

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA  
UNIVERZITY PALACKÉHO V OLOMOUCI

Katedra experimentální fyziky



# Interferometrie v bílém světle s vysokou informační účinností

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vojtěch Svak

2014

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA  
UNIVERZITY PALACKÉHO V OLOMOUCI

Katedra experimentální fyziky



**Interferometrie v bílém světle  
s vysokou informační účinností**

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vypracoval:	Vojtěch Svak
Studijní program:	N1701 Fyzika
Studijní obor:	Aplikovaná fyzika, 2. ročník
Forma studia:	prezenční
Vedoucí diplomové práce:	RNDr. Pavel Pavlíček, Ph.D.
Práce odevzdána dne:	.....

## Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora:	Vojtěch Svak
Název práce:	Interferometrie v bílém světle s vysokou informační účinností
Typ práce:	diplomová
Pracoviště:	Katedra experimentální fyziky
Vedoucí práce:	RNDr. Pavel Pavlíček, Ph.D.
Rok obhajoby práce:	2014
Počet stran:	61
Počet příloh:	1
Jazyk:	český

### Abstrakt

Diplomová práce se zabývá možností zvýšení informační účinnosti interferometrie v bílém světle na drsném povrchu, konkrétně metodou undersampling. Undersampling zvyšuje informační účinnost standardní metody tím, že snižuje množství dat, které je potřeba při měření získat. To se děje za cenu vzorkování měřeného signálu se vzorkovacím krokem větším, než jaký je maximální vzorkovací krok požadovaný vzorkovacím teorémem pro daný signál.

### Klíčová slova

interferometrie v bílém světle, koherenční radar, undersampling, Hilbertova transformace

## Bibliographical identification

Author: Vojtěch Svak  
Title: White-light interferometry with high information efficiency  
Type of thesis: master  
Department: Department of Experimental physics  
Supervisor: RNDr. Pavel Pavlíček, Ph.D.  
Year of presentation: 2014  
Number of pages: 61  
Number of appendices: 1  
Language: czech

### Abstract

One way of increasing the information efficiency of white-light interferometry is to increase the scanning speed. This reduces the amount of raw 2D data acquired during the measurement, thus increasing the information efficiency and reducing the measurement time. But when scanning speed exceeds a certain limit, the correlogram is sampled with sampling distances bigger than the Nyquist limit. The technique of measurement using such sampling distances is called undersampling. The aim of this diploma thesis is to describe how undersampling influences the precision of white-light interferometry measurement.

### Key words

white-light interferometry, coherence radar, undersampling, Hilbert transform

### **Čestné prohlášení**

Prohlašuji, že svou diplomovou práci jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu použitých zdrojů.

V Olomouci dne .....

## **Poděkování**

Na tomto místě bych chtěl poděkovat svému vedoucímu RNDr. Pavlu Pavlíčkovi, Ph.D. za trpělivou pomoc a odborné rady při vytváření této diplomové práce. Rovněž děkuji za finanční podporu, která mi byla poskytnuta z prostředků grantu 13-12301S Grantové agentury České Republiky.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Interferometrie v bílém světle</b>	<b>9</b>
2.1	Fyzikální princip . . . . .	9
2.2	Metoda měření . . . . .	10
2.3	Korelogram . . . . .	12
2.4	Dva typy interferometrie v bílém světle . . . . .	14
2.4.1	Interferometrie v bílém světle na opticky hladkém povrchu . . . . .	15
2.4.2	Interferometrie v bílém světle na opticky drsném povrchu . . . . .	17
2.5	Nejistota měření na drsném povrchu . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Undersampling</b>	<b>23</b>
3.1	Metoda undersamplingu . . . . .	23
3.2	Hilbertova transformace . . . . .	26
3.2.1	Definice Hilbertovy transformace . . . . .	26
3.2.2	Diskrétní signál . . . . .	29
3.3	Nalezení maxima obálky interferogramu . . . . .	30
3.3.1	Standardní vyhodnocení . . . . .	30
3.3.2	Jemná korelace s ideální obálkou . . . . .	31
3.3.3	Fitování obálky metodou nejmenších čtverců . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Metodika simulací a experimentů</b>	<b>36</b>
4.1	Metodika experimentů . . . . .	36
4.1.1	Experimentální sestava . . . . .	36
4.1.2	Vyhodnocení chyby měření . . . . .	37
4.2	Metodika numerických simulací . . . . .	38
4.2.1	Základní procedura simulace . . . . .	38
4.2.2	Modelování některých efektů . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Pozorované efekty</b>	<b>42</b>
5.1	Vliv umístění startovního bodu skenování . . . . .	42
5.2	Vliv integrace signálu, kvantování signálu a výstřelového šumu . . . . .	43
5.3	Závislost průměrné chyby určení pozice maxima obálky na vzorkovacím faktoru . . . . .	49
5.4	Vliv nastavení parametrů jemné korelace . . . . .	51

5.4.1	Vliv nastavení pološířky ideální obálky . . . . .	51
5.4.2	Vliv nastavení koeficientu zjemnění . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Ukázka měření</b>	<b>55</b>
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>59</b>
	<b>Seznam použitých zdrojů</b>	<b>60</b>
	<b>Příloha 1. Příložené CD s elektronickou verzí této práce.</b>	<b>61</b>



# 1 Úvod

Interferometrie v bílém světle je zavedená a hojně používaná metoda pro měření tvaru předmětů jak opticky hladkých, tak opticky drsných. Tato metoda je často používaná v průmyslové výrobě, kde je potřeba přesné měření pro kontrolu kvality výrobku. Zde je jedním z kritických parametrů rychlost měření. To je limitující faktor zvláště pro 3D senzory, protože většina známých měřicích principů vyžaduje velké množství 2D dat (snímků), což se odráží v čase potřebném pro jejich získání a zpracování. Počet potřebných snímků se může pohybovat od tří pro PMT (Phase Measuring Triangulation) až po několik stovek snímků právě pro interferometrii v bílém světle. Je zřejmé že měřicí princip, který vyžaduje několik stovek snímků, aby vyprodukoval jednu výškovou mapu měřené plochy je pomalý a nevhodný pro průmyslové aplikace. Podíl nutného počtu zaznamenaných pixelů k počtu pixelů výsledné výškové mapy udává informační účinnost měřicího principu. Tato práce se zabývá jednou z možností, jak zvýšit informační účinnost standardní metody interferometrie v bílém světle.

V sekci 2 je vyložen princip měřicí metody interferometrie v bílém světle. U této metody získaná 2D data reprezentují autokorelační funkci zdroje světla. Tvar měřeného předmětu je získán nalezením maxima obálky této autokorelační funkce. Sekce 3 se věnuje metodě undersamplingu. To je metoda, která umožňuje zvýšit informační účinnost standardní metody vzorkováním autokorelační funkce se vzorkovacím krokem větším, než jaký je maximální vzorkovací krok požadovaný vzorkovacím teorémem pro danou autokorelační funkci. V této sekci jsou vyloženy některé matematické nástroje potřebné pro zpracování naměřených dat. Vlastnosti metody undersamplingu jsou zkoumány jak pomocí numerických simulací, tak experimentálně. Konstrukce simulací a metodika provedených experimentů jsou popsány v sekci 4. Sekce 5 podává popis efektů, které při undersamplingu nastávají a diskutuje vhodnost různých nastavení měřicí procedury. Konečně v sekci 6 jsou uvedeny výsledky demonstračního měření využívající undersampling.

## 2 Interferometrie v bílém světle

### 2.1 Fyzikální princip

Interferometrie v bílém světle je optická měřicí metoda používaná pro zjištění geometrického tvaru předmětu. Označení bílý nepopisuje barevný vjem, nýbrž odkazuje k šířce spektra použitého světla. Zatímco klasická interferometrie využívá metody pracující se zdroji monochromatického světla, což je světlo s velmi úzkým spektrem, interferometrie v bílém světle používá zdroje polychromatického světla, tedy světla s velkou šířkou spektra. Český název metody má původ v anglickém označení "white-light interferometry", ale označení jako interferometrie v polychromatickém světle by mohlo být výstižnější. V metrologické komunitě je metoda známa také jako vertikální skenovací interferometrie (vertical scanning interferometry), koherenční radar (coherence radar) nebo skenovací interferometrie s nízkou koherencí (low-coherence scanning interferometry). Zde je nízkou koherencí myšlena koherence časová, která je svázána s šířkou spektra.

Koherenční délka  $l_c$  a šířka spektra  $\Delta\lambda$  na sobě závisí nepřímo úměrně. Pro obecný zdroj světla platí úměra

$$l_c \sim \frac{\bar{\lambda}^2}{\Delta\lambda} \quad (1)$$

kde  $\bar{\lambda}$  je střední vlnová délka a šířkou  $\Delta\lambda$  se rozumí plná šířka v polovině maximální hodnoty (FWHM = full width at half maximum).

Vhodným zdrojem světla pro potřeby interferometrie v bílém světle jsou svítící diody (LED), superluminiscenční diody (SLD), výbojky nebo žárovky. Šířka spektra se u svítících a superluminiscenčních diod typicky pohybuje od 10 do 60 nm. To těmto diodám přisuzuje koherenční délku v rozsahu přibližně od 2 do 20  $\mu\text{m}$ . Spektrum žárovek obsahuje vlnové délky z viditelné a blízké infračervené oblasti, což znamená koherenční délku řádově 1  $\mu\text{m}$  [11].

Lidé, kteří se s touto metodou setkávají poprvé, mohou mít zafixovaný prekoncept, že interferenci lze pozorovat jen pro světlo monochromatické. Pro ně pak bývá spojení bílého (polychromatického) světla a interferometrie přinejmenším překvapivé a matoucí. Pro interferenci však není klíčová monochromaticnost světla, nýbrž jeho koherenční vlastnosti. Konkrétně platí, že je rozhodující koherence prostorová. Je-li světlo prostorově koherentní, lze pozorovat interferenci bez ohledu na šířku jeho spektra. To, co rozhoduje, je dráhový rozdíl dvou svazků světla, které spolu mají interferovat. Aby mohla být pozorována interference těchto dvou svazků, jejich dráhový rozdíl nesmí být větší, než je jejich koherenční délka. Protože je koherenční délka polychromatického světla velmi malá ( $\sim 10\mu\text{m}$ ), interfe-

renci lze pozorovat jen v malém (řádově  $l_c$ ) rozsahu dráhových rozdílů dvou interferujících svazků. Tento výskyt interference na velmi malém intervalu dráhových rozdílů je základem měřicí metody interferometrie v bílém světle.

## 2.2 Metoda měření

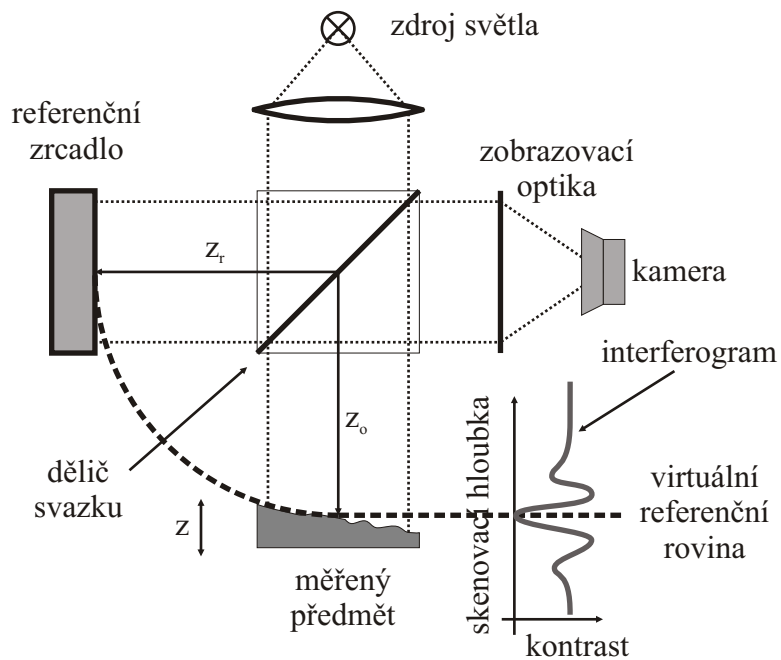
Interferometrie v bílém světle našla uplatnění jako měřicí metoda až s výskytem digitálních kamer a výkonných počítačů, které umožnily relativně efektivní záznam a zpracování dat. Základní experimentální uspořádání tvoří nejčastěji Michelsonův interferometr, jak to schématicky znázorňuje Obr. 1.

Světlo ze širokospektrálního zdroje se střední vlnovou délkou  $\bar{\lambda}$  a koherenční délkou  $l_c$  je rozděleno na děliči svazku a vstupuje do dvou ramen Michelsonova interferometru. Jedno rameno je ukončeno referenčním zrcadlem, v druhém rameni je umístěn měřený předmět. Světlo odražené od předmětu interferuje se světlem odraženým od referenčního zrcadla a tím je vytvořen výstupní svazek interferometru. Jinými slovy, výstupní optika interferometru zobrazuje měřený předmět a referenční zrcadlo přes sebe na aktivní plochu záznamového zařízení.

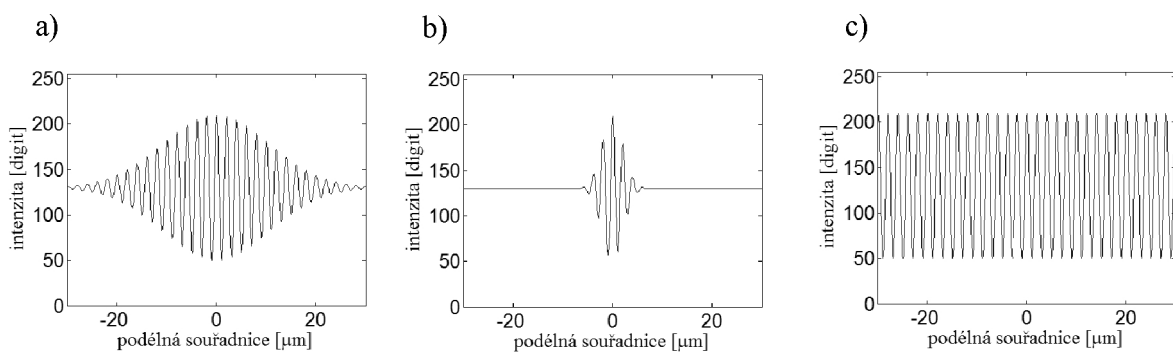
Při měření je předmět posouván podél optické osy a na výstupu je zaznamenávána intenzita jako funkce souřadnice posunutí. Dále bude tato operace nazývána skenováním. Průběh intenzity v závislosti na podélné souřadnici zaznamenaný při skenování se nazývá interferogram. V objektovém rameni si lze představit tzv. referenční rovinu, pro kterou platí, že optické dráhy k referenční rovině  $z_o$  a referenčnímu zrcadlu  $z_r$  jsou stejné ( $z_r - z_o = 0$ ). Při posouvání předmětu se mění dráhový rozdíl mezi objektovým a referenčním ramenem interferometru a střídavě nastává konstruktivní a destruktivní interference. Vznikají jakési proužky v závislosti na souřadnici posunutí. Z důvodu použití světla s krátkou koherenční délkou je však kontrast těchto proužků skoro všude nulový. Nulový kontrast interferogramu je pozorován jen v okolí referenční roviny. Velikost tohoto okolí závisí na koherenční délce použitého světla. Větší koherenční délka znamená větší velikost tohoto okolí. Intenzita i kontrast interferogramu nabývají maxima v okamžiku, kdy jsou ramena interferometru přesně vyvážena, tedy v okamžiku, kdy je povrch měřeného předmětu v referenční rovině.

Na Obr. 2 jsou uvedeny příklady interferogramů. V případě Obr. 2(a) je zdrojem světla svítící dioda, jejíž světlo má větší koherenční délku než světlo žárovky. Interferogram odpovídající žárovce vystihuje Obr. 2(b). Pro srovnání Obr. 2(c) ukazuje interferogram při použití laseru.

Podélná souřadnice povrchu měřeného předmětu je tedy určena nalezením maxima



Obrázek 1: Základní experimentální uspořádání pro interferometrii v bílém světle.



Obrázek 2: Příklady interferogramů. (a) Zdrojem světla je svítící dioda. (b) Zdrojem světla je žárovka. (c) Zdrojem světla je laser.

interferogramu. Jako detektor světla je v měřicích sestavách používána buď CCD nebo CMOS kamera. Při skenování je zaznamenáván interferogram v každém pixelu kamery. Nalezením maxima interferogramu v jednom pixelu je určena podélná souřadnice toho elementu povrchu, který je zobrazen do tohoto pixelu. Nalezením maxima interferogramu ve všech pixelech je získán tvar měřené části předmětu.

## 2.3 Korelogram

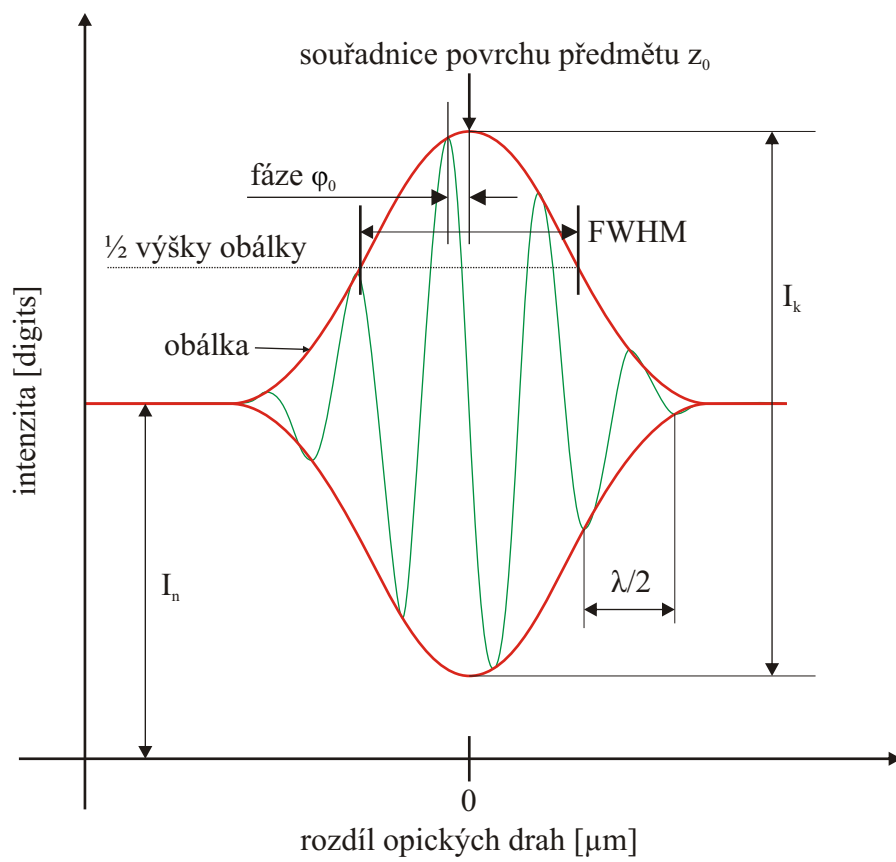
Průběh závislosti intenzity na souřadnici posunutí zaznamenaný při skenování se také nazývá korelogram. Průběh této závislosti je během měření zaznamenan v každém pixelu. Zaznamenaná intenzita je výsledkem interference dvou světelných vln, kdy jedna přichází z referenčního ramene a druhá z objektového ramene interferometru. Obě světelné vlny ale pocházejí ze stejného zdroje. Skenováním je měněna optická dráha v jednom rameni, což znamená, že spolu interferují dvě světelné vlny, která nevznikly ve stejný okamžik, ale je mezi nimi časové zpoždění závislé na posunu skenovacího zařízení, tedy na podélné souřadnici posunutí. Výsledná závislost je tak autokorelační funkcí amplitudy elektrického pole. Odtud název korelogram.

Změna rozdílu optických drah o  $\frac{\lambda}{2}$  znamená změnu interference z konstruktivní na destruktivní a naopak. V Michelsonově interferometru nastane změna optických drah o  $\frac{\lambda}{2}$  při posunu skenovacího zařízení o  $\frac{\lambda}{4}$ . Světlo ze širokopásmového zdroje obsahuje velké množství různých vlnových délek  $\lambda$  a pro každou nastává interferenční maximum/minimum v trochu jiném místě. Při zvětšování rozdílu obou optických drah se tyto rozdíly pro jednotlivé komponenty světla ještě zvětšují. To má za následek pokles kontrastu s rostoucím rozdílem optických drah.

Na korelogram vyjadřující závislost intenzity na dráhovém rozdílu mezi objektovým a referenčním ramenem interferometru se lze dívat jako na amplitudově modulovaný signál:

$$I(z) = I_o + I_r + 2\sqrt{I_o I_r} \cdot G(z - z_0) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}(z - z_0) + \varphi_0\right). \quad (2)$$

$I_o$  je intenzita světla odraženého od objektu,  $I_r$  je intenzita světla od referenčního zrcadla. Součet  $I_o + I_r$  udává střední hodnotu signálu a představuje složku intenzity vzniklou nekoherentním skládáním objektové a referenční vlny  $I_n = I_o + I_r$  (viz. Obr. 3). Faktor  $2\sqrt{I_o I_r}$  udává maximální modulaci korelogramu a představuje složku intenzity vzniklou koherentním skládáním objektové a referenční vlny  $I_k = 2\sqrt{I_o I_r}$ . Pokud jsou  $I_o$  a  $I_r$  stejné, výsledkem je maximální kontrast. Výraz  $\cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}(z - z_0) + \varphi_0\right)$  představuje nosný signál a vyjadřuje střídání konstruktivní a destruktivní interference v závislosti na



Obrázek 3: Korelogram jako funkce rozdílu optických drah.

dráhovém rozdílu. Zde je  $\bar{\lambda}$  střední vlnová délka. Výraz  $G(z - z_0)$  popisuje tvar modulační obálky. Číslo  $z_0$  je podélná souřadnice předmětu, tedy hledaná veličina. Ta je zjištěna z naměřeného korelogramu, neboť funkce obálky nabývá maxima právě v  $z = z_0$ . Číslo  $\varphi_0$  popisuje fázový posuv koreogramu. V případě drsného povrchu nebo disperzně nevyváženého interferometru nemusí být globální maximum intenzity korelogramu v maximu jeho obálky. To je případ, kde  $\varphi_0$  není rovno nule. Pro drsný povrch je fáze  $\varphi_0$  náhodná, ale konstantní [5]. Výraz (2) lze zjednodušit do tvaru

$$I(z) = I_n + I_k \cdot G(z - z_0) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}(z - z_0) + \varphi_0\right). \quad (3)$$

Jelikož korelogram popsáný rovnicí (2) představuje autokorelační funkci, tvar  $G(z - z_0)$  obálky korelogramu je závislý na tvaru  $S(k)$  spektra širokopásmového zdroje světla. Tvar spektra a autokorelační funkci svazuje Wienerova - Chinčinova věta, kdy je autokorelační funkce rovna Fourierově transformaci spektra použitého zdroje [11]. Kupříkladu je-li spektrum zdroje gaussovské

$$S(k) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\Delta k} \exp\left[-\left(\frac{k - k_0}{2\Delta k}\right)^2\right], \quad (4)$$

funkce obálky bude mít také gaussovský tvar

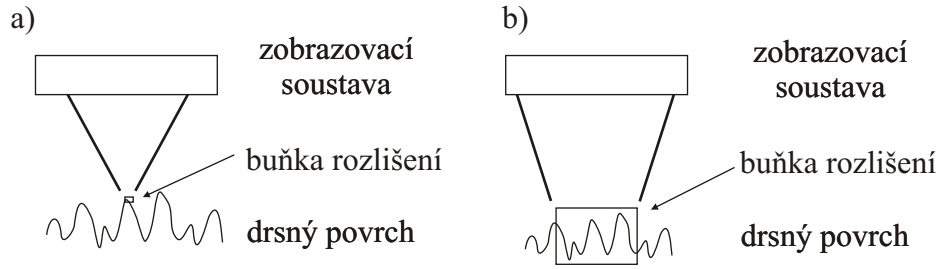
$$G(z) = \exp\left[-\left(\frac{z - z_0}{l_c}\right)^2\right]. \quad (5)$$

Zde je  $k$  vlnové číslo a  $\Delta k$  je efektivní šířka spektra a  $l_c$  je koherenční délka světla [1]. V případě použití zdroje světla s gaussovským spektrem lze korelogram vystihnout rovnicí

$$I(z) = I_n + I_k \exp\left[-\left(\frac{z - z_0}{l_c}\right)^2\right] \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}(z - z_0) + \varphi_0\right). \quad (6)$$

## 2.4 Dva typy interferometrie v bílém světle

Podle charakteru vznikajícího signálu lze rozlišit dva typy interferometrie v bílém světle. Jedná se o interferometrii v bílém světle na opticky hladkém povrchu a interferometrii v bílém světle na opticky drsném povrchu. Nezáleží však jen na drsnosti samotného měřeného povrchu, ale také na charakteristikách použité měřicí sestavy [8]. Povrch lze považovat za opticky hladký, pokud velikost nerovností té oblasti, která padne do buňky rozlišení použité optické soustavy, nepřesáhne jednu osminu vlnové délky použitého světla



Obrázek 4: Vliv vzájemného poměru velikosti buňky rozlišení zobrazovací soustavy a velikosti nerovností povrchu. (a) Buňka rozlišení malá ve srovnání s velikostí nerovností povrchu, povrch hodnocen jako opticky hladký. (b) Buňka rozlišení velká ve srovnání s velikostí nerovností povrchu, povrch hodnocen jako opticky drsný.

$$|\delta z_{surf}| < \frac{\bar{\lambda}}{8}. \quad (7)$$

Za opticky drsný povrch je považován takový, kdy je velikost nerovností v buňce rozlišení větší, než je čtvrtina vlnové délky použitého světla.

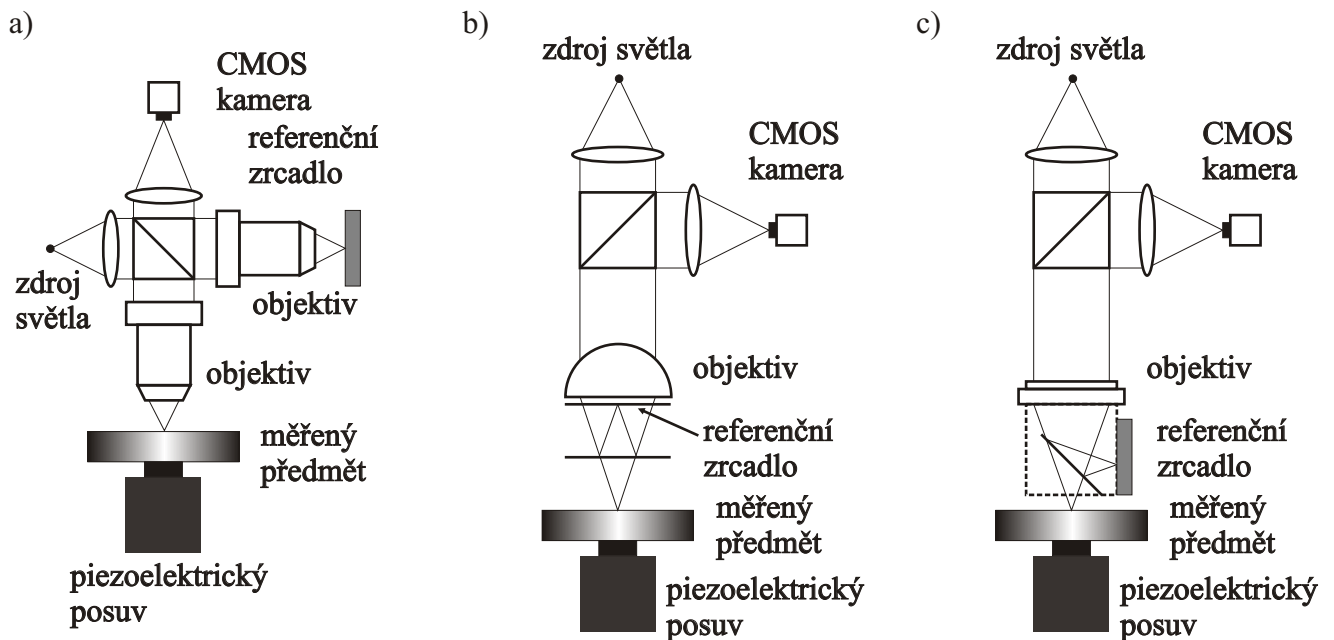
$$|\delta z_{surf}| > \frac{\bar{\lambda}}{4}. \quad (8)$$

Situaci ilustruje Obr. 4. Buňka rozlišení je definována jako oblast povrchu, která je stejně velká, jako plocha Airiho disku použité dané zobrazovací soustavy. Ta závisí jak na numerické apertuře zobrazovací soustavy  $NA$ , tak na vlnové délce použitého světla  $\bar{\lambda}$ . Příkladně pro mikroskopový objektiv bude buňka rozlišení kruhová a bude mít průměr  $d = \frac{1,22 \cdot \bar{\lambda}}{NA}$ . Zda je povrch opticky hladký nebo opticky drsný nezávisí tedy jen na jeho mechanické drsnosti, ale také na vlnové délce použitého světla a buňce rozlišení zobrazovací soustavy. Například broušené sklo může vykazovat vlastnosti opticky hladkého povrchu, je-li použit mikroskopový objektiv s velkou numerickou aperturou [11].

#### 2.4.1 Interferometrie v bílém světle na opticky hladkém povrchu

U interferometrie v bílém světle na hladkém povrchu je z výše vyložených důvodů požadována malá buňka rozlišení. Proto se v experimentálních sestavách pro tento typ používají téměř výhradně mikroskopové objektivy. Jak povrch měřeného předmětu, tak povrch referenčního zrcadla jsou zobrazeny mikroskopovým objektivem. Uspořádání, které používá jeden mikroskopový objektiv v referenčním rameni a jeden mikroskopový objektiv v rameni měřicím se nazývá Linnikův interferometr (Obr. 5(a)). Ten vyžaduje pokud možno dva totožné



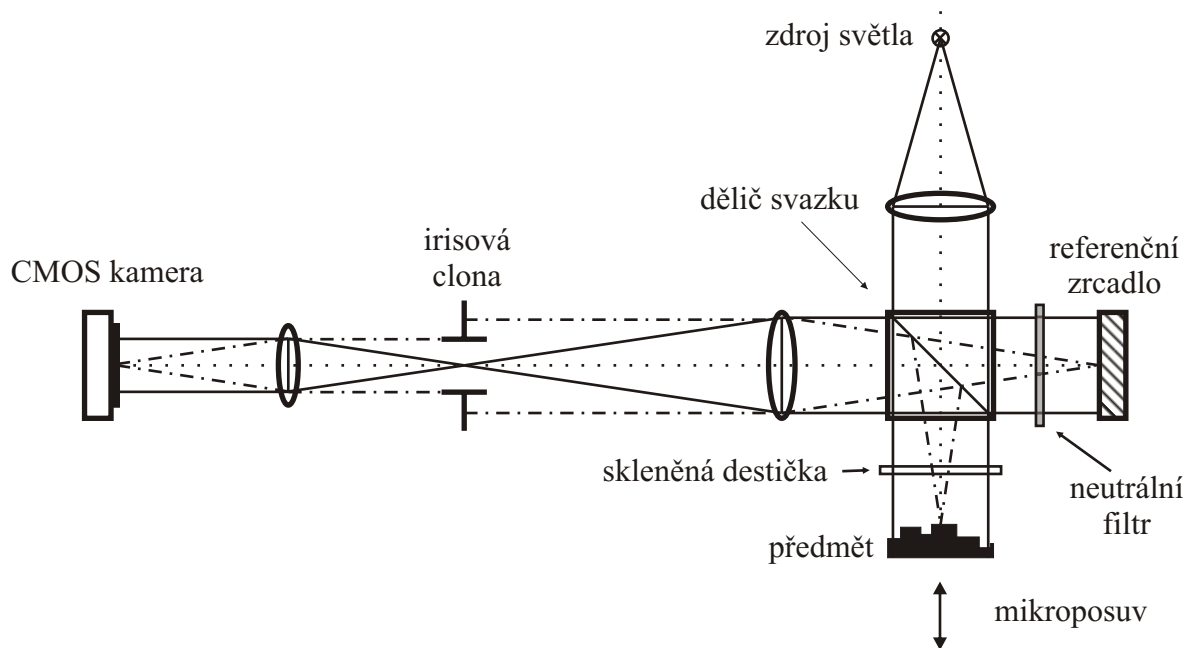


Obrázek 5: Interferometrie v bílém světle na hladkém povrchu. (a) Linnikovo uspořádání. (b) Mirauovo uspořádání. (c) Michelsonovo uspořádání.

objektivy, aby bylo možné kompenzovat disperzní efekty. Ty se v interferogramu projevují negativně, a to tak, že jej rozšiřují a snižují jeho kontrast [6].

Existují také uspořádání, které pracují jen s jedním tzv. interferenčním mikroskopovým objektivem. Ten kromě samotného objektivu obsahuje i dělič svazku a referenční zrcadlo. Na obr. 5(b) je tzv. Mirauovo uspořádání, které se používá při velkých zvětšeních (10x, 20x, 50x) . Obrázek 5(c) zobrazuje tzv. Michelsonovo uspořádání používané při malých zvětšeních (2,5x, 5x).

Vyhodnocení měření interferometrie v bílém světle na hladkém povrchu se provádí velmi podobně jako u klasické interferometrie. Stejně jako u klasické interferometrie lze pomocí vyhodnocení fáze interferogramu určit vyvážení interferometru s přesností na setiny střední vlnové délky. Navíc zde odpadá problém s nejednoznačností proužku právě proto, že centrální maximum interferogramu má největší kontrast. Je tak možné jej jednoznačně identifikovat. Nejistota měření u interferometrie v bílém světle na hladkém povrchu se pohybuje v řádu nanometrů [4].

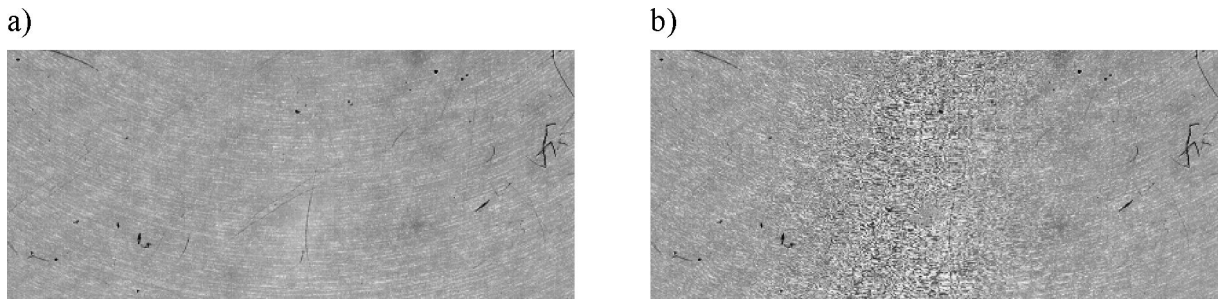


Obrázek 6: Základní experimentální sestava pro interferometrii v bílém světle na drsném povrchu.

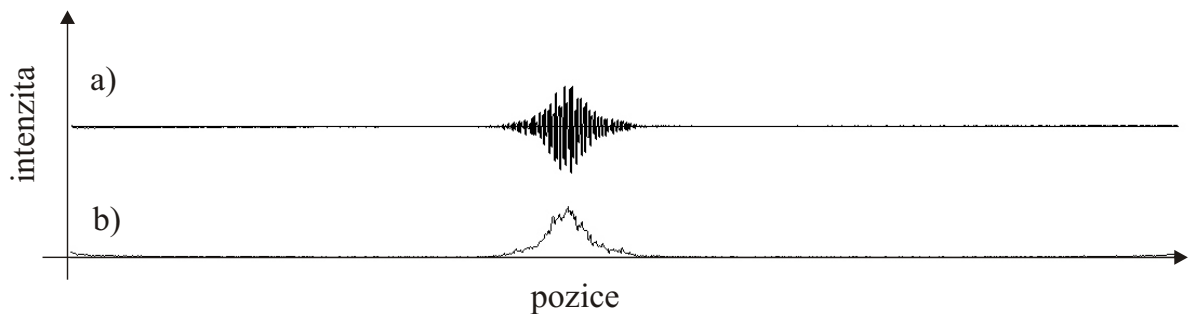
#### 2.4.2 Interferometrie v bílém světle na opticky drsném povrchu

Obrázek 6 zachycuje typickou experimentální sestavu pro měření na opticky drsném povrchu [6]. Nejčastěji je použit Michelsonův interferometr, kdy se v jednom rameni nachází měřený předmět, ve druhém rameni je umístěno referenční zrcadlo. Protože se od měřeného předmětu odráží podstatně méně světla, než od referenčního zrcadla, vkládá se obvykle do referenčního ramene interferometru neutrální filtr. Tak je zajištěno, že jsou intenzity světla v obou ramenech přibližně stejné. Neutrální filtr ovšem způsobuje disperzi světla, což je u interferometrie v bílém světle nežádoucí jev, jak bylo zmíněno výše. Z toho důvodu se efekt disperze neutrálního filtru kompenzuje vložení skleněné destičky do objektového ramene interferometru.

Na rozdíl od interferometrie v bílém světle na hladkém povrchu, při měření na drsném povrchu padne do buňky rozlišení soustavy několik period mikrostruktury měřeného povrchu. Zobrazovací soustava není schopna tuto mikrostrukturu měřeného povrchu postihnout, rozlišit. To v kombinaci s prostorově koherentním zdrojem světla vede k tomu, že obraz drsného povrchu vykazuje koherenční zrnitost. V zorném poli již nejsou patrné interferenční proužky, ale obraz je rozdroben na zrna struktury koherenční zrnitosti, jak to



Obrázek 7: (a) Pokud se žádná část drsného povrchu nenachází dostatečně blízko referenční roviny, interference není pozorována. (b) V těch částech povrchu, které jsou dostatečně blízko referenční roviny, je pozorována interference. Interferenční obrazec nemá formu proužků, nýbrž v důsledku drsnosti povrchu vzniká struktura koherenční zrnitosti.



Obrázek 8: (a) Typický interferogram získaný skenováním. (b) Obálka interferogramu získaná pomocí Hilbertovy transformace.

ilustruje Obr. 7. Fáze interferogramu v každém zrně pak má náhodnou hodnotu z intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$ . Náhodnost fáze interferogramu znemožňuje použít její vyhodnocení pro zpřesnění měření, jako u měření na hladkém povrchu. Vyvážení interferometru je určeno pouze z maxima obálky interferogramu.

Typický interferogram a jeho obálku zachycuje Obr. 8. Standardní metodou pro výpočet obálky interferogramu Hilbertova transformace [12]. Hilbertova transformace je sice výpočetně náročná operace, což v minulosti vedlo k vývoji různých dalších algoritmů, ale v posledních letech vzrostla výkonnost počítačů natolik, že je možné Hilbertovu transformaci k výpočtu obálky s výhodou použít.

Vzhledem k tomu, že je vyvážení interferometru, a tím i podélná souřadnice měřeného povrchu, určeno jen z polohy maxima obálky, je nejistota měření na drsném povrchu pod-

statně větší, než nejistota měření na povrchu hladkém. Určujícím faktorem nejistoty měření je pak samotná velikost drsnosti měřeného povrchu. Podrobnější diskuse nejistoty měření interferometrie v bílém světle na drsném povrchu následuje v odstavci 2.5.

## 2.5 Nejistota měření na drsném povrchu

Experimenty ukazují, že ani na drsném planárním povrchu (takový, který by měl mít všude podélnou souřadnici povrchu stejnou) není pozice maxima obálky pro všechny body stejná, ale pro různá zrna koherenční zrnitosti se její pozice náhodně mění. Jak teoretické analýzy, tak experimenty ukazují, že standardní odchylka tohoto rozmazání pozice maxima obálky  $\delta z$  souvisí s drsností povrchu, a to následujícím způsobem

$$\delta z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\langle I \rangle}{I}} \sigma_s. \quad (9)$$

Rovnice (9) určuje fundamentální nejistotu měření pro interferometrii v bílém světle na drsném povrchu [9]. Tato nejistota měření je úměrná střední hodnotě kvadratické drsnosti  $\sigma_s$ . Koeficient úměrnosti je podíl střední intenzity počítané přes všechna zrna koherenční zrnitosti  $\langle I \rangle$  a intenzity v daném zrnu koherenční zrnitosti  $I$ . Čím má dané zrno větší intenzitu, tím je nejistota měření menší. Je potřeba věnovat pozornost rozdělení intenzity ve struktuře koherenční zrnitosti, protože toto rozdělení intenzity ovlivňuje výslednou nejistotu měření pro celý měřený tvar. Podrobnou diskusi nejistoty měření na drsném povrchu lze nalézt v [4], zde jsou pro úplnost uvedeny hlavní výsledky.

Analytický tvar rozdělení intenzity ve struktuře koherenční zrnitosti pro polarizované polychromatické světlo má tvar

$$p_p(I) = \frac{M^M I^{M-1}}{\langle I \rangle^M \Gamma(M)} \exp\left(-\frac{MI}{\langle I \rangle}\right), \quad (10)$$

což je gamma distribuce se střední intenzitou  $\langle I \rangle$  a variancí  $\langle I \rangle^2/M$ . Parametr

$$M = \frac{\langle I \rangle^2}{\sigma_I^2} = \sqrt{1 + 128 \ln 2 \left(\frac{\sigma_s}{l_c}\right)^2} \quad (11)$$

je druhá mocnina převrácené hodnoty kontrastu struktury koherenční zrnitosti, která závisí na drsnosti měřeného povrchu  $\sigma_s$  a na koherenční délce světla  $l_c$ .

Když se koherenční délka pro časově koherentní světlo blíží nekonečnu ( $l_c \rightarrow \infty$ ) a tím pádem převrácená hodnota kontrastu se blíží jedné ( $M \rightarrow 1$ ), gamma distribuce daná rovnicí (10) přechází v dobře známou záporně exponenciální distribuci intenzity ve struktuře koherenční zrnitosti pro polarizované monochromatické světlo:

$$p_m(I) = \frac{1}{\langle I \rangle} \exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right). \quad (12)$$

Gamma distribuce (10) přechází v Gaussovu funkci pro strukturu koherenční zrnitosti vytvořenou polarizovaným polychromatickým světlem, kdy platí  $M \rightarrow \infty$ , když  $l_c \rightarrow 0$ .

V experimentech je často použito také nepolarizované osvětlení. Rozdělení intenzity ve struktuře koherenční zrnitosti pro nepolarizované monochromatické světlo lze odvodit z rovnice (12). Jsou uvažovány dvě statisticky nezávislé struktury koherenční zrnitosti, jedna pro každou ortogonální polarizaci, kdy platí

$$\langle I_x \rangle = \langle I_y \rangle = \frac{1}{2} \langle I \rangle. \quad (13)$$

Celkové rozdělení intenzity je získáno konvolucí

$$p_{m,up}(I) = p(I_x) * p(I_y), \quad (14)$$

rozdělovacích funkcí

$$p(I_x) = \frac{2}{\langle I \rangle} \exp\left(-2\frac{I_x}{\langle I \rangle}\right) \quad (15)$$

a

$$p(I_y) = \frac{2}{\langle I \rangle} \exp\left(-2\frac{I_y}{\langle I \rangle}\right). \quad (16)$$

Konečné rozdělení intenzity ve struktuře koherenční zrnitosti pro nepolarizované monochromatické světlo má tvar

$$p_{m,up}(I) = \left(\frac{2}{\langle I \rangle}\right)^2 I \exp\left(-2\frac{I}{\langle I \rangle}\right). \quad (17)$$

Podobně lze nalézt rozdělení intenzity ve struktuře koherenční zrnitosti pro polychromatické nepolarizované světlo. Toto rozdělení má tvar

$$p_{p,up} = \frac{\sqrt{2}(2M - 1/2)M^{2M}2^{1-2M}}{2\Gamma(2M)} \langle I \rangle^{-2M} I^{2M-1} \exp\left(-\frac{MI}{\langle I \rangle}\right). \quad (18)$$

Rozdělení intenzity pro nepolarizované světlo se liší od negativně exponenciálního rozdělení pro polarizované monochromatické světlo hlavně v oblasti malých intenzit. Pro tyto intenzity má distribuce Gaussovský charakter v tom smyslu, že pravděpodobnost zrna s nulovou intenzitou je nulová  $p(I = 0) = 0$ . Zvýšení drsnosti povrchu má za následek posun maxima křivky rozdělení směrem ke střední hodnotě.

Tedy typ osvětlení při měření drsných povrchů ovlivňuje rozdělení intenzity ve struktuře koherenční zrnitosti. První stupeň dekorelace je dosažen použitím nepolarizovaného monochromatického světla (dvě nezávislé struktury koherenční zrnitosti, pro každou polarizaci jedna). Druhý stupeň dekorelace je dosažen použitím polychromatického světla.

Z rovnice (9) je zřejmé, že výsledná nejistota měření je závislá na rozdělení intenzity ve struktuře koherenční zrnitosti. Lze očekávat, že s vyšším stupněm dekorelace struktury koherenční zrnitosti se zvýší i pravděpodobnost výskytu zrn s vyšší intenzitou. Vyšší intenzita zrna znamená nižší nejistotu měření na drsném povrchu. Aby bylo možné odhadnout nejistotu měření pro celou strukturu koherenční zrnitosti (pro celé zorné pole), je potřeba započítat nejistotu měření ze všech zrn ve struktuře.

Výpočet celkové nejistoty měření je založen na použití funkce hustoty pravděpodobnosti výskytu intenzity  $I$  a funkce hustoty pravděpodobnosti naměření výšky  $z$  v jednom zrně.

$$p(I, z) = p(I) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z(I)}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2(I)}\right). \quad (19)$$

První člen vyjadřuje funkci hustoty pravděpodobnosti  $I$ , druhý člen je Gaussovská funkce hustoty pravděpodobnosti naměření výšky  $z$ . Navíc standardní odchylka tohoto Gaussovského rozdělení závisí na intenzitě světla v daném zrně

$$\sigma_z(I) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\langle I \rangle}{I}} \sigma_s. \quad (20)$$

Cílem je určit  $\langle |\Delta z| \rangle$  střední hodnotu absolutní chyby určení výšky  $z$ . Protože potřebné hustoty pravděpodobnosti jsou známé, lze psát

$$\langle |\Delta z| \rangle = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |z| p(I, z) dz dI. \quad (21)$$

Dosazením (12) za  $p(I)$  do rovnice (19) a dále použitím rovnice (20) a (21) lze získat výraz pro výpočet  $\langle |\Delta z| \rangle$  v případě polarizovaného monochromatického světla:

$$\langle |\Delta z| \rangle = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |z| \frac{1}{\langle I \rangle} \exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right) \cdot \frac{\sqrt{I}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\langle I \rangle} \sigma_s} \exp\left(-\frac{z^2 I}{\langle I \rangle \sigma_s^2}\right) dz dI. \quad (22)$$

Konečný výsledek pro polarizované monochromatické světlo má pak tvar

$$\langle |\Delta z| \rangle = \sigma_s. \quad (23)$$

Podobně lze s užitím rovnice (17) odvodit  $\langle |\Delta z| \rangle$  pro monochromatické nepolarizované světlo s výsledkem

$$\langle |\Delta z| \rangle \approx 0,7 \cdot \sigma_s \quad (24)$$

Stejně tak lze odvodit  $\langle |\Delta z| \rangle$  pro polychromatické nepolarizované světlo:

$$\langle |\Delta z| \rangle = 0,565\sqrt{M} \frac{\Gamma(2M - 1/2)}{\Gamma(2M)} \sigma_s, \quad (25)$$

kde

$$M = \sqrt{1 + 128 \ln 2 \left( \frac{\sigma_s}{l_c} \right)^2}. \quad (26)$$

Pro  $M = 2$  a vyšší přibližně platí

$$\langle |\Delta z| \rangle \approx 0,4 \cdot \sigma_s. \quad (27)$$

## 3 Undersampling

### 3.1 Metoda undersamplingu

Korelogram popsaný rovnicí (2) nese informaci o podélné souřadnici měřeného povrchu. Tato souřadnice může být zjištěna jeho korektním vyhodnocením. Před vyhodnocením je však potřeba získat co nejvěrnější reprezentaci tohoto korelogramu.

Při měření je korelogram zaznamenán pomocí kamery do počítače, kde není reprezentován jako spojitá funkce, ale jako řada čísel - funkčních hodnot - jistým způsobem 'vybraných' ze spojitého průběhu. Korelogram je při měření takzvaně vzorkován. Aby při vzorkování jakéhokoli signálu nebyla ztracena informace, musí proces vzorkování splňovat tzv. vzorkovací teorém (Nyquist-Shannon sampling theorem). Ten udává, že frekvence vzorkování musí být alespoň dvojnásobná, než je nejvyšší frekvence obsažená ve spektru vzorkovaného signálu. Pokud je vzorkování prováděno v prostoru, jak je tomu u interferometrie v bílém světle, vzorkovací teorém udává, že velikost vzorkovacího kroku nesmí přesáhnout polovinu nejkratší vlnové délky obsažené ve spektru signálu.

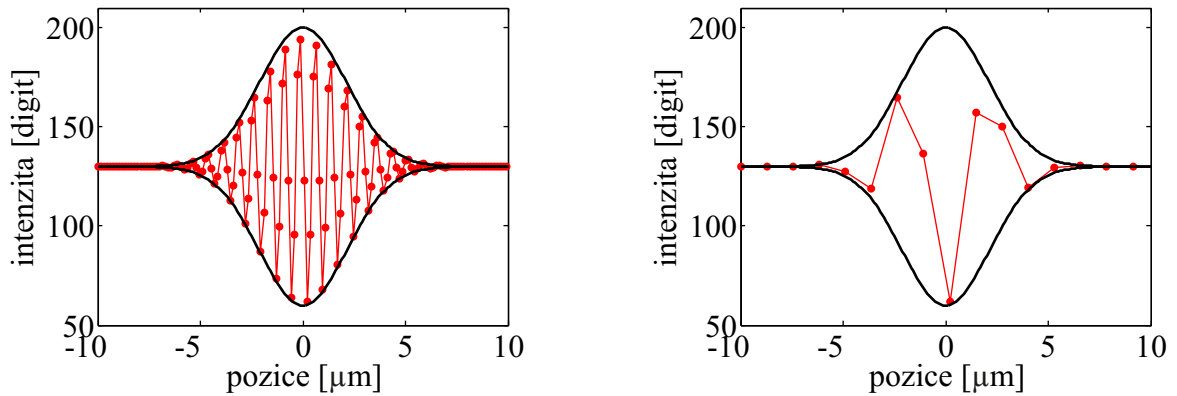
Uvažujeme-li tvar korelogramu podle rovnice (2), rychlé oscilace v jeho průběhu, dané faktorem  $\cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}(z - z_0) + \varphi_0\right)$ , mají periodu  $\frac{\bar{\lambda}}{2}$  (v Michelsonově interferometru posun referenčního zrcadla o  $\frac{\delta}{2}$  znamená změnu optické dráhy v referenčním rameni o  $\delta$ ). Podle Nyquistova kritéria je potřeba na této délce získat alespoň 2 vzorky, tedy alespoň 4 vzorky na dráze  $\bar{\lambda}$ . Pokud je zaveden vzorkovací faktor  $F$  jako podíl vzorkovacího kroku  $\sigma_v$  a střední vlnové délky  $\bar{\lambda}$

$$F = \frac{\sigma_v}{\bar{\lambda}}, \quad (28)$$

pro splnění Nyquistova kritéria musí platit  $F \leq 0,25$ . Každé měření, které toto kritérium splňuje, lze nazvat standardním měřením. Požadavek (28) na maximální vzorkovací faktor a tím na maximální vzorkovací krok má za následek nutnosti vzorkovat korelogram 'hustě'. To při nejčastější opakovací frekvenci digitální kamery 25 FRPS (FRames Per Second - počet snímků za sekundu) vyžaduje pomalé skenování, dlouhý měřicí čas a velké množství zaznamenaných dat, pokud je požadován větší měřicí rozsah, než několik vlnových délek světla. Navíc velké množství dat vyžaduje delší výpočetní čas při zpracování a nalezení měřeného povrchu. Tím se stává standardní metoda měření interferometrie v bílém světle relativně neefektivní. Z dlouhé řady čísel zaznamenaných pro jeden pixel (např. 1024 vzorků na pixel) je vypočítáno číslo jedno, podélná souřadnice povrchu  $z_0$  pro daný pixel. Lze říci, že standardní metoda měření má malou informační účinnost.

Undersampling je metoda, která se pokouší zvýšit informační účinnost standardní me-



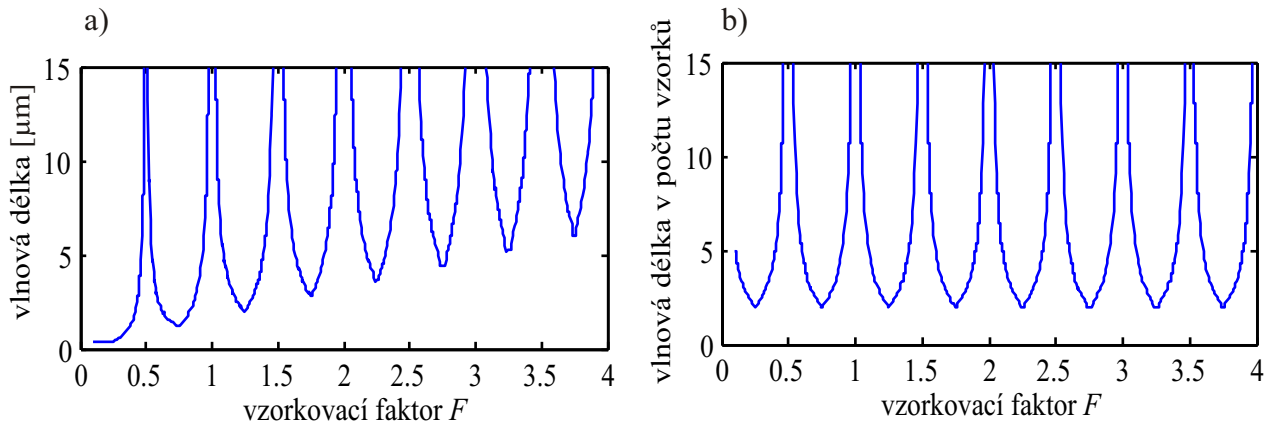


Obrázek 9: (a) Interferogram získaný při dodržení Nyquistova kritéria, perioda nosného signálu odpovídá polovině střední vlnové délky použitého osvětlení. (b) Interferogram získaný metodou undersampling, je zde zřejmá změna periody nosného signálu oproti (a).

tody interferometrie v bílém světle na drsném povrchu. Pro určení podélné souřadnice povrchu je v případě měření na drsném povrchu použita funkce obálky korelogramu, přesný průběh rychlých oscilací v korelogramu není nijak využit. Metoda undersamplingu předpokládá, že je možné vzorkovat funkci obálky aniž by bylo potřeba přesně postihnout rychlé oscilace. Funkce obálky se v prostoru mění daleko pomaleji, než rychlé oscilace v korelogramu, proto metoda undersamplingu předpokládá, že k nalezení maxima funkce obálky může být dostatečně vzorkovat korelogram s větším vzorkovacím krokem, než požaduje vzorkovací teorém. Odtud název undersampling - vzorkování (sampling) se vzorkovacím krokem pod Nyquistovým kritériem. Pro stejný měřicí rozsah je u metody undersamplingu potřeba zaznamenat menší počet vzorků a vyhodnotit menší objem dat, čímž se doba měření zkrátí.

Signál získaný při undersamplingu připomíná korelogram (viz. Obr. 9), ovšem dochází ke zdánlivé změně periody nosného signálu, změna závisí na zvoleném vzorkovacím faktoru  $F$ . Tento jev se nazývá aliasing efekt [3]. Charakter změny periody v závislosti na vzorkovacím faktoru ilustruje Obr. 10(a). Z něj je patrné, že do faktoru  $F = 0,25$  ke změně periody nedochází. To je očekávaný výsledek, protože  $F = 0,25$  odpovídá mezní vzorkovací frekvenci, která ještě splňuje vzorkovací teorém.

Poté zdánlivá perioda rychle roste a pro hodnotu  $F = 0,5$  nabývá své maximální hodnoty. Důvod takového chování vysvětluje Obr. 11. Při hodnotě  $F = 0,5$  je totiž korelogram vzorkován v bodech se stejnou fází. Výsledný signál tak nevykazuje rychlé oscilace, ale spíše sleduje změnu amplitudy těchto oscilací. Při dalším zvyšování vzorkovacího fak-



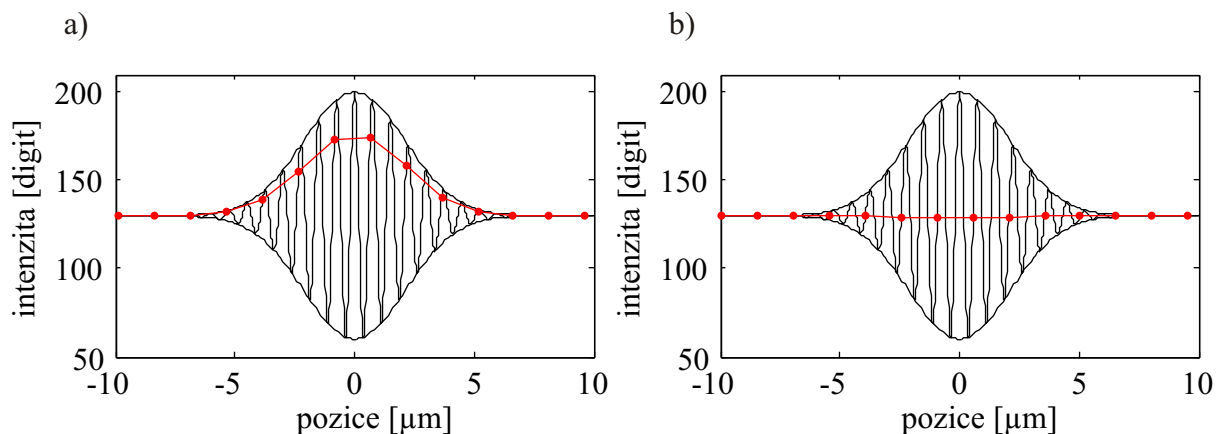
Obrázek 10: Změna periody nosného signálu v závislosti na vzorkovacím faktoru  $F$ . Nová perioda je vynesena v  $\mu\text{m}$  pro (a) a v počtu vzorkovacích kroků pro (b).

toru zdánlivá perioda klesá, až pro  $F = 0,75$  nabývá lokálního minima. Perioda rychlých oscilací však není a ani nemůže být stejná, jako pro  $F \leq 0,25$ , protože nový vzorkovací krok je příliš velký na to, aby postihl periodu původních rychlých oscilací.

Pro vyšší faktory  $F$  zdánlivá perioda opět roste, až v hodnotě  $F = 1$  nabývá lokálního maxima. Přítomnost lokálního maxima v  $F = 1$  má stejný důvod, jako lokální maximum v  $F = 0,5$ . Při dalším zvyšování faktoru se situace opakuje. Pro faktory  $F = n \cdot 0,5$ ,  $n \in \mathbb{N}$  vždy zdánlivá perioda prudce vzroste, pro  $F = (2n - 1) \cdot 0,25$ ,  $n \in \mathbb{N}$  nabývá lokálního minima s tím, že šířka maxim postupně roste. Obr. 10(b) zobrazuje stejnou závislost, ovšem na svislé ose je perioda vynesena v počtu vzorkovacích kroků. Lze nahlédnout, že když je zdánlivá vlnová délka  $\lambda_{sampled}$  rychlých oscilací korelogramu počítána v počtu vzorkovacích kroků, je závislost  $F = F(\lambda_{sampled})$  periodická s periodou 0,5.

Mohlo by se zdát, že poločíselné a celočíselné faktory jsou pro undersampling výhodné, protože potlačí rychlé oscilace a získaný signál připomíná obálku korelogramu (Obr. 11(a)). Na druhou stranu není vyloučeno, že vzorkování bude probíhat v místech, kde má korelogram hodnotu, která se jen velmi málo liší od střední hodnoty (Obr. 11(b)). To by vedlo k malé nebo vůbec žádné modulaci navzorkovaného koreogramu, což znamená nemožnost jeho správného vyhodnocení. Naopak faktory blízké  $F = (2n - 1) \cdot 0,25$ ,  $n \in \mathbb{N}$  by získání signálu alespoň v některých bodech zaručovaly.

Funkci obálky signálu získaného při undersamplingu je stále možné získat pomocí Hilbertovy transformace, jak je tomu u standardní metody.



Obrázek 11: Charakter signálu pro  $F = 1$ .

## 3.2 Hilbertova transformace

### 3.2.1 Definice Hilbertovy transformace

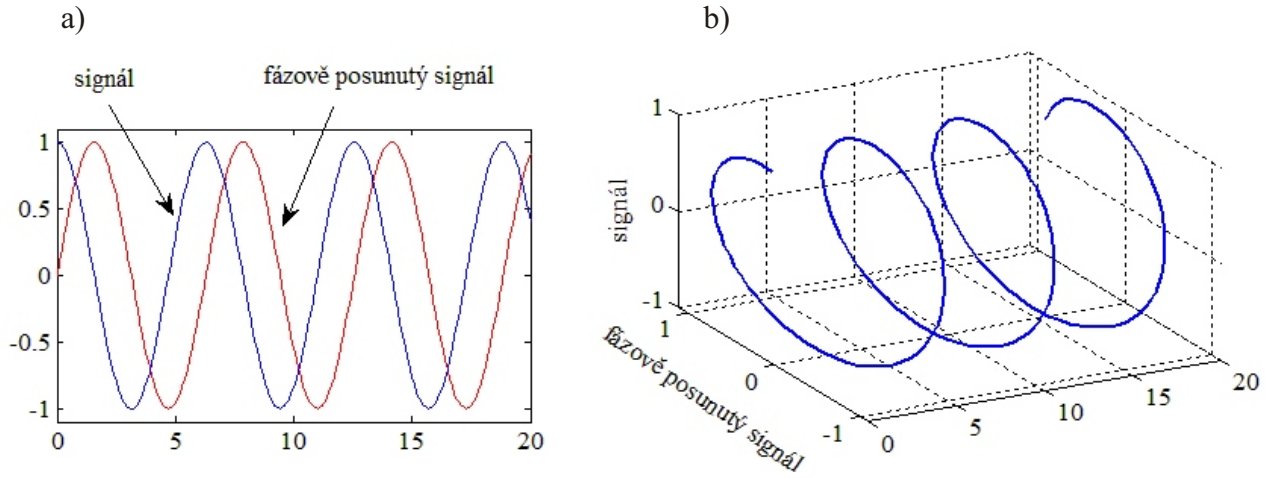
Teoreticky přesnou amplitudovou demodulaci korelogramu lze provést pomocí Hilbertovy transformace. Hilbert našel transformaci, která svazuje reálnou a imaginární část analytických funkcí. Reálný signál  $x(z)$  může být pomocí Hilbertovy transformace převeden na analytický signál  $a(z)$  tak, že je k tomuto reálnému signálu přičtena jeho Hilbertova transformace vynásobená imaginární jednotkou:

$$\begin{aligned} a(z) &= x(z) + iH[x(z)] \\ &= V(z)e^{i\varphi(z)} \end{aligned} \quad (29)$$

Rovnice (29) říká, že analytický signál může být rozložen do složek popisující jeho velikost a jeho fázi. Operátor Hilbertovy transformace  $H[\ ]$  je definován následujícím způsobem:

$$H[x(z)] = \tilde{x}(z) = \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta = x(z) * \frac{1}{i\pi z} \quad (30)$$

za předpokladu, že integrál existuje ve smyslu hlavní hodnoty [3]. Symbol p.v. označuje hlavní hodnotu integrálu - Cauchy principal value, symbol  $*$  značí konvoluci. Hilbertova transformace provádí posunutí fáze vstupního signálu o  $-\pi/2$ . Tedy imaginární část analytického signálu je posunuta o  $-\pi/2$  oproti jeho reálné části. Například Hilbertovou transformací funkce  $\cos x$  je funkce  $\sin x$  a naopak Hilbertovou transformací funkce  $\sin x$  je funkce  $-\cos x$  (viz. Obr 12). Je-li Hilbertova transformace aplikována dvakrát, je výsledek posunut o  $-\pi$ , tedy je to vstup vynásobený minus jednou.



Obrázek 12: (a) Funkce kosinus (modře) a její Hilbertova transformace (červeně). (b) Ilustrace analytického signálu vytvořeného z funkce kosinus.

$$H[H[x(z)]] = -x(z). \quad (31)$$

Z geometrických úvah vyplývá, že amplituda a fáze analytického signálu  $a(z)$  jsou dány těmito vztahy:

$$\varphi(z) = \arctan\left(\frac{\tilde{x}(z)}{x(z)}\right) = \text{Im}\{\ln(a(z))\} \quad (32)$$

$$V(z) = \sqrt{x^2(z) + \tilde{x}^2(z)} \quad (33)$$

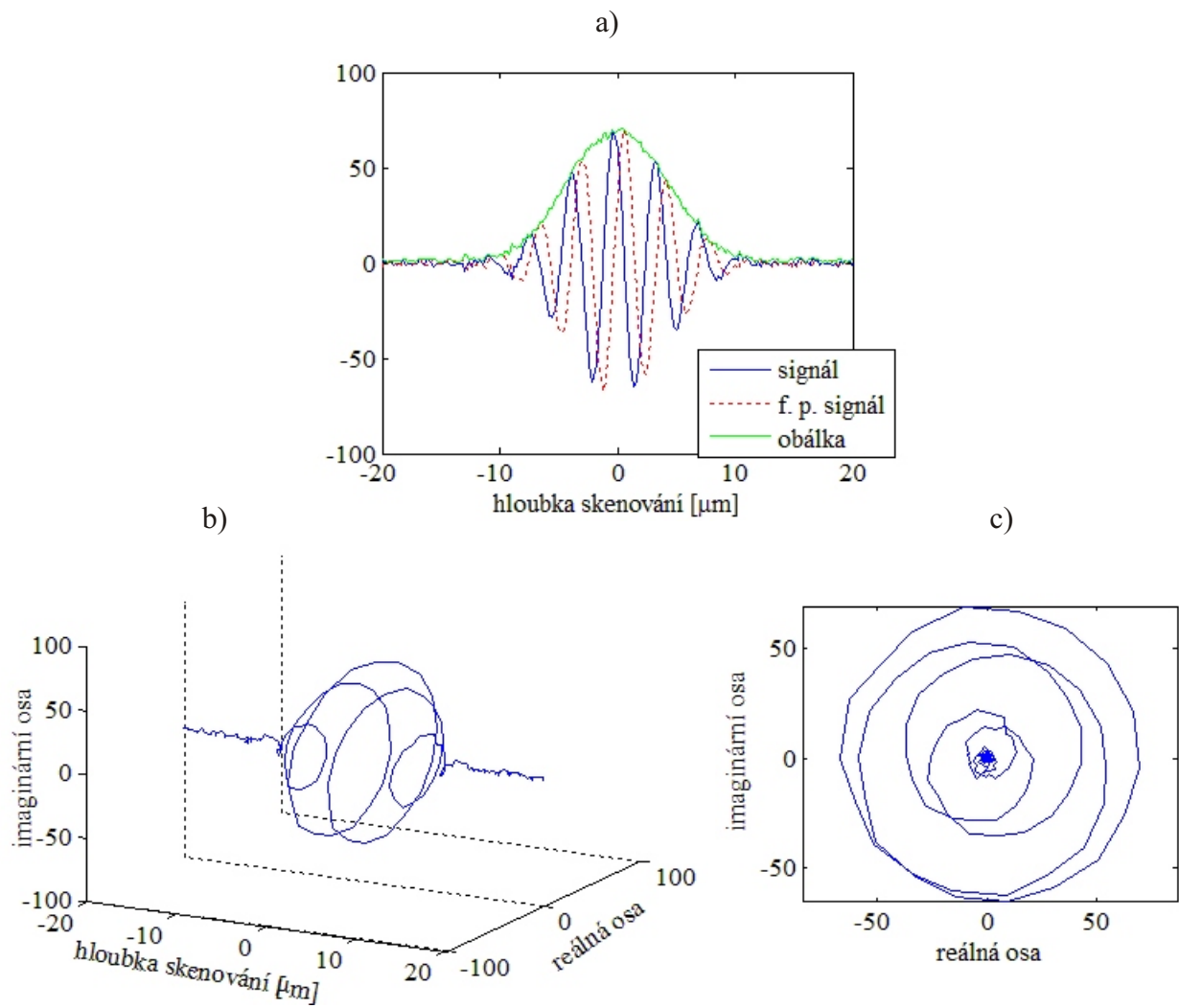
Právě amplitudu analytického signálu lze využít k nalezení tvaru obálky korelogramu (viz. Obr 13). Postup je následující: nejprve je od interferogramu  $x(z)$  odečtena jeho střední hodnota, čímž vznikne funkce  $x_z(z)$ . Poté je provedena Hilbertova transformace funkce  $x_z$  a hodnota obálky je spočítána jako

$$G(z) = \sqrt{x_z^2(z) + \tilde{x}_z^2(z)}. \quad (34)$$

Pokud by kupříkladu platilo  $x_z(z) = \cos(z)$ , pak  $\tilde{x}_z(z) = \sin(z)$  a obálka  $G(z)$  by byla konstanta  $G(z) = \sqrt{\cos^2(z) + \sin^2(z)} = 1$ .

Hilbertovu transformaci lze definovat také pomocí Fourierovy transformace, protože efekt Hilbertovy transformace je takový, že násobí frekvenční komponenty dané funkce určitou konstantou. Lze psát

$$\tilde{x}(z) = \mathcal{F}^{-1}\{-i\text{sgn}(\nu)\mathcal{F}\{x\}(\nu)\} \quad (35)$$



Obrázek 13: (a) Korelogram (modře), jeho Hilbertova transformace (červeně) a obálka korelogramu (zeleně). (b) Analytický signál vytvořený z korelogramu a jeho Hilbertovy transformace. (c) Tvar analytického signálu b) v komplexní rovině.

přičemž  $\mathcal{F}$  a  $\mathcal{F}^{-1}$  označuje přímou a inverzní Fourierovu transformaci a  $\text{sgn}()$  je funkce signum. Hilbertova transformace tedy násobí záporně-frekvenční složky signálu imaginární jednotkou  $i$ , posunuje jejich fázi o  $90^\circ$ , a kladně-frekvenční složky násobí záporně vzatou imaginární jednotkou  $-i$ , posunuje jejich fázi o  $-90^\circ$ .

### 3.2.2 Diskrétní signál

Výsledkem reálného měření není spojitá funkce korelogranu  $x(z)$ , ale diskrétní, vzorkovaný signál  $x[n]$ . Proto je potřeba najít algoritmus, který by dokázal provést Hilbertovu transformaci a nalézt obálku vzorkovaných signálů. K tomu lze využít definice Hilbertovy transformace pomocí Fourierovy transformace vztahem (35).

Uvažujme, že  $x[n]$  pro  $0 \leq n \leq N - 1$  je vystředovaný korelogram navzorkovaný v  $N$  ekvidistantních bodech se vzorkovacím krokem  $T$ . Podle rovnice (35) je potřeba nalézt spektrum korelogramu  $X[m]$ . K tomu je využita diskrétní Fourierova transformace (DFT - *discrete Fourier transform*)

$$X[m] = T \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-i2\pi fmnT). \quad (36)$$

kde  $f = \frac{1}{NT}$  je velikost kroku ve frekvenční oblasti. Po provedení DFT jsou kladně-frekvenční složky násobeny  $-i$  a záporně-frekvenční složky násobeny  $i$ , čímž vznikne spektrum  $Z[m]$  Hilbertovy transformace diskrétní funkce  $x[n]$

$$Z[m] = \begin{cases} 0, & \text{pro } m = 0 \\ -iX[m], & \text{pro } 1 \leq m \leq \frac{N}{2} - 1 \\ 0, & \text{pro } m = \frac{N}{2} \\ iX[m], & \text{pro } \frac{N}{2} + 1 \leq m \leq N - 1 \end{cases} \quad (37)$$

Konečně provedením zpětné diskrétní Fourierovy transformace na spektru  $Z[m]$  je získána Hilbertova transformace diskrétní funkce  $x[n]$ . Tedy  $z[n] = H[x[n]]$  a  $z[n] = DFT^{-1}\{Z[m]\}$ . Zpětná diskrétní Fourierova transformace je provedena podle předpisu

$$z[n] = \frac{1}{NT} \sum_{m=0}^{N-1} Z[m] \exp(+i2\pi mn/N). \quad (38)$$

Z reálného signálu a jeho Hilbertovy transformace je sestaven analytický signál

$$a[n] = x[n] + iz[n], \quad (39)$$

určením amplitudy analytického signálu v každém bodě je nalezena obálka korelogramu

$$G[n] = \sqrt{x^2[n] + z^2[n]}. \quad (40)$$

Analytický signál  $a[n]$  lze nalézt ještě jiným způsobem. Jak bylo zmíněno výše, Hilbertova transformace násobí kladně-frekvenční Fourierovy komponenty signálu  $x[n]$  konstantu  $-i$ , záporně-frekvenční komponenty jsou násobeny  $i$ . Při sestavení  $a[n]$  v rovnici (39) je  $H[x[n]]$  násobena další konstantu  $i$ , tudíž ve výsledku jsou kladně-frekvenční komponenty vráceny zpět a záporně-frekvenční komponenty jsou násobeny minus jednou, protože  $i \cdot i = -1$ . V součtu  $a[n] = x[n] + iz[n]$  se pak záporně-frekvenční komponenty výrazu  $x[n]$  a  $iz[n]$  odečtou, kdežto kladně-frekvenční komponenty se sečtou, zdvojnásobí.

Toto pozorování lze využít k přímé generaci  $a[n]$  následujícím způsobem: nejprve je provedena diskrétní Fourierova transformace reálného signálu  $x[n]$  tak, jak to popisuje rovnice (36), výsledkem je spektrum  $X[n]$ . To je využito k sestavení spektra analytického signálu  $A[m] = DFT\{a[n]\}$  podle předpisu

$$A[m] = \begin{cases} X[0], & \text{pro } m = 0 \\ 2X[m], & \text{pro } 1 \leq m \leq \frac{N}{2} - 1 \\ X[\frac{N}{2}], & \text{pro } m = \frac{N}{2} \\ 0, & \text{pro } \frac{N}{2} + 1 \leq m \leq N - 1 \end{cases} \quad (41)$$

Provedením zpětné diskrétní Fourierovy transformace, podobně jako v rovnici (38) je získán analytický signál  $a[n] = DFT^{-1}\{A[m]\}$ , který může být použit pro nalezení obálky korelogramu.

### 3.3 Nalezení maxima obálky interferogramu

#### 3.3.1 Standardní vyhodnocení

Naměřená navzorkovaná obálka je reprezentována řadou čísel  $G[n]$  pro  $0 \leq n \leq N - 1$ , kde  $N$  je počet vzorků. Nejjednodušším způsobem, jak najít polohu jejího maxima  $n_{max}$ , je vzít za  $n_{max}$  tu polohu  $n$ , kde  $G[n]$  nabývá maxima. Podélná souřadnice maxima obálky, a tedy podélná souřadnice měřeného povrchu je pak dána jako

$$z_0 = n_{max} \cdot \sigma_v, \quad (42)$$

kde  $\sigma_v$  je velikost vzorkovacího kroku. Avšak jako každé měření je i naměřený korelogram zatížen šumem, který je promítnut i do funkce obálky  $G[n]$ . To má za následek, že

maximální hodnota naměřené  $G[n]$  nemusí být ve středu zvonovité obálky a chyba výše popsaného vyhodnocení může být i několik vzorkovacích kroků.

Vyhodnocení, které je odolnější proti šumu je možné realizovat tak, že je numericky provedena vzájemná korelace naměřené obálky  $G[n]$  s ideálním gaussovským průběhem obálky  $G_{ideal}[m]$ . Pozice maxima korelační funkce označuje pozici maxima obálky a tím i podélnou souřadnici měřeného povrchu.

Ideální obálka je definována pro lichý počet bodů  $M = 2p + 1$ , aby byl jasně definován její střed. Ideální obálka je dána vztahem

$$G_{ideal}[m] = \exp\left(-\frac{4 \ln 2 \cdot (m - p)^2}{(\text{FWHM})^2}\right), \quad (43)$$

kde FWHM je šířka obálky v polovině jejího maxima. Vzájemná korelační funkce  $R_{G,G_{ideal}}[o]$  je definovaná na  $O = N - M + 1$  bodech vztahem

$$R_{G,G_{ideal}}[o] = \sum_{m=0}^M G[m + o]G_{ideal}[m]. \quad (44)$$

Nabývá-li  $R_{G,G_{ideal}}[o]$  maxima v bodě  $o_{max}$ , maximum obálky  $G[n]$  se nachází v bodě  $n_{max} = o_{max} + p$  a podélná souřadnice měřeného povrchu je  $z_0 = n_{max} \cdot \sigma_v$ . Protože při měření profilu je potřeba znát spíše vzájemné výškové rozdíly bodů povrchu než absolutní souřadnici, lze brát  $n_{max} = o_{max}$ . Navíc korelační funkce definovaná vztahem (44) není schopna správně určit pozici maxima obálky, pokud  $n_{max} < p$ , a je nutné měření provést tak, aby tato situace nenastala pro žádný bod povrchu.

Výše popsané standardní vyhodnocení maxima obálky korelogramu má tu nevýhodu, že jej lze provést s přesností pouze na jeden vzorkovací krok. To je u klasické metody dostačující, protože jeden vzorkovací krok má velikost přibližně čtvrtinu střední vlnové délky  $\sigma_v \approx \frac{\lambda}{4}$ . Avšak při použití undersamplingu s vyššími faktory  $F$  je vzorkovací krok velký několik mikrometrů, což vyžaduje použití metod, které umožňují nalezení pozice maxima  $G[n]$  s větším rozlišením, než je jeden vzorkovací krok.

### 3.3.2 Jemná korelace s ideální obálkou

Ačkoli je naměřená obálka navzorkována s krokem  $\sigma_v$ , ideální obálku je možné definovat s libovolným prostorovým rozlišením. Ideální obálka může mít jemnější prostorový krok, než naměřená obálka. Definujeme-li koeficient zjemnění  $\xi$  jako počet kroků ideální obálky  $\sigma_k$ , který vyplní jeden vzorkovací krok  $\sigma_v$ , bude velikost kroku ideální obálky



$$\sigma_k = \frac{\sigma_v}{\xi}. \quad (45)$$

Kvůli rozdílnosti velikosti kroku naměřené obálky  $G[n]$  a ideální obálky  $G_{ideal}$  není možné přímo použít vztah (44) pro jejich vzájemnou korelační funkci  $R_{G,G_{ideal}}[o]$ . Nejprve je nutné zjemnit krok pro  $G[n]$  tak, že místo mezi  $G[n]$  a  $G[n+1]$  je vyplněno  $\xi - 1$  vzorky s nulovou hodnotou (Obr. 14). Je tak sestavena nová funkce obálky  $G_{fine}[m]$ , velikost jejíhož kroku je  $\sigma_k$  a platí

$$G_{fine}[m] = \begin{cases} G[n], & \text{pro } m = n\xi \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \quad (46)$$

Poté je již možné provést vzájemnou korelaci ideální obálky  $G_{ideal}$  a zjemněné naměřené obálky  $G_{fine}$  podobně jako v (44). Vzájemná korelační funkce  $R_{G_{fine},G_{ideal}}[o]$  je pak

$$R_{G_{fine},G_{ideal}}[o] = \sum_{m=0}^M G_{fine}[m+o]G_{ideal}[m] \quad (47)$$

a je definovaná v  $O = (N-1) \cdot \xi - M + 2$  bodech. Pokud je  $o_{max}$  pozice maxima  $R_{G_{fine},G_{ideal}}[o]$ , je podélná souřadnice měřeného povrchu

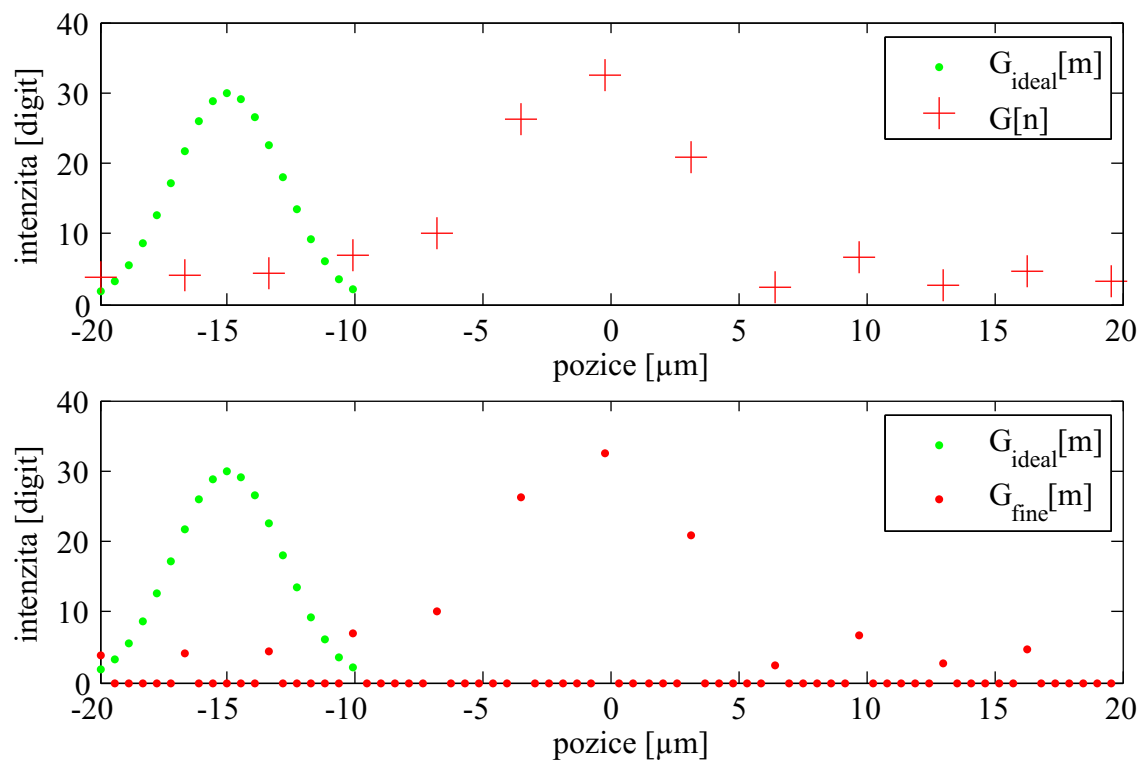
$$z_0 = o_{max} \cdot \sigma_k = o_{max} \cdot \frac{\sigma_v}{\xi}. \quad (48)$$

### 3.3.3 Fitování obálky metodou nejmenších čtverců

Jiným způsobem, jak nalézt pozici maxima  $G[n]$  s přesností větší, než je jeden vzorkovací krok, je proložení naměřených bodů funkcí obálky  $G_{ideal}(z)$ . Protože je předpokládán gaussovský tvar obálky korelogramu, jsou data prokládána funkcí

$$G_{ideal}(z) = A \exp \left[ -\frac{(z - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (49)$$

Nalezení koeficientů  $A$ ,  $\mu$  a  $\sigma$  pro takovou funkci je však úloha nelineární regresní analýzy. Úlohu lze převést na lineární tak, že je prokládán přirozený logaritmus dat  $\ln\{G[n]\}$



Obrázek 14: Princip jemné korelace naměřené obálky  $G[n]$  s ideální obálkou  $G_{ideal}$ . Naměřená obálka  $G$  je doplněna o nuly, čímž vznikne zjemněná obálka  $G_{fine}$ , jejíž prostorový krok se shoduje s prostorovým krokem  $G_{ideal}$ .

přirozeným logaritmem regresní funkce  $\ln\{G_{ideal}(z)\}$ , kdy platí

$$\begin{aligned}
\ln G_{ideal}(z) &= \ln \left\{ A \exp \left[ -\frac{(z - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \right\} \\
&= \ln A - \frac{(z - \mu)^2}{2\sigma^2} \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}z^2 + \frac{\mu}{\sigma}z + \left( \ln A - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right) \\
&= \alpha z^2 + \beta z + \gamma
\end{aligned} \tag{50}$$

Zlogaritmovaná data jsou prokládána parabolou. Předpokládejme, že bylo pořízeno celkově  $N$  vzorků,  $G[i]$  je vzorek pořízený v pozici  $z_i$ . Při prokládání dat metodou nejmenších čtverců je požadováno, aby koeficienty  $\alpha, \beta$  a  $\gamma$  byly takové, aby minimalizovaly chybovou funkci  $\varepsilon^2$  ve tvaru

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 &= \sum_{i=1}^N (\ln G[i] - \ln G_{ideal}(z_i))^2 \\
&= \sum_{i=1}^N (\ln G[i] - (\alpha z_i^2 + \beta z_i + \gamma))^2.
\end{aligned} \tag{51}$$

Pro určení pozice maxima fitované obálky stačí nalézt extrém chybové funkce  $\varepsilon^2$ . Platí, že v bodě extrému jsou parciální derivace  $\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial \alpha}$ ,  $\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial \beta}$  a  $\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial \gamma}$  nulové:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^N (2\alpha z_i^4 + 2\beta z_i^3 + 2\gamma z_i^2 - 2 \ln G[i] z_i^2) = 0 \\
\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial \beta} &= \sum_{i=1}^N (2\alpha z_i^3 + 2\beta z_i^2 + 2\gamma z_i - 2 \ln G[i] z_i) = 0 \\
\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial \gamma} &= \sum_{i=1}^N (2\alpha z_i^2 + 2\beta z_i + 2\gamma - 2 \ln G[i]) = 0
\end{aligned} \tag{52}$$

Po úpravě je získána soustava tří rovnic o třech neznámých  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}
\alpha \sum_{i=1}^N z_i^4 + \beta \sum_{i=1}^N z_i^3 + \gamma \sum_{i=1}^N z_i^2 &= \sum_{i=1}^N z_i^2 \ln G[i] \\
\alpha \sum_{i=1}^N z_i^3 + \beta \sum_{i=1}^N z_i^2 + \gamma \sum_{i=1}^N z_i &= \sum_{i=1}^N z_i \ln G[i] \\
\alpha \sum_{i=1}^N z_i^2 + \beta \sum_{i=1}^N z_i + \gamma \sum_{i=1}^N 1 &= \sum_{i=1}^N \ln G[i]
\end{aligned} \tag{53}$$

Vyřešením této soustavy jsou získány koeficienty paraboly  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$ . Pozice extrému paraboly je  $z_{extrem} = -\frac{\beta}{2\alpha}$ . Tím je určena podélná souřadnice měřeného povrchu

$$z_0 = \frac{-\beta}{2\alpha}. \quad (54)$$

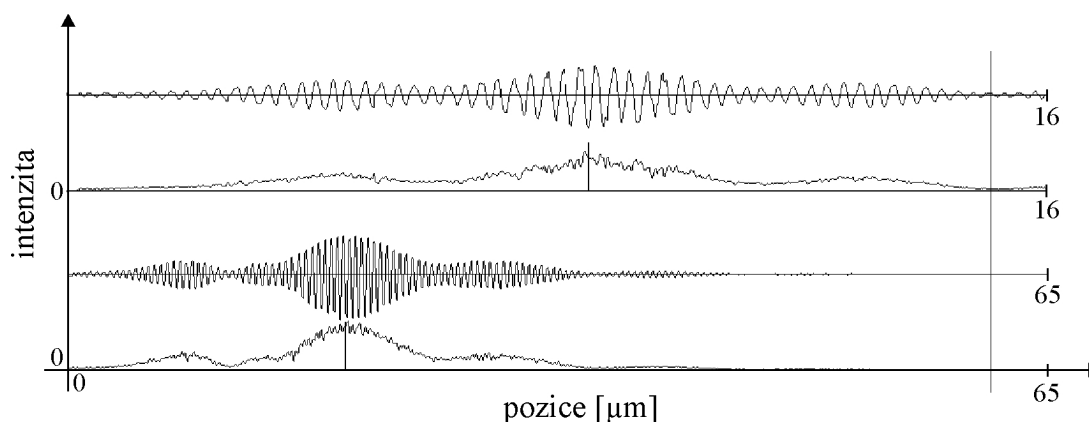
## 4 Metodika simulací a experimentů

### 4.1 Metodika experimentů

#### 4.1.1 Experimentální sestava

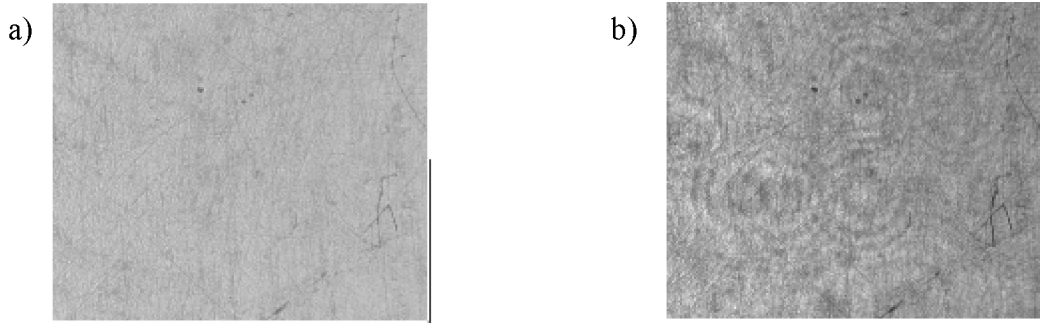
Je realizován Michelsonův interferometr pro interferometrii v bílém světle. Konstrukce tohoto interferometru je standardní, jak je zachycena na Obr. 6. Ve vstupním a výstupním rameni jsou použity achromatické čočky o ohniskové vzdálenosti 80 mm, kamera je vybavena objektivem o ohniskové vzdálenosti 50 mm. Dělič svazku je realizován dělicí kostkou. Jako detektor světla je použita CMOS kamera. Skenovací zařízení je tvořeno lineárním mikroposuvem, který je ovládán počítačem.

Jako zdroj světla bylo testováno několik svítících diod (LED) i superluminiscenční dioda (SLD). Kritériem vhodnosti zdroje světla je tvar jeho korelogramu. Protože výše popsané metody vyhodnocení měření předpokládají gaussovský tvar obálky korelogramu, byl vybrán zdroj, obálka jehož korelogramu se nejvíce blížila tomuto tvaru. Na Obr. 15 jsou uvedeny dva příklady nevhodného tvaru korelogramu a jeho obálky. Z pohledu tvaru korelogramu byl vyhodnocen jako vhodný jeden typ LED a jeden typ SLD.



Obrázek 15: Příklady nevhodných tvarů korelogramů a jejich obálek.

SLD dioda se později ukázala jako nevhodná pro měření. Tato nevhodnost je způsobena její vysokou prostorovou koherencí. Ta je dostatečně velká na to, aby vlny rozptýlené na nečistotách v optické soustavě interferovaly s nerozptýlenou vlnou a tvořily v obraze kruhové artefakty (viz. Obr. 16(b)). Tyto artefakty pak působí jako rušivý element a zavádějí další chybu do měření. Pro měření pak byla vybrána jedna LED s vhodným tvarem korelogramu i koherenčními vlastnostmi. Tato dioda má  $\bar{\lambda} = 803\text{nm}$  a  $\text{FWHM} = 18,6\mu\text{m}$ .



Obrázek 16: (a) Zorné pole kamery při použití LED. (b) Zorné pole kamery při použití SLD, jsou zde patrné kruhové artefakty, které mají nepříznivý vliv na přesnost měření.

#### 4.1.2 Vyhodnocení chyby měření

Aby bylo možné posoudit vhodnost různých nastavení měřicí procedury, je nezbytné najít způsob, jak odhadnout chybu měření při různých nastaveních. Nejlepší způsob, jak posoudit chybu konkrétního měření je srovnat výsledek tohoto měření s opravdovým tvarem měřeného předmětu, což ale vyžaduje znalost tohoto pravého tvaru. V experimentech byl jako měřený předmět využíván kovový plíšek, jehož tvar nebyl znám. Ke zjištění jeho tvaru byla využita interferometrie v bílém světle, ale ve svém standardním provedení. To poskytuje výsledek s nejistotou měření pod jednu desetinu mikrometru, což je řádově přesnější výsledek, než byl očekáván u metody undersamplingu.

Standardní metodou s pomalým skenováním bylo provedeno deset měření tvaru předmětu a z těchto měření byla určena střední hodnota. Takto získaný tvar byl považován za pravý, referenční tvar měřeného předmětu  $Z_{ref}(x, y)$ . Měření referenčního tvaru byla provedena se vzorkovacím faktorem  $F = 0, 1$  a maximum obálky bylo určeno korelací s ideální obálkou.

Odhad střední absolutní chyby určení pozice maxima korelogramu  $\langle |\Delta_{max}| \rangle$  u měření s určitými parametry byl z naměřeného tvaru  $Z_{meas}[x, y]$  proveden tak, že byl vypočten aritmetický průměr absolutní hodnoty rozdílu  $Z_{ref}[x, y] - Z_{meas}[x, y]$

$$\langle |\Delta_{max}| \rangle = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^V \sum_{j=1}^D |Z_{ref}[i, j] - Z_{meas}[i, j]|, \quad (55)$$

kde  $V$  a  $D$  jsou výška a délka měřicího pole v pixelech a  $K = V \cdot D$  je počet bodů (pixelů), ve kterých bylo měření provedeno.

## 4.2 Metodika numerických simulací

### 4.2.1 Základní procedura simulace

Celý měřicí proces interferometrie v bílém světle je numericky simulován pomocí matematického softwaru MATLAB. Nejjednodušší způsob, jak simulovat výsledek jednoho měření v jednom pixelu, je definovat korelogram jako explicitní funkci souřadnice posunutí při skenování  $z$  přesně podle rovnice (3). Bez ztráty obecnosti lze maximum obálky položit do počátku

$$z_{0,real} = 0 \quad (56)$$

a předpokládat, že skenování bude probíhat od nějaké záporné souřadnice  $z_{start}$  po kladnou souřadnici  $z_{stop}$ . Korelogram je určen ještě dalšími čtyřmi parametry, a to střední vlnovou délkou  $\bar{\lambda}$ , pološířkou obálky FWHM, střední intenzitou  $I_n$  a maximální modulací  $I_k$ . Zde jsou při zadávání korelogramu použity parametry odpovídající reálnému experimentu. V tom je použita LED s  $\bar{\lambda} = 803$  nm a FWHM = 18,6  $\mu$ m. Protože je záznam intenzity při měření prováděn digitální kamerou, jednotkou výsledné hodnoty naměřené intenzity  $I[n]$  je jeden digit. Proto jsou intenzity  $I_n$  a  $I_k$  v simulaci zadány také v digitech. Konkrétně  $I_n = 130$ , což odpovídá zhruba polovině dynamického rozsahu kamery, a  $I_k = 5$ . Pokud se při experimentu vyskytne modulace menší než  $I_k = 5$ , výsledek není považován za spolehlivý a souřadnice povrchu v daném pixelu je dopočítána z okolních pixelů. Na druhou stranu chyby vyhodnocování jsou tím větší, čím menší je  $I_k$ , proto je předpokládáno, že nastavení  $I_k = 5$  poskytne jakýsi horní odhad očekávané chyby určení pozice maxima korelogramu. Fáze korelogramu je brána jako nulová  $\varphi_0 = 0$ .

Při měření je korelogram vzorkován v určitém počtu bodů  $N$  a s určitým vzorkovacím krokem  $\sigma_v$ . V simulaci je zadáno  $N$ , namísto vzorkovacího kroku je jednodušší zadat vzorkovací faktor  $F$  a krok dopočítat z definičního vztahu (28). Dále je zadána startovní pozice vzorkování  $z_{start}$ . Poté již lze sestavit diskretní navzorkovaný interferogram  $I[n]$  ve tvaru

$$I[n] = I(z_{start} + n\sigma_v). \quad (57)$$

Kombinace hodnot  $F$ ,  $N$ ,  $\sigma_v$  a  $z_{start}$  je volena tak, aby byl zachycen celý průběh korelogramu a aby  $z_{start}$  a  $z_{stop}$  byly rozmístěny přibližně symetricky kolem  $z = 0$ , tedy aby byl navzorkovaný korelogram přibližně ve středu skenovacího rozsahu.

Následně je nalezena obálka  $G[n]$  diskretizovaného interferogramu  $I[n]$  sestavením odpovídajícího analytického signálu  $a[n]$  a výpočtem jeho amplitudy tak, jak to popisuje

odstavec 3.2.2. Nakonec je zjištěna pozice maxima  $z_{0,meas}$  obálky  $G[n]$ , a to jednou z metod vhodných pro undersampling popsaných v odstavci 3.3.

Skutečná pozice maxima obálky  $z_{0,real}$  je známá, ta je v simulaci položena do počátku. Hodnota  $z_{0,meas}$  nalezená vzorkováním a vyhodnocením popsáním výše se však od této hodnoty obecně liší. Proto je zajímavou veličinou spíše chyba v určení pozice maxima obálky

$$\Delta_{max} = z_{0,real} - z_{0,meas} \quad (58)$$

a s využitím rovnice (56)

$$\Delta_{max} = z_{0,meas} \cdot \quad (59)$$

To je číslo, které je výstupem simulace jednoho měření v jednom pixelu. Simulace je tedy navržena tak, aby našla chybu určení pozice maxima reálné funkce obálky  $G(z)$  pro různá nastavení měřicí procedury a vyhodnocovacích metod.

#### 4.2.2 Modelování některých efektů

**Efekt kvantování signálu** Vzorkování není jediný proces diskretizace, který při měření nastává. Korelogram je také takzvaně kvantován, to znamená, že  $I[n]$  může nabývat jen jistých diskretních hodnot. Konkrétně při použití 8 bitové kamery může  $I[n]$  nabývat 256 hodnot, tedy  $I[n]$  je vždy celé číslo a platí  $0 \leq I[n] < 256$ . To je omezení, které platí pro jakoukoli reálnou kameru, proto je potřeba kvantování signálu do simulace zahrnout. V simulaci je kvantování provedeno tak, že hodnota vzorku korelogramu  $I[n]$  je nejprve vypočítána z rovnice (57) a poté je zaokrouhlena k nejbližšímu celému číslu.

**Efekt integrace signálu během expozice** Technicky je měření provedeno tak, že skenovací zařízení posouvá s měřeným předmětem (nebo s referenčním zrcadlem) konstantní rychlostí a digitální kamera vzorkuje signál s konstantní vzorkovací frekvencí a s konstantní expoziční dobou. Protože expoziční doba kamery není nekonečně malá, v důsledku pohybu skenovacího zařízení se intenzita světla dopadajícího na jeden pixel mění. Naměřená hodnota v jednom pixelu je přímo úměrná ozáření tohoto pixelu, tedy energii, kterou tento pixel absorboval. Pixel kumuluje energii po celou expoziční dobu a v každém okamžiku je míra nakumulované energie úměrná intenzitě světla dopadající na tento pixel.

Předpokládejme, že pixel pohltí veškerou energii, která na něj dopadá. Za časový okamžik  $dt$  na pixel dopadne množství energie dané  $dE = I(t)S_p dt$ , kde  $I(t)$  je inten-



zita dopadajícího světla a  $S_p$  je plocha pixelu. Nechť expozice trvá od okamžiku  $t_1$  do okamžiku  $t_1 + \Delta t$ ,  $\Delta t$  je expoziční doba. Pak bude energie nakumulovaná v pixelu rovna

$$E = \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} I(t) S_p dt. \quad (60)$$

Zavedeme-li substituci  $z = v \cdot t$  a  $dz = v \cdot dt$ , kde  $v$  je rychlost posuvu skenovacího zařízení, je energie dána

$$E = \int_{z_1}^{z_1 + \Delta z} I(z) S_p v dz, \quad (61)$$

$z_1$  je poloha v jaké se nacházelo skenovací zařízení v okamžiku začátku expozice a  $\Delta z = v \cdot \Delta t$  je dráha ujetá za expoziční dobu. Hodnoty  $v$  a  $S_p$  jsou konstanty.

Standardní metoda interferometrie v bílém světle používá malé skenovací rychlosti, tím pádem se intenzit  $I(z)$  v důsledku posunutí o  $\Delta z$  změní jen málo a lze ji brát za konstantu

$$E_{st} = \int_{z_1}^{z_1 + \Delta z} I(z) S_p v dz = I(z_1) S_p v \int_{z_1}^{z_1 + \Delta z} dz = I(z_1) S_p v \Delta z \quad (62)$$

$$E_{st} \propto I(z_1)$$

V případě standardní metody je energie pohlcená pixelem úměrná hodnotě intenzity korelogramu v nějakém bodě ( $z_1$ ). V tomto případě lze předpokládat, že měřicí proces skutečně vzorkuje korelogram daný rovnicí (2). Na druhou stranu metoda undersamplingu využívá větší skenovací rychlosti, kdy zjednodušení  $I(z) \approx I(z_1)$  v integrovaném intervalu obecně neplatí. Ozáření je proto potřeba brát jako integrál z intenzity  $I(z)$  po dráze, kterou urazí skenovací zařízení za expoziční dobu

$$E_{us} = \int_{z_1}^{z_1 + \Delta z} I(z) S_p v dz = S_p v \int_{z_1}^{z_1 + \Delta z} I(z) dz \quad (63)$$

$$E_{us} \propto \int_{z_1}^{z_1 + \Delta z} I(z) dz$$

Efekt integrace během vzorkování je v simulaci implementován pomocí numerické integrace funkce  $\frac{I(z)}{\Delta z}$

$$I[n] = \int_{z_1}^{z_2} \frac{I(z)}{\Delta z} dz \quad (64)$$

kde  $z_1 = z_{start} + n \cdot \sigma_v - \frac{\Delta z}{2}$  a  $z_2 = z_{start} + n \cdot \sigma_v + \frac{\Delta z}{2}$ . Výsledek je nakonec ještě zaokrouhlen k nejbližšímu celému číslu, aby byl postihnout efekt kvantování signálu.

Škálovací faktor  $\frac{1}{\Delta z}$  v rovnici (64) zajistí, že pokud integrace probíhá v oblasti korelogramu mimo interferenci, kde je hodnota intenzity prakticky konstantní, bude naměřená hodnota  $I[n] = \frac{I_n}{\Delta z} \int_{z_1}^{z_2} dz = \frac{I_n}{\Delta z} \cdot \Delta z = I_n$ . Délka intervalu integrace je  $\Delta z = v\Delta t = \frac{\sigma_v}{t_f} = \frac{\lambda F}{t_f}$ . Hodnoty doby trvání jednoho snímku  $t_f$ , expoziční doby  $\Delta t$  a vzorkovacího faktoru  $F$  jsou do simulace zadány.

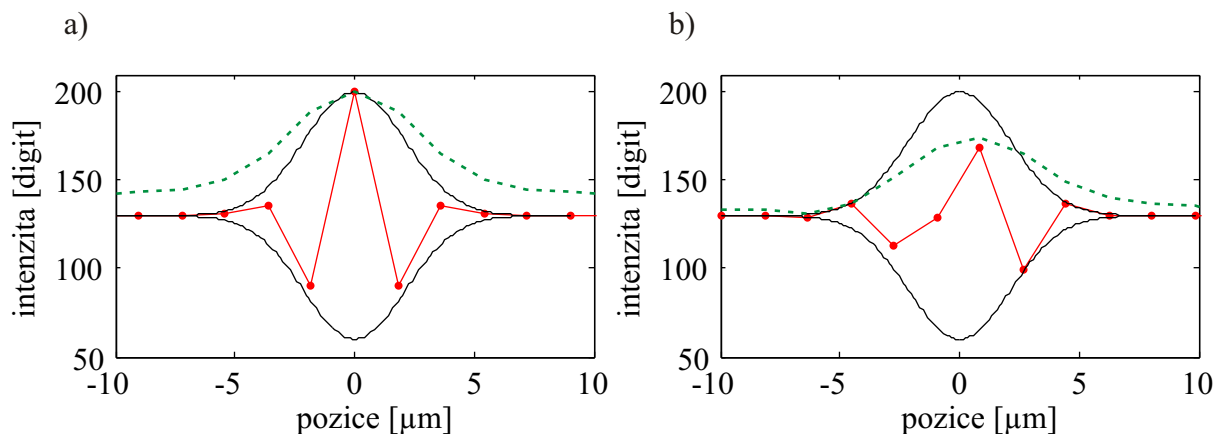
**Výstřelový šum** Naměřený korelogram je deformován šumem, který pochází z několika zdrojů. Kvantizační šum byl do simulace zahrnut zaokrouhlením velikosti simulované intenzity  $I[n]$ . Dalším typem šumu, který byl do simulace zahrnut, je výstřelový šum. Ten je způsoben faktem, že fotony jsou detektorem pohlcovány v náhodných časech, což vede k fluktuacím v naměřené intenzitě. Výstřelový šum je způsoben fundamentálními vlastnostmi světla a ani v principu jej není možné odstranit. Ačkoli se výstřelový šum řídí Poissonovým rozdělením, pro velké množství fotonů lze fluktuace v naměřené intenzitě modelovat Gaussovým rozdělením se standardní odchylkou

$$\sigma_{I,shot}(m) = \sqrt{\frac{m \cdot m_{max}}{n_{max}}}, \quad (65)$$

kde  $m_{max}$  je saturační hodnota intenzity pro kameru (např.  $m_{max} = 255$ ) [4]. Maximální počet generovaných fotoelektronů  $n_{max}$  je limitován množstvím elektronů  $e_{max}$ , které jeden pixel dokáže uchovat (Full-Well-Capacity), a kvantovou účinností konverze fotonů na fotoelektrony  $Q$

$$n_{max} = \frac{e_{max}}{Q}. \quad (66)$$

Výstřelový šum je simulován tím způsobem, že k hodnotě určené rovnicí (64) je přičteno náhodné číslo z gaussovského rozdělení se směrodatnou odchylkou danou předpisem (65). Jsou použity hodnoty parametrů udávané výrobcem kamery používané při experimentech:  $m_{max} = 255$ ,  $e_{max} = 200000$  a  $Q = 0.2$ . Vzniklé číslo je nakonec zaokrouhleno k nejbližšímu celému číslu.



Obrázek 17: Přesnost určení pozice maxima obálky korelogramu závisí u undersamplingu na tom, v kterých místech korelogramu jsou vzorky při vzorkování odebrány.

## 5 Pozorované efekty

### 5.1 Vliv umístění startovního bodu skenování

Interferogramy zaznamenané metodou undersamplingu nespĺňují kritérium vzorkovacího teorému, z čehož plyne ztráta informace. Je rozumné očekávat, že obálky získaných interferogramů budou jistým způsobem deformované, což bude mít za následek chybu v nalezení pozice maxima reálného koreogramu. Dále v textu bude pojem korelogram vyjadřovat reálnou závislost intenzity na podélné souřadnici, jak ji popisuje rovnice (2). Pojem interferogram bude označovat signál, který je získán vzorkováním korelogramu metodou undersampling. Symbolem  $z_{0,real}$  se bude rozumět pozice maxima obálky korelogramu, symbol  $z_{0,meas}$  bude označovat pozici maxima obálky interferogramu.

Obrázky 17(a) a 17(b) zobrazují vzorkování stejného korelogramu při stejném vzorkovacím faktoru. Zatímco interferogram (a) vypadá symetricky a vzbuzuje dojem, že maximum jeho obálky  $z_{0,meas}$  bude ve stejném místě  $z_{0,real}$ , jako maximum obálky reálného koreogramu (černá linka), interferogram (b) vykazuje značnou asymetrii, a to má za následek, že maximum jeho obálky není ve stejném místě, jako maximum vorkovaného koreogramu. Jediným rozdílem mezi interferogramy (a) a (b) je startovní pozice  $z_{start}$ . Ukazuje se tedy, že přesnost určení maxima reálného koreogramu závisí na pozici, v níž je zahájeno vzorkování. Čím je získaný interferogram více symetrický, tím je velikost rozdílu  $|\Delta_{max}| = |z_{0,real} - z_{0,meas}|$  mezi maximy obálek vzorkovaného koreogramu a získaného interferogramu menší.

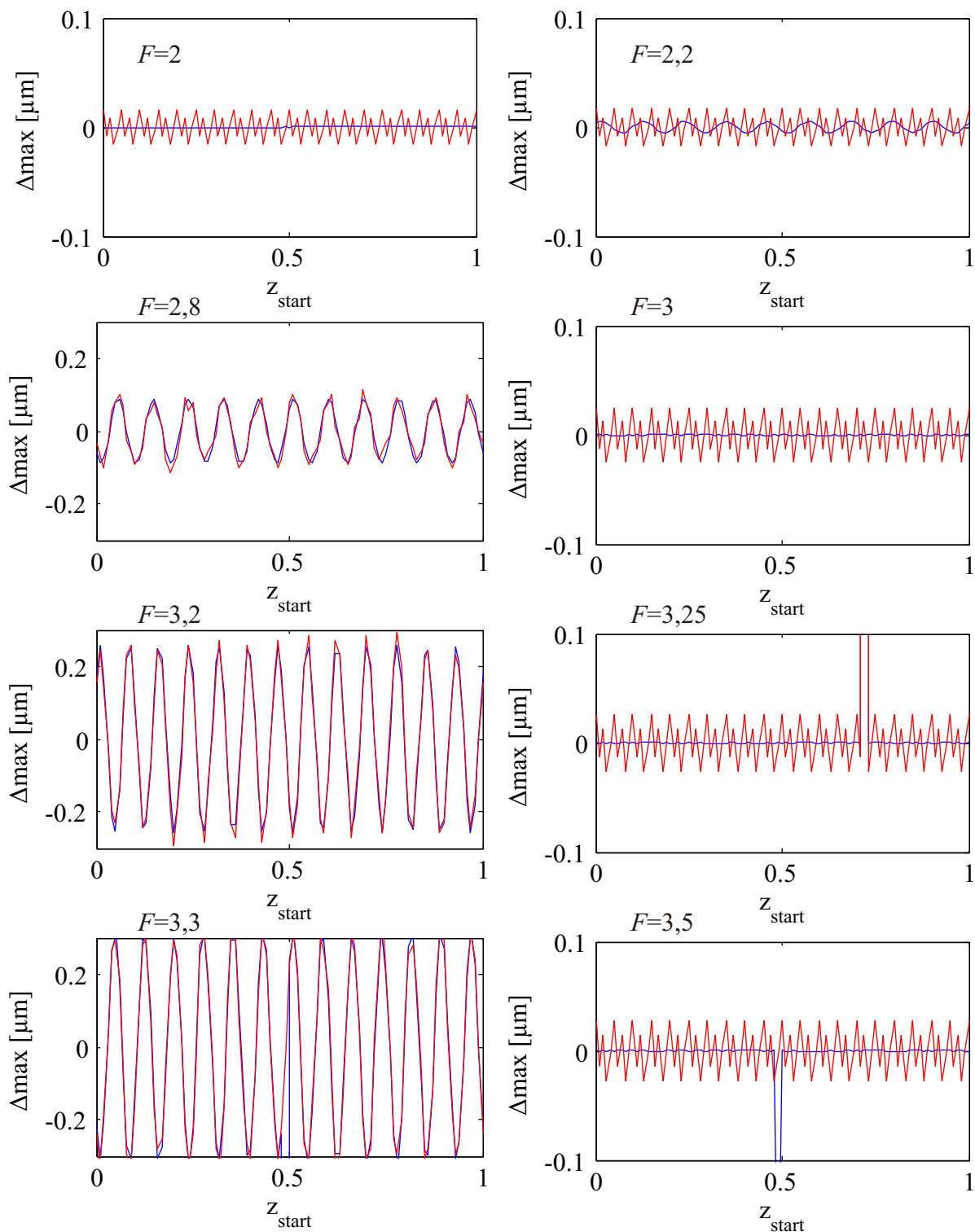
Aby bylo možné posoudit, jak velká je chyba v určení pozice maxima obálky reálného korelogramu nalezením maxima obálky interferogramu, je vytvořena numerická simulace. Ta demonstruje závislost rozdílu  $\Delta_{\max}$  na startovní pozici  $z_{\text{start}}$ . Je provedena sada simulovaných měření pro různé startovní pozice rovnoměrně rozmístěné v intervalu jednoho vzorkovacího kroku. Delší interval není potřeba uvažovat, protože situace se s posunutím  $z_{\text{start}}$  o jeden vzorkovací krok opakuje. Pro každou startovní pozici je simulováno jedno měření tak, jak to popisuje odstavec 4.2.1, nalezení maxima je provedeno jak fitováním ideální obálky metodou nejmenších čtverců, tak jemnou korelací s ideální obálkou. Koeficient zjemnění  $\xi$  je zvolen tak, aby jeden krok jemné korelace odpovídal vzorkovacímu kroku pro  $F = 0,05$ . Tím je zaručena alespoň teoretická možnost velmi přesného nalezení  $z_{0,\text{meas}}$ .

Závislost  $\Delta_{\max} = \Delta_{\max}(z_{\text{start}})$  je sledována pro různé hodnoty vzorkovacího faktoru  $F$ . Simulace ukazuje, že pro celočíselné a poločíselné faktory chyba v závislosti na  $z_{\text{start}}$  pravidelně osciluje kolem nulové hodnoty podle toho, jak se mění symetrie vzorkování. Amplituda těchto oscilací je velmi malá. U vyhodnocení pomocí fitování gaussovské obálky je například pro hodnotu  $F = 3,5$  amplituda těchto oscilací řádově  $10^{-7} \mu\text{m}$ . U vyhodnocení pomocí jemné korelace je amplituda těchto oscilací dána velikostí kroku jemné korelace. Závislosti pro některé vybrané hodnoty faktoru zobrazuje Obr. 18. Podobné chování vykazuje  $\Delta_{\max}$  i u hodnot splňujících  $F = (2n + 1) \cdot 0,25, n \in \mathbb{N}$ . Na Obr. 18 je uvedena závislost pro  $F = 3,25$ .

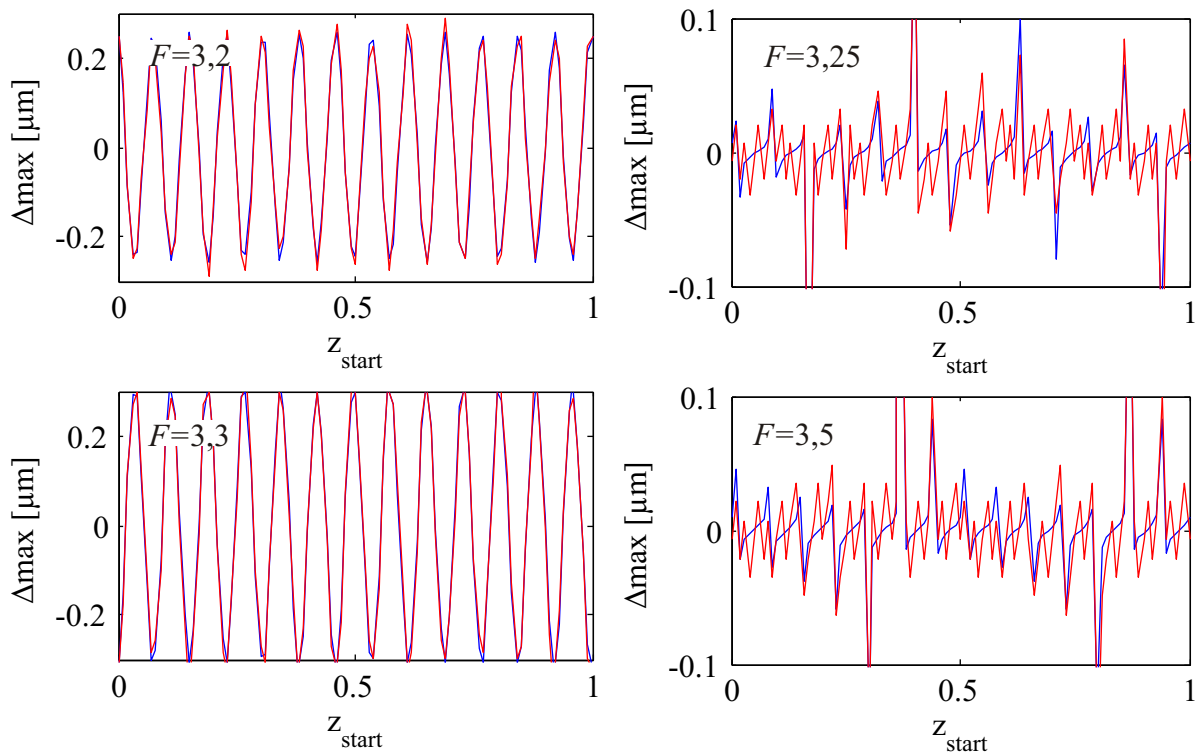
Pro ostatní hodnoty  $F$  je situace poněkud jiná. Obr. 18 ukazuje průběh  $\Delta_{\max}$  pro hodnoty faktoru  $F = 2,2$ ,  $F = 2,8$ ,  $F = 3,2$  a  $F = 3,3$ . U hodnot faktoru tohoto typu chyba  $\Delta_{\max}$  také osciluje, ale amplituda těchto oscilací je podstatně větší a s rostoucím faktorem stoupá. Například pro  $F = 2,2$  je amplituda přibližně  $0,005 \mu\text{m}$ , pro  $F = 3,3$  je to už  $0,3 \mu\text{m}$ . Oscilační charakter této chyby znamená, že při použití  $F = 3,3$  může být chyba měření velmi malá, ale také až  $0,3 \mu\text{m}$  velká, v závislosti na startovní pozici skenování. V těchto případech dává fitování ideální obálky i jemná korelace v podstatě stejné výsledky, jak je z Obr. 18 patrné.

## 5.2 Vliv integrace signálu, kvantování signálu a výstřelového šumu

Výše uvedená simulace uvažuje jen vzorkování spojitého signálu, neuvažuje kvantování signálu, šum ani efekt integrace. Lze očekávat, že efekt integrace intenzity při expozici bude snižovat kontrast získaného interferogramu. Například pokud by expozice při skenování proběhla přes délku jedné periody nosného signálu korelogramu, výsledkem by byla přibližně střední hodnota. Proto je u undersamplingu snahou nastavit co nejkratší ex-



Obrázek 18: Simulovaná závislost chyby určení  $z_{0,real}$  na startovní pozici. Červeně je vynešena hodnota určená jemnou korelací, modrá odpovídá fitování ideální obálky metodou nejmenších čtverců.

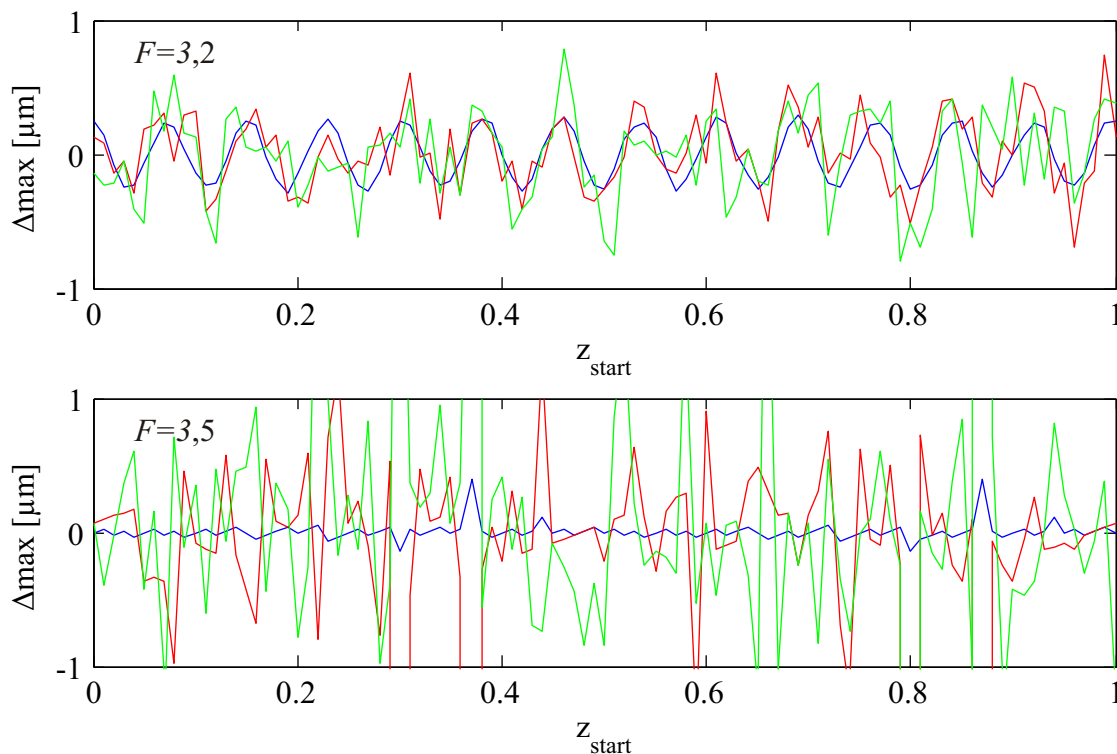


Obrázek 19: Simulovaná závislost chyby určení  $z_{0,real}$  na startovní pozici se započítaným efektem integrace intenzity během expoziční doby. Červeně je vynesena hodnota určená jemnou korelací, modrá odpovídá fitování ideální obálky metodou nejmenších čtverců.

poziční dobu. Na druhou stranu je expoziční doba limitována výkonem osvětlení. Moderní kamery umožňují pořizovat snímky s velmi krátkými expozičními dobami v řádu stovek mikrosekund. Protože experimenty jsou realizovány s expoziční dobou  $t_{exp} = 1000\mu\text{m}$ , pro tuto hodnotu je realizována i simulace.

Simulace ukazuje, že efekt integrace se projeví hlavně při vyhodnocení fitování ideální obálky metodou nejmenších čtverců. To už není pro  $F = n \cdot 0,25$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tak přesné, jako bez efektu integrace. Po započtení efektu integrace osciluje  $\Delta_{\max}(z_{start})$  při vyhodnocení metodou nejmenších čtverců v podstatě se stejnou amplitudou, jako při vyhodnocení pomocí jemné korelace (srovnání Obr. 18 a Obr. 19 pro  $F = 3,25$ ). Tyto oscilace však mají stejnou amplitudu, jako bez efektu integrace (srovnej Obr. 18 a Obr. 19 pro  $F = 3,2$  a  $F = 3,3$ ). To znamená, že pokud je v úvahu brán efekt integrace, pracují obě metody hledání pozice maxima obálky stejně přesně. Co se srovnání amplitud oscilací  $\Delta_{\max}(z_{start})$  týká, efekt integrace se projeví mírným zvětšením amplitudy až od faktoru  $F = 3,5$ .

Charakter chyby  $\Delta_{\max}(z_{start})$  se rapidně změní po započítání kvantování signálu. Ta

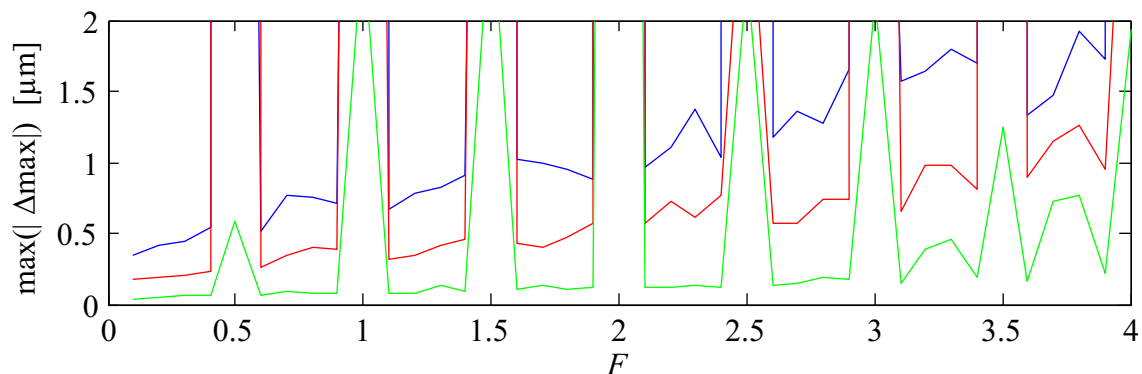


Obrázek 20: Simulovaná závislost chyby určení  $z_{0,real}$  na startovní pozici se započítaným efektem integrace intenzity během expoziční doby (modře), se započtením integrace a kvantování signálu (červeně) a se započtením integrace, kvantování signálu a šumu (zeleně).

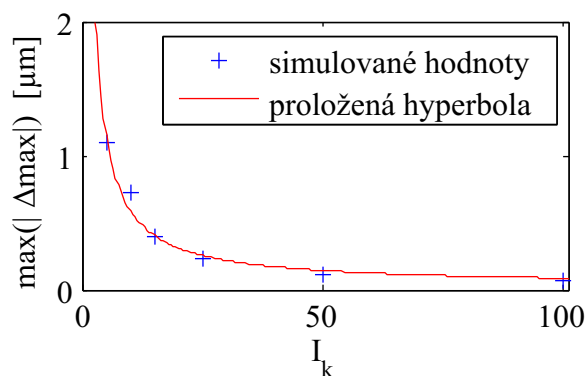
už nevykazuje periodický průběh a od nulové hodnoty se vzdaluje více, než v případě bez kvantování. Například pro  $F = 2,2$  byla amplituda oscilací chyby přibližně  $0,005\mu\text{m}$ , po započítání kvantování to je až  $0,4\mu\text{m}$ . Pro  $F = 3,3$  byla amplituda oscilací chyby přibližně  $0,3\mu\text{m}$ , po započítání kvantování to je až  $0,8\mu\text{m}$ . Pro hodnoty faktoru  $F = n \cdot 0,25$ ,  $n \in \mathbb{N}$  (např.  $F = 3,5$ ) už neplatí, že by největší hodnota  $\Delta_{\max}(z_{start})$  byla řádově menší, než pro ostatní hodnoty  $F$  (např.  $F = 3,2$ ), jak tomu je bez započítání kvantování. Navíc pro takový typ hodnoty faktoru se častěji objevují případy interferogramu, které jsou z důvodu své malé modulační chyby vyhodnoceny (na Obr. 20 to jsou hodnoty mimo rozsah grafu).

Zahrnutí výstřelového šumu do simulace se významněji neprojeví. Srovnání průběhů  $\Delta_{\max}(z_{start})$  bez zahrnutí šumu a integrace (modře), s integrací (červeně) a konečně s integrací i šumem (zeleně) pro faktory  $F = 3,2$  a  $F = 3,5$  je na Obr. 20. Z něj je patrné, že hlavní důvod chybného určení pozice maxima obálky korelogramu je kvantování signálu.

Obrázek 21 zobrazuje simulovanou maximální hodnotu chyby určení pozice maxima v závislosti na vzorkovacím faktoru a na modulaci korelogramu  $I_k$ . Je patrné, že čím je pro



Obrázek 21: Simulovaná závislost maximální hodnoty  $|\Delta_{\max}|$  na vzorkovacím faktoru  $F$  pro tři hodnoty modulační korelogramu:  $I_k = 5$  (modře),  $I_k = 10$  (červeně) a  $I_k = 50$  (zeleně).



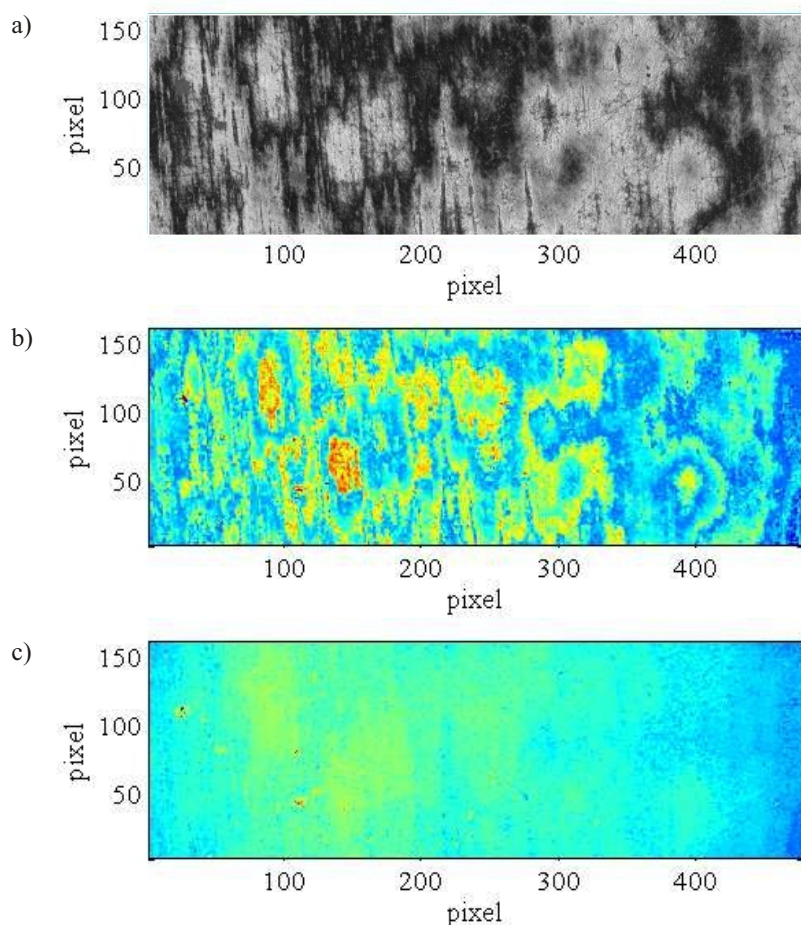
Obrázek 22: Simulovaná závislost maximální hodnoty  $|\Delta_{\max}|$  na modulaci korelogramu  $I_k$  pro  $F = 2,2$ . Veličina  $\max(|\Delta_{\max}|)$  je nepřímo úměrná  $I_k$ , což je demonstrováno proloženou parabolou.

konkrétní hodnotu faktoru  $F$  modulační korelogramu větší, tím je maximální hodnota  $|\Delta_{\max}|$  menší. Tyto veličiny na sobě závisí nepřímo úměrně (viz. Obr. 22). Dále pro hodnoty faktoru splňující  $F = n \cdot 0,5$ ,  $n \in \mathbb{N}$  je maximální hodnota  $|\Delta_{\max}|$  řádově větší, a to z toho důvodu, že pro tyto hodnoty  $F$  existují startovní pozice, které vedou k chybnému vyhodnocení signálu v důsledku jeho malé modulační. Toto pozorování naznačuje, že použití takových faktorů pro měření není vhodné.

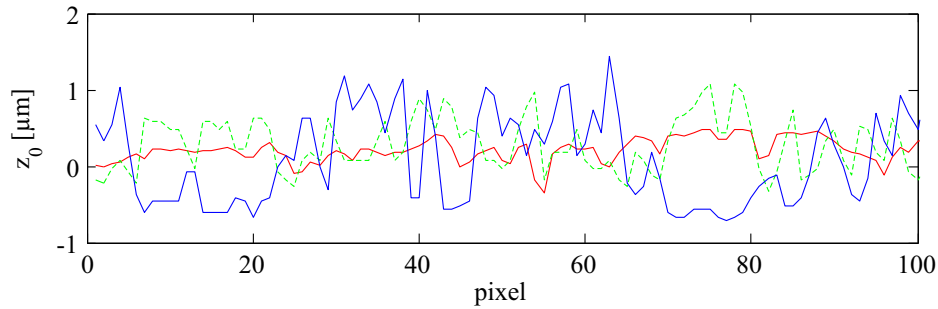
Přítomnost chyby určení maxima závislé na počáteční fázi vzorkování je možné experimentálně ukázat. Obrázek 23(a) zachycuje rozložení intenzity v obraze měřeného plíšku v okamžiku, kdy je možné pozorovat interferenci. Obraz plíšku je rozbit na oblasti s vysokou nebo nízkou intenzitou podle toho, zda zrovna nastala konstruktivní či destruktivní



interference. Je ale jisté, že ta místa, která mají stejnou intenzitu budou mít při měření stejnou počáteční pozici vzorkování a budou také mít stejnou chybu určení pozice maxima obálky. Pokud je měřený předmět sice drsný, ale rovinný, v naměřeném tvaru se objeví artefakt odpovídající fázové mapě z Obr. 23(a) a překryje všechny detaily povrchu, které jsou menší, než  $\langle |\Delta_{\max}| \rangle$  pro dané nastavení, jak to ilustrují Obr. 23(b) a 23(c). Na Obr. 24 je uvedeno srovnání referenčního profilu (červeně), profilu naměřeného s  $F = 1,2$  (zeleně) a profilu naměřeného s  $F = 3,2$ , kde je znatelná deformace výše zmíněným artefaktem.



Obrázek 23: (a) Rozložení intenzity v okamžiku interference. Stejná intenzita označuje místa, která mají stejnou počáteční pozici skenování vzhledem ke tvaru korelogramu. (b) Tvar získaný metodou undersampling s  $F = 3,2$  je deformován artefaktem závislejícím na počáteční pozici skenování. (c) Skutečný tvar předmětu.



Obrázek 24: Porovnání referenčního výškového profilu (červeně), profilu pro  $F = 1,2$  (zeleně) a profilu pro  $F = 3,2$  (modře).

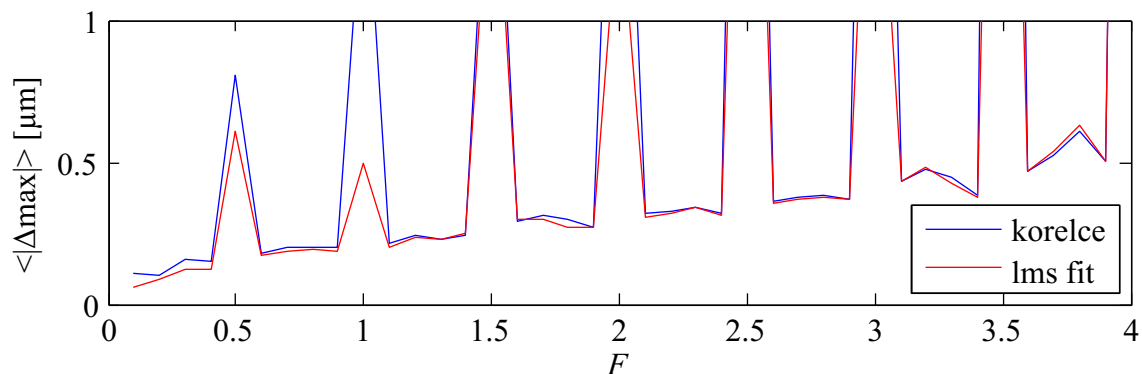
### 5.3 Závislost průměrné chyby určení pozice maxima obálky na vzorkovacím faktoru

Obrázek 21 zachycuje závislost průměrné chyby určení pozice maxima obálky korelogramu na vzorkovacím faktoru  $F$ . Maximální hodnota této chyby je ale extrémní hodnota a ne každé měření v každém bodě bude touto chybou zatíženo. Jak bylo popsáno v odstavci 5.1,  $\Delta_{\max}$  závisí na tom, jak symetricky v prostoru je korelogram při undersamplingu vzorkován. Symetričnost vzorkování se pak odvíjí od toho, na jaké pozici vzhledem k průběhu korelogramu je počátek vzorkování  $z_{\text{start}}$ .

Aby bylo možné odhadnout průměrnou chybu určení pozice maxima obálky korelogramu  $\langle |\Delta_{\max}| \rangle$  při měření tvaru předmětu ve velkém množství bodů, je vytvořena numerická simulace. Náhodnost počáteční pozice vzorkování v ní je implementována tak, že pro jedno nastavení měřicích parametrů ( $F$ , FWHM,  $\xi$  ...) je provedena sada měření, každé měření v sadě se liší výstřelovým šumem a počáteční pozicí skenování  $z_{\text{start}}$ . Použité rozdělení pravděpodobnosti výběru startovní pozice je rovnoměrné v intervalu širokém jeden vzorkovací krok, jinde nulové. Takový výběr je zřejmý, protože není důvod, aby byly některé počáteční pozice více pravděpodobné, než jiné, a situace se opakuje s periodou jednoho vzorkovacího kroku.

Pro každé měření je určena absolutní chyba  $|\Delta_{\max}|$  (rovnice (59)) a z celé sady měření je vypočítán aritmetický průměr veličiny  $|\Delta_{\max}|$ , který je vzat jako odhad průměrné chyby  $\langle |\Delta_{\max}| \rangle$ . Výše popsaným způsobem je chyba  $\langle |\Delta_{\max}| \rangle$  simulována pro vzorkovací faktory  $0.1 \leq F \leq 4$ . Je použito vyhodnocení jak fitováním metodou nejmenších čtverců (lms fit), tak jemnou korelaci s nastavením  $\text{FWHM}_{id} = 19\mu\text{m}$  a  $\xi = 40$ .

Výsledek simulace zachycuje Obr. 25. Průměrná chyba zde s faktorem  $F$  lineárně roste, ale pro celočíselné a poločíselné  $F$  vycházejí průměrné chyby výrazně vyšší, než pro okolní

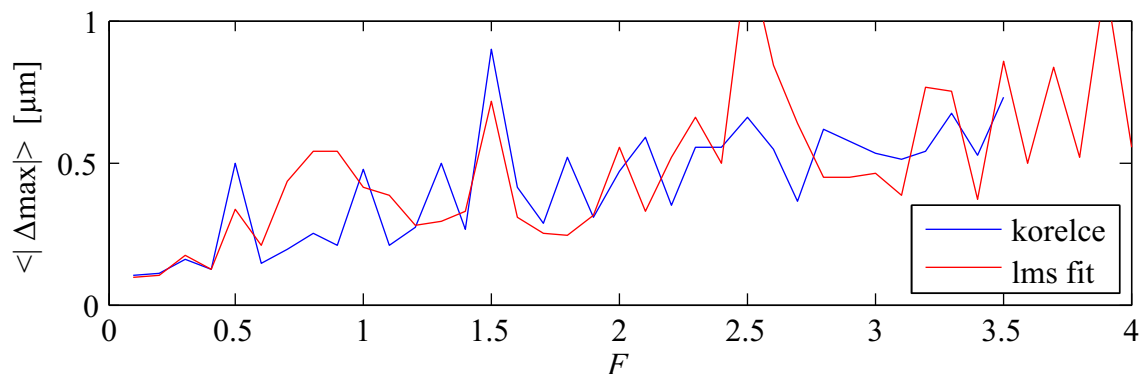


Obrázek 25: Simulovaná závislost průměrné absolutní chyby určení  $z_{0,real}$  na vzorkovacím faktoru  $F$ . Modře je vynesena hodnota určená jemnou korelací, červená odpovídá fitování ideální obálky metodou nejmenších čtverců.

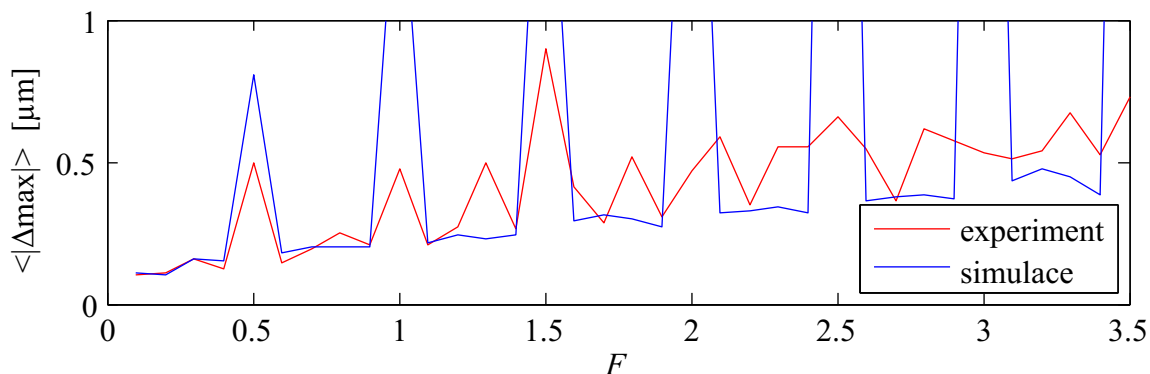
hodnoty  $F$ . To je způsobeno faktem, že pro tyto hodnoty faktoru větší podíl startovních pozic vede k malé modulaci signálu a jeho nesprávnému vyhodnocení, jak již bylo naznačeno výše. Toto pozorování opět říká, že hodnoty  $F$  typu  $F = n \cdot 0,5$ ,  $n \in \mathbb{N}$  nemusí být pro měření vhodné.

Nakonec je potřeba zdůraznit, že obě metody vyhodnocení poskytly rovnocenné výsledky, tedy zřejmě není žádná z nich přesnější.

Stejná závislost je pozorována i experimentálně. Pro každé nastavení  $F$  je provedeno měření, to je vyhodnoceno jak fitováním metodou nejmenších čtverců (lms fit), tak jemnou korelací s nastavením  $FWHM_{id} = 19\mu\text{m}$  a  $\xi = 40$ . Hodnota  $\langle |\Delta_{\max}| \rangle$  pro každé  $F$  a každou metodu vyhodnocení je určena podle postupu popsaného v odstavci 4.1.2. Výsledky měření shrnuje Obr. 26. Naměřená závislost má rostoucí charakter jako simulovaná závislost, pro faktory  $F = 0,5$ ,  $F = 1$  a  $F = 1,5$  jsou patrné náznaky píků, jak byly předpovězeny simulací, což částečně potvrzuje domněnku, že celočíselné a poločíselné faktory nejsou pro měření vhodné. Pro vyšší faktory však žádné píky přítomny nejsou a naměřená hodnota se pohybuje několik desetin mikrometru nad simulovanou hodnotou (Obr. 27).



Obrázek 26: Experimentálně zjištěná závislost průměrné absolutní chyby určení  $z_{0,real}$  na vzorkovacím faktoru  $F$ . Modře je vynesena hodnota určená jemnou korelací, červená odpovídá fitování ideální obálky metodou nejmenších čtverců.



Obrázek 27: Porovnání simulované (modře) a experimentálně zjištěné (červeně) závislosti průměrné absolutní chyby určení pozice maxima obálky v závislosti na vzorkovacím faktoru  $F$ . Vyhodnocení je provedeno jemnou korelací s ideální obálkou.

## 5.4 Vliv nastavení parametrů jemné korelace

### 5.4.1 Vliv nastavení pološířky ideální obálky

Při vyhodnocení maxima obálky pomocí jemné korelace je potřeba nastavit vlastnosti ideální obálky, zejména její pološířku. Lze očekávat, že vyhodnocení bude nejlépe fungovat tehdy, když bude pološířka ideální obálky  $G_{ideal}[n]$  stejná, jako pološířka skutečné obálky  $G(z)$ .

Pro ověření této hypotézy je vytvořena numerická simulace. Pro každé nastavení pološířky ideální obálky je simulována sada měření v jednom pixelu, pro každé měření je určena absolutní chyba měření  $|\Delta_{max}|$  (rovnice (59)) a z celé sady je určena průměrná hodnota

absolutní chyby měření  $\langle |\Delta_{\max}| \rangle$ . Náhodnost počáteční pozice, kvantování a šum jsou do simulace zavedeny stejným způsobem, jaký je popsán v odstavci 5.3. Je sledována závislost průměrné absolutní chyby měření na nastavené pološírce ideální obálky  $\text{FWHM}_{id}$ .

Závislost průměrné absolutní chyby měření na nastavení pološírky ideální obálky je sledována také experimentálně. Pro každé nastavení pološírky ideální obálky je provedeno měření, čímž je získán naměřený tvar předmětu  $Z_{meas}[x, y]$ . Ten je pak srovnán s referenčním tvarem  $Z_{ref}$  a je nalezena průměrná absolutní chyba určení  $z_{0,real}$  postupem uvedeným v odstavci 4.1.2.

Obrázek 28 ukazuje jak simulovanou (modře) tak naměřenou (červeně) závislost průměrné absolutní chyby měření na nastavené pološírce  $\text{FWHM}_{id}$  ideální obálky pro vzorkovací faktor  $F = 3,2$  a koeficient zjemnění  $\xi = 40$ . Závislosti jsou zjišťovány v rozmezí  $5\mu\text{m} \leq \text{FWHM}_{id} \leq 30\mu\text{m}$ , přičemž pološírka reálné obálky je  $\text{FWHM}_{real} = 19\mu\text{m}$ . U simulace je zřejmé, že pro malé pološírky do  $\text{FWHM}_{id} = 13$  je průměrná chyba relativně vysoká, poté klesá, ale minima dosahuje pro  $\text{FWHM}_{id} = 23$ , což je o několik mikrometrů více, než je  $\text{FWHM}_{real} = 19\mu\text{m}$ . Experimentálně se takovýto průběh není pozorován. Pokud se nastavení pološírky ideální obálky příliš neliší od skutečné hodnoty (např.  $\text{FEHM}_{id} = 1\mu\text{m}$ ), průměrná chyba měření se pohybuje kolem hodnoty  $\langle |\Delta_{\max}| \rangle = 0,8\mu\text{m}$ . Lze konstatovat, že přesné nastavení pološírky ideální obálky pro jemnou korelaci není kritické, vyhodnocení pracuje stejně kvalitně pro interval nastavení  $\text{FWHM}_{id}$  o velikosti několika mikrometrů kolem skutečné hodnoty.

#### 5.4.2 Vliv nastavení koeficientu zjemnění

U metody undersamplingu musí být poloha maxima obálky stanovena s větším prostoro-rovým rozlišením, než je jeden vzorkovací krok. V odstavci 3.3.2 je pro tento účel popsána technika jemné korelace s ideální obálkou. Ta vyžaduje nastavení koeficientu zjemnění  $\xi$  (rovnice (45)). Čím je koeficient vyšší, tím je možné nalézt pozici maxima obálky korelogramu teoreticky s větší přesností, ale je tak nutné provést více numerických operací při jemné korelaci, což prodlužuje vyhodnocovací čas. Na druhou stranu příliš velký koeficient zjemnění nemusí zaručovat přesnější měření.

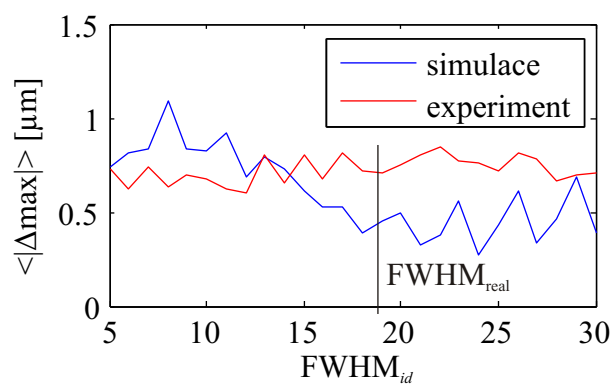
Aby bylo možné rozhodnout, které faktory jsou ještě efektivní a které už nemají na přesnost měření vliv, je vytvořena numerická simulace. Pro každé nastavení koeficientu zjemnění při jemné korelaci je simulována sada měření v jednom pixelu, pro každé měření je určena absolutní chyba měření  $|\Delta_{\max}|$  (rovnice (59)) a z celé sady je určena střední hodnota absolutní chyby měření  $\langle |\Delta_{\max}| \rangle$ . V simulaci jsou zahrnuty výstřelový a kvantizační šum, efekt integrace. Náhodnost počáteční fáze je v simulaci realizována stejným způsobem,

jako u zkoumání vlivu nastavení pološířky ideální obálky. je sledována závislost průměrné absolutní chyby měření na koeficientu zjemnění.

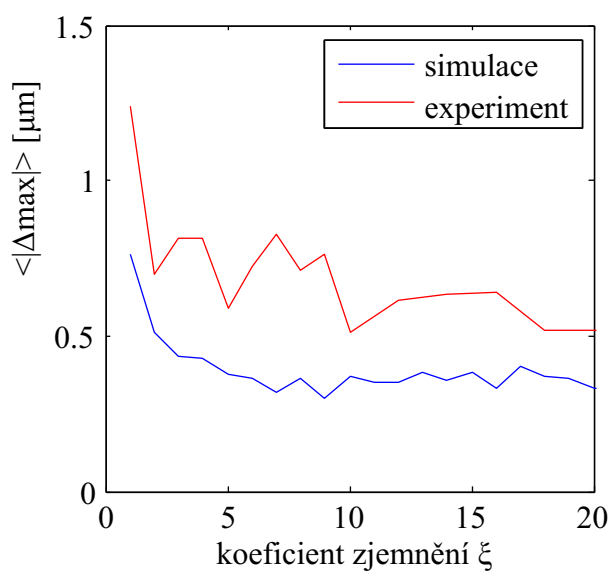
Stejná závislost je sledována i experimentálně. Pro každý koeficient zjemnění je provedeno měření, čímž je získán naměřený tvar předmětu  $Z_{meas}[x, y]$ . Ten je pak srovnán s referenčním tvarem  $Z_{ref}$  a je nalezena střední hodnota  $\langle |\Delta_{max}| \rangle$  postupem uvedeným v odstavci 4.1.2.

Závislost  $\langle |\Delta_{max}| \rangle$  na koeficientu zjemnění  $\xi$  je sledována v rozsahu  $1 \leq \xi \leq 40$  a výsledky shrnuje Obr. 29. Pozorované průběhy s faktorem  $\xi$  klesají přibližně po  $\xi = 10$ , potom už k žádnému snižování chyby nedochází. To ukazuje, že technika jemné korelace skutečně snižuje chybu měření, ale také má svůj limit. Pro  $F = 3.2$  a  $\bar{\lambda} = 803\text{nm}$  je pro  $\xi = 10$  velikost kroku jemné korelace  $\sigma_k \approx 0,26\mu\text{m}$ , což je hodnota průměrné chyby měření způsobené náhodnou počáteční fází pro  $F = 3, 2$ .

Simulace (Obr. 29 (modře)) výše popsaného limitu pro  $\xi = 10$  skutečně dosahuje. Experimentálně zjištěná závislost (Obr. 29 (modře)) vykazuje stejný průběh s tím rozdílem, že je její pokles zastaven na hodnotě  $\langle |\Delta_{max}| \rangle \approx 0,5\mu\text{m}$ . Závěrem lze konstatovat, že technika jemné korelace je funkční metoda, nemá však smysl nastavovat koeficienty zjemnění vyšší, než jaké vedou na velikost kroku  $\sigma_k$  menší, než je průměrná chyba určení maxima obálky způsobená náhodnou počáteční pozicí vzorkování.



Obrázek 28: Závislost průměrné chyby měření  $\langle |\Delta_{\max}| \rangle$  na nastavení pološířky  $\text{FWHM}_{id}$  ideální obálky při jemné korelaci. Modře je vynesena simulovaná závislost, červeně je vynesena experimentálně pozorovaná závislost.



Obrázek 29: Závislost průměrné chyby měření  $\langle |\Delta_{\max}| \rangle$  na nastavení koeficientu zjemnění  $\xi$  jemné korelace. Modře je vynesena simulovaná závislost, červeně je vynesena experimentálně pozorovaná závislost.

## 6 Ukázka měření

Za účelem demonstrace metody undersamplingu je provedeno měření tvaru mince (eurocent). Jako osvětlení je použita LED s  $\bar{\lambda} = 803\mu\text{m}$  a  $\text{FWHM} = 18,6\mu\text{m}$ . Expoziční doba kamery je nastavena na  $t_{exp} = 1000\mu\text{s}$  a opakovací frekvence je 25 FRPS. Prostorové rozlišení měření je  $1,7\mu\text{m}$ , to znamená, že velikost jednoho pixelu v naměřeném profilu odpovídá úseku měřeného předmětu o velikosti  $1,7\mu\text{m}$ .

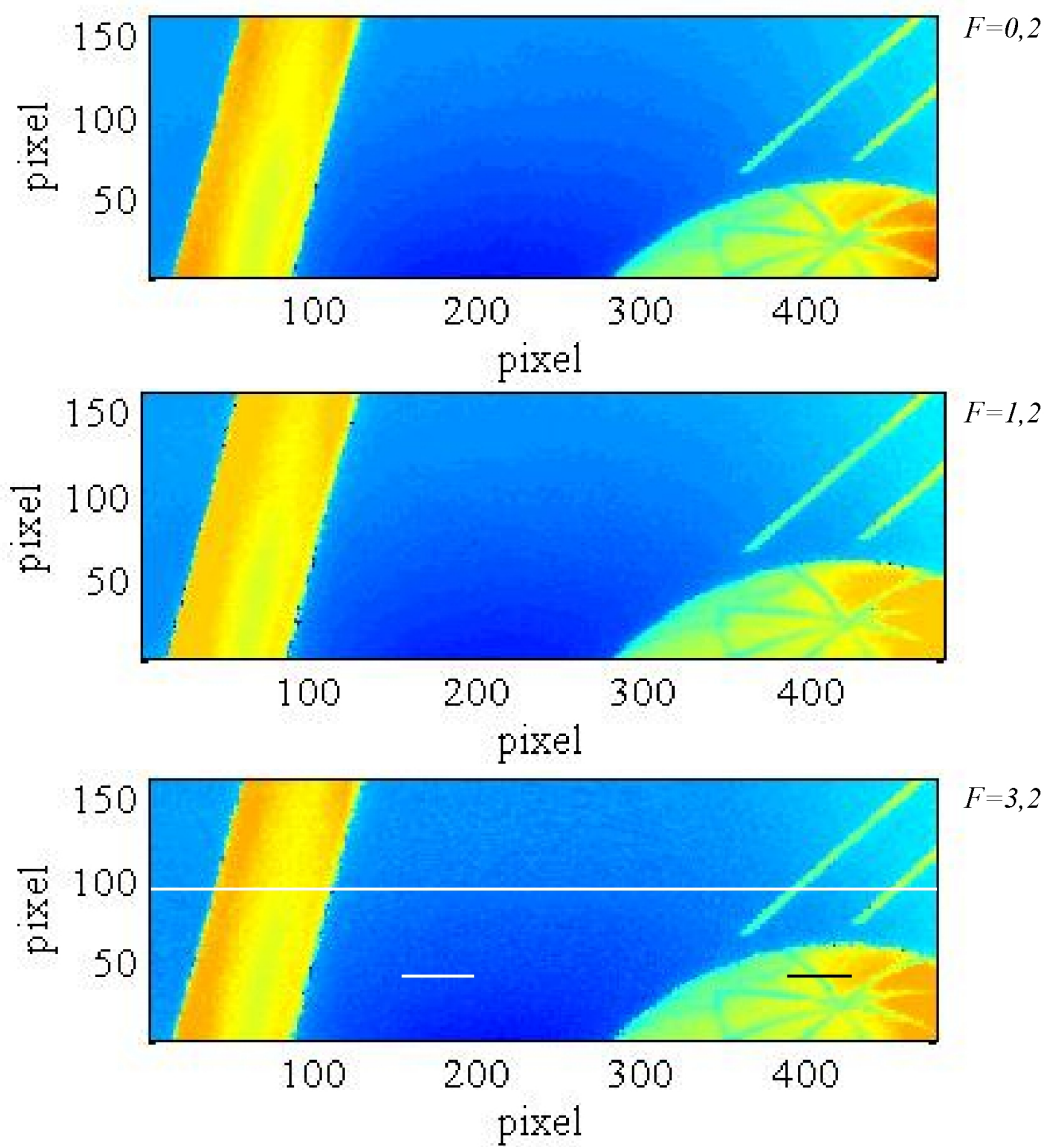
Nejprve je provedeno měření standardní metodou s  $F = 0,2$  (vzorkovací krok  $\sigma_v = 0,1606\mu\text{m}$ ) s vyhodnocením pomocí korelace s ideální obálkou. Zde je korelogram vzorkován skenovací rychlostí  $v_{scan} = 4,015 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}}$ .

Dále je provedeno měření undersamplingem s hodnotou vzorkovacího faktoru  $F = 1,2$  (vzorkovací krok  $\sigma_v = 0,9636\mu\text{m}$ ) s vyhodnocením pomocí jemné korelace s ideální obálkou. Korelogram je vzorkován skenovací rychlostí  $v_{scan} = 24,09 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}}$ .

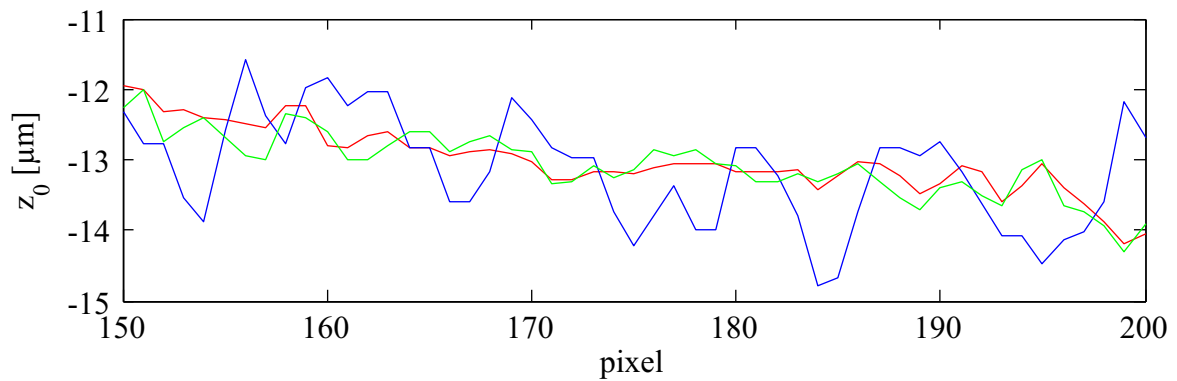
Nakonec je provedeno měření undersamplingem s hodnotou vzorkovacího faktoru  $F = 3,2$  (vzorkovací krok  $\sigma_v = 2,5696\mu\text{m}$ ) s vyhodnocením pomocí jemné korelace s ideální obálkou. Zde je korelogram vzorkován skenovací rychlostí  $v_{scan} = 64,24 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}}$ . Měření s faktorem  $F = 3,2$  znamená, že měření na stejném měřicím rozsahu proběhne šestnáctkrát rychleji a je při něm pořízeno šestnáctkrát méně 2D dat oproti měření s  $F = 0,2$  (standardní metoda). Ve srovnání s referenčním tvarem má průměrná chyba pro  $F = 3,2$  hodnotu  $\langle|\Delta_{\text{max}}|\rangle = 0,8\mu\text{m}$ .

Na Obr. 30 jsou pro srovnání zachyceny výškové mapy získané standardní metodou ( $F = 0,2$ ) a s využitím undersamplingu ( $F = 1,2$  a  $F = 3,2$ ). Na Obr. 31, 32 a 33 jsou zobrazeny výškové profily, odpovídající úseky jsou vyznačeny na Obr. 30 dole.

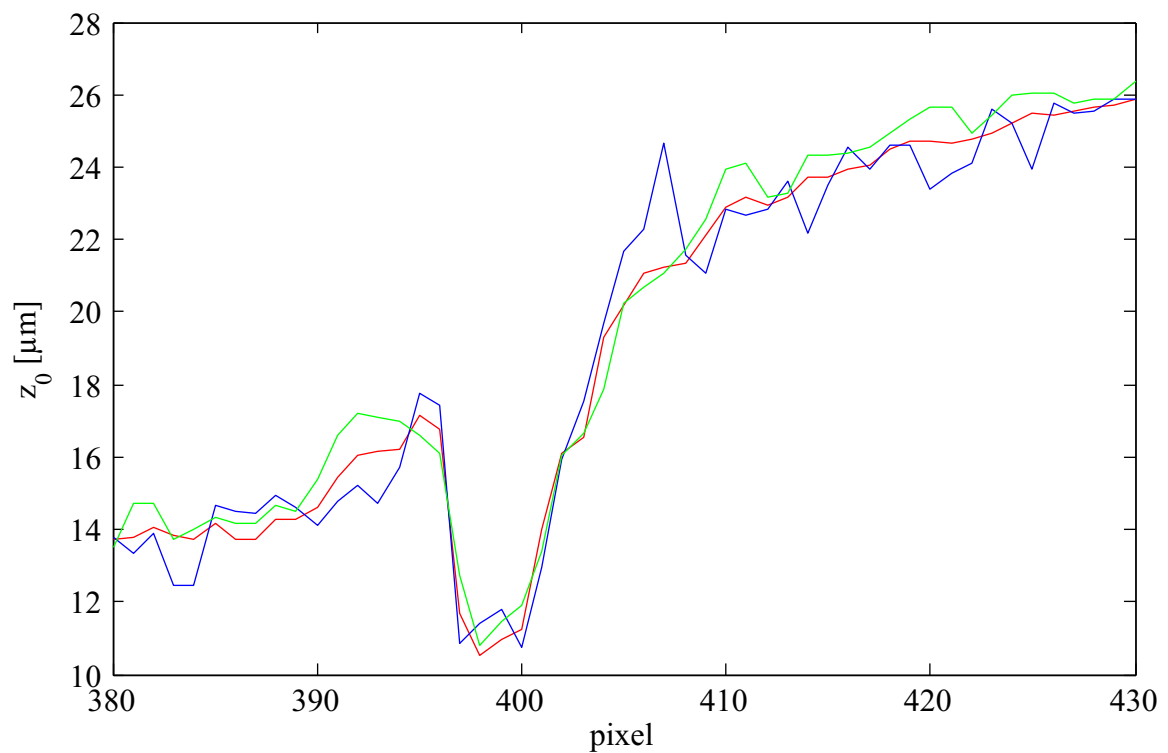




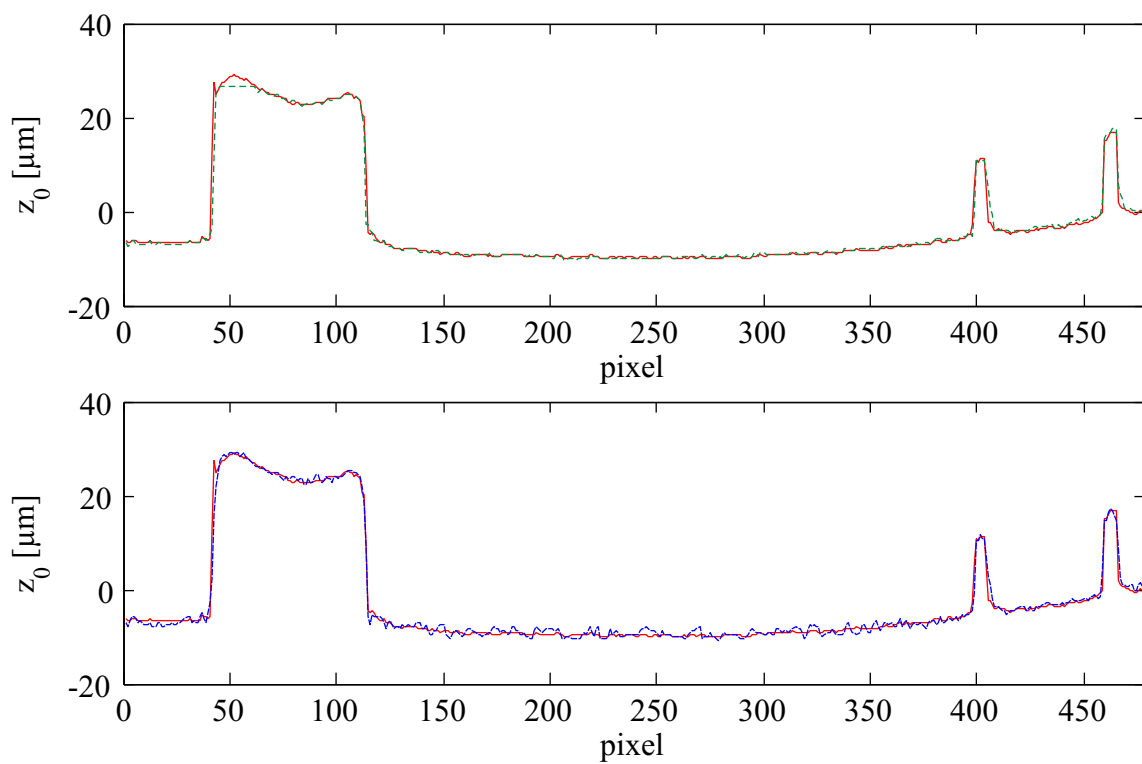
Obrázek 30: Výškové mapy měřeného předmětu naměřeného se vzorkovacím faktorem  $F = 0,2$  (nahore),  $F = 1,2$  (uprostřed) a  $F = 3,2$  (dole).



Obrázek 31: Porovnání profilů naměřených se vzorkovacím faktorem  $F = 0,2$  (červeně),  $F = 1,2$  (zeleně) a  $F = 3,2$  (modře).



Obrázek 32: Porovnání profilů naměřených se vzorkovacím faktorem  $F = 0,2$  (červeně),  $F = 1,2$  (zeleně) a  $F = 3,2$  (modře).



Obrázek 33: Porovnání profilů naměřených se vzorkovacím faktorem  $F = 0,2$  (červeně),  $F = 1,2$  (zeleně) a  $F = 3,2$  (modře).

## 7 Závěr

Cílem této diplomové práce bylo zkoumání možnosti zvýšení informační účinnosti interferometrie v bílém světle na drsném povrchu prostřednictvím metody undersamplig. Ta pracuje s vyššími skenovacími rychlostmi, než standardní metoda měření, čímž dochází ke vzorkování korelogramu s větším vzorkovacím krokem, než jaký je podle vzorkovacího teorému pro daný korelogram limitní.

V práci je ukázáno, že undersampling vede k signálu, jehož obálka obecně nemusí nabývat maxima ve stejném bodě jako obálka vzorkovaného korelogramu. Velikost i znaménko rozdílu pozice maxima obálky korelogramu a pozice maxima obálky signálu získaného při undersamplingu závisí na tom, v kterých místech korelogramu jsou vzorky odebrány. Jinými slovy pro jisté startovní pozice skenování maximum obálky signálu koinciduje s maximum obálky korelogramu, pro jiné startovní pozice se pozice maxim liší. Dále je pomocí numerické simulace demonstrováno, že maximální velikost rozdílu pozic roste přibližně lineárně se vzorkovacím faktorem a je nepřímo úměrná modulaci vzorkovaného korelogramu. Je také simulována závislost průměrné chyby určení pozice maxima obálky korelogramu na vzorkovacím faktoru a je ukázáno, že pro celočíselné a poločíselné hodnoty vzorkovacího faktoru je tato chyba řádově větší, než pro okolní hodnoty. Zmíněné pozorování je vysvětleno jako důsledek aliasing efektu při undersamplingu, kdy velký podíl startovních pozic dává signál, který není možné správně vyhodnotit.

Práce také diskutuje dvě metody nalezení pozice maxima obálky signálu, a to korelaci s tvarem ideální obálky a fitování ideální obálky metodou nejmenších čtverců. Je analyzována vhodnost nastavení některých parametrů v korelační metodě a je provedeno srovnání chyby v nalezení pozice maxima obálky korelogramu dosažené pomocí těchto dvou metod. Je ukázáno, a to jak pomocí numerické simulace, tak experimentálně, že obě metody jsou svým výkonem ekvivalentní.

Lze konstatovat, že při měření metodou undersampling ve výše popsané podobě není možné zachovat přesnost měření standardní metody. Nejistota měření je zvýšena o chybu určení pozice maxima obálky korelogramu, která je v důsledku náhodné startovací pozice skenování vzhledem k tvaru korelogramu také náhodná. Navíc velikost této chyby roste lineárně s velikostí vzorkovacího kroku. Toto tvrzení však platí jen v případě, kdy je podélná souřadnice měřeného povrchu položena do pozice maxima naměřeného signálu. Jak je v práci ilustrováno, chyba v určení pozice maxima obálky korelogramu souvisí se symetrií získaného signálu. Posouzením symetrie signálu by mohlo být možné chybu v určení pozice maxima korelogramu odhadnout a výsledek korigovat. Další výzkum se může vydat právě tímto směrem.

## Seznam použitých zdrojů

- [1] M. Born, E. Wolf, Principles of Optics (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [2] K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence, Mathematical Methods for Physics and Engineering (Cambridge University Press, Cambridge, 2006).
- [3] R. N. Bracewell, The Fourier transform and its applications (McGraw-Hill Companies, Boston, 2000).
- [4] O. Hýbl, "Information-Efficient White-Light Interferometry," PhD thesis (University Erlangen-Nürnberg, 2013).
- [5] T. Seiffert, "Verfahren zur schnellen Signalaufnahme in der Weißlichtinterferometrie," PhD thesis (University Erlangen-Nürnberg, 2007).
- [6] T. Dresel, G. Häusler, H. Venzke, "Three-dimensional sensing of rough surfaces by coherence radar," Appl. Opt. **31**, 919 - 925 (1992).
- [7] C. Richter, B. Wiesner, R. Groß, G. Häusler, "White-light interferometry with higher accuracy and more speed," in *Proceedings of Fringe 2005, The 5th International Workshop on Automatic Processing of Fringe Patterns*, W. Osten, ed. (Springer-Verlag, 2005), pp. 605-612.
- [8] P. Ettl, B. Schmidt, M. Schenk, I. Laszlo, G. Häusler, "Roughness parameters and surface deformation measured by 'Coherence Radar'," Proc. SPIE **3407**, 133-140 (1998).
- [9] P. Pavlíček, J. Soubusta, "Theoretical measurement uncertainty of white-light interferometry on rough surfaces," Appl. Opt. **42**, 1809-1813 (2003).
- [10] P. Pavlíček, O. Hýbl, "White-light interferometry on rough surfaces - measurement uncertainty caused by surface roughness," Appl. Opt. **47**, 2941-2949 (2008).
- [11] P. Pavlíček, Vybrané optické problémy týkající se 3D senzorů (Vydavatelství UP v Olomouci, Olomouc, 2012).
- [12] K. G. Larkin, "Efficient nonlinear algorithm for envelope detection in white light interferometry," JOSA A **13**, 832-843 (1996).
- [13] S. L. Marple, "Computing the Discrete-Time Analytic Signal via FFT," IEEE Transactions on Signal Processing **47**, 2600-2603 (1999).

**Příloha 1. Přiložené CD s elektronickou verzí této práce.**