# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MATEMATIKY
INSTITUTE OF MATHEMATICS


# METODA ČASOVÉ DISKRETIZACE ŘEŠENÍ PDR
TIME DISCRETIZATION METHOD OF SOLVING PDE

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**
BACHELOR'S THESIS


**AUTOR PRÁCE** Michal Myška
AUTHOR

**VEDOUCÍ PRÁCE** doc. Ing. Luděk Nechvátal, Ph.D.
SUPERVISOR



**BRNO 2017**

# Zadání bakalářské práce

| | |
|---|---|
| Ústav: | Ústav matematiky |
| Student: | **Michal Myška** |
| Studijní program: | Aplikované vědy v inženýrství |
| Studijní obor: | Matematické inženýrství |
| Vedoucí práce: | **doc. Ing. Luděk Nechvátal, Ph.D.** |
| Akademický rok: | 2016/17 |

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## Metoda časové diskretizace řešení PDR

**Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Metoda časové diskretizace vychází z Rotheho metody řešení počátečně–okrajové úlohy pro lineární parabolickou PDR. Její podstatou je náhrada časové parciální derivace na jedné straně rovnice časovou parciální diferencí, což vede na systém okrajových úloh pro ODR druhého řádu (nebo systém okrajových úloh eliptického typu, pokud se pohybujeme ve vyšší dimenzi).

**Cíle bakalářské práce:**

Teoretická (rešeršní) část:
1) Vhodná volba motivačního příkladu, na kterém budou vysvětleny principy a algoritmus metody.
2) Teoretické aspekty metody na modelové úloze (existenční a konvergenční věta, odhad chyby)
Praktická část (vlastní přínos studenta):
3) Vytvoření kódu pro řešení vybraných úloh v prostředí MATLAB (s využitím PDE toolboxu).

**Seznam doporučené literatury:**

REKTORYS, K. Metoda časové diskretizace a parciální diferenciální rovnice. Praha: SNTL, 1985.

Partial Differential Equation Toolbox User's Guide. The MathWorks. 2013.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

| | |
|---|---|
| prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.<br>ředitel ústavu | doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.<br>děkan fakulty |

**Abstrakt**

Tato práce se zabývá řešením evolučních parciálních diferenciálních rovnic metodou časové diskretizace, která vychází z Rotheho metody (metody přímek). Práce je rozdělena na tři základní části. V první části je ukázán princip jejího fungovaní. Druhá část se zabývá teoretickými aspekty metody, konkrétně je zaměřena na existenční a konvergenční větu, spolu s odvozením odhadu chyby a zavedením potřebných definic. Na závěr je v práci uveden program vytvořený v prostředí MATLAB.

**Abstract**

This thesis deals with solving evulution partial differential equations by the time discretization method. It originates form the Rothe's method (methond of lines).The thesis is divided into three parts. The first one shows principle of the method. The second part focuses on teoretical aspects, in particular, on existence and convergence theorem along with an error estimate. Some function analysis tools are presented here as well. In the last part, a MATLAB code is listed.

**Klíčová slova**

metoda časové diskretizace, parciální diferenciální rovnice, časová derivace, Rotheho metoda, abstraktní funkce

**Keywords**

time discretization method, partial differential equations, time derivation, Rothe's method, abstract function

Myška, M., *Metoda časové diskretizace řešení PDR*, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 40 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Luděk Nechvátal, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Metoda časové diskretizace řešení PDR* vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Luďka Nechvátala, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Michal Myška

Rád bych tímto poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce doc. Ing. Luďku Nechvátalovi, Ph.D. za cenné rady a především připomínky, které mi dopomohly tuto práci sepsat.

Michal Myška

# Obsah

# 1 Úvod

Parciální diferenciální rovnice patří k nejatraktivnějším a nejobtížnějším matematických disciplínám v inženýrství, pro jejichž řešení existuje celá řada numerických metod. Jednou z těchto metod navrhl v třicátých letech E. Rothe. Jeho metoda se zabývá řešením parabolických rovnic ve dvou proměnných, časové a prostorové. Základem Rotheho metody je rozdělení časového intervalu na $p$ podintervalů délky $h$ a v každém dělícím bodě nahrazení časové derivace příslušným diferenčním podílem, čímž vznikne $p$ obyčejných diferenciálních rovnic. Tato myšlenka byla využita velkou řadou autorů, pro řešení obecnějších úloh. Jedním z nich byl prof. Karel Rektorys, jehož vylepšená Rotheho metoda dostala název *metoda časové diskretizace.*Tato metoda je vhodná k řešení tzv. evolučních problémů, parciálních diferenciálních rovnic obsahujících čas.

Cílem bakalářské práce je seznámení s metodou časové diskretizace. V první části ukážeme základní princip metody na jednoduchém příkladě, u kterého porovnáme získané výsledky s jejich přesnou hodnotou. Dále uvedeme potřebnou teorii, kterou poté využijeme u otázky konvergence metody a existenci, resp. jednoznačnosti jejího řešení. Jelikož je tato metoda pouze metodou přibližnou, budeme se také zabývat odhadem chyby získaného řešení od přesného výsledku. V poslední části práce zmíníme program vytvořený v prostředí programu MATLAB, jenž byl zaměřen na řešení vybraných úloh právě touto metodou.

Pro větší názornost získaných výsledků se v práci omezíme na lineární parabolickou úlohu s homogenní počáteční a okrajovými podmínkami.

Velká část této práce je inspirována knihou Metoda časové diskretizace a parciální diferenciální rovnice od prof. Karla Rektoryse.

# 2 Princip metody

Nejprve se podíváme na princip metody časové diskretizace. Postup řešení ukážeme na rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{na } \Omega = (0, \pi) \times (0, 1) \tag{2.1}$$

spolu s počáteční podmínkou

$$u(x, 0) = \sin(x) \tag{2.2}$$

a okrajovými podmínkami

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0. \tag{2.3}$$

U tohoto poměrně jednoduchého příkladu se dá snadno ověřit, že funkce

$$u(x, t) = \mathrm{e}^{-t} \sin(x) \tag{2.4}$$

řeší rovnici (2.1) na oblasti $\Omega$ a vyhovuje podmínkám (2.3), (2.4).

Proveďme nyní rozdělení intervalu $I = \langle 0, 1 \rangle$ na pět podintervalů $I_1, \ldots, I_5$ ($I_j = \left\langle t_{j-1}, t_j \right\rangle$, $j = 1, \ldots, 5$) délky $h = 0,2$. Pro $t_0 = 0$ Položme

$$v_0(x) = \sin(x), \tag{2.5}$$

což odpovídá počáteční podmínce (2.2). Hledejme nyní postupně pro hodnoty $t_1 = 0,2, t_2 = 0,4, t_3 = 0,6, t_4 = 0,8$ a $t_5 = 1$ takové funkce

$$v_1(x), v_2(x), v_3(x), v_4(x), v_5(x),$$

aby pro $j = 1, \ldots, 5$ platilo

$$\frac{v_j(x) - v_{j-1}(x)}{h} - v_j''(x) = 0. \tag{2.6}$$

Vzhledem k okrajovým podmínkám (2.3) musí být splněno

$$v_j(0) = v_j(\pi) = 0.$$

Dále si můžeme všimnout, že derivaci $\partial u / \partial t$ z rovnice (2.1) nahrazujeme diferenčním podílem

$$\frac{v_j(x) - v_{j-1}(x)}{h}.$$

Nyní spočítáme pomocí rovnice (2.6) funkce $v_i$ a porovnáme je s přesnými výsledky využitím explicitního řešení. Pro $j = 1$ dostáváme

$$\frac{v_1(x) - v_0(x)}{h} - v_1''(x) = 0,$$

což můžeme upravit na tvar

$$-hv_1'' + v_1 = v_0. \tag{2.7}$$

Spolu s okrajovými podmínkami $v_1(0) = v_1(\pi) = 0$ dostáváme Dirichletovu okrajovou úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici. Řešení rovnice (2.7) hledejme ve tvaru

$$v_1(x) = B_1 \cos(x) + A_1 \sin(x). \tag{2.8}$$

Dosazením druhé derivace

$$v_1''(x) = -B_1 \cos(x) - A_1 \sin(x).$$

do rovnice (2.7) dostaneme

$$-h\left[-B_1 \cos(x) - A_1 \sin(x)\right] + B_1 \cos(x) + A_1 \sin(x) = \sin(x).$$

Odtud nám ihned vyplývají dvě rovnice pro neznámé $A_1$ a $B_1$

$$\begin{aligned} B_1(h+1) &= 0, \\ A_1(h+1) &= 1, \end{aligned}$$

tedy hodnoty těchto dvou neznámých jsou

$$B_1 = 0 \quad \text{a} \quad A_1 = \frac{1}{h+1}.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice (2.8), získáme

$$v_1(x) = \frac{1}{1+h} \sin(x). \tag{2.9}$$

Podobně pro $j = 2$ dostáváme podle (2.6) rovnici $-hv_2'' + v_2 = v_1(x)$, opět s okrajovými podmínkami $v_2(0) = v_2(\pi) = 0$. Řešení lze očekávat v podobném tvaru jako je (2.9), budeme ho proto přímo uvažovat jako

$$v_2(x) = A_2 \sin(x). \tag{2.10}$$

Pokud si opět spočítáme druhou derivaci a dosadíme do příslušné rovnice, dostaneme

$$A_2 h \sin(x) + A_2 \sin(x) = \frac{1}{1+h} \sin(x),$$

resp. po úpravě má neznámá $A_2$ hodnotu

$$A_2 = \frac{1}{(1+h)^2}.$$

Dosadíme-li tedy opět zpět do (2.10), získáme

$$v_2(x) = \frac{1}{(1+h)^2} \sin(x).$$

Podobně bychom postupovali při výpočtu pro hodnoty $j = 3, 4, 5$. Obecně můžeme hodnoty jednotlivých funkcí spočítat podle vzorce

$$v_j(x) = \frac{1}{(1+h)^j} \sin(x), \qquad j = 1, \ldots, 5.$$

Pokud nyní dosadíme za $h = 0.2$ a zaokrouhlíme na pět desetinných míst, dostaneme

$$\begin{aligned} v_1(x) &= 0,83333\sin(x), \\ v_2(x) &= 0,69444\sin(x), \\ v_3(x) &= 0,57870\sin(x), \\ v_4(x) &= 0,48225\sin(x), \\ v_5(x) &= 0,40188\sin(x). \end{aligned}$$

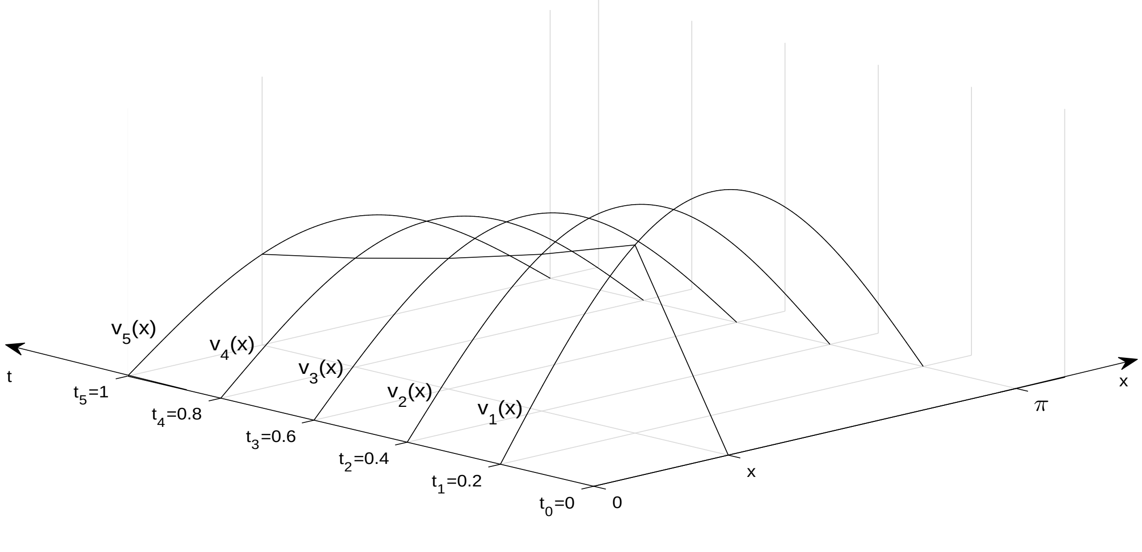
Námi vypočítané výsledky můžeme nyní porovnat s přesným řešením (2.4) pro $t = t_1 = 0.2, \ldots, t = t_5 = 1$:

$$\begin{aligned} u(x,t_1) &= 0,81873\sin(x), \\ u(x,t_2) &= 0,67032\sin(x), \\ u(x,t_3) &= 0,54881\sin(x), \\ u(x,t_4) &= 0,44933\sin(x), \\ u(x,t_5) &= 0,36788\sin(x). \end{aligned}$$

Můžeme vidět, že metodou časové diskretizace dostáváme přibližná řešení $v_1(x), \ldots, v_5(x)$ problému jen pro diskrétní hodnoty proměnné $t$. Abychom dostali přibližné řešení, definované v celé oblasti $\Omega$, můžeme zkonstruovat funkci – označme ji $u_1(x,t)$ – definovanou v $j$-tém podintervalu $I_j = \langle t_{j-1}, t_j \rangle$ předpisem

$$u_1(x,t) = v_{j-1}(x) + \frac{t - t_{j-1}}{h}[v_j(x) - v_{j-1}(x)].$$

Pro každé pevné $x$ je tedy funkce $u_1(x,t)$ po částech lineární funkcí proměnné $t$.




Obrázek 1: Přibližné řešení $u_1(x,t)$

Rozdělme dále interval $I = \langle 0, 1 \rangle$ postupně na $5 \cdot 2 = 10$, $5 \cdot 2^2 = 20$, $5 \cdot 2^3 = 40, \ldots, 5 \cdot 2^{n-1}, \ldots$ podintervalů délky $0,1$, $0,05$, $0,025, \ldots, \frac{1}{(5 \cdot 2^{n-1})}, \ldots$ Označme příslušná dělení

$d_2$, $d_3$, $d_4, \dots,$ $d_n, \dots$ ($d_1$ značí původní dělení na pět podintervalů délky $h = 0,2$) Naprosto stejným způsobem jako dříve zkonstruujme pro tato dělení funkce

$$u_2(x,t), u_3(x,t), \dots, u_n(x,t), \dots \ .$$

Tak dostáváme posloupnost funkcí

$$\{u_n(x,t)\}, \qquad n = 1, 2, \dots \ .$$

Lze očekávat, že tato posloupnost bude v určitém smyslu konvergovat k řešení úlohy. Pro názornost si ukážeme, jak se hodnoty změní při zvyšování dělení $d_i$. K porovnání zvolme $d_1, d_2$ a $d_3$ (pro jednoduchost budeme porovnávat pouze koeficienty bez funkce $\sin(x)$).

Tabulka 1: Porovnávací tabulka

| | Přesná hodnota | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $t = 0{,}2$ | 0,81873 | 0,83333 | 0,82270 | 0,82075 |
| $t = 0{,}4$ | 0,67032 | 0,69444 | 0,67684 | 0,67362 |
| $t = 0{,}6$ | 0,54881 | 0,57870 | 0,55684 | 0,55288 |
| $t = 0{,}8$ | 0,44933 | 0,48225 | 0,45811 | 0,45377 |
| $t = 1{,}0$ | 0,36788 | 0,40187 | 0,37689 | 0,37243 |

Vidíme, že při zjemňování dělení se aproximace přibližuje přesné hodnotě. Zdvojnásobíme-li dělení, chyba se v časech $0,2$, $0,4, \dots,$ $1$ přibližně dvakrát zmenší.

# 3 Matematické základy

V této části práce se zaměříme na základní definice a výsledky funkcionální analýzy, které nám budou sloužit k porozumění následujícího textu.

## 3.1 Soboleovy prostory

V dalším textu bude symbol $\Omega$ vždy značit oblast v euklidovském prostoru $E_N$ s lipschitzovskou hranicí[1].

**Definice 3.1.** Označme $C^\infty(\Omega)$ množinu funkcí nekonečněkrát spojitě diferencovatelných v $\Omega$. Dále $i = (i_1, \ldots, i_N)$ je vektor (tzv. *multiindex*), jehož souřadnice jsou celá nezáporná čísla a jeho velikost definujme jako $|i| = i_1 + \cdots + i_N$. Pro $u \in C^\infty(\Omega)$ označme

$$D^i u \;= \frac{\partial^{|i|} u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_N^{i_N}}.$$

Nechť $k$ je pevné přirozené číslo. Na množině $C^\infty(\Omega)$ definujme skalární součin, který označíme $(v, u)_{W_2^k(\Omega)}$, takto:

$$(v, u)_{W_2^k(\Omega)} = \sum_{|i| \le k} (D^i v, D^i u) = \sum_{|i| \le k} \int_\Omega D^i v D^i u dx \quad \text{pro} \quad u, v \in C^\infty(\Omega). \tag{3.1}$$

Normu a vzdálenost definujeme klasickým způsobem, tj.

$$\|u\|_{W_2^k(\Omega)} = \sqrt{(u,u)}_{W_2^k(\Omega)}$$
$$\rho_{W_2^k(\Omega)}(v, u) = \|v - u\|_{W_2^k(\Omega)}\,.$$

Tím získáme metrický prostor, který se obvykle značí $S_2^k(\Omega)$. Tento prostor není pro $k > 0$ úplný[2]. Provedeme-li jeho zúplnění (lze nalézt například ve [4]), dostaneme Hilbertův prostor se skalárním součinem (3.1). Tento prostor se potom nazývá *Sobolevův prostor* $W_2^k(\Omega)$. V případě oblasti s lipschitzovskou hranicí je tento prostor ekvivalentní s prostorem všech lebesgueovsky integrovatelných funkcí s kvadrátem, které mají s kvadrátem integrovatelné zobecněné derivace (ve smyslu distribucí).

## 3.2 Slabá formulace

Omezme se na eliptickou úlohu, kterou budeme uvažovat ve tvaru

$$-\Delta u \; + bu = f \qquad \text{v } \Omega, \tag{3.2}$$

spolu s okrajovou podmínkou

$$u \;= 0 \qquad \text{na } \Gamma. \tag{3.3}$$

[1] Zhruba řečeno, je to taková oblast, jejíž hranici lze vyjádřit lokálně jako lipschitzovskou funkci (přesnou defnici lze nalézt např. v [2]). Pojem lipsichtzovské hranice je dostatečně obecný, aby pokryl v praxi běžně potřebné množiny, ale zároveň nedovolí příliš „divoké“ hranice, pro které by nemusely platit některé dále uvedené výsledky z funkcionální analýzy. Oblast s lipschitzovskou hranicí nemá žádné „zářezy“, body vratu, a hranice má konečnou míru.

[2] Jako úplný metrický prostor, označujeme takový prostor, ve kterém je každá cauchyovská posloupnost bodů prostoru konvergentní.

Oblast $\Omega$ budeme v tomto případě uvažovat jako podmnožinu euklidovského prostoru $E_2$ s lipschitzovskou hranicí $\Gamma$. Symbol $\Delta$ je *Laplaceův operátor*

$$\Delta = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Okrajová podmínka (3.3) (tzv. Dirichletova) se nazývá *stabilní okrajovou podmínkou.* Zadefinujme nyní pojem stopa funkce spolu s prostorem $V$ s nímž budeme dále pracovat.

**Definice 3.2.** Pro libovolnou $u \in W_2^1(\Omega)$ vezměme posloupnost $u_n \in C^\infty(\overline{\Omega})^3$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} = u$ ve $W_2^1(\Omega)$. Označíme-li $u_n(s)$ hodnotu funkce $u$ na hranici $\Omega$, pak lze ukázat, že existuje prvek $u \in L_2(\Gamma)$, takový že $\lim_{n\to\infty} u_n(s) = u(s)$ v $L_2(\Gamma)$.

**Definice 3.3.** Podprostor prostoru $W_2^1(\Omega)$ všech funkcí, které splňují ve smyslu stop příslušné homogenní stabilní okrajové podmínky, nazveme *prostorem $V$*.

Tedy v našem případě bude mít prostor $V$ podobu

$$V = \{v \in W_2^1(\Omega), v = 0 \text{ na } \Gamma \text{ ve smyslu stop}\}. \tag{3.4}$$

Abychom mohli vyslovit slabou formulaci úlohy (3.2) potřebujeme ještě následující větu.

**Věta 3.4** (Greenova věta)**.** *Mějme funkce $v_1, v_2 \in W_2^1(\Omega)$. Pro všechny funkce z tohoto prostoru platí*

$$\int_\Omega v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \mathrm{d}x = \int_\Gamma v_1 v_2 \nu_i \mathrm{d}s - \int_\Omega \frac{\partial v_1}{\partial x_i} v_2 \mathrm{d}x,$$

*kde $\nu_i$ je i-tá souřadnice jednotkového vektoru normály ke $\Gamma$ a $v_1(S), v_2(S)$ jsou stopy funkcí $v_1(x), v_2(x)$ na $\Gamma$.*

Buď $f \in L_2(\Omega)$, prostor $V$ je dán vztahem (3.4) a nechť nejprve $u \in C^2(\Omega)$ je klasické řešení okrajové úlohy (3.2)–(3.3). Zvolme libovolnou funkci $v \in V$, násobme jí rovnici (3.2) a integrujme přes oblast $\Omega$. Dostaneme

$$-\int_\Omega v \ \Delta \mathrm{d}x + b \int_\Omega vu = \int_\Omega vf \mathrm{d}x. \tag{3.5}$$

Využijme-li nyní věty (3.4) a položíme $v_1 = v, v_2 = -\partial u/\partial x_i$ dostaneme

$$-\int_\Omega v \ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Uvážíme-li, že $v \in V$, je podle (3.4) $v = 0$ na $\Gamma$ ve smyslu stop. A konečně tedy součtem přes všechny $i$ v (3.5) dostaneme

$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \mathrm{d}x + b \int_\Omega vu = \int_\Omega vf \mathrm{d}x. \tag{3.6}$$

Rovnost (3.6) nazveme *integrální identitou.* Pokud sumu na levé straně rovnice (3.6) označíme jako $((v, u))$, což je *bilineární forma* příslušná problémům (3.2) a (3.3), a výraz z pravé strany zapíšeme jako skalární součin, tj. $(v, f)$, můžeme (3.6) stručně zapsat ve tvaru

$$((v, u)) + b(v, u) = (v, f). \tag{3.7}$$

[3] Taková posloupnost určitě existuje, protože $C^\infty(\overline{\Omega})$ je hustá v $W_2^1(\Omega)$.

**Definice 3.5.** Úlohu nalézt funkci $u \in V$ takovou, že rovnost (3.7) je splněna $\forall v \in V$ nazýváme *slabou formulací úlohy* (3.2)–(3.3). Funkce $u$ se pak nazývá *slabým řešením problémů* (3.2)–(3.3).

**Definice 3.6.** Bilineární forma $((v,u))$ se nazývá *omezená v prostoru* $W_2^1(\Omega)$, existuje-li taková konstanta $K > 0$ (nezávislá na $v$ a $u$), že platí

$$\big|((v,u))\big| \leq K \, \|v\|_{W_2^1(\Omega)} \qquad \text{pro všechna } v, u \in W_2^1(\Omega),$$

nazývá se $V$*-eliptická*, jestliže existuje taková konstanta $\alpha > 0$ (nezávislá na $v$), že

$$((v,u)) \geqq \alpha \|v\|_{W_2^1(\Omega)} \qquad \text{pro všechna } v \ \in V.$$

**Věta 3.7** (Laxovo–Milgramovo lemma)**.** *Nechť forma* $((v,u))$ *je* $V$*-eliptická, omezená ve* $W_2^1(\Omega)$ *a nechť* $f \in L_2(\Omega)$*. Pak existuje právě jedno slabé řešení problému (3.2) a (3.3).*

*Poznámka.* Je-li forma $((v,u))$ omezená ve $W_2^1(\Omega)$ a je zde $V$-eliptická, pak při pevném $h > 0$ platí totéž pro formu

$$(((v,u))) = ((v,u)) + \frac{1}{h}(v,u).$$

## 3.3 Abstraktní funkce

**Definice 3.8.** Nechť $I = \langle 0, T \rangle$ a nechť $H$ je Hilbertův prostor. Pak zobrazení

$$y : I \ \rightarrow H \tag{3.8}$$

se nazývá *abstraktní funkce* z intervalu $I$ do prostoru $H$.

Tedy abstraktní funkce je podle této definice zobrazení, definované na intervalu $I$ a takové, že každému $t \in I$ je přiřazen určitý prvek $y \in H$. Píšeme $y(t)$.

Uveďme si nyní základní pojmy týkající se abstraktní funkce, začněme spojitostí.

**Definice 3.9.** Řekneme, že abstraktní funkce (3.8) je *spojitá* ve vnitřním bodě $t \in I$, jestliže $\forall \varepsilon > 0$ lze najít takové $\delta$, že platí

$$|\Delta t| < \delta \implies \big\|y(t+\Delta t) - y(t)\big\|_H < \varepsilon,$$

kde $\|\cdot\|_H$ je norma v prostoru $H$.

Obdobně definujeme *spojitost zprava*, resp. *zleva*. Funkce (3.8) se nazývá *spojitá v intervalu* $(0,T)$, je-li spojitá v každém bodě $t \in (0,T)$. Dále se nazývá spojitá v intervalu $I = \langle 0, T \rangle$, jestliže je *spojitá v intervalu* $(0,T)$ a v bodě $t = 0$, resp. $T = 0$, je spojitá zprava, resp. zleva.

Zaveďme nyní derivaci abstraktní funkce.

**Definice 3.10.** Řekneme, že abstraktní funkce má ve vnitřním bodě $t \in I$ *derivaci*

$$y'(t) = g \in H,$$

jestliže je splněno

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} - g \right\|_H = 0.$$

Podobně se opět definuje *derivace zprava*, resp. *zleva*. O funkci pak řekneme, že má *derivaci v intervalu* $I = \langle 0, T \rangle$, má-li derivaci v každém vnitřním bodě tohoto intervalu a v bodě $t = 0$, resp. $t = T$ má derivaci zprava, resp. zleva.

**Definice 3.11.** Množina všech funkcí (3.8), které jsou spojité na $I$ s normou

$$\|y\|_{C(I,H)} = \max_{t \in I} \big\| y(t) \big\|_H$$

se nazývá *prostor* $C(I, H)$.

**Definice 3.12.** Řekneme, že posloupnost funkcí $y_n \in C(I, H)$ konverguje k funkci $y \in C(I, H)$ v prostoru $C(I, H)$ jestliže je splněno:

$$\lim_{n \to \infty} \|y - y_n\|_{C(I,H)} = 0.$$

Poslední dva vztahy nám říkají, že konvergence v prostoru $C(I, H)$ je stejnoměrná konvergence v $H$ na intervalu $I$, tj. že ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít takové $n_0 = n_0(\varepsilon)$, že

$$n > n_0 \implies \big\| y(t) - y_n(t) \big\|_H < \varepsilon \quad \forall t \in I.$$

### 3.3.1 Bochnerův integrál

Pro zavedení Bochnerova integrálu se nejprve musí nadefinovat tzv. jednoduchá funkce. Je to taková abstraktní funkce (3.8), která nabývá na intervalu $I$ jen konečného počtu „hodnot“ $g_1, \dots, g_m \in H$ a to na měřitelných množinách $N_1, \dots, N_m$ o mírách $\mu_1, \dots, \mu_m$.

**Definice 3.13.** Bochnerův integrál z jednoduché funkce $y(t)$ definujeme vztahem

$$\int_I y(t) \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{m} g_i \mu_i.$$

**Definice 3.14.** Abstraktní funkce (3.8) se nazývá *silně měřitelná v Bochnerově smyslu*, existuje-li taková posloupnost jednoduchých funkcí $y_n(t)$, že platí

$$\lim_{n \to \infty} \big\| y(t) - y_n(t) \big\|_H = 0 \quad \text{skoro všude v } I.$$

Jestliže navíc platí

$$\lim_{n \to \infty} \int_I \big\| y(t) - y_n(t) \big\|_H = 0,$$

řekneme, že funkce (3.8) je *integrovatelná v Bochnerově smyslu* a definujeme

$$\int_I y(t) \mathrm{d}t = \lim_{n \to \infty} \int_I y_n(t) \mathrm{d}t.$$

**Definice 3.15.** Označme $L_2(I, H)$ *prostor* všech *funkcí integrovatelných v Bochnerově smyslu s druhou mocninou*, tj. integrovatelných a splňujících podmínku

$$\int_I \big\| y(t) \big\|_H^2 < \infty,$$

se skalárním součinem

$$(y_1, y_2)_{L_2(I,H)} = \int_I (y_1(t), y_2(t))_H \mathrm{d}t,$$

kde pro každé pevné $t$ symbol $(y_1(t), y_2(t))_H$ znamená skalární součin v prostoru $H$.

Jelikož je $H$ Hilbertův prostor, můžeme to stejné říci i o prostoru $L_2(I, H)$. Primitivní funkci $Y(t)$ k $y(t)$ lze definovat pomocí Rieszovy věty jako

$$(Y(t), g)_H = \int_0^t (y(\tau), g)_H \mathrm{d}\tau \quad \forall g \in H,$$

kdy funkcionál na pravé straně je reprezentován abstraktní funkcí $Y(t) \in H$. Lze ukázat, že pro $y \in L_2(I, H)$ je funkce $Y(t)$ na intervalu $I$ spojitá, tedy

$$Y \in C(I, H),$$

je dokonce absolutně spojitá[4], což označujeme

$$Y \in AC(I, H). \tag{3.9}$$

Funkce $Y(t)$ má v $I$ skoro všude derivaci rovnou funkci $y(t)$, píšeme

$$Y'(t) = y(t) \quad \text{v} \quad L_2(I, H). \tag{3.10}$$

Uvažujme nyní za prostor $H$ prostor $V$, který byl definován dříve. Skalární součin bude potom v $L_2(I, V)$ definovaný jako

$$(y_1, y_2)_{L_2(I,V)} = \int_I (y_1(t), y_2(t))_V \mathrm{d}t,$$

tedy normu můžeme zapsat jako

$$\|y\|_{L_2(I,V)} = \sqrt{\int_I \|y\|_V^2}. \tag{3.11}$$

A konečně konvergence $y_n \to y \quad \text{v} \quad L_2(I, V)$, je chápána ve smyslu

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|y - y_n\|_V^2 \, \mathrm{d}t = 0.$$

Podrobnosti k výše uvedeným pojmům a tvrzením (včetně důkazů) lze nalézt například v monografiích [4] nebo [2].

[4] Tj. na intervalu $I = \langle a, b\rangle$ pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $\sum_{n=1}^{n} \left| f(b_i) - f(a_i) \right| < \varepsilon$, kde $(a_i, b_i)$ jsou libovolné disjunktní intervaly v $I$, splňující $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$ .

# 4 Existenční a konvergenční věta

V této části se zaměříme na existenční a konvergenční větu pro lineární parabolickou úlohu s homogenní počáteční a Dirichletovou okrajovou podmínkou ve tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{v} \quad Q = \Omega \times (0,T) \tag{4.1}$$

$$u(x,y,0) = 0, \tag{4.2}$$

$$u(x,y,t) = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma. \tag{4.3}$$

Připomeňme, že $\Gamma$ je hranice oblasti $\Omega$. Dále, funkce $f$ je nezávislá na čase $t$ a $f \in L_2(\Omega)$. Pro řešení problému metodou časové diskretizace využijeme stejný postup jako u ukázkového příkladu v kap. 2.

Začneme rozdělením časového intervalu $I = \langle 0,T\rangle$ body $t_j = jh,$ kde $j = 1,\dots,p-1$, na $p$ podintervalů

$$I_j = \left\langle t_{j-1}, t_j \right\rangle, \quad j = 1,\dots,p,$$

délky

$$h = \frac{T}{p}.$$

Nyní v bodech $t = t_j$, $j = 1,\dots,p$ nahradíme časovou derivaci $\partial u/\partial t$ z (4.1) diferenčním podílem

$$\frac{z_j - z_{j-1}}{h},$$

kde $z_j = u(x,t_j)$. Tím nám vznikne problém

$$-\Delta z_j + \frac{z_j}{h} = f + \frac{z_{j-1}}{h},$$

$$z_j = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma.$$

Pro vzniklé problémy nyní postupně pro $j = 1,\dots,p$ hledáme funkce $z_j$ takové, které jsou jejich řešením, přičemž $z_0(x) = 0$ díky počáteční podmínce (4.3). Řešení budeme hledat ve slabém tvaru, kdy je potřeba najít postupně pro $j = 1,\dots,p$ funkce $z_j \in V$ takové, že jsou splněny integrální identity

$$((v,z_j)) + \frac{1}{h}\left(v,z_j\right) = \left(v, f + \frac{z_{j-1}}{h}\right) \quad \forall v \ \in V, \tag{4.4}$$

což můžeme upravit na tvar

$$(((v,z_j))) = \left(v, f + \frac{z_{j-1}}{h}\right) \quad \forall v \ \in V,$$

Při stejném značení jako v poznámce za lemmatem 3.7. Dle předpokladu je $f \in L_2(\Omega)$ a uvážíme-li, že $z_0(x) = 0$, dostáváme

$$f + \frac{z_0}{h} \in L_2(\Omega),$$

z čehož ihned plyne, že problém najít řešení $z_1 \in V$ takové, aby bylo splněno

$$(((v, z_1))) = \left(v, f + \frac{z_0}{h}\right) \quad \forall v \ \in V,$$

má právě jedno řešení, viz věta 3.7. Víme, že $z_1 \in V$ implikuje $z_1 \in L_2(\Omega)$, tedy

$$f + \frac{z_1}{h} \in L_2(\Omega).$$

Opět můžeme tvrdit, že problém najít takové řešení

$$(((v, z_2))) = \left(v, f + \frac{z_1}{h}\right) \quad \forall v \ \in V,$$

má také právě jedno řešení a naprosto stejně bychom postupovali pro $j = 2, \ldots, p$ a dostali bychom funkce $z_1 \in V, \ldots, z_p \in V$, což jsou aproximace hledaného řešení problému $u(x,t)$ pro $t = t_1, \ldots, t_p$. Tak jako v ukázkovém příkladě můžeme nyní sestrojit funkci $u_1(x,t)$, tzv. *Rotheho funkci*, kterou definujeme v intervalu $I$ jako

$$u_1(x,t) = z_{j-1}(x) + \frac{z_j(x) - z_{j-1}(x)}{h}(t - t_{j-1}) \quad \text{v} \quad I_j, \tag{4.5}$$

$j = 1, \ldots, p$. Všimněme si, že pro každé pevné $x \in \Omega$ je funkce (4.5) po částech lineární funkce na intervalu $I$ proměnné $t$, kdy v bodech $t = t_j$ nabývá hodnot $z_j(x)$.

Uvažujme nyní místo dělení $d_1$ intervalu $I$ na $p$ podintervalů $I_j$ délky $h$ dělení $d_n$ $(n = 2, 3, \ldots)$, intervalu $I$ na $2^{n-1}p$ podintervalů $I_j^n = \left\langle t_{j-1}^n, t_j^n \right\rangle$, kde

$$t_j^n = jh_n, \quad j = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}p$$

a jednotlivé intervaly mají mají délku

$$h_n = \frac{T}{2^{n-1}p}.$$

Obdobně jako při dělení $d_1$ dostaneme pro jednotlivá $n$ funkce

$$z_j^n \in V, \quad j = 1, \ldots, 2^{n-1}p,$$

které jsou v tomto případě řešením integrální identity

$$(((v, z_j^n))) = \left(v, f + \frac{z_{j-1}^n}{h}\right) \quad \forall v \ \in V.$$

Můžeme tedy konstruovat příslušné Rotheho funkce $u_n(x,t)$, které definujeme v intervalu $I$ jako

$$u_n(x,t) = z_{j-1}^n(x) + \frac{z_j(x)^n - z_{j-1}^n(x)}{h}(t - t_{j-1}^n) \quad \text{v} \quad I_j, \quad j = 1, \ldots, 2^{n-1}p. \tag{4.6}$$

Dostaneme tedy posloupnost funkcí $\left\{u_n(x,t)\right\}_{n=1}^{\infty}$. Tuto posloupnost budeme nazývat *Rotheho posloupností* příslušnou problému (4.1)–(4.3). Lze očekávat, že posloupnost bude konvergovat k nějaké funkci $u(x,t)$, která bude řešením problému (4.1)–(4.3). Důkazem, že tomu tak opravdu je, se budeme zabývat v následujícím textu.

## 4.1 Konvergence

Nyní se budeme zabývat otázkou konvergence Rotheho posloupnosti. Odvoďme nejprve vztahy, které budeme dále využívat.

Integrální identitu (4.4) přepišme jako

$$((v, z_j)) + \frac{1}{h}(v, z_j - z_{j-1}) = (v, f) \quad \forall v \ \in V, \tag{4.7}$$

kde opět z počáteční podmínky plyne, že

$$z_0(x) = 0. \tag{4.8}$$

Opět je splněna podmínka jednoznačnosti řešení těchto problémů.

Jelikož jsou funkce $z_j$ z prostoru $V$ (tedy stejně jako funkce $v$ vystupující v integrální identitě), můžeme využít pro $j = 1$ substituci $v = z_1$, čímž dostaneme integrální identitu, která je ve tvaru

$$((z_1, z_1)) + \frac{1}{h}(z_1, z_1) = (z_1, f). \tag{4.9}$$

Podívejme se na jednotlivé členy této rovnice. Pokud vyjdeme z předpokladu omezenosti bilineární formy a toho, že je $V$-eliptická, musí platit $((z_1, z_1)) \geq 0$. Dále skalární součin stejných funkcí $z_1$ můžeme přepsat na tvar

$$(z_1, z_1) = \|z_1\|^2 \tag{4.10}$$

a dle Schwarzovy nerovnosti můžeme skalární součin na pravé straně vztahu (4.9) odhadnout

$$(z_1, f) \leq \|z_1\| \|f\| . \tag{4.11}$$

Využijeme-li těchto úprav, tak rovnosti (4.9) vyplývá

$$\frac{1}{h}\|z_1\|^2 \leq \|z_1\| \|f\| \implies \|z_1\| \leq h\|f\| . \tag{4.12}$$

V dalším kroku si pomůžeme odečtením integrální identity ve tvaru

$$((v, z_{j-1})) + \frac{1}{h}(v, z_{j-1} - z_{j-2}) = (v, f)$$

od identity původní tj. (4.7). Takto získáme rovnici

$$((v, z_j - z_{j-1})) + \frac{1}{h}(v, (z_j - z_{j-1}) - (z_{j-1} - z_{j-2})) = 0.$$

Aby byly následující úvahy zřetelné, ještě tento tvar poupravíme, a to za využití vlastnosti skalárního součinu $(c_1u_1 + c_2u_2, v) = c_1(u_1, v) + c_2(u_2, v)$, díky čemuž dostaneme

$$((v, z_j - z_{j-1})) + \frac{1}{h}(v, z_j - z_{j-1}) = \frac{1}{h}(v, z_{j-1} - z_{j-2}).$$

Nyní opět uplatníme fakt, že funkce $z_j$ a $v$ patří do jednoho prostoru a budeme uvažovat substituci $v = z_j - z_{j-1}$. Opět platí $((v, z_j - z_{j-1})) > 0$. Spolu s využitím stejných vlastností skalárního součinu jako v (4.10) a (4.11), dostaneme nerovnost

$$\|z_j - z_{j-1}\|^2 \leq \|z_j - z_{j-1}\| \|z_{j-1} - z_{j-2}\|$$

resp. po pokrácení

$$\left\|z_j - z_{j-1}\right\| \leq \left\|z_{j-1} - z_{j-2}\right\|, \quad j = 2, \dots, p.$$

Kdybychom uvažovali v nerovnosti $j = 2$ a využijeme-li vztahů (4.8) a (4.12), získáme nerovnost

$$\left\|z_j - z_{j-1}\right\| \leq h\|f\|, \quad j = 1, \dots, p. \tag{4.13}$$

Pokud využijeme vlastnosti normy, kdy $\|u\| - \|v\| \leq \|u - v\|$, dostaneme

$$\left\|z_j\right\| \leq \left\|z_j - 1\right\| + h\|f\|, \quad j = 1, \dots, p,$$

což můžeme dále upravit na tvar

$$\left\|z_j\right\| \leq jh\|f\|, \quad j = 1, \dots, p,$$

uvážíme-li, že norma funkce $z_0$ je nulová. Pro poslední úpravu si pomůžeme vztahem pro velikost jednoho kroku, tj.

$$h = \frac{T}{p}.$$

Konečně tedy můžeme zapsat nerovnost ve tvaru

$$\left\|z_j\right\| \leq T\|f\|, \quad j = 1, \dots, p.$$

Označme nyní

$$Z_j(x) = \frac{z_j(x) - z_{j-1}(x)}{h}, \quad j = 1, \dots, p. \tag{4.14}$$

Využijeme-li nerovnosti (4.13) dostaneme ihned

$$\left\|Z_j\right\| \leq \|f\|, \quad j = 1, \dots, p$$

Analogicky lze stejné výsledky pro dělení $d_1$ odvodit i pro obecný případ libovolného dělení $d_n$. Na základě integrálních identit

$$((v, z_j^n)) + \frac{1}{h_n}(v, z_j^n - z_{j-1}^n) = (v, f) \quad \forall v \ \in V \tag{4.15}$$

bychom obdobným postupem došli k odhadům

$$\left\|z_j^n\right\| \leq T\|f\|, \quad j = 1, \dots, 2^{n-1}p, \tag{4.16}$$

resp.

$$\left\|Z_j^n\right\| \leq \|f\|, \quad j = 1, \dots, 2^{n-1}p. \tag{4.17}$$

Normy (4.16) a (4.17) jsou stejnoměrně omezené vzhledem k $j$ i $n$, tedy nezávislé na dělení $d_n$, to znamená, že pro normy funkcí $z_j^n(x)$ a $Z_j^n(x)$ v prostoru $L_2(\Omega)$ existuje taková konstanta $c > 0$, že

$$\left\|z_j^n\right\|_{L_2(\Omega)} \leq c \quad \text{,resp.} \quad \left\|Z_j^n\right\|_{L_2(\Omega)} \leq c.$$

Stejnou vlastnost můžeme ukázat i pro normu funkcí $z_j^n$, které leží tentokrát v prostoru $W_2^1(\Omega)$. Chceme tedy dokázat, že opět existuje konstanta $c > 0$ taková, že pro všechna $j$ a $n$ platí

$$\left\| z_j^n \right\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c. \tag{4.18}$$

Zapíšeme-li integrální identitu (4.15) jako

$$((v, z_j^n)) + (v, Z_j^n) = (v, f) \quad \forall v \in V \tag{4.19}$$

a použijeme-li substituci $v = z_j^n$ dostaneme

$$((z_j^n, z_j^n)) + (z_j^n, Z_j^n) = (z_j^n, f). \tag{4.20}$$

Nyní za využití Schwarzovy nerovnosti, podmínky omezenosti bilineární formy v prostoru $W_2^1(\Omega)$ a toho, že je $V$-eliptická, můžeme přepsat jednotlivé členy rovnosti následovně

$$\left| (z_j^n, Z_j^n) \right| \leq \left\| z_j^n \right\| \left\| Z_j^n \right\|, \tag{4.21}$$

$$\left| (z_j^n, f) \right| \leq \left\| z_j^n \right\| \|f\|, \tag{4.22}$$

$$((z_j^n, z_j^n)) \geq \alpha \left\| z_j^n \right\|_{W_2^k(\Omega)}^2. \tag{4.23}$$

Z (4.20) plyne $((z_j^n, z_j^n)) = \left| (z_j^n, f) - (z_j^n, Z_j^n) \right| \leq \left| (z_j^n, f) \right| + \left| (z_j^n, Z_j^n) \right|$. S využitím vztahů (4.21)–(4.23) společně s vlastnostmi (4.16) a (4.17) dostaneme

$$\left\| z_j^n \right\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha}(\|f\| + c),$$

tedy tyto normy jsou stejnoměrně omezené. Pro zjednodušení bude tento zápis vyjadřován ve tvaru $\|v\|_V$, jestliže bude $v \in V$. Za využití tohoto označení můžeme nerovnost (4.18) zapsat jako

$$\left\| z_j^n \right\|_V \leq c. \tag{4.24}$$

Tím jsme dospěli k požadovaným výsledkům (4.16), (4.17) a (4.24), které budeme v následujícím textu využívat při dokazování konvergence.

Uvažujme nyní Rotheho posloupnost funkcí v prostoru $L_2(I, V)$, které jsou definovány předpisem (4.6). Uvážíme-li, že

$$0 \leq \frac{t - t_{j-1}^n}{h_n} \leq 1 \quad \text{pro } t \in \left\langle t_{j-1}, t_j \right\rangle,$$

a využijeme-li (4.24) společně s vlastností trojúhelníkové nerovnosti pro normu, můžeme pro libovolné $t \in I$ vyjádřit normu Rotheho funkce jako

$$\|u_n(t)\|_V = \left\| z_{j-1}^n \left( 1 - \frac{t - t_{j-1}^n}{h_n} \right) + z_j^n \frac{t - t_{j-1}^n}{h_n} \right\|_V$$

$$\leq \left\| \left(1 - \frac{t - t_{j-1}^n}{h_n}\right) z_{j-1}^n \right\|_V + \left\| \frac{t - t_{j-1}^n}{h_n} z_j^n \right\|_V$$
$$\leq \left(1 - \frac{t - t_{j-1}^n}{h_n}\right) c + \frac{t - t_{j-1}^n}{h_n} c = c.$$

Přímo z definice normy v prostoru $L_2(I, V)$ (3.11) nám vyplývá vztah

$$\|u_n\|_{L_2(I,V)}^2 = \int_0^T \|u_n(t)\|_V^2 \, \mathrm{d}t \leq c^2 T,$$

tj. Rotheho posloupnost $\{u_n(t)\}$ je v prostoru $L_2(I, V)$ omezená. Jelikož je tento prostor Hilbertův, je možné vybrat podposloupnost $\{u_{n_k}(t)\}$, pro kterou platí, že je *slabě konvergentní* k nějaké funkci $u \in L_2(I, V)$, píšeme

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{v} \quad L_2(I, V). \tag{4.25}$$

V následujícím textu ukážeme, že právě funkce $u$ je hledaným řešením. Začneme přepsáním Rotheho funkce na tvar

$$u_n(t) = z_{j-1}^n + Z_j^n (t - t_{j-1}^n) \quad \text{v} \quad I_j. \tag{4.26}$$

Dále budeme potřebovat abstraktní funkce

$$U_n : I \to L_2(\Omega), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

které definujeme předpisem

$$U_n(t) = \begin{cases} Z_1^n & \text{pro } t = 0 \\ Z_j^n & \text{pro } t \in \tilde{I}_j^n = \left(t_{j-1}^n, t_j^n\right\rangle, \quad j = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}p. \end{cases} \tag{4.27}$$

Z (4.17) nám ihned vyplývá, že posloupnost $\{U_n(t)\}$ je v prostoru $L_2(I, L_2(\Omega))$ omezená. Tento prostor je opět Hilbertův, můžeme tedy vybrat podposlopnost $\{U_{n_k}(t)\}$, která bude slabě konvergentní k nějaké funkci $U$ z tohoto prostoru, tj.

$$U_{n_k} \rightharpoonup U \quad \text{v} \quad L_2(I, L_2(\Omega)). \tag{4.28}$$

To znamená, že existuje integrál

$$\int_0^t U(\tau) \mathrm{d}\tau = w(t) \quad \forall t \in I. \tag{4.29}$$

Spočítejme nyní integrál

$$\int_0^t U_n(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^{t_1} U_n(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{t_1}^{t_2} U_n(\tau)\mathrm{d}\tau + \cdots + \int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} U_n(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{t_{j-1}}^{t} U_n(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Využijeme-li definice abstraktních funkcí $U_n(t)$ na intervalech $I = \left(t_{j-1}^n, t_j^n\right\rangle$ spolu s (4.14), a uvážíme-li, že $t_j^n - t_{j-1}^n = h_n$ a $z_0^n = 0$ dostaneme

$$\int_0^t U_n(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{z_1^n - z_0^n}{h_n}(t_1^n - 0) + \frac{z_2^n - z_1^n}{h_n}(t_2^n - t_1^n) + \cdots + \frac{z_{j-1}^n - z_{j-2}^n}{h_n}(t_{j-1}^n - t_{j-2}^n) +$$

$$+\frac{z_j^n - z_{j-1}^n}{h_n}(t - t_{j-1}^n) = z_{j-1}^n + \frac{z_j^n - z_{j-1}^n}{h_n}(t - t_{j-1}^n).$$

Tedy za využití (4.26) a (4.27) můžeme vidět, že v $L_2(I, L_2(\Omega))$ platí

$$\int_0^t U_{n_k}(\tau)\mathrm{d}\tau = u_{n_k}(t),$$

tedy z konvergencí (4.28) a (4.25) vyplývá

$$w = u \quad \text{v} \quad L_2(I, L_2(\Omega)). \tag{4.30}$$

Analogicky jako v (3.9) a (3.10) pak dostáváme z (4.30), (4.29)

$$u \in AC(I, L_2(\Omega))$$

a

$$u'(t) = U(t) \quad \text{v } L_2(\Omega) \text{ skoro všude v } I. \tag{4.31}$$

Dosadíme-li do (4.29) $w(t) = u(t)$, a budeme-li uvažovat $t = 0$, dostaneme ihned, že

$$u(0) = 0 \quad \text{v} \quad C(I, L_2(\Omega)).$$

Nyní se pokusíme zjistit, v jakém smyslu je funkce $u(t)$ řešením zadané diferenciální rovnice. Uvažujme nejprve posloupnost funkcí $\{\tilde{u}_n(t)\}$, u které definujeme jednotlivé funkce jako

$$\tilde{u}_n(t) = \begin{cases} z_1^n & \text{pro} \quad t = 0 \\ z_j^n & \text{pro} \quad t \in \tilde{I}_j^n = \left(t_{j-1}^n, t_j^n\right\rangle \end{cases} \tag{4.32}$$

a ukážeme implikaci

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \implies \tilde{u}_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{v} \quad L_2(I, V). \tag{4.33}$$

Pokud vyjdeme z definice slabé konvergence[5], je našim úkolem dokázat

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T (v(t), u(t) - \tilde{u}_{n_k}(t))_V \mathrm{d}t = 0 \quad \forall v \in L_2(I, V).$$

Výraz $u - \tilde{u}_{n_k}$ lze rozepsat jako $(u - u_{n_k}) + (u_{n_k} - \tilde{u}_{n_k})$. Protože $u_{n_k} \rightharpoonup u$, platí

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T (v(t), u(t) - u_{n_k}(t))_V \mathrm{d}t = 0 \quad \forall v \in L_2(I, V).$$

Zbývá tedy ukázat platnost výrazu

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T (v(t), u_{n_k}(t) - \tilde{u}_{n_k}(t))_V \mathrm{d}t = 0 \quad \forall v \in L_2(I, V). \tag{4.34}$$

[5] Což znamená dokázat konvergenci $(v, u - \tilde{u}_{n_k})_{L_2(I,V)} \to 0 \quad \forall v \in L_2(I, V)$.

Uvažujme nyní množinu $M$, která obsahuje všechny abstraktní funkce $v \in L_2(I,V)$, které jsou rovné určité funkci $g \in V$ na nějakém intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle \subset I$ a vně tohoto intervalu jsou rovny nule. Dále předpokládáme, že body $\alpha$ a $\beta$ splývají s dělícími body časového intervalu $I$ při dostatečně velkém $n$, tedy za těchto předpokladů platí

$$\alpha = \tilde{\alpha} h_n, \quad \beta = \tilde{\beta} h_n, \tag{4.35}$$

kde $\tilde{\alpha}$ a $\tilde{\beta}$ jsou celá nezáporná čísla, taková, že platí

$$0 \le \tilde{\alpha} < \tilde{\beta} \le 2^{n-1} p. \tag{4.36}$$

Označíme-li množinu $M^*$, která obsahuje všechny lineární kombinace funkcí z množiny $M$. Lze ukázat, že taková množina je hustá[6] v prostoru $L_2(I,V)$. To znamená, že platnost (4.34) stačí dokázat pro $\forall v \in M$.

Předpokládejme, že $n_k$ je již dostatečně velké, tedy platí (4.35) a je splněna výše zmíněná podmínka (4.36). Zvolme libovolnou funkci $v$ z množiny $M$, která bude rovna některé funkci $v \in V$ na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a nulové funkci mimo tento interval. Za těchto předpokladů můžeme integrál (4.34) zapsat ve tvaru

$$\int_{\alpha}^{\beta} (v(t), u_{n_k}(t) - \tilde{u}_{n_k}(t))_V \mathrm{d}t = \int_{\tilde{\alpha} h_{n_k}}^{\tilde{\beta} h_{n_k}} (v(t), u_{n_k}(t) - \tilde{u}_{n_k}(t))_V \mathrm{d}t.$$

Pro jednotlivé intervaly $\tilde{I}_j^{n_k}$ můžeme podle definic posloupností $u_{n_k}(t)$ a $\tilde{u}_{n_k}(t)$ psát

$$\begin{aligned} u_{n_k}(t) - \tilde{u}_{n_k}(t) &= z_{j-1}^{n_k} + \frac{z_j^{n_k} - z_{j-1}^{n_k}}{h_{n_k}} (t - t_{j-1}^{n_k}) - z_j^{n_k} = \\ &= (z_{j-1}^{n_k} - z_j^{n_k}) \left( 1 - \frac{t - t_{j-1}^{n_k}}{h_{n_k}} \right) = (z_j^{n_k} - z_{j-1}^{n_k}) \frac{t - t_j^{n_k}}{h_{n_k}}, \end{aligned} \tag{4.37}$$

kde poslední úpravu provádíme za využití $h_{n_k} = t_j^{n_k} - t_{j-1}^{n_k}$. Pokud vztah (4.37) dosadíme do příslušného integrálu, získáme

$$\begin{aligned} &\int_{t_j^{n_k}}^{t_{j-1}^{n_k}} \left( v, (z_j^{n_k} - z_{j-1}^{n_k}) \frac{t - t_j^{n_k}}{h_{n_k}} \right)_V \mathrm{d}t = \\ &= (v, z_j^{n_k} - z_{j-1}^{n_k})_V \left[ \frac{(t - t_j^{n_k})^2}{2 h_{n_k}} \right]_{t_{j-1}^{n_k}}^{t_j^{n_k}} = (v, z_{j-1}^{n_k} - z_j^{n_k})_V \frac{h_{n_k}}{2}. \end{aligned}$$

Tedy pokud nahradíme meze integrálů zavedenými body $\alpha$ a $\beta$ dostaneme

$$\begin{aligned} &\int_{\alpha}^{\beta} (v(t), u_{n_k}(t) - \tilde{u}_{n_k}(t))_V \mathrm{d}t = \\ &\qquad = \frac{h_{n_k}}{2} (v, (z_{\tilde{\alpha}}^{n_k} - z_{\tilde{\alpha}+1}^{n_k}) + (z_{\tilde{\alpha}+1}^{n_k} - z_{\tilde{\alpha}+2}) + \cdots + (z_{\tilde{\beta}-1}^{n_k} - z_{\tilde{\beta}}^{n_k}))_V = \\ &\qquad = \frac{h_{n_k}}{2} (v, z_{\tilde{\alpha}}^{n_k} - z_{\tilde{\beta}}^{n_k})_V. \end{aligned}$$

[6]Tj. obecně taková podmnožina $A \subset X$ jejíž uzávěr je celá množina $X$.

Tuto rovnost využijeme k důkazu (4.34). Víme, že při zvyšování $n_k$, tj. $n_k \to \infty$, nám hodnota $h_{n_k}$ bude klesat, v limitě $h_{n_k} \to 0$. Dále za využití vztahu (4.16), můžeme odhadnout druhou část výrazu jako

$$\left|(v, z_{\tilde{\alpha}}^{n_k} - z_{\tilde{\beta}}^{n_k})\right| \leq \|v\|_V \left\|z_{\tilde{\alpha}}^{n_k} - z_{\tilde{\beta}}^{n_k}\right\|_V \leq 2c\|v\|_V\,,$$

a jelikož funkce $v$ je zvolena pevně, máme konvergenci (4.34) dokázánu. Funkce $v$ byla vybrána z množiny $M$ libovolně, proto je vztah (4.34) splněn $\forall v \in M$.
V důsledku hustoty množiny $N$ je vztah splněn dokonce $\forall v \in L_2(I,V)$. Tímto jsme dokázali uvažovanou implikaci (4.33), tedy

$$\tilde{u}_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{v} \quad L_2(I,V). \tag{4.38}$$

Posledním úkolem je ukázat, v jakém smyslu funkce $u(t)$ splňuje původní rovnici (4.1). K tomu využijeme nejprve integrální identitu (4.19) psanou pro $n = n_k$, tj.

$$((v, z_j^{n_k})) + (v, Z_j^{n_k}) = (v, f) \quad \forall v \ \in V. \tag{4.39}$$

Nechť $v$ je libovolně zvolená funkce z $L_2(I,V)$. Dále využijeme definic funkcí $\tilde{u}_n(t)$ a $U_n(t)$ (viz. (4.27) a (4.32)) a definujme abstraktní funkci $f \in L_2(I, L_2(\Omega))$ předpisem

$$f(t) = f \quad \forall t \in \langle 0, T\rangle\,.$$

Za těchto předpokladů můžeme integrální identitu (4.39) napsat ve tvaru

$$((v(t), \tilde{u}_{n_k}(t))) + (v(t), U_{n_k}(t)) = (v(t), f(t)) \quad \text{pro skoro všechna } t \in \langle 0, T\rangle\,.$$

Po zintegrování

$$\int_0^T ((v(t), \tilde{u}_{n_k}(t)))\mathrm{d}t + \int_0^T (v(t), U_{n_k}(t))\mathrm{d}t = \int_0^T (v(t), f(t))\mathrm{d}t. \tag{4.40}$$

Díky (4.28) a (4.31) můžeme pro $k \to \infty$ psát

$$U_{n_k} \rightharpoonup u' \quad \text{v} \quad L_2(I, L_2(\Omega))$$

a uvážíme-li, že

$$\int_0^T (v(t), U_{n_k}(t))\mathrm{d}t = (v, U_{n_k})_{L_2(I,L_2(\Omega))}$$

$$(v, U_{n_k})_{L_2(I,L_2(\Omega))} \to (v, u')_{L_2(I,L_2(\Omega))} = \int_0^T (v(t), u'(t))\mathrm{d}t,$$

tak pro prostřední integrál z (4.40) platí

$$\int_0^T (v(t), U_{n_k}(t))\mathrm{d}t \to \int_0^T (v(t), u'(t))\mathrm{d}t.$$

Integrál obsahující bilineární formu představuje *omezený lineární funkcionál*, z čehož na základě (4.38) vyplývá

$$\int_0^T ((v(t), \tilde{u}_{n_k}(t)))\mathrm{d}t \to \int_0^T ((v(t), u(t)))\mathrm{d}t \quad \text{pro} \quad k \ \to \infty.$$

Integrál na pravé straně rovnice (4.40) zůstane nezměněn, resp. bude roven

$$\int_0^T (v(t), f)\mathrm{d}t,$$

jelikož funkce $f(t)$ je na intervalu $I$ konstantní, tedy není závislá na čase.

Celkově tedy z (4.40) pro $k \to \infty$ a zvolenou funkci $v$ plyne

$$\int_0^T ((v(t), u(t)))\mathrm{d}t + \int_0^T (v(t), u'(t))\mathrm{d}t = \int_0^T (v(t), f)\mathrm{d}t. \tag{4.41}$$

Protože jsme ale funkci $v(t)$ volili libovolně z $L_2(I, V)$ je (4.41) splněno $\forall v \in L_2(I, V)$. Tímto jsme ukázali, v jakém smyslu funkce $u(t)$ splňuje diferenciální rovnici (4.1).

**Definice 4.1.** Funkci $u$ nazveme *slabým řešením problému* (4.1)–(4.3), jestliže splňuje následující vlastnosti:

1.
$$u \in L_2(I, V), \tag{4.42}$$

2.
$$u \in AC(I, L_2(\Omega)), \tag{4.43}$$

3.
$$u' \in L_2(I, L_2(\Omega)), \tag{4.44}$$

4.
$$u(0) = 0 \quad \text{v} \quad C(I, L_2(\Omega)), \tag{4.45}$$

5.
$$\int_0^T ((v(t), u(t)))\mathrm{d}t + \int_0^T (v(t), u'(t)\mathrm{d}t = \int_0^T (v(t), f)\mathrm{d}t \quad \forall v \in L_2(I, V). \tag{4.46}$$

## 4.2 Jednoznačnost

Předpokládejme, že problém (4.1)–(4.3) má dvě různá slabá řešení $\tilde{u}(t)$ a $\hat{u}(t)$. Jejich rozdíl si označíme jako $u(t)$. Tato funkce splňuje vlastnosti (4.42)–(4.46). Uvažujme také

$$\int_0^T ((v(t), u(t)))\mathrm{d}t + \int_0^T (v(t), u'(t)\mathrm{d}t = 0 \quad \forall v \in L_2(I, V), \tag{4.47}$$

kde funkci $v(t)$ definujeme předpisem

$$v(t) = \begin{cases} u(t) & \text{pro} \quad 0 \le t \le a, \\ 0 & \text{pro} \quad a < t \le T. \end{cases}$$

Bod $a$ je libovolně vybrán z časového intervalu $I = \langle 0, T \rangle$. Jestliže nyní využijeme vlastnosti (4.43) a použijeme-li integraci per partes dostaneme

$$\int_0^T (v(t), u'(t) \mathrm{d}t = \int_0^a (u(t), u'(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\|u(a)\|^2 - \frac{1}{2}\|u(0)\|^2 = \frac{1}{2}\|u(a)\|^2. \tag{4.48}$$

Zároveň platí ,že

$$\int_0^T ((v(t), u(t))) \mathrm{d}t = \int_0^a ((u(t), u(t))) \mathrm{d}t \geq 0. \tag{4.49}$$

Tedy z (4.47), (4.48) a (4.49) ihned plyne $\|u(a)\| = 0$ a jelikož byl bod $a$ volen libovolně můžeme psát

$$u(t) = 0 \quad \text{skoro všude v } I.$$

Tím jsme dokázali, že námi dvě uvažovaná slabá řešení jsou si sobě rovny až na množinu míry nula, tedy existuje jediné slabé řešení počátečních problémů.

Zformulujme nyní veškeré poznatky a informace získané v této podkapitole do jedné věty:

**Věta 4.2.** *Uvažujme oblast $\Omega$ jako podmnožinu euklidovského prostoru $E_2$ s lipschitzovskou hranici $\Gamma$. Pak existuje právě jedno řešení problému (4.1)–(4.3) ve smyslu definice 4.1. Toto řešení je slabou limitou posloupnosti Rotheho funkcí $u_n(t)$ (resp. funkcí $\tilde{u}_n(t)$; viz. (4.6) a (4.32)) v prostoru funkcí $L_2(I, V)$ a silnou limitou této posloupnosti v prostoru $C(I, L_2(\Omega))$.*

# 5 Odhad chyby

Jelikož je metoda časové diskretizace přibližná metoda, vyvstává otázka, jak odhadnout rozdíl mezi aproximací řešení získanou metodou časové diskretizace s krokem $h$ a slabým řešením problému (4.1)–(4.3). Veškeré normy v této kapitole uvažuje v prostoru $V$, index $V$, v zápise normy $\|\cdot\|_V$, bude pro jednoduchost vynechán. K odvození tohoto odhadu budeme vycházet z předpokladů věty 4.2 a mimo ně budeme pro jednoduchost předpokládat, že

$$f \in V \tag{5.1}$$

a existenci konstanty $M$ nezávislé na $v$, takové že

$$\left|((v, f))\right| \leq M\|v\| \qquad \forall v \ \in V. \tag{5.2}$$

Uvažujme nyní integrální identitu (4.19), od které odečteme tutéž identitu, pouze s $j$ nahrazeným $j-1$. Tento rozdíl dále vydělíme číslem $h_n$ a dostaneme

$$((v, Z_j^n)) + \frac{1}{h_n}(v, Z_j^n - Z_{j-1}^n) = 0 \quad \forall v \ \in V. \tag{5.3}$$

Nyní odečteme identitu (4.19), ve které namísto $j$ píšeme $j-2$, čímž získáme

$$((v, Z_j^n - Z_{j-1}^n)) + \frac{1}{h_n}(v, Z_j^n - Z_{j-1}^n) = \frac{1}{h_n}(v, Z_{j-1}^n - Z_{j-2}^n) \quad \forall v \ \in V.$$

Položíme-li $v = Z_j^n - Z_{j-1}^n$ můžeme psát

$$((Z_j^n - Z_{j-1}^n, Z_j^n - Z_{j-1}^n)) + \frac{1}{h_n}\left\|Z_j^n - Z_{j-1}^n\right\|^2 = (Z_j^n - Z_{j-1}^n, Z_{j-1}^n - Z_{j-2}^n). \tag{5.4}$$

Vezmeme-li v úvahu, že $((Z_j^n - Z_{j-1}^n, Z_j^n - Z_{j-1}^n)) \geq 0$ a $(Z_j^n - Z_{j-1}^n, Z_{j-1}^n - Z_{j-2}^n) \leq$ $\leq \left\|Z_j^n - Z_{j-1}^n\right\| \left\|Z_{j-1}^n - Z_{j-2}^n\right\|$, tak z (5.4) plyne

$$\left\|Z_j^n - Z_{j-1}^n\right\| \leq \left\|Z_{j-1}^n - Z_{j-2}^n\right\|. \tag{5.5}$$

Položíme-li nyní $Z_0^n = f$ a v (5.3) dosadíme za $j = 1$, dostaneme

$$((v, Z_1^n)) + \frac{1}{h_n}(v, Z_1^n - f) = 0 \quad \forall v \in V. \tag{5.6}$$

Nyní odečteme (resp. přičteme) bilineární formu $((v, f))$ od integrální identity (5.6), tj.

$$((v, Z_1^n)) - ((v, f)) + ((v, f)) + \frac{1}{h_n}(v, Z_1^n - f) = 0 \quad \forall v \in V.$$

Po úpravě, s využitím substituce $v = Z_1^n - f$, získáme tvar

$$((Z_1^n - f, Z_1^n - f)) + \frac{1}{h_n}(Z_1^n - f, Z_1^n - f) = -((Z_1^n - f, f)) \quad \forall v \in V. \tag{5.7}$$

Uvážíme-li, že $((Z_1^n - f, Z_1^n - f)) \geq 0$, $(Z_1^n - f, Z_1^n - f) \leq \|Z_1^n - f\|^2$ a podle (5.2) je $\left|((Z_1^n - f, f))\right| \leq M\|Z_1^n - f\|$, z (5.7) dostáváme

$$\|Z_1^n - f\| \leq Mh_n.$$

Odtud z (5.5) vyplývá vztah

$$\left\|Z_j^n - Z_{j-1}^n\right\| \leq Mh_n \quad \text{pro } j = 2, \ldots, 2^{n-1}p. \tag{5.8}$$

Pokud označíme

$$s_j^n = \frac{Z_j^n - Z_{j-1}^n}{h_n}, \quad j = 1, \ldots, 2^{n-1}p, \tag{5.9}$$

lze (5.8) zapsat stručně ve tvaru

$$\left\|s_j^n\right\| \leq M, \quad j = 1, \ldots, 2^{n-1}p. \tag{5.10}$$

Uvažujme nyní dělení $d_1$ intervalu $I = \langle 0, T\rangle$ na $p$ podintervalů délky $h$. Dále pro bod $t_j^1 = jh$ platí integrální identita

$$((v, z_j^1) + \frac{1}{h}(v, z_j^1 - z_{j-1}^1) = (v, f) \quad \forall v \in V. \tag{5.11}$$

Spolu s touto identitou budeme uvažovat identitu při dělení $d_2$, kde je délka podintervalů $h/2$, ve stejném bodě jako při dělení $d_1$, tj. $t_j^1 = t_{2j}^2$ a dostaneme tedy

$$((v, z_{2j}^2)) + \frac{2}{h}(v, z_{2j}^2 - z_{2j-1}^2) = (v, f) \quad \forall v \in V. \tag{5.12}$$

Nyní od (5.12) odečteme (5.11) a dostaneme

$$
\begin{aligned}
&((v, z_{2j}^2 - z_j^1)) + \frac{2}{h}(v, z_{2j}^2 - z_{2j-1}^2) - \frac{1}{h}(v, z_j^1 - z_{j-1}^1) = 0 \\
&((v, z_{2j}^2 - z_j^1)) + \frac{1}{h}\Big[(v, z_{2j}^2 - z_{2j-1}^2) + (v, z_{2j}^2 - z_{2j-1}^2) - (v, z_j^1 - z_{j-1}^1)\Big] = 0 \\
&((v, z_{2j}^2 - z_j^1)) + \frac{1}{h}\Big[(v, z_{2j}^2 - z_{2j-1}^2 + z_{2j}^2 - z_{2j-1}^2 - z_j^1 + z_{j-1}^1 + z_{2j-2}^2 - z_{2j-2}^2)\Big] = 0 \\
&((v, z_{2j}^2 - z_j^1)) + \frac{1}{h}\Big[(v, (z_{2j}^2 - z_j^1) - (z_{2j-2}^2 - z_{j-1}^1))\Big] = \\
&\qquad\qquad = -\frac{1}{h}(v, z_{2j}^2 - 2z_{2j-1}^2 + z_{2j-2}^2) \quad \forall v \in V.
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

Nyní využijeme definice funkce $Z_j^n$ (4.14) pomocí níž, spolu s (5.9), vyjádříme

$$
\frac{h}{2}(Z_{2j}^2 - Z_{2j-1}^2) = \frac{h}{2}\left(\frac{z_{2j}^2 - z_{2j-1}^2}{\frac{h}{2}} - \frac{z_{2j-1}^2 - z_{2j-2}^2}{\frac{h}{2}}\right) = z_{2j}^2 - 2z_{2j-1}^2 + z_{2j-2}^2 = \frac{h^2}{4}s_{2j}^2.
$$

Označme $z_{2j}^2 - z_j^1 = q_j^1$, $j = 0, 1, \ldots, p$ a dosaďme do (5.13)

$$
((v, q_j^1)) + \frac{1}{h}(v, q_j^1 - q_{j-1}^1) = \frac{h}{4}(v, s_{2j}^2) \quad \forall v \in V. \tag{5.14}
$$

Položme nyní $j = 0$ a $v = q_1^1$. Dále v důsledku počáteční podmínky je $q_0^1 = z_0^2 - z_0^1 = 0$ a dle (5.10) platí $\left\|s_j^n\right\| \leq M$. Pak z (5.14) dostáváme

$$
\left\|q_1^1\right\| \leq \frac{h^2 M}{4},
$$

uvážíme-li skutečnost, že $((q_1^1, q_1^1)) \geq 0$ a $(v, f) \leq \|v\|\|f\|$. Podobně bychom došli k výsledku pro $j = 2$

$$
\left\|q_2^1\right\| \leq \left\|q_1^1\right\| + \frac{h^2 M}{4} \leq \frac{2h^2 M}{4}.
$$

Obecně tedy můžeme tento vztah zapsat jako

$$
\left\|q_j^1\right\| \leq \frac{jh^2 M}{4}, \quad j = 0, 1, \ldots, p.
$$

Pro obecné dělení $d_n$, kdy $q_j^n = z_{2j}^{n+1} - z_j^n$, dostaneme tvar

$$
\left\|q_j^n\right\| \leq \frac{j\left(\frac{h}{2^{n-1}}\right)^2 M}{4}, \quad j = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}p.
$$

Zvolme nyní pevné $k$ a uvažujme diference v bodě $t_k = kh$. Je třeba si uvědomit, že při dělení $d_n$ je třeba vzít $j = 2^{n-1}k$, abychom došli do stejného bodu $t_k$. Na základě toho dostaneme

$$
\left\|u_n(t_k) - u_1(t_k)\right\| \leq \left\|u_n(t_k) - u_{n-1}(t_k)\right\| + \cdots + \left\|u_2(t_k) - u_1(t_k)\right\| \leq
$$

$$\leq \frac{h^2M}{4}\left(\frac{2^{n-1}k}{(2^{n-1})^2}+\cdots+\frac{2k}{2^2}+k\right)=\frac{kh^2M}{4}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{2}+1\right)\leq\frac{kh^2M}{2}. \quad (5.15)$$

Jak bylo dokázáno v předchozí kapitole, posloupnost $\{u_n(t)\}$ konverguje k funkci $u(t)$ v prostoru $C(I, L_2(\Omega))$, speciálně v prostoru $L_2(\Omega)$ v každém pevném bodě $t_k$. Tedy pro $n \to \infty$ z (5.15) vyplývá

$$\left\|u(t_k)-u_1(t_k)\right\| \leq \frac{kh^2M}{2}.$$

Vyslovme nyní větu shrnující dosažené poznatky.

**Věta 5.1.** *Nechť jsou splněny předpoklady věty (4.2), speciálně nechť forma $((v,u))$ je omezená ve $W_2^1(\Omega)$ a $V$-eliptická. Nechť jsou navíc splněny předpoklady (5.1) a (5.2). Pak platí následující odhad chyby:*

$$\left\|u(t_k)-u_1(t_k)\right\| \leq \frac{kh^2M}{2}. \quad (5.16)$$

*Známe-li „koeficient pozitivní definitnosti“ formy $((v,u))$, tedy takové číslo $C > 0$, pro které platí*

$$((v,u)) \geq C^2\|v\|^2 \quad \forall v \in V,$$

*můžeme odhad (5.16) nahradit odhadem*

$$\left\|u(t_k)-u_1(t_k)\right\| \leq \frac{hM}{2C^2}(1-\mathrm{e}^{-C^2kh}),$$

*resp. odhadem*[7]

$$\left\|u(t_k)-u_1(t_k)\right\| \leq \frac{hM}{2C^2}\left(1-\frac{1}{(1+hC^2)^k}\right).$$

# 6 Numerické řešení

Jedním z cílů bakalářské práce bylo sestavení kódu pro řešení vybraných úloh v prostředí MATLAB. Jako modelová rovnice byla vybrána parabolická rovnice ve stejném tvaru jako v kapitole 4, tj.

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u = f.$$

K jejímu řešení metodou časové diskretizace bylo využito matlabovské prostředí PDE Toolbox (uživatelská příručka [5] je na stránkách serveru MathWorks), za pomocí kterého je možné nadefinovat oblast, na které řešíme problém spolu s okrajovými podmínkami a počáteční podmínkou v případě parabolického problému, který uvažujeme. Důležitou rutinou PDE Toolboxu je `mesh`, která na zvolené oblasti vytvoří síť trojúhelníků. Poznamenejme, že jednotlivé eliptické problémy v časových okamžicích $t_k$ je třeba řešit numericky, v našem případě metodou konečných prvků s lineárními trojúhelníkovými prvky. Příslušná data je následně možné vyexportovat do uživatelského prostředí MATLABu a dále s nimi pracovat ve funkcích, které byly vytvořeny. Níže jsou uvedeny zdrojové kódy.

[7] Odvození tohoto přesnějšího odhadu je možné nalézt v [1].

```
function [u]=bakalarka(b,p,e,t,c,f,T,n,u0)
% koeficienty b,p,e,t,c,a,f dle znaceni PDEtoolboxu
% koeficiety b,p,e,t získáme vyexportováním dat z PDE Toolboxu
% koeficienty f a u0 je potřeba zadat jako string (i v případě
    konstant)
% n: pocet casovych kroku
% T: finali cas
% u0: počáteční podmínka
% tau: délka časového kroku
% u: matice reseni (k-ty sloupec predstavuje reseni ve vrcholech
    trojuhelniku v kroku t_k)

%% výpočet souřadnic těžišť trojúhelníků
it1 = t(1,:);
it2 = t(2,:);
it3 = t(3,:);
xpts = (p(1,it1) + p(1,it2) + p(1,it3))/3;
ypts = (p(2,it1) + p(2,it2) + p(2,it3))/3;

NT=size(t,2);    %počet vrcholů
NP=size(p,2);    %počet trojúhelníků
tau=T/n;         %délka kroku
atau(1,1:NT)=1/tau;

%%převedení nekonstantních koeficientů ze stringu na funkce
F=inline(f,'x','y');
fupdt(1,1:NT)=F(xpts,ypts);

U0=inline(u0,'x','y');
u0=U0(p(1,:),p(2,:));

%%1. krok - zapsání počáteční podmínky
u(1:NP,1)=u0;

f=fupdt(1,1:NT);

%% cyklus pro získání řešení u
for i=2:n+1
     %pomocná proměnná
     U=u(:,i-1);

     %interpolace řešení u do těžiště trojúhelníků
     uintrp = pdeintrp(p,t,U);

     %výpočet nové pravé strany rovnice
     fupdt=n*uintrp+f ;

     %výpočet řešení ve vrcholech trojúhelníků
```

```
        u(:,i)=assempde(b,p,e,t,c,atau,fupdt);
end;
animace(p,e,t,u,n);
end
```

```
function animace(p,e,t,u,n)

figure
h = newplot;
hf = h.Parent;

%Získáná maximální, resp. minimální hodnoty, které řešení u nabývá
minu = min(u);
minu = min(minu);
maxu = max(abs(u));
maxu = max(abs(maxu));

axislimits=([-inf inf -inf inf minu maxu]);

for j = 1:n
 %Vykreslení řešení v časovém bodě t_j
 pdeplot(p,e,t,'xydata',u(:,j),'zdata',u(:,j),'colormap','jet','ColorBar','off');

 %Omezení souřadnicového systému
 axis(axislimits);
 axis off

 %Snímek vykresleného řešení
 M(j) = getframe(hf);
end

%Přehrání vytvořených snímků
movie(hf,M,2,10)
```

Algoritmus programu je poměrně jednoduchý a využívá některé matlabovské funkce. Jakmile jsou data vyexportována z PDE Toolboxu, jsou vypočítány souřadnice těžišť trojúhelníků jenž vygeneruje funkce mesh. Je to z toho důvodu, že hledáme funkční hodnoty řešení $u$ právě v těchto těžištích. Dále jsou převedeny vstupní funkce $f$ a počáteční podmínky ze řetězce string na použitelnou funkci, tento převod je realizován pro případy zadání nekonstantních hodnot. Poté již probíhá výpočet samotného řešení, kdy nejprve jsou do řešení $u$ zapsány hodnoty počáteční podmínky a následně jsou v cyklu prováděny výpočty řešení v jednotlivých bodech časového intervalu. V tomto cyklu jsou využity dvě integrované matlabovské funkce. První je funkce `pdeintrp` jenž vrátí interpolovanou hodnotu řešení $u$ pro $t_{j-1}$ v těžištích trojúhelníků. Pomocí této vypočtené hodnoty je poté upravená pravá strana rovnice, jenž vstupuje do druhé funkce, kterou je `assempde`. Tato funkce za pomocí vstupních údajů vypočítá hodnotu řešení $u$ ve vrcholech zmiňovaných trojúhelníků. Tento proces je opakován podle počtu navoleného dělení. Na konci je vyvolána funkce *animace* jenž slouží k vykreslení řešení v závislosti na čase. Při vyšším $n$ je samozřejmě animace plynulejší.

Poznamenejme, že se nezabýváme chybou, které se dopustíme numerickým řešením eliptických problémů v časových krocích $t_k$.

# 7 Závěr

V této bakalářské práci byl vysvětlen základní princip metody časové diskretizace, který byl demonstrován na jednoduchém modelovém příkladě. Dále byly vysloveny nutné definice, pomocí kterých byla odvozena existenční a konvergenční věta spolu s důkazem jednoznačnosti řešení. Vzhledem k povaze metody, která je pouze přibližná, byl odvozen odhad chyby, kterého se při výpočtech dopustíme. Tento odhad je teoretický v tom smyslu, že uvažuje znalost přesného řešení příslušného eliptického problému (v jednotlivých časech $t_k$), toto přesné řešení je však málokdy k dispozici. V poslední kapitole byl uveden program, vytvořený v programu MATLAB, pomocí kterého je možné řešit vybrané úlohy právě metodou časové diskretizace.

V bakalářské práci jsme se pro větší názornost a pochopení omezili na lineární parabolickou úlohu s nulovou počáteční podmínkou a Dirichletovou okrajovou podmínkou na hranici oblasti, která byla uvažována jako podoblast euklidovského prostoru $E_2$. Metodu časové diskretizace je možné rozšířit o případy parabolické úlohy s nehomogenními počátečními a okrajovými podmínkami, spolu s nelineárním tvarem těchto úloh (kvazilineárním úlohám je věnována monografie [3]). Kromě parabolických úloh je také možné tuto metodu využívat při řešení úloh hyperbolických, u kterých bychom opět mohli vyšetřovat jednotlivé případy počátečních, resp. okrajových podmínek. Tato rozšíření nejsou z důvodů rozsahu práce její součástí, ale je možné tuto problematiku nalézt v pracích uvedených v seznamu literatury.

Poznamenejme, že z numerického hlediska metoda příliš efektivní není, má spíše teoretický význam, například v uvedeném důkazu existence a jednoznačnosti řešení pro počátečně-okrajovou úlohu s parabolickou parciální diferenciální rovnicí.

# Reference

[1] REKTORYS, K., *Metoda časové diskretizace a parciální diferenciální rovnice*, SNTL, Praha , 1985.

[2] REKTORYS, K., *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*, Academia, Praha, 1999.

[3] KAČUR, J., *Method of Rothe in evolution equations*, BSB Teubner Verlagsges, bd. 80, Leipzig, 1985.

[4] KUFNER, A., JOHN, O., FUČÍK, S., *Function Spaces*, Academia, Praha, 1977.

[5] Partial Differential Equation Toolbox User's Guide. The MathWorks. 2013.