

**Česká zemědělská univerzita v Praze**

**Provozně ekonomická fakulta**

**Katedra systémového inženýrství**



**Bakalářská práce**

**Praktické uplatnění teorie front**

**Daneliya Tleuf**

© 2016 ČZU v Praze

# ČESKÁ ZEMĚDĚLSKÁ UNIVERZITA V PRAZE

Provozně ekonomická fakulta

## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Daneliya Tleuf

Informatika

Název práce

**Praktické uplatnění teorie front**

Název anglicky

**Practical application of the queuing theory**

---

### Cíle práce

Cílem bakalářské práce je vyřešit problematiku struktury vybraného systému hromadné obsluhy s využitím teorie front. Na příkladu SHO společnosti Infobus jsou vypočítány ukazatele efektivity fungování systému vzhledem k současným podmínkám. Pomocí Markovcových vzorců je určen vhodnější počet telefonních operátorů pro několik stavů firmy (o víkendech a pracovních dnech, pro běžné období a období zavedení slev, kdy se liší počet volajících zákazníků). Je určeno, že používaný SHO ve firmě Infobus je Erlangovým systémem s větším počtem homogenních kanálů obsluhy (telefonních operátorů) a bez možnosti utváření fronty (systém s odmítnutím).

### Metodika

Pro naplnění cíle práce je jako základ využito pracovních charakteristik systému – intenzita vstupu v různá období, počet linek obsluhy, doba trvání obsluhy jednoho požadavku. Tyto charakteristiky byly zjištěny osobním pozorováním provozu firmy Infobus a na základě interních dokumentů (protokoly o telefonních hovorech). Použitím vzorců, používaných pro charakterizování SHO a uvedených v teoretické části práce, a MS Excel byly vypočítány parametry SHO v jednotlivá období s odlišnou intenzitou vstupu a s různým počtem linek obsluhy (minimálním počtem –  $n=1$ , skutečným stavem  $n=4$  a možnými stav  $n=5, 10$ ).

### **Doporučený rozsah práce**

30-40 stran

### **Klíčová slova**

systém hromadné obsluhy, teorie front, model, využití

---

### **Doporučené zdroje informací**

- [1] DOMEOVÁ, Ludmila, BERÁNKOVÁ, Martina. Systémy hromadné obsluhy I. Praha: ČZU v Praze, Provozně ekonomická fakulta, 2004. ISBN 80-213-1193-2.
- [2] ŠMÍDA, Filip. Zavádění a rozvoj procesního řízení ve firmě. Praha: Grada Publishing a.s., 2007. 293 s. ISBN 978-80-247-1679-4.
- [3] RYŽIKOV, Yuriy. Теория очередей и управление запасами. Pětrohrad – Piter, 2001. 384 s. ISBN: 5-318-00073-8.
- [4] ŠTĚRBA, Ladislav. Teorie front [online]. [cit. 2016-1-17]. Dostupné z: <http://vyuka.salamon.cz/forum/download.php?id=275&sid=45e13e2e2338aea81e5f82179c682256>
- 

### **Předběžný termín obhajoby**

2015/16 LS – PEF

### **Vedoucí práce**

doc. Ing. Ludmila Dömeová, CSc.

### **Garantující pracoviště**

Katedra systémového inženýrství

Elektronicky schváleno dne 20. 10. 2014

**doc. Ing. Tomáš Šubrt, Ph.D.**

Vedoucí katedry

Elektronicky schváleno dne 10. 11. 2014

**Ing. Martin Pelikán, Ph.D.**

Děkan

V Praze dne 14. 03. 2016

### **Čestné prohlášení**

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci "Praktické uplatnění teorie front" jsem vypracovala samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou citovány v práci a uvedeny v seznamu použitých zdrojů na konci práce. Jako autorka uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že jsem v souvislosti s jejím vytvořením neporušil autorská práva třetích osob.

V Praze dne 14. 3. 2016

---

### **Poděkování**

Děkuji vedoucí své práce paní doc. Ing. Ludmile Dömeové, CSc. za cenné rady a pomoc při vypracování této bakalářské práce.

# Praktické uplatnění teorie front

## Souhrn

Cílem bakalářské práce je vyřešit problematiku struktury vybraného systému hromadné obsluhy s využitím teorie front. V práci jsou popsány jednotlivé typy systémů hromadné obsluhy a je objasněn praktický přínos teorie front na příkladu společnosti Infobus. V práci jsou použité Markovské procesy pro charakteristiku SHO vybrané firmy a určení vhodného počtu telefonních operátorů vzhledem k současným podmínkám.

**Klíčová slova:** teorie front, systém hromadné obsluhy, model, využití

# Practical application of the queuing theory

## **Summary**

The aim of the Bachelor thesis is to solve the problem of the structure of the selected queuing system using queuing theory. This thesis describes the different types of queuing systems and illustrates the practical use of queuing theory on the example of Infobus company. There is used the Markov processes to characterize the Queuing system of selected company and determine an appropriate number of telephone operators due to the current conditions.

**Keywords:** queuing theory, queuing system, model, use

## Obsah

1	Úvod.....	11
2	Cíl práce a metodika .....	12
3	Teoretická východiska .....	13
3.1	Teorie front a systémy hromadné obsluhy .....	13
3.2	Historie teorie front a její využití v současné době.....	14
3.3	Základní informace o SHO .....	16
3.3.1	Vstupní toky.....	17
3.3.2	Fronta a kanál obsluhy.....	18
3.3.3	Výstupní toky.....	20
3.3.4	Stochastické procesy. Graf stavů. Markovové procesy .....	20
3.3.5	Klasifikace SHO .....	22
3.4	Základní výpočty u jednotlivých typů SHO.....	25
3.4.1	SHO s jedním kanálem obsluhy a odmítnutím .....	25
3.4.2	SHO s neomezeným čekáním.....	27
3.4.3	SHO s omezeným čekáním.....	29
3.4.4	SHO s větším počtem linek obsluhy.....	31
4	Praktická část .....	35
4.1.1	Sběr dat .....	36
4.1.2	Analýza efektivity SHO firmy, pokud pracuje 1 operátor .....	39
4.1.3	Analýza efektivity skutečného SHO firmy .....	40
4.1.4	Analýza efektivity SHO firmy se zvýšením počtu linek obsluhy.....	44
5	Závěr .....	49
6	Použité zdroje .....	51



## Seznam obrázků

Obr. 1 – Vzájemný vztah cílů prvků SHO (vlastní, Košunyajeva, Patronova, 2013, s. 16)	14
Obr. 2 – Systém hromadné obsluhy (Duchoň, 2007, s. 158).....	16
Obr. 3 – Toky v systému hromadné obsluhy (autor, Štěrbá [online], s. 2).....	17
Obr. 4 – Uspořádání kanálů obsluhy (zdroj: Systémy hromadné obsluhy [online], 2007) .	19
Obr. 5 – Graf stavů SHO (Košunyajeva, Patronova, 2013, s. 24).....	21
Obr. 6 – Markovské procesy (Barták, 2015, In Rudová, 2015, s. 5).....	22
Obr. 7 – Schéma SHO firmy s větším počtem linek obsluhy a odmítnutím (zdroj: autor)	32
Obr. 8 – Matice stavů SHO (zdroj: autor) .....	33
Obr. 9 – Logo společnosti Infobus.....	35
Obr. 10 – Schéma SHO firmy, pokud pracuje pouze 1 operátor (zdroj: autor).....	39

## Seznam tabulek

Tab. 1 – Symboly použité pro označení typu SHO dle Kendalla (Žižka, 2007, s. 8.).....	23
Tab. 2 – Seznam parametrů pro SHO s jedním kanálem obsluhy a s odmítnutím .....	27
Tab. 3 – Seznam parametrů pro SHO s jedním kanálem obsluhy a neomezeným čekáním	28
Tab. 4 – Seznam používaných parametrů pro SHO s omezeným čekáním.....	30
Tab. 5 – Seznam používaných parametrů pro SHO s několika kanály obsluhy.....	32
Tab. 6 – Počet a délka hovorů (vlastní zpracování a výpočty, interní zdroje firmy).....	38
Tab. 7 – Ukazatele efektivity SHO s 4 linky obsluhy a odmítnutím (zdroj: autor).....	41
Tab. 8 – Parametry SHO s 5-10 linky obsluhy a odmítnutím v pracovní dny (zdroj: autor) .....	45
Tab. 9 – Ukazatele SHO s 5-10 linky obsluhy a odmítnutím o víkendech (zdroj: autor) ...	47
Tab. 10 – Ukazatele SHO s 5-10 linky obsluhy a odmítnutím v běžné období (zdroj: autor) .....	47
Tab. 11 – Ukazatele SHO s 5-10 linky obsluhy a odmítnutím v období slev (zdroj: autor)	48

## Seznam grafů

Graf 1 – Pravděpodobnosti stavů SHO v jednotlivá období (zdroj: autor) .....	42
Graf 2 – Závislost absolutní propustné schopnosti a intenzity vstupů (zdroj: autor) .....	43
Graf 3 – Závislost relativní propustné schopnosti a intenzity vstupů (zdroj: autor).....	44
Graf 4 – Závislost absolutní propustné schopnosti a počtu linek obsluhy (zdroj: autor) ...	45
Graf 5 – Závislost relativní propustné schopnosti a počtu linek obsluhy (zdroj: autor).....	46
Graf 6 – $Q$ v různá období se současným a plánovaným počtem operátorů .....	50

# 1 Úvod

Složitý charakter tržní ekonomiky a současná úroveň kladených na ni požadavků vyvolává stále větší zájem o využívání závažnějších metod analýzy její teoretických a praktických problémů. V posledních desetiletích se stávají významnější matematické metody. Matematické modelování se stává jedním z hlavních a nejproduktivnějších metod analýzy ekonomických procesů a objektů. Matematická analýza ekonomických problémů se organicky stává součástí ekonomiky. Je to také potvrzeno skutečností, že od roku 1969 Nobelové ceny za ekonomii byly zpravidla uděleny ekonomicko-matematickým výzkumům.

Jednou z důležitých částí ekonomického a matematického modelování je teorie front, která je teoretickým základem pro efektivní navrhování a provoz systémů hromadné obsluhy. Systémy hromadné obsluhy (SHO) se vyskytují v mnoha oblastech hospodářství (průmysl, strojírenství, vojenská oblasti atd.) a jsou určeny pro opakované použití při realizaci podobných úkolů.

V současné době hodně peněz je investováno podniky v soupeření o zákazníky. Podle ekonomických výzkumů může být získání nového zákazníka o 5-krát dražší, než udržení si toho stávajícího. V případě, že zákazník odešel nespokojeným, pak budou náklady na jeho vracení až 25-krát vyšší (Durčák, 2014). V mnoha případech je nespokojenost zákazníků způsobena neúspěšným organizováním firemní obsluhy (příliš dlouhé čekání ve frontě, odmítnutí poskytování služby atd.) Použití teorie front umožňuje firmě vyhnout se takových problémů.

Zakladatelem teorie front je považován dánský vědec A. K. Erlang. V roce 1909 pracoval v Kodaňské telefonní společnosti a v té době publikoval práci „Teorie pravděpodobnosti a telefonní hovory“, v níž vyřešil řadu úkolů teorie systémů hromadné obsluhy s odmítnutím. Významně přispěl k vytváření a rozvoji obecné teorie hromadné obsluhy učinil také ruský matematik Aleksandr Khinchin (1984-1959), který navrhl termín teorie front. V zahraniční literatuře se také nazývá teorie front.

## 2 Cíl práce a metodika

Cílem této práce je vyřešit problematiku struktury vybraného systému hromadné obsluhy s využitím teorie front.

Na příkladu společnosti Infobus budou vypočítány ukazatele efektivity systémů hromadné obsluhy. Společnost Infobus má několik směrů činností: rezervace a prodej jízdenek a letenek, organizace transferů, rezervace a zajištění ubytovacích služeb, doprava balíků do zahraničí, směnářská činnost. V této práci rozebírán systém hromadné obsluhy při poskytování jednoho typu služeb firmy – rezervace a prodej jízdenek a letenek.

Pro naplnění cíle práce je jako základ využito pracovních charakteristik systému – intenzita vstupu v různá období, počet linek obsluhy, doba trvání obsluhy jednoho požadavku. Tyto charakteristiky byly zjištěny osobním pozorováním provozu firmy Infobus a na základě interních dokumentů (protokoly o telefonních hovorech). Použitím vzorců, používaných pro charakterizování SHO a uvedených v teoretické části práce, a MS Excel byly vypočítány parametry SHO v jednotlivá období s odlišnou intenzitou vstupu.

Hlavní metodou pro napsání první teoretické kapitoly práce je literární rešerše. Výsledky jsou prezentovány pomocí tabulek a grafů.

## 3 Teoretická východiska

### 3.1 Teorie front a systémy hromadné obsluhy

Ve mnoha oblastech výroby, služeb, celé ekonomice a financích důležitou roli hrají speciální systémy, které realizují stejnorodé úkoly. Tyto systémy jsou nazývány *systémy hromadné obsluhy (SHO)*. Pomocí těchto systémů je prováděna analýza současného stavu obsluhy a optimalizace celého systému front.

Systémy nebo modely hromadné obsluhy jsou aplikací klasické teorie front, která se zabývá předmětem operačního výzkumu.

Teorie front (teorie hromadné obsluhy, angl. *queuing theory*) se zaměřuje na analýzu a řešení procesů, ve kterých se objevují proudy objektů procházejících nějakými zařízeními, od nichž je vyžadována obsluha. Vzhledem k tomu, že obsluha má omezenou kapacitu, může docházet ke zbytečnému čekání jednotek (frontám), a ve výsledku dochází k nespokojení či odmítnutí obsluhy.

Teorie front je jednou z nejčastějších metod odstraňování poruch procesů, k nimž také patří (Šmída, 2007, s. 5):

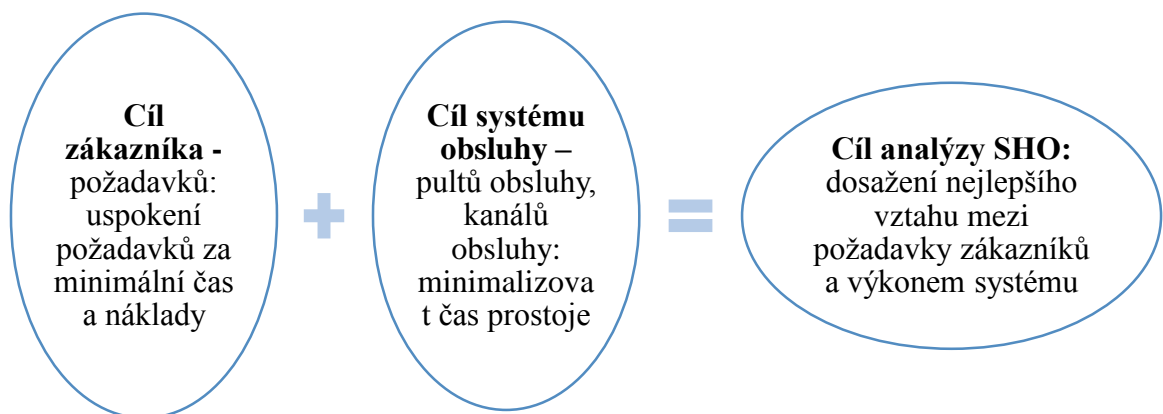
- teorie omezení (zvýšení výkonnosti, průtoku),
- teorie zásob (eliminace nespokojenosti),
- teorie zásob (minimalizace zásob, zachování dostupnosti),
- teorie poruch (optimalizace preventivních zásahů).

Tyto metody jsou vzájemně propojené a jsou určeny k hledání vhodné struktury systémů.

Teorie front hledá způsoby vhodné organizace procesu obsluhy nejen pro zákazníka, ale i pro firmu, to znamená „*tak aby se nevytvářely před obslužnými kanály příliš dlouhé fronty a zároveň byla obslužná zařízení dostatečně využita.*“ (Systém hromadné obsluhy. Teorie front, 2007, s. 4) Například, v supermarketu zákazník preferuje volnou pokladnu a nechce dlouho čekat ve frontě. To znamená, že pro něho je vhodné, pokud v supermarketu jsou otevřeny všechny pokladny. Ze strany podniku není to vhodné, protože může představovat zbytečné náklady na provoz pokladen, které nejsou využívány. Úkolem SHO je určovat, kolik pokladen musí být otevřeno pro určitý počet zákazníků, tedy vyhledat nejlepší

variantu provozu, aby obsluha netrvala dlouho, tj. nevyvolávala nespokojenost zákazníků, ale také stála pro firmu co nejméně (Obr. 1).

Je třeba brát v úvahu, že zákazníkem může vystupovat nejen člověk, ale i celá organizace nebo výrobek (např. zajištění a obsluha procesu výroby pracovníky v továrně). Firmou (obsluhou) může být obchod, stroj, servis, instituce apod.



Obr. 1 – Vzájemný vztah cílů prvků SHO (vlastní, Košunyajeva, Patronova, 2013, s. 16)

Praktický přínosem teorie front jsou především *simulační modely*, jejich podstatou je simulace provozu systému po určitý časový interval (měsíce, někdy i roky) a zpětně zjištění požadovaných charakteristik systému. Takové simulace jsou zpravidla realizovány pomocí softwarových programů (Vochozka, Mulač a kol., 2012, s. 197).

### 3.2 Historie teorie front a její využití v současné době

Klasickým cílem systémů hromadné obsluhy je tzv. Palmého úloha, která se v 19. století vyvíjela z potřeb majitelů textilních továren a umožňovala efektivně určovat počet tkalcovských stavů pro jednoho dělníka. Pokud v továrně bylo obsluhováno málo stavů, firma nemohla konkurovat, protože ve všech továrnách byly přibližně stejné stroje. Pokud každému dělníkovi bylo přidělováno příliš mnoho stavů, docházelo k poruchám (např.

přetržení nitě) a dělníci nestihali navázat nové nitě. Jako výsledek celý systém továrny byl méně výkonný, případně se mohl i úplně zastavit. (Smejkal, Rais, 2013, s. 218)

Teorie hromadné obsluhy jako matematická disciplína vznikla na začátku 20. století. Hlavní předpoklady teorie hromadné obsluhy zformuloval vědec Johansson v r. 1907. Zakladatelem teorie je ale považován dánský vědec Agner Krarup Erlang (1878 – 1929), který analyzoval práci telefonních ústředí a navrhoval způsoby jejich optimalizace aplikováním teorie pravděpodobnosti. Potřeboval vymýšlet způsob, jak umožnit najednou hovor co největšímu počtu lidí. (Brožová, Šubrt, Mikulecký [online], 2005). Je známý tzv. Erlangův vzorec, který určuje počet volajících, kteří volají v době obsazené sítě. V r. 1909 byla vydaná jeho první práce Teorie pravděpodobnosti a telefonní konverzace, v r. 1917 – jeho nejznámější práce Řešení některých problémů v teorii pravděpodobnosti významných v automatické telefonní výměně. Od r. 1944 byl 1 *erlang* používán jako jednotka telefonního provozu. (Bureš [online], 2004) Vzhledem k tomu, že prvním objektem zkoumání byly telefonické systémy, dnes je široce používána terminologie z oblasti telefonických komunikací.

Dvacátá léta 20. století byly obdobím plodného využití práce Erlanga, což trvalo přibližně do poloviny třicátých let, kdy teorie hromadné obsluhy přilákala významné matematiky jako zajímavá oblast zkoumání. Dalším rozvojem teorie front se například zabýval ruský matematik Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903 – 1987), který také je zakladatelem moderní teorie pravděpodobnosti a teorie složitosti algoritmu.

Z toho důvodu, že reální systémy hromadné obsluhy jsou dost složité pro zkoumání, zájem k teorii front se začal růst jen s rozvojem počítačového inženýrství. Teorie front je užitečná i pro analýzu charakteristik počítačové techniky, proto je dost populární v tomto odvětví vědy.

Pojem „teorie hromadné obsluhy“ byl poprvé zaveden Alexandrem Chinčinem, v anglické literatuře je teorie hromadné obsluhy častěji nazývána „teorií front“ (*the theory of queues*).

Dnes praktické využití teorie front lze najít v nejrůznějších sférách života. Příklady SHO jsou:

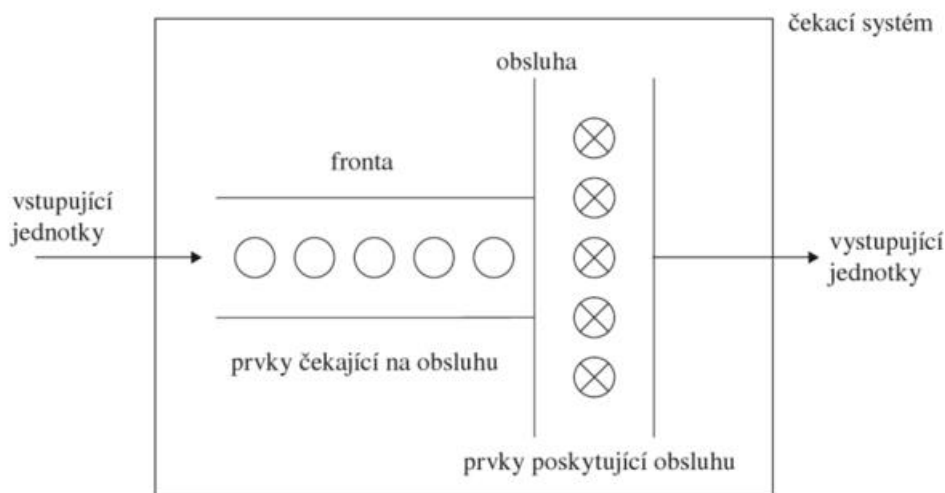
- ve finančně-ekonomické oblasti: banky, pojišťovny, finanční úřady, auditorské služby;

- v oblasti výroby a služeb: řada komunikačních systémů (včetně telefonních ústředěn), zařízení pro nakládání a odvoz výrobků (přístavy, nákladní terminály), čerpací stanice, obchody, kadeřnictví, pokladny, směnárny, směnárny, opravárny, nemocnice atd.;
- ve vojenské oblasti: systémy protiraketové obrany apod.;
- ostatní systémy jako jsou počítačové sítě, systémy pro sběr, skladování a zpracování informace, dopravní systémy, automatizované výrobní místa.

### 3.3 Základní informace o SHO

Systém hromadné obsluhy se zpravidla skládá z čtyř fází (obrázek 2): vstupy, fronta, obsluha a výstup. Informace o jednotlivých fázích (vstupní tok, frontový režim a organizace obsluhy) jsou nutné pro návržení vhodného SHO.

Do určitého zařízení (obchod, banka, stroj atd.) vstupuje zákazník (člověk, firma, výrobek) a požaduje určitou obsluhu, po obsloužení zařízení opouští. V případě většího počtu zákazníků ve stejném období se může objevovat fronta. Obsluhu může poskytovat jeden či více prvků.

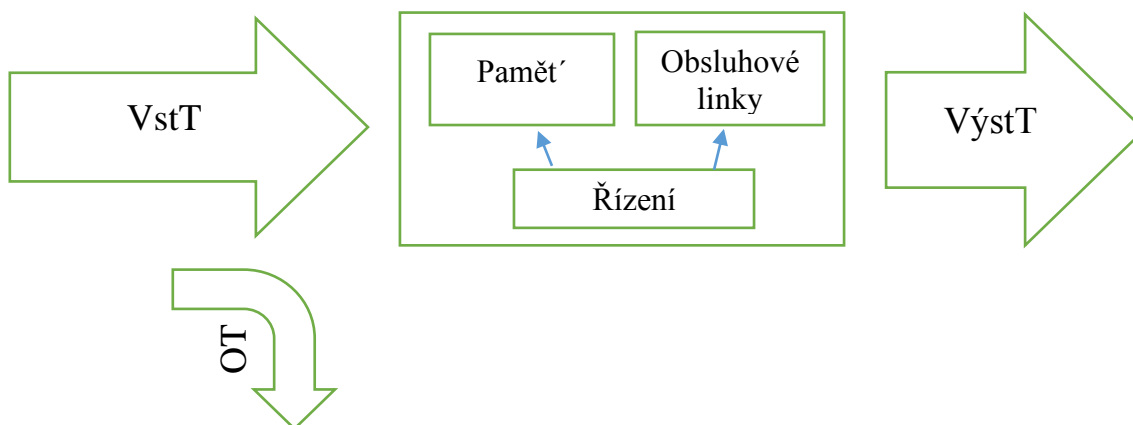


Obr. 2 – Systém hromadné obsluhy (Duchoň, 2007, s. 158)

Systém hromadné obsluhy může být také charakterizován jednotlivými toky (obrázek 3). Na jedné straně SHO jsou vstupní toky (VstT), které jsou vytvořeny požadavky zákazníků, tj. zdrojů. Požadavky zákazníků jsou hned nebo za určitou dobu uspokojovány, tak je



tvořen výstupní tok (VýstT). Výstupní tok může být vstupním tokem pro další systém obsluhy, na který je navazován první systém. Pokud jsou požadavky zákazníků neuspokojeny, je tvořen odstupující tok (OT). Vlastní systém obsluhy je utvářen pamětmi, obsluhovými linkami a řízením (Kapoun [online], 2002).



Obr. 3 – Toky v systému hromadné obsluhy (autor, Štěrbá [online], s. 2)

### 3.3.1 Vstupní toky

Vstupy nebo Vstupní toky jsou klasifikovány z několika hledisek a mohou být (Duchoň, 2007, s. 157; Kapoun, 2002, Domeová, Beránková, 2004, s. 9-19; Systémy hromadné obsluhy. Teorie front [online], 2007):

- dle okamžiků příchodů vstupů: deterministické, náhodné a smíšené; vstupy *pravidelné* nebo *nepravidelné*; nepravidelné vstupy (a výstupy) jsou dále členěny na *absolutní* a *pravděpodobnostní* (udané buď počtem vstupů během určitého období (Poissonovo rozdělení) nebo dané rozdělením délek časových intervalů mezi dvěma po sebe jdoucími postupy (*exponenciální* rozdělení). „Příchody požadavků popisujeme buď pomocí intenzity vstupu  $\lambda$ , což je počet zákazníků, kteří do systému vstoupí za jednotku času, nebo pomocí intervalu mezi příchody  $XN$ , což je čas mezi dvěma po sobě následujícími příchody“ (Domeová, Beránková, 2004, s. 9);
- vstupy ze zdrojů *omezených* (např. stroje, které čekají na opravu v továrně) nebo ze zdrojů *neomezených* (vstup zákazníků do obchodu);

- vstupy se zdrojů *uzavřených* – obsloužená jednotka se v tomto případě vrací do zdroje (*terminálová síť*) nebo ze zdrojů *otevřených*, kdy se obsloužená jednotka nevrací do zdroje (*krematorium*);
- vstupy *jednotlivé* a *skupinové*;
- vstupy *stacionární* (*homogenní*), jejichž charakteristiky se s časem nemění (pro libovolné  $t > 0$  a celé  $k \geq 0$  pravděpodobnost, že za určitý čas  $\{a; a+1\}$  nastane  $k$  události, je stejná pro všechna  $a \geq 0$  a je označována v některých zdrojích  $P_k(t)$  nebo  $p_k$ );
- *nezávislé* vstupy – počet vstupů, které se objeví v určité období, nezávisí na počtu vstupů v jiných časových intervalech. Pravděpodobnost  $P_k(t)$ , že vyskytne  $k$  vstupů za čas  $\{a; a+1\}$  nezávisí na sledů vstupů do okamžiku  $a$ ;
- *ordinární* vstupy, které se vyskytují pouze po jednom ve stejném okamžiku (např. okénko rychlého občerstvení „drive“ může najednou přijímat jen jednoho zákazníka). „Pravděpodobnost  $P_k(t)$ , že za časový interval délky  $t$  nastanou alespoň dvě události pro  $k \geq 2$  se rovná nule pro nekonečně malé  $t$ .“ (Domeová, Beránková, 2004, s. 19)  
Tuto pravděpodobnost popisuje vztah (1).

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_k(t)}{t} = 0, k \geq 2 \quad (1)$$

Pokud nejsou známé data o vstupech, ale potřebujeme je k určení typu vstupů, mohou být použité k tomu různé statistické metody.

Pokud jsou vstupní toky stacionární, ordinární a nezávislé, jedná se o elementární vstupní tok a *Poissonův* (*Markovův*) *proces*, který je charakterizován následujícím vztahem (Lavrus, Mironov, 2002, s. 13):

$$P_n(T) = \frac{(\lambda T)^n \cdot e^{-\lambda T}}{n!} \quad (2)$$

### 3.3.2 Fronta a kanál obsluhy

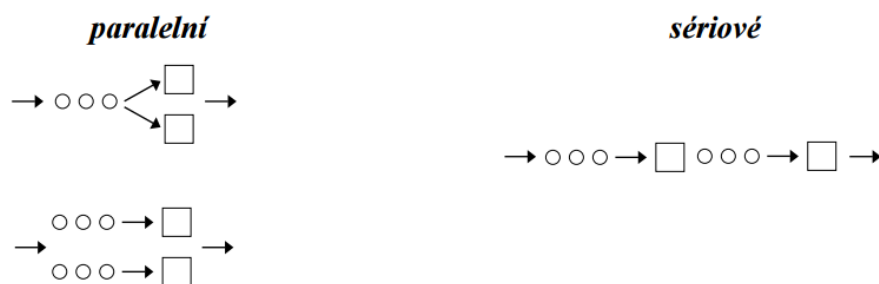
*Fronta* může být někdy také nazývána *čekací linkou*. Způsob jejich utváření je ovlivněn předchozí a následující fází SHO (vstupem a přechodem do obsluhy). Pokud má fronta

omezený počet míst, jedná se o *uzavřený* systém, pokud je počet míst neomezený – hovoříme o *otevřeném* systému hromadné obsluhy. Většina modelů hromadné obsluhy předpokládá nekonečnost fronty, přestože mají omezenou, ale dostatečně velkou kapacitu. Pokud je kapacita systému výrazně omezena, je třeba používat model konečné fronty.

Způsob utváření front může být:

- paralelním,
- nezávislým nebo
- závislým.

Záleží to na typu sítě obslužných linek. Jeden nebo více paralelně zapojených kanálů obsluhy (pultu obsluhy) tvoří uzel obsluhy.



Obr. 4 – Uspořádání kanálů obsluhy (zdroj: Systémy hromadné obsluhy [online], 2007)

Pro definování režimu fronty jsou obvykle používány následující označení (Friebelová, Klicnarová, Friebel, 2006, s. 2):

- FIFO – *first in, first out* (jednotky jsou obslouženy ve stejném pořadí, ve kterém byl provedeny vstup do SHO),
- LIFO – *last in, first out* (jednotka, která první vstoupila do SHO, je obsloužena jako poslední; zásobníkový charakter obsluhy),
- SIRO – *selection in random order* (jednotky jsou obslouženy v náhodném pořadí),
- GD – *general discipline* (obecný nespecifikovaný výběr do obsluhy jednotek z fronty),
- PŘI – *priority* (prioritní obsluha některých jednotek, např. jsou to zdravotně postižení zákazníci, držitelé VIP karet aj.).

Fronty mohou být členěny podle disciplíny (Systém hromadné obsluhy. Teorie front, 2007, s. 7):

- absolutně netrpělivá fronta – pokud jsou všechny obslužní pulty obsazeny, vstupní prvek nevytváří frontu a odstoupí ze systému (*systém s odmítnutím*),
- fronta bez netrpělivosti – prvky čekají na obsluhu tak dlouho, dokud nebude obsluha realizována,
- částečně netrpělivá fronta – prvek se nachází ve frontě jen určitou dobu a pak může ji opustit, bez ohledu na to, zda byla obsluha provedena.

V této fázi je třeba znát informace o době obsluhy jednotlivých jednotek. Doba obsluhy může být závislá na čase a stavu systému (např. únava), poruchovosti obslužných linek. Podle doby obsluhy rozlišují SHO:

- deterministické a
- náhodné (stochastické).

Kanály obsluhy mohou být homogenní a nehomogenní. Homogenní kanály obsluhy mají stejné vlastnosti (způsob, pravidla, typ obsluhy apod.)

Kanál obsluhy může být jeden v celém systému nebo může být jich více. Příkladem nehomogenní obsluhy s paralelními kanály obsluhy jsou pokladny v supermarketech, pokud jedna z pokladen je tzv. expresní, která má určitá pravidla pro maximálně možný počet výrobků nebo je určena specifické skupině zákazníků.

### **3.3.3 Výstupní toky**

Toky, které opouštějí obslužní kanál, tvoří výstupní tok. Pokud se tento výstupní tok stal vstupním tokem pro jiný kanál obsluhy, nazýváme obslužný systém sériovým.

### **3.3.4 Stochastické procesy. Graf stavů. Markovové procesy**

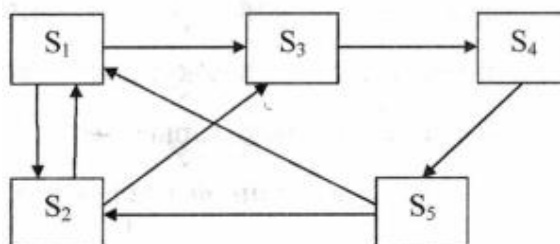
Tato kapitola byla zpracována především podle autorů N. Košunajeva a N. Patronova (2013).

Proces fungování SHO je náhodným procesem, který spočívá v tom, že systém v náhodné okamžiky přechází z jednoho stavu do druhého. Mění se počet obsazených kanálů obsluhy, počet vstupujících požadavků, počet požadavek ve frontě apod.

Proces se nazývá *procesem s diskrétním stavem*, pokud veškeré jeho možné stavy lze předem vyjmenovat, a přechod systému z jednoho stavu do druhého probíhá momentálně (skokem).

Proces se nazývá *procesem se spojitým časem*, pokud nejsou předem zafixovány okamžiky přechodu systému z jednoho stavu do druhého, ale jsou náhodné.

Provoz SHO je náhodným procesem s diskrétním stavem a spojitým časem. To znamená, že se stav SHO mění skokem v náhodné časové okamžiky, kdy se objevují nějaké události (např. vstup nového požadavku, dokončení obsluhy požadavku). Pro analýzu náhodných procesů s diskrétními stavy je pohodlně používat geometrické schéma – tzv. *graf stavů* (obr. 5).



Obr. 5 – Graf stavů SHO (Košunyjajeva, Patronova, 2013, s. 24)

Na obrázku je uvedeno schéma stavů počítače:

- $S_1$  – počítač je fungující, řeší problém;
- $S_2$  – počítač je fungující, neřeší problém;
- $S_3$  – počítač nefunguje, skutečnost poruchy není zaznamenána;
- $S_4$  – skutečnost poruchy je zaznamenána, vyhledává se porucha;
- $S_5$  – probíhá oprava počítače.

Na obrázku jsou také osm šipek  $S_1 > S_2$ ,  $S_1 > S_3$ ,  $S_2 > S_1$ ,  $S_2 > S_3$ ,  $S_3 > S_4$ ,  $S_4 > S_5$ ,  $S_5 > S_1$ ,  $S_5 > S_2$ .

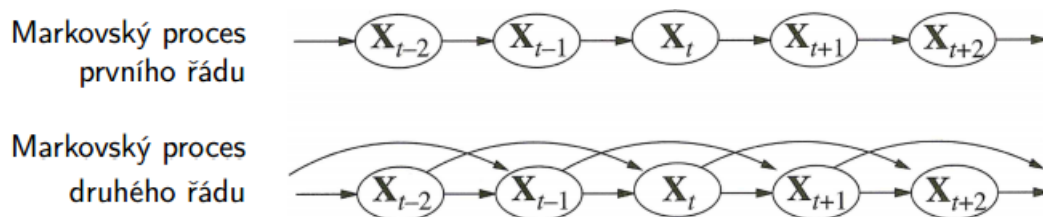
Z důvodu dokončení úkolu v nějaký okamžik přechází počítač ze stavu  $S_1$  do stavu  $S_2$ . Pak může počítač přejít zpátky ze stavu  $S_2$  do stavu  $S_1$  pokud se objeví nový úkol a musí ho

plnit. V případě poruchy počítače, přechází ze stavu  $S_1$  nebo  $S_2$  do stavu  $S_3$ . Přičemž se hned začíná vyhledávání poruchy a přechází systém do stavu  $S_4$ . Po nález poruchy se začíná probíhat oprava počítače, systém přechází do stavu  $S_5$ . Po dokončení opravy přechází systém do stavu  $S_1$  nebo  $S_2$ .

Matematická analýza provozu SHO se stává jednodušší, pokud je proces *Markovský* (*Markovový*). Náhodný proces se nazývá markovským nebo náhodným bez důsledků, pokud pro jakýkoliv interval času  $t_0$ , pravděpodobnostní charakteristiky procesu v budoucnu jsou závislé jen na stavu systému během  $t_0$ , a nejsou závislé na tom, kdy a jak systém přeměnil do tohoto stavu.

*Markovský předpoklad*: současný stav systému je závislý pouze na pevně daném konečném počtu přechozích stavů. V tomto případě pak hovoříme o Markovských řetězcích/procesech.

Markovské procesy mohou být prvního, druhého aj. řádů (obr. 6). Markovský proces prvního řádu je situací, kdy současný stav systému závisí pouze na předchozím stavu.



Obr. 6 – Markovské procesy (Barták, 2015, In Rudová, 2015, s. 5)

Řada vztahů, které sledoval Erlang, byly odvozeny právě přes markovské modely. (Lipka, 2015, s. 2)

### 3.3.5 Klasifikace SHO

Potřeba klasifikace SHO souvisí s vytvořením matematického modelu, který slouží k řešení problémů. Obecnou klasifikaci SHO na základě třech základních hledisek zavedl britský vědec David George Kendall (1918 – 2007), zpravidla je uváděna ve tvaru  $A/B/X/Y/Z$ , kde:

- $A$  – typ vstupních toků (charakteristika intervalů mezi přechody do systému),
- $B$  – typ vstupních toků podle doby trvání obsluhy,
- $X$  – počet paralelních obslužných kanálů  $\{1; \infty\}$ ,
- $Y$  – kapacita SHO,
- $Z$  – řád fronty (FIFO, LIFO, SIRO, PŘI).

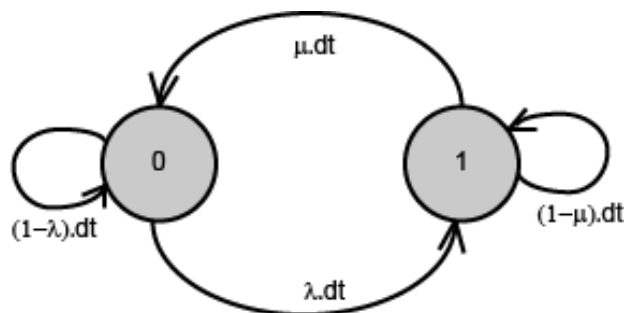
Typ vstupních toků ( $A$ ), jejich pravděpodobnostního rozdělení, charakterizujících intervaly mezi příchody požadavků do systému a dobu trvání obsluhy, může být označován symboly  $M, D, E_k, N, G$  (tabulka 1).

<b>A,</b> <b>B</b>	Typ pravděpodobnostního rozdělení vstupů a doby obsluhy
D	Deterministický vstup nebo obsluha (konstantní interval mezi příchody / pravidelné vstupy nebo doby obsluhy)
M	Markovský – Poissonovský vstupní tok (exponenciální rozdělení nezávislých intervalů příchodů jednotek / doby obsluhy)
$E_k$	Erlangovo rozdělení intervalů příchodů jednotek nebo doby obsluhy, $k \in N$ stupni volnosti
N	normální rozdělení
U	rovnoměrné rozdělení
G	obecné nespecifikované rozdělení

Tab. 1 – Symboly použité pro označení typu SHO dle Kendalla (Žižka, 2007, s. 8.)

Příklad označení jednoduchého modelu:  $M/M/1/0$  (markovský obslužný systém s jednou linkou bez fronty a odmítnutím), (obr. 5) tzn.:

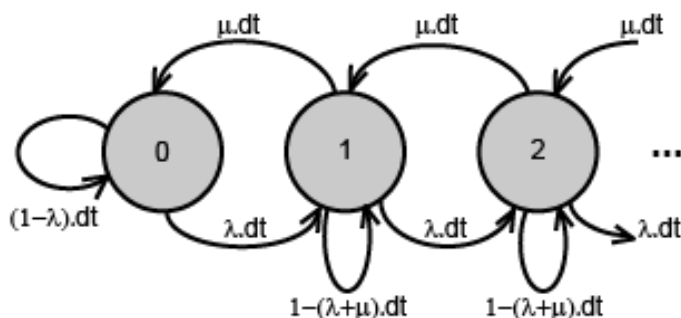
- exponenciální rozložení intervalů mezi příchody (SHO s Markovským-Poissonovským vstupním tokem) – zákazníci přicházejí s intenzitou  $\lambda$ ,
- náhodná doba obsluhy (markovská) s exponenciálním rozdělením, průměrné trvání obsluhy –  $1/\mu$ ,
- jedna linka obsluhy,
- žádná místa pro čekající ( $R=0$ ).



Obr. 5 – Graf přechodů v SHO typu M/M/1/0 (Zdroj: Obslužný systém [online], 2015)

Dalším příkladem může být Markovský systém s jednou linkou a neomezenou frontou: M/M/1/∞ (obr. 6).

V tomto systému vstupní tok je charakterizován exponenciálním rozdělením příchoďů požadavků s intenzitou  $\lambda$ , náhodnou veličinou  $1/\mu$ , která určuje délku obsluhy. Systém není stabilní, pokud přijímá více požadavků, než je linka schopna obsloužit za jednotku času, tj.  $\lambda \geq \mu$ .

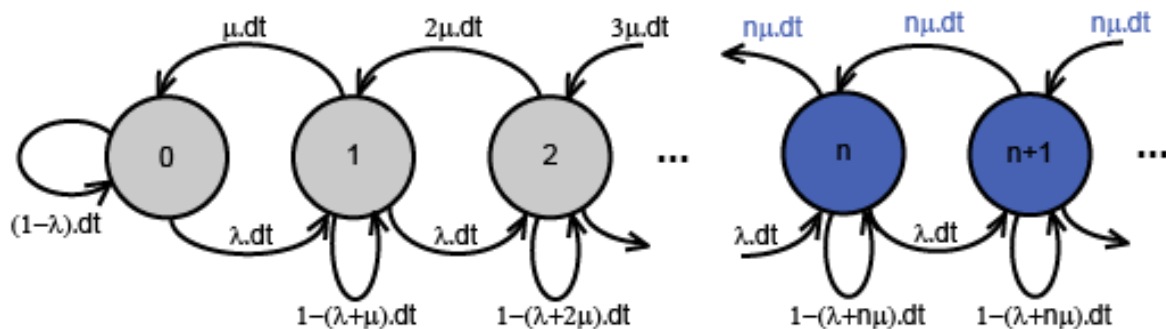


Obr. 6 – Graf přechodů v SHO typu M/M/1/∞ (Zdroj: Obslužný systém [online], 2015)

Markovský systém M/M/n/r je systém hromadné obsluhy s  $n$  linkami obsluhy a omezenou frontou. Intervaly mezi příchody požadavků a délka obsluhy jsou náhodnými veličinami s exponenciálním rozdělením.

M/M/n/∞ je typem Markovského systému s  $n$  linkami obsluhy a neomezenou frontou (obrázek 7).





Obr. 7 – Graf přechodů v SHO typu M/M/n/∞ (Zdroj: Obslužný systém [online], 2015)

### 3.4 Základní výpočty u jednotlivých typů SHO

Obrovský počet předpokladů, za kterých probíhá vytváření front, je faktorem, který brání analýze všech možných vznikajících situací v SHO. Z toho důvodu je třeba vždy počítat se s typem SHO, který analyzujeme a používat vhodné vzorce k výpočtům.

#### 3.4.1 SHO s jedním kanálem obsluhy a odmítnutím

Příkladem tohoto typu SHO je např. telefonní ústředna: pokud je telefonní linka obsazena (jednotka žádá o vstup), žádost je odmítnuta a vystupuje ze systému. Aby požadavek byl uspokojen, musí jednotka opakovaně vstoupit do systému a bude posuzovaná jako nová. Tento systém je nazýván *systémem s odmítnutím*.

Vstupní tok (např. tok požadavků na telefonní ústředně) je charakterizován **intenzitou**  $\lambda$  – frekvencí vstupu jednotek do SHO za interval času.

Lze říci, že hlavními parametry efektivity SHO s odmítnutím jsou:

- absolutní propustní schopnost SHO ( $A$ ) – průměrný počet vstupujících jednotek, které může obsloužit systém za určité období;
- relativní propustní schopnost SHO ( $B$ ) – podíl průměrného počtu vstupujících jednotek, které může obsloužit systém za určité období, a průměrného počtu jednotek, které vstoupily do systému za této období.

V některých praktických příkladech jsou používány i další ukazatele efektivity SHO, například průměrný počet obsazených kanálů, průměrná doba prostoje systému, průměrný relativní čas prostoje jednoho kanálu apod.

Tento systém má dva možné stavy:  $S_0$  – linka obsluhy je volná,  $S_1$  – linka je obsazena.

Systém, který má dva možné stavy ( $S_0$  a  $S_1$ ), lze vyjádřit matematicky (3):

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \mu p_1 = \lambda p_0 \end{cases}$$

Logicky, že  $p_0 + p_1 = 1$  (např. systém se nachází ve stavu  $S_0$  30% času, ve stavu  $S_1$  – zbytek času – 70 %.  $30\% + 70\% = 100\%$  nebo v číselném vyjádření – 1).

Výše uvedený systém rovnic (3) upravíme následujícím způsobem:

$$\lambda p_0 = \mu p_1$$

$$\lambda p_0 + \lambda p_1 = \mu p_1 + \lambda p_1$$

$$\lambda (p_0 + p_1) = p_1 (\mu + \lambda)$$

$$\lambda * 1 = p_1 (\mu + \lambda)$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad (4)$$

Stejným způsobem dostaneme:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad (5)$$

Tyto dva vzorce - (4) a (5) vyjadřují průměrný relativní čas, kdy se systém nachází ve stavu  $S_0$  (systém je volný) a průměrný relativní čas, kdy se systém nachází ve stavu  $S_1$  (je obsazený). Tj. určují relativní propustní schopnost systému ( $Q$ ) a pravděpodobnost odmítnutí ( $P_{odm}$ ).

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad (6)$$

$$P_{odm} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad (7)$$

Z toho důvodu, že systém má pouze 2 možné stavy, pravděpodobnost odmítnutí lze bylo vypočítat i jednodušším způsobem:

$$P_{odm} = 1 - Q \quad (8)$$

Absolutní propustní schopnost dostaneme násobením relativní propustní schopnosti  $Q$  na intenzitu toku vstupujících požadavků:

$$A = Q * \lambda \quad (9)$$

	Název	Symbol
1	Intenzita vstupního toku jednotek	$\lambda$
2	Intenzita obsluhy (výstupního toku uspokojených jednotek)	$\mu$
3	Intenzita provozu SHO	$\rho$
4	Průměrná doba obsluhy jednotky	$x_n; t_n$
5	Relativní propustní schopnost SHO	$Q$
6	Absolutní propustní schopnost SHO	$A$
7	Pravděpodobnost obsluhy jednotky	$P_{ob}$
8	Pravděpodobnost odmítnutí jednotky	$P_{odm}$

Tab. 2 – Seznam parametrů pro SHO s jedním kanálem obsluhy a s odmítnutím

Pokud víme  $\lambda$  a  $\mu$ , lze najít další parametry:  $t_n, \rho, q, A, P_{ob}, P_{odm}$ .

### 3.4.2 SHO s neomezeným čekáním

Jako ukazatele efektivity SHO s neomezeným čekáním jsou využívány následující parametry:

- průměrný počet jednotek ve frontě,
- průměrný počet jednotek v obslužném kanálu (které jsou obsluhovány v tomto období),
- průměrná doba čekání jednotky ve frontě;
- průměrná doba trvání obsluhy.

Seznam symbolů je uveden v tabulce 3.

Z toho důvodu, že v SHO s neomezeným očekáváním je každá jednotka obsloužena, pro tyto systémy se absolutní propustní schopnost rovná intenzitě vstupního toku.

	Název	Symbol
1	Délka fronty	$\infty$
2	Intenzita vstupního toku jednotek	$\lambda$
3	Intenzita obsluhy (výstupního toku uspokojených jednotek z 1 kanálu obsluhy)	$\mu$
4	Intenzita provozu SHO	$p$
5	Pravděpodobnost toho, že kanál obsluhy je volný a může obsloužit jednotku	$p_0$
6	Pravděpodobnost toho, že je kanál obsazen a ve frontě nejsou jednotky	$p_1$
7	Pravděpodobnost toho, že je SHO obsazen, ve frontě je 1, 2, ..., $m$ jednotek	$p_2, \dots, p_{m+1}$
8	Relativní propustní schopnost SHO	$q$
9	Absolutní propustní schopnost SHO	$A$
10	Pravděpodobnost obsluhy jednotky	$P_{ob}$
11	Pravděpodobnost odmítnutí jednotky	$P_{odm}$
12	Průměrný počet jednotek ve frontě	$\bar{r}$
13	Průměrný počet jednotek v systému (ve frontě a v kanálech obsluhy)	$\bar{k}$
14	Průměrný čas čekání jednotky ve frontě	$\bar{t}_{ček}$
15	Průměrný čas přítomnosti jednotky v SHO	$\bar{t}_{SHO}$

Tab. 3 – Seznam parametrů pro SHO s jedním kanálem obsluhy a neomezeným čekáním

Vypočítat efektivitu tohoto typu SHO lze pomocí následujících vzorců.

Parametry  $\lambda$  a  $\mu$  jsou známé. Je třeba vypočítat  $p, p_0, p_1, p_2, \dots, p_{m+1}, q, A, P_{ob}, P_{odm}, \bar{r}, \bar{k}, \bar{t}_{ček}, \bar{t}_{SHO}$ . Pokud je  $p < 1$ , je systém stabilní.

$$p = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \quad (10)$$

$m \rightarrow \infty$ , proto:

$$\begin{cases} p_0 = 1 - p \\ p_k = p^k \cdot p_0, k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$P_{odm} = 0 \quad (11)$$

$$q = 1 - P_{ob} \quad (12)$$

$$A = \lambda \quad (13)$$

$$\bar{r} = \frac{p^2}{1-p} \quad (14)$$

$$\bar{k} = \frac{p}{1-p} \quad (15)$$

$$\bar{t}_{\text{ček}} = \frac{p^2}{\lambda(1-p)} \quad (16)$$

$$\bar{t}_{SHO} = \frac{1}{\mu(1-p)} \quad (17)$$

### 3.4.3 SHO s omezeným čekáním

U **SHO s omezeným čekáním** jsou jako ukazatele efektivity najednou využívány ukazatele efektivity SHO s odmítnutím a ukazatele efektivity SHO s neomezeným očekáváním (tabulka 4).

	Název	Symbol
1	Délka fronty	$m (m > 0)$
2	Intenzita vstupního toku jednotek	$\lambda$
3	Intenzita obsluhy (výstupního toku uspokojených jednotek z 1 kanálu obsluhy)	$\mu$
4	Intenzita provozu SHO	$p$
5	Pravděpodobnost toho, že kanál obsluhy je volný a může obsloužit jednotku	$p_0$
6	Pravděpodobnost toho, že je SHO obsazen a ve frontě nejsou jednotky	$p_1$
7	Pravděpodobnost toho, že je SHO obsazen, ve frontě je 1, 2, ..., $m$ jednotek	$p_2, \dots, p_{m+1}$
8	Relativní propustní schopnost SHO	$q$
9	Absolutní propustní schopnost SHO	$A$
10	Pravděpodobnost obsluhy jednotky	$P_{ob}$
11	Pravděpodobnost odmítnutí jednotky	$P_{odm}$
12	Průměrný počet jednotek ve frontě	$\bar{r}$
13	Průměrný počet jednotek v systému (ve frontě a v kanálech obsluhy)	$\bar{k}$
14	Průměrný čas čekání jednotky ve frontě	$\bar{t}_{ček}$
15	Průměrný čas přítomnosti jednotky v SHO	$\bar{t}_{SHO}$

Tab. 4 – Seznam používaných parametrů pro SHO s omezeným čekáním

Parametry  $m, \lambda$  a  $\mu$  jsou známé. Je třeba vypočítat:  $p, p_0, p_1, p_2, \dots, p_{m+1}, q, A, P_{ob}, P_{odm}, \bar{r}, \bar{k}, \bar{t}_{ček}, \bar{t}_{SHO}$ .

Vzorce pro výpočet:

$$p = \frac{\lambda}{\mu} \quad (18)$$

Pravděpodobnosti  $p_0, p_1, \dots, p_{m+1}$  jsou vypočítávány podle následujících vzorců:

$$\begin{cases} p_0 = \begin{cases} \frac{1-p}{1-p^{m+2}}, p \neq 1 \\ \frac{1}{m+2}, p = 1 \end{cases} \\ p_k = p^k \cdot p_0, k = 1, 2, \dots, m+1 \end{cases} \quad (19)$$

Z toho důvodu, že je jednotka odmítnuta v případě obsazenosti SHO, a je ve frontě  $m$  jednotek, to:

$$P_{odm} = p_{m+1} \quad (20)$$

Dále máme:

$$q = P_{o\bar{o}} = 1 - p_{m+1} \quad (21)$$

$$A = \lambda q \quad (22)$$

Jsou také pravdivé vzorce:

$$\bar{r} = \begin{cases} \frac{p^2[1-p^m(m+1-mp)]}{(1-p^{m+2})(1-p)}, p \neq 1 \\ \frac{m(m+1)}{2(m+2)}, p = 1 \end{cases} \quad (23)$$

$$\bar{k} = \bar{r} + 1 - p_0 \quad (24)$$

$$\bar{t}_{\text{ček}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} \quad (25)$$

$$\bar{t}_{\text{SHO}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} + \frac{q}{\mu} \quad (26)$$

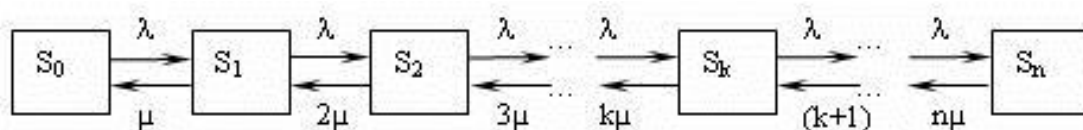
#### 3.4.4 SHO s větším počtem linek obsluhy

Při zkoumání **SHO s větším počtem linek obsluhy** jsou navíc využívány parametry, popisující každý kanál (tabulka 5).

	Název	Symbol
1	Počet kanálů obsluhy	$n$ ( $n > 1$ )
2	Intenzita vstupního toku jednotek	$\lambda$
3	Intenzita obsluhy (výstupního toku uspokojených jednotek z 1 kanálu obsluhy)	$\mu$
4	Intenzita provozu SHO	$p$
5	Pravděpodobnost obsazenosti 0, 1, ..., $n$ kanálů	$p_0, p_1, \dots, p_n$
6	Relativní propustní schopnost SHO	$q$
7	Absolutní propustní schopnost SHO	$A$
8	Pravděpodobnost obsluhy jednotky	$P_{ob}$
9	Pravděpodobnost odmítnutí jednotky	$P_{odm}$
10	Průměrný počet obsazených kanálů	$\bar{k}$

Tab. 5 – Seznam používaných parametrů pro SHO s několika kanály obsluhy

Pokud systém má několik linek obsluhy a nenabízí možnost utváření fronty (systém s odmítnutím), systém má následující schéma.



Obr. 7 – Schéma SHO firmy s větším počtem linek obsluhy a odmítnutím (zdroj: autor)

Systém má určitý počet stavů  $\{0; k\}$ :

$S_0$  – všechny linky jsou volné,  $k = 0$ ;

$S_1$  – pouze jedná linka je obsazena,  $k = 1$ ;

$S_2$  – obsazeny jsou 2 linky,  $k = 2$ ;

.....

$S_k$  – jsou obsazeny  $k$  linek;

.....

$S_n$  – obsazeny jsou všechny  $n$  linek.



Pro přehlednost stavů systému lze použít také tzv. *matici stavů SHO* (obr. 8). První sloupec znamená skutečné stavy systému, v následujících jsou uváděny potenciální přechody z jednoho stavu do druhého. Poslední sloupec uvádí součet pravděpodobnosti všech přechodů systému z jednoho stavu do druhého, který se vždy rovná jedničce. (Černov, 2000, s. 251)

Stav	S <sub>0</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>k</sub>	P
S <sub>0</sub>	S <sub>0,0</sub>	S <sub>0,1</sub>	S <sub>0,k</sub>	1
S <sub>1</sub>	S <sub>1,0</sub>	S <sub>1,1</sub>	S <sub>1,k</sub>	1
S <sub>k</sub>	S <sub>k,0</sub>	S <sub>k,1</sub>	S <sub>k,k</sub>	1

Obr. 8 – Matice stavů SHO (zdroj: autor)

Extrémní pravděpodobnosti jsou vypočítávány dle Erlangového vzorce (Ryžikov, 2001, s. 105):

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1} \quad (27)$$

Kde  $\rho$  – intenzita zatíženosti linky.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (28)$$

Intenzita obsluhy 1 linky:

$$\mu = I / \bar{t}_{ob} \quad (29)$$

$$p_1 = \rho p_0 \quad (30)$$

$$p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0 \quad (31)$$

$$p_3 = \frac{\rho^3}{3!} p_0 \quad (32)$$

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \quad (33)$$

Vzhledem k tomu, že jednotka je odmítnuta, pokud jsou všechny kanály obsluhy obsazeny, to:

$$P_{odm} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \quad (34)$$

$$Q = 1 - P_{odm} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \quad (35)$$

$$A = \lambda Q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right) \quad (36)$$

$\bar{k}_{obs}$  – průměrný počet obsazených linek, vzorec pro výpočet:

$$\overline{k_{obs}} = \sum_{k=0}^n k p_k = \frac{A}{\mu} = \rho \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right) \quad (37)$$

## 4 Praktická část

V této kapitole bylo využito znalostí a vzorců pro analýzu SHO, uvedených v teoretické části práce. Jsou zde zkoumány několik typů SHO na příkladu společnosti Infobus.

Společnost Infobus se začínala podnikat v odvětví autobusové dopravy ve Východní a Západní Evropě. Nabízí kompletní informace o spojích, prodává jízdenky a letenky, organizuje ubytovací a soukromé dopravní služby, provádí směnářenskou činnost.

Sídlo společnosti: Na Florenci 1332/23, Florenc, 110 00 Praha-Praha 1, Česká republika



Obr. 9 – Logo společnosti Infobus

Společnost Infobus považuje za velmi důležité nabízet svým zákazníkům informace o spojích a letech co nejrychleji a v nejkompletnější podobě. Z toho důvodu operativní práce se zákazníky a rychlý přístup k informacím jsou základním východiskem pro efektivní činnost firmy.

V této práci analyzuji systém hromadné obsluhy zákazníků ve firmě Infobus. Část zákazníků firmy objednává jízdenky a letenky telefonicky. Telefonní služby jsou dostupné zákazníkům v pracovní dny (8:00 – 19:00), i o víkendech (9:00 – 18:00). Momentálně ve firmě Infobus pracují 4 operátoři.

Vybraným příkladem systému hromadné obsluhy je *proces telefonického prodeje jízdenek a letenek*.

Cílem řešení tohoto příkladu je určit, kolik aktivních operátorů (telefonů) musí být ve firmě za různých podmínek, aby byl systém optimalizován.

*Předpoklady optimálně fungující firmy:*

- minimalizován počet odmítnutých zákazníků (z toho důvodu, že všichni operátoři jsou obsazeni),
- minimalizován počet stavů, kdy systém není vytížen a jsou marně spotřebovávány zdroje firmy.

Ve firmě může dojít ke *dvěma extrémním stavům* (základní problémy):

- příliš mnoho požadavků (vzhledem k tomu, že požadavek je odmítnut, pokud jsou všichni operátoři obsazeni – neutváří se fronta, ale ztracují se zákazníci);
- systém (operátoři) není vytížen, ale jsou spotřebovávány firemní zdroje (náklady na provoz, náklady na pracovní sílu apod.).

Jsou stanoveny následující *cíle*:

- zanalyzovat vybraný systém,
- určit vhodný vztah a vhodné pro něho parametry (počet operátorů).

Reálná situace ve firmě není tak jednoduchá, protože množství vyskytujících požadavků (volajících zákazníků) je ovlivněna různými faktory, které nelze 100-procentně odhadnout. Z rozhovoru s manažerem firmy byly určeny několik hlavních faktorů, které ovlivňují počet zákazníků. Jsou to:

- pracovní den vs. víkend,
- denní doba,
- období zavedení slev,

Dalším cílem zkoumání vybraného systému je maximálně přiblížit ho do reálných podmínek a *doporučit vhodný systém vzhledem k výše uvedeným faktorům*.

K dosažení těchto cílů je třeba zaprvé provést *sběr dat*.

#### **4.1.1 Sběr dat**

Před skutečným sběrem dat byl proveden rozhovor s manažerem firmy Infobus. Byly zjištěné některé fakta o společnosti, které jsou dále v práci používány.

Zprv e byl zjiřt en průměrný *počet volajících firmě za hodinu* ( $\lambda$ ). Operátor vždy dostává oznámení o zmeřkan ych hovorech, proto lze spo ıtat nejen realizovány hovory, ale veřker e p ıchoz ı volání, v četně zmeřkan ych.

Pro potřeby navrhování vhodného systému byl spo ıt an zvl ařt' průměrný počet volajících pro tyto období:

- v pracovní dny a o víkendech,
- během celého dne,
- v době zavedení slev. Vedením firmy byla poskytnuta informace, že zpravidla slevy jsou zaváděny p řed Vánocemi a Silvestrem (prosinec). Ve v ypo ech byly pou ıt e údaje za prosinec 2015 – jako *období zavedení slev* a údaje za říjen jako *běžné období*. Díky tomu, že firma pravideln e eviduje počet volání a přací každého zam eřtnance telefonní linky, získat a roztřídit tyto data bylo dost jednoduchým procesem.

Výsledky osobního pozorování a výpočty uvádí následující tabulka íslo 6.

	Pracovní hodiny	Běžné období	Období zavedení slev
		Počet hovorů	Počet hovorů
Pracovní dny (pondělí – pátek) (11 pracovních hod.)	8-9:00	75	81
	9-10:00	90	91
	10-11:00	81	85
	11-12:00	80	76
	12-13:00	95	101
	13-14:00	101	99
	14-15:00	88	81
	15-16:00	65	74
	16-17:00	70	99
	17-18:00	81	104
	18-19:00	86	105
<i>Celkem za den</i>		912	996
<b>Průměr za 1 hod.</b>		<b>82,9</b>	<b>90,5</b>
<b>Průměr pro pracovní dny</b>		<b>86,7</b>	
Víkendy (sobota, neděle) (9 pracovních hod.)	9-10:00	57	61
	10-11:00	73	78
	11-12:00	91	90
	12-13:00	87	89
	13-14:00	99	101
	14-15:00	105	100
	15-16:00	115	113
	16-17:00	99	102
17-18:00	79	90	
<i>Celkem za den</i>		805	824
<b>Průměr za 1 hod.</b>		<b>89,4</b>	<b>91,6</b>
<b>Průměr pro víkendy</b>		<b>90,5</b>	
<b>Průměr za týden</b>		<b>86,2</b>	<b>91,1</b>

Tab. 6 – Počet a délka hovorů (vlastní zpracování a výpočty, interní zdroje firmy)

Pak byla sledována *průměrná délka hovoru* (průměrná délka trvání obsluhy jednoho požadavku –  $\bar{t}_{ob}$ ). Údaje o průměrné délce hovorů byly vypočítány na základě protokolů o telefonních hovorech za 12. a 29. října 2015, které také poskytovala firma.

Podle slov vedoucích pracovníků firmy se délka hovorů výrazně neliší v pracovní dny a víkendy, v běžné období a období zavedení slev, či během dne. Z toho důvodu dále je používána pouze průměrná délka hovoru, která na základě výpočtů *stanoví 2 minuty 13 sekund*. Pro zjednodušení výpočtu se dále bude použita průměrná délka hovoru – *2 minuty*.

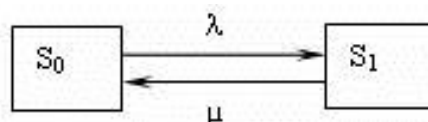
#### 4.1.2 Analýza efektivity SHO firmy, pokud pracuje 1 operátor

Tato subkapitola je věnována analýze extrémního stavu SHO firmy, pokud pracuje pouze jeden telefonní operátor a tok příchozích hovorů (požadavků) je konstantní (podle tab. 6). Tento stav může nastat např. z důvodu provedení určité personální činnosti ve firmě nebo problémů s lidskými zdroji.

Předpokládáme, že firma má pouze jednoho operátora, který přijímá telefonní hovory. To znamená, že systém má jednu linku obsluhy a dochází k odmítnutí požadavků, pokud je linka obsazena. V této subkapitole analyzujeme SHO firmy jako systém s jednou linkou obsluhy a odmítnutím.

Systém ve sledované firmě může mít pouze 2 stavy (obrázek 10):

- $S_0$  – linka je volná (není příchozí hovor, nejsou obsluhováni zákazníci),
- $S_1$  – linka je obsazena (je příchozí hovor, operátor obsluhuje zákazníka).



Obr. 10 – Schéma SHO firmy, pokud pracuje pouze 1 operátor (zdroj: autor)

Je známo, že vstupující tok požadavků (volajících) má intenzitu  $\lambda$ , která se rovna 86 požadavkům za hodinu<sup>1</sup>. Průměrná délka hovoru (obsluhy)  $\bar{t}_{ob}$  se rovna 2 minutám.

Je třeba vypočítat ukazatele efektivity SHO, pokud je přítomna pouze jedna linka obsluhy (1 operátor a 1 telefon).

#### Řešení:

<sup>1</sup> Byl použit průměrný počet hovorů za celý týden běžného období.

Intenzita obsluhy je:

$$\mu = 1 / \bar{t}_{ob} = 1 / 2 \text{ min} = 30 \text{ hovorů za hodinu.}$$

Pomocí vzorce (6) můžeme vypočítat ukazatele pro sledovaný systém:

$$Q = 30 / (86+30) = 0,26.$$

Tzn. že v průměru pouze 26 % požadavků jsou uspokojovány, ostatní jsou odmítnuté. Dle vzorce (7):

$$P_{odm} = 86 / (86+30) = 0,74.$$

Pravděpodobnost odmítnutí lze bylo vypočítat i jednodušším způsobem (8), dostaneme stejný výsledek –  $P_{odm} = 0,74$ .

Absolutní propustní schopnost dostaneme dle vzorce (9):

$$A = 0,26 * 86 = 22,4$$

tzn. že v průměru jsou uspokojeny 22,4 požadavků za hodinu.

Z těchto výpočtu lze udělat logicky závěr, že SHO s jedním kanálem obsluhy (1 telefonním operátorem) je málo efektivní a dochází k vysokému počtu omítnutých požadavků (firma ztrácuje zákazníky).

Zvýšit efektivitu podniku lze zavedením dalších kanálů obsluhy (telefonních operátorů). V tomto případě se stává SHO systémem s několika kanály obsluhy a odmítnutím.

V současné době má firma 4 kanály obsluhy. Následující subkapitola analyzuje efektivitu firemního SHO s 4 linky obsluhy.

### **4.1.3 Analýza efektivity skutečného SHO firmy**

SHO s větším počtem kanálu obsluhy a odmítnutím.

Pro výpočet ukazatelů efektivity SHO je používány klasický Erlangův vzorec.



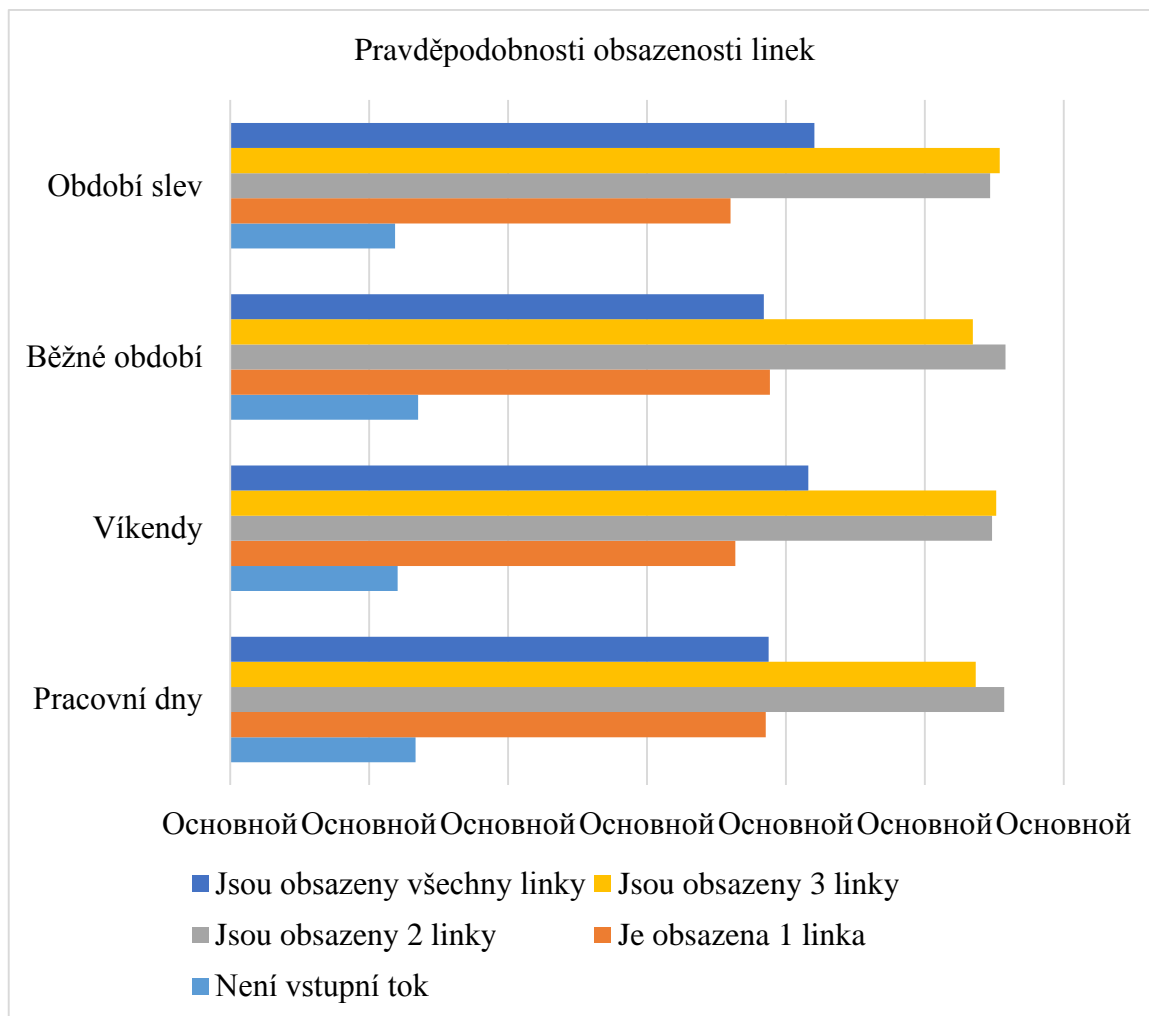
Následující tabulka číslo 7 uvádí výpočty pro současný SHO firmy s 4 linky obsluhy a odmítnutím (neutváří se fronta). Ukazatelé SHO byly vypočítány pro pracovní dny, víkendy, pro běžné období a období zavedení slev.

Symbol	Název	Vzorec	Pracovní dny	Víkendy	Běžné období	Období slev
$n$	Počet linek obsluhy		4	4	4	4
$\lambda$	Intenzita vstupů		86,7	90,5	86,2	91,1
$\bar{t}_{ob}$	Doba trvání obsluhy 1 požadavku	<i>Min.</i>	2	2	2	2
		<i>Hod.</i>	0,03	0,03	0,03	0,03
$\mu$	Intenzita obsluhy 1 linky	(29)	30	30	30	30
$\rho$	Intenzita zatíženosti linky	(28)	2,89	3,02	2,87	3,04
$p_0$	Extrémní pravděpodobnost – není vstupní tok	(27)	0,0667	0,0603	0,0676	0,0593
$p_1$	Pravděpodobnost obsazenosti pouze 1 linky	(30)	0,1927	0,1818	0,1942	0,1801
$p_2$	Pravděpodobnost obsazenosti 2 linek	(31)	0,2785	0,2742	0,2790	0,2735
$p_3$	Pravděpodobnost obsazenosti 3 linek	(32)	0,2683	0,2757	0,2672	0,2769
$p_n$	Extrémní pravděpodobnost obsazenosti všech linek	(33)	0,1938	0,2080	0,1920	0,2102
$P_{odm}$	Pravděpodobnost odmítnutí	(34)	0,1938	0,2080	0,1920	0,2102
$Q$	Relativní propustní schopnost	(35)	0,8062	0,7920	0,8080	0,7898
$A$	Absolutní propustní schopnost	(36)	69,90	71,68	69,65	71,95
$\bar{k}_{obs}$	Průměrný počet obsazených linek	(37)	2,33	2,39	2,32	2,40

Tab. 7 – Ukazatele efektivity SHO s 4 linky obsluhy a odmítnutím (zdroj: autor)

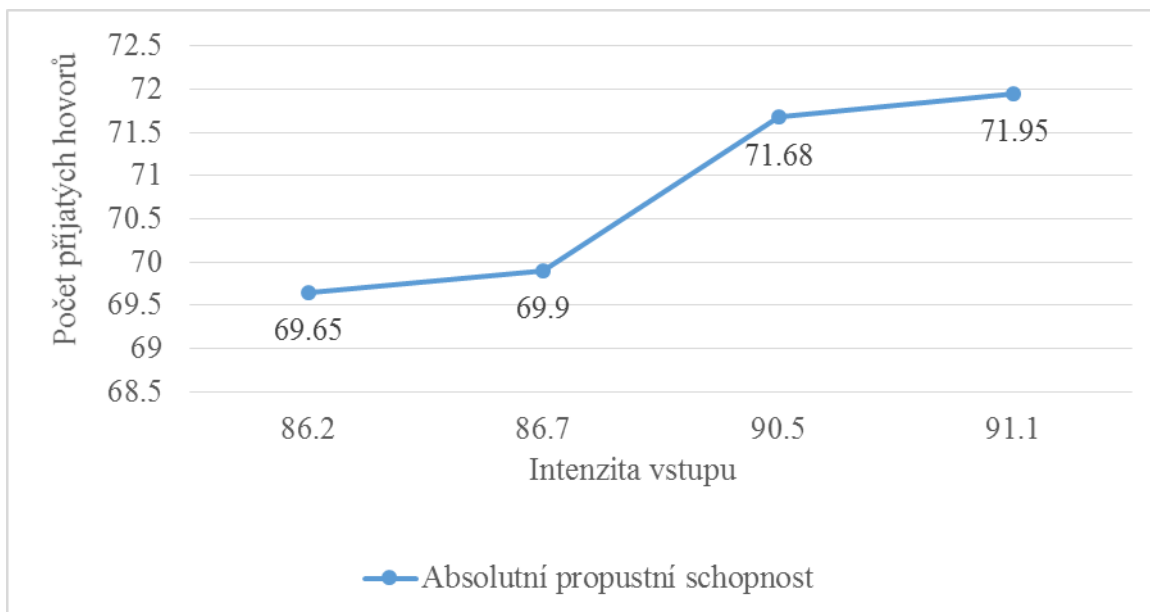
Bylo zjištěno, že nejvyšší intenzita přichozích hovorů je v období slev (v průměru 91,1 hovor za hodinu). Z toho důvodu je v tomto období nejvíce zatížena každá linka obsluhy (3,04).

Pravděpodobnosti, že se nachází systém ve stavech, kdy je obsazen žádný, jeden, dva, tři či všechny linky obsluhy, znázorňuje následující graf číslo 1.



Graf 1 – Pravděpodobnosti stavů SHO v jednotlivá období (zdroj: autor)

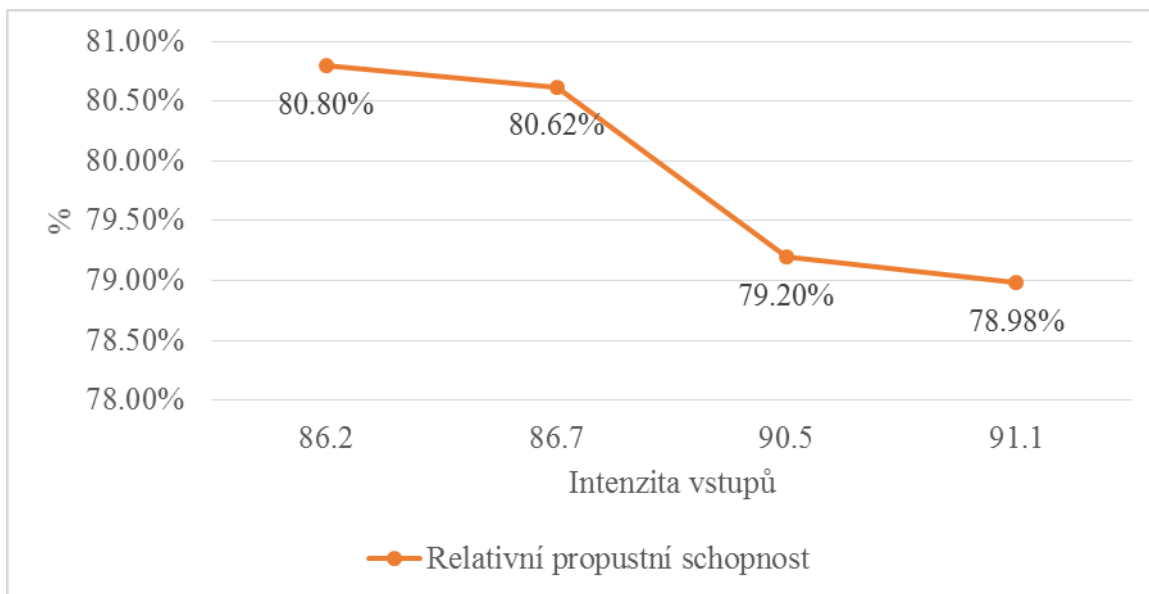
V jakémkoliv období je cca 20-ti procentní pravděpodobnost, že jsou všechny linky obsazeny, tj. vstupní požadavek je odmítnut a firma ztrácí cca 18 zákazníků za hodinu (20 % z celkového počtu vstupujících požadavků za hodinu – 90).



Graf 2 – Závislost absolutní propustné schopnosti a intenzity vstupů (zdroj: autor)

Graf 2 popisuje závislost absolutní propustné schopnosti  $A$  a intenzity vstupujících požadavků sledovaného SHO. Počítá se zde s průměrnou délkou uspokojení jednoho požadavku a počtem linek obsluhy. Čím intenzivnější vstupní tok, tím více požadavků se snaží linky obsluhy (operátoři) uspokojit. Nicméně nestíhají uspokojit veškeré požadavky a dochází k odmítnutím.

Další graf uvádí současnou relativní propustnou schopnost  $Q$  sledovaného SHO s znázorňuje závislost relativní propustné schopnosti a intenzity vstupů  $\lambda$  sledovaného SHO s 4 linky obsluhy. Je vidět, že čím větší je intenzita vstupujících požadavků, tím menší jejich podíl je uspokojován 4 linkami obsluhy.



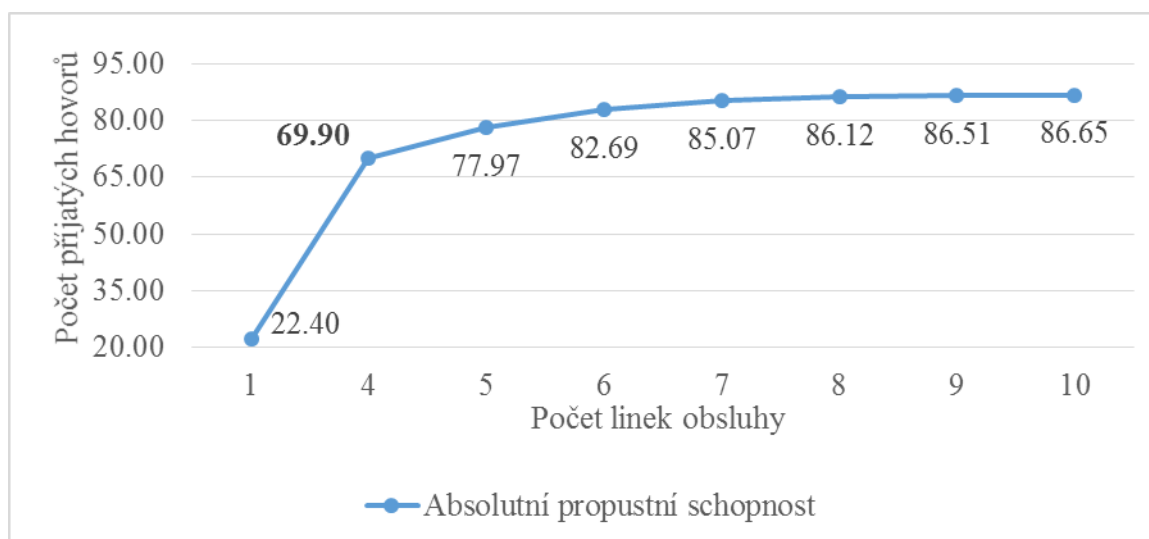
Graf 3 – Závislost relativní propustné schopnosti a intenzity vstupů (zdroj: autor)

#### 4.1.4 Analýza efektivity SHO firmy se zvýšením počtu linek obsluhy

Na základě zjištěných ukazatelů efektivity SHO s existujícím počtem kanálů obsluhy navrhuji zvětšit počet linek obsluhy vzhledem k vysoké intenzitě vstupního toku. Dále uvádím přepočty ukazatelů pro stejné intenzity vstupu a délku obsluhy jednoho požadavku. Zprvce jsou to výpočty pro pracovní dny, kdy intenzita vstupu je průměrně 86,7 požadavků za hodinu.

Symbol	Počet linek obsluhy					
	5	6	7	8	9	10
$n$	5	6	7	8	9	10
$\lambda$	86,7	86,7	86,7	86,7	86,7	86,7
$\bar{t}_{ob}$	2	2	2	2	2	2
	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
$\mu$	30	30	30	30	30	30
$\rho$	2,89	2,89	2,89	2,89	2,89	2,89
$p_0$	0,0600	0,0572	0,0561	0,0557	0,0556	0,0556
$P_{odm}$	0,1007	0,0463	0,0187	0,0067	0,0022	0,0006
$Q$	0,8993	0,9537	0,9813	0,9933	0,9978	0,9994
$A$	77,97	82,69	85,07	86,12	86,51	86,65
$\bar{k}_{obs}$	2,60	2,76	2,84	2,87	2,88	2,89

Tab. 8 – Parametry SHO s 5-10 linky obsluhy a odmítnutím v pracovní dny (zdroj: autor)



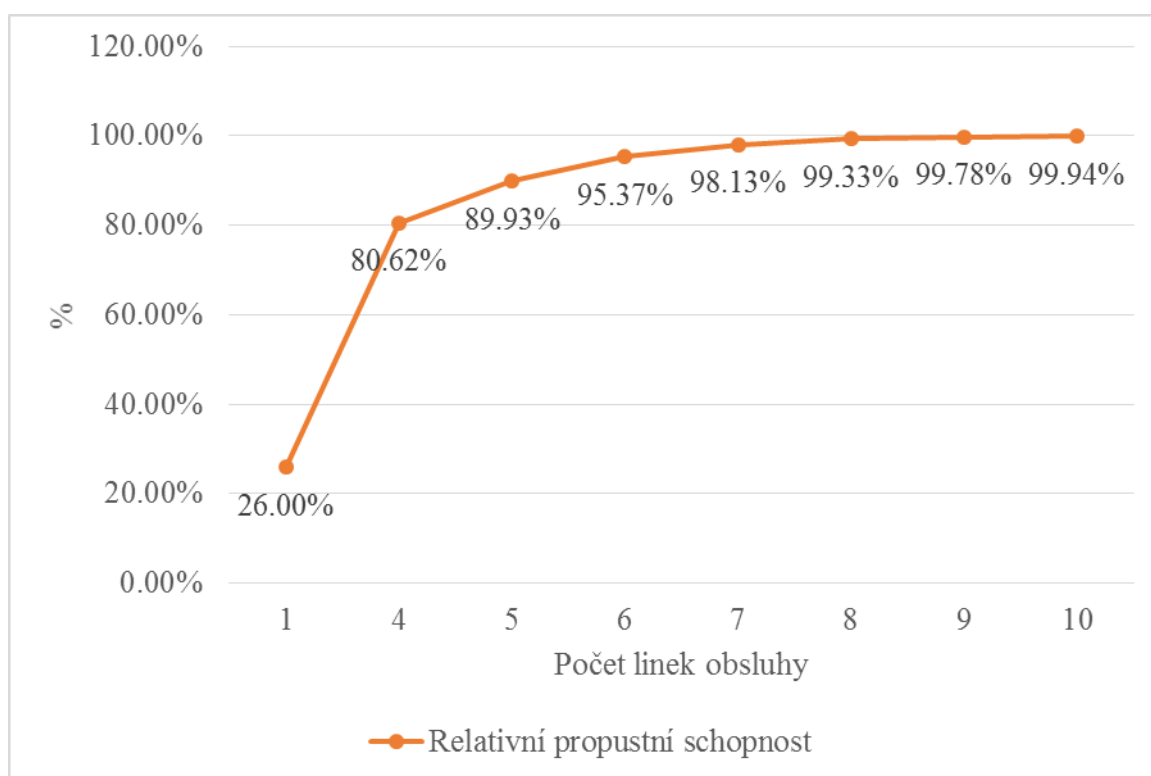
Graf 4 – Závislost absolutní propustné schopnosti a počtu linek obsluhy (zdroj: autor)

Graf 4 popisuje závislost absolutní propustné schopnosti  $A$  a počtu linek obsluhy v SHO. Je vidět, že absolutní propustná schopnost, která je ve skutečnosti (69,9%), je nejmenší ze všech variant SHO s různým počtem linek obsluhy. Absolutní propustná schopnost SHO s 10 linky obsluhy (86,65%) je nejbližší k intenzitě vstupu (86,7%). Lze předpokládat, že zaokrouhlení výsledků během výpočtu také může vyvolat odchylku méně než 1.

Relativní propustná schopnost  $Q$  významně roste při zvětšení počtu linek obsluhy od 1 do 5 (26% - 1 linka obsluhy, 80,62 % - 4 linky, 89,93 % - 5 linek obsluhy), pak roste už

jenom pomalu (od 89,93 % do 99,94 %) (graf 5). Z toho důvodu doporučuji použít průměrný počet linek obsluhy – např. 7, protože se pak začíná relativní propustná schopnost zvyšovat jen málo.

Nejvyšší relativní propustná schopnost (99,94 %) je však v případě přítomnosti 10 operátorů.



Graf 5 – Závislost relativní propustné schopnosti a počtu linek obsluhy (zdroj: autor)

Výpočty efektivity SHO obdobným způsobem byly provedeny i pro další období: víkendy, běžné období a období slev. Výsledky uvádí následující tabulky 9, 10 a 11.

Symbol	Víkendy					
n	5	6	7	8	9	10
$\lambda$	90,5	90,5	90,5	90,5	90,5	90,5
$\bar{t}_{ob}$	0,033333	0,033333	0,033333	0,033333	0,033333	0,033333
$\mu$	30,0003	30,0003	30,0003	30,0003	30,0003	30,0003
$\rho$	3,02	3,02	3,02	3,02	3,02	3,02
$p_0$	0,0535	0,0507	0,0496	0,0492	0,0490	0,0490
$P_{odm}$	0,1115	0,0531	0,0224	0,0084	0,0028	0,000842
$Q$	0,8885	0,9469	0,9776	0,9916	0,9972	0,9992
$A$	80,41	85,70	88,48	89,74	90,25	90,42
$\bar{k}_{obs}$	2,68	2,86	2,95	2,99	3,01	3,01

Tab. 9 – Ukazatele SHO s 5-10 linky obsluhy a odmítnutím o víkendech (zdroj: autor)

Relativní propustná schopnost v případě provozu výše doporučených 7 linek je 97,76 %, což je považováno za dostatečně vysoký ukazatel. S následným zvýšením počtu linek se začíná relativní propustná schopnost růst jen málo.

	Běžné období					
n	5	6	7	8	9	10
$\lambda$	86,2	86,2	86,2	86,2	86,2	86,2
$\bar{t}_{ob}$	0,033333	0,033333	0,033333	0,033333	0,033333	0,033333
$\mu$	30,0003	30,0003	30,0003	30,0003	30,0003	30,0003
$\rho$	2,87	2,87	2,87	2,87	2,87	2,87
$p_0$	0,0609	0,0581	0,0570	0,0567	0,0566	0,0565
$P_{odm}$	0,0994	0,0454	0,0183	0,0065	0,0021	0,000597
$Q$	0,9006	0,9546	0,9817	0,9935	0,9979	0,9994
$A$	77,64	82,29	84,62	85,64	86,02	86,15
$\bar{k}_{obs}$	2,59	2,74	2,82	2,85	2,87	2,87

Tab. 10 – Ukazatele SHO s 5-10 linky obsluhy a odmítnutím v běžné období (zdroj: autor)

Intenzita vstupu v běžném období je podobná intenzitě v pracovní dny, proto výsledné ukazatele jsou také podobné. Je doporučeno provozovat 7 linek obsluhy.

	Období zavedení slev					
n	5	6	7	8	9	10
$\lambda$	91,1	91,1	91,1	91,1	91,1	91,1
$\bar{t}_{ob}$	0,033333	0,033333	0,033333	0,033333	0,033333	0,033333
$\mu$	30,0003	30,0003	30,0003	30,0003	30,0003	30,0003
$\rho$	3,04	3,04	3,04	3,04	3,04	3,04
$p_0$	0,0526	0,0498	0,0486	0,0482	0,0481	0,0480
$P_{odm}$	0,1132	0,0542	0,0230	0,0086	0,0029	0,000882
$Q$	0,8868	0,9458	0,9770	0,9914	0,9971	0,9991
$A$	80,79	86,16	89,01	90,31	90,84	91,02
$\bar{k}_{obs}$	2,69	2,87	2,97	3,01	3,03	3,03

Tab. 11 – Ukazatele SHO s 5-10 linky obsluhy a odmítnutím v období slev (zdroj: autor)

Parametry v období zavedení slev jsou obdobné parametrům o víkendu. Relativní propustná schopnost je nejvhodnější při doporučeném počtu linek obsluhy – 7. Nemá smysl zavádět další linky obsluhy v tomto období, protože bylo zjištěno, že zvýšení intenzity není příliš významné pro konečné výsledky.



## 5 Závěr

V této bakalářské práci je zohledněno téma teorie front a její praktického využití. Systémy hromadné obsluhy, které jsou založeny na teorii front, mají obrovský praktický význam v současné době a jsou používány v různých odvětvích života. Systémy hromadné obsluhy jsou různých typů, které jsou určovány pomocí následujících parametrů:

- typ vstupního toku,
- typ délky obsluhy,
- počet linek obsluhy,
- typ fronty.

Systémy hromadné obsluhy využívají v jednodušších případech Markovské systémy s Poissonovým nebo exponenciálním rozdělením pravděpodobností.

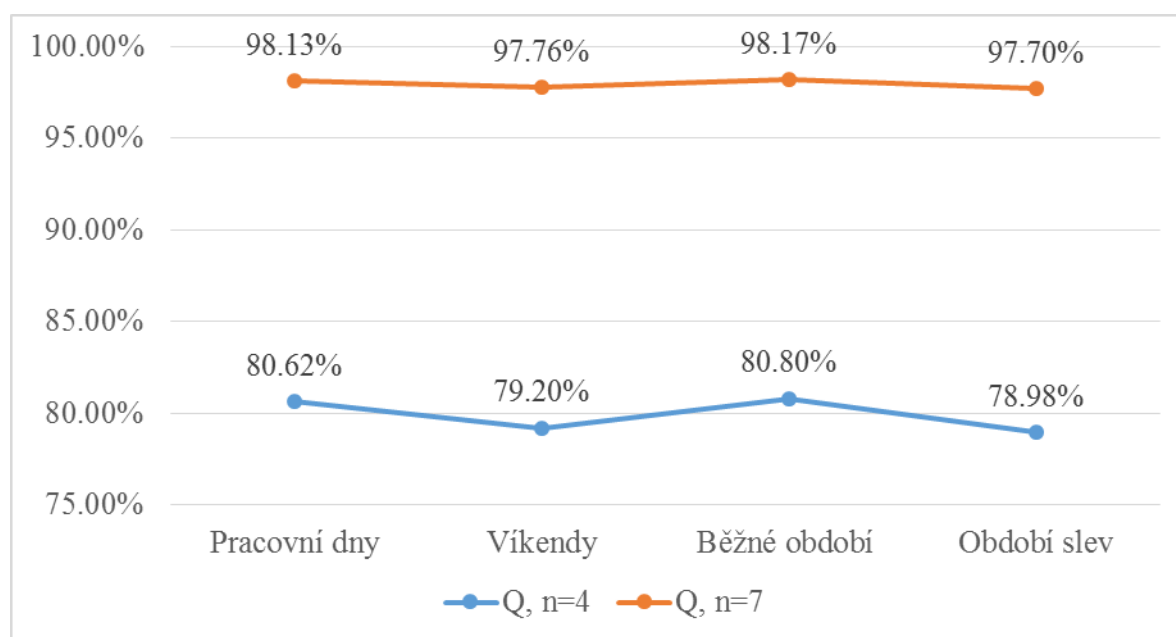
Tato práce je věnována analýze systému hromadné obsluhy ve firmě Infobus, která se zabývá telefonním prodejem jízdenek a letenek a poskytováním informačních služeb zákazníkům o jízdních a leteckých spojích. Rychlá odezva a kompletní nabídka informací zákazníkům je důležitým předpokladem efektivního podnikání podle názoru vedení firmy Infobus. Z toho důvodu je analýza existujícího systému hromadné obsluhy aktuální pro činnost této firmy.

V současné době jsou ve firmě zaměstnáni 4 operátoři, jímž volá cca 90 zákazníků za hodinu. V případě obsazenosti všech operátorů jsou příchozí hovory odmítány. Na základě těchto informací lze určit, že systém hromadné obsluhy ve firmě Infobus má 4 relativně homogenní linky obsluhy a nepředpokládá se možnost utváření fronty (systém s odmítnutím). Odmítnutí příchozích hovorů ve většině případů znamená pro firmu ztrátu zákazníků, z toho důvodu je pro ně velmi důležité určit, kolik operátorů by mělo pracovat, aby co nejvíce vstupních zákaznických požadavků bylo uspokojeno. Počet a spokojenost zákazníků jsou faktorem maximalizace zisku firmy.

Počet zákazníků je odlišný v pracovní dny a o víkendech, v běžné roční období a době zavedení firmou slev na prodej letenek či jízdenek. Byly spočítány průměrné intenzity vstupů v odlišné období. V analytické části práce jsou uvedeny výpočty ukazatelů

efektivitu pro SHO ve firmě Infobus za přítomnosti 1, 4, 5 až 10 operátorů pro různé průměrné intenzity vstupního toku.

Následující graf znázorňuje výsledky výpočtu: kolik procent příchozích hovorů je přijato v současné době (za přítomnosti 4 operátorů) a kolik bude přijato, pokud budou zaměstnáni další 3 operátoři.



Graf 6 –  $Q$  v různá období se současným a plánovaným počtem operátorů

Bylo zjištěno, že změna intenzity vstupu v jednotlivá období nemá za následek významné změny v efektivitě systému. Z toho důvodu je přípustné provozovat stejný počet linek obsluhy ve všechny období. Doporučuji celkem provozovat 7 linek obsluhy. V tomto případě je relativní propustná schopnost systému považována za efektivní.

## 6 Použité zdroje

### Seznam literatury

- [1] ČERNOV, Vladimír. *Теория массового обслуживания*. Moskva: Infra-M, 2000. 284 s. ISBN 5-16-000167-0.
- [2] DOMEOVÁ, Ludmila, BERÁNKOVÁ, Martina. *Systémy hromadné obsluhy I*. Praha: ČZU v Praze, Provozně ekonomická fakulta, 2004. ISBN 80-213-1193-2.
- [3] DUCHOŇ, Bedřich. *Inženýrská ekonomika*. 1. vydání. Praha: C. H. Beck, 2007. 288 s. ISBN 978-80-7179-763-0.
- [4] KOŠUNYAEVA, Nina, PATRONOVA, Natalia. *Теория массового обслуживания (практикум по решению задач)*. Archangelsk: SAFU, 2013. 107 s. УДК 519.111.3+519.2(07).
- [5] LAVRUS, O. a MIRONOV, F. *Теория массового обслуживания*. Samara: SGAPS, 2002. 38 s. ISBN 5-19-0924-2.
- [6] RUSSEL, Stuart, NORVIG, Peter. *Artificial Intelligence: A Modern Approach – 3rd Ed*. USA: Prentice Hall, 2009. ISBN 0-13-604259-7.
- [7] RYŽIKOV, Yuriy. *Теория очередей и управление запасами*. Pětrohrad – Piter, 2001. 384 s. ISBN: 5-318-00073-8.
- [8] SMEJKAL, Vladimír a RAIS, Karel. *Řízení rizik ve firmách a jiných organizacích*. 4., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada Publishing a.s., 2013. 483 s. ISBN 978-80-247-4644-9.
- [9] ŠMÍDA, Filip. *Zavádění a rozvoj procesního řízení ve firmě*. Praha: Grada Publishing a.s., 2007. 293 s. ISBN 978-80-247-1679-4.
- [10] VOCHOZKA, Marek, MULAČ, Petr a kol. *Podniková ekonomika*. Praha: Grada Publishing a.s., 2012. 570 s. ISBN 978-80-247-4372-1.

## Internetové zdroje

- [1] BROŽOVÁ, Helena, ŠUBRT, Tomáš, MIKULECKÝ, Miroslav. Teorie hromadné obsluhy. *Kvantitativní podpora rozhodování* [online]. 2005 [cit. 2016-1-17]. Dostupné z: <http://pef.czu.cz/~BROZOVA/CASESTUDY/tho1.html>
- [2] BUREŠ, Jiří. Agner Krarup Erlang. *Converter.cz* [online]. 2004 [cit. 2016-1-17]. Dostupné z: <http://www.converter.cz/fyzici/erlang.htm>
- [3] DURČÁK, Tomáš. Jak moc se vyplatí udržet si svého zákazníka? *Eurodeník.cz* [online]. 4.11.2014 [cit. 2016-1-15]. Dostupné z: <http://eurodenik.cz/ekonomika/jak-moc-se-vyplati-udrzet-si-sveho-zakaznika>
- [4] FRIEBELOVÁ, Jana, KLICNAROVÁ, Jana, FRIEBEL, Ludvík. Teorie hromadné obsluhy. *Rozhodovací modely v praxi* [online]. 11 s., 2006 [cit. 2016-1-17]. Dostupné z: [http://www2.ef.jcu.cz/~jfrieb/rmp/data/teorie\\_oa/OBSLUHA.pdf](http://www2.ef.jcu.cz/~jfrieb/rmp/data/teorie_oa/OBSLUHA.pdf)
- [5] KAPOUN, Vladimír. *Teorie hromadné obsluhy v praxi* [online]. 2002 [cit. 2016-1-17]. Dostupné z: <http://www.elektrorevue.cz/clanky/02019/index.html>
- [6] *Obslužný systém* [online]. Fakulta dopravní, ČVUT, 2015 [cit. 2016-01-25]. Dostupné z: [https://www.fd.cvut.cz/departament/k611/pedagog/K611THO\\_soubory/webskriptum/6\\_MM10.html](https://www.fd.cvut.cz/departament/k611/pedagog/K611THO_soubory/webskriptum/6_MM10.html)
- [7] *Systém hromadné obsluhy. Teorie front* [online]. Přednášky, Technická Univerzita v Liberci, Katedra oděvnictví, 2007 [cit. 2016-1-17]. Dostupné z: [http://www.kod.tul.cz/info\\_predmety/Psi/prednasky\\_2007/prednaska\\_3\\_PSI.pdf](http://www.kod.tul.cz/info_predmety/Psi/prednasky_2007/prednaska_3_PSI.pdf)
- [8] ŠTĚRBA, Ladislav. *Teorie front* [online]. [cit. 2016-1-17]. Dostupné z: <http://vyuka.salamon.cz/forum/download.php?id=275&sid=45e13e2e2338aea81e5f82179c682256>
- [9] ŽIŽKA, Miroslav. *Teorie front – prezentace* [online]. Technická univerzita v Liberci, EFIS, 2007 [cit. 2016-01-19]. Dostupné z: [http://multiedu.tul.cz/~miroslav.zizka/multiedu/Teorie\\_front\\_1.pdf](http://multiedu.tul.cz/~miroslav.zizka/multiedu/Teorie_front_1.pdf)