UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Extrémy funkcí dvou proměnných — sbírka úloh

Vedoucí bakalářské práce:
Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.
Rok odevzdání: 2013

Vypracoval:
Hana Keslerová
ME, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením paní Mgr. Ivety Bebčákové, Ph.D. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne 22. dubna 2013

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucí bakalářské práce paní Mgr. Ivetě Bebčákové, Ph.D. za spolupráci i za čas, který mi věnovala při konzultacích.

Obsah

Úvod

Diferenciální počet se v praxi aplikuje velmi často a právě vyšetřování extrémů funkcí patří k jeho nejdůležitějším částem. Jeho praktické využití vidíme nejčastěji v ekonomii, jelikož ekonomické rozhodování jakéhokoli subjektu, který je součástí národního hospodářství, je postaveno na tom, že onen subjekt chce dosáhnout minimalizace nákladů a maximalizace zisku. Hledáním maxim a minim funkcí se zabývá již v nadpisu práce zmíněná část diferenciálního počtu.

Má práce se bude skládat ze dvou velkých částí, z nichž druhá bude ještě rozdělená do tří menších. První, pouze teoretická, se nebude zabývat přímo extrémy, ale teorií týkající se funkcí dvou proměnných a parciálních derivací funkcí dvou proměnných, protože znalost těchto kapitol je bezpodmínečně nutná při dalším pracování s těmito funkcemi, v mém případě při hledání jejich extrémů. Teoreticko — praktická část bude rozdělená do tří podkapitol (lokální, vázáné, globální extrémy), v nichž si vždy nejprve vysvětlíme, co tyto extrémy vlastně jsou, jaké jsou podmínky pro to, aby jich funkce vůbec mohla nabývat a jaký je postup při vyšetřování, zda funkce má či nemá v jistém bodě extrém. Každá z těchto podkapitol bude následně doplněna o mnou vytvořené, podrobně vysvětlené a následně vyřešené příklady týkající se postupně lokálních, vázaných a nakonec globálních extrémů funkcí dvou proměnných. Čtenář by po prostudování této práce měl být schopen hlouběji proniknout, pochopit a vyřešit příklady s touto problematikou, jejíž znalost je myslím důležitá nejen pro osoby, které se zabývají matematickým studiem či výzkumem.

Cíl je tedy jasný, jak je již v nadpisu celé práce uvedeno, jde o vytvoření sbírky příkladů na zadané téma. Účelem této sbírky je její následné poskytnutí studentům nižších ročníků matematických oborů Univerzity Palackého pro lepší pochopení této látky.

Text je vysázen typografickým systémem TEX ve formátu LATEX2ε.

Seznam značení

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ — n - rozměrný prostor

$\mathbb{R}^2$ — 2 - rozměrný prostor

Ω — libovolná podmnožina v $\mathbb{R}^n$ (popř. $\mathbb{R}^2$)

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$ — bod v libovolném oboru Ω

$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — funkce n proměnných

$z = f(x, y)$ — funkce dvou proměnných x a y

$X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ — bod v prostoru $\mathbb{R}^3$

D_f — definiční obor funkce $f(x, y)$

H_f — obor hodnot funkce $f(x, y)$

$\varphi(x) = f(x, y_0)$ — funkce jedné proměnné x

$f'_x(x_0, y_0)$, $f'_x(X)$, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(X)}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}(X)$ — parciální derivace funkce $f(x, y)$ v bodě $X = (x_0, y_0)$ podle proměnné x

f'_x nebo $\frac{\partial f}{\partial x}$ — parciální derivace funkce f podle proměnné x

$\lim_{x \to a} f(x)$ — limita funkce f v bodě a

$\emptyset$ — prázdná množina

$\mathcal{U}(X)$ — okolí bodu X

$f''_{xx}(X)$ — parciální derivace druhého řádu funkce f podle proměnné x

$f''_{yy}(X)$ — parciální derivace druhého řádu funkce f podle proměnné y

$f''_{xy}(X)$, $f''_{yx}(X)$ — smíšené parciální derivace druhého řádu funkce f podle proměnných x a y

Kapitola 1

Teoretická část

1.1 Základní pojmy

1.1.1 Funkce více proměnných

Na začátku této kapitoly je třeba si říci, co si představujeme pod pojmem funkce více proměnných, protože umíme-li definovat funkci více proměnných, nebude pro nás pak problém zaměřit se konkrétně na funkci dvou proměnných, jejímiž extrémy se budeme v práci následně zabývat.

Definice 1 Nechť Ω značí libovolný obor v prostoru $\mathbb{R}^n$, přičemž každý bod $X \in \Omega$ lze popsat n-ticí $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Pak každé zobrazení f množiny Ω do množiny $\mathbb{R}$ všech reálných čísel nazýváme *reálnou funkcí n reálných* (nezávisle) *proměnných* (nebo *reálnou funkcí n reálných argumentů*) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a píšeme

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \text{popř.} \quad y = f(X) \text{ pro } \forall X \in \Omega.$$

Obor Ω se nazývá *definiční obor funkce* $f(X)$.

[4]

1.1.2 Funkce dvou proměnných

Jak již bylo řečeno, v této práci se omezíme na funkce dvou argumentů (proměnných), tím pádem je třeba předchozí definici zjednodušit pro $n = 2$.

Definice 2 *Reálnou skalární funkcí*, neboli *reálnou funkcí dvou reálných proměnných*, budeme rozumět předpis či pravidlo, jímž uspořádané dvojici reálných čísel $(x, y) \in D_f$, kde $D_f \subset \mathbb{R}^2$ je neprázdná množina, přiřadíme reálné číslo $z = f(x, y) \in \mathbb{R}$. Jedná se tedy o zobrazení

$$f : (x, y) \in D_f \longrightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}.$$

Množina D_f je *definičním oborem* funkce f.

Množina $H_f = \Big\{ z \in \mathbb{R} |$ existuje $(x, y) \in D_f$ tak, že $z = f(x, y) \Big\}$ je *obor hodnot* funkce f.

Grafem funkce f je množina $G_f = \Big\{ \Big(x, y, f(x, y) \Big) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} | (x, y) \in D_f \Big\}$.

[5]

Protože se dále budeme zabývat pouze reálnými funkcemi dvou reálných proměnných, budeme zkráceně používat termín *funkce dvou proměnných*.

Poznámka 1 Každá funkce dvou proměnných je určená svým funkčním předpisem a definičním oborem. Pokud její definiční obor neznáme, budeme za něj považovat tu množinu bodů $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pro které má funkční předpis této funkce smysl.

1.1.3 Parciální derivace funkcí dvou proměnných

Abychom v další části této práce byli schopni pochopit a následně řešit příklady týkající se extrémů funkcí dvou proměnných, je pro nás nezbytně nutná znalost další kapitoly diferenciálního počtu a tou jsou parciální derivace funkcí dvou proměnných, které nám při výpočtech těchto příkladů budou velmi nápomocné.

Parciální derivace prvního řádu

Nejprve si povíme něco o parciálních derivacích funkce dvou proměnných v bodě.

Definice 3 Nechť funkce $z = f(x, y)$ je definována na oblasti Ω, ve které leží bod $X = (x_0, y_0)$.

1. Má-li funkce $\varphi(x) = f(x, y_0)$ o jedné proměnné x v bodě x_0 derivaci $\varphi'(x_0)$, nazýváme ji *parciální derivací funkce $f(x, y)$ podle x v bodě $X = (x_0, y_0)$* a značíme ji některým z těchto symbolů:

$$f'_x(x_0, y_0), \quad f'_x(X), \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(X)}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(X).$$

Přitom je

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

2. Má-li funkce $\psi(y) = f(x_0, y)$ o jedné proměnné y v bodě y_0 derivaci $\psi'(y_0)$, nazýváme ji *parciální derivací funkce* $f(x, y)$ *podle* y *v bodě* $X = (x_0, y_0)$ a značíme ji některým z těchto symbolů:

$$f'_y(x_0, y_0), \quad f'_y(X), \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(X)}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(X).$$

Přitom je

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{p \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + p) - f(x_0, y_0)}{p}.$$

[4]

V případě parciální derivace funkce f podle x v bodě X postupujeme při výpočtu tak, že za y dosadíme nějakou pevnou hodnotu y_0 a tím získáme funkci pouze o jedné proměnné $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Existuje-li $f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$, tedy má-li funkce φ v bodě x_0 *derivaci*, pak funkce f má v bodě (x_0, y_0) *parciální derivaci podle proměnné* x.

Při výpočtu parciální derivace funkce f podle y v bodě X postupujeme analogicky.

Toto byla definice toho, co jsou to parciální derivace funkce f v konkrétním bodě X, nyní se zaměříme také na parciální derivace funkce na množině.

Definice 4 Nechť funkce f je definovaná na množině $D_f \subset \mathbb{R}^2$ a nechť $D_{f_x} \neq \emptyset$, $D_{f_x} \subset D_f$ je množina všech bodů $(x, y) \in D_f$, v nichž existuje vlastní parciální derivace $f'_x(x, y)$. Funkce dvou proměnných definovaná na D_{f_x} předpisem $(x, y) \longrightarrow f'_x(x, y)$ se nazývá *parciální derivace funkce* f *podle proměnné* x a značí se f'_x nebo $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Nechť funkce f je definovaná na množině $D_f \subset \mathbb{R}^2$ a nechť $D_{f_y} \neq \emptyset$, $D_{f_x} \subset D_f$ je množina všech bodů $(x, y) \in D_f$, v nichž existuje vlastní parciální derivace $f'_y(x, y)$. Funkce dvou proměnných definovaná na D_{f_y} předpisem $(x, y) \longrightarrow f'_y(x, y)$ se nazývá *parciální derivace funkce* f *podle proměnné* y a značí se f'_y nebo $\frac{\partial f}{\partial y}$.

[7]

Parciální derivace používáme ve výpočtech všech druhů extrémů funkcí dvou proměnných, neobešli bychom se bez nich.

Poznámka 2 Díky tomu, že při určování parciálních derivací považujeme jednu proměnnou za konstantu a derivujeme tedy pouze vzhledem k jedné proměnné, můžeme při výpočtech používat stejná pravidla pro derivování jako u totálních (obyčejných) derivací funkcí jedné proměnné.

Věta 1 *Nechť funkce $f(x,y)$, $g(x,y)$ mají v daném bodě (x_0,y_0) parciální derivace $f'_x(x_0,y_0)$, $g'_x(x_0,y_0)$ podle proměnné x, pak také funkce $f(x,y) \pm g(x,y)$, $f(x,y) \cdot g(x,y)$ a $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ mají v tomto bodě parciální derivace podle x, ty vypočteme podle těchto pravidel:*

a) $(f+g)'_x(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0) + g'_x(x_0,y_0)$;

b) $(f-g)'_x(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0) - g'_x(x_0,y_0)$;

c) $(f \cdot g)'_x(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0) \cdot g(x_0,y_0) + f(x_0,y_0) \cdot g'_x(x_0,y_0)$;

d) $(c \cdot f)'_x(x_0,y_0) = c \cdot f'_x(x_0,y_0)$, *kde c je konstanta*;

e) $\left(\frac{f}{g}\right)'_x (x_0,y_0) = \frac{f'_x(x_0,y_0)\cdot g(x_0,y_0) - f(x,y)\cdot g'_x(x_0,y_0)}{g(x_0,y_0)^2}$, *pokud* $g(x_0,y_0) \neq 0$.

[4]

Obdobné vzorce platí pro parciální derivace podle proměnné y.

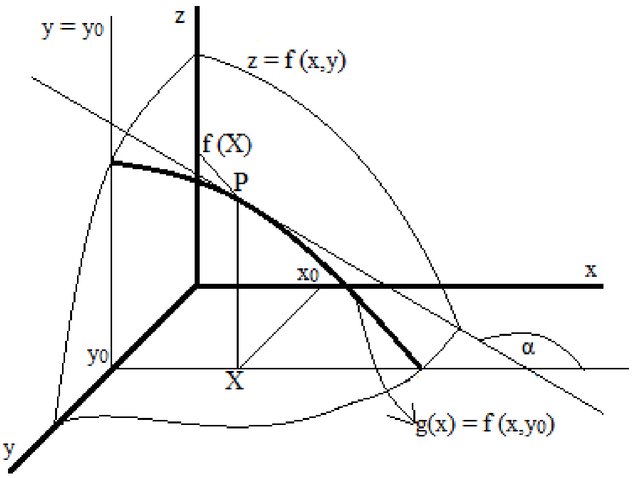
Poznámka 3 Funkce jedné proměnné je vždy spojitá v bodě, v němž má *vlastní derivaci*. Existence obou *parciálních derivací* v bodě (x_0,y_0) u funkce dvou proměnných nám ovšem spojitost nezaručuje a to proto, že z parciálních derivací funkce dvou proměnných lze vyčíst pouze to, jak se funkce chová ve směrech, které jsou rovnoběžné s osami x a y (jak později uvidíme v gometrické interpretaci parciálních derivací). V jiných směrech se funkce může chovat jakkoli jinak.

Geometrická interpretace parciálních derivací:

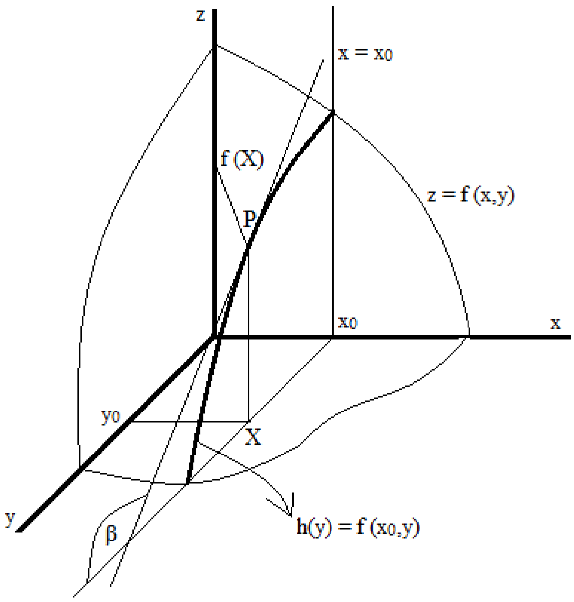
Nechť $z = f(x,y)$ je funkce dvou proměnných x a y definovaná na okolí $\mathcal{U}(X)$ bodu $X = (x_0,y_0)$. Utvoříme funkci $g(x) = f(x,y_0)$ definovanou na množině takových bodů z $\mathcal{U}(X)$, které leží na přímce o rovnici $y = y_0$. Graf funkce $g(x)$ je průsečnice roviny $y = y_0$ s grafem funkce $z = f(x,y)$. Je to jakási křivka, která prochází bodem $P = (x_0,y_0,f(x_0,y_0))$. Sestrojíme tečnu této křivky v bodě $P = (x_0,y_0,f(x_0,y_0))$. Pro tangens úhlu α, který svírá tečna s kladným směrem osy x, platí, že je roven derivaci $\frac{\partial(X)}{\partial x}$. (viz. obrázek 1.1)

Nechť $z = f(x,y)$ je funkce dvou proměnných x a y, definovaná na okolí $\mathcal{U}(X)$ bodu $X = (x_0,y_0)$. Utvoříme funkci $h(y) = f(x_0,y)$ definovanou na množině takových bodů z $\mathcal{U}(X)$, které leží na přímce o rovnici $x = x_0$. Graf funkce

$h(y) = f(x_0, y)$ je průsečnice roviny $x = x_0$ s grafem funkce $z = f(x, y)$. Je to jakási křivka, která prochází bodem $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Sestrojíme tečnu této křivky v bodě $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Pro tangens úhlu β, který svírá tečna s kladným směrem osy y, platí, že je roven derivaci $\frac{\partial(X)}{\partial y}$. (viz. obrázek 1.2)



Obrázek 1.1: Parciální derivace podle proměnné x.



Obrázek 1.2: Parciální derivace podle proměnné y.

Parciální derivace druhého řádu

Parciální derivace prvního řádu jsou opět funkce dvou proměnných, proto můžeme dále počítat jejich parciální derivace a tím získat parciální derivace druhého řádu.

Definice 5 Má-li funkce $z = f(x, y)$, která je definována na oblasti Ω, v každém bodě $X = (x_0, y_0)$ oblasti Ω_1 (přičemž $\Omega_1 \subseteq \Omega$) obě parciální derivace f'_x, f'_y, představují tyto derivace opět funkce dvou proměnných x, y s definičním oborem Ω_1. Mají-li tyto funkce opět parciální derivace podle x, popř. podle y, dostaneme (čtyři) *parciální derivace druhého řádu*, které značíme:

a) $f''_{xx}(X)$, popř. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, popř. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

b) $f''_{xy}(X)$, popř. $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, popř. $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$;

c) $f''_{yx}(X)$, popř. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, popř. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

d) $f''_{yy}(X)$, popř. $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, popř. $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

[4]

Nyní vyslovíme Schwarzovu větu, která se nám možná teď jeví jako nedůležitá, ale v budoucích výpočtech zjistíme, že má v teorii extrémů funkcí dvou proměnných své opodstatnění.

Věta 2 (Schwarzova věta) *Jestliže smíšené parciální derivace $f''_{xy}(X)$, $f''_{yx}(X)$ existují na okolí $\mathcal{U}(X)$ a jsou spojité v bodě $X = (x_0, y_0)$, pak nutně jsou si rovny, tj. $f''_{xy}(X) = f''_{yx}(X)$.*

[4]

Kapitola 2

Teoreticko — praktická čáxt

2.1 Extrémy funkcí dvou proměnných

Nyní již známe všechen teoretický základ potřebný k tomu, abychom se mohli přesunout do teoreticko — praktických částí této bakalářské práce, které se budou zabývat jedním z nejdůležitějších bodů diferenciálního počtu, tedy hledáním extrémů funkcí dvou proměnných. Postupně projdeme lokální, vázané a konečně i globální extrémy funkcí dvou proměnných.

2.2 Lokální extrémy

Funkce $f(x, y)$ má na oblasti Ω *lokální extrém* v bodě $X \in \Omega$, pokud nabývá v tomto bodě buď *lokálního maxima* nebo *lokálního minima*. O jaké extrémy může jít, nám ukáže následující definice.

Definice 6 Řekněme, že funkce $f(x, y)$ má na oblasti Ω v bodě $X = (x_0, y_0) \in \Omega$

- *lokální maximum*, právě když existuje okolí $\mathcal{U}(X) \subseteq \Omega$, takové, že pro každý bod $(x, y) \in \mathcal{U}(X)$ platí $f(x, y) \leq f(X)$,
- *lokální minimum*, právě když existuje okolí $\mathcal{U}(X) \subseteq \Omega$, takové, že pro každý bod $(x, y) \in \mathcal{U}(X)$ platí $f(x, y) \geq f(X)$,
- *ostré lokální maximum*, právě když existuje okolí $\mathcal{U}(X) \subseteq \Omega$, takové, že pro každý bod $(x, y) \in \mathcal{U}^*(X)$ platí $f(x, y) < f(X)$,
- *ostré lokální minimum*, právě když existuje okolí $\mathcal{U}(X) \subseteq \Omega$, takové, že pro každý bod $(x, y) \in \mathcal{U}^*(X)$ platí $f(x, y) > f(X)$.

[4]

Věta 3 (Fermatova věta) *Nechť funkce $f(x, y)$ má v bodě $X = (x_0, y_0)$ lokální extrém. Nechť má v tomto bodě parciální derivace $f'_x(X)$, $f'_y(X)$. Potom platí, že $f'_x(X) = f'_y(X) = 0$.*

[3]

Tato věta je *nutnou podmínkou* pro existenci lokálního extrému a plyne z ní, že má-li funkce $f(x, y)$ v bodě $X = (x_0, y_0)$ parciální derivace, které jsou jiné než nulové, pak v tomto bodě nemá lokální extrém.

Věta nám ovšem nezaručuje existenci lokálního extrému. Funkce může mít v bodě $X = (x_0, y_0)$ nulové spojité parciální derivace prvního řádu, a přesto v tomto bodě nenabývat lokálního maxima ani minima.

Definice 7 Bod X, ve kterém existují obě parciální derivace a platí, že $f'_x(X) = f'_y(X) = 0$, se nazývá *stacionární bod* funkce $f(x, y)$.

[4]

Poznámka 4 Extrémů funkce $f(x, y)$ může nabývat jak ve stacionárních bodech, tak také v bodech, kde jedna parciální derivace neexistuje a druhá je nulová, nebo v bodech, kde neexistuje ani jedna parciální derivace. O tom, zda má funkce v těchto bodech lokální extrémy, ve většině případů rozhodneme pomocí *postačující podmínky* pro existenci lokálního extrému, kterou je následující věta.

Věta 4 *Nechť má funkce $f(x, y)$ na nějakém okolí stacionárního bodu X všechny parciální derivace druhého řádu a ty jsou v bodě X spojité, potom sestavíme matici*

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} f''_{xx}(X) & f''_{xy}(X) \\ f''_{yx}(X) & f''_{yy}(X) \end{pmatrix}$$

a vypočteme determinanty

$$D_1 = \det\Big(f''_{xx}(X)\Big) = f''_{xx}(X), \qquad D_2 = \det H.$$

Platí:

1) $D_1 < 0 \wedge D_2 > 0 \Longrightarrow f$ *má v* X *ostré lokální maximum,*

2) $D_1 > 0 \wedge D_2 > 0 \Longrightarrow f$ *má v* X *ostré lokální minimum,*

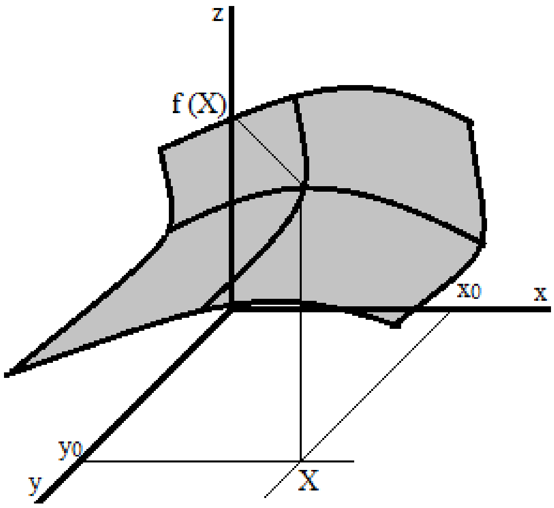
3) $D_2 \neq 0$ *a přitom neplatí žádná z možností 1), 2)* $\Longrightarrow f$ *nemá v* X *lokální extrém,*

4) $D_2 = 0 \Longrightarrow$ *? (f může, ale nemusí mít v X lokální extrém).*

[8]

Poznámka 5 Výše uvedená matice se nazývá *Hessova* (podle matematika Ludwiga Hesse), jejímu determinantu říkáme *Hessián.* Je to čtvercová matice (v našem případě matice typu 2×2), která je symetrická (protože smíšené parciální derivace $f''_{xy}(A)$ a $f''_{yx}(A)$ jsou si rovny — viz. Schwarzova věta).

Poznámka 6 Pokud funkce f nemá v bodě X lokální maximum ani minimum (tedy pokud platí bod 3) předchozí věty), nazýváme tento bod sedlový, to znamená, že graf funkce má v okolí tohoto bodu tvar sedla, nemůže tedy v tomto bodě nabývat žádného lokálního extrému. (viz. obrázek 2.1)



Obrázek 2.1: Možný tvar funkce v okolí sedlového bodu X.

Je důležité si říci, podle jakých kritérií rozhodujeme o tom, zda funkce v nějakém bodě má či nemá lokální extrém.

Kritéria rozhodování o existenci lokálních extrémů funkce dvou proměnných:

1) *Stacionární body:*

   - postačující podmínka pro existenci lokálního extrému
   - definice lokálního extrému (pokud platí, že druhé parciální derivace této funkce nejsou spojité)

2) *Body, kde neexistuje ani jedna parciální derivace,* nebo *kde jedna existuje a druhá je nulová:*

- definice lokálního extrému

Nyní si podrobně bod po bodu popíšeme, jak budeme při výpočtech lokálních maxim a minim postupovat.

Postup při hledání lokálních extrémů funkce dvou proměnných:

1) Vytvoříme parciální derivace funkce podle proměnných x a y.

2) Tyto derivace položíme rovny nule, dostáváme dvě rovnice o dvou neznámých x a y.

3) Vyřešením těchto rovnic získáváme souřadnice stacionárního bodu (může být jeden, více i nekonečně mnoho).

4) Vytvoříme parciální derivace druhého řádu, z těch pak sestrojíme Hessovu matici.

5) Dosadíme souřadnice stacionárních bodů do druhých parciální derivací a následně určíme determinanty D_1 a D_2.

6) Podle postačující podmínky pro existenci lokálního extrému popř. definice lokálního extrému rozhodneme, zda funkce v daném bodě extrém má, pokud ano, o jaký se jedná.

2.2.1 Lokální extrémy — příklady

Najděte lokální extrémy funkce f.

Příklad 1

$$f(x,y) = 2x^2 + (1-y)^2$$

Řešení:
Nejdříve najdeme stacionární body funkce f tak, že parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2$$

položíme rovny nule. Dostáváme systém rovnic

$$4x = 0, \qquad 2y - 2 = 0.$$

Z těch je zřejmé, že $x = 0$ a $y = 1$, funkce má tedy jeden stacionární bod $(0,1)$.

Nyní spočítáme derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0,$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinant $D_2 = 8 > 0$, funkce f má tedy ve stacionárním bodě $(0,1)$ lokální extrém a protože

$$D_1 = 4 > 0,$$

je to ostré lokální minimum.

Příklad 2

$$f(x,y) = (x - y + 1)^2$$

Řešení:
Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - y + 1), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2(x - y + 1)$$

položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic

$$2(x - y + 1) = 0, \qquad -2(x - y + 1) = 0.$$

Z první rovnice vyjádříme $x = y - 1$, dosazením do druhé získáváme $0 = 0$. Je tedy zřejmé, že stacionárních bodů je nekonečně mnoho a leží na přímce $x = y - 1$.

Nyní spočítáme derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2,$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinant $D_2 = 0$, tímto způsobem tedy nelze o existenci extrému rozhodnout, pomůže nám definice lokálních extrémů.
Z předpisu funkce vidíme, že její funkční hodnota bude vždy nezáporné číslo, je tedy evidentní, že lokální minimum bude v bodě, kde $f(x, y) = 0$. Do funkčního předpisu $(x - y + 1)^2$ dosadíme výraz $x = y - 1$, tím získáváme $f(x, y) = 0$, funkce f tedy nabývá ve všech svých stacionárních bodech neostrého lokálního minima.

Příklad 3

$$f(x, y) = xy - \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$$

Řešení:
Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + \frac{50}{x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{20}{y^2}$$

položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic

$$y + \frac{50}{x^2} = 0, \qquad x - \frac{20}{y^2} = 0.$$

Z první rovnice je zřejmé, že $y = -\frac{50}{x^2}$, to dosadíme do druhé, dostáváme

$$x\left(1 - \frac{x^3}{125}\right) = 0,$$

jejíž řešení jsou $x_1 = 0$ (v tomto bodě ovšem funkce není definovaná) a $x_2 = 5$. Po dosazení do rovnice $y = -\frac{50}{x^2}$ dostaneme souřadnice jediného stacionárního bodu $(5, -2)$.

Nyní spočítáme derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{100}{x^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{40}{y^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1,$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -\frac{100}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{40}{y^3} \end{pmatrix}.$$

Pro bod $(5, -2)$ dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, $D_2 = 3 > 0$, má tedy ve stacionárním bodě $(5, -2)$ lokální extrém a protože

$$D_1 = -\frac{4}{5} < 0,$$

je to ostré lokální maximum.

Příklad 4

$$f(x, y) = x^3 + 8xy^2 + 14x^2 + 26y^2$$

Řešení:
Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 8y^2 + 28x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 16xy + 52y$$

položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic

$$3x^2 + 8y^2 + 28x = 0, \qquad 16xy + 52y = 0.$$

Druhou rovnici převedeme na tvar $4y(4x + 13) = 0$, jejímž řešením je buď $y = 0$, nebo $x = -\frac{13}{4}$. Dosazením hodnoty $y = 0$ do první rovnice získáváme dvě příslušná řešení $x_1 = 0$ a $x_2 = -\frac{28}{3}$. Dosazením hodnoty $x = -\frac{13}{4}$ do první rovnice získáváme dvě příslušná řešení $y_1 = -2,72$ a $y_2 = 2,72$. Funkce f má tedy čtyři stacionární body $(0, 0)$, $\left(-\frac{28}{3}, 0\right)$, $\left(-\frac{13}{4}, -2,72\right)$, $\left(-\frac{13}{4}, 2,72\right)$.

Nyní spočítáme derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 28, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 16x + 52, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 16y,$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 6x + 28 & 16y \\ 16y & 16x + 52 \end{pmatrix}.$$

Pro bod $(0, 0)$ dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 28 & 0 \\ 0 & 52 \end{pmatrix}$, $D_2 = 1456 > 0$, funkce f má tedy v tomto bodě lokální extrém a protože $D_1 = 28 > 0$, je to ostré lokální minimum.

Pro bod $\left(-\frac{28}{3}, 0\right)$ dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -28 & 0 \\ 0 & -97,3 \end{pmatrix}$, $D_2 = 2725,3 > 0$, funkce f má tedy v tomto bodě lokální extrém a protože $D_1 = -28 < 0$, je to ostré lokální maximum.
Pro bod $\left(-\frac{13}{4}, -2,72\right)$ dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 8,5 & -43,52 \\ -43,52 & 0 \end{pmatrix}$, $D_2 =$ $= -1894 < 0$, funkce f tedy v tomto bodě nemá lokální extrém, je to sedlový bod.
Pro bod $\left(-\frac{13}{4}, 2,72\right)$ dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 8,5 & 43,52 \\ 43,52 & 0 \end{pmatrix}$, $D_2 = -1894 <$ < 0, funkce f tedy v tomto bodě nemá lokální extrém, je to sedlový bod.

Příklad 5

$$f(x, y) = (2x - x^2)(y^2 - 5y)$$

Řešení:
Funkci roznásobíme na tvar $f(x, y) = 2xy^2 - 10xy - x^2y^2 + 5x^2y$. Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 - 10y - 2xy^2 + 10xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4xy - 10x - 2x^2y + 5x^2$$

opět položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic

$$2y^2 - 10y - 2xy^2 + 10xy = 0, \qquad 4xy - 10x - 2x^2y + 5x^2 = 0.$$

První rovnici odpovídají dvě řešení pro y a to $y_1 = 0$ a $y_2 = 5$ (za předpokladu, že $x \neq 1$). Dosazením y_1 do druhé rovnice dostáváme douřadnice dvou stacionárních bodů a to $(0, 0)$ a $(2, 0)$. Dosazením y_2 do druhé rovnice dostáváme souřadnice dalších dvou stacionárních bodů a to $(0, 5)$ a $(2, 5)$. Nyní ještě vyšetříme případ, kdy $x = 1$, to dosadíme do druhé rovnice a získáme tak poslední stacionární bod $\left(1, \frac{5}{2}\right)$.

Nyní spočítáme derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y^2 + 10y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x - 2x^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4y - 10 - 4xy + 10x,$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -2y^2 + 10y & 4y - 10 - 4xy + 10x \\ 4y - 10 - 4xy + 10x & 4x - 2x^2 \end{pmatrix}.$$

Pro bod $(0, 0)$ dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}$, $D_2 = -100 < 0$, funkce f v tomto bodě nemá lokální extrém, jde o sedlový bod.

Pro bod $(2,0)$ dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$, $D_2 = -100 < 0$, funkce f v tomto bodě nemá lokální extrém, jde o sedlový bod.
Pro bod $(0,5)$ dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$, $D_2 = -100 < 0$, funkce f v tomto bodě nemá lokální extrém, jde o sedlový bod.
Pro bod $(2,5)$ dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}$, $D_2 = -100 < 0$, funkce f v tomto bodě nemá lokální extrém, jde také o sedlový bod.
Pro bod $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 12,5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D_2 = 25 > 0$, funkce f v tomto bodě tedy má lokální extrém a protože $D_1 = 12,5 > 0$, jde o ostré lokální minimum.

Příklad 6

$$f(x,y) = 1 - (x^2 + 2y - 4)^2$$

Řešení:
Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4x^3 - 8xy + 16x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -4x^2 - 8y + 16$$

opět položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic

$$-4x^3 - 8xy + 16x = 0, \qquad -4x^2 - 8y + 16 = 0.$$

Druhou rovnici vydělíme -4, dostaneme y ve tvaru paraboly $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$, to dosadíme do první rovnice, která vyjde $0 = 0$, funkce má tedy nekonečně mnoho stacionárních bodů ležících právě na této parabole.

Nyní spočítáme derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12x^2 - 8y + 16, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -8, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -8x,$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -12x^2 - 8y + 16 & -8x \\ -8x & -8 \end{pmatrix}.$$

Rovnici paraboly, tedy $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ dosadíme do druhých parciálních derivací a dostaneme tak matici

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -8x^2 & -8x \\ -8x & -8 \end{pmatrix},$$

$D_2 = 0$, tímto způsobem tedy nelze o existenci rozhodnout, pomůže nám definice lokálního extrému. Z tvaru funkce je zřejmé, že její největší funkční hodnota je

1, tomu odpovídá rovnice $x^2 + 2y - 4 = 0$. Do této rovnice dosadíme parabolu $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$, vyjde nám $0 = 0$, což znamená, že funkce své největší funkční hodnoty nabývá právě ve stacionárních bodech, ty proto tvoří její neostré lokální maximum.

Příklad 7

$$f(x, y) = 4xy + 6x^2 - 8y^3 + 5$$

Řešení:
Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4y + 12x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 24y$$

položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic

$$4y + 12x = 0, \qquad 4x - 24y = 0.$$

Z první vidíme, že $y = -3x$, to dosadíme do druhé, po vypočtení získáváme souřadnice jediného stacionárního bodu a to $(0, 0)$.

Nyní spočítáme derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -24,$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & -24 \end{pmatrix}.$$

Determinant $D_2 = -304 < 0$, funkce f tedy ve stacionárním bodě $(0, 0)$ nemá lokální extrém, tento bod je sedlový.

Příklad 8

$$f(x, y) = e^{3x}(y^2 - 2xy + 3x^2)$$

Řešení:
Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{3x}(9x^2 + 6x - 6xy + 3y^2 - 2y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{3x}(2y - 2x)$$

položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic

$$e^{3x}(9x^2 + 6x - 6xy + 3y^2 - 2y) = 0, \qquad e^{3x}(2y - 2x) = 0.$$

Jelikož e^{3x} nikdy nebude rovno nule, můžeme tento systém rovnic převést na tvar

$$9x^2 + 6x - 6xy + 3y^2 - 2y = 0, \qquad 2y - 2x = 0.$$

Z druhé rovnice je zřejmé, že $x = y$, to dosadíme do rovnice první, po jejím vypočtení získáme souřadnice dvou stacionárních bodu $(0, 0)$, $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Nyní spočítáme derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{3x}(27x^2 + 36x - 18xy + 9y^2 - 12y + 6),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^{3x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{3x}(6y - 6x - 2),$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} e^{3x}(9y^2 - 18xy + 27x^2 - 12y + 36x + 6) & e^{3x}(6y - 6x - 2) \\ e^{3x}(6y - 6x - 2) & 2e^{3x} \end{pmatrix}.$$

Pro bod $(0, 0)$ dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $D_2 = 8 > 0$, funkce f má tedy v tomto bodě lokální extrém a protože $D_1 = 6 > 0$, je to ostré lokální minimum.

Pro bod $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{e^2} & -\frac{2}{e^2} \\ -\frac{2}{e^2} & \frac{2}{e^2} \end{pmatrix}$, $e^2 \cdot D_2 = -8$, z toho plyne, že $D_2 = -\frac{8}{e^2} < 0$, funkce f tedy v tomto bodě extrém nemá, jde o sedlový bod.

Příklad 9

$$f(x, y) = (2x + 2y)e^{-x^2 - y^2}$$

Řešení:

Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x^2 - y^2}(2 - 4x^2 - 4xy), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x^2 - y^2}(2 - 4y^2 - 4xy)$$

položíme rovny nule. Výraz $e^{-x^2-y^2}$ bude vždy kladný pro libovolný bod definičního oboru, stačí proto, když bude platit systém rovnic

$$(2-4x^2-4xy)=0, \quad (2-4y^2-4xy)=0.$$

Tyto rovnice od sebe odečteme a zjistíme tak, že $x^2=y^2$, tedy $x=\pm y$.
Po dosazení $x=y$ do první rovnice dostáváme $y_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$, tedy souřadnice prvních dvou stacionárních bodů jsou $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.
Po dosazení $x=-y$ do první rovnice dostáváme nerovnost $2\neq 0$, jiné stacionární body tedy neexistují.

Nyní spočítáme derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{-x^2-y^2}(8x^3+8x^2y-12x-4y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-x^2-y^2}(8y^3+8xy^2-4x-12y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=e^{-x^2-y^2}(8x^2y+8xy^2-4x-4y),$$

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix} e^{-x^2-y^2}(8x^3+8x^2y-12x-4y) & e^{-x^2-y^2}(8x^2y+8xy^2-4x-4y) \\ e^{-x^2-y^2}(8x^2y+8xy^2-4x-4y) & e^{-x^2-y^2}(8y^3+8xy^2-4x-12y) \end{pmatrix}.$$

Pro bod $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ dostáváme matici $\mathbf{H}=\begin{pmatrix} -6e^{-\frac{1}{2}} & -2e^{-\frac{1}{2}} \\ -2e^{-\frac{1}{2}} & -6e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$, $D_2=32e^{-\frac{1}{2}}>0$, funkce f má tedy v tomto bodě lokální extrém a protože $D_1=-6e^{-\frac{1}{2}}<0$, je to ostré lokální maximum.
Pro bod $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ dostáváme matici $\mathbf{H}=\begin{pmatrix} 6e^{-\frac{1}{2}} & 2e^{-\frac{1}{2}} \\ 2e^{-\frac{1}{2}} & 6e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$, $D_2=32e^{-\frac{1}{2}}>0$, funkce f má tedy v tomto bodě lokální extrém a protože $D_1=6e^{-\frac{1}{2}}>0$, je to ostré lokální minimum.

Příklad 10

$$f(x,y)=x^2-\frac{3y^2}{x}-6y$$

Řešení:
Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+\frac{3y^2}{x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{6y}{x}-6$$

položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic

$$2x + \frac{3y^2}{x^2} = 0, \qquad -\frac{6y}{x} - 6 = 0.$$

Úpravou druhé rovnice dostáváme $x = -y$, to dosadíme do rovnice první a zjistíme tak souřadnice jediného stacionárního bodu $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Nyní spočítáme derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - \frac{6y^2}{x^3},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{6}{x},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{6y}{x^2},$$
$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{6y^2}{x^3} & \frac{6y}{x^2} \\ \frac{6y}{x^2} & -\frac{6}{x} \end{pmatrix}.$$

Pro bod $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $D_2 = 10 > 0$, funkce f tedy v tomto bodě má extrém a protože $D_1 = 6 > 0$, je to ostré lokální minimum.

2.3 Vázané extrémy

Další rozsáhlejší kapitolou, jejíž příklady budou trochu náročnější na výpočet, jsou tzv. *vázané lokální extrémy funkcí dvou proměnných.* Tyto extrémy se liší od lokálních tím, že jejich funkční předpis je na množině M vázaný nějakou zadanou podmínkou. Nyní uvedeme přesnou definici.

Definice 8 Nechť je dána funkce $f(x, y)$ na množině M bodů prostoru $\mathbb{R}^2$. Nechť N je část množiny M a je to množina takových bodů z M, jejichž souřadnice vyhovují rovnici $g(x, y) = 0$. Naší úlohou je lokálně najít extrémní hodnoty funkce $f(x, y)$ na množině N. Těmto lokálním extrémům říkáme *vázané lokální extrémy* funkce $f(x, y)$. Podmínku $g(x, y) = 0$, která určuje množinu N, nazýváme *vazbou.*

[3]

Geometrická interpretace vázaného extrému:

Máme funkci $f(x, y)$ definovanou na nějaké množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Na této množině je pomocí rovnice $g(x, y) = 0$ vyznačená určitá množina bodů (nějaká křivka). My chceme najít lokální extrémy funkce $f(x, y)$ v bodech ležících právě na této křivce.

Nyní si ukážeme, jak je možné postupovat při hledání vázaných lokálních extrémů na množině. Rozhodujeme se mezi použitím dvou postupů, a to podle toho, jakým způsobem máme zadanou podmínku $g(x, y) = 0$.

Postupy při hledání vázaných extrémů funkce dvou proměnných:

Předpokládáme, že funkce $f(x, y)$ a $g(x, y) = 0$ jsou obě diferencovatelné v bodech, které budeme vyšetřovat. Podmínka $g(x, y) = 0$ nám vymezuje proměnné x a y a závislost mezi nimi. Pokud zvolíme za $x = x_0$, za y už bereme jen hodnoty, které vyhovují rovnici $g(x_0, y) = 0$.

1) Jestliže jakémukoli x (popř. y) rovnice $g(x, y) = 0$ přidělí pouze jedno y (popř. x), pak je rovnicí $g(x, y) = 0$ určena funkce $y = \varphi(x)$ (popř. $x = \psi(y)$). Pokud je pro nás tato funkce známá, lehce najdeme vyjádření pro parciální funkci určenou funkcí $f(x, y)$ na množině N a tím bude funkce $F(x) = f(x, \varphi(x))$ (popř. $F(y) = f(\psi(y), y)$). Tím dostáváme funkci jedné proměnné, jejíž nalezení extrémů je velmi jednoduché.

2) Jestliže vazbou $g(x, y) = 0$ není určena funkce $y = \varphi(x)$ (popř. $x = \psi(y)$), je třeba použít tzv. *Lagrangeovy metody neurčitých koeficientů* opírající se o dvě následující pomocné věty:

Věta 5 (První lemma) *Nechť* $X = (x_0, y_0)$ *je bod, ve kterém nastává lokální extrém funkce* $z = f(x, y)$ *vázaný podmínkou* $g(x, y) = 0$. *Nechť jsou dále splněny tyto dvě podmínky:*

a) *Platí vztah* $|g'_x(X)| + |g'_y(X)| > 0$.

b) *Na okolí* $\mathcal{U}(X)$ *jsou obě funkce* $f(x, y)$, $g(x, y)$ *spojitě diferencovatelné.*

Pak existuje číslo λ (zvané *Lagrangeův multiplikátor*), *které spolu s čísly* x_0, y_0 *vyhovuje soustavě rovnic*

$$\begin{aligned} f'_x + \lambda g'_x &= 0, \\ f'_y + \lambda g'_y &= 0, \\ g(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

[4]

Levé strany prvních dvou rovnic v uvedené soustavě dostaneme jako parciální derivace podle proměnných x a y funkce

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y),$$

což je *Lagrangeova funkce.*

Poznámka 7 Z **věty 5** je zřejmé, že bod $X = (x_0, y_0)$ podezřelý z vázaného extrému je třeba hledat mezi body vyhovujícími soustavě rovnic z prvního lemmatu (stacionárními body), ale také mezi body, které vyhovují rovnici $g(x, y) = 0$, i když neplatí některá z podmínek z prvního lemmatu.

Věta 6 *Nechť čísla* x_0, y_0, λ_0 *představují řešení soustavy rovnic z prvního lemmatu. Má-li Lagrangeova funkce*

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

v bodě $X = (x_0, y_0)$ *volný extrém při uvedeném čísle* λ_0, *pak funkce* $z = f(x, y)$ *má v bodě* X *extrém vázaný podmínkou* $g(x, y) = 0$.

[4]

Poznámka 8 Ne v každém bodě, v němž má funkce $z = f(x, y)$ extrém vázaný podmínkou $g(x, y) = 0$, má funkce $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ volný extrém, proto nám *Lagrangeova metoda neurčitých koeficientů* nezaručuje nalezení všech vázaných extrémů. V případě nenalezení lokálního extrému Lagrangeovy funkce nám pomůže definice vázaného extrému, popř. druhý diferenciál a vazba nebo následující věta.

Věta 7 *Buď $X = (x_0, y_0)$ stacionární bod funkce $L(x, y, \lambda)$, vyhovující soustavě rovnic z prvního lemmatu. Předpokládejme, že funkce $f(x, y)$, $g(x, y)$ mají spojité parciální derivace 2. řádu. Označme*

$$\mathbf{D_L(X)} = - \begin{vmatrix} L''_{xx}(X) & L''_{xy}(X) & g'_x(X) \\ L''_{yx}(X) & L''_{yy}(X) & g'_y(X) \\ g'_x(X) & g'_y(X) & 0 \end{vmatrix}.$$

Pak platí:

a) *Je-li $D_L(X) > 0$, má funkce $f(x, y)$ v bodě X vázané lokální minimum.*

b) *Je-li $D_L(X) < 0$, má funkce $f(x, y)$ v bodě X vázané lokální maximum.*

[6]

2.3.1 Vázané extrémy — příklady

Najděte lokální extrémy funkce f vzhledem k množině M.

Metoda přímého dosazení

Příklad 11

$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2; \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y + 4 = 0\right\}$$

Řešení:

Ze zadání množiny vidíme, že např. x lze vyjádřit pomocí y jako

$$x = 2y - 4,$$

to dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(y) = f(y, \psi(y)) = 11y^2 - 32y + 32.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'_y = 22y - 32 = 0.$$

Z této rovnice je zřejmé, že $y = \frac{16}{11}$, to dosadíme do vazební podmínky a získáváme $x = -\frac{12}{11}$. Souřadnice stacionárního bodu jsou tedy $\left(\frac{16}{11}, -\frac{12}{11}\right)$.

Nyní vytvoříme druhou derivaci. Vidíme, že $F''_{yy} = 22 > 0$, to znamená, že funkce $F(y)$ má v tomto bodě ostré lokální minimum a tedy funkce $f(x,y)$ má v bodě $\left(\frac{16}{11}, -\frac{12}{11}\right)$ ostré vázané lokální minimum vzhledem k množině M.

Příklad 12

$$f(x,y) = 2xy + 3x - 4y^2 + 1; \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 6\right\}$$

Řešení:

Ze zadání množiny vidíme, že např. y lze vyjádřit pomocí x jako

$$y = 6 - 2x,$$

to dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = -20x^2 + 111x - 143.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'_x = -40x + 111 = 0.$$

Z této rovnice je zřejmé, že $x = \frac{111}{40}$, to dosadíme do vazební podmínky a získáváme $y = \frac{9}{20}$. Souřadnice stacionárního bodu jsou tedy $\left(\frac{111}{40}, \frac{9}{20}\right)$.

Nyní vytvoříme druhou derivaci. Vidíme, že $F''_{xx} = -40 < 0$, to znamená, že funkce $F(x)$ má v tomto bodě ostré lokální maximum a tedy funkce $f(x, y)$ má v bodě $\left(\frac{111}{40}, \frac{9}{20}\right)$ ostré vázané lokální maximum vzhledem k množině M.

Příklad 13

$$f(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}; \qquad M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x - y = 6 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0\right\}$$

Řešení:
Ze zadání množiny vidíme, že např. y lze vyjádřit pomocí x jako

$$y = 4x - 6,$$

to dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = \frac{1}{x} - \frac{1}{4x - 6}.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'_x = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x^2 - 12x + 9} = 0.$$

Po vyřešení této rovnice získáváme $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, to dosadíme do vazební podmínky a tedy stacionární body jsou $(3, 6)$ a $(1, -2)$.

Nyní vytvoříme druhou derivaci

$$F''_{xx} = \frac{2}{x^3} + \frac{12 - 8x}{(4x^2 - 12x + 9)^2}.$$

Pro bod $(3, 6)$ dostaneme $F''_{xx} = -\frac{2}{27} < 0$, z čehož plyne, že funkce $F(x)$ má zde ostré lokální maximum, tedy funkce $f(x, y)$ má zde ostré vázané lokální maximum vzhledem k množině M.
Pro bod $(1, -2)$ dostaneme $F''_{xx} = 6 > 0$, z čehož plyne, že funkce $F(x)$ má zde ostré lokální minimum, tedy funkce $f(x, y)$ má zde ostré vázané lokální minimum vzhledem k množině M.

Příklad 14

$$f(x,y) = 2y - 9x + 3; \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^{2x} - x\right\}$$

Řešení:
V zadání množiny vidíme, že y je vyjádřeno přímo v podmínce a to jako $y = e^{2x} - x$, to dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 2e^{2x} - 11x + 3.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'_x = 4e^{2x} - 11 = 0 \qquad \longrightarrow \qquad e^{2x} = \frac{11}{4}$$

Po vyřešení této rovnice získáváme $x = \frac{\ln \frac{11}{4}}{2}$, to dosadíme do vazební podmínky a tedy stacionární bod má souřadnice

$$\left(\frac{\ln \frac{11}{4}}{2}, \frac{11 - 2\ln \frac{11}{4}}{4}\right).$$

Nyní vytvoříme druhou derivaci

$$F''_{xx} = 8e^{2x}.$$

Pro bod $\left(\frac{\ln \frac{11}{4}}{2}, \frac{11-2\ln \frac{11}{4}}{4}\right)$ dostaneme $F''_{xx} = 22 > 0$, z čehož plyne, že funkce $F(x)$ má zde ostré lokální minimum, tedy funkce $f(x,y)$ má zde ostré vázané lokální minimum vzhledem k množině M.

Příklad 15

$$f(x,y) = 4x - 3y; \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3 + 1\right\}$$

Řešení:
V podmínce je vyjádřeno, že $y = x^3 + 1$, to dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 4x - 3x^3 - 3.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'_x = 4 - 9x^2 = 0.$$

Po vyřešení této rovnice získáváme $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$, to dosadíme do vazební podmínky a tedy stacionární body jsou $\left(\frac{2}{3}, \frac{35}{27}\right)$ a $\left(-\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right)$.

Nyní vytvoříme druhou derivaci

$$F''_{xx} = -18x.$$

Pro bod $\left(\frac{2}{3}, \frac{35}{27}\right)$ dostaneme $F''_{xx} = -12 < 0$, z toho plyne, že funkce $F(x)$ má zde ostré lokální maximum, tedy funkce $f(x, y)$ má zde ostré vázané lokální maximum vzhledem k množině M.
Pro bod $\left(-\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right)$ dostaneme $F''_{xx} = 12 > 0$, z toho plyne, že funkce $F(x)$ má zde ostré lokální minimum, tedy funkce $f(x, y)$ má zde ostré vázané lokální minimum vzhledem k množině M.

Metoda Lagrangeových multiplikátorů:
Příklad 16

$$f(x, y) = 2x + 2y - 5; \qquad M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2} \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0\right\}$$

Řešení:
Sestrojíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = 2x + 2y - 5 + \lambda\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{2}\right).$$

Parciální derivace funkce $L(x, y, \lambda)$ podle proměnných x a y a vazební podmínku položíme rovny nule, dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} L'_x &= 2 - \frac{2\lambda}{x^3} = 0 \\ L'_y &= 2 - \frac{2\lambda}{y^3} = 0 \\ g(x, y) &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme $x = \sqrt[3]{\lambda}$, z druhé $y = \sqrt[3]{\lambda}$, to dosadíme do vazební podmínky, z rovnice

$$g(x, y) = \frac{1}{(\sqrt[3]{\lambda})^2} + \frac{1}{(\sqrt[3]{\lambda})^2} - \frac{1}{2} = 0$$

výpočtem dostáváme $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -8$ a po dosazení do vzorců pro x a y získáme souřadnice dvou stacionárních bodů $(2, 2)$, $(-2, -2)$.

Nyní spočítáme derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$L''_{xx} = \frac{6\lambda}{x^4}, \qquad L''_{xy} = L''_{yx} = 0, \qquad L''_{yy} = \frac{6\lambda}{y^4},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{6\lambda}{x^4} & 0 \\ 0 & \frac{6\lambda}{y^4} \end{pmatrix}.$$

Pro bod $(2,2)$ dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $D_2 = 9 > 0$, funkce L má v tomto bodě lokální extrém, tedy funkce $f(x,y)$ má v tomto bodě vázaný lokální extrém a protože $D_1 = 3 > 0$, je to ostré vázané lokální minimum vzhledem k množině M.
Pro bod $(-2,-2)$ dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $D_2 = 9 > 0$, funkce L má v tomto bodě lokální extrém, tedy funkce $f(x,y)$ má v tomto bodě vázaný lokální extrém a protože $D_1 = -3 < 0$, je to ostré vázané lokální maximum vzhledem k množině M.

Příklad 17

$$f(x,y) = 3x - \frac{y}{6} + 1; \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$

Řešení:
Sestrojíme Lagrangeovu funkci

$$L(x,y,\lambda) = 3x - \frac{y}{6} + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Parciální derivace funkce $L(x,y,\lambda)$ podle proměnných x a y a vazební podmínku položíme rovny nule, dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} L'_x &= 3 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y &= -\frac{1}{6} + 2\lambda y = 0 \\ g(x,y) &= x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic vyjádříme

$$x = -\frac{3}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{12\lambda},$$

to dosadíme do vazební podmínky, z rovnice

$$g(x,y) = \frac{9}{4\lambda^2} + \frac{1}{144\lambda^2} - 1 = 0$$

výpočtem dostáváme $\lambda_1 = \frac{5\sqrt{13}}{12}$, $\lambda_2 = -\frac{5\sqrt{13}}{12}$ a po dosazení do vzorců pro x a y získáme souřadnice dvou stacionárních bodů $\left(-\frac{18}{5\sqrt{13}}, \frac{1}{5\sqrt{13}}\right)$, $\left(\frac{18}{5\sqrt{13}}, -\frac{1}{5\sqrt{13}}\right)$.

Nyní spočítáme derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$L''_{xx} = 2\lambda, \qquad L''_{xy} = L''_{yx} = 0, \qquad L''_{yy} = 2\lambda,$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Pro bod $\left(-\frac{18}{5\sqrt{13}}, \frac{1}{5\sqrt{13}}\right)$ dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{13}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{5\sqrt{13}}{6} \end{pmatrix}$, $D_2 = \frac{325}{36} > 0$, funkce L má v tomto bodě lokální extrém, tedy funkce $f(x, y)$ má v tomto bodě vázaný lokální extrém a protože $D_1 = \frac{5\sqrt{13}}{6} > 0$, je to ostré vázané lokální minimum vzhledem k množině M.
Pro bod $\left(\frac{18}{5\sqrt{13}}, -\frac{1}{5\sqrt{13}}\right)$ dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -\frac{5\sqrt{13}}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{5\sqrt{13}}{6} \end{pmatrix}$, $D_2 = \frac{325}{36} > 0$, funkce L má v tomto bodě lokální extrém, tedy funkce $f(x, y)$ má v tomto bodě vázaný lokální extrém a protože $D_1 = -\frac{5\sqrt{13}}{6} < 0$, je to ostré vázané lokální maximum vzhledem k množině M.

Příklad 18

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 8y; \qquad M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 68\right\}$$

Řešení:
Sestrojíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 2x + 8y + \lambda(x^2 + y^2 - 68).$$

Parciální derivace funkce $L(x, y, \lambda)$ podle proměnných x a y a vazební podmínku položíme rovny nule, dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} L'_x &= 2x - 2 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y &= 2y + 8 + 2\lambda y = 0 \\ g(x, y) &= x^2 + y^2 - 68 = 0 \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic vyjádříme

$$x = \frac{1}{1 + \lambda}, \quad y = -\frac{4}{1 + \lambda},$$

to dosadíme do vazební podmínky, z rovnice

$$g(x,y) = \frac{1}{(1+\lambda)^2} + \frac{16}{(1+\lambda)^2} - 68 = 0$$

výpočtem dostáváme $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ a po dosazení do vzorců pro x a y získáme souřadnice dvou stacionárních bodů $(-2, 8)$, $(2, -8)$.

Nyní spočítáme derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$L''_{xx} = 2 + 2\lambda, \qquad L''_{xy} = L''_{yx} = 0, \qquad L''_{yy} = 2 + 2\lambda,$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2+2\lambda & 0 \\ 0 & 2+2\lambda \end{pmatrix}.$$

Pro bod $(-2, 8)$ dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $D_2 = 1 > 0$, funkce L má v tomto bodě lokální extrém, funkce $f(x,y)$ má zde tedy vázaný lokální extrém a protože $D_1 = -1 < 0$, je to ostré vázané lokální maximum vzhledem k množině M.

Pro bod $(2, -8)$ dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D_2 = 1 > 0$, funkce L má v tomto bodě lokální extrém, funkce $f(x,y)$ má zde tedy vázaný lokální extrém a protože $D_1 = 1 > 0$, je to ostré vázané lokální minimum vzhledem k množině M.

Příklad 19

$$f(x,y) = \frac{1}{2x} + \frac{2}{y}; \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4} \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0\right\}$$

Řešení:
Sestrojíme Lagrangeovu funkci

$$L(x,y,\lambda) = \frac{1}{2x} + \frac{2}{y} + \lambda\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{4}\right).$$

Parciální derivace funkce $L(x,y,\lambda)$ podle proměnných x a y a vazební podmínku položíme rovny nule, dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} L'_x &= -\frac{1}{2x^2} - \frac{2\lambda}{x^3} = 0 \\ L'_y &= -\frac{2}{y^2} - \frac{2\lambda}{y^3} = 0 \\ g(x,y) &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{4} = 0 \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic vyjádříme

$$x = -4\lambda, \quad y = -\lambda,$$

to dosadíme do vazební podmínky, z rovnice

$$g(x,y) = \frac{1}{16\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{4} = 0$$

výpočtem dostáváme $\lambda_1 = \frac{\sqrt{17}}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{17}}{2}$ a po dosazení do vzorců pro x a y získáme souřadnice dvou stacionárních bodů $\left(-2\sqrt{17}, -\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(2\sqrt{17}, \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$.

Nyní spočítáme derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$L''_{xx} = \frac{1}{x^3} + \frac{6\lambda}{x^4}, \qquad L''_{xy} = L''_{yx} = 0, \qquad L''_{yy} = \frac{1}{y^3} + \frac{6\lambda}{y^4},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^3} + \frac{6\lambda}{x^4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^3} + \frac{6\lambda}{y^4} \end{pmatrix}.$$

Pro bod $\left(-2\sqrt{17}, -\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$ dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{17}}{(-2\sqrt{17})^4} & 0 \\ 0 & \frac{40\sqrt{17}}{289} \end{pmatrix}$, $D_2 =$ $= 0,0005 > 0$, funkce L má v tomto bodě lokální extrém, tedy funkce $f(x,y)$ má zde vázaný lokální extrém a protože $D_1 = \frac{\sqrt{17}}{(-2\sqrt{17})^4} > 0$, je to ostré vázané lokální minimum vzhledem k množině M.
Pro bod $\left(2\sqrt{17}, \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$ dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{17}}{(2\sqrt{17})^4} & 0 \\ 0 & -\frac{40\sqrt{17}}{289} \end{pmatrix}$, $D_2 =$ $= 0,0005 > 0$, funkce L má v tomto bodě lokální extrém, tedy funkce $f(x,y)$ má zde vázaný lokální extrém a protože $D_1 = -\frac{\sqrt{17}}{(2\sqrt{17})^4} < 0$, je to ostré vázané lokální maximum vzhledem k množině M.

Příklad 20

$$f(x,y) = 2x^2 - 4y^2; \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2x - 2y^2 - 4y = 0\right\}$$

Řešení:
Sestrojíme Lagrangeovu funkci

$$L(x,y,\lambda) = 2x^2 - 4y^2 + \lambda(x^2 + 2x - 2y^2 - 4y).$$

Parciální derivace funkce $L(x, y, \lambda)$ podle proměnných x a y a vazební podmínku položíme rovny nule, dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} L'_x &= 4x + 2\lambda x + 2\lambda = 0 \\ L'_y &= -8y - 4\lambda y - 4\lambda = 0 \\ g(x, y) &= x^2 + 2x - 2y^2 - 4y = 0 \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic vyjádříme

$$x = -\frac{\lambda}{2 + \lambda}, \quad y = -\frac{\lambda}{2 + \lambda},$$

to dosadíme do vazební podmínky, z rovnice

$$g(x, y) = \frac{\lambda^2}{(2 + \lambda)^2} - \frac{2\lambda}{2 + \lambda} - \frac{2\lambda^2}{(2 + \lambda)^2} + \frac{4\lambda}{2 + \lambda} = 0$$

výpočtem dostáváme $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$ a po dosazení do vzorců pro x a y získáme souřadnice dvou stacionárních bodů $(0, 0)$, $(-2, -2)$.

Nyní spočítáme derivace druhého řádu podle obou proměnných a vytvoříme Hessovu matici:

$$L''_{xx} = 4 + 2\lambda, \qquad L''_{xy} = L''_{yx} = 0, \qquad L''_{yy} = -8 - 4\lambda,$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 4 + 2\lambda & 0 \\ 0 & -8 - 4\lambda \end{pmatrix}.$$

Pro bod $(0, 0)$ dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, $D_2 = -32 < 0$, funkce L tedy v tomto bodě nemá lokální extrém, to ovšem neznamená, že funkce $f(x, y)$ zde nemá extrém vázaný na množině M. Najdeme ho pomocí **věty 7** z teorie vázaných extrémů.

Před sestavením potřebného determinantu spočítáme parciální derivace g'_x a g'_y v bodě $(0, 0)$.

$$g'_x = 2x + 2 \longrightarrow g'_x(0, 0) = 2, \qquad g'_y = -4y - 4 \longrightarrow g'_y(0, 0) = -4.$$

Nyní můžeme sestavit determinant

$$\mathbf{D_L(X)} = - \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -(-32) = 32 > 0.$$

Jelikož $D_L(X) > 0$, funkce $f(x, y)$ má v tomto bodě vázané lokální minimum k množině M.

Pro bod $(-2,-2)$ dostáváme matici $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, $D_2 = -32 < 0$, funkce L tedy v tomto bodě také nemá lokální extrém. Zda má zde funkce $f(x,y)$ extrém vázaný určíme opět podle **věty 7**.

Před sestavením potřebného determinantu spočítáme parciální derivace g'_x a g'_y v bodě $(-2,-2)$.

$$g'_x = 2x + 2 \longrightarrow g'_x(-2,-2) = -2, \qquad g'_y = -4y - 4 \longrightarrow g'_y(-2,-2) = 4.$$

Nyní můžeme sestavit determinant

$$\mathbf{D_L(X)} = -\begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -(32) = -32 < 0.$$

Jelikož $D_L(X) < 0$, funkce $f(x,y)$ má v tomto bodě vázané lokální maximum k množině M.

2.4 Globální (absolutní) extrémy

Tyto extrémy jsou definovány podobně jako *lokální extrémy*, s tím rozdílem, že porovnávání funkčních hodnot dané funkce s hodnotou této funkce v bodě, který je podezřelý z extrému, neprovádíme pouze na vhodných dostatečně velkých okolích tohoto bodu, ale na celé množině, na níž *globální extrémy* hledáme.

Definice 9 Nechť je funkce $f(x, y)$ definována v prostoru $\mathbb{R}^2$ a nechť $M \subset \mathbb{R}^2$.

Řekněme, že funkce $f(x, y)$ má v bodě $X = (x_0, y_0) \in M$

- *globální neboli absolutní minimum*, jestliže pro všechny body $(x, y) \in M$ platí $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$,
- *ostré globální neboli absolutní minimum*, jestliže pro všechny body $(x, y) \in$ $\in M$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ platí $f(x, y) > f(x_0, y_0)$,
- *globální neboli absolutní maximum*, jestliže pro všechny body $(x, y) \in M$ platí $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$,
- *ostré globální neboli absolutní maximum*, jestliže pro všechny body $(x, y) \in$ $\in M$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ platí $f(x, y) < f(x_0, y_0)$.

[5]

Bolzanova - Weierstrassova věta nám říká, že je-li funkce $f(x)$ spojitá na nějakém uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak je na něm ohraničená a to shora svou nejvyšší hodnotou a zdola svou nejnižší hodnotou, nabývá tedy extrémů.

Tato věta platí i pro funkci dvou proměnných $f(x, y)$ definovanou na neprázdné kompaktní (uzavřené omezené) množině M. Nejvyšší a nejnižší hodnoty nazýváme *globální maxima* a *globální minima*.

Funkce $f(x, y)$ může těchto extrémních hodnot nabývat v bodech:

- které náleží hranici množiny M
- které náleží vnitřku množiny M (pokud má zde funkce globální extrém, jde zároveň i o extrém lokální, opačně to ovšem neplatí)

Poznámka 9 Pokud množina M není uzavřená, funkce na ní může, ale nemusí *globálních extremálních hodnot* nabývat, jejich nalezení je ovšem velmi obtížné a my se jím v této práci zabývat nebudeme.

Postup při hledání globálních (absolutních) extrémů funkce dvou proměnných:

1) Ověříme, že množina M je neprázdná a kompaktní a funkce f je na ní spojitá a tím pádem existují globální extrémy funkce f.

2) Určíme všechny možné body podezřelé z existence globálního extrému a to nejdříve z vnitřku množiny M a následně z hranice množiny M.

3) Z bodů uvnitř M jsou podezřelé ty, v nichž by funkce f mohla mít lokální extrémy. Pokud má zde funkce spojité parciální derivace až do druhého řádu včetně, podezřelými body jsou pouze body stacionární (ležící uvnitř M).

4) Z hraničních bodů množiny M jsou podezřelé ty, v nichž by funkce mohla mít extrémy vázané vzhledem k hranici množiny M.

5) Vypočteme funkční hodnoty funkce f ve všech těchto podezřelých bodech a podle toho, která z nich je největší (resp. nejmenší) rozhodujeme, který bod je globální maximum (resp. minimum).

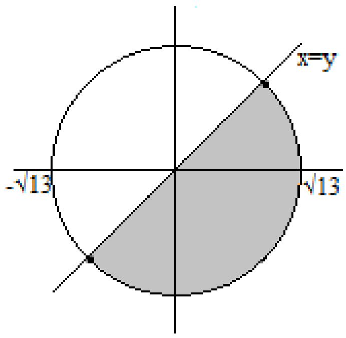
2.4.1 Globální extrémy — příklady

Najděte globální extrémy funkce f na množině M.

Příklad 21

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y; \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 13 \wedge x - y \geq 0\right\}$$

Řešení:
Sestrojíme množinu M, z jejího tvaru vidíme, že je neprázdná a kompaktní, $f(x,y)$ je na ní spojitá, tudíž zde můžeme najít globální extrémy.



Obrázek 2.2: množina $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 13 \wedge x - y \geq 0\}$

Podezřelé body:

1. *Uvnitř množiny* M:
   Parciální derivace $f'_x = 2x - 6$, $f'_y = 2y - 4$ položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic
   $$2x - 6 = 0, \qquad 2y - 4 = 0.$$
   Řešením těchto rovnic je bod $(3,2)$, který ovšem neleží uvnitř, nýbrž na hranici množiny M, prozatím ho tedy neuvažujeme.

2. *Na hranici množiny* M:

   a) hranice $x^2 + y^2 - 13 = 0$ - metoda Lagrangeových multiplikátorů:
   Sestrojíme Lagrangeovu funkci
   $$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 6x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 13).$$
   Parciální derivace funkce $L(x,y,\lambda)$ podle proměnných x a y a vazební podmínku položíme rovny nule, dostáváme tak soustavu rovnic
   $$\begin{aligned} L'_x &= 2x - 6 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y &= 2y - 4 + 2\lambda y = 0 \\ g(x,y) &= x^2 + y^2 - 13 = 0 \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic vyjádříme

$$x = \frac{3}{1+\lambda}, \quad y = \frac{2}{1+\lambda},$$

to dosadíme do vazební podmínky, z rovnice

$$g(x,y) = \frac{9}{(1+\lambda)^2} + \frac{4}{(1+\lambda)^2} - 13 = 0$$

výpočtem dostáváme $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$ a po dosazení do vzorců pro x a y získáme souřadnice dvou bodů: $(3,2)$ — tento bod jsme již jednou nalezli, nyní ho tedy bereme jako podezřelý a $(-3,-2)$ — ten neleží v M a není tedy podezřelý.

b) *Tam, kde se kružnice $x^2 + y^2 = 13$ střetává s přímkou $x = y$:*
Do rovnice $x^2 + y^2 = 13$ dosadíme $x = y$, dostáváme rovnici

$$2x^2 = 13 \quad \longrightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{13}{2}} = y_{1,2}.$$

Další body podezřelé z globálního extrému jsou tedy $\left(-\sqrt{\frac{13}{2}}, -\sqrt{\frac{13}{2}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{13}{2}}, \sqrt{\frac{13}{2}}\right)$.

c) hranice $x = y$, kde $x \in \left(-\sqrt{\frac{13}{2}}, \sqrt{\frac{13}{2}}\right)$ - metoda přímého dosazení:
Výraz z podmínky dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 2x^2 - 10x.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'_x = 4x - 10 = 0.$$

Z této rovnice je zřejmé, že $x = \frac{5}{2} = y$, bod $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ leží v intervalu $\left(-\sqrt{\frac{13}{2}}, \sqrt{\frac{13}{2}}\right)$ a proto je to další podezřelý bod.

Funkční hodnoty podezřelých bodů:

1. $f(3,2) = -13$
2. $\left(-\sqrt{\frac{13}{2}}, -\sqrt{\frac{13}{2}}\right) = 13 + 10\sqrt{\frac{13}{2}}$
3. $\left(\sqrt{\frac{13}{2}}, \sqrt{\frac{13}{2}}\right) = 13 - 10\sqrt{\frac{13}{2}}$

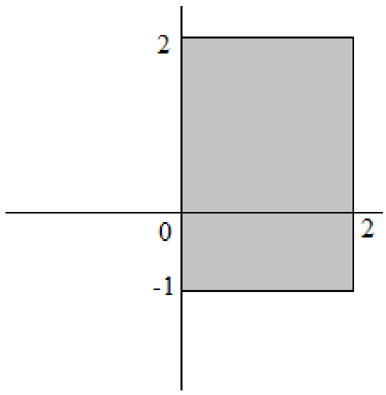
4. $f\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) = -12,5$

Z funkčních hodnot těchto bodů je zřejmé, že funkce f nabývá globálního minima v bodě $(3,2)$ a globálního maxima v bodě $\left(-\sqrt{\frac{13}{2}}, -\sqrt{\frac{13}{2}}\right)$.

Příklad 22

$$f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 4xy; \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge -1 \leq y \leq 2\right\}$$

Řešení:
Sestrojíme množinu M, z jejího tvaru vidíme, že je neprázdná a kompaktní, $f(x,y)$ je na ní spojitá, tudíž zde můžeme najít globální extrémy.



Obrázek 2.3: množina $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge -1 \leq y \leq 2\}$

Podezřelé body:

1. *Uvnitř množiny M*:
   Parciální derivace $f'_x = 6x^2 - 4y$, $f'_y = 6y^2 - 4x$ položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic

   $$6x^2 - 4y = 0, \qquad 6y^2 - 4x = 0.$$

   Z druhé rovnice vidíme, že $x = \frac{3}{2}y^2$, to dosadíme do první a získáváme první dva body podezřelé z globálního extrému o souřadnicích $(0,0)$ (ten neleží uvnitř, ale na hranici M, prozatím ho neuvažujeme) a $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

2. *Na hranici množiny M*:

a) hranice $x = 0$, kdy $y \in (-1, 2)$ - metoda přímého dosazení:
Výraz z podmínky dosadíme do tvaru $f(x, y)$, dostaneme tak funkci jedné proměnné
$$F(y) = f(y, \psi(y)) = 2y^3.$$
Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule
$$F_y' = 6y^2 = 0.$$
Dostáváme bod o souřadnicích $(0, 0)$, který jsme již jednou našli. Protože $y = 0$ leží v intervalu $(-1, 2)$, je tento bod další podezřelý.

b) hranice $x = 2$, kdy $y \in (-1, 2)$ - metoda přímého dosazení:
Výraz z podmínky dosadíme do tvaru $f(x, y)$, dostaneme tak funkci jedné proměnné
$$F(y) = f(y, \psi(y)) = 2y^3 - 8y + 16.$$
Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule
$$F_y' = 6y^2 - 8 = 0,$$
dostáváme dvojici řešení pro y a to $y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{8}{6}}$. Podezřelý je ale pouze bod $\left(2, \sqrt{\frac{8}{6}}\right)$, protože $y_2 = -\sqrt{\frac{8}{6}}$ neleží v intervalu $(-1, 2)$ a tedy bod $\left(2, -\sqrt{\frac{8}{6}}\right)$ nepatří do M.

c) hranice $y = -1$, kdy $x \in (0, 2)$ - metoda přímého dosazení:
Výraz z podmínky dosadíme do tvaru $f(x, y)$, dostaneme tak funkci jedné proměnné
$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 2x^3 + 4x - 2.$$
Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule
$$F_x' = 6x^2 + 4 = 0,$$
tato rovnice nemá řešení, zde podezřelý bod nenajdeme.

d) hranice $y = 2$, kdy $x \in (0, 2)$ - metoda přímého dosazení:
Výraz z podmínky dosadíme do tvaru $f(x, y)$, dostaneme tak funkci jedné proměnné
$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 2x^3 - 8x + 16.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'_x = 6x^2 - 8 = 0,$$

dostáváme dvojici řešení pro x a to $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{8}{6}}$. Podezřelý je ale pouze bod $\left(\sqrt{\frac{8}{6}}, 2\right)$, protože $x_2 = -\sqrt{\frac{8}{6}}$ neleží v intervalu $(0, 2)$ a tedy bod $\left(-\sqrt{\frac{8}{6}}, 2\right)$ nepatří do M.

3. *Vrcholy obdélníku, který ohraničuje množinu* M:

$$(0, 2), \quad (2, 2), \quad (0, -1), \quad (2, -1).$$

Funkční hodnoty podezřelých bodů:

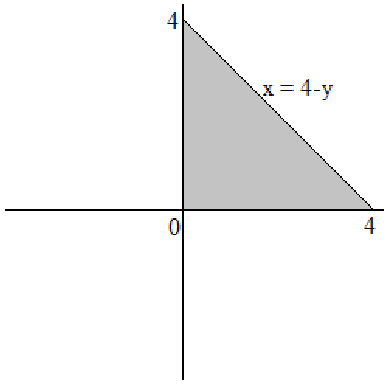
1. $f(0, 0) = 0$
2. $f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = -\frac{16}{27}$
3. $\left(2, \sqrt{\frac{8}{6}}\right) = 16 - \frac{16}{3}\sqrt{\frac{8}{6}}$
4. $\left(\sqrt{\frac{8}{6}}, 2\right) = 16 - \frac{16}{3}\sqrt{\frac{8}{6}}$
5. $(0, 2) = 16$
6. $(2, 2) = 16$
7. $(0, -1) = -2$
8. $(2, -1) = 22$

Z funkčních hodnot těchto bodů je zřejmé, že funkce f nabývá globálního minima v bodě $(0, -1)$ a globálního maxima v bodě $(2, -1)$.

Příklad 23

$f(x,y) = 2x^2 - y^2 + 4xy - 6y - 1; \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 4\}$

Řešení:
Sestrojíme množinu M, z jejího tvaru vidíme, že je neprázdná a kompaktní, $f(x,y)$ je na ní spojitá, tudíž zde můžeme najít globální extrémy.



Obrázek 2.4: množina $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 4\}$

Podezřelé body:

1. *Uvnitř množiny M:*
   Parciální derivace $f'_x = 4x + 4y$, $f'_y = -2y + 4x - 6$ položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic
   $$4x + 4y = 0, \qquad -2y + 4x - 6 = 0.$$
   Z první rovnice vidíme, že $x = -y$, to dosadíme do druhé a získáváme souřadnice prvního podezřelého bodu $(1, -1)$, který ale neleží v M, tudíž ho vyloučíme.

2. *Na hranici množiny M:*

   a) hranice $x = 0$, kdy $y \in (0, 4)$ - metoda přímého dosazení:
      Výraz z podmínky dosadíme do tvaru $f(x,y)$, dostaneme tak funkci jedné proměnné
      $$F(y) = f(y, \psi(y)) = -y^2 - 6y - 1.$$
      Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule
      $$F'_y = -2y - 6 = 0.$$
      Dostaneme bod $(0, -3)$, který ovšem neleží v M, tudíž ho vyloučíme.

b) hranice $y = 0$, kdy $x \in (0, 4)$ - metoda přímého dosazení:
Výraz z podmínky dosadíme do tvaru $f(x, y)$, dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 2y^2 - 1.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'_x = 4x = 0.$$

Dostávám souřadnice bodu $(0, 0)$, který ovšem nepatří do otevřeného intervalu $(0, 0)$ a v tuto chvíli jej tedy vyloučíme.

c) hranice $x + y - 4 = 0$, kdy $y \in (0, 4)$ - metoda přímého dosazení:
Z podmínky vyjádříme např. $x = 4 - y$, to dosadíme do tvaru $f(x, y)$, dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(y) = f(y, \psi(y)) = -3y^2 - 6y + 31.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'_y = -6y - 6 = 0.$$

Výpočtem dostáváme souřadnice dalšího bodu $(-1, 5)$, $y = 5$ ale neleží v intervalu $(0, 4)$, tento bod tedy neleží v M.

3. *Vrcholy trojúhelníku, který tvoří hranici množiny* M:

$$(0, 0), \quad (0, 4), \quad (4, 0).$$

Funkční hodnoty podezřelých bodů:

1. $f(0, 0) = -1$

3. $f(0, 4) = -41$

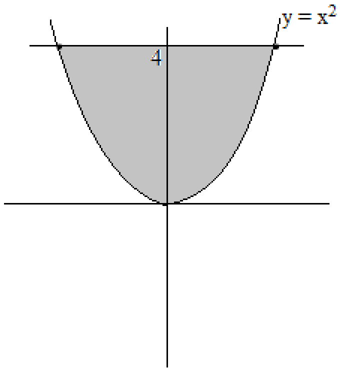
4. $f(4, 0) = 31$

Z funkčních hodnot těchto bodů je zřejmé, že funkce f nabývá globálního minima v bodě $(0, 4)$ a globálního maxima v bodě $(4, 0)$.

Příklad 24

$$f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy; \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 \wedge y \leq 4\right\}$$

Řešení:
Sestrojíme množinu M, z jejího tvaru vidíme, že je neprázdná a kompaktní, $f(x,y)$ je na ní spojitá, tudíž zde můžeme najít globální extrémy.



Obrázek 2.5: množina $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 \wedge y \leq 4\}$

Podezřelé body:

1. *Uvnitř množiny* M:
   Parciální derivace $f'_x = 6x^2 + 8x - 2y$, $f'_y = 2y - 2x$ položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic

   $$6x^2 + 8x - 2y = 0, \qquad 2y - 2x = 0.$$

   Z druhé rovnice vyjádříme, že $x = y$, to dosadíme do první a dostáváme tak souřadnice dvou bodů $(0,0)$ (ten leží na hranici množiny, pro teď ho vyhoučíme) a $(-1,-1)$, který ovšem vůbec nepatří do M.

2. *Na hranici množiny M:*

   a) *Tam, kde platí $y = x^2$ a zároveň $y = 4$:*
   Do rovnice $y = x^2$ dosadíme $y = 4$, dostáváme rovnici

   $$x^2 = 4 \quad \longrightarrow \quad x_{1,2} = \pm 2.$$

   Získáme souřadnice dvou podezřelých bodů $(2, 4)$, $(-2, 4)$.

   b) hranice $y = x^2$, kdy $x \in (-2, 2)$ - metoda přímého dosazení:
   Výraz z podmínky dosadíme do funkčního předpisu funkce $f(x, y)$, dostaneme tak funkci jedné proměnné

   $$F(x) = f(x, \varphi(x)) = x^4 + 4x^2.$$

   Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

   $$F'_x = 4x^3 + 8x = 0.$$

   Z rovnice dostáváme souřadnice jednoho podezřelého bodu a to $(0, 0)$, $x = 0$ patří do intervalu $(-2, 2)$, tento bod nyní začínáme podezřívat.

   c) hranice $y = 4$, kdy $x \in (-2, 2)$ - metoda přímého dosazení:
   Výraz z podmínky dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

   $$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16.$$

   Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

   $$F'_x = 6x^2 + 8x - 8.$$

   Tato rovnice má dvě řešení a to $x_1 = \frac{2}{3}$ a $x_2 = -2$ (tento bod ovšem neleží v intervalu $(-2, 2)$), souřadnice dalšího podezřelého bodu jsou tedy $\left(\frac{2}{3}, 4\right)$.

   Funkční hodnoty podezřelých bodů:

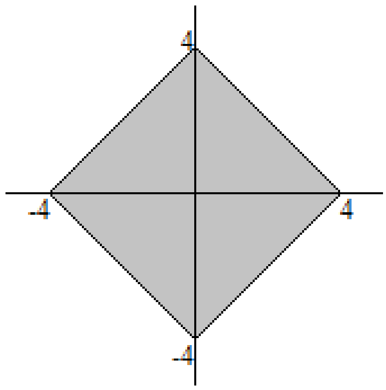
   1. $f(2, 4) = f(-2, 4) = 32$
   2. $f(0, 0) = 0$
   3. $f\left(\frac{2}{3}, 4\right) = \frac{352}{27}$

Z funkčních hodnot těchto bodů je zřejmé, že funkce f nabývá globálního minima v bodě $(0, 0)$ a globálního maxima v bodech $(-2, 4)$ a $(2, 4)$.

Příklad 25

$$f(x,y) = 2x^2 - 4xy + y^2; \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 4\right\}$$

Řešení:
Sestrojíme množinu M, z jejího tvaru vidíme, že je neprázdná a kompaktní, $f(x,y)$ je na ní spojitá, tudíž zde můžeme najít globální extrémy.



Obrázek 2.6: množina $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 4\}$

Podezřelé body:

1. *Uvnitř množiny M:*
   Parciální derivace $f'_x = 4x - 4y$, $f'_y = -4x + 2y$ položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic
   $$4x - 4y = 0, \qquad -4x + 2y = 0.$$
   Z první rovnice vyjádříme $x = y$, to dosadíme do druhé a získáme souřadnice prvního bodu $(0,0)$.

2. *Na hranici množiny M:*

   a) hranice $y = 4 - x$, kdy $x \in (0,4)$ - metoda přímého dosazení:
   Výraz z podmínky dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné
   $$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 7x^2 - 24x + 16.$$
   Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule
   $$F'_x = 14x - 24 = 0.$$
   Z této rovnice je zřejmé, že $x = \frac{12}{7}$, to vyhovuje našemu intervalu, další podezřelý bod je tedy $\left(\frac{12}{7}, \frac{16}{7}\right)$.

b) hranice $y = 4 + x$, kdy $x \in (-4, 0)$ - metoda přímého dosazení:
Výraz z podmínky dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = -x^2 - 8x + 16.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'_x = -2x - 8 = 0.$$

Z této rovnice je zřejmé, že $x = -4$, tento bod ovšem neleží v intervalu $(-4, 0)$, proto ho vyloučíme.

c) hranice $y = -4 - x$, kdy $x \in (-4, 0)$ - metoda přímého dosazení:
Výraz z podmínky dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 7x^2 + 24x + 16.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'_x = 14x + 24 = 0.$$

Z této rovnice je zřejmé, že $x = -\frac{12}{7}$, to vyhovuje našemu intervalu, další podezřelý bod je tedy $\left(-\frac{12}{7}, -\frac{16}{7}\right)$.

d) hranice $y = -4 + x$, kdy $x \in (0, 4)$ - metoda přímého dosazení:
Výraz z podmínky dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = -x^2 + 8x + 16.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'_x = -2x + 8 = 0.$$

Z této rovnice je zřejmé, že $x = 4$, tento bod ovšem neleží v intervalu $(-4, 0)$, proto ho vyloučíme.

3. *Vrcholy čtverce, který tvoří hranici množiny M:*

$$(0, -4), \quad (0, 4), \quad (-4, 0), \quad (4, 0)$$

Funkční hodnoty podezřelých bodů:

1. $f(0, 0) = 0$
2. $f\left(\frac{12}{7}, \frac{16}{7}\right) = -\frac{32}{7}$

3. $f\left(-\frac{12}{7}, -\frac{16}{7}\right) = -\frac{32}{7}$

4. $f(0,-4) = f(0,4) = 16$

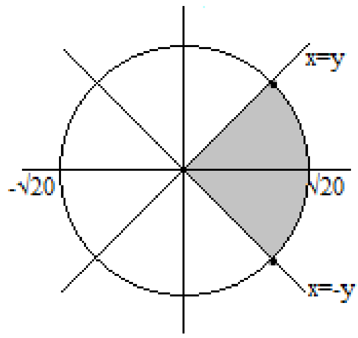
5. $f(-4,0) = f(4,0) = 32$

Z funkčních hodnot těchto bodů je zřejmé, že funkce f nabývá globálního minima v bodech $\left(\frac{12}{7}, \frac{16}{7}\right)$ a $\left(-\frac{12}{7}, -\frac{16}{7}\right)$ a globálního maxima v bodech $(-4,0)$ a $(4,0)$.

Příklad 26

$$f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y; \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq |y| \wedge x^2 + y^2 \leq 20\right\}$$

Řešení:
Sestrojíme množinu M, z jejího tvaru vidíme, že je neprázdná a kompaktní, $f(x,y)$ je na ní spojitá, tudíž zde můžeme najít globální extrémy.



Obrázek 2.7: množina $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq |y| \wedge x^2 + y^2 \leq 20\}$

Podezřelé body:

1. *Uvnitř množiny M*:
   Parciální derivace $f'_x = 2x - 2$, $f'_y = 2y - 4$ položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic
   $$2x - 2 = 0, \qquad 2y - 4 = 0.$$
   Souřadnice prvního podezřelého bodu jsou tedy $(1,2)$, tento bod ovšem vyloučíme, jelikož není v M.

2. *Na hranici množiny M:*

   a) *Vrcholy hranice množiny M:*

   1) tam, kde platí $x = |y|$ a zároveň $x^2 + y^2 - 20 = 0$ - zde dostáváme souřadnice čtyř bodů

$$(\sqrt{10}, \sqrt{10}), \quad (\sqrt{10}, -\sqrt{10}), \quad (-\sqrt{10}, -\sqrt{10}), \quad (-\sqrt{10}, \sqrt{10}).$$

   Poslední dva body vyloučíme, jelikož nepatří do M.

   2) bod $(0, 0)$

b) hranice $y = x$, kdy $x \in (0, \sqrt{10})$ - metoda přímého dosazení:
Výraz z podmínky dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 2x^2 - 6x.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'_x = 4x - 6 = 0.$$

Z této rovnice je zřejmé, že $x = \frac{3}{2}$. První podezřelý bod je tedy $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

c) hranice $x = -y$, kdy $x \in (0, -\sqrt{10})$ - metoda přímého dosazení:
Výraz z podmínky dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(y) = f(y, \psi(y)) = 2y^2 - 2y.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'_y = 4y - 2 = 0.$$

Z této rovnice je zřejmé, že $y = \frac{1}{2}$. Další bod je tedy $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ten ovšem vyloučíme, jelikož jeho souřadnice x nenáleží intervalu $x \in (0, -\sqrt{10})$.

d) hranice $x^2 + y^2 - 20 = 0$ - metoda Lagrangeových multiplikátorů:
Sestrojíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 20).$$

Parciální derivace funkce $L(x, y, \lambda)$ podle proměnných x a y a vazební podmínku položíme rovny nule, dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} L'_x &= 2x - 2 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y &= 2y - 4 + 2\lambda y = 0 \\ g(x, y) &= x^2 + y^2 - 20 = 0 \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic vyjádříme

$$x = \frac{1}{1+\lambda}, \quad y = \frac{2}{1+\lambda},$$

to dosadíme do vazební podmínky, z rovnice

$$g(x,y) = \frac{1}{(1+\lambda)^2} + \frac{4}{(1+\lambda)^2} - 20 = 0$$

výpočtem dostáváme $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ a po dosazení do vzorců pro x a y získáme souřadnice dvou bodů $(2,4)$, $(-2,-4)$, oba ale vyloučíme, jelikož neleží v M.

Funkční hodnoty podezřelých bodů:

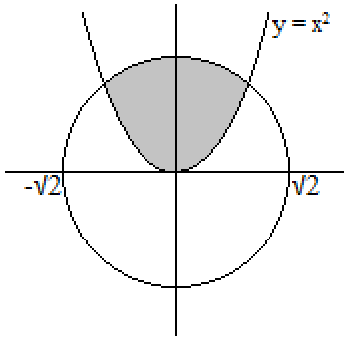
1. $f(\sqrt{10}, \sqrt{10}) = 20 - 6\sqrt{10}$
2. $f(\sqrt{10}, -\sqrt{10}) = 20 + 2\sqrt{10}$
3. $f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2}$

Z funkčních hodnot těchto bodů je zřejmé, že funkce f nabývá globálního minima v bodě $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ a globálního maxima v bodě $(\sqrt{10}, -\sqrt{10})$.

Příklad 27

$$f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 8y + 2; \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2 \wedge y \geq x^2\right\}$$

Řešení:
Sestrojíme množinu M, z jejího tvaru vidíme, že je neprázdná a kompaktní, $f(x,y)$ je na ní spojitá, tudíž zde můžeme najít globální extrémy.



Obrázek 2.8: množina $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2 \wedge y \geq x^2\}$

Podezřelé body:

1. *Uvnitř množiny M*:
   Parciální derivace $f'_x = 6x$, $f'_y = 6y - 8$ položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic
   $$6x = 0, \qquad 6y - 8 = 0.$$
   Souřadnice prvního podezřelého bodu jsou tedy $\left(0, \frac{4}{3}\right)$.

2. *Na hranici množiny M:*

   a) *Tam, kde platí $x^2 + y^2 - 2 = 0$ a zároveň $y = x^2$:*
   Do rovnice $x^2 + y^2 = 2$ dosadíme $x^2 = y$, dostáváme rovnici
   $$y^2 + y - 2 = 0.$$
   Po vypočtení zjistíme, první dva podezřelé body jsou $(1,1)$, $(-1,1)$.

b) hranice $y = x^2$, kdy $x \in (-1, 1)$ - metoda přímého dosazení:
Výraz z podmínky dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 3x^4 - 5x^2 + 2.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'_x = 12x^3 - 10x = 0,$$

dostáváme tři možné podezřelé body $(0, 0)$, $\left(\sqrt{\frac{5}{6}}, \frac{5}{6}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}, \frac{5}{6}\right)$, všechny jejich x - ové souřadnice leží v intervalu $(-1, 1)$, proto je můžeme podezřívat.

c) hranice $x^2 + y^2 - 2 = 0$, kdy $y \in (0, \sqrt{2})$ - metoda Lagrangeových multiplikátorů:
Sestrojíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = 3x^2 + 3y^2 - 8y + 2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2).$$

Parciální derivace funkce $L(x, y, \lambda)$ podle proměnných x a y a vazební podmínku položíme rovny nule, dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} L'_x &= 6x + 2\lambda x = 0 \\ L'_y &= 6y - 8 + 2\lambda y = 0 \\ g(x, y) &= x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice vidíme, že aby byla splněna rovnost, musí být buď $x = 0$, nebo $\lambda = -3$ - tuto možnost pro λ vyloučíme, protože pak by nebyla splněna rovnost v druhé rovnici. Po dosazení $x = 0$ do vazební podmínky získáváme dva podezřelé body $(0, \sqrt{2})$, $(0, -\sqrt{2})$ - tento vyloučíme, jeho y - ová souřadnice nepatří do intervalu $(0, \sqrt{2})$.

Funkční hodnoty podezřelých bodů:

1. $f\left(0, \frac{4}{3}\right) = -\frac{10}{3}$
2. $f(1, 1) = f(-1, 1) = 0$
3. $f(0, 0) = 2$
4. $\left(\sqrt{\frac{5}{6}}, \frac{5}{6}\right) = -\frac{1}{12}$
5. $\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}, \frac{5}{6}\right) = -\frac{1}{12}$
6. $(0, \sqrt{2}) = 8 - 8\sqrt{2}$

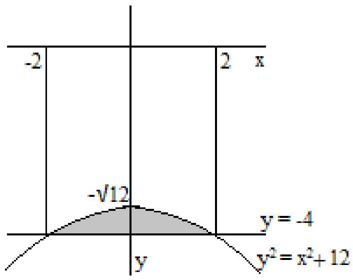
Z funkčních hodnot těchto bodů je zřejmé, že funkce f nabývá globálního minima v bodě $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ a globálního maxima v bodě $(0, 0)$.

Příklad 28

$f(x, y) = 2x^2 - 2y^2 - 3x + 6y + 4; \qquad M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 \geq 12 \wedge -4 \leq y \leq 0\right\}$

Poznámka 10 Když v nerovnici $y^2 - x^2 \geq 12$ nahradíme znaménko nerovnosti rovností, dostaneme rovnici hyperboly.

Řešení:
Sestrojíme množinu M, z jejího tvaru vidíme, že je neprázdná a kompaktní, $f(x, y)$ je na ní spojitá, tudíž zde můžeme najít globální extrémy.



Obrázek 2.9: množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 \geq 12 \wedge -4 \leq y \leq 0\}$

Podezřelé body:

1. *Uvnitř množiny M:*
   Parciální derivace $f'_x = x - 3$, $f'_y = -4y + 6$ položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic
   $$4x - 3 = 0, \qquad -4y + 6 = 0.$$
   Souřadnice prvního podezřelého bodu jsou tedy $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$, tento bod ovšem vyloučíme, jelikož nepatří do množiny M.

2. *Na hranici množiny M:*

   a) *Tam, kde platí $y^2 - x^2 = 12$ a zároveň $y = -4$:*
   Do rovnice $y^2 - x^2 = 12$ dosadíme $y = -4$, dostáváme rovnici
   $$16 - x^2 = 12,$$
   první podezřelé body jsou tedy $(2, -4)$, $(-2, -4)$.

b) hranice $y = -4$, kdy $x \in (-2, 2)$ - metoda přímého dosazení:
Výraz z podmínky dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 2x^2 - 3x - 52.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'_x = 4x - 3 = 0,$$

dostáváme bod $\left(\frac{3}{4}, -4\right)$, jeho x - ová souřadnice leží v intervalu $(-2, 2)$, tento bod tedy můžeme uvažovat.

c) hranice $y^2 - x^2 - 12 = 0$, kdy $y \in (-4, -\sqrt{12})$ - metoda Lagrangeových multiplikátorů:
Sestrojíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = 2x^2 - 2y^2 - 3x + 6y + 4 + \lambda(y^2 - x^2 - 12).$$

Parciální derivace funkce $L(x, y, \lambda)$ podle proměnných x a y a vazební podmínku položíme rovny nule, dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} L'_x &= 4x - 3 - 2\lambda x = 0 \\ L'_y &= -4y + 6 + 2\lambda y = 0 \\ g(x, y) &= y^2 - x^2 - 12 = 0 \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic vyjádříme

$$x = \frac{3}{2(2-\lambda)}, \quad y = \frac{3}{2-\lambda},$$

to dosadíme do vazební podmínky, z rovnice

$$g(x, y) = \frac{9}{(2-\lambda)^2} - \frac{9}{4(2-\lambda)^2} - 12 = 0$$

výpočtem dostáváme $\lambda_1 = \frac{11}{4}$, $\lambda_2 = \frac{5}{4}$ a po dosazení do vzorců pro x a y získáme souřadnice dvou bodů $(-2, -4)$, ten však vyloučíme jelikož jeho y - ová souřadnice neleží v intervalu a $(2, 4)$, který také vyloučíme, jelikož neleží v M.

Funkční hodnoty podezřelých bodů:

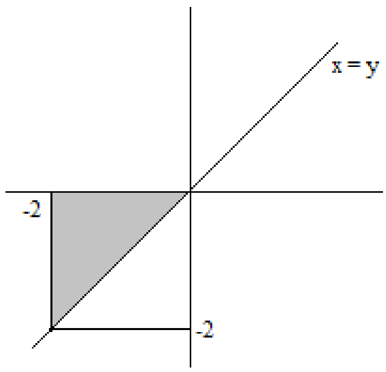
1. $f(-2, -4) = -38$
2. $f(2, -4) = -50$
3. $f\left(\frac{3}{4}, -4\right) = -53,125$

Z funkčních hodnot těchto bodů je zřejmé, že funkce f nabývá globálního minima v bodě $\left(\frac{3}{4}, -4\right)$ a globálního maxima v bodě $(-2, -4)$.

Příklad 29

$f(x, y) = 2x^2+y^2-xy-y+4x-1; \qquad M = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \le x \le 0 \wedge x \le y \le 0\big\}$

Řešení:
Sestrojíme množinu M, z jejího tvaru vidíme, že je neprázdná a kompaktní, $f(x, y)$ je na ní spojitá, tudíž zde můžeme najít globální extrémy.



Obrázek 2.10: množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \le x \le 0 \wedge x \le y \le 0\}$

Podezřelé body:

1. *Uvnitř množiny M:*
   Parciální derivace $f'_x = 4x - y + 4$, $f'_y = 2y - x - 1$ položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic
   $$f'_x = 4x - y + 4 = 0, \qquad f'_y = 2y - x - 1 = 0.$$
   Z první rovnice vyjádříme x a to jako $x = \frac{y-4}{4}$, to dosadíme do druhé a máme první podezřelý bod $(-1, 0)$, který však hned vyloučíme, jelikož to je hraniční, nikoli vnitřní bod množiny M.

2. *Na hranici množiny M:*

   a) hranice $x = -2$, kdy $y \in (-2, 0)$ - metoda přímého dosazení:
   Do funkčního předpisu dosadíme $x = -2$, dostáváme funkci jedné proměnné
   $$F(y) = f(y, \psi(y)) = y^2 + y - 1.$$
   Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule
   $$F'_y = 2y + 1 = 0,$$
   další bod podezřelý z globálního extrému je tedy $\big(-2, -\frac{1}{2}\big)$.

b) hranice $x = y$, kdy $x \in (-2, 0)$ - metoda přímého dosazení:
Do funkčního předpisu dosadíme $x = y$, dostáváme funkci jedné proměnné
$$F(y) = f(y, \psi(y)) = 2y^2 + 3y - 1.$$
Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule
$$F'_y = 4y + 3 = 0,$$
další bod podezřelý z globálního extrému je tedy $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$.

c) hranice $y = 0$, kdy $x \in (-2, 0)$ - metoda přímého dosazení:
Do funkčního předpisu dosadíme $y = 0$, dostáváme funkci jedné proměnné
$$F(x) = f(x, \varphi(x)) = 2x^2 + 4x - 1.$$
Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule
$$F'_x = 4x + 4 = 0,$$
dostáváme bod $(-1, 0)$, který jsme předtím vyloučili, nyní ho už uvažovat můžeme.

3. *Vrcholy trojúhelníku ohraničujícího množinu M.*
$$(0, 0), \quad (-2, 0) \quad (-2, -2).$$

Funkční hodnoty podezřelých bodů:

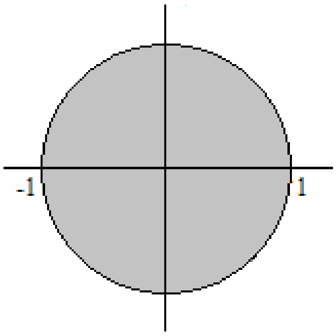
1. $f(-1, 0) = -3$
2. $f\left(-2, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$
3. $f\left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right) = -\frac{17}{8}$
4. $f(0, 0) = -1$
5. $f(-2, 0) = -1$
6. $f(-2, -2) = 1$

Z funkčních hodnot těchto bodů je zřejmé, že funkce f nabývá globálního minima v bodě $(-1, 0)$ a globálního maxima v bodě $(-2, -2)$.

Příklad 30

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{y^2-x^2}; \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Řešení:
Sestrojíme množinu M, z jejího tvaru vidíme, že je neprázdná a kompaktní, $f(x,y)$ je na ní spojitá, tudíž zde můžeme najít globální extrémy.



Obrázek 2.11: množina $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Podezřelé body:

1. *Uvnitř množiny M:*
   Parciální derivace $f'_x = 2xe^{y^2-x^2}(1 - x^2 + y^2)$, $f'_y = 2ye^{y^2-x^2}(x^2 - y^2 - 1)$ položíme rovny nule, dostáváme systém rovnic

   $$f'_x = 2xe^{y^2-x^2}(1 - x^2 + y^2) = 0, \qquad f'_y = 2ye^{y^2-x^2}(x^2 - y^2 - 1) = 0.$$

   Z tohoto systému vidíme, že první podezřelý bod, který splňuje rovnost, je $(0,0)$.
   Když z výrazu $(1 - x^2 + y^2)$ v první rovnici vyjádříme $y^2 = x^2 - 1$ a dosadíme to do výrazu (x^2-y^2-1), dostaneme $0 = 0$, tedy nekonečně mnoho podezřelých bodů ležících na hyperbole $x^2 - y^2 = 1$. Z těchto bodů však musíme vybrat pouze ty, pro které platí současně $x^2+y^2 \leq 1$ a $x^2-y^2 = 1$. Těmto rovnicím odpovídají body $(1,0)$ a $(-1,0)$, které však nyní uvažovat nemůžeme, jelikož nepatří do vnitřku, ale do hranice množiny M.

2. *Na hranici množiny M:*

a) hranice $x^2 + y^2 = 1$ - metoda přímého dosazení:
   Mohli bychom použít také Lagrangeovy multiplikátory, ale přímým dosazením dojdeme k výsledku rychleji a elegantněji.
   Z podmínky vyjádříme např. $y^2 = 1 - x^2$, to dosadíme do zadané funkce a dostaneme tak funkci jedné proměnné

   $$F(x) = f(x, \varphi(x)) = (2x^2 - 1)e^{1-2x^2}.$$

Derivaci tohoto výrazu položíme rovnu nule

$$F'_y = 4xe^{1-2x^2}(2 - 2x^2) = 0,$$

této rovnici odpovídají tři řešení pro x a to $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 1$ a tedy 4 podezřelé body $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$.

Funkční hodnoty podezřelých bodů:

1. $f(0, 0) = 0$
2. $f(0, 1) = f(0, -1) = -e$
3. $f(1, 0) = f(-1, 0) = \frac{1}{e}$

Z funkčních hodnot těchto bodů je zřejmé, že funkce f nabývá globálního minima v bodech $(0, 1)$, $(0, -1)$ a globálního maxima v bodech $(1, 0)$, $(-1, 0)$.

Závěr

Cílem této práce bylo vytvořit sbírku podrobně řešených příkladů na téma extrémy funkcí dvou proměnných.

Práce se skládá ze dvou velkých kapitol. Druhá kapitola je pak rozdělena do 3 částí podle toho, jakými druhy extrémů se zabývá.

První, pouze teoretická kapitola, se zaměřuje na teorii týkající se funkce více proměnných, konkrétně pak na funkci dvou proměnných a dále na parciální derivace prvního a druhého řádu funkce dvou proměnných, jelikož bez znalostí těchto částí diferenciálního počtu nelze vyšetřovat extrémy funkcí dvou proměnných.

Druhá, teoreticko — praktická kapitola má 3 části a to lokální extrémy, vázané extrémy a globální extrémy funkcí dvou proměnných.

První část, tedy lokální extrémy funkcí dvou proměnných, nejprve teoreticky pojednává o tom, co to lokální extrémy jsou, jaké jsou nutné a postačující podmínky pro jejich existenci, kde těchto extrémů funkce může nabývat, jakou roli hrají při jejich výpočtu parciální derivace, co znamenají pojmy stacionární a sedlový bod, k čemu slouží Hessova matice a dle jakých kritérií rozhodujeme o existenci lokálních extrémů. Teorie je zakončená návodem, jak bod po bodu postupovat při vyšetřování těchto extrémů. Tato část je poté doplněna deseti podrobně vyřešenými příklady, které jsou seřazeny od jednodušších po složitější.

Druhá část, tedy vázané lokální extrémy funkcí dvou proměnných, také nejprve nabízí teorii, co tyto extrémy znamenají, jak je můžeme geometricky interpretovat, co je to metoda přímého dosazení a Lagrangeova metoda neurčitých koeficientů a jak při vyšetřování těchto extrémů postupovat. Kapitola je následně opět doplněna deseti příklady na toto téma, z nichž pět se zabývá metodou přímého dosazení a dalších pět Lagrangeovou metodou.

Poslední, tedy třetí část, se zabývá globálními extrémy funkcí dvou proměnných. Pojednává o tom, jaký je rozdíl mezi těmito a lokálními extrémy, kde funkce těchto extrémů nabývá, co je to kompaktní množina a jak s touto teorií souvisí a konečně nabízí opět názorný postup, kterým se při řešení úloh na toto téma může řídit. Část je zakončena deseti rozsáhlými podrobně vyřešenými příklady.

Příkladů je zde celkem třicet, což je myslím dostatečné množství na to, aby čtenář, tedy student některého z nižších ročníků matematických oborů Univerzity Palackého, pochopil tuto látku a byl připraven jak na zápočtové testy, tak zkoušky, případně další studium, které znalost této kapitoly bude vyžadovat.

Literatura

[1] Jarník V. — *Diferenciální počet (II.),* ACADEMA, Praha 1976

[2] Rektorys K. a spol. — *Přehled užité matematiky I.,* PROMETHEUS, Praha 1995

[3] Kluvánek I., Mišík L., Švec M. — *Matematika pro studium technických věd I.,* SVTL, Bratislava 1963

[4] Škrášek J., Tichý Z. — *Základy aplikované matematiky I.,* SNTL, Praha 1983

[5] Musilová J., Musilová P. — *Matematika II/2 pro porozumění i praxi,* VUTIUM, Brno 2012

[6] Moučka J., Rádl P. — *Matematika pro studenty ekonomie,* GRADA publishing a.s., Praha 2010

[7] Opory pro studium M-E na UPOL: *http://kma.me.sweb.cz/derivace+diferenciál.pdf*

[8] Charvát J., Kelar V., Šibrava Z. — *Matematika 2 — Sbírka příkladů,* ČVUT, Praha 2006