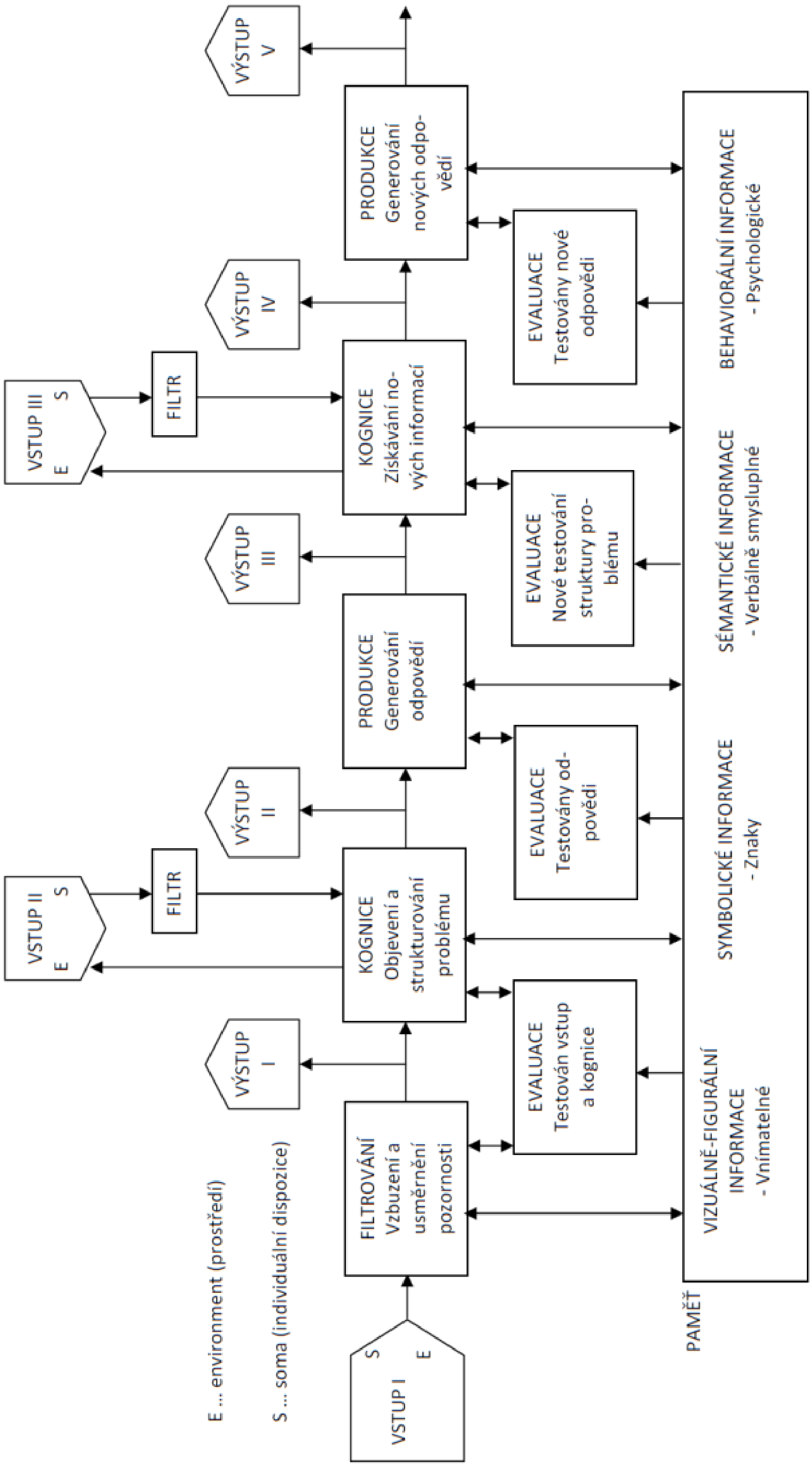

3.


Qbitz




DaVinci

Příloha 3: Guilfordův obecný operační model



Příloha 4: Odvození vzorce pro výpočet délky kružnice – pracovní list

(Pracovní list byl vytvořen v programu Active Inspire)

Úloha 1

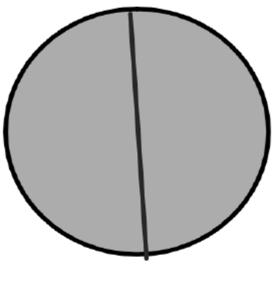
Odhadem porovnejte průměry dvou kruhů s jejich obvody a obsahy. Výpočty zapiš a zapiš výsledek.

Nápověda: Nakreslete si obrázek dvou libovolně velkých kruhů a porovnejte odhadem jejich průměr s obvodem a obsahem. Porovnání zapiš.

obr. 1: Starověcí učenci

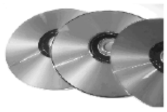
Již ve starověku si učenci kladli otázku, zda mezi velikostí obsahu či obvodu kruhu a velikostí jeho průměru je nějaký vztah. Hned v úvodu si můžeme říct, že nějaký vztah existuje.

Existuje číslo, které vyjadřuje, kolikrát je větší obvod kruhu než jeho průměr. Pomocí téhož čísla je možné vyjádřit i vztah mezi velikostí obsahu kruhu a velikostí jeho průměru.



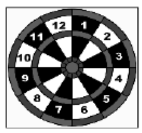
Úloha 2

Obtočte provázek kolem dvou předpřipravených předmětů ve tvaru kruhu.



Z provázku odstřihněte díl představující <u>obvod</u> měřeného předmětu.
Ze zbytku provázku odstřihněte díl představující <u>průměr</u> měřeného předmětu.

Přikládáním kratšího dílu k dílu představujícího obvod zjistěte přibližně, kolikrát je díl obvodu větší než díl průměru.
Své měření si zapisujte.



Úloha 3

Z předešlého měření zkuste ve skupině vyvodit závěr – můžeme zde objevit nějaké pravidlo?
Zkuste jej zapsat.

Z předešlého měření lze vyvodit, že podíl délky a průměru kruhu je vždy ….. , můžeme tedy říct, že O = . d

Toto číslo, označují vztah mezi délkou kružnice a jejím průměrem, se označuje řeckým písmenem: π (pí).

Ludolph van Ceulen

Holandský matematik Ludolph van Ceulen se narodil 28. ledna 1540 v Hildesheimu v Německu. Vyučoval šerm a matematiku v Delftu. V roce 1594 si otevřel šermířskou školu v Leidenu. V témže městě pak od roku 1600 učil na technické škole aritmetiku a vojenské stavitelství („opevňování").

Van Ceulen je proslulý svým výpočtem čísla pí, které spočítal na 35 desetinných míst, k čemuž použil pravidelné mnohoúhelníky vepsané a opsané téže kružnici. Strávil nad tím většinu svého života a svůj výsledek má vyrytý na náhrobním kameni. S ohledem na jeho píli se toto číslo nazývá jako Ludolfovo číslo.

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288$

Počítáme s: $\pi = 3{,}14$ **nebo s číslem zadaným na**

Podle našeho odvození je zřejmé, že vzorec na výpočet délky kružnice je:

O = π .d

nebo také O = 2. π. r

Úloha 4:

Vypočítejte obvod kružnice

a, s poloměrem 3 cm

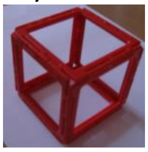
b, s průměrem 2,2 m

Příloha 5: Eulerova hádanka – zadání pracovního listu a žákovské řešení

Úloha 1: Ve dvojici si vymodelujte z přidělených dílků daná tělesa – napište, z čeho se daná tělesa skládají (např. z jednoho čtverce a čtyř rovnoramenných trojúhelníků)

Čtyřstěn

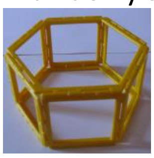
Krychle



Pravidelný čtyřboký jehlan

Pravidelný pětiboký jehlan

Pravidelný šestiboký hranol

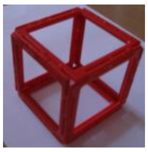
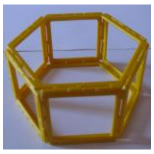


Úloha 2: Pokuste se vlastními slovy vyjádřit, co je hrana? – načrtni obrázek tělesa a hranu vyznač barevně.

Úloha 3: Pokuste se vlastními slovy vyjádřit, co je stěna? – načrtni obrázek tělesa a stěnu vyznač barevně.

Úloha 4: Pokuste se vlastními slovy vyjádřit, co je vrchol? – načrtni obrázek tělesa a vrchol vyznač barevně.

Úloha 5: Zapište do tabulky, kolik mají jednotlivá tělesa stran, hran či vrcholů.

					
počet	čtyřstěn	krychle	pravidelný čtyřboký jehlan	pravidelný pětiboký jehlan	pravidelný šestiboký hranol
vrcholů					
stěn					
hran					
vrcholy + stěny					

Úloha6: Platí nějaký vztah mezi součtem vrcholů a počtem hran u jednotlivých těles? Zkuste jej objevit a zapsat (soustřeďte se na poslední dva řádky tabulky).

Úloha 7: Ověřte, zda daný vztah platí také pro další tělesa, která si ve dvojici poskládáte. Ověření zapište.

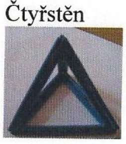
Úloha 8: Najdete těleso, pro které tento vztah neplatí?

HAVKVICOVÁ Zavadilová

EULEROVA HÁDANKA

Ve dvojici si vymodelujte z přidělených dílků daná tělesa – napište, z čeho se daná tělesa skládají (např. z jednoho čtverce a čtyř rovnoramenných trojúhelníků)

Čtyřstěn



ZE 4 ~~rovnoramenných~~ rovnostranný Δ

Krychle

ZE 6 čtverců

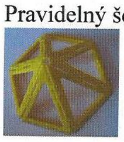
Pravidelný čtyřboký jehlan

Z 1 čtverce
a 4 rovnostraných Δ

Pravidelný pětiboký jehlan

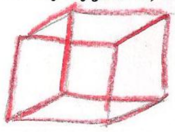
Z 1 pětiúhelníku
a 5 rovnoramenných Δ

Pravidelný šestiboký jehlan



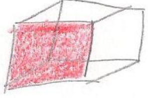
Z 1 šestiúhelníku
a 6 rovnoramenných Δ

Pokuste se vlastními slovy vyjádřit, co je hrana? – načrtni obrázek tělesa a hranu vyznač barevně.



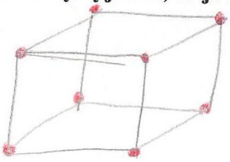
mezi stěnami

Pokuste se vlastními slovy vyjádřit, co je stěna? – načrtni obrázek tělesa a stěnu vyznač barevně.



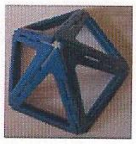
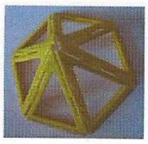
Jedna část tvaru.

Pokuste se vlastními slovy vyjádřit, co je vrchol? – načrtni obrázek tělesa a vrchol vyznač barevně.



Špičatý vrchol tělesa.

Zapište do tabulky, kolik mají jednotlivá tělesa stran, hran či vrcholů.

					
počet	čtyřstěn	krychle	pravidelný čtyřboký jehlan	pravidelný pětiboký jehlan	pravidelný šestiboký hranol
vrcholů	4	8	5	6	7
stěn	4	6	5	6	7
hran	6	12	8	10	12
vrcholy + stěny	8	14	10	12	14

Platí nějaký vztah mezi součtem vrcholů a počtem hran u jednotlivých těles? Zkuste jej objevit a zapsat (soustřeďte se na psolední dva řádky tabulky).

$v+s > h$ $\quad v+s = h+2$

Ověřte, zda daný vztah platí také pro další tělesa, která si ve dvojici poskládáte. Ověření zapište.

Ano ~~krychle~~ $= \underset{v+s\ >\ h}{4+4 > 6}$ $\quad 4+4=6+2$

trojboký jihlan

Najdete těleso, pro které tento vztah neplatí?

desetiboký jihlan $= \underset{v+s\ >\ h}{24 > 20}$ $\quad \left. v+s = h+4 \right\}$ Platí

koule

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Mgr. Alena Fleková
Katedra:	Ústav pedagogiky a sociálních studií
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Jitika Laitochová, CSc.
Rok obhajoby:	2013

Název práce:	Heuristika ve vyučování
Název v angličtině:	Heuristics in education
Anotace práce:	Disertační práce se zabývá problematikou heuristiky a jejím využití ve vyučování. V teoretické části popisuje charakteristické pojmy pro oblast heuristiky a to jak v užším, tak v širším kontextu. Definuje pojem heuristiky, heuristických přístupů a heuristických metod. Nabízí ucelený pohled na problematiku heuristických přístupů a jejich využití ve vyučování a komplexní přehled heuristických metod. Zabývá se také objevnými metodami, které jsou využitelné ve vyučování matematice. Na základě vymezení teoretických východisek strategií řešení učebních úloh je postavena empirická část práce, ve které jsou kvalitativní analýzou popisovány volby strategií řešení slovních úloh u žáků základních a středních škol a studentů vysoké školy.
Klíčová slova:	heuristika, heuristická metoda, problémové vyučování, badatelsky orientované vyučování, strategie řešení učebních úloh, vyučování matematice
Anotace v angličtině:	Dissertation thesis deals with heuristics and its use in education. The theoretical part describes typical terms for the heuristics both narrower and broader context. It describes the heuristics, heuristic approaches and heuristic methods. This is complex view on heuristic approaches and complex summary of heuristic methods. It also deals with inquiry-based education that are useful in teaching mathematics. Based on the definition of the theoretical background of mathematical tasks´s solving strategies, the empirical part is built. This describes the qualitative analysis of choosing strategies for mathematical task solving by primary school

	pupils and students of secondary schools and universities.
Klíčová slova v angličtině:	heuristics, heuristic method, problem learning, problem solving, inquiry-based education, strategy of solving tasks, teaching mathematics
Přílohy vázané v práci:	5 příloh (+ CD Rom)
Rozsah práce:	150 s. + 38 s. příloh
Jazyk práce:	CZ

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

HEURISTIKA VE VYUČOVÁNÍ

Autoreferát disertační práce

Mgr. Alena Fleková

Školitel: doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.

OLOMOUC 2013

Autor:	Mgr. Alena Fleková
Název disertační práce:	Heuristika ve vyučování
Studijní obor:	Pedagogika
Školitel:	doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.
Oponenti:	doc. PhDr. PaedDr. Kamil Janiš, CSc. prof. RNDr. Josef Molnár, CSc.
Místo a termín obhajoby:	PdF UP v Olomouci _____________________
Místo vystavení práce:	Referát vědy a výzkumu Pedagogická fakulta UP v Olomouci Žižkovo náměstí 5 771 40 Olomouc

Obsah

1 Úvod do řešené problematiky

„Nejlepší způsob, jak se něčemu naučit, je objevit si to sám!"

G. Polya

„Aktivita, samostatnost a tvořivost jsou hlavními ideály, ke kterým směřujeme a jsou náplní celého života. Tvořivost je vrcholným projevem osobnosti každého člověka v různé míře. Pojem aktivní, samostatné a tvořivé práce se v dějinách školy a pedagogiky objevuje již v dílech J. A. Komenského, J. J. Rousseau, J. Dewey a dalších myslitelů."[151] I v dnešní době je naší snahou vytvořit podnětné a tvůrčí školní prostředí, které stimuluje nejschopnější žáky, povzbuzuje méně nadané, chrání i podporuje žáky nejslabší a zajišťuje, aby se každé dítě prostřednictvím výuky přizpůsobené individuálním potřebám optimálně vyvíjelo v souladu s vlastními předpoklady pro vzdělávání. Přátelská a vstřícná atmosféra vybízí žáky ke studiu, práci i činnostem podle jejich zájmu a poskytuje jim prostor a čas k aktivnímu učení a k plnému rozvinutí jejich osobnosti. Žákům musí být dána možnost zažívat úspěch, nebát se chyby a pracovat s ní.[152]

Současné vzdělávací kurikulum, Rámcový vzdělávací program, předpokládá ve školní výuce využití metod, které aktivizují žáky, podporují rozvoj jejich tvůrčího myšlení a dalších složek osobnosti. Mezi takové aktivizující metody patří, mimo jiné, metody heuristické. Tyto metody vycházejí z přesvědčení, že žáci budou učivu lépe rozumět, když budou vidět, jak se nové poznatky tvoří a když si toto vytváření sami na jim odpovídající úrovni vyzkoušejí. Žáci přicházejí do školy s mnoha otázkami „Proč?" a „Jak?" a s touhou dostat na všechny své otázky odpovědi. Bohužel tyto žákovské touhy znát, vědět a objevovat jsou často špatnou metodou, např. pouhou transmisí poznatků, potlačovány.

Využití metod, jejichž podstatou je heuristika, není žádnou novinkou. Tyto metody jsou v historii známy již od filosofa Sokrata, který je využíval ve zvláštním druhu rozhovoru. *„Obvyklý vztah, kdy se žák ptá a učitel odpovídá, je u něho obrácen. Sokrates je tím, kdo se táže. Často svou úlohu srovnával s uměním babickým, povoláním své matky a říkal, že jeho úlohou není moudrost rodit, nýbrž pouze pomáhat při zrození myšlenek druhým."*[153]

---

[151] PECINA, Pavel. *Tvořivost ve vzdělávání žáků*. Brno: PdF MU, 2008. ISBN 978-80-210-4551-4. s. 5

[152] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. [online 25.8.2013].

[153] STÖRIG, Hans Joachim. *Malé dějiny filosofie*. Kostelní Vydří: Karmelitánské nakladatelství, 2000. ISBN 80-7192-500-4 s. 115.

Metody využívající heuristické přístupy přinášejí žákům zajímavý způsob učení, který je baví, při kterém se sami podílejí na získávání nových poznatků, které potřebují. Za pomoci těchto metod se spojuje pěstování tvořivosti žáka s osvojováním znalostí a dovedností. Takové vyučování vychází z myšlenky *„nejlepší způsob, jak se něčemu naučit, je objevit si to sám*“, a tím poskytuje možnost žákům zažít pocit objevitelského nadšení. Také zde hraje velkou roli trvalejší osvojení vědomostí a schopnost využívat je při řešení problémů.

Pokud chceme u žáků rozvíjet myšlení pomocí heuristických strategií, jako jsou např. zobecnění, ilustrace či analogie, potřebujeme dostatek času, což bývá velkým problémem. Tento problém se dá částečně kompenzovat cíleným zaměřením zkoumaného problému a také vědomím, že tato metoda není na úkor kvality vědomostí a rozvíjí nejen znalosti, ale i dovednosti a postoje žáků. Kromě rozvoje základních poznávacích procesů je tento typ vyučování důležitý také pro rozvoj procesů citových a volních, žáci se mimo jiné učí formulovat a obhajovat své názory, přijímají zodpovědnost za výsledky své práce a tím také rozvíjejí klíčové kompetence.

Snahou moderního vyučování je vrátit se k podstatě věci, nechat žáky řešit situace zkoumáním a objevováním jako vědce a badatele. Tato metoda tedy představuje v dnešní době ve světě *„významný způsob zefektivnění a modernizace výchovně-vzdělávacího procesu. Učení se pomocí tvořivého řešení problémů, stejně jako vyučování touto metodou a strategií, představuje vrchol v jednotlivých druzích a způsobech vyučování a učení.*“[154]

Hlavním tématem disertační práce je vzhledem k aktuálnosti tohoto tématu objevitelská metoda, heuristika. Pro využití heuristické metody v přírodovědném vzdělávání hovoří také výsledky výzkumu[155], které vedly ke zjištění, že žáci nemají až takový problém s osvojováním přírodovědných poznatků a teorií, ale slabinou je uvažovaní o problémech a jejich zkoumání. Dalším dokladem aktuálnosti potřeby využití badatelských metod je rozsáhlá komparativní studie z roku 2008 o stavu přírodovědného vzdělávání v zemích EU[156], která konstatovala klesající úroveň matematických a přírodovědných znalostí žáků. V této studii byly popsány hlavní problémy a následně byly dány návrhy a doporučení, která by měla vést ke změnám potřebným k žádoucí proměně. Jedno z doporučení bylo zaměřeno k inovaci výukových metod

[154] ZELINA, Miron. *Tvořivost v matematice*. Olomouc: Krajský pedagogický ústav Ostrava, 1990. ISBN 80-900158-9-1. s. 66

[155] Projekt PISA - výzkumná aktivita Organizace pro hospodářskou spolupráci a rozvoj zaměřená na oblast měření výsledků ve vzdělávání.

[156] Zpráva pro Nuffieldovu nadaci; Osborne a Dillon Science Education in Europe: Critical reflections, 2008.

směrem k zavádění badatelsky orientovaných způsobů práce se žáky ve výuce a také ke vzdělávání učitelů tak, aby dokázali tyto metody ve výuce efektivně využívat.

2 Obsah disertační práce

Disertační práce je strukturována do dvou základních částí, které se dále člení na konkrétní kapitoly a podkapitoly. Nedílnou součástí celé práce jsou obrázky, tabulky a grafy, které doplňují odborný text.

Teoretická část disertační práce vymezuje řešenou problematiku, popisuje její současný stav a vytváří teoretické zázemí pro realizaci výzkumného šetření.
Úvodní kapitola je věnována zamyšlení se nad aktuálností dané problematiky, stručně popisuje vymezení výzkumných problémů, cílů práce, její struktury a metodologii výzkumu.
První kapitola vymezuje základní pojmy. Ty byly pro účely disertační práce rozděleny do širšího a užšího kontextu. V této první kapitole jsou charakterizovány pojmy v širším kontextu, které souvisejí s podstatou či východisky heuristických přístupů. Mezi ty základní patří konstruktivistický přístup, výukové metody, zvláště ty aktivizující, dále pojmy aktivita, samostatnost a tvořivost žáka a motivace. Důvodem výběru právě těchto pojmů je fakt, že východiskem heuristických metod je konstruktivistické pojetí, jsou zařazovány mezi aktivizační výukové metody, využívají aktivity, samostatnosti a tvořivosti žáků a jsou vhodnou motivací k učení.
Druhá kapitola se zabývá teoretickými východisky a klíčovými pojmy v užším kontextu. Charakterizuje pojem heuristika jak z obecného hlediska, tak jako tvůrčí řešení problémů. Dále popisuje jednotlivé heuristické metody.
Třetí kapitola se zužuje již na heuristické metody ve vyučování a popisuje jednotlivé možnosti jejich využití. Podrobně charakterizuje heuristickou metodu a její submetody pro využití ve vyučování, zmiňuje pozitivní a negativní stránky výuky touto metodou a připomíná pedagogické výzkumy, které se zabývaly heuristickou metodou či problémovým vyučováním. Zaměřuje se dále na problémové vyučování, badatelsky orientované vyučování a na heuristické metody ve vyučování matematice.

Hlavním cílem empirické části bylo zjistit volbu strategií žáků a studentů při řešení slovních úloh a vytvořit sborník heuristických úloh.

Empirická část disertační práce je tedy rozdělena do dvou hlavních kapitol, které číselným označením navazují na kapitoly teoretické části práce.

Čtvrtá kapitola se věnuje výzkumnému šetření. Obsahuje vymezení cílů výzkumu, popisu metodiky, konkretizuje výzkumné problémy a otázky. Zabývá se použitými výzkumnými technikami, charakteristikou výzkumného vzorku a popisu průběhu výzkumného šetření. Jsou zde uvedena řešení jednotlivých úloh zadaného nestandardizovaného testu, v rámci kvalitativního výzkumu jsou popsány jednotlivé strategie řešení daných úloh a analyzována jednotlivá řešení respondentů. V závěru této kapitoly jsou popsány souhrnné výsledky výzkumu, které jsou doloženy na přehledných tabulkách a grafech.

Kapitola pátá obsahuje sborník heuristických úloh, které jsou využitelné ve vyučování matematice.

Celou práci uzavírá přílohová část, kterou tvoří celkem pět dokumentů doplňující teorii i empirii disertační práce.

Celou práci uzavírá ***závěrečná kapitola***, která shrnuje jak teoretickou část, tak výsledky výzkumu a uvádí přínos, návrhy a doporučení pro pedagogickou praxi. V této kapitole nechybí celkové zhodnocení výsledků práce, posouzení splnění cílů a nástin možností jejího dalšího rozšíření.

Zpracování teoretické části obnášelo intenzivní práci s odbornou literaturou a prameny, bylo využito jak knihovnických, tak internetových zdrojů a služeb. Prostudovaná literatura v rámci zaměření disertační práce byla složena z českých i zahraničních pramenů, monografií i odborných článků ve sbornících. Zaměřili jsme se jak na literaturu, příspěvky a publikace nejnovější, tak na literaturu staršího data, která dotvářela ucelenější pohled na problematiku heuristiky. Vzhledem k nejednotnosti názorů a pojmů na tuto problematiku byla práce na teoretické části velmi náročná. S výběrem odborné literatury a pramenů pomohla také rešerše zpracovaná pracovníky Knihovny Univerzity Palackého v Olomouci.

Empirická část je věnována pedagogickému výzkumu. Klíčový problém tvořila otázka, zda volba strategií řešení slovních úloh je závislá na stupni vzdělání. Výzkumné šetření uskutečněné v rámci disertační práce je založeno na kvalitativním srovnávání jednotlivých strategií doplněné o závěrečné shrnutí. Formou nestandardizovaného didaktického testu byly zjištěny strategie řešení slovních úloh u žáků základních a středních škol a studentů vysoké školy. Hlavní náplní výzkumu je komparace těchto zvolených strategií doprovázená ukázkami jednotlivých řešení žáků a studentů. Tato kvalitativní analýza je doplněna shrnutím ve formě tabulek a grafů a závěrečným zhodnocením výzkumu.

Mimo výše uvedenou teoretickou a empirickou část je nepostradatelnou součástí práce také přílohová část, kterou tvoří celkem pět dokumentů doplňující teorii i empirii disertační práce.

3 Cíle disertační práce

Cílem disertační práce je v teoretické části zpracování uceleného pohledu na problematiku heuristických přístupů a jejich využití ve vyučování a to na podkladě studia odborné literatury a zdrojů, dostupných dokumentů a dosavadních výzkumů.

Dílčí cíle teoretické části disertační práce jsou:

- vymezit základní pojmy;
- analyzovat a komparovat jednotlivá teoretická východiska metod a forem práce využívajících heuristické přístupy;
- zpracovat přehled výukových metod a forem práce využívajících heuristické přístupy, popsat jejich základní zásady, východiska a postupy;
- popsat možnosti využití heuristických přístupů ve vyučování matematice.

Hlavním cílem empirické části disertační práce je zjistit volbu strategií žáků a studentů při řešení slovních úloh.

Dílčí cíle empirické části jsou:

- zjistit volbu strategií žáků základní školy při řešení slovních úloh;
- zjistit volbu strategií žáků střední školy při řešení slovních úloh;
- zjistit volbu strategií studentů vysoké školy při řešení slovních úloh;
- srovnat volby strategií podle stupně školy;
- zjistit, zda zvolené strategie řešení slovních úloh závisí na stupni navštěvované školy.

Dílčím cílem empirické části práce je také vytvoření sborníku heuristických úloh.

4 Výzkumné šetření

Základem výzkumného šetření je kvalitativní analýza žákovských řešení slovních úloh problémového charakteru. Obsahem výzkumu je komparace těchto zvolených strategií doprovázená ukázkami jednotlivých řešení žáků a studentů. Tato kvalitativní analýza je doplněna shrnutím ve formě tabulek a grafů a zhodnocením závěru výzkumu.

4.1 Cíle a dílčí cíle výzkumného šetření

Základním cílem empirické části disertační práce je zjistit volbu strategií žáků a studentů při řešení slovních úloh.

Dílčí cíle empirické části jsou:

- zjistit volbu strategií žáků základní školy při řešení slovních úloh;
- zjistit volbu strategií žáků střední školy při řešení slovních úloh;
- zjistit volbu strategií studentů vysoké školy při řešení slovních úloh;
- komparovat volby strategií podle stupně školy.

4.2 Metody výzkumného šetření

Klíčový problém výzkumného šetření tvoří otázka, zda volba strategií řešení slovních úloh je závislá na stupni vzdělání. Výzkumné šetření uskutečněné v rámci disertační práce je založeno na kvalitativním srovnávání jednotlivých užitých strategií doplněné o závěrečné shrnující tabulky.

Jako metodu výzkumného šetření jsme zvolili nestandardizovaný dotazník, s jehož pomocí jsme zjišťovali strategie řešení slovních úloh u žáků a studentů na různém stupni školy. Do tohoto nestandardizovaného didaktického testu byly zařazeny tři matematické slovní úlohy s problémovým charakterem. K vyřešení zadaných úloh pomocí zvolené strategie postačuje znalost učiva nižších ročníků základní školy.

4.3 Podmínky výzkumného šetření

Výzkumné šetření se uskutečnilo na třech stupních škol. Celkový počet respondentů byl 136, z toho na základních školách se výzkumného šetření zúčastnilo 49 žáků, na gymnáziu 45 žáků a na univerzitě 42 studentů.

Výzkum byl proveden na Základní škole v Tovačově a Základní škole v Rohatci, na Gymnáziu v Nymburku a u studentů oborů Učitelství 1. stupně a Učitelství 2. stupně (v kombinaci s matematikou) Univerzity Palackého v Olomouci.

4.4 Analýza žákovských / studentských řešení testových úloh

Předmětem analýzy není – v souladu s cíli výzkumu – kvantitativní posouzení úspěšnosti řešení jednotlivých úloh. Jde o kvalitativní analýzu řešitelských postupů, tzv. strategií.
Analýzu písemného řešení žáků / studentů posuzujeme v jednotlivých fázích řešitelského procesu:

- Uchopení úlohy.
- Zápis zadání, znázornění úlohy.
- Řešení zvolenou strategií.
- Odpověď.

Ke každé fázi řešitelského procesu byly vybrány vhodné reprezentativní ukázky z celého vzorku, které byly analyzovány. V závěru výzkumného šetření je uveden přehledný souhrn.

4.5 Závěry výzkumného šetření

Na základě kvalitativní analýzy byla provedena deskripce zvolených strategií a vytvořen přehledný souhrn všech řešení. Vzhledem k nejednotnosti četností ve vzorcích respondentů dovolujeme si udělat procentuální srovnání. Ze souhrnných údajů vyplývají tyto závěry:

Při analýze strategií řešení úlohy 1 bylo zjištěno, že žáci základní školy u problémové úlohy zvolili buď geometrickou cestu (78,6%) nebo strategii experimentu (21,4%).
Žáci střední školy se již nebáli vyzkoušet různé typy strategií. Při řešení neznámé problémové úlohy převažovalo v 30% řešení metodou bez jedné výrazné strategie (kombinace více strategií

či nerozeznatelná strategie), následovalo řešení geometrickou cestou (20%) a algebraickou cestou (20%).
Studenti vysoké školy také volili již více strategií k řešení, ale v 44% sázeli na jistotu geometrické cesty nebo známého použití algoritmické cesty (24%).

Při analýze strategií řešení úlohy 2 bylo zjištěno, že žáci základní školy u klasické slovní úlohy zvolili v 75% aritmetickou cestu a v 16,6% logickou úvahu.
Žáci střední školy řešili tuto úlohu v 88,8% také aritmetickou cestou, popř. nevyužili žádné výrazné strategie (6,6%).
Studenti vysoké školy řešili tuto úlohu také aritmetickou cestou (89,7%) nebo zvolili metodu experimentu.

Úlohu 3 řešili všechny výzkumné skupiny převážně aritmetickou cestou, žáci základní školy v 31,6%, žáci střední školy v 59,3% a studenti vysoké školy v 32,4 %. Další nejčastěji volenou strategií byla u studentů vysoké školy algebraická cesta řešení (29,7%).

Zkoumáním četností projevených strategií v řešení zadaných úloh bylo zjištěno, že žáci základní školy volí nejčastěji názorné strategie - nejčastěji geometrickou cestu nebo cestu experimentu, zatímco aritmetickou cestu volí pouze při již známém postupu. Žáci základní školy řeší většinou jen úlohy toho typu, které znají nebo ve kterých vidí analogii s již dříve řešenými úlohami. Ve většině případů se žáci neznámou úlohu ani nepokusí řešit.
Žáci středních a studenti vysokých škol již předložené úlohy řeší různými strategiemi, zkouší nové možnosti řešení. Často vyzkouší více strategií a využijí k řešení tu, která jim v tu chvíli nejvíce vyhovuje. Většina studentů zadanou úlohu zkusí vyřešit jakoukoliv strategií, než aby ji neřešili vůbec.

5 Přínos disertační práce

Za hlavní přínos disertační práce v rovině pedagogické teorie považujeme komplexní zpracování teorií heuristických přístupů a ucelený pohled na tuto problematiku jak z teoretického hlediska, tak z možnosti využití ve školní praxi. Empirická část přispívá zjištěním preferovaných strategií při řešení matematických úloh a jejich kvalitativní analýzy. Vytvořený sborník heuristicky řešených úloh je vhodnou pomůckou do hodin matematiky. Daný sborník nabízí souhrn aktivit a zejména slovních úloh využívajících heuristických přístupů pro rozvoj matematických kompetencí žáků a studentů.

Teoretická oblast práce společně se zpracovanými výsledky výzkumného šetření mohou být využity v odborných didaktikách a jsou využitelné v profesní přípravě studentů učitelství na budoucí povolání.

Disertační práce má přínos také v oblasti pedagogické praxe. Teoretické informace, výsledky výzkumného šetření a sborník heuristických úloh mohou být zdrojem informací a inspirace pro učitele základních i středních škol o možnostech využití heuristických přístupů ve vyučování matematice.

6 Výběr z použité literatury

AVERBACH, Bonne and Orin CHEIN. *Problem Solving Through Recreational Mathematics*. New York (USA): Dover Publications, 2000. ISBN 978-0-486-40917-7.

ČÁBALOVÁ, Dagmar. *Pedagogika*. Praha: Grada, 2011. ISBN 978-80-247-2993-0.

ČÁP, Jan a Jiří MAREŠ. *Psychologie pro učitele*. Praha: Portál, 2001. ISBN 80-7178-463-X

ENGEL, Arthur. *Problem-Solving Strategies. (Problem Books in Mathematics)*. Springer, 1997. ISBN 978-0387982199

ENGEL Arthur, VARGA, Tomas a Willi WALSER. *Zufall oder Strategie?* Stuttgart: Ernst Klett Verlag, 1974. ISBN 3-12-902000-4.

GAVORA, Peter. *Úvod do pedagogického výzkumu*. Brno: Paido, 2010. ISBN 978-80-7315-185-0.

HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál, 2001. ISBN 80-7178- 581-4.

HELUS, Zdeněk et al. *Psychologie školní úspěšnosti žáků.* Praha: SPN, 1979.

HENDL, Jan. *Kvalitativní výzkum.* Praha: Portál, 2008. ISBN 978-80-7367-485-4.

CHRÁSKA, Miroslav. *Metody pedagogického výzkumu: základy kvantitativního výzkumu*. Praha: Grada, 2007. ISBN 978-80-247-1369-4.

KALHOUS, Zdeněk a Otto OBST. *Školní didaktika.* Praha: Portál, 2002. ISBN 80-7178-253-X.

KOPKA, Jan. *Hrozny problémů ve školské matematice.* Ústí nad Labem: UJEP, 1999. ISBN 80- 7044-247-6.

KOPKA, Jan. *Umění řešit matematické problémy*. Praha: HAV, 2013. ISBN 978-80-903625-5-0.

KOPKA, Jan. *Výzkumný přístup při výuce matematiky*. Ústí nad Labem: UJEP, 2004,. ISBN 80-7042-170-3.

KOPKA, Jan. *Zkoumání ve školské pedagogice*. Ružomberok: Katolícká univerzita v Ružomberoku, 2006. ISBN 80-8084-064-4.

KOTRBA, Tomáš a Lubor LACINA. *Praktické využití aktivizačních metod ve výuce.* Brno: Barrister a Principal, 2010. ISBN 978-80-87029-12-1.

KVĚTOŇ, Pavel. *Kapitoly z didaktiky matematiky.* Ostrava: PdF, 1982.

KYRIACOU, Chris. *Klíčové dovednosti učitele*: *Cesty k lepšímu vyučování*. Praha: Portál, 1996. ISBN 80-7178-022-7.

LOKŠOVÁ, Irena a Jozef LOKŠA. *Tvořivé vyučování*. Praha: Grada Publishing a. s., 2003.

ISBN 80-247-0374-2.

MAŤUŠKIN, A. M. *Problémové situácie v myslení a vo vyučování.* Bratislava: Slovenské pedagogické nakladatelstvo, 1973. 67-447-73

MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody.* Brno: Paido, 2003. ISBN 80-7315-039-5.

MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Cesty pedagogického výzkumu*. Brno: Paido, 2004. ISBN 80-7315-078-6.

MAŇÁK, Josef a kol. *Alternativní metody a postupy*. Brno: Masarykova univerzita,1997. ISBN 80-210-1549-7.

NOVÁK, Bohumil. *Matematika III. Několik kapitol z didaktiky matematiky.* Olomouc: UP, 2000. ISBN 80-7067-979-4.

NOVÁK, Bohumil. *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky 1 : pro učitelství 1. stupně ZŠ*. Olomouc : Univerzita Palackého, 2003. ISBN 80-244-0691-8.

NOVOTNÁ, Jarmila. *Analýza řešení slovních úloh.* Praha: PdF UK, 2000. ISBN 80-7290-011-0

OBST, Otto. *Didaktika sekundárního vzdělávání*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2006. ISBN 80-244-1360-4.

PECINA, Pavel. *Tvořivost ve vzdělávání žáků*. Brno: PdF MU, 2008. ISBN 978-80-210-4551-4.

PECINA, Pavel a Lucie ZORMANOVÁ. *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4834-8.

PELIKÁN, Jiří. *Základy empirického výzkumu pedagogických jevů*. Praha: Karolinum, 2011. ISBN 978-80-246-1916-3

PETTY, Geoffrey. *Moderní vyučování.* Praha: Portál, 2008. ISBN 978-80-7367-427-4.

POLYA, George. *How to solve it*. London (UK): Penguin Books, 1990. ISBN 978-0-14-012499-6.

PRŮCHA, Jan, WALTEROVÁ, Eliška a Jiří MAREŠ. *Pedagogický slovník*. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-647-6.

PRŮCHA, Jan. *Pedagogická encyklopedie*. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-546-2.

PRŮCHA, Jan. *Přehled pedagogiky: úvod do studia oboru.* Praha: Portál, 2006. ISBN 80-7178-944-5.

SITNÁ, Dagmar. *Metody aktivního vyučování: spolupráce žáků ve skupinách.* Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-346-1.

SIVOŠOVÁ, Alica. *Heuristika v matematike na strednej škole: Použitie heuristickej metódy vyučovania vo vybraných celkoch učiva.* Nitra: Slovenské pedagogické nakladatelstvo v Bratislave, 1987. 67-013-87.

SKALKOVÁ, Jarmila. *Obecná didaktika.* Praha: Grada, 2007. ISBN 978-80-247-1821-7.

SKUTIL, Martin. *Základy pedagogicko-psychologického výzkumu pro studenty učitelství.* Praha: Portál, 2011. ISBN 978-80-7367-778-7.

STÖRIG, Hans Joachim. *Malé dějiny filosofie*. Kostelní Vydří: Karmelitánské nakladatelství. 2000. ISBN 80-7192-500-4.

ŠEDIVÝ, Ondrej a Jozef FULIER. *Úlohy a humanizácia vyučovania matematiky*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2004. ISBN 80-8050-700-7.

TAO, Terence. *Solving mathematical problems.* New York (USA): Oxford university press., 2006. ISBN 978-0-19-920561-5.

TICHÁ, Marie. *K strategiím řešení úloh v učení žáků matematice na ZŠ*. Praha, 1982.

VALIŠOVÁ, Alena a Hana KASÍKOVÁ.(eds.) *Pedagogika pro učitele*. Praha: Grada Publishing, a.s., 2011. ISBN 978-80-247-3357-9.

ZELINA, Miron. *Aktivizácia a motivácia žiakov na vyučování.* Banská Bystrica: Metodické centrum v Banskej Bystrici, 1990. ISBN 80-85415-34-8.

ZELINA, Miron. *Tvořivost v matematice*. Olomouc: Krajský pedagogický ústav v Ostravě, 1990. ISBN 80-900158-9-1.

ZELINA, Miron a Eva JAŠŠOVÁ. *Tvořivost – piata dimenzi.* Bratislava: Smena, 1984. 73-053-84.

ZELINA, Miron a Milota ZELINOVÁ. *Rozvoj tvorivosti detí a mládeže.* Bratislava: SPN, 1990. ISBN 80-08-00442-8.

ŽILKOVÁ, Katarina. *Heuristika v informatizácii výučby matematiky*. Bratislava: Metodicko - pedagogické centrum, 2006. ISBN 80-8052-261-8.

ELEKTRONICKÉ ZDROJE:

BLAŽKOVÁ, Růžena. *Několik nestandardních úloh k tematickému okruhu Číslo a proměnná*. Metodický portál RVP. [online] poslední revize 7. 4. 2007. [cit. 14. 5. 2007]. Dostupný z http://www.rvp.cz.

http://www. pdf.truni.sk/vsr

http://kdf.mff.cuni.cz/heureka/

http://www.fibonacci-project.eu/ nebo http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/fibo.html

LIŠKOVÁ, Hana. *Postoje žáka k matematice*. [online]. [cit. 20.4.2011]. Dostupné na internetu: < class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/FileDownload.aspx?FileID=107>.

MOLNÁR, Josef, SCHUBERTOVÁ, Slavomíra a Vladimír VANĚK. *Konstruktivismus ve vyučování matematice*. [online]. [cit. 20.4.2010]. Dostupné na internetu: <http://esfmoduly.upol.cz/publikace/molnar.pdf>.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online 25.8.2013]. Dostupné na internetu: http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-skolstvi/upraveny-ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani<http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPZV_2007-07.pdf>.

7 Profesní kurikulum

Osobní údaje

Jméno a příjmení: Mgr. Alena Fleková

Datum narození: 19.02.1986

Email: alena.stastna@email.cz

Vzdělání

09/2009 – doposud	Pedagogická fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci, prezenční doktorské studium - obor Pedagogika.
09/ 2009 – 6/2010	Pedagogická fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci, Centrum celoživotního vzdělávání v oboru: Matematika pro střední školy.
2009 – 6/2010	Pedagogická fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci, Centrum celoživotního vzdělávání v oboru: Občanský a společenskovědní základ.
09/2005- 09/2009	Pedagogická fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci, Učitelství matematiky a občanské výchovy pro 2. stupeň ZŠ, Olomouc, zakončené státní závěrečnou zkouškou, Mgr.
09/1997-06/2005	Masarykovo gymnázium Vsetín - všeobecné, Tyršova 1069, Vsetín

Pracovní zkušenosti

01/2012 - doposud	ZŠ a MŠ Tovačov, učitelka
09/2009 – doposud	Univerzita Palackého v Olomouci, Katedra matematiky – interní doktorand

Přehled odborných aktivit a publikační činnosti

Aktivní vystoupení na konferencích

2009

7. – 10. 10. 2009: Podzimní péče o talenty s mezinárodní účastí – MAKOS 2009 (Janské Lázně)

2010

28. - 30. 4. 2010: Vědecká konference s mezinárodní účastí: Matematické vzdělávání v kontextu proměn primární školy - Elementary Mathematics Education (Olomouc)

20. 5. 2010: XXVIII. Mezinárodní kolokvium o řízení vzdělávacího procesu zaměřené k aktuálním problémům vědy, výchovy, vzdělávání a rozvoje tvůrčího myšlení (Brno)

29.9.-2.10.2010 Podzimní péče o talenty s mezinárodní účastí – MAKOS 2010 (Malá Skála u Turnova)

1.12.2010 Aktuální problémy pedagogiky ve výzkumech studentů doktorských studijních programů VIII. (Olomouc)

2011

31. 3. 2011: Tvořivost v počátečním vyučování matematiky - vědecká konference s mezinárodní účastí věnovaná matematickému vzdělávání v primární škole (Plzeň)

14. 4. 2011: VIII. Vedecká konferencia doktorandov na PF UKF v Nitre - „Človek ako subjekt edukácie a objekt pedagogickej vedy“ (Nitra)

19. 5. 2011: XXIX. Mezinárodní kolokvium o řízení vzdělávacího procesu zaměřené k aktuálním problémům vědy, výchovy, vzdělávání a rozvoje tvůrčího myšlení (Brno)

30.9. 2011- 2.10.2011: Podzimní péče o talenty s mezinárodní účastí – MAKOS 2011 (Mikulov)

2012

25. - 27. 4. 2012: Mezinárodní konference (Elementary Mathematics Education) „Specifika matematické edukace v prostředí primární školy“, Olomouc 2012

2013

29.5. – 31.5. 2013 20th Czech-Polish-Slovak Mathematical Conference, Litoměřice

Absolvované kurzy a semináře

2013

Finanční gramotnost – vzdělávací agentura Descastes

2012

DVU, Modrava – zaměřeno na Badatelsky orientované vyučování, participace na projektu Fibonacci

Interaktivní tabule – program Active Inspire – osvědčení dle akreditace MŠMT

<u>Publikační činnost</u>

ŠŤASTNÁ, Alena. *Dělitelnost v učivu základní školy*. In MAKOS 2009. Sborník materiálů z podzimní péče o talenty. 1.vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2010. s. 54-59. ISBN 978-80-244-2585-6.

ŠŤASTNÁ, Alena. *Řízené objevování v matematice na 1. stupni ZŠ*. In Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, Facultas Paedagogica, Mathematica-Matematické vzdělávání v kontextu proměn primární školy. Sborník příspěvků. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2010. s. 294-297. ISSN 0862-9765.

ŠŤASTNÁ, Alena. *Controlled discovering in mathematics education at primary school*. In Mathematical Education in a Context of Changes in Primary school. Sborník abstraktů. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2010. s. 62. ISBN 978-80-244-2512-2.

JANKŮ, Magdalena, ŠŤASTNÁ, Alena a Kateřina ŠUPÍKOVÁ. *1.ročník studentské grantové soutěže na UP - prezentace schválených projektů na katedře matematiky.* In Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, Facultas Paedagogica, Mathematica- Matematické vzdělávání v kontextu proměn primární školy. Sborník příspěvků. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2010. s. 330-332. ISSN 0862-9765.

ŠŤASTNÁ, Alena. *Řízené objevování v matematice na 1. a 2. stupni ZŠ.* In XXVIII. Mezinárodní kolokvium o řízení vzdělávacího procesu. Sborník abstraktů a elektronických verzí recenzovaných příspěvků na CD-ROMu. 1.vyd. Brno: Univerzita obrany, 2010. s. 42. ISBN 978-80-244-2512-2.

ŠŤASTNÁ, Alena. *Projekt „Heuristické přístupy ve vyučování matematice“.* In MAKOS 2010. Sborník materiálů z podzimní péče o talenty. Malá Skála u Turnova, 2010.

ŠŤASTNÁ, Alena. *Heuristické přístupy ve vyučování matematice.* In Aktuální problémy pedagogiky ve výzkumech studentů doktorských studijních programů VIII. Olomouc, 2010.

JANKŮ, Magdalena a Alena ŠŤASTNÁ. *Inspirace ze světové výstavy učebních pomůcek v Basileji*. In Tvořivost v počátečním vyučování matematiky. 1.vyd. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2011. s. 251-252. ISBN 978-80-7043-992-0.

ŠŤASTNÁ, Alena. *Heuristika v matematice*. In VIII. Vedecká konferencia doktorandov na Pedagogické fakultě Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre - „Človek ako subjekt edukácie a objekt pedagogickej vedy" . Nitra, 2011.

ŠŤASTNÁ, Alena a Magdalena JANKŮ. *Matematika, předmět propedeutického charakteru, pro studijní obor Informační výchova se zaměřením na vzdělávání*. In XXIX. Mezinárodní kolokvium o řízení vzdělávacího procesu. Sborník abstraktů a elektronických verzí recenzovaných příspěvků na CD-ROMu. 1. vyd. Brno: Univerzita obrany, 2011. s. 44. ISBN 978-80-7231-779-0.

FLEKOVÁ, Alena. *Řešení problémových úloh ve vyučování matematice na základní škole.* In X. Vedecká konferencia doktorandov „Výzvy a inšpirácie v pedagogických vedách" na Pedagogické fakultě Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre. Nitra, 2013 – v tisku

FLEKOVÁ, Alena a Bohumil NOVÁK. *Inquiry-based mathematics education – a challenge and a chance*. In *Sborník z Č –P- S konference.* Litoměřice, 2013. V tisku.

<u>Další odborné aktivity</u>

Hlavní řešitelka projektu Studentské grantové soutěže na Univerzitě Palackého v Olomouci 2010 – projekt „Heuristické přístupy ve vyučování matematice", reg. č. PdF_2010_054.

Spoluřešitelka projektu Studentské grantové soutěže na Univerzitě Palackého v Olomouci 2010 – projekt „Využití učebních pomůcek ve výuce matematiky", reg. č. PdF_2010_044. Hlavní řešitelka: Mgr. Magdalena Janků

Spoluřešitelka projektu Studentské grantové soutěže na Univerzitě Palackého v Olomouci 2010 – projekt „Výzkum úrovně matematické gramotnosti studentů učitelství matematiky na fakultách připravujících učitele“, reg. č. PdF_2010_045. Hlavní řešitelka: Mgr. Kateřina Šupíková

Studijní zahraniční pobyt (25. – 30. 10. 2010) v Basileji (Švýcarsko) za účelem návštěvy mezinárodního veletrhu didaktické techniky WORLDDIDAC BASEL 2010 a Mathematisches Institut der Universität Basel.

Studijní zahraniční pobyt (1. – 5. 11. 2010) v Londýně (UK) za účelem studia zahraniční literatury, návštěvy univerzity University College London, vědecké knihovny a zdejší katedry matematiky.

Vystoupení na Didaktickém semináři katedry matematiky s příspěvkem „Inspirace ze světové výstavy v Basileji“, spolu s Mgr. Magdalenou Janků a Mgr. Kateřinou Šupíkovou. 10. 11. 2010, Pedagogické fakultě Univerzity Palackého v Olomouci.

Hlavní řešitelka projektu Fondu rozvoje vysokých škol na rok 2011 „Inovace a zkvalitnění předmětů Matematika I a Matematika II pro studijní obor Informační výchova se zaměřením na vzdělávání“, reg. č. 2108/2011.

Hlavní řešitelka projektu Studentské grantové soutěže na Univerzitě Palackého v Olomouci 2011 – projekt „Heuristika ve vyučování matematice“, reg. č. PdF_2011_032.

Spoluřešitelka projektu Studentské grantové soutěže na Univerzitě Palackého v Olomouci 2011 – projekt „Učební pomůcka ve vyučování matematice“, reg. č. PdF_2011_029. Hlavní řešitelka: Mgr. Magdalena Janků

Účast v projektu ESF „Inovativní přístup k přípravě budoucích učitelů matematiky s využitím modulů v anglickém jazyce", reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0104 hlavní řešitelka: PhDr. Radka Dofková, Ph.D.

Jiné vědecko-pedagogické aktivity:

Vedení cvičení předmětu Matematika 2 v ZS 2009/2010, Matematika 1 a Úvod do studia matematika v LS 2009/2010, Matematika 1 pro obor Informační výchova ve vzdělávání a Úvod do studia matematiky v ZS 2010/2011.

Práce v organizačním výboru konferencí s mezinárodní účastí, pořadatel Katedra matematiky.

Práce v organizačním výboru přijímacího řízení Pedagogické fakulty.

Člen komise katedrálního kola Studentské vědecké odborné a umělecké činnosti 2010 na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého v Olomouci - katedra matematiky.

Administrativní práce v rámci Katedry matematiky.

8 Anotace, abstrakt

Anotace

Univerzita:	Pedagogická fakulta Univerzity Palackého v Olomouci
Obor:	Pedagogika
Školitel:	doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.
Název práce:	Heuristika ve vyučování
Autor:	Mgr. Alena Fleková
Počet stran/příloh:	188/ 38
Rok obhajoby:	2013
Klíčová slova:	heuristika, heuristická metoda, problémové vyučování, badatelsky orientované vyučování, strategie řešení učebních úloh, vyučování matematice

Abstrakt:

Disertační práce se zabývá problematikou heuristiky a jejím využití ve vyučování. V teoretické části popisuje charakteristické pojmy pro oblast heuristiky a to jak v užším, tak v širším kontextu. Definuje pojem heuristiky, heuristických přístupů a heuristických metod. Nabízí ucelený pohled na problematiku heuristických přístupů a jejich využití ve vyučování a komplexní přehled heuristických metod. Zabývá se také objevnými metodami, které jsou využitelné ve vyučování matematice.

Na základě vymezení teoretických východisek strategií řešení učebních úloh je postavena empirická část práce, ve které jsou kvalitativní analýzou popisovány volby strategií řešení slovních úloh u žáků základních a středních škol a studentů vysoké školy.

Annotation

University:	Palacky University in Olomouc Faculty of Education
Study field:	Education
Supervisor:	doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.
Author:	Mgr. Alena Fleková
Number of pages:	150
Number of appendices:	38
Year of defence:	2013
Key words:	heuristics, heuristic method, problem learning, problem solving, inquiry-based education, strategy of solving tasks, teaching mathematics

Abstract:

Dissertation thesis deals with heuristics and its use in education. The theoretical part describes typical terms for the heuristics both narrower and broader context. It describes the heuristics, heuristic approaches and heuristic methods. This is complex view on heuristic approaches and complex summary of heuristic methods. It also deals with inquiry-based education that are useful in teaching mathematics.
Based on the definition of the theoretical background of mathematical tasks´s solving strategies, the empirical part is built. This describes the qualitative analysis of choosing strategies for mathematical task solving by primary school pupils and students of secondary schools and universities.