TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní
a pedagogická

Sbírka úloh na extrémy funkcí více proměnných

Bakalářská práce

Studijní program:	B1101 Matematika
Studijní obory:	Matematika se zaměřením na vzdělávání Informatika se zaměřením na vzdělávání
Autor práce:	**Martin Nebeský**
Vedoucí práce:	RNDr. Martina Šimůnková, Ph.D. Katedra aplikované matematiky

Liberec 2020

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní
a pedagogická

Zadání bakalářské práce

Sbírka úloh na extrémy funkcí více proměnných

Jméno a příjmení:	**Martin Nebeský**
Osobní číslo:	P17000281
Studijní program:	B1101 Matematika
Studijní obory:	Matematika se zaměřením na vzdělávání Informatika se zaměřením na vzdělávání
Zadávající katedra:	Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Akademický rok:	**2018/2019**

Zásady pro vypracování:

Bakalářská práce bude sloužit jako sbírka řešených příkladů na extrémy funkcí více proměnných. Zadání příkladů bude student čerpat především z knihy profesora Ilji Černého – Úvod do inteligentního kalkulu 2.

V úvodní kapitole rozebere student metody, které při řešení příkladů používal. Těžištěm práce budou výše zmíněné řešené příklady. Vybrané příklady budou doplněny grafy zkoumaných funkcí s připojeným rozborem.

Práce bude vysázena systémem LaTeX.

Rozsah grafických prací:	
Rozsah pracovní zprávy:	
Forma zpracování práce:	tištěná/elektronická
Jazyk práce:	Čeština

Seznam odborné literatury:

Černý, I.: Úvod do Inteligentního kalkulu II, 2005
Rybička, J.: LaTeX pro začátečníky, Konvoj, 2003
Dokumentace systému LaTeX: https://www.latex-project.org/help/documentation

Vedoucí práce:	RNDr. Martina Šimůnková, Ph.D. Katedra aplikované matematiky
Datum zadání práce:	17. dubna 2019
Předpokládaný termín odevzdání:	30. dubna 2020

L.S.

prof. RNDr. Jan Picek, CSc.
děkan

doc. RNDr. Jaroslav Mlýnek, CSc.
vedoucí katedry

V Liberci dne 17. dubna 2019

Prohlášení

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně jako původní dílo s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé bakalářské práce a konzultantem.

Jsem si vědom toho, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu Technické univerzity v Liberci.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti Technickou univerzitu v Liberci; v tomto případě má Technická univerzita v Liberci právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Současně čestně prohlašuji, že text elektronické podoby práce vložený do IS/STAG se shoduje s textem tištěné podoby práce.

Beru na vědomí, že má bakalářská práce bude zveřejněna Technickou univerzitou v Liberci v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů.

Jsem si vědom následků, které podle zákona o vysokých školách mohou vyplývat z porušení tohoto prohlášení.

26. listopadu 2020 Martin Nebeský

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucí práce RNDr. Martině Šimůnkové, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a také čas, který mi věnovala v průběhu zpracování této práce. Také děkuji své rodině za podporu při mém studiu.

Anotace

Tato bakalářská práce se věnuje řešením příkladů na hledání extrémů funkcí více proměnných. Cílem je nejprve shrnout teorii, ve které jsou odůvodněny jednotlivé obecné kroky využité v řešených příkladech. Dalším cílem je ukázat řešení na různých příkladech a také různé postupy řešení soustav nelineárních rovnic. Posledním cílem je shrnout využívané metody, které slouží pro řešení a snížení obtížnosti těchto soustav.

Některé z příkladů obsahují kroky, kde selhává obecný postup. U takových příkladů je navržen vlastní postup, odlišný od obecného. Tato bakalářská práce využívá znalosti především matematické analýzy a algebry, které logicky předcházejí tomuto tématu.

Klíčová slova

funkce, rovnice, soustava rovnic, derivace, parciální derivace, matice, determinant, hessián, stacionární bod, extrém

Annotation

This bachelor's thesis deals with solving exercises on finding extremes of functions of several variables. One of the aims of this work is to sum up the theory in which are described and justified general steps used in the exercises. Another aim is to show solutions step by step on variable examples and also to show variable methods when solving system of nonlinear equations. The last of aims is to sum up used methods, which serves for solving and to reduce difficulty of these systems of equations.

Some of the exercises includes steps, where general algorithm fails. For such exercises are derived custom steps, differing from general ones. This bachelor's thesis use knowledge especially from mathematical analysis and algebra, which are logically before this topic.

Keywords

function, equation, system of equations, derivative, partial derivative, matrix, determinant, hessian, stationary point, extremum

Obsah

Výpis obrázků

Použité značení

$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$	obory komplexních, reálných, racionálnách a celých čísel
$[a, b]$	uzavřený interval
(a, b)	otevřený interval
$\wedge, \vee$	konjunkce a disjunkce
$\log x$	logaritmus s přirozeným základem
$\mathrm{tg}, \mathrm{cotg}$	goniometrické funkce tangens a kotangens
$\mathrm{arctg}, \mathrm{arccotg}$	cyklometrické funkce arkus tangens a arkus kotangens
$f(x)$	funkce f jedné proměnné x
$f(x, y)$	funkce f dvou proměnných x a y
D_f	definiční obor funkce f
f'_x	parciální derivace funkce f podle proměnné x
f''_{xy}	druhá parciální derivace funkce f podle proměnných x a y
S, S_n	stacionární bod/body, n-tý stacionární bod/body
H, H_n	hessián bodu/bodů S, S_n
x, y	neznámé, souřadnice bodu/bodů S
x_n, y_n	souřadnice bodu/bodů S_n (není-li řečeno jinak)
$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h}$	vektory x, y, h
K, L, M	celá čísla, celočíselné parametry

Úvod

Tato bakalářská práce se věnuje řešením příkladů na hledání extrémů funkcí více proměnných. Téma je součástí matematické analýzy, konkrétně se jedná o analýzu funkce více proměnných.

Při hledání extrémů funkce jedné proměnné nacházíme stacionární body řešením příslušné rovnice. Obecně postupujeme nejprve určením typu rovnice, dále pak využijeme příslušný postup k danému typu. Jedním z problémů je, že nemusí vzniknout rovnice známého typu, ale ani v případech známého typu rovnice se nemusí jednat o rovnici, kterou je možné řešit analyticky (například algebraická rovnice pátého stupně). Tyto obtíže pochopitelně zůstávají při řešení soustavy rovnic pro nalezení stacionárních bodů funkce více proměnných. Navíc je třeba vymyslet postup pro řešení takové soustavy. Další z problémů, se kterým se můžeme setkat, je, že výpočet druhých parciálních derivací nemusí pomoci k určení, zda-li v daném stacionárním bodě nastává extrém. Jednotlivé kroky, které obecně využíváme při hledání extrémů funkcí více proměnných, jsou odůvodněny v teoretické části. Cílem je také shrnout metody, které jsem si při řešení nelineárních soustav rovnic osvojil.

Práci doporučuji ke studiu čtenáři, který se chce s touto problematikou seznámit či si rozvinout schopnosti pro výpočet soustav nelineárních rovnic. Zároveň je práce určena vyučujícím, kteří by chtěli využít příklady z této práce při výuce analýzy funkce více proměnných.

Téma jsem si vybral, protože řešení rovnic mám ve velké oblibě a během mého studia byl pro mě předmět matematická analýza příjemným zážitkem.

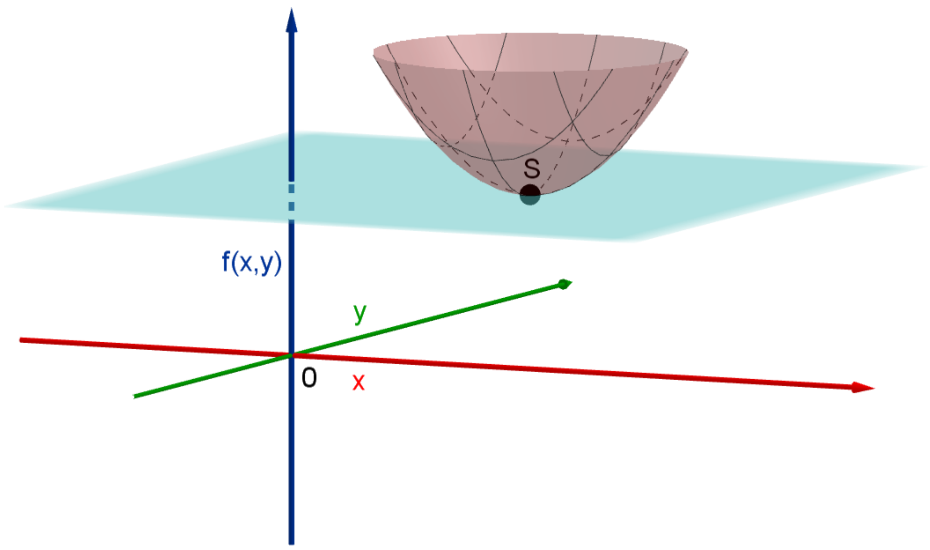
1 Teoretická část

1.1 Lokální extrémy

Nechť $\mathbb{R}^2$ je euklidovský prostor a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkce. Řekneme, že f má v bodě $x \in \mathbb{R}^2$ lokální minimum (resp. maximum), jestliže existuje okolí U bodu x takové, že $f(x) \leq \ f(y)$ (resp. $f(x) \geq \ f(y)), \forall y \in U$. Nabývá-li f v x lokální minimum nebo maximum, říkáme, že f má v bodě x lokální extrém.

1.2 Stacionární bod

Bod podezřelý z toho, že v něm funkce nabývá lokální extrém, odhalíme z jednoduché geometrické podmínky. Tečná rovina musí být v takovém bodě kolmá na osu funkčních hodnot.



Obrázek 1: Tečná rovina k lokálnímu extrému

Má-li funkce spojité první parciální derivace, pak v jednotlivých směrech rovnoběžných se všemi osami, kromě osy funkčních hodnot, musí být derivace rovny nule, tedy v případě funkce dvou proměnných $f(x, y)$ platí:

$$f'_x = 0$$
$$f'_y = 0$$

Obecně tak vzniká soustava rovnic. Bod $S[x, y] \in \mathbb{R}^2$, který patří mezi řešení takto vzniklé soustavy, nazýváme stacionární bod.

Poznamenejme, že lokální extrém může nastat i v bodě, ve kterém nejsou spojité parciální derivace. Přesněji pak můžeme tvrdit, že v bodě lokálního extrému buďto v nějakém směru derivace neexistuje nebo jsou všechny nulové [3].

Stacionární bod je pouhým kandidátem na nabývání lokálního extrému. Jestli v daném bodě nabývá lokální minimum či maximum nebo jestli v něm vůbec žádného extrému nenabývá, rozhodují (kromě některých speciálních případů) až druhé derivace.

Připomeňme například funkci jedné proměnné $f(x) = x^3$. Stacionární bod, který je nulovým bodem první derivace (řešením rovnice $3x^2 = 0$), je bod $S[0; 0]$, zřejmě ale první derivace nestačí k určení typu extrému či k určení, zda-li v bodě S vůbec extrém nastává. Funkce $f(x)$ je spojitá a z druhé derivace víme, že pro $x > 0$ je funkce konvexní a pro $x < 0$ je funkce konkávní. V bodě S tedy k extrému nedochází, ačkoliv má funkce $f(x)$ v bodě S derivaci rovnu nule.

1.3 Hessova matice

Označme symbolem ∇ vektor parciálních derivací a $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ matici druhých parciálních derivací funkce $f(x, y)$ v bodě $\mathbf{a}$:

$$\nabla^2 f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(\mathbf{a}) & f''_{xy}(\mathbf{a}) \\ f''_{yx}(\mathbf{a}) & f''_{yy}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Tato matice se nazývá Hessova matice a její determinant se nazývá hessián. Tento determinant (dále značen H) je tedy roven:

$$H = \begin{vmatrix} f''_{xx}(\mathbf{a}) & f''_{xy}(\mathbf{a}) \\ f''_{yx}(\mathbf{a}) & f''_{yy}(\mathbf{a}) \end{vmatrix}$$

1.4 Taylorův polynom více proměnných

Pro funkci $f(x, y)$, která má v bodě $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, parciální derivace prvního a druhého řádu označme

$$T_2^{f,\mathbf{a}}(x, y) = f(\mathbf{a}) + f'_x(\mathbf{a})(x - a_x) + f'_y(\mathbf{a})(y - a_y) + \frac{1}{2} f''_{xx}(\mathbf{a})(x - a_x)^2 +$$

$$+ f''_{xy}(\mathbf{a})(x - a_x)(y - a_y) + \frac{1}{2} f''_{yy}(\mathbf{a})(y - a_y)^2$$

kde bod $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tuto funkci nazveme Taylorovým polynomem druhého řádu funkce $f(x, y)$ v bodě $\mathbf{a}$.

1.5 Taylorova věta s Peanovým tvarem zbytku

Označme vektor $\mathbf{x} = (x, y)$, pak můžeme psát:

$$T_2^{f,\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla\, \mathrm{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \nabla^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Je-li funkce f třídy C^2 na nějakém okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, pak

$$f(\mathbf{x}) = T_2^{f,\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \; + \omega(\mathbf{x}) ||\mathbf{x} - \mathbf{a}||^2$$

kde $T_2^{f,\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ je Taylorovým polynomem druhého řádu funkce $f(x, y)$ v bodě $\mathbf{a}$, $\mathbf{x}$ je vektor proměnných, ω je spojitá v bodě $\mathbf{a}$, má v tomto bodě limitu 0 a $\omega(\mathbf{x}) ||\mathbf{x} - \mathbf{a}||^2$ je tzv. Peanův tvar zbytku [5].

1.6 Taylorův polynom a kvadratická forma

V této kapitole jsou využívány znalosti o kvadratických formách. Tyto znalosti jsou sepsány v dodatcích v kapitole kvadratické formy. Nechť funkce dvou proměnných $f(x, y)$ je třídy C^2 na nějakém otevřeném okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$. Nechť $\mathbf{a}$ je stacionární bod funkce f. Položme

$$Q(\mathbf{h}) = d^2_{\mathbf{h}} f(\mathbf{a}) = f''_{xx}(\mathbf{a})h_1h_1 + 2f''_{xy}(\mathbf{a})h_1h_2 + f''_{yy}(\mathbf{a})h_2h_2$$

Tuto kvadratickou formu dosadíme do Taylorova polynomu.

Podle Taylorovy věty s Peanovým tvarem zbytku platí:

$$f(\mathbf{x}) = T_2^{f,\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \ + \omega(\mathbf{x})||\mathbf{x} - \mathbf{a}||^2$$

Po rozepsání Taylorova polynomu získáváme:

$$f(\mathbf{x}) = f\left(\mathbf{a}\right) + \nabla \ \mathrm{f}\left(\mathbf{a}\right)\left(\mathbf{x} - \mathbf{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{x} - \mathbf{a}\right)^T \nabla^2 f\left(\mathbf{a}\right)\left(\mathbf{x} - \mathbf{a}\right) + \omega(\mathbf{x})||\mathbf{x} - \mathbf{a}||^2$$

Je-li $\mathbf{a}$ stacionární bod funkce $f(\mathbf{x})$, pak $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$. Dosazením $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f\left(\mathbf{a}\right) + \frac{1}{2}\mathbf{h}^T \nabla^2 f\left(\mathbf{a}\right)\mathbf{h} + \omega(\mathbf{a} + \mathbf{h})||\mathbf{h}||^2$$

Navíc $Q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T \nabla^2 f\left(\mathbf{a}\right)\mathbf{h}$, pak můžeme psát:

$$f\left(\mathbf{a} + \mathbf{h}\right) - f\left(\mathbf{a}\right) = \frac{1}{2}Q\left(\mathbf{h}\right) + \omega(\mathbf{a} + \mathbf{h})||\mathbf{h}||^2$$

Jinými slovy, pro funkci η danou předpisem $\eta(\mathbf{h}) = f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \frac{1}{2}Q(\mathbf{h})$ platí

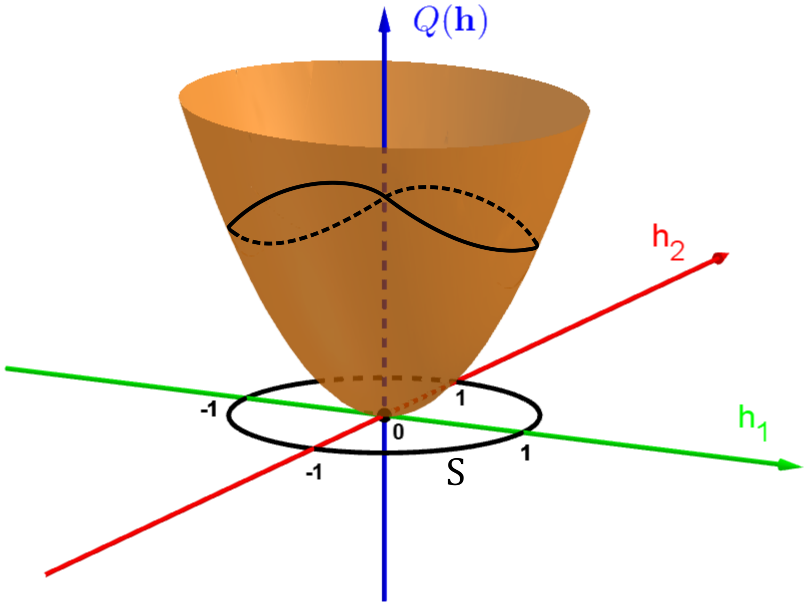
$$\lim_{\mathbf{h} \to 0} \eta\left(\mathbf{h}\right)||\mathbf{h}||^{-2} = 0$$

Předpokládejme nyní, že Q je pozitivně definitní. Platí:

$$f\left(\mathbf{a} + \mathbf{h}\right) - f\left(\mathbf{a}\right) = \frac{1}{2}Q\left(\mathbf{h}\right) + \eta(\mathbf{h})$$

Můžeme zvolit reálné číslo $K > 0$ tak, aby platilo $Q(\mathbf{h}) \geq K||\mathbf{h}||^2, \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$. Důkaz tohoto tvrzení uděláme následovně: Množina bodů S dána předpisem jednotkové kružnice $h_1^2 + h_2^2 = 1$ je uzavřená a omezená a tedy kompaktní a funkce $Q(\mathbf{h})$ je spojitá na $\mathbf{R}^2$. Podle zobecněné Weierstrassovy věty platí, že je-li funkce spojitá na kompaktní množině, potom na této množině nabývá globálního maxima i minima.

Obrázek pro představu:



Obrázek 2: Pomocný obrázek k důkazu

Připomeňme, že $\forall \mathbf{h} \in \mathbf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, platí, že $\frac{\mathbf{h}}{||\mathbf{h}||}$ je jednotkový vektor. Kvadratickou formu $Q(\mathbf{h})$ je možné rozepsat tímto způsobem (kde $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$):

$$Q(\mathbf{h}) = Q\left(||\mathbf{h}||\frac{\mathbf{h}}{||\mathbf{h}||}\right) = ||\mathbf{h}||^2 Q\left(\frac{\mathbf{h}}{||\mathbf{h}||}\right)$$

Z výše zmíněných důvodů musí být nutně K globálním minimem, kterého funkce dosahuje na množině S. Tedy platí:

$$Q\left(\frac{\mathbf{h}}{||\mathbf{h}||}\right) \geq K$$

Vynásobením $||\mathbf{h}||^2$ získáváme:

$$||\mathbf{h}||^2 Q\left(\frac{\mathbf{h}}{||\mathbf{h}||}\right) \geq ||\mathbf{h}||^2 K$$

A tedy:

$$Q(\mathbf{h}) \geq ||\mathbf{h}||^2 K$$

Protože $Q(0) = 0 = K||0||^2$, je důkaz proveden.

Odtud plyne následující nerovnost s úpravou pravé strany:

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \geq \frac{1}{2}K\,||\mathbf{h}||^2 + \eta(\mathbf{h}) = ||\mathbf{h}||^2 \left(\frac{1}{2}K + \eta(\mathbf{h})\,||\mathbf{h}||^{-2}\right)$$

Pro výraz v závorce platí:

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0}\left(\frac{1}{2}K+\eta\left(\mathbf{h}\right)\left|\left|\mathbf{h}\right|\right|^{-2}\right)=\frac{1}{2}K>0$$

Odtud plyne, že existuje $\delta > 0$ takové, že $f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a}) > 0$, kdykoliv $0 < ||\mathbf{h}|| < \delta$. Funkce f má tedy v bodě $\mathbf{a}$ ostré lokální minimum.

Je-li Q negativně definitní, pak položíme $f^* = -f$ a $Q^* = d^2 f^*(\mathbf{a})$.
Protože $Q^* = -Q$ je pozitivně definitní, má funkce f^* v bodě $\mathbf{a}$ lokální minimum a tedy f má v bodě $\mathbf{a}$ lokální maximum.

Je-li Q indefinitní, můžeme zvolit $\mathbf{h}$, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^2$ tak, že $Q(\mathbf{h}) > 0$ a $Q(\mathbf{g}) < 0$. Pak pro $t \neq 0$ máme

$$f\left(\mathbf{a}+t\mathbf{h}\right)-f\left(\mathbf{a}\right)=\frac{1}{2}Q\left(t\mathbf{h}\right)+\eta\left(t\mathbf{h}\right)=t^2\left(\frac{1}{2}Q\left(\mathbf{h}\right)+\frac{\eta\left(t\mathbf{h}\right)}{\left|\left|t\mathbf{h}\right|\right|^2}\left|\left|\mathbf{h}\right|\right|^2\right)$$

Protože pro $t \to 0$ má výraz v závorce limitu $\frac{1}{2}Q(\mathbf{h}) > 0$, existuje $\delta > 0$ takové, že $f(\mathbf{a}+t\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) > 0$ pro každé $t \in (-\delta, \delta)$, $t \neq 0$.

Snadno tedy vidíme, že f má v bodě $\mathbf{a}$ (ostré) lokální minimum na přímce $\mathbf{a}+t\mathbf{h}$, $t \in \mathbb{R}$. Zcela obdobně dostáváme, že f má v bodě $\mathbf{a}$ (ostré) lokální maximum na přímce $\mathbf{a}+t\mathbf{g}$, $t \in \mathbb{R}$. Proto je zřejmé, že f nemá v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém ([6]).

1.7 Kritérium pro extrémy

Kritérium pro extrémy, též známé jako Sylvesterovo kritérium, určí, o jaký typ extrému se jedná, podle determinantu a subdeterminantů matice druhých parciálních derivací (hessiánu). Následující tři případy nicméně nepokrývají všechny možnosti. Výpočet hessiánu tedy nepomůže vždy k určení typu extrému.

I. Hlavní subdeterminanty matice jsou kladné:
   - Matice je pozitivně definitní.
   - V daném stacionárním bodě je (ostré) lokální minimum.

II. Hlavní subdeterminanty střídají znaménka počínaje záporným:
   - Matice je negativně definitní.
   - V daném stacionárním bodě je (ostré) lokální maximum.

III. Determinant je nenulový (a neplatí I. a II.):
   - Matice je indefinitní.
   - V daném stacionárním bodu není lokální extrém (jedná se o tzv. sedlový bod) [3].

2 Příkladová část

2.1 Poznámky k řešením

Obecně budu postupovat nejprve určením parciálních derivací zadané funkce. Dále počítám takto vzniklou soustavu rovnic, kde řešením jsou stacionární body. Pomocí druhých parciálních derivací a hessiánu pak pro každý stacionární bod určím, jestli se jedná o lokální extrém a v případě že ano, pak určím typ extrému. Pokud výpočet hessiánu nepovede k získání této odpovědi, použiji jiný postup.

Definiční obor zadané funkce nebude zapsán, pokud $D_f \in \mathbb{R}^2$. Lokální extrém může mít funkce jak ve stacionárních bodech vzniklých jako výsledek soustavy, tak také v bodech, které jsou v definičním oboru funkce, ale nejsou v definičním oboru parciálních derivací. V případě, že takový případ nastane, tak je to v daném příkladu vhodně okomentováno.

Ve složitějších příkladech dělím neznámou či výrazem, který ji obsahuje, místo abych využil vytknutí. Důvodem je především přehlednost. Pochopitelně vždy vyzkouším, zda-li takové výrazy rovnající se nule netvoří řešení soustavy. V případě že ano, pak tato řešení zahrnu mezi výsledky soustavy (stacionární body).

2.2 Seznam příkladů

2.3 Příklady

Příklad 1

$$f(x,y) = x^3 - xy + 2y - y^2$$

$$f'_x = 3x^2 - y$$
$$f'_y = -x + 2 - 2y$$

$$3x^2 - y = 0 \quad (1.1)$$
$$-x + 2 - 2y = 0 \quad (1.2)$$

Soustavu rovnic vyřešíme vyjádřením neznámé y z rovnice 1.1, kterou dosadíme do rovnice 1.2.

$$y = 3x^2$$

$$-6x^2 - x + 2 = 0$$

Vyřešením kvadradické rovnice získáváme souřadnice x stacionárních bodů.

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{-12}$$

Dosazením těchto hodnot do rovnice 1.1 získáme jejich souřadnice y.

$$x_1 = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3} \to \ y_1 = \frac{4}{3}$$

$$x_2 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \to \ y_2 = \frac{3}{4}$$

$$S_1 \left[-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]; S_2 \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$$

$$f''_{xx} = 6x$$
$$f''_{xy} = -1$$
$$f''_{yy} = -2$$

$$H_1 = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 7$$

Bod S_1 je lokální maximum funkce.

$$H_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -7$$

Bod S_2 je sedlový bod funkce.

Příklad 2

$$f(x,y) = x^2 - 3xy - 2y^3$$

$$\begin{aligned} f'_x &= 2x - 3y \\ f'_y &= -3x - 6y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 0 \qquad (2.1) \\ -3x - 6y^2 &= 0 \qquad (2.2) \end{aligned}$$

Eliminací neznámé x (součtu trojnásobku rovnice 2.1 a dvojnásobku rovnice 2.2), získáme kvadratickou rovnici, kterou vyřešíme. Hodnoty neznámé y dosadíme dále do jedné z rovnic soustavy pro výpočet hodnot neznámé x.

$$-9y - 12y^2 = 0$$

$$3y(-3 - 4y) = 0$$

$$y_1 = 0 \rightarrow \; x_1 = 0$$

$$y_2 = -\frac{3}{4} \rightarrow \; x_2 = -\frac{9}{8}$$

$$S_1\,[0;0]\,, S_2\left[-\frac{9}{8};-\frac{3}{4}\right]$$

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= 2 \\ f''_{xy} &= -3 \\ f''_{yy} &= -12y \end{aligned}$$

$$H_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9$$

Bod S_1 je sedlový bod funkce.

$$H_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 9$$

Bod S_2 je lokální minimum funkce.

Příklad 3

$$f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 6xy - 3x + 4y$$

$$f'_x = 3x^2 - 6x + 6y - 3$$
$$f'_y = 6x + 4$$

$$3x^2 - 6x + 6y - 3 = 0 \tag{3.1}$$
$$6x + 4 = 0 \tag{3.2}$$

Rovnice 3.2 je lineární rovnice o jedné neznámé. Výpočtem této rovnice získáme hodnotu neznámé x, kterou dosadíme do rovnice 3.1. Získáme tak příslušnou hodnotu neznámé y.

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$3\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 6\left(-\frac{2}{3}\right) + 6y - 3 = 0$$

$$\frac{4}{3} + 4 + 6y - 3 = 0$$

$$y = -\frac{7}{18}$$

$$S\left[-\frac{2}{3}; -\frac{7}{18}\right]$$

$$f''_{xx} = 6x - 6$$
$$f''_{xy} = 6$$
$$f''_{yy} = 0$$

$$H = \begin{vmatrix} -10 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36$$

Bod S je sedlový bod funkce.

Příklad 4

$$f\left(x,y\right)=x^3-y^3-3x+6y$$

$$\begin{aligned} f'_x &= 3x^2-3 \\ f'_y &= -3y^2+6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x^2-3 &= 0 \qquad (4.1) \\ -3y^2+6 &= 0 \qquad (4.2) \end{aligned}$$

Obě rovnice soustavy jsou kvadratické rovnice o jedné neznámé. Stacionární body vznikají jako všechny možné kombinace řešení rovnice 4.1 a rovnice 4.2.

$$x^2=1 \rightarrow \ x=\pm 1$$

$$y^2=2 \rightarrow \ y=\pm\sqrt{2}$$

$$S_1\left[1;\sqrt{2}\right], S_2\left[1;-\sqrt{2}\right], S_3\left[-1;\sqrt{2}\right], S_4\left[-1;-\sqrt{2}\right]$$

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= 6x \\ f''_{xy} &= 0 \\ f''_{yy} &= -6y \end{aligned}$$

$$H_1=\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6\sqrt{2} \end{vmatrix}=-36\sqrt{2}$$

Bod S_1 je sedlový bod funkce.

$$H_2=\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6\sqrt{2} \end{vmatrix}=36\sqrt{2}$$

Bod S_2 je lokální minimum funkce.

$$H_3=\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6\sqrt{2} \end{vmatrix}=36\sqrt{2}$$

Bod S_3 je lokální maximum funkce.

$$H_4=\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6\sqrt{2} \end{vmatrix}=-36\sqrt{2}$$

Bod S_4 je sedlový bod funkce.

Příklad 5

$$f\,(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+32xy$$
$$D_f=\{[x;y]\in\mathbb{R}^2;xy\neq 0\}$$

$$f'_x=-\frac{1}{x^2}+32y$$
$$f'_y=-\frac{2}{y^2}+32x$$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{x^2}+32y &= 0\\ -\frac{2}{y^2}+32x &= 0\end{aligned}$$

Obě rovnice soustavy vynásobíme jmenovateli zlomků, které obsahují.

$$-1+32x^2y = 0 \tag{5.1}$$
$$-2+32xy^2 = 0 \tag{5.2}$$

Z rovnice 5.1 vyjádříme neznámou y. Následně toto vyjádření dosadíme do rovnice 5.2. Získáme tak rovnici o neznámé x. Hodnotu neznámé x poté dosadíme do vyjádření neznámé y.

$$y=\frac{1}{32x^2}$$
$$-2+32x\left(\frac{1}{32x^2}\right)^2=0$$
$$-2x^3+\frac{1}{32}=0$$
$$x^3=\frac{1}{64}$$
$$x=\frac{1}{4}\rightarrow\ y=\frac{1}{2}$$
$$S\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$$

$(S\in D_f)$

$$f''_{xx}=\frac{2}{x^3}$$
$$f''_{xy}=32$$
$$f''_{yy}=\frac{4}{y^3}$$

$$H=\begin{vmatrix}128 & 32\\ 32 & 32\end{vmatrix}=3072$$

Bod S je lokální minimum funkce.

Příklad 6

$$f\left(x,y\right) = xy^2 - 2xy - 3x^2 + x - y$$

$$\begin{aligned} f'_x &= y^2 - 2y - 6x + 1 \\ f'_y &= 2xy - 2x - 1 \end{aligned}$$

$$y^2 - 2y - 6x + 1 = 0 \tag{6.1}$$
$$2xy - 2x - 1 = 0 \tag{6.2}$$

Všimněme si, že rovnici 6.2 lze upravit vytknutím výrazu $2x$, přičemž vznikne výraz $(y-1)$, druhou mocninu výrazu $(y-1)$ získáme úpravou rovnice 6.1.

$$(y-1)^2 - 6x = 0 \tag{6.3}$$
$$2x(y-1) - 1 = 0 \tag{6.4}$$

Nyní z rovnice 6.4 vyjádříme výraz $(y-1)$. Toto vyjádření dosadíme do rovnice 6.3. Neznámá x je nenulová (přesvědčit se můžeme dosazením $x = 0$ v rovnici 6.4).

$$y - 1 = \frac{1}{2x}$$

$$\frac{1}{4x^2} - 6x = 0$$

$$x^3 = \frac{1}{24}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{24}} = \sqrt[3]{\frac{24^2}{24^3}} = \frac{\sqrt[3]{\left(2^3 \cdot 3\right)^2}}{24} = \frac{4\sqrt[3]{9}}{24} = \frac{\sqrt[3]{9}}{6}$$

Tuto hodnotu dosadíme do 6.2 a vypočítáme tak hodnotu neznámé y.

$$y = 1 + \sqrt[3]{3}$$

$$S\left[\frac{\sqrt[3]{9}}{6}; 1 + \sqrt[3]{3}\right]$$

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= -6 \\ f''_{xy} &= 2y - 2 \\ f''_{yy} &= 2x \end{aligned}$$

$$H = \begin{vmatrix} -6 & 2\sqrt[3]{3} \\ 2\sqrt[3]{3} & \frac{\sqrt[3]{9}}{3} \end{vmatrix} = -2\sqrt[3]{9} - 4\sqrt[3]{9} = -6\sqrt[3]{9}$$

Bod S je sedlový bod funkce.

Příklad 7

$$f\left(x,y\right)=x^4-4xy+y^4$$

$$f'_x=4x^3-4y$$
$$f'_y=-4x+4y^3$$

$$\begin{aligned}4x^3-4y &= 0\\ -4x+4y^3 &= 0\end{aligned}$$

Vzniklou soustavu rovnic můžeme upravit následujícím způsobem.

$$y = x^3 \tag{7.1}$$
$$x = y^3 \tag{7.2}$$

Dosadíme vyjádření neznámé x z rovnice 7.2 do rovnice 7.1.

$$y=y^9$$

Jedná se o rovnici devátého stupně, kterou můžeme vyřešit jednoduše pomocí vytýkání a rozkládání.

$$y\left(1-y^8\right)=0$$
$$y\left(1-y^4\right)\left(1+y^4\right)=0$$
$$y\left(1-y^2\right)\left(1+y^2\right)\left(1+y^4\right)=0$$
$$y\left(1-y\right)\left(1+y\right)\left(1+y^2\right)\left(1+y^4\right)=0$$

Tento součinový tvar je roven nule pouze pro tři možné hodnoty neznámé y. Tyto hodnoty y dosadíme do rovnice 7.2 pro výpočet příslušných hodnot neznámé x.

$$y_1=0\ \rightarrow\ x_1=0$$
$$y_2=1\rightarrow\ x_2=1$$
$$y_3=-1\ \rightarrow\ x_3=-1$$
$$S_1\left[0;0\right];S_2\left[1;1\right];S_3\left[-1;-1\right]$$

$$f''_{xx}=12x^2$$
$$f''_{xy}=-4$$
$$f''_{yy}=12y^2$$

$$H_1=\begin{vmatrix}0 & -4\\ -4 & 0\end{vmatrix}=-16$$

Bod S_1 je sedlový bod funkce.

$$H_2=\begin{vmatrix}12 & -4\\ -4 & 12\end{vmatrix}=128$$

Bod S_2 je lokální minimum funkce.

$$H_3=\begin{vmatrix}12 & -4\\ -4 & 12\end{vmatrix}=128$$

Bod S_3 je lokální minimum funkce.

Příklad 8

$$f(x,y) = \frac{x+y+1}{x^2+y^2+1}$$

$$f'_x = \frac{x^2+y^2+1-2x(x+y+1)}{(x^2+y^2+1)^2}$$
$$f'_y = \frac{x^2+y^2+1-2y(x+y+1)}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$\frac{x^2+y^2+1-2x(x+y+1)}{(x^2+y^2+1)^2} = 0$$
$$\frac{x^2+y^2+1-2y(x+y+1)}{(x^2+y^2+1)^2} = 0$$

Obě rovnice soustavy vynásobíme (nenulovými) jmenovateli:

$$x^2+y^2+1-2x(x+y+1) = 0 \tag{8.1}$$
$$x^2+y^2+1-2y(x+y+1) = 0 \tag{8.2}$$

Od rovnice 8.1 odečteme rovnici 8.2. Dále takto vzniklou rovnici upravíme pomocí vytýkání.

$$-2x(x+y+1)+2y(x+y+1) = 0$$
$$2(-x+y)(x+y+1) = 0$$

Z tohoto součinového tvaru rovnice plynou dvě možná vyjádření pro neznámou x.

$$x_1 = y$$

$$x_2 = -y-1$$

Dosadíme x_1 do rovnice 8.1:

$$y^2+y^2+1-2y(y+y+1) = 0$$

$$-2y^2-2y+1 = 0$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{-4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tyto vzniklé výsledky neznámé y jsou dvě možné souřadnice y stacionárních bodů se souřadnicí x, pro kterou platí $x = y$ (vyjádření x_1).

$$S_1 \left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$S_2 \left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

Dosadíme x_2 do rovnice 8.1:

$$(-y-1)^2 + y^2 + 1 - 2(-y-1)(-y-1+y+1) = 0$$

$$2y^2 + 2y + 2 = 0$$

$$y^2 + y + 1 = 0$$

Vzniklá kvadratická rovnice má záporný diskriminant a nemá tedy řešení v $\mathbb{R}$.

$$f''_{xx} = \frac{(-2x-2y-2)(x^2+y^2+1) - 4x(-x^2-2xy-2x+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^3}$$

$$f''_{xy} = \frac{(-2x+2y)(x^2+y^2+1) - 4y(-x^2-2xy-2x+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^3}$$

$$f''_{yy} = \frac{(-2y-2x-2)(x^2+y^2+1) - 4y(x^2-y^2+1-2xy-2y)}{(x^2+y^2+1)^3}$$

$$H_1 = \begin{vmatrix} \frac{2\sqrt{3}-3}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \end{vmatrix} = \frac{7-4\sqrt{3}}{3}$$

Bod S_1 je lokální minimum funkce.

$$H_2 = \begin{vmatrix} \frac{-2\sqrt{3}-3}{3} & 0 \\ 0 & \frac{-2\sqrt{3}-3}{3} \end{vmatrix} = \frac{7+4\sqrt{3}}{3}$$

Bod S_2 je lokální maximum funkce.

Příklad 9

$$f(x,y) = \left(x^2 - y^2\right)(2x + 2y - 1)$$

$$f'_x = 2x(2x + 2y - 1) + 2\left(x^2 - y^2\right)$$
$$f'_y = -2y(2x + 2y - 1) + 2\left(x^2 - y^2\right)$$

$$2x(2x + 2y - 1) + 2\left(x^2 - y^2\right) = 0 \tag{9.1}$$
$$-2y(2x + 2y - 1) + 2\left(x^2 - y^2\right) = 0 \tag{9.2}$$

Od rovnice 9.1 odečteme rovnici 9.2 a dále takto vzniklou rovnici upravíme pomocí vytýkání.

$$2x(2x + 2y - 1) + 2y(2x + 2y - 1) = 0$$

$$2(x + y)(2x + 2y - 1) = 0$$

Z toho součinového tvaru rovnice plynou dvě možná vyjádření pro neznámou x.

$$x_1 = -y$$

$$2x + 2y - 1 = 0$$

$$x_2 = \frac{1 - 2y}{2}$$

Dosazením x_1 do rovnice 9.2:

$$-2y\left(2\left(-y\right) + 2y - 1\right) + 2\left(\left(-y\right)^2 - y^2\right) = 0$$

$$2y = 0$$

$$y_1 = 0$$

$$S_1[0; 0]$$

Do rovnice 9.1 dosadíme x_2. Nejprve ale tuto rovnici upravíme roznásobením.

$$2x(2x + 2y - 1) + 2(x^2 - y^2) = 0$$

$$4x^2 + 4xy - 2x + 2x^2 - 2y^2 = 0$$

$$6x^2 + 4xy - 2x - 2y^2 = 0$$

$$3x^2 + 2xy - x - y^2 = 0$$

Po zmíněném dosazení:

$$3\left(\frac{1 - 2y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1 - 2y}{2}\right)y - \left(\frac{1 - 2y}{2}\right) - y^2 = 0 \qquad / \cdot 4$$

$$3(1 - 2y)^2 + 4y(1 - 2y) - 2(1 - 2y) - 4y^2 = 0$$

$$-4y + 1 = 0$$

$$y_2 = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1}{4}$$

$$S_2 \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$$

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= 12x + 4y - 2 \\ f''_{xy} &= 4x - 4y \\ f''_{yy} &= -4x - 12y + 2 \end{aligned}$$

$$H_1 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Bod S_1 je sedlový bod funkce.

$$H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

Bod S_2 je sedlový bod funkce.

Příklad 10

$$f(x,y) = \left(3x^2+3y^2-1\right)\left(x-y^2+1\right)$$

$$\begin{aligned} f'_x &= 6x\left(x-y^2+1\right)+\left(3x^2+3y^2-1\right) \\ f'_y &= 6y\left(x-y^2+1\right)-2y\left(3x^2+3y^2-1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x\left(x-y^2+1\right)+\left(3x^2+3y^2-1\right) &= 0 \\ 6y\left(x-y^2+1\right)-2y\left(3x^2+3y^2-1\right) &= 0 \end{aligned}$$

Obě rovnice soustavy nějdříve roznásobíme a upravíme vytýkáním následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} 9x^2-6xy^2+6x+3y^2-1 &= 0 \\ 6xy-12y^3+8y-6x^2y &= 0 \end{aligned}$$

$$3x\left(3x-2y^2+2\right)+3y^2-1 = 0 \tag{10.1}$$

$$2y\left(3x-6y^2+4-3x^2\right) = 0 \tag{10.2}$$

Rovnice 10.2 je v součinovém tvaru, první z možností je, že $y=0$. Dosadíme tuto hodnotu neznámé y do rovnice 10.1.

$$3x(3x+2)-1=0$$

$$9x^2+6x-1=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-6\pm6\sqrt{2}}{18}$$

$$S_1\left[-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3};0\right]$$

$$S_2\left[-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3};0\right]$$

Rovnici 10.2 je možné vynulovat ještě druhým způsobem:

$$3x-6y^2+4-3x^2=0$$

Z tohoto výrazu vyjádříme y^2. Toto vyjádření dále dosadíme do rovnice 10.1.

$$y^2 = \frac{-3x^2+3x+4}{6}$$

$$3x\left(3x-\frac{-3x^2+3x+4}{3}+2\right)+\frac{-3x^2+3x+4}{2}-1=0$$

$$9x^2+3x^3-3x^2-4x+6x+\frac{-3x^2+3x+4}{2}-1=0$$
$$6x^3+9x^2+7x+2=0$$

Podle kapitoly v dodatcích, nalezení racionálního kořene kubické rovnice, plyne, že možná racionální řešení jsou:

$$\pm1,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{1}{6},\pm2,\pm\frac{2}{3}$$

Zkoušením těchto jednotlivých možných řešení dojdeme k nalezení jednoho z řešení kubické rovnice, dále vytkneme kořenový činitel. Tímto postupem je třeba pouze vyřešit takto vzniklou kvadratickou rovnici.

$$x=-\frac{1}{2}$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(6x^2+6x+4\right)=0$$

Diskriminant kvadratické rovnice je záporný. Kvadratická rovnice tedy nemá řešení v $\mathbb{R}$. Nalezenou hodnotu neznámé x dosadíme do vyjádření y^2 odvozeného výše.

$$x=-\frac{1}{2}\rightarrow\ y^2=\frac{7}{24}$$
$$x_{3,4}=-\frac{1}{2},y_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{42}}{12}$$
$$S_3\left[-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{42}}{12}\right],S_4\left[-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{42}}{12}\right]$$

$$f''_{xx}=18x-6y^2+6$$
$$f''_{xy}=-12xy+6y$$
$$f''_{yy}=6x-36y^2+8-6x^2$$
$$H_1=\begin{vmatrix}6\sqrt{2} & 0\\ 0 & \frac{12+10\sqrt{2}}{3}\end{vmatrix}=24\sqrt{2}+40$$

Bod S_1 je lokální minimum funkce.

$$H_2=\begin{vmatrix}-6\sqrt{2} & 0\\ 0 & \frac{12-10\sqrt{2}}{3}\end{vmatrix}=-24\sqrt{2}+40$$

Bod S_2 je lokální maximum funkce.

$$H_3=\begin{vmatrix}\frac{-19}{4} & \sqrt{42}\\ \sqrt{42} & -7\end{vmatrix}=\frac{-35}{4}$$

Bod S_3 je sedlový bod funkce.

$$H_4=\begin{vmatrix}\frac{-19}{4} & -\sqrt{42}\\ -\sqrt{42} & -7\end{vmatrix}=\frac{-35}{4}$$

Bod S_4 je sedlový bod funkce.

Příklad 11

$$f(x,y) = x^4 - 2x^3 - 2x^2y^2 + y^4$$

$$f'_x = 4x^3 - 6x^2 - 4xy^2$$
$$f'_y = -4x^2y + 4y^3$$

$$\begin{aligned} 4x^3 - 6x^2 - 4xy^2 &= 0 \\ -4x^2y + 4y^3 &= 0 \end{aligned}$$

Soustavu rovnic upravíme pomocí vytýkání.

$$2x\left(2x^2 - 3x - 2y^2\right) = 0 \qquad (11.1)$$
$$4y\left(-x^2 + y^2\right) = 0 \qquad (11.2)$$

Z rovnice 11.2 nám vycházejí 3 možné hodnoty pro neznámou y. Tyto hodnoty dosadíme do rovnice 11.1 pro výpočet neznámé x.

$$y_1 = x;\ y_2 = -x; y_3 = 0$$

$$y = \pm\, x \rightarrow\ x = 0$$

$$y = 0 \rightarrow\ x_1 = 0; x_2 = \frac{3}{2}$$

$$S_1\,[0;0]\,, S_2\left[\frac{3}{2};0\right]$$

$$f''_{xx} = 12x^2 - 12x - 4y^2$$
$$f''_{xy} = -8xy$$
$$f''_{yy} = -4x^2 + 12y^2$$

$$H_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

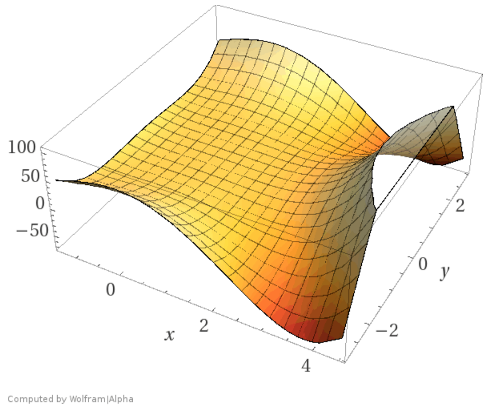
Hessián nepomohl k určení typu extrému v bodě S_1.

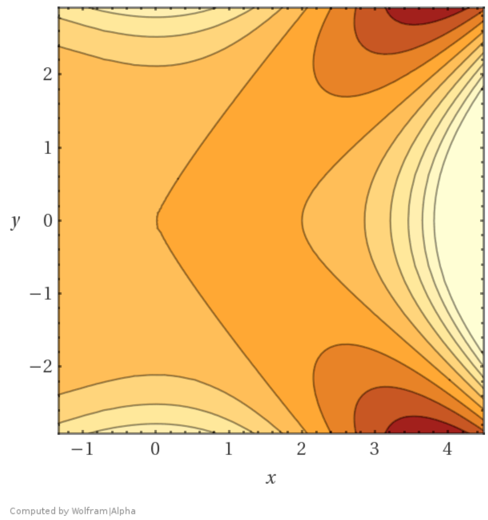
$$H_2 = \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = -81$$

Bod S_2 je sedlový bod funkce.

Pro zjištění, zda-li dochází v bodě S_1 k extrému, se podíváme nejdříve na obrázek funkce:

$$f(x,y) = x^4 - 2x^3 - 2x^2y^2 + y^4$$



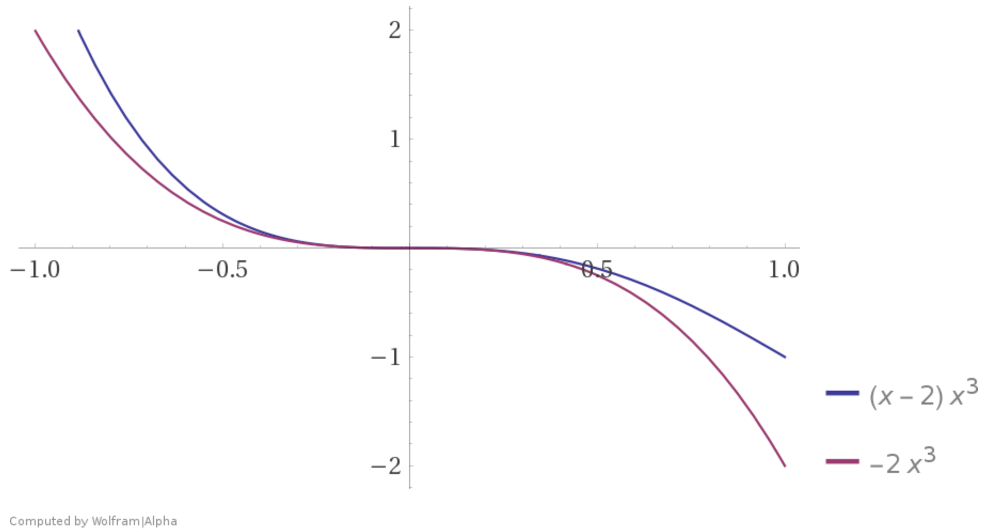


Obrázek 3: Zobrazení funkce v příkladu 11
Obrázek 4: Zobrazení funkce v příkladu 11 v pohledu shora

Druhý obrázek (pohled shora) nám napovídá, že se můžeme podívat na chování funkce v bodě $S_1[0, 0]$ na přímce $y = 0$. Jedná se o průnik roviny $y = 0$ s funkcí $f(x, y)$. Dosazením hodnoty $y = 0$ do předpisu funkce, vzniká funkce jedné proměnné:

$$f(x, 0) = x^4 - 2x^3 = x^3(x - 2)$$

Funkční hodnota v bodě S_1 je 0. V okolí $x = 0$ se bude funkce chovat podobně jako funkce $g(x) = -2x^3$, a proto v bodě $S_1[0; 0]$ k extrému nedochází. Následující graf slouží pro představu našeho odvozeného tvrzení:



Obrázek 5: Dvě funkce pro představu odvozeného tvrzení

Příklad 12

$$f(x,y) = xy\left(1 - x^2y^2\right) = xy - x^3y^3$$

$$f'_x = y - 3x^2y^3$$
$$f'_y = x - 3y^2x^3$$

$$\begin{aligned} y - 3x^2y^3 &= 0 \\ x - 3y^2x^3 &= 0 \end{aligned}$$

Rozložíme polynomy na levých stranách rovnic.

$$y\left(1 - \sqrt{3}xy\right)\left(1 + \sqrt{3}xy\right) = 0 \tag{12.1}$$
$$x\left(1 - \sqrt{3}xy\right)\left(1 + \sqrt{3}xy\right) = 0 \tag{12.2}$$

Z rovnice 12.2 plynou tři možné hodnoty neznámé x:

$$x_1 = 0; x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}y}; x_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}y}$$

Přičemž pro x_2 a x_3 platí, že $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Postupným dosazením těchto hodnot neznámé x do 12.1 přicházíme na následující vztahy:

$$x_1 = 0 \to \ y_1 = 0$$

$$x_{2,3} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}y} \to \ y_{2,3} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

S_1 je stacionárním bodem, S_2 a S_3 tvoří množiny stacionárních bodů (jejich souřadnice zapíšeme v obecném tvaru).

$$S_1\,[0;0]\,, S_2\left[\frac{1}{\sqrt{3}y}; y\right], S_3\left[-\frac{1}{\sqrt{3}y}; y\right]$$

Přičemž pro stacionární body S_2 a S_3 platí, že $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$f''_{xx} = -6xy^3$$
$$f''_{xy} = 1 - 9x^2y^2$$
$$f''_{xy} = -6x^3y$$

$$H_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Bod S_1 je sedlový bod funkce.

$$H_2 = \begin{vmatrix} -2\sqrt{3}\,y^2 & -2 \\ -2 & \frac{-2}{\sqrt{3}y^2} \end{vmatrix} = 0$$

Hessián nepomohl k určení typu extrému v bodech S_2.

$$H_3 = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3}\, y^2 & -2 \\ -2 & \frac{2}{\sqrt{3}y^2} \end{vmatrix} = 0$$

Hessián nepomohl k určení typu extrému v bodech S_3.

Vyzkoušíme jiný postup pro určení typu extrému v bodech S_2 a S_3.

$$f(x, y) = xy\left(1 - x^2y^2\right)$$

Zavedeme substituci:

$$xy = n$$

$$g(n) = n(1 - n^2)$$

Hledáme extrémy funkce $g(n)$.

$$g'_n = -3n^2 + 1$$

$$-3n^2 + 1 = 0$$

$$n_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$n_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Funkce $g(n)$ je spojitá a stacionární body nám rozdělují interval reálných čísel na tři intervaly. Vybereme-li z každého tohoto intervalu bod, který není stacionární, pak z toho dokážeme určit typ extrému těchto stacionárních bodů.

$$f'(-1) = -2$$

$$f'(0) = 1$$

$$f'(1) = -2$$

Funkce $g(n)$ má v bodě n_1 lokální maximum a v bodě n_2 lokální minimum. Platí-li:

$$xy = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

pak se jedná o lokální maximum funkce $f(x, y)$ a podobně se jedná o lokální minimum funkce $f(x, y)$, když platí:

$$xy = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Tedy v bodech S_2 je lokální maximum funkce $f(x, y)$ a v bodech S_3 je lokální minimum funkce $f(x, y)$.

Příklad 13

$$f\left(x,y\right)=6x^3+2xy+3x^2y+y^2$$

$$f'_x=18x^2+2y+6xy$$
$$f'_y=2x+3x^2+2y$$

$$18x^2+2y+6xy = 0 \tag{13.3}$$
$$2x+3x^2+2y = 0 \tag{13.4}$$

Z rovnice 13.4 vyjádříme neznámou y, kterou dosadíme do rovnice 13.3.

$$y=-x-\frac{3}{2}x^2$$

$$18x^2+2\left(-x-\frac{3}{2}x^2\right)+6x\left(-x-\frac{3}{2}x^2\right)=0$$
$$18x^2-2x-3x^2-6x^2-9x^3=0$$
$$-9x^3+9x^2-2x=0$$

Úpravou vznikla kubická rovnice. Chybějící absolutní člen umožňuje postupovat vytknutím neznámé x. Dále počítáme kvadratickou rovnici. Vypočtené neznámé x následně dosadíme do jedné z rovnic soustavy pro výpočet neznámé y.

$$-x\left(9x^2-9x+2\right)=0$$

$$x_{1,2}=\frac{9\pm 3}{18}$$
$$x_3=0$$

$$x_1=\frac{2}{3}\ \rightarrow\ y_1=-\frac{4}{3}$$
$$x_2=\frac{1}{3}\rightarrow\ y_2=-\frac{1}{2}$$
$$x_3=0\rightarrow\ y_3=0$$
$$S_1\left[\frac{2}{3};-\frac{4}{3}\right];S_2\left[\frac{1}{3};-\frac{1}{2}\right];S_3\left[0;0\right]$$

$$f''_{xx}=36x+6y$$
$$f''_{xy}=2+6x$$
$$f''_{yy}=2$$

$$H_1=\begin{vmatrix} 16 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}=-4$$

Bod S_1 je sedlový bod funkce.

$$H_2 = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Bod S_2 je lokální minimum funkce.

$$H_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Bod S_3 je sedlový bod funkce.

Příklad 14

$$f(x,y) = \arctan(xy) - \log\left(1 + x^2y^2\right)$$

$$f'_x = \frac{y}{1+x^2y^2} - \frac{2xy^2}{1+x^2y^2}$$
$$f'_y = \frac{x}{1+x^2y^2} - \frac{2yx^2}{1+x^2y^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{1+x^2y^2}(1-2xy) &= 0 \\ \frac{x}{1+x^2y^2}(1-2xy) &= 0 \end{aligned}$$

Obě rovnice soustavy vynásobíme jejich (nenulovými) jmenovateli:

$$y(1-2xy) = 0 \tag{14.1}$$
$$x(1-2xy) = 0 \tag{14.2}$$

Vytknuté neznámé x a y tvoří jedno z řešení.

$$S_1[0;0]$$

Vzniklé závorky po vytknutí obsahují stejný výraz. Pokud je tento výraz roven nule, na jedné z neznámých nezáleží. Toto řešení nalezneme tak, že vyjádříme jednu neznámou z rovnice $1 - 2xy = 0$, přičemž druhá neznámá v řešení bude libovolná reálná.

$$x = \frac{1}{2y}$$

$$S_2\left[\frac{1}{2y}; y\right]; y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Další řešení již soustava netvoří. Je-li jedna z vytknutých neznámých rovna nule, pak výraz v závorce roven nule není.

$$f''_{xx} = \frac{-2xy^3 - 2y^2 + 2x^2y^4}{\left(1+x^2y^2\right)^2}$$
$$f''_{xy} = \frac{1 - x^2y^2 - 4xy}{\left(1+x^2y^2\right)^2}$$
$$f''_{yy} = \frac{-2x^3y - 2x^2 + 2x^4y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2}$$

$$H_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Bod S_1 je sedlový bod funkce.

$$H_2 = \begin{vmatrix} \frac{-8y^2}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{-2}{5y^2} \end{vmatrix} = 0$$

Hessián nepomohl k určení typu extrému v bodech H_2. Využijeme jiného postupu:

$$f\left(x, y\right) = \arctan\left(xy\right) - \log\left(1 + x^2y^2\right)$$

Zavedeme substituci $xy = n$, čímž získáváme funkci jedné proměnné:

$$g\left(n\right) = \arctan\left(n\right) - \log\left(1 + n^2\right)$$

$$g'_n = \frac{1}{1+n^2} - \frac{2n}{1+n^2}$$

$$\frac{1}{1+n^2} - \frac{2n}{1+n^2} = 0$$

$$1 - 2n = 0$$

$$n = \frac{1}{2}$$

Funkce $g(n)$ je spojitá. Pro $n < \frac{1}{2}$ je derivace $g(n)$ kladná a pro $n > \frac{1}{2}$ je derivace $g(n)$ záporná. V bodě $n = \frac{1}{2}$ funkce $g(n)$ nastává její lokální maximum. Nyní se vrátíme k funkci $f(x, y)$. Je-li:

$$xy = \frac{1}{2}$$

pak se jedná o lokální maximum funkce, tedy v případě bodů S_2.

Příklad 15

$$f\left(x,y\right)=\frac{x^2-y^2-1}{x^2+y^2+1}$$

$$f'_x=\frac{2x\left(x^2+y^2+1\right)-2x\left(x^2-y^2-1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}=\frac{4xy^2+4x}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}$$
$$f'_y=\frac{-2y\left(x^2+y^2+1\right)-2y\left(x^2-y^2-1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}=\frac{-4yx^2}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}$$

$$\frac{4xy^2+4x}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} = 0$$
$$\frac{-4yx^2}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} = 0$$

Všimněme si, že jmenovatelé obou zlomků v rovnicích jsou vždy kladné. Obě rovnice těmito jmenovateli vynásobíme a upravíme rovnice do součinového tvaru.

$$4x(y^2+1) = 0 \qquad (15.1)$$
$$-4yx^2 = 0 \qquad (15.2)$$

Rovnici 15.1 je možné vynulovat jediným způsobem, a to v případě, že $x=0$, potom hodnota neznámé y je libovolné reálné číslo.

$$x=0 \ \rightarrow y\in\mathbb{R}$$

$$S\left[0;y\right]$$

$$f''_{xx}=\frac{\left(4y^2+4\right)\left(x^2+y^2+1\right)^2-2\left(x^2+y^2+1\right)\cdot 2x\left(4xy^2+4x\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^4}$$
$$f''_{xy}=\frac{8xy\left(x^2+y^2+1\right)^2-2\left(x^2+y^2+1\right)\cdot 2y\left(4xy^2+4x\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^4}$$
$$f''_{yy}=\frac{-4x^2\left(x^2+y^2+1\right)^2-2\left(x^2+y^2+1\right)\cdot 2y\left(-4yx^2\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^4}$$

$$H=\begin{vmatrix}\frac{4}{y^2+1} & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

Hessián nepomohl k určení typu extrému funkce v bodech S. Zkusíme jiný postup:

$$f\left(x,y\right)=\frac{x^2-y^2-1}{x^2+y^2+1}$$

Předpis funkce upravíme:

$$f\left(x,y\right)=\frac{x^2-y^2-1}{x^2+y^2+1}=\frac{2x^2}{x^2+y^2+1}-1=2\left(\frac{x^2}{x^2+y^2+1}\right)-1$$

Zaměříme se na výraz v závorce:

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

Jmenovatel tohoto výrazu je vždy kladný a čitatel vždy nezáporný. Zřejmě je jmenovatel vždy větší než čitatel, tedy hodnota celého výrazu je v intervalu $[0; 1)$. Všimněme si, že funkční hodnoty 1 nikdy nedosáhneme, ač se jí můžeme libovolně blížit. Z tohoto důvodu nemá funkce maximum. V případě že, je hodnota výrazu rovna nule, pak se jedná o minimum funkce:

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2 + 1} = 0$$

Zlomek je roven nule, pouze pokud je čitatel roven nule. Platí tedy, že $x = 0$. Na hodnotě neznámé y nezáleží. Funkce $f(x, y)$ má minimum v bodech S.

Příklad 16

$$f(x,y) = 1 - xy\sqrt{x^2+y^2}$$

$$f'_x = -y\left(\sqrt{x^2+y^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x\right)$$
$$f'_y = -x\left(\sqrt{x^2+y^2} + y \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y\right)$$

Všimněme si, že bod $S^*[0;0]$ je v definičním oboru funkce, ale první parciální derivace pro něj definované nejsou. Stává se tak také možným bodem, ve kterém může funkce nabývat lokálního extrému (řešeno níže).

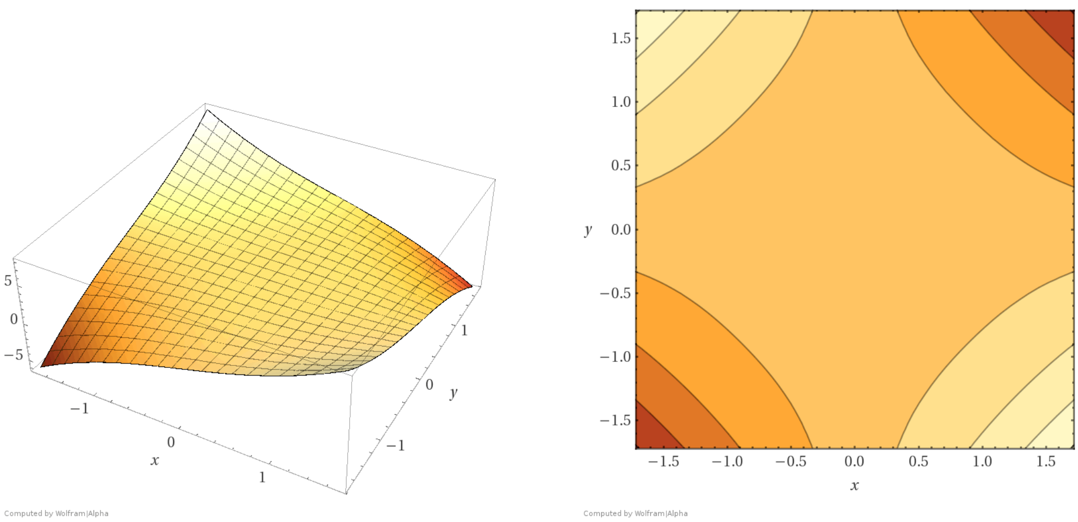
$$-y\left(\sqrt{x^2+y^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x\right) = 0 \qquad (16.1)$$
$$-x\left(\sqrt{x^2+y^2} + y \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y\right) = 0 \qquad (16.2)$$

Obě rovnice soustavy vynásobíme uvedenými jmenovateli zlomků a dále upravíme.

$$-y(2x^2+y^2) = 0 \qquad (16.3)$$
$$-x(x^2+2y^2) = 0 \qquad (16.4)$$

Ve všech případech, které je třeba řešit, získáváme výsledek [0;0], přičemž se nejedná o řešení původní soustavy rovnic 16.1 a 16.2 (jmenovatel zlomku by se rovnal nule). Pomocí derivací jsme ale nepřišli na to, jestli v bodě $S^*[0;0]$ nastává extrém. Nejdříve se podíváme na obrázek funkce pro odvození nápovědy, jak postupovat.

$$f(x,y) = 1 - xy\sqrt{x^2+y^2}$$



Obrázek 6: Zobrazení funkce v příkladu 16
Obrázek 7: Zobrazení funkce v příkladu 16 v pohledu shora

Z obrázku grafu plyne, že můžeme zkoumat chování funkce po přímkách $y = \pm x$. Zkoumáme okolí bodu $S^*[0;0]$. Funkční hodnota v tomto bodě je 1. Budeme-li zkoumat chování po přímce $y = x$, vznikne funkce:

$$g(x) = 1 - x^2\sqrt{2x^2}$$

V okolí hodnoty $x = 0$ zleva i zprava se funkce $g(x)$ blíží k hodnotě 1 zleva (je shora omezená hodnotou 1). Podobně, budeme-li zkoumat chování po přímce $y = -x$, vznikne funkce:

$$g(x) = 1 + x^2\sqrt{2x^2}$$

Tentokrát je funkce omezena zdola hodnotou 1. Z těchto odvozených informací jsme zjistili, že v jednom směru v daném bodě nastává maximum funkce a v kolmém směru na tento směr nastává v bodě minimum funkce V bodě $S^*[0;0]$, tedy nenastává extrém. Bod S^* je sedlový bod funkce $f(x, y)$.

Příklad 17

$$f(x,y) = x\left(\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2}\right)$$

$$D_f = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 \geq 0\}$$

$$f'_x = \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2} + x\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x - \frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}} \cdot 2x\right)$$

$$f'_y = x\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y - \frac{1}{2\sqrt{x^2-y^2}} \cdot (-2y)\right)$$

Bod $S^*[0;0]$ je v definičním oboru funkce, ale není v definičním oboru prvních parciálních derivací. Může v něm docházet k extrému funkce (řešeno ke konci příkladu).

$$\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-y^2}} = 0 \quad (17.1)$$

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xy}{\sqrt{x^2-y^2}} = 0 \quad (17.2)$$

Obě rovnice 17.1 a 17.2 upravíme pomocí vytýkání:

$$\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2} + x^2\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\right) = 0 \quad (17.3)$$

$$xy\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\right) = 0 \quad (17.4)$$

Pro definované hodnoty je výraz v závorce v rovnici 17.4 součtem kladných čísel, tedy nikdy nebude nulový. Jsou tak dvě možnosti, jak vynulovat tuto rovnici.

$$x_1 = 0$$

$$y = 0$$

Zlomek

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

není definován, pokud $x = 0$. Dosadíme-li $y = 0$ do rovnice 17.3, tak dojde k jejímu vynulování. Příslušná souřadnice x je potom libovolná nenulová.

$$S[x;0], x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

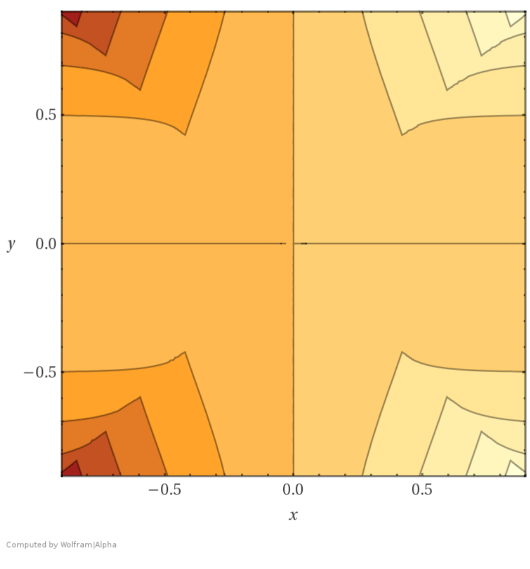
$$f''_{xx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} + 2x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\right) +$$
$$-x^3\left((x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} - (x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$$
$$f''_{xy} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}} -$$
$$-x^2y\left((x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} + (x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$$
$$f''_{yy} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} - xy^2\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{-3}{2}} - \left(x^2-y^2\right)^{\frac{-3}{2}}\right)$$

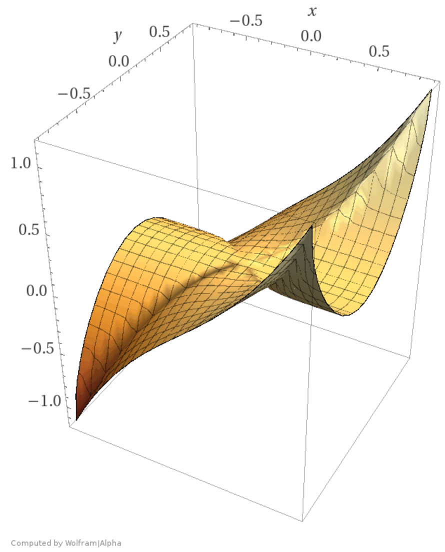
$$H = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2x}{\sqrt{x^2}} \end{vmatrix} = 0$$

Hessián nepomohl k určení typu extrému v bodech $S[x;0], x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Navíc je potřeba prozkoumat chování i v bodě $S^*[0;0]$.

$$f(x,y) = x(\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2})$$

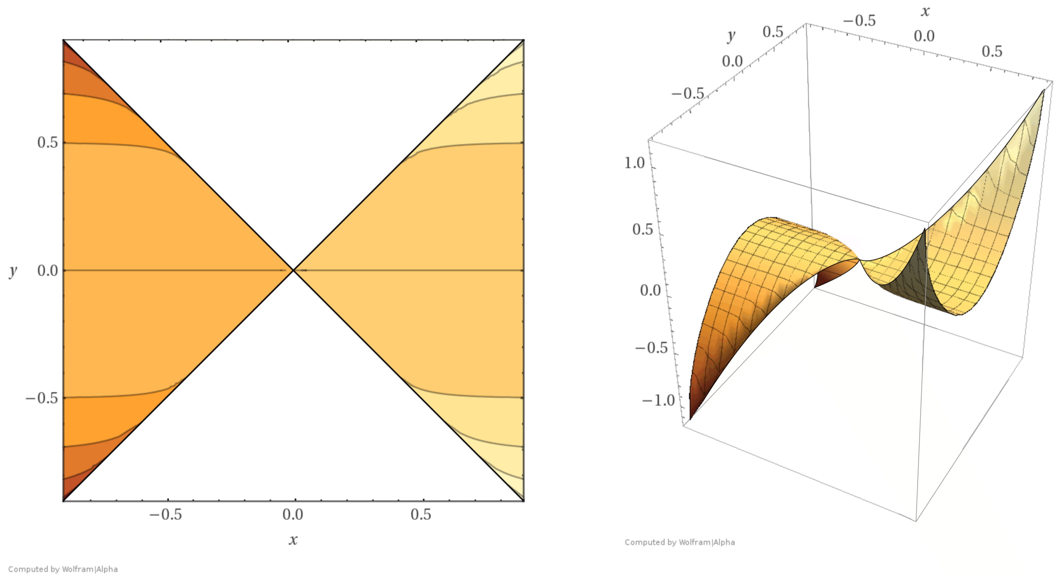
Při zadání předpisu do aplikace WolframAlpha není zahrnuta podmínka $x^2-y^2 \geq 0$. Aplikace vykreslí funkci následovně:





Obrázek 8: Zobrazení funkce v příkladu 17 v pohledu shora
Obrázek 9: Zobrazení funkce v příkladu 17

Ve skutečnosti by obrázky měly vypadat zhruba takto:



Obrázek 10: Úprava obrázku v příkladu 17 v pohledu shora
Obrázek 11: Úprava obrázku v příkladu 17

Nejdříve prozkoumáme, jestli dochází k extrému v bodě $S^*[0;0]$. Obrázek nám napovídá, že můžeme například prozkoumat chování v okolí bodu po přímce $y = x$, přičemž funkční hodnota v tomto bodě je 0. Dosadíme-li tedy $y = x$ do předpisu funkce, získáme funkci jedné proměnné:

$$g(x) = x\sqrt{2x^2}$$

Výraz v odmocnině se chová stejně v okolí 0 zleva i zprava, zatímco x před odmocninou ne. K extrému v bodě $S^*[0;0]$ tedy nedochází (v levém okolí $x = 0$ je funkční hodnota $g(x)$ záporná a v pravém kladná). Zbývá prozkoumat chování ostatních bodů na přímce $y = 0$. Připomeňme, že:

$$f'_y = xy\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)$$

Vzhledem k tomu, že výraz v závorce je vždy kladný, znaménko této derivace ovlivňuje výraz xy. Pro libovolně zvolené nenulové x definovaná y mění znaménko této derivace. Také víme, že:

$$f''_{yy}\left([x,0]\right) = \frac{2x}{\sqrt{x^2}}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Výraz nabývá nenulových hodnot. Pro záporná x vychází záporný (konkávní oblast) a pro kladná x vychází kladný (konvexní oblast). V bodech $S[x;0], x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tedy nastává lokální maximum pro $x < 0$ a lokální minimum pro $x > 0$.

Příklad 18

$$f(x,y) = \frac{x^2 - 5xy + y^2}{x^2 + y^2 - 4}$$

$$D_f = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \neq 4\}$$

$$f'_x = \frac{(2x-5y)(x^2+y^2-4) - 2x(x^2-5xy+y^2)}{(x^2+y^2-4)^2} = \frac{5x^2y - 5y^3 - 8x + 20y}{(x^2+y^2-4)^2}$$

$$f'_y = \frac{(-5x+2y)(x^2+y^2-4) - 2y(x^2-5xy+y^2)}{(x^2+y^2-4)^2} = \frac{5xy^2 - 5x^3 - 8y + 20x}{(x^2+y^2-4)^2}$$

Hledáme pouze body, které nulují čitatele parciálních derivací. Každý z výsledků je třeba zkontrolovat, jestli nenuluje také jmenovatele parciálních derivací.

$$5x^2y - 5y^3 - 8x + 20y = 0 \tag{18.1}$$

$$5xy^2 - 5x^3 - 8y + 20x = 0 \tag{18.2}$$

Obě rovnice soustavy sečteme a takto vzniklou rovnici upravíme pomocí vytýkání.

$$-5(x^3 + y^3) + 5xy(x+y) + 12(x+y) = 0$$

Vytkneme výraz $(x+y)$. Vzniká tak součin dvou výrazů v závorkách. Z obou výrazů v závorkách vyjádříme neznámou x.

$$(x+y)(-5x^2 + 5xy - 5y^2 + 5xy + 12) = 0$$

$$(x+y)(-5(x-y)^2 + 12) = 0$$

$$x_1 = -y$$

$$x_2 = y + \sqrt{\frac{12}{5}} = y + \frac{2\sqrt{15}}{5}$$

$$x_3 = y - \sqrt{\frac{12}{5}} = y - \frac{2\sqrt{15}}{5}$$

Postupně dosadíme hodnoty neznámé x do rovnice 18.1 a řešíme takto vzniklé kvadratické rovnice.

$$y_1 = 0$$

$$y_{2,3} = \frac{-\sqrt{15} \pm \sqrt{35}}{5}$$

$$y_{4,5} = \frac{\sqrt{15} \pm \sqrt{35}}{5}$$

Přičemž $y_{2,3}$ vzniklo pomocí dosazení x_2 a $y_{4,5}$ pomocí dosazení x_3.

$$S_1\,[0;0]\,, S_2\left[\frac{\sqrt{15}+\sqrt{35}}{5}; \frac{-\sqrt{15}+\sqrt{35}}{5}\right], S_3\left[\frac{\sqrt{15}-\sqrt{35}}{5}; \frac{-\sqrt{15}-\sqrt{35}}{5}\right],$$

$$S_4\left[\frac{-\sqrt{15}+\sqrt{35}}{5};\frac{\sqrt{15}+\sqrt{35}}{5}\right], S_5\left[\frac{-\sqrt{15}-\sqrt{35}}{5};\frac{\sqrt{15}-\sqrt{35}}{5}\right]$$

Souřadnice možných stacionárních bodů dosadíme do jmenovatele, kterým byla soustava na začátku násobena. Zjistíme tak, že v bodech S_2, S_3, S_4, a S_5 k extrému nedochází (parciální derivace a ani funkce v nich nejsou definovány). Stacionárním bodem tak zůstává pouze $S_1\,[0;0]$

$$f''_{xx}=\frac{(10xy-8)\left(x^2+y^2-4\right)^2-4x\left(x^2+y^2-4\right)\left(5x^2y-5y^3-8x+20y\right)}{\left(x^2+y^2-4\right)^4}$$

$$f''_{xy}=\frac{\left(5x^2-15y^2+20\right)\left(x^2+y^2-4\right)^2-4y\left(x^2+y^2-4\right)\left(5x^2y-5y^3-8x+20y\right)}{\left(x^2+y^2-4\right)^4}$$

$$f''_{yy}=\frac{(10xy-8)\left(x^2+y^2-4\right)^2-4y\left(x^2+y^2-4\right)\left(-5x^3+5xy^2+20x-8y\right)}{\left(x^2+y^2-4\right)^4}$$

$$H_1=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{5}{4}\\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{21}{16}$$

Bod S_1 je sedlový bod funkce.

Příklad 19

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2+1}{x^4+y^4+1}$$

$$f'_x = \frac{2x\left(x^4+y^4+1\right)-4x^3\left(x^2+y^2+1\right)}{\left(x^4+y^4+1\right)^2} = \frac{-2x^5-4x^3y^2-4x^3+2xy^4+2x}{\left(x^4+y^4+1\right)^2}$$
$$f'_y = \frac{2y\left(x^4+y^4+1\right)-4y^3\left(x^2+y^2+1\right)}{\left(x^4+y^4+1\right)^2} = \frac{-2y^5+2yx^4+2y-4y^3x^2-4y^3}{\left(x^4+y^4+1\right)^2}$$

$$\frac{-2x^5-4x^3y^2-4x^3+2xy^4+2x}{\left(x^4+y^4+1\right)^2} = 0 \tag{19.1}$$
$$\frac{-2y^5+2yx^4+2y-4y^3x^2-4y^3}{\left(x^4+y^4+1\right)^2} = 0 \tag{19.2}$$

Rovnice vynásobíme jmenovateli (které jsou nenulové) a upravíme pomocí vytknutí.

$$2x\left(-x^4-2x^2y^2-2x^2+y^4+1\right) = 0 \tag{19.3}$$
$$2y\left(-y^4+x^4+1-2y^2x^2-2y^2\right) = 0 \tag{19.4}$$

Z vytknutých výrazů vyplývá první řešení.

$$S_1[0;0]$$

Nyní vyřešíme možnost, že $x=0$ a výraz v závorce v rovnici 19.4 je roven nule. Dosazením $x=0$ do tohoto výrazu získáváme bikvadratickou rovnici, kterou vyřešíme pomocí vhodné substituce. Podobně vyřešíme možnost, že $y=0$ a výraz v závorce v rovnici 19.3 je roven nule. Také v tomto případě vzniká bikvadratická rovnice.

$$-y^4-2y^2+1=0$$

$$y^2=n$$

$$n^2+2n-1=0$$

$$n_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$$

$$y=\pm\sqrt{-1+\sqrt{2}}$$

$$S_2\left[0;\sqrt{-1+\sqrt{2}}\right], S_3\left[0;-\sqrt{-1+\sqrt{2}}\right]$$

$$-x^4-2x^2+1=0$$

$$x^2=m$$

$$m^2+2m-1=0$$

$$m_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$$

$$x = \pm\sqrt{-1+\sqrt{2}}$$

$$S_4\left[\sqrt{-1+\sqrt{2}};0\right], S_5\left[-\sqrt{-1+\sqrt{2}};0\right]$$

Zbývá vyřešit případ, kdy jsou v soustavě rovnic 19.3 a 19.4 výrazy v závorkách rovny nule.

$$-x^4 - 2x^2y^2 - 2x^2 + y^4 + 1 = 0 \tag{19.5}$$

$$-y^4 + x^4 + 1 - 2y^2x^2 - 2y^2 = 0 \tag{19.6}$$

Od rovnice 19.5 odečteme rovnici 19.6. Vzniklou rovnici dále upravujeme:

$$2y^4 - 2x^4 + 2y^2 - 2x^2 = 0$$

$$2\left(y^2 - x^2\right)\left(y^2 + x^2\right) + 2\left(y^2 - x^2\right) = 0$$
$$2\left(y^2 - x^2\right)\left(y^2 + x^2 + 1\right) = 0$$
$$2\left(y - x\right)\left(y + x\right)\left(y^2 + x^2 + 1\right) = 0$$
$$y = \pm\, x$$

Po dosazení do rovnice 19.5 řešíme opět bikvadratickou rovnici pomocí substituce (v obou případech vzniká stejná rovnice).

$$-2x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = a$$
$$2a^2 + 2a - 1 = 0$$
$$a = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}}$$

Přičemž pro tyto hodnoty x platí vztah $y = \pm\, x$.

$$S_6\left[\sqrt{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}};\sqrt{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}}\right]$$

$$S_7\left[\sqrt{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}};-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}}\right]$$

$$S_8\left[-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}};\sqrt{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}}\right]$$

$$S_9\left[-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}};-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}}\;\right]$$

$$\begin{aligned}
f''_{xx} = {} & \frac{\left(-10x^4-12x^2y^2-12x^2+2y^4+2\right)\left(x^4+y^4+1\right)^2}{\left(x^4+y^4+1\right)^4} - \\
& -\frac{2\left(x^4+y^4+1\right)4x^3\left(-2x^5-4x^3y^2-4x^3+2xy^4+2x\right)}{\left(x^4+y^4+1\right)^4} \\
f''_{xy} = {} & \frac{\left(-8x^3y+8xy^3\right)\left(x^4+y^4+1\right)^2}{\left(x^4+y^4+1\right)^4} - \\
& -\frac{8y^3\left(x^4+y^4+1\right)\left(-2x^5-4x^3y^2-4x^3+2xy^4+2x\right)}{\left(x^4+y^4+1\right)^4} \\
f''_{yy} = {} & \frac{\left(-10y^4-12x^2y^2-12y^2+2x^4+2\right)\left(x^4+y^4+1\right)^2}{\left(x^4+y^4+1\right)^4} - \\
& -\frac{2\left(x^4+y^4+1\right)4y^3\left(-2y^5-4x^2y^3-4y^3+2yx^4+2y\right)}{\left(x^4+y^4+1\right)^4}
\end{aligned}$$

$$H_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Bod S_1 je lokální minimum funkce.

$$H_{2,3} = \begin{vmatrix} \frac{2+\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{2} \end{vmatrix} = -3-2\sqrt{2}$$

Body S_2 a S_3 jsou sedlové body funkce.

$$H_{4,5} = \begin{vmatrix} -2-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{2+\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = -3-2\sqrt{2}$$

Body S_4 a S_5 jsou sedlové body funkce.

$$H_{6,7,8,9} = \begin{vmatrix} \frac{-6-2\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & \frac{-6-2\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix} = \frac{16+8\sqrt{3}}{3}$$

Body S_6, S_7, S_8 a S_9 jsou lokální maxima funkce.

Příklad 20

$$f(x,y) = x - y + \sin x \cos y$$

$$f'_x = 1 + \cos x \cos y$$
$$f'_y = -1 - \sin x \sin y$$

$$1 + \cos x \cos y = 0 \tag{20.1}$$
$$-1 - \sin x \sin y = 0 \tag{20.2}$$

Obě rovnice sečteme:

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y = 0$$

Jedná se o součtový vzorec.

$$\cos(x+y) = 0$$

$$x = -y + \frac{\pi}{2} + K\pi$$

Nyní dosadíme x do rovnice 20.1. Vznikne tak rovnice o jedné neznámé, odkud budeme chtít vyjádřit neznámou y. Využijeme vzorce, který je možné nalézt v dodatcích v kapitole Použité vzorce.

$$1 + \cos\left(-y + \frac{\pi}{2} + K\pi\right)\cos y = 0$$

$$1 + \cos y(\cos(-y)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(K\pi) - \sin(-y)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(K\pi) -$$
$$- \sin(-y)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(K\pi) - \cos(-y)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(K\pi)) = 0$$

Všimněme si členů rovnajících se nule. Po úpravách získáváme rovnici:

$$1 + \cos y \sin y \cos(K\pi) = 0$$

Parametr K je celočíselný, může být sudý či lichý:

$$1 \pm \cos y \sin y = 0$$

$$1 \pm \frac{\sin 2y}{2} = 0$$

$$\sin 2y = \pm 2$$

Rovnice nemá řešení v $\mathbb{R}$. Funkce nemá žádné stacionární body.

Příklad 21

$$f\left(x,y\right)=\sin^{2}x+\cos x\sin y-\cos^{2}y$$

$$f'_x=2\sin x\cos x-\sin x\sin y$$
$$f'_y=\cos x\cos y-2\cos y\left(-\sin y\right)$$

$$2\sin x\cos x-\sin x\sin y = 0 \tag{21.1}$$
$$\cos x\cos y+2\cos y\sin y = 0 \tag{21.2}$$

Rovnice 21.1 a 21.2 upravíme pomocí vytýkání:

$$\sin x\left(2\cos x-\sin y\right) = 0 \tag{21.3}$$
$$\cos y\left(\cos x+2\sin y\right) = 0 \tag{21.4}$$

Řešíme 4 soustavy rovnic:

$$\sin x = 0 \tag{21.5}$$
$$\cos y = 0 \tag{21.6}$$

$$x_1=K\pi$$
$$y_1=\frac{\pi}{2}+L\pi$$
$$S_1\left[K\pi;\frac{\pi}{2}+L\pi\right]$$

$$\sin x = 0 \tag{21.7}$$
$$\cos x+2\sin y = 0 \tag{21.8}$$

Z rovnice 21.7 plyne hodnota pro neznámou x, kterou dosadíme do rovnice 21.8 pro získání příslušné hodnoty neznámé y.

$$x_2=K\pi$$

$$\cos\left(K\pi\right)+2\sin y=0$$

K je sudé nebo liché, proto nastávají dva případy:

$$K=2L+1\vee K=2L$$

Vybereme-li možnost lichého K:

$$x_{2,3}=K\pi=\pi+2L\pi$$

$$\cos\left(\left(2L+1\right)\pi\right)+2\sin y=0$$
$$-1+2\sin y=0$$

$$\sin y = \frac{1}{2}$$
$$y_2 = \frac{\pi}{6} + 2K\pi$$
$$y_3 = \frac{5\pi}{6} + 2K\pi$$
$$S_2 \left[\pi + 2L\pi; \frac{\pi}{6} + 2K\pi\right]$$
$$S_3 \left[\pi + 2L\pi; \frac{5\pi}{6} + 2K\pi\right]$$

Vybereme-li možnost sudého K:

$$x_{4,5} = 2L\pi$$

$$\cos(2L\pi) + 2\sin y = 0$$
$$1 + 2\sin y = 0$$
$$\sin y = -\frac{1}{2}$$
$$y_4 = \frac{7\pi}{6} + 2K\pi$$
$$y_5 = \frac{11\pi}{6} + 2K\pi$$
$$S_4 \left[2L\pi; \frac{7\pi}{6} + 2K\pi\right]$$
$$S_5 \left[2L\pi; \frac{11\pi}{6} + 2K\pi\right]$$

Vracíme se ke zbylým dvěma možnostem soustavy:

$$2\cos x - \sin y = 0 \tag{21.9}$$
$$\cos y = 0 \tag{21.10}$$

Z rovnice 21.10 plyne hodnota neznámé y, kterou dosadíme do rovnice 21.9 pro výpočet hodnoty neznámé x.

$$y = \frac{\pi}{2} + K\pi$$
$$2\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{2} + K\pi\right) = 0$$

K je sudé nebo liché, proto opět nastávají dva případy:

$$K = 2L + 1 \vee K = 2L$$

Vybereme-li možnost lichého K:

$$y_{6,7} = \frac{3\pi}{2} + 2L\pi$$

$$2\cos x - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2L\pi\right) = 0$$
$$2\cos x + 1 = 0$$
$$\cos x = -\frac{1}{2}$$
$$x_6 = \frac{2\pi}{3} + 2K\pi$$
$$x_7 = \frac{4\pi}{3} + 2K\pi$$
$$S_6\left[\frac{2\pi}{3} + 2K\pi; \frac{3\pi}{2} + 2L\pi\right]$$
$$S_7\left[\frac{4\pi}{3} + 2K\pi; \frac{3\pi}{2} + 2L\pi\right]$$

Vybereme-li možnost sudého K:

$$y_{8,9} = \frac{\pi}{2} + 2L\pi$$

$$2\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2L\pi\right) = 0$$
$$2\cos x - 1 = 0$$
$$\cos x = \frac{1}{2}$$
$$x_8 = \frac{\pi}{3} + 2K\pi$$
$$x_9 = \frac{5\pi}{3} + 2K\pi$$
$$S_8\left[\frac{\pi}{3} + 2K\pi; \frac{\pi}{2} + 2L\pi\right]$$
$$S_9\left[\frac{5\pi}{3} + 2K\pi; \frac{\pi}{2} + 2L\pi\right]$$

Zbývá poslední soustava (vzniklá z výrazů v závorkách u rovnic 21.1 a 21.2).

$$\begin{aligned} 2\cos x - \sin y &= 0 \\ \cos x + 2\sin y &= 0 \end{aligned}$$

Z této soustavy rovnic plyne:

$$\begin{aligned} \cos x &= 0 \\ \sin y &= 0 \end{aligned}$$

$$x_{10} = \frac{\pi}{2} + K\pi$$
$$y_{10} = L\pi$$

$$S_{10}\left[\frac{\pi}{2}+K\pi; L\pi\right]$$

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= 2\cos 2x - \cos x \sin y \\ f''_{xy} &= -\sin x \cos y \\ f''_{yy} &= 2\cos 2y - \cos x \sin y \end{aligned}$$

H_1 vyplníme nejdříve bez zvolených parametrů K a L.

$$H_1 = \begin{vmatrix} 2-\cos(K\pi)\sin\left(\frac{\pi}{2}+L\pi\right) & 0 \\ 0 & 2-\cos(K\pi)\sin\left(\frac{\pi}{2}+L\pi\right) \end{vmatrix}$$

$$H_1 = \left(2-\cos(K\pi)\sin\left(\frac{\pi}{2}+L\pi\right)\right)^2$$

Výsledný výraz je vždy kladný. Nezáporný je z důvodu druhé mocniny a je nenulový protože maximum součinu funkčních hodnot funkcí cosinus a sinus je 1. Protože $f''_{xx}(S_1)$ nabývá pouze kladných hodnot, pak S_1 je lokální minimum funkce $f(x,y)$.

$$H_2, H_3, H_4, H_5 = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = \frac{25}{4}$$

V bodech S_2, S_3, S_4, S_5 je lokální minimum funkce.

$$H_6, H_7, H_8, H_9 = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = \frac{9}{4}$$

V bodech S_6, S_7, S_8, S_9 je lokální maximum funkce.

$$H_{10} = \begin{vmatrix} -2 & -\sin\left(\frac{\pi}{2}+K\pi\right)\cos(L\pi) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}+K\pi\right)\cos(L\pi) & -2 \end{vmatrix}$$

$$H_{10} = 4 - \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+K\pi\right)\cos(L\pi)\right)^2$$

Výsledný výraz je vždy kladný. Protože $f''_{xx}(S_1)$ je záporný, pak S_{10} je lokální maximum funkce $f(x,y)$.

Příklad 22

$$f(x,y) = \sin x + \cos y + \cos(x-y)$$

$$f'_x = \cos x - \sin(x-y)$$
$$f'_y = -\sin y + \sin(x-y)$$

$$\cos x - \sin(x-y) = 0 \tag{22.1}$$
$$-\sin y + \sin(x-y) = 0 \tag{22.2}$$

Rovnice 22.1 a 22.2 sečteme:

$$\cos x - \sin y = 0$$

$$\cos x = \sin y$$

Potřebujeme ještě vztah pro $\sin x$, abychom dosazením získali rovnici o jedné neznámé. Celou rovnici umocníme a dále upravíme. Umocnění rovnice je neekvivalentní úprava a bude tak třeba ověřit, zda-li vypočtené souřadnice stacionárních bodů řeší původní soustavu.

$$\cos^2 x = \sin^2 y$$

$$1 - \sin^2 x = 1 - \cos^2 y$$

$$\sin^2 x = \cos^2 y$$

$$\sin x = \pm \cos y$$

Vyzkoušíme nejdříve možnost kladného znaménka, tedy využijeme těchto rovnic:

$$\cos x = \sin y$$

$$\sin x = \cos y$$

Tyto vztahy dosadíme do rovnice 22.1, kterou před dosazením nejdříve upravíme. Následně tuto rovnici vyřešíme.

$$\cos x - \sin(x-y) = 0$$

$$\cos x - (\sin x \cos y - \cos x \sin y) = 0$$

$$\cos x - \sin x \cos y + \cos x \sin y = 0$$

$$\sin y - \cos^2 y + \sin^2 y = 0$$

$$\sin y - (1 - \sin^2 y) + \sin^2 y = 0$$

$$2\sin^2 y + \sin y - 1 = 0$$

Zavedeme substituci a řešíme kvadratickou rovnici:

$$\sin y = n$$

$$2n^2 + n - 1 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$n_1 = \frac{1}{2}; n_2 = -1$$

$$\sin y = \frac{1}{2}$$

$$y_1 = \frac{\pi}{6} + 2K\pi$$

$$y_2 = \frac{5\pi}{6} + 2K\pi$$

$$\sin y = -1$$

$$y_3 = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$$

Pro získání příslušných x nemusíme dosazovat hodnoty y, stačí využít rovnosti:

$$\cos x = \sin y$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2L\pi$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2L\pi$$

$$\cos x = -1$$

$$x_3 = \pi + 2L\pi$$

Všimněme si, že musíme nakombinovat řešení pro výsledné kořeny x_1, x_2 s y_1, y_2.

$$S_1 \left[\frac{\pi}{3} + 2L\pi; \frac{\pi}{6} + 2K\pi\right]$$

$$S_2 \left[\frac{\pi}{3} + 2L\pi; \frac{5\pi}{6} + 2K\pi\right]$$

$$S_3 \left[\frac{5\pi}{3} + 2L\pi; \frac{\pi}{6} + 2K\pi\right]$$

$$S_4 \left[\frac{5\pi}{3} + 2L\pi; \frac{5\pi}{6} + 2K\pi\right]$$

$$S_5 \left[\pi + 2L\pi; \frac{3\pi}{2} + 2K\pi\right]$$

Pokud vyzkoušíme možnost záporného znaménka, využíváme těchto vztahů:

$$\cos x = \sin y$$

$$\sin x = -\cos y$$

Tyto vztahy dosadíme opět do upravené rovnice 22.1, kterou následně vyřešíme:

$$\cos x - (\sin x \cos y - \cos x \sin y) = 0$$
$$\sin y - (-\cos^2 y - \sin^2 y) = 0$$
$$\sin y = -1$$
$$\cos x = -1$$

Nenalezli jsme další řešení, jedná se o řešení shodné s S_5. V bodech S_2 a S_3 k extrému nedochází, protože se nejedná o řešení původní soustavy (důsledek neekvivalentní úpravy zmíněné výše).

$$f''_{xx} = -\sin x - \cos(x-y)$$
$$f''_{xy} = \cos(x-y)$$
$$f''_{yy} = -\cos y - \cos(x-y)$$

$$H_1 = \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = \frac{9}{4}$$

Body S_1 jsou lokální maxima funkce.

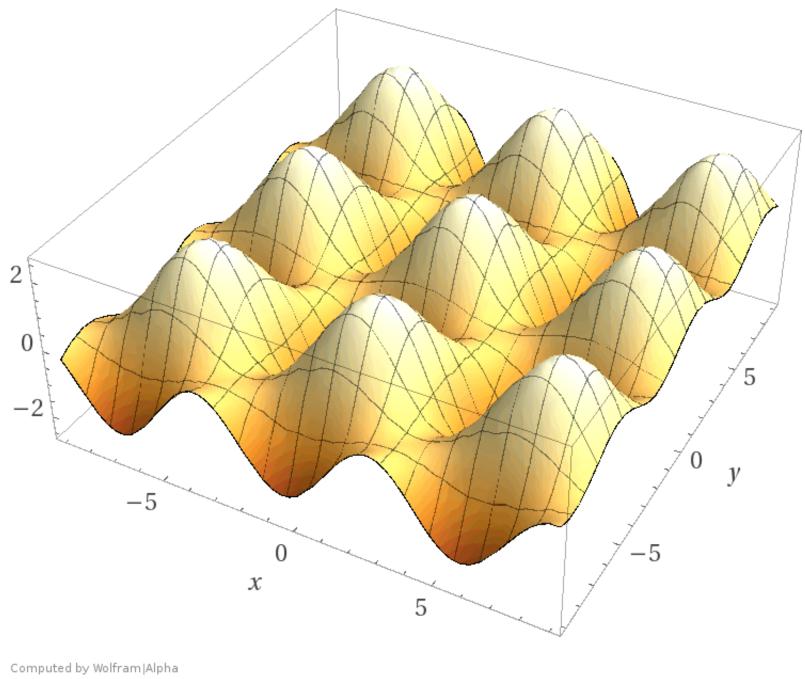
$$H_4 = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = \frac{9}{4}$$

Body S_4 jsou lokální minima funkce.

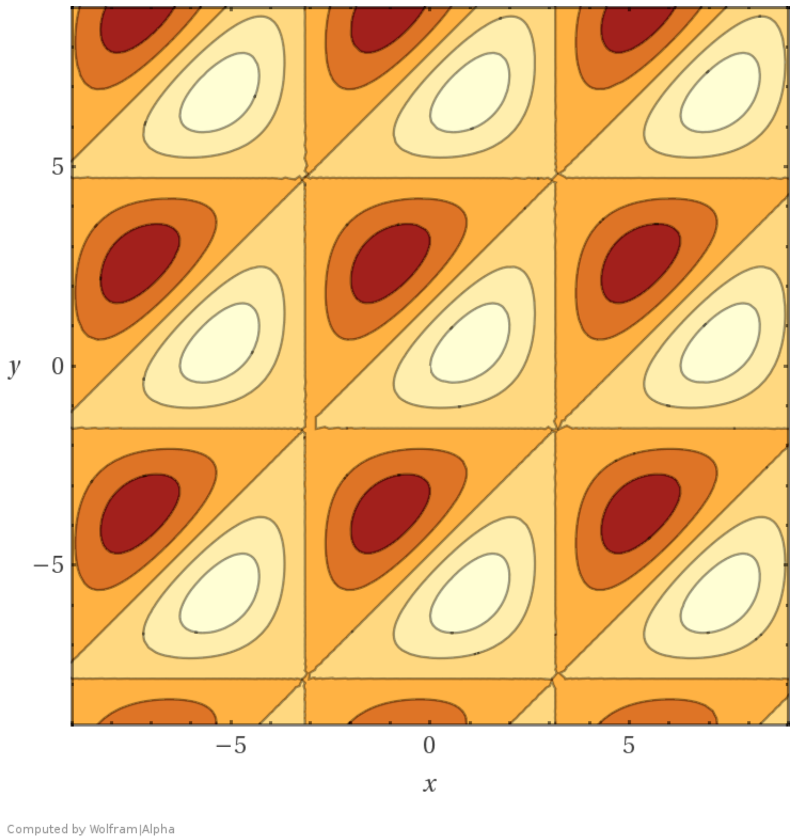
$$H_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Hessián nepomohl k určení typu extrému v bodech S_5, vyzkoušíme jiný postup:

$$f(x,y) = \sin x + \cos y + \cos(x-y)$$



Obrázek 12: Zobrazení funkce v příkladu 22



Obrázek 13: Zobrazení funkce v příkladu 22 v pohledu shora

Všimněme si, že druhý obrázek (pohled shora) je složen z pomyslných pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků. Přičemž vrcholy těchto trojúhelníků jsou právě body S_5. Díky periodicitě funkce a vzniklému řešení nám stačí pouze vyřadit jedno libovolné řešení. Funkční hodnota v bodech S_5 je 0. Nejdříve zjistíme předpis přímky, na kterých leží přepony těchto trojúhelníků (i body S_5). K tomu využijeme dva body z bodů S_5 ležící na společné přeponě a zapíšeme paramatrický tvar rovnice přímky. Odtud odvodíme směrnicový tvar rovnice přímky.

$$A\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right], B\left[3\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$$

$$x = \pi + 2\pi t \tag{22.1}$$
$$y = \frac{3\pi}{2} + 2\pi t, t \in \mathbb{R} \tag{22.2}$$

$$y = x + \frac{\pi}{2} + 2K\pi$$

Předpokládáme, že v bodech S_5 k extrému nedochází. Abychom takové tvrzení potvrdili, využijeme kolmých přímek vedených z bodů S_5 k přímkám, na kterých leží zmíněné přepony. Peridocita nám umožňuje vybrat pouze jeden z bodů S_5, například $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. Tato přímka je funkcí s předpisem:

$$y = -x + \frac{5\pi}{2}$$

Tento předpis dosadíme do původní funkce a dále budeme zkoumat chování v okolí $x = \pi$:

$$f\left(x, -x + \frac{5\pi}{2}\right) = g(x) = \sin(x) + \cos\left(-x + \frac{5\pi}{2}\right) + \cos\left(2x - \frac{5\pi}{2}\right)$$

po úpravách:

$$g(x) = 2 \sin x \,(1 + \cos x)$$

Blíží-li se x k π zleva, funkční hodnota $g(x)$ se blíží k nule zprava. Naopak blíží-li se x k π zprava, funkční hodnota $g(x)$ se blíží k nule zleva. Funkční hodnota zleva a zprava v okolí stacionárního bodu S_5 má tedy rozdílná znaménka. K extrému v bodech S_5 nedochází.

Příklad 23

$$f(x,y) = \sin x \cos y + \cos x \sin^2 y$$

$$\begin{aligned} f'_x &= \cos x \cos y - \sin x \sin^2 y \\ f'_y &= -\sin x \sin y + 2\cos x \sin y \cos y \end{aligned}$$

$$\cos x \cos y - \sin x \sin^2 y = 0 \tag{23.3}$$
$$-\sin x \sin y + 2\cos x \sin y \cos y = 0 \tag{23.4}$$

Rovnice 23.3 a 23.4 vydělíme výrazem $\cos x \cos y$. Taková úprava je možná, pokud vyzkoušíme jako řešení body, ve kterých je tento výraz nulový. Dosadíme tedy následující body do rovnic 23.3 a 23.4 a zjistíme tak, jestli je třeba je přidat mezi stacionární body nebo ne.

$$T_1\left[\frac{\pi}{2} + K\pi; y\right], T_2\left[x; \frac{\pi}{2} + K\pi\right]$$

Dosadíme bod T_1:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + K\pi\right)\cos y - \sin\left(\frac{\pi}{2} + K\pi\right)\sin^2 y &= 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2} + K\pi\right)\sin y + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} + K\pi\right)\sin y \cos y &= 0 \end{aligned}$$

Po úpravách:

$$\begin{aligned} -\sin\left(\frac{\pi}{2} + K\pi\right)\sin^2 y &= 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2} + K\pi\right)\sin y &= 0 \end{aligned}$$

Obě rovnice se rovnají nule, pokud:

$$y_1 = L\pi$$

Nalezli jsme tedy řešení soustavy:

$$S_1\left[\frac{\pi}{2} + K\pi; L\pi\right]$$

Dosadíme bod T_2:

$$\begin{aligned} \cos x \cos\left(\frac{\pi}{2} + K\pi\right) - \sin x \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + K\pi\right) &= 0 \\ -\sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} + K\pi\right) + 2\cos x \sin\left(\frac{\pi}{2} + K\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + K\pi\right) &= 0 \end{aligned}$$

Po úpravách:

$$\begin{aligned} -\sin x \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + K\pi\right) &= 0 \\ -\sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} + K\pi\right) &= 0 \end{aligned}$$

Obě rovnice se rovnají nule, pokud:

$$x_2 = L\pi$$

Nalezli jsme tedy další řešení soustavy:

$$S_2 \left[L\pi; \frac{\pi}{2} + K\pi\right]$$

S ohledem na nalezené řešení, dále o tato řešení nepřijdeme, vydělíme-li rovnice 23.3 a 23.4 výrazem $\cos x \cos y$. Po vydělení tímto výrazem získáváme následující soustavu:

$$\begin{aligned} 1 - \tan x \tan y \sin y &= 0 \qquad (23.5) \\ -\tan x \tan y + 2 \sin y &= 0 \qquad (23.6) \end{aligned}$$

Z rovnice 23.6 plyne:

$$\tan x \tan y = 2 \sin y$$

Tento výraz dosadíme do rovnice 23.5:

$$1 - 2\sin^2 y = 0$$

$$\sin^2 y = \frac{1}{2}$$

$$\sin y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vyzkoušíme nejdříve možnost kladného znaménka:

$$\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_3 = \frac{\pi}{4} + 2K\pi$$

$$y_4 = \frac{3\pi}{4} + 2K\pi$$

Dosadíme y_3 do rovnice 23.3 pro získání příslušného x:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos x - \sin x = 0$$

Vzhledem k tomu že možnost $\cos x = 0$ byla dříve vyřešena, pak výrazem $\cos x$ můžeme rovnici vydělit.

$$\sqrt{2} = \tan x$$

$$x = \arctan \sqrt{2} + L\pi$$

$$S_3 \left[\arctan \sqrt{2} + L\pi; \frac{\pi}{4} + 2K\pi\right];$$

Dosadíme y_4 do rovnice 23.3 pro získání příslušného x:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 0$$

$$-\sqrt{2}\cos x - \sin x = 0$$

Z důvodu uvedeného výše můžeme výrazem $\cos x$ rovnici vydělit.

$$-\sqrt{2} = \tan x$$

$$x = \arctan\left(-\sqrt{2}\right) + L\pi$$

Funkce $\arctan x$ je lichá, tudíž další stacionární bod je:

$$S_4\left[-\arctan\sqrt{2} + L\pi; \frac{3\pi}{4} + 2K\pi\right];$$

Vezmeme-li možnost záporného znaménka:

$$\sin y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_5 = \frac{5\pi}{4} + 2K\pi$$

$$y_6 = \frac{7\pi}{4} + 2K\pi$$

Tyto hodnoty opět dosadíme do rovnice 23.3 a rovnici upravíme. Po dosazení y_5 získáváme:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 0$$

$$-\sqrt{2} = \tan x$$

$$x = \arctan\left(-\sqrt{2}\right) + L\pi$$

$$S_5\left[-\arctan\sqrt{2} + L\pi; \frac{5\pi}{4} + 2K\pi\right]$$

Podobnou úpravou získáme po dosazení y_6 do rovnice 23.3 stacionární bod S_6.

$$S_6\left[\arctan\sqrt{2} + L\pi; \frac{7\pi}{4} + 2K\pi\right]$$

$$f''_{xx} = -\sin x\cos y - \cos x\sin^2 y$$
$$f''_{xy} = -\sin y\cos x - \sin 2y\sin x$$
$$f''_{yy} = -\sin x\cos y + 2\cos x\cos 2y$$

$$H_1 = \begin{vmatrix} -\sin(\frac{\pi}{2} + K\pi)\cos(L\pi) & 0 \\ 0 & -\sin(\frac{\pi}{2} + K\pi)\cos(L\pi) \end{vmatrix} = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + K\pi\right)\cos^2(L\pi)$$

Výsledná hodnota je zřejmě kladná. Jedná se tedy o lokální minimum funkce nebo lokální maximum funkce. Jsou-li parametry K a L liché, nebo oba sudé, pak se jedná o lokální maximum funkce. Je-li parita těchto parametrů rozdílná, pak se jedná o lokální minimum funkce.

$$H_2 = \begin{vmatrix} -\cos(L\pi)\sin^2(\frac{\pi}{2}+K\pi) & -\sin(\frac{\pi}{2}+K\pi)\cos(L\pi) \\ -\sin(\frac{\pi}{2}+K\pi)\cos(L\pi) & -2\cos(L\pi) \end{vmatrix} = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}+K\pi\right)\cos^2(L\pi)$$

Řešíme podobně jako H_1. Výraz $\cos(L\pi)$ určuje o jaký typ extrému se jedná. Bez ohledu na parametr K, je-li parametr L lichý, pak se jedná o lokální minimum funkce a je-li sudý, pak se jedná o lokální maximum funkce.

$$\begin{gathered} f''_{xx}(S_3) = -\sin\left(\arctan\sqrt{2}+L\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+2K\pi\right) - \\ -\cos\left(\arctan\sqrt{2}+L\pi\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+2K\pi\right) \\ f''_{xy}(S_3) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}+2K\pi\right)\cos\left(\arctan\sqrt{2}+L\pi\right) - \\ -\sin\left(2\left(\frac{\pi}{4}+2K\pi\right)\right)\sin\left(\arctan\sqrt{2}+L\pi\right) \\ f''_{yy}(S_3) = -\sin\left(\arctan\sqrt{2}+L\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+2K\pi\right) + \\ +2\cos\left(\arctan\sqrt{2}+L\pi\right)\cos\left(2\left(\frac{\pi}{4}+2K\pi\right)\right) \end{gathered}$$

Pro úpravu těchto výrazů využijeme z dodatků vzorce z kapitoly použité vzorce:

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

platí tedy:

$$\sin\left(\arctan\sqrt{2}\ +L\pi\right) = \sin\left(\arctan\sqrt{2}\right)\cos(L\pi) + \cos\left(\arctan\sqrt{2}\right)\sin(L\pi)$$

Přičemž $\sin(L\pi)$ je roven nule, tedy:

$$\sin\left(\arctan\sqrt{2}+L\pi\right) = \sin\left(\arctan\sqrt{2}\right)\cos(L\pi)$$

Podobně:

$$\cos\left(\arctan\sqrt{2}+L\pi\right) = \cos\left(\arctan\sqrt{2}\right)\cos(L\pi)$$

Druhé parciální derivace po úpravách:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(S_3) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(L\pi) \\ f''_{xy}(S_3) &= -\frac{\sqrt{6}}{2}\cos(L\pi) \\ f''_{yy}(S_3) &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\cos(L\pi) \end{aligned}$$

$$H_3 = H_4 = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(L\pi) & -\frac{\sqrt{6}}{2}\cos(L\pi) \\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\cos(L\pi) & -\frac{1}{\sqrt{3}}\cos(L\pi) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cos^2(L\pi) - \frac{3}{2}\cos^2(L\pi) = -\cos^2(L\pi)$$

Výsledná hodnota je záporná. Body S_3, S_4 jsou sedlové body funkce.

$$H_5 = H_6 = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(L\pi) & \frac{\sqrt{6}}{2}\cos(L\pi) \\ \frac{\sqrt{6}}{2}\cos(L\pi) & -\frac{\sqrt{3}}{3}\cos(L\pi) \end{vmatrix} = -\cos^2(L\pi)$$

Body S_5, S_6 jsou sedlové body funkce.

Příklad 24

$$f(x,y) = \cos^3 x \cos y + \sin x \sin^3 y$$

$$f'_x = -3\cos^2 x \sin x \cos y + \sin^3 y \cos x$$
$$f'_y = -\cos^3 x \sin y + 3\sin x \sin^2 y \cos y$$

$$-3\cos^2 x \sin x \cos y + \sin^3 y \cos x = 0 \tag{24.1}$$
$$-\cos^3 x \sin y + 3\sin x \sin^2 y \cos y = 0 \tag{24.2}$$

Rovnice 24.1 a 24.2 sečteme a dále pomocí vytýkání upravíme:

$$-3\cos^2 x \sin x \cos y + \sin^3 y \cos x - \cos^3 x \sin y + 3\sin x \sin^2 y \cos y = 0$$

$$3\sin x \cos y(\sin^2 y - \cos^2 x) + \sin y \cos x(\sin^2 y - \cos^2 x) = 0$$
$$(\sin^2 y - \cos^2 x)(3\sin x \cos y + \sin y \cos x) = 0$$
$$(\sin y - \cos x)(\sin y + \cos x)(3\sin x \cos y + \sin y \cos x) = 0$$

Rovnice je rovna nule, pokud jeden z výrazů v závorce je roven nule. Každý z těchto případů vyřešíme zvlášť.

$$\sin y - \cos x = 0$$
$$\sin y = \cos x$$

Rovnici umocníme a dále upravíme. Cílem je získat vyjádření $\cos y$, abychom po dosazení do vhodné rovnice získali rovnici o jedné proměnné. V důsledku neekvivalentní úpravy bude třeba vyzkoušet, zda vzniklé kořeny řeší také původní soustavu.

$$\sin^2 y = \cos^2 x$$

$$1 - \cos^2 y = 1 - \sin^2 x$$
$$\cos^2 y = \sin^2 x$$
$$\cos y = \pm \sin x$$

Vyzkoušíme nejdříve možnost kladného znaménka, tedy využijeme vztahů:

$$\sin y = \cos x$$

$$\cos y = \sin x$$

Tato vyjádření dosadíme do rovnice 24.1 a rovnici vyřešíme:

$$-3\cos^2 x \sin^2 x + \cos^4 x = 0$$

$$-3\cos^2 x(1 - \cos^2 x) + \cos^4 x = 0$$
$$4\cos^4 x - 3\cos^2 x = 0$$
$$\cos^2 x(4\cos^2 x - 3) = 0$$

Jsou tři možnosti, čemu se $\cos x$ musí rovnat, aby byla rovnice rovna nule. Každá z těchto možností vede k získání vyjádření x. Dále využijeme původního vztahu:

$$\sin y = \cos x$$

Pomocí tohoto vztahu vypočítáme poté příslušná y.

$$\cos x = 0$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + K\pi$$

$$\sin y = 0$$

$$y_1 = L\pi$$

$$S_1 \left[\frac{\pi}{2} + K\pi; L\pi\right]$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6} + 2K\pi$$

$$x_3 = \frac{11\pi}{6} + 2K\pi$$

$$\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_2 = \frac{\pi}{3} + 2L\pi$$

$$y_3 = \frac{2\pi}{3} + 2L\pi$$

Musíme nakombinovat x_2, x_3 s y_2, y_3. Kombinace neřešící původní soustavu jsou vynechány. Důvodem je výše zmíněná neekvivalentní úprava.

$$S_2 \left[\frac{\pi}{6} + 2K\pi; \frac{\pi}{3} + 2L\pi\right]$$

$$S_3 \left[\frac{5\pi}{6} + 2K\pi; \frac{2\pi}{3} + 2L\pi\right]$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_4 = \frac{5\pi}{6} + 2K\pi$$

$$x_5 = \frac{7\pi}{6} + 2K\pi$$

$$\sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_4 = \frac{4\pi}{3} + 2L\pi$$

$$y_5 = \frac{5\pi}{3} + 2L\pi$$

Opět musíme nakombinovat x_4, x_5 s y_4, y_5. Kombinace neřešící původní soustavu jsou vynechány v důsledku neekvivalentní úpravy zmíněné výše.

$$S_4 \left[\frac{5\pi}{6} + 2K\pi; \frac{5\pi}{3} + 2L\pi\right]$$

$$S_5 \left[\frac{7\pi}{6} + 2K\pi; \frac{4\pi}{3} + 2L\pi\right]$$

Dosadíme-li do rovnice 24.1 možnost záporného znaménka, získáme tuto rovnici:

$$3\cos^2 x \sin^2 x + \cos^4 x = 0$$

$$3\cos^2 x(1 - \cos^2 x) + \cos^4 x = 0$$

$$-2\cos^4 x + 3\cos^2 x = 0$$

$$\cos^2 x(-2\cos^2 x + 3) = 0$$

Výraz v závorce nemá řešení pro x v množině $\mathbb{R}$. Vytknutý $\cos^2 x$ nepřidává nové řešení. Vrátíme se nyní k rovnici:

$$(\sin y - \cos x)(\sin y + \cos x)(3\sin x \cos y + \sin y \cos x) = 0$$

Budeme nyní uvažovat, že se výraz v druhé závorce rovná nule.

$$\sin y = -\cos x$$

Podobnou úpravou, provedenou výše, získáváme

$$\cos y = \pm \sin x$$

Kořeny vznikající z toho vztahu vznikají opět neekvivalentní úpravou a bude třeba vyzkoušet, zda řeší původní soustavu. Vezmeme možnost kladného znaménka a dosadíme tyto vztahy do rovnice 24.1.

$$-3\cos^2 x \sin^2 x - \cos^4 x = 0$$

$$-3\cos^2 x\left(1 - \cos^2 x\right) - \cos^4 x = 0$$

$$2\cos^4 x - 3\cos^2 x = 0$$

$$\cos^2 x(2\cos^2 x - 3) = 0$$

Výraz v závorce nemá řešení pro reálná x, vytknutý výraz opět nepřidává nové řešení. Možnost záporného znaménka:

$$3\cos^2 x \sin^2 x - \cos^4 x = 0$$

Tuto rovnici jsme již počítali v předchozích možnostech. Nepřidá tedy další řešení. Zbývá poslední možnost pro vynulování rovnice.

$$(\sin y - \cos x)(\sin y + \cos x)(3\sin x \cos y + \sin y \cos x) = 0$$

Jedná se o případ, kdy výraz ve třetí závorce je roven nule, tedy:

$$3\sin x \cos y + \sin y \cos x = 0$$

Tuto rovnici budeme dělit výrazem $\cos y \cos x$. Abychom se vyhnuli dělení nulou, tak spočítáme kdy se tento výraz rovná nule, následně dosadíme tyto výsledky do původní soustavy rovnic a pokud jí řeší, pak je přidáme mezi stacionární body. Případ vyřešíme pro obecnou reálnou neznámou n, následně pro náš případ.

$$\cos n = 0$$

$$n = \frac{\pi}{2} + K\pi$$

Je třeba vyzkoušet body $[n; n]$, $[x; n]$ a $[n; y]$ jako možná řešení rovnice. Po dosazení do původní soustavy, zjistíme, že dalším stacionárním bodem je:

$$S_6 \left[\frac{\pi}{2} + K\pi; \frac{\pi}{2} + L\pi\right]$$

Nyní budeme dělit výrazem $\cos y \cos x$, přičemž řešíme už pouze případy, kdy je tento výraz nenulový.

$$3\sin x \cos y + \sin y \cos x = 0 \qquad / : \cos y \cos x$$

$$3\tan x + \tan y = 0$$

$$3\tan x = -\tan y$$

Nyní vydělíme rovnici 24.1 stejným výrazem:

$$-3\cos^2 x \sin x \cos y + \sin^3 y \cos x = 0 \qquad / : \cos y \cos x$$

Protože již můžeme dělit výrazem $\cos x$, pak můžeme také dělit mocninou tohoto výrazu:

$$-3\cos x \sin x + \sin^2 y \tan y = 0 \qquad / : \cos^2 x$$

$$-3\tan x + \tan y \cdot \left(\frac{\sin^2 y}{\cos^2 x}\right) = 0$$

Dosazením vztahu (odvozeným výše):

$$3\tan x = -\tan y$$

získáváme rovnici:

$$\tan y + \tan y \cdot \left(\frac{\sin^2 y}{\cos^2 x}\right) = 0$$

$$\tan y \cdot \left(1 + \left(\frac{\sin y}{\cos x}\right)^2\right) = 0$$

Výraz v závorce nikdy nebude roven nule pro reálná x a y. Zbývá vyřešit:

$$\tan y = 0$$

$$y_7 = L\pi$$

Z následujícího vztahu získáme příslušné x_6:

$$3\tan x = -\tan y$$

$$3\tan x = 0$$

$$x_7 = K\pi$$

$$S_7[K\pi; L\pi]$$

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= 6\sin^2 x\cos y\cos x - 3\cos^3 x\cos y - \sin^3 y\sin x \\ f''_{xy} &= 3\cos x\sin y\left(\cos x\sin x + \sin y\cos y\right) \\ f''_{yy} &= -\cos^3 x\cos y + 3\sin x\sin y(3\cos^2 y - 1) \end{aligned}$$

$$H_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Výpočet hessiánu nepomohl k určení typu extrému v bodech S_1.

$$H_2 = H_3 = H_5 = \begin{vmatrix} \frac{-3\sqrt{3}}{8} & \frac{9\sqrt{3}}{8} \\ \frac{9\sqrt{3}}{8} & \frac{-3\sqrt{3}}{8} \end{vmatrix} = -\frac{27}{8}$$

Body S_2, S_3, S_5 jsou sedlové body funkce.

$$H_4 = \begin{vmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{-9\sqrt{3}}{8} \\ \frac{-9\sqrt{3}}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{vmatrix} = -\frac{27}{8}$$

Body S_4 jsou sedlové body funkce. Zapíšeme zatím H_6 ve tvaru, kde nevybíráme paritu těchto parametrů:

$$H_6 = \begin{vmatrix} -\sin\left(\frac{\pi}{2} + K\pi\right)\sin^3\left(\frac{\pi}{2} + L\pi\right) & 0 \\ 0 & -3\sin\left(\frac{\pi}{2} + K\pi\right)\sin^3\left(\frac{\pi}{2} + L\pi\right) \end{vmatrix} = 3$$

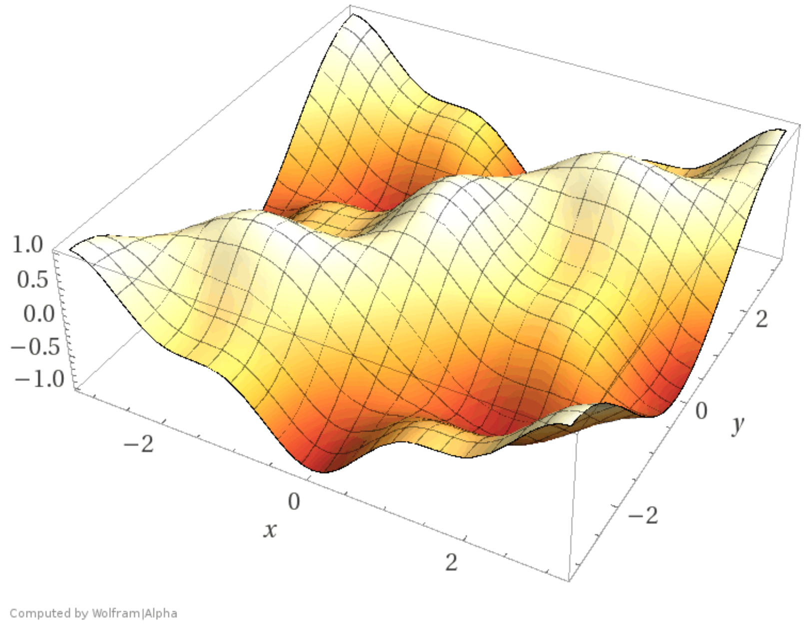
Výsledný výraz je kladný. Jedná se tedy o lokální extrém. Jsou-li parametry K a L oba sudé nebo oba liché, pak se jedná o lokální maximum. Je-li jejich parita rozdílná, pak se jedná o lokální minimum. Podobně vyřešíme H_7:

$$H_7 = \begin{vmatrix} -3\cos\left(L\pi\right)\cos\left(K\pi\right) & 0 \\ 0 & -\cos\left(L\pi\right)\cos\left(K\pi\right) \end{vmatrix} = 3$$

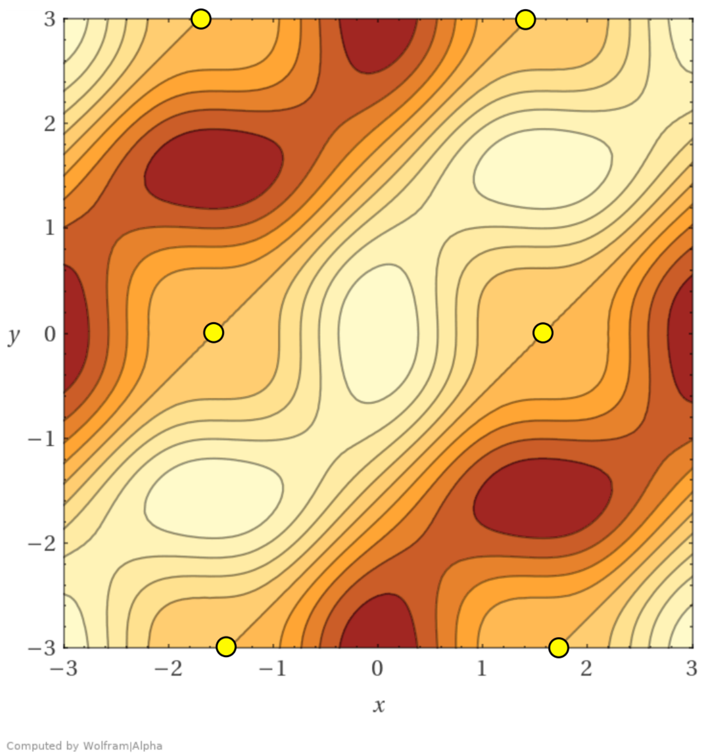
Výsledný výraz je kladný. Jedná se tedy o lokální extrém. Jsou-li parametry K a L oba sudé nebo oba liché, pak se jedná o lokální maximum. Je-li jejich parita rozdílná, pak se jedná o lokální minimum.

Výpočet hessiánu nepomohl v bodech S_1. Vyzkoušíme u nich jiný postup:

$$f\left(x, y\right) = \cos^3 x\cos y + \sin x\sin^3 y$$



Obrázek 14: Zobrazení funkce v příkladu 24



Obrázek 15: Zobrazení funkce v příkladu 24 v pohledu shora

Žlutě označené body na druhém obrázku jsou právě body S_1. Tento obrázek nám napovídá, že všechny tyto body, leží na určitých přímkách. Jedná se o přímky ve tvaru:

$$y = x - \frac{\pi}{2} + M\pi$$

Pomocí dosazení souřadnic každého z bodů, se můžeme přesvědčit, že je toto tvrzení pravdivé, protože pro každý bod, vychází parametr M celý jako neznámá rovnice. Obrázek nám také napovídá, že k extrému v žádném z těchto bodů nedochází, tento závěr musíme ale odvodit početně. Budeme pozorovat jak se body chovají na kolmých přímkách k přímkám s předpisem odvozeným výše, tedy na přímkách ve tvaru:

$$y = -x - q$$

kde parametr q, bude zvolen tak, aby přímka procházela daným bodem. Tento parametr vypočítáme pomocí vztahu $q = -(x + y)$. Dosadíme tento předpis do předpisu funkce dvou proměnných, čimž dostaneme funkci jedné proměnné, odkud bude vyvozen závěr.

Závěr pro stacionární body S_1:

$$y = -x - \left(\frac{\pi}{2} + \pi(K + L)\right)$$

$$g(x) = \cos^3 x \cos\left(-x - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\left(K + L\right)\right)\right) + \sin x \sin^3\left(-x - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\left(K + L\right)\right)\right)$$

Po úpravách s využitím vzorce z dodatků v kapitole použité vzorce:

$$g(x) = -2\cos^3 x \sin x \cos\left(K\pi\right) \cos\left(L\pi\right)$$

Funkční hodnota funkce $g(x)$ v bodě $x = \frac{\pi}{2} + K\pi$ je 0.Tuto hodnotu způsobuje výraz $\cos^3 x$, přesněji pak $\cos x$ (bez ohledu na volbu parametrů K, L). Přibližujeme-li se k $x = \frac{\pi}{2} + K\pi$ zleva a zprava, zjistíme, že při libovolné volbě K, se k nule nepřibližujeme ze stejných směrů. K extrému v bodech S_1 nedochází.

Příklad 25

$$f(x,y) = \left(x^2+4y^2-4\right)\left(x^2-2xy+4y^2\right)$$

předpis funkce upravíme:

$$f(x,y) = \left((x+2y)^2-4xy-4\right)\left((x+2y)^2-6xy\right)$$

$$f(x,y) = (x+2y)^4+(x+2y)^2(-10xy-4)+24xy(xy+1)$$

$$\begin{aligned} f'_x &= 4(x+2y)^3+2(x+2y)(-10xy-4)-10y(x+2y)^2+ \\ &+ 24y(xy+1)+24xy^2 \\ f'_y &= 8(x+2y)^3+4(x+2y)(-10xy-4)-10x(x+2y)^2+ \\ &+ 24x(xy+1)+24x^2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &4(x+2y)^3+2(x+2y)(-10xy-4)-10y(x+2y)^2+ \\ &+24y(xy+1)+24xy^2=0 \end{aligned} \tag{25.1}$$

$$\begin{aligned} &8(x+2y)^3+4(x+2y)(-10xy-4)-10x(x+2y)^2+ \\ &+24x(xy+1)+24x^2y=0 \end{aligned} \tag{25.2}$$

Od rovnice 25.2 odečteme dvojnásobek rovnice 25.1 (čímž vynulujeme první dva členy) a takto vzniklou rovnici budeme dále upravovat:

$$-10x(x+2y)^2+24x(xy+1)+24x^2y+20y(x+2y)^2-48y(xy+1)-48xy^2=0$$

Členy povytýkáme po dvojicích následovně:

$$-10(x-2y)(x+2y)^2+24(xy+1)(x-2y)+24xy(x-2y)=0$$

Všechny členy obsahují výraz $(x-2y)$. Tento výraz tedy můžeme vytknout a budeme pokračovat s následující úpravou:

$$(x-2y)\left(-10(x+2y)^2+24(xy+1)+24xy\right)=0$$

$$(x-2y)\left(-10(x+2y)^2+24(2xy+1)\right)=0$$

Z tohoto rozložení do součinu dvou výrazů, budeme řešit 2 případy. Nejdříve dosadíme do rovnice 25.1 vyjádření $x=2y$.

$$4(4y)^3+2(4y)\left(-20y^2-4\right)-10y(4y)^2+24y\left(2y^2+1\right)+48y^3=0$$

Po roznásobení a úpravách:

$$32y^3-8y=0$$

$$8y(4y^2-1)=0$$

$$y_1=0$$

$$y_{2,3} = \pm\frac{1}{2}$$

Přičemž $x = 2y$, odtud dostáváme tři stacionární body:

$$S_1[0;0]$$

$$S_2\left[1;\frac{1}{2}\right]$$

$$S_3\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$$

Budeme nyní řešit druhou možnost vynulování vzniklé rovnice. Odtud vyjádříme x, které dosadíme do rovnice 25.1:

$$-10(x+2y)^2 + 24(2xy+1) = 0$$

Po roznásobení a úpravě:

$$-5x^2 + 4xy - 20y^2 + 12 = 0$$

Rovnice je kvadratická vůči neznámé x (a y dočasně považujeme za parametr), poté diskriminat D je tvaru:

$$D = -384y^2 + 240$$

Výsledkem je vyjádření neznámé x, tedy

$$x_{1,2} = \frac{-4y \pm \sqrt{-384y^2+240}}{-10} = \frac{2y \pm 2\sqrt{-24y^2+15}}{5}$$

V následujících úpravách vyřešíme obě možnosti najednou. Znaménko $\pm$ bude značit kladné znaménko pro x_1 a záporné pro x_2. Naopak znaménko $\mp$ bude značit záporné znaménko pro x_1 a kladné pro x_2. Do roznásobené rovnice 25.1 dosadíme vzniklé vyjádření pro x a budeme rovnici upravovat:

$$2\left(\frac{2y \pm 2\sqrt{-24y^2+15}}{5}\right)^3 - 3\left(\frac{2y \pm 2\sqrt{-24y^2+15}}{5}\right)^2 y+$$

$$+8\left(\frac{2y \pm 2\sqrt{-24y^2+15}}{5}\right) y^2 - 4\left(\frac{2y \pm 2\sqrt{-24y^2+15}}{5}\right) - 4y^3 + 4y = 0$$

Rovnici vynásobíme číslem 125 pro odstranění jmenovatelů zlomků. Dále jednotlivé mocniny dvojčlenů rozepíšeme.

$$2\left(2y \pm 2\sqrt{-24y^2+15}\right)^3 - 15y\left(2y \pm 2\sqrt{-24y^2+15}\right)^2 +$$

$$+200y^2\left(2y \pm 2\sqrt{-24y^2+15}\right) - 100\left(2y \pm 2\sqrt{-24y^2+15}\right) - 4y^3 + 4y = 0$$

$$16y^3 \pm 48y^2\sqrt{-24y^2+15} + 48y(-24y^2+15) \pm 16(-24y^2+15)\sqrt{-24y^2+15} -$$
$$-60y^3 \mp 120y^2\sqrt{-24y^2+15} - 60y(-24y^2+15) + \ 400y^3 \pm 400y^2\sqrt{-24y^2+15} -$$
$$-200y \mp 200\sqrt{-24y^2+15} - 500y^3 + 500y = 0$$

Posčítáme členy s pouze třetí a s pouze první mocninou neznámé y, z výrazů s odmocninou tuto odmocninu vytkneme:

$$144y^3 + 120y + (\mp 56y^2 \pm 40)\sqrt{-24y^2+15} = 0$$

$$(\mp 56y^2 \pm 40)\sqrt{-24y^2+15} = -(144y^3 + 120y)$$

Rovnici umocníme, přičemž je zbytečné dále řešit možnosti $\mp$ a $\pm$. Z důvodu druhé mocniny vybereme jednu možnost.

$$(-56y^2+40)^2(-24y^2+15) = (144y^3+120y)^2$$

Zavedeme substituci $y^2 = n$, dále výrazy roznásobíme:

$$(-56n+40)^2\,(-24n+15) = n\,(144n+120)^2$$

$$-96\ 000n^3 + 120\ 000n^2 - 120\ 000n + 24\ 000 = 0\ /:(-24\ 000)$$
$$4n^3 - 5n^2 + 5n - 1 = 0$$

Využijeme vědomosti odvozené v kapitole racionální kořen kubické rovnice v dodatcích. Je-li kořen racionální, pak jeho možné hodnoty jsou $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$. Postupným zkoušením naleznem kořen této kubické rovnice $n = \frac{1}{4}$. Díky tomu můžeme kubickou rovnici přepsat do tvaru, odkud je kořeny snadné vypočítat:

$$\left(n - \frac{1}{4}\right)\left(4n^2 - 4n + 4\right) = 0$$

Diskriminant vzniklé kvadratické rovnice je záporný, tudíž je reálné n pouze jedno.

$$n = \frac{1}{4}$$

Návratem do substituce:

$$y_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$$

Po dosazení do vztahu:

$$x_{1,2} = \frac{2y \pm 2\sqrt{-24y^2+15}}{5}$$
$$x_{1,2,3,4} = \frac{\pm 1 \pm 6}{5}$$

Během postupu byla použita neekvivalentní úprava – umocnění rovnice. Zkouškou se přesvědčíme, že dosazením $x = -\frac{7}{5}$ a $x = \frac{7}{5}$ pro vypočítaná $y_{1,2}$ soustavu nesplňují. Zatímco zbylá vypočítaná x ano. Přibývají výsledky:

$$S_4\left[-1, \frac{1}{2}\right]$$

$$S_5\left[1,-\frac{1}{2}\right]$$

$$\begin{aligned}
f''_{xx} &= 12x^2 - 12xy + 16y^2 - 8\\
f''_{xy} &= -6x^2 + 32xy - 24y^2 + 8\\
f''_{yy} &= 16x^2 - 48xy + 192y^2 - 32
\end{aligned}$$

$$H_1 = \begin{vmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -32 \end{vmatrix} = 192$$

S_1 je lokální maximum funkce.

$$H_2 = H_3 = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 12 & 8 \end{vmatrix} = -128$$

S_2 a S_3 jsou sedlové body funkce.

$$H_4 = H_5 = \begin{vmatrix} 14 & -20 \\ -20 & 56 \end{vmatrix} = 384$$

S_4 a S_5 jsou lokální minima funkce.

Jiný způsob řešení příkladu:

$$f(x,y) = (x^2 + 4y^2 - 4)(x^2 - 2xy + 4y^2)$$

Položme substituci:

$$x^2 + 4y^2 = t$$

$$xy = s$$

Vzniká tak funkce:

$$g(s,t) = (t-4)(t-2s) = t^2 - 4t - 2st + 8s$$

$$\begin{aligned}
g'_s &= -2t + 8\\
g'_t &= 2t - 4 - 2s
\end{aligned}$$

$$-2t + 8 = 0 \qquad (25.3)$$

$$2t - 4 - 2s = 0 \qquad (25.4)$$

Z rovnice 25.3 je vidět, že $t = 4$ a součtem obou rovnic 25.3 a 25.4 získáváme $s = 2$. Návratem do substitucí získáváme soustavu:

$$x^2 + 4y^2 = 4 \qquad (25.5)$$

$$xy = 2 \qquad (25.6)$$

Vyjádříme x z rovnice 25.6 a toto vyjádření dosadíme do rovnice 25.5.

$$\left(\frac{2}{y}\right)^2 + 4y^2 = 4$$

Vynásobením jmenovatelem a přeřazením členů získáváme:

$$4y^4 - 4y^2 + 4 = 0$$

Rovnice je bikvadratická, nicméně po substituci typické pro tyto rovnice bychom získali kvadratickou rovnici, která nemá reálné kořeny (záporný diskriminant). Odtud tedy stacionární body nezískáme. Z derivace složeného zobrazení víme:

$$f'_x = s'_x \cdot g'_s + t'_x \cdot g'_t$$

$$f'_y = s'_y \cdot g'_s + t'_y \cdot g'_t$$

Zapsáno pomocí matice a vektorů:

$$\begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s'_x & t'_x \\ s'_y & f'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g'_s \\ g'_t \end{pmatrix}$$

Přičemž chceme, aby se tento součin rovnal nule. Tedy po výpočtu jednotlivých parciálních derivací získáváme:

$$\begin{pmatrix} y & 2x \\ x & 8y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g'_s \\ g'_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jak jsme již zjistili, vektor v součinu není nulový, jediná možnost, jak dostat nulový vektor, je, když bude matice v součinu singulární (lineárně závislé řádky). Její determinant tedy položíme roven nule.

$$8y^2 - 2x^2 = 0$$

Po rozložení:

$$2(2y - x)(2y + x) = 0$$

Matice je singulární, pokud platí:

$$x = \pm 2y$$

Po úpravách jsou parciální derivace funkce $f(x, y)$:

$$\begin{aligned} f'_x &= 4x^3 - 6x^2y + 16xy^2 - 8x - 8y^3 + 8y \\ f'_y &= 8x - 2x^3 - 32y + 16x^2y - 24xy^2 + 64y^3 \end{aligned}$$

Opět vytvoříme soustavu rovnic:

$$4x^3 - 6x^2y + 16xy^2 - 8x - 8y^3 + 8y = 0 \tag{25.7}$$

$$8x - 2x^3 - 32y + 16x^2y - 24xy^2 + 64y^3 = 0 \tag{25.8}$$

Předchozí úvaha nás dovedla k získání vztahu mezi souřadnicemi stacionárních bodů. Dosadíme do rovnice 25.7 vyjádření $x = 2y$.

$$4 \cdot (2y)^3 - 6 \cdot (2y)^2 y + 16 \cdot (2y) y^2 - 8 \cdot (2y) - 8y^3 + 8y = 0$$

$$32y^3 - 8y = 0$$

$$8y(2y - 1)(2y + 1) = 0$$

Dosazením do první rovnice $x = -2y$, získáme po podobných úpravách:

$$4 \cdot (-2y)^3 - 6 \cdot (-2y)^2 y + 16 \cdot (-2y) y^2 - 8 \cdot (-2y) - 8y^3 + 8y = 0$$

$$-96y^3 + 24y = 0$$

$$-24y(2y - 1)(2y + 1) = 0$$

Jednotlivá řešení těchto rovnic tvoří s příslušnou substitucí stacionární body.

$$S_1 \left[0; 0\right]$$

$$S_2 \left[1; \frac{1}{2}\right]$$

$$S_3 \left[-1; -\frac{1}{2}\right]$$

$$S_4 \left[1; -\frac{1}{2}\right]$$

$$S_5 \left[-1; \frac{1}{2}\right]$$

Dále bychom opět postupovali jako v předchozím postupu a došli tak ke stejnému závěru.

3 Získané poznatky a metody

Pokud řešíme obecnou soustavu lineárních rovnic, existuje obecné řešení, a proto je možné vždy najít řešení analyticky. Toto tvrzení neplatí pro soustavu nelineárních rovnic. Během své práce jsem používal při řešení soustav nelineárních rovnic metody popsané níže a jejich kombinace. Sepsané metody pouze popisují nejčastější způsob řešení, který byl použit. V případě použití jiného postupu během řešení je příklad doplněn vhodným komentářem.

Metody jsou sepsány pro soustavu dvou nelineárních rovnic o dvou neznámých, je možné si dále odvodit upravenou verzi pro více rovnic o více neznámých. Jsou psány k polynomickým rovnicím, nicméně je možné tyto metody či jejich upravené verze používat i u některých jiných nelineárních soustav.

3.1 Rozložení do součinového tvaru

Pokud je to možné, obě z rovnic soustavy je výhodné upravit pomocí vzorců či vytýkání na součin libovolného počtu výrazů, přičemž je tento součin roven nule. Pokud první rovnice obsahuje K takových výrazů a druhá z rovnic L takových výrazů, pak dále již řešíme K · L soustav rovnic, přičemž obtížnost každé ze soustav je nižší ve srovnání s původní soustavou.

Příklad použití:

$$\begin{aligned} x^3y^2 + x^3y - 4xy^2 - 4xy &= 0 \\ 2x^3y + x^2 - 2xy^3 - y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Tuto soustavu je možné pomocí jednoduchých úprav upravit do následujícího tvaru:

$$xy\,(x-2)\,(x+2)\,(y+1) = 0$$

$$(2xy+1)\,(x-y)\,(x+y) = 0$$

Dále bychom řešili 15 „jednodušších“ soustav (některé pochopitelně bez řešení nebo naopak v obecném tvaru).

Tato metoda byla použita např. u **příkladu 11** (s. 32),
příkladu 14 (s. 38), **příkladu 19** (s. 49), **příkladu 21** (s. 53).

3.2 Eliminace součtem

Pokud je možné eliminovat jednu z neznámých součtem násobků nebo rozdílem násobků rovnic, vzniká rovnice o jedné neznámé. Vyřešením vzniklé rovnice získáme hodnotu této neznámé. Následně tuto hodnotu dosadíme do jedné z původních rovnic, kde opět vzniká rovnice o jedné neznámé. Výpočtem této rovnice již máme soustavu vyřešenou. Součtem či rozdílem násobků rovnic můžeme také vyřadit určitý počet členů a následně získat rovnici, odkud je jednoduché (například pomocí upravení do součinového tvaru) vyjádřit neznámou.

Příklad použití:

$$\begin{aligned} 2x^4y^2 - 5x^4 - 10y + 8x^2 + 3 &= 0 \\ -x^4y^2 + 3x^4 + 5y - x^2 - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Dvojnásobek druhé rovnice přičteme k první rovnici. Tímto způsobem tak dochází k eliminaci neznámé y:

$$x^4 + 6x^2 - 7 = 0$$

Dále bychom vyřešením rovnice získali možná x, které po dosazení do jedné z rovnic vytvářejí rovnice pro příslušná y.

Tato metoda byla použita např. u **příkladu 2** (s. 20), **příkladu 18** (s. 47), **příkladu 20** (s. 52), **příkladu 24** (s. 67).

3.3 Eliminace dosazením

Je-li možné z jedné rovnice vyjádřit výraz s pouze jednou neznámou, přičemž dané vyjádření je výrazem s pouze druhou neznámou, pak toto vyjádření můžeme dosadit do druhé rovnice a vzniká tak rovnice o jedné neznámé.

Příklad použití:

$$\begin{aligned} 2x^2y - 3y - x^2 &= 0 \\ 2x^2y^2 - 3y^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice je možné vyjádřit y, po dosazení do druhé rovnice vzniká rovnice o neznámé x (za určitých podmínek).

$$y = \frac{x^2}{2x^2 - 3}$$

$$2x^2\left(\frac{x^2}{2x^2 - 3}\right)^2 - 3\left(\frac{x^2}{2x^2 - 3}\right)^2 + 1 = 0$$

Dále bychom jednotlivá řešení takto vzniklé rovnice dosazovali do jedné z rovnic původní soustavy pro získání příslušných y. Jinou možností je vyjádření členu x^2 z druhé rovnice a dosazení do první, čímž vzniká rovnice o neznámé y.

$$x^2 = \frac{3y^2 - 1}{2y^2}$$

$$2y\left(\frac{3y^2 - 1}{2y^2}\right) - 3y - \left(\frac{3y^2 - 1}{2y^2}\right) = 0$$

Tato metoda byla použita např. u **příkladu 1** (s. 19), **příkladu 5** (s. 23), **příkladu 6** (s. 24), **příkladu 13** (s. 36).

4 Dodatky

4.1 Použité vzorce

Vzorce pro derivace a vzorce pro úpravy výrazů nejsou uvedeny. Jsou v práci používány bez komentářů. V následující kapitole jsou odvozeny poslední čtyři vzorce, protože jsou méně známé.

Pro všechna reálná x, y, z, pro která jsou uvedené výrazy níže definovány, platí:

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y+z) = \sin x \cos y \cos z + \cos x \sin y \cos z + \cos x \cos y \sin z - \sin x \sin y \sin z$$

$$\cos(x+y+z) = \cos x \cos y \cos z - \sin x \sin y \cos z - \sin x \cos y \sin z - \cos x \sin y \sin z$$

$$\sin \operatorname{arctg} x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\cos \operatorname{arctg} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

4.2 Odvození méně známých vzorců

Tato kapitola slouží k odvození méně známých vzorců použitých v práci.

$$\sin(x+y+z) = \sin\left((x+y)+z\right) = \sin(x+y)\cos z + \cos(x+y)\sin z =$$
$$= (\sin x\cos y + \cos x\sin y)\cos z + (\cos x\cos y - \sin x\sin y)\sin z =$$
$$= \sin x\cos y\cos z + \cos x\sin y\cos z + \cos x\cos y\sin z - \sin x\sin y\sin z$$

$$\cos(x+y+z) = \cos\left((x+y)+z\right) = \cos(x+y)\cos z - \sin(x+y)\sin z =$$
$$= (\cos x\cos y - \sin x\sin y)\cos z - (\sin x\cos y + \cos x\sin y)\sin z =$$
$$= \cos x\cos y\cos z - \sin x\sin y\cos z - \sin x\cos y\sin z - \cos x\sin y\sin z$$

Pro reálné $n, n \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ platí:

$$\sin^2 n = \frac{\sin^2 n}{\sin^2 n + \cos^2 n} = \frac{\frac{\sin^2 n}{\cos^2 n}}{\frac{\sin^2 n}{\cos^2 n} + \frac{\cos^2 n}{\cos^2 n}} = \frac{\mathrm{tg}^2 n}{\mathrm{tg}^2 n + 1}$$

Vzhledem ke zvoleménu intervalu pro n platí:

$$\sin n = \frac{\mathrm{tg}\, n}{\sqrt{\mathrm{tg}^2 n + 1}}$$

Dosazením $n = \mathrm{arctg}\, x$:

$$\sin(\mathrm{arctg}\, x) = \frac{\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x)}{\sqrt{\mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}\, x) + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\cos n = \pm\sqrt{1 - \sin^2 n}$$

$$\cos(\mathrm{arctg}\, x) = \sqrt{1 - \sin^2(\mathrm{arctg}\, x)} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Funkční hodnoty $\mathrm{arctg}\, x$ jsou na intervalu $\left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Na tomto intervalu je $\cos x$ kladný, proto už neuvažujeme možnost záporného znaménka.

4.3 Kvadratické formy

Kvadratická forma ve dvou proměnných je výraz tvaru

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1x_1 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2x_2$$

Kvadratická forma ve dvou proměnných je tedy polynom dvou proměnných, jehož všechny členy jsou stupně 2.

Označme $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ vektor proměnných a $A = (a_{ij})$ čtvercovou matici řádu 2, kde prvky na vedlejší diagonále nahradíme jejich aritmetickým průměrem. Potom součin $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ je kvadratická forma ve dvou proměnných:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^T A\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}+a_{21}}{2} \\ \frac{a_{12}+a_{21}}{2} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \frac{a_{12}+a_{21}}{2}x_2; & \frac{a_{12}+a_{21}}{2}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\
&= a_{11}x_1x_1 + \frac{a_{12}+a_{21}}{2}x_1x_2 + \frac{a_{12}+a_{21}}{2}x_1x_2 + a_{22}x_2x_2 = \\
&= a_{11}x_1x_1 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2x_2
\end{aligned}$$

Platí proto

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_ix_j = f(x_1, x_2)$$

Matici A nazýváme matice kvadratické formy $f(x_1, x_2)$.

Matice A kvadratické formy $f(\mathbf{x})$ je:
Pozitivně definitní $\iff (\forall \mathbf{x} \in R^2)\,(\mathbf{x} \neq 0)\,(f(\mathbf{x}) > 0)$
Negativně definitní $\iff (\forall \mathbf{x} \in R^2)\,(\mathbf{x} \neq 0)\,(f(\mathbf{x}) < 0)$
Indefinitní $\iff (\exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^2)\,(f(\mathbf{x}) > 0) \wedge (f(\mathbf{y}) < 0)$
Znázornění těchto případů na jednoduchých příkladech:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2$$

Matice A je pozitivně definitní.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1^2 - x_2^2$$

Matice A je negativně definitní

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 - x_2^2$$

Matice A je indefinitní [4].

4.4 Nalezení racionálního kořene kubické rovnice

Nechť je dáno číslo $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ takové, že $r \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, NSD(r,s) = 1$. Je-li číslo $\frac{r}{s}$ kořenem kubické rovnice tvaru $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ s celočíselnými koeficienty a nenulovým kubickým koeficientem, pak platí:

$$a_3\left(\frac{r}{s}\right)^3 + a_2\left(\frac{r}{s}\right)^2 + a_1\left(\frac{r}{s}\right) + a_0 = 0$$

Dále můžeme obě strany vynásobit výrazem s^3 (s je nenulové).

$$a_3r^3 + a_2r^2s + a_1rs^2 + a_0s^3 = 0$$

Protože je každý člen tohoto vztahu celočíselný, pak první člen levé strany musí být násobkem s, aby mohlo dojít k vynulování. Podobně platí, že poslední člen musí být násobkem r.

Závěrem je, že pokud je výše uvedené racionální číslo $\frac{r}{s}$ kořenem kubické rovnice s celočíselnými koeficienty, pak $s|a_3 \wedge r|a_0$. Tedy jmenovatel dělí kubický koeficient a čitatel dělí absolutní člen (jedná se o dělitelnost na množině $\mathbb{Z}$). Je důležité si uvědomit, že pokud nalezneme číslo splňující tyto podmínky dělitelnosti, tak se ještě nemusí jednat o racionální kořen dané kubické rovnice. Jedná se pouze o implikaci, že každý kořen kubické rovnice v množině $\mathbb{Q}$ tyto podmínky splňuje.

Při počítání kubické rovnice můžeme tedy nejdříve předpokládat, že rovnice má racionální kořen a vyzkoušet, zda-li danou kubickou rovnici řeší taková čísla, která výše zmíněnou vlastnost splňují.

Závěr

Hlavním cílem byla tvorba postupu řešení různých příkladů na hledání extrémů funkcí více proměnných. Veškeré znalosti odvozené v teorii či popsané metody jsou psány pro funkci dvou proměnných, vše je ovšem možné přenést na funkce o libovolném počtu proměnných. Dalším cílem bylo sepsání teorie odůvodňující obecně využívané kroky a také shrnutí metod, které jsem při řešení soustav využíval.

Hlavního cíle bylo dosaženo rozborem 25 příkladů uvedených v práci s rostoucí obtížností (autorovo subjektivní ohodnocení) a sepsanými metodami, sloužícími při řešení soustav nelineárních algebraických rovnic o více neznámých. Přičemž je možné tyto metody či kombinace těchto metod využívat i v soustavách nelineárních nealgebraických o více neznámých.

Při porovnávání obtížnosti příkladů jsem se zaměřil především na tři problémy při řešení. Jednalo se o délku příkladu, složitost prvních kroků pro vyřešení soustavy rovnic a také obtížnost určení typu extrému ve stacionárních bodech, kde nepomohl výpočet hessiánu (pokud zde takové body byly). Velmi obtížné bylo především řešení příkladů s goniometrickými funkcemi. Výsledky, které bylo potřeba zapsat v obecném tvaru kvůli periodicitě funkcí, často ztěžovaly výpočet.

Věřím, že tato bakalářská práce bude vhodně využita při výuce matematické analýzy a bude užitečná studentům, kteří si budou chtít studiem této práce rozšířit vědomosti a schopnosti pro řešení soustav nelineárních rovnic.

Zdroje

[1] ČERNÝ, Ilja. Úvod do inteligentního kalkulu: 1000 příkladů z pokročilejší analýzy. Praha: Academia, 2005. ISBN 80-200-1314-8.

[2] RYBIČKA, Jiří. LATEX pro začátečníky. 3. vyd. Brno: Konvoj, 2003. ISBN 80-7302-049-1.

[3] Jaroslav Tišer, 2019, [online] [vid. 29. 02. 2020]. Funkce více proměnných, Dostupné z: https://math.feld.cvut.cz/tiser/web7.pdf

[4] Jiří Tůma, 2002, [online] [vid. 05. 03. 2020]. Kvadratické formy, Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/t̃uma/2002/NLinalg13.pdf

[5] Tomáš Bárta, 2010, [online] [vid. 03.03.2020]. Taylorův polynom, Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/b̃arta/FSV/mat3_zs09/M3_k10.pdf

[6] Luděk zajíček, 2003, [online] [vid 14.04.2020]. Skripta, Dostupné z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/z̃ajicek/skripta.pdf

Použité programy

LaTeX - Systém pro sazbu textu

WolframAlpha - Aplikace pro řešení matematických problémů

Geogebra - Program pro interaktivní geometrii, algebru i analýzu.

Inkscape - Editor vektorové grafiky