



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

METODA HRANIČNÍCH PRVKŮ V INŽENÝRSKÉ PRAXI

BOUNDARY ELEMENT METHOD IN ENFGINEERING PRACTISE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

VOJTĚCH MAN

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. TOMÁŠ PROFANT, Ph.D.

BRNO 2010

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Akademický rok: 2009/2010

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Vojtěch Man

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Metoda hraničních prvků v inženýrské praxi

v anglickém jazyce:

Boundary element method in engineering practise

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Metoda hraničních prvků nabízí řešení některých problémů pružnosti, ve kterých jiné metody (např. MKP) dosahují uspokojivých výsledků jen za cenu různých kompromisů, jako např. zvyšování výpočetní náročnosti vysokým stupněm diskretizace zkoumané oblasti nebo snižování přesnosti dosažených výsledků. Cílem bakalářské práce je nastudování a pochopení principů metody hraničních prvků, aplikace této metody na nejjednodušší úlohy pružnosti, jako je např. jednodimenzionální teorie prutů, a srovnání dosažených výsledků s výsledky dosažených aplikací konečnoprvkového systému ANSYS.

Cíle bakalářské práce:

1. Historický vývoj metody hraničních prvků.
2. Studium a seznámení se s teoretickými základy metody hraničních prvků.
3. Aplikace metody na některé úlohy jednodimenzionální pružnosti.
4. Srovnání dosažených výsledků s analytickým řešením a výsledky získanými pomocí MKP.

Seznam odborné literatury:

Valášek, M., Bauma, V., Šika, Z., Mechanika B (skripta), Praha, ČVUT, 2004,

Katsikadelis, J. T., Boundary Elements: Theory and Applications, Elsevier Science, 2002,

Gaul L., Kogl M., Wagner M., boundary elemnt methods for Engineers and Scientists, Springer, 2002.

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2009/2010.

V Brně, dne 20.11.2009

L.S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu

doc. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

Rád bych na tomto místě poděkoval Ing. Tomáši Profantovi, Ph.D. za motivaci, čas a ochotu, kterou mi při vedení této bakalářské práce věnoval.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Brně 20. května 2010

.....

Abstrakt

Tato práce se zabývá úvodem do problematiky numerického modelování reálného případu. Pro metodu hraničních prvků uvádí základní výhody a nevýhody a řeší problém hraničních integrálních rovnic pro jednorozměrný případ pružnosti a pevnosti. Takto získané výsledky pro rovnici průhybové čáry jsou porovnány s platnými přístupy pružnosti a pevnosti.

Klíčová slova: Metoda hraničních prvků, Maxwell-Mohrova varianta Castiglianovy věty, diferenciální rovnice ohybové čáry

Abstract

In this work the introduction to numerical modelling of real system is described. For Boundary Element Method (BEM) show its basic advantages and disadvantages and solves problem boundary integral equations for 1-D case. Solutions elastic line are compared with solutions from elasticity and stability.

Key words: Boundary Element Method, Maxwell-Mohr version of Castigliano's method, elastic line differential equation

Obsah

1	Úvod	2
2	Jak začít	3
3	Metoda hraničních prvků	5
3.1	Metoda vážených reziduí	6
3.2	Hraniční integrální rovnice pro 1-D případ diferenciální rovnice	7
4	Modelový příklad	10
4.1	Maxwell-Mohrova varianta Castiglianovy věty	10
4.2	Diferenciální přístup	12
4.3	Metoda hraničních prvků	13
5	Závěr	15
6	Literatura	16

1 Úvod

V současné době hrají numerické simulace v rostoucí míře velmi důležitou roli při navrhování konstrukčních řešení. Tohoto můžeme využít při modelování situací, kdy výroba modelu a simulování podmínek pro měření je sama o sobě náročná, nehledě k ceně takového experimentu. Proto se v mnoha oblastech přistupuje k řešení pomocí vhodného numerického softwaru. S tím ovšem souvisí vysoké požadavky na efektivitu, přesnost a spolehlivost výpočetního programu. Když máme v ruce požadovaný program, neznamená to, že máme úspěch zajištěn. Ke správnému řešení je potřeba znát nejen podstatu problému, který chceme řešit, ale také princip, na kterém zvolený numerický nástroj pracuje. Dále musíme vědět jak s tímto nástrojem zacházet a jaké výsledky od něj můžeme očekávat.

Na začátku této práce se zaměříme na obecný přístup k řešení reálného případu, tzn., jak by měl vypadat myšlenkový pochod a uvažování člověka, který se daným problémem zabývá a snaží se ho numerickým způsobem popsat. Tedy od fyzikálního a matematického pohledu, přes zvolení numerického modelu, zhodnocení výsledků až po konečné řešení. Na to navážeme krátkým srovnáním v současné době dvou nejvíce se vyvíjejících metod a to *metody hraničních prvků (MHP)* a *metody konečných prvků (MKP)*. Následně se budeme věnovat úvodu do metody hraničních prvků a ukážeme řešení 1-D problému diferenciální rovnice řešenou pomocí hraničních integrálních rovnic.

2 Jak začít

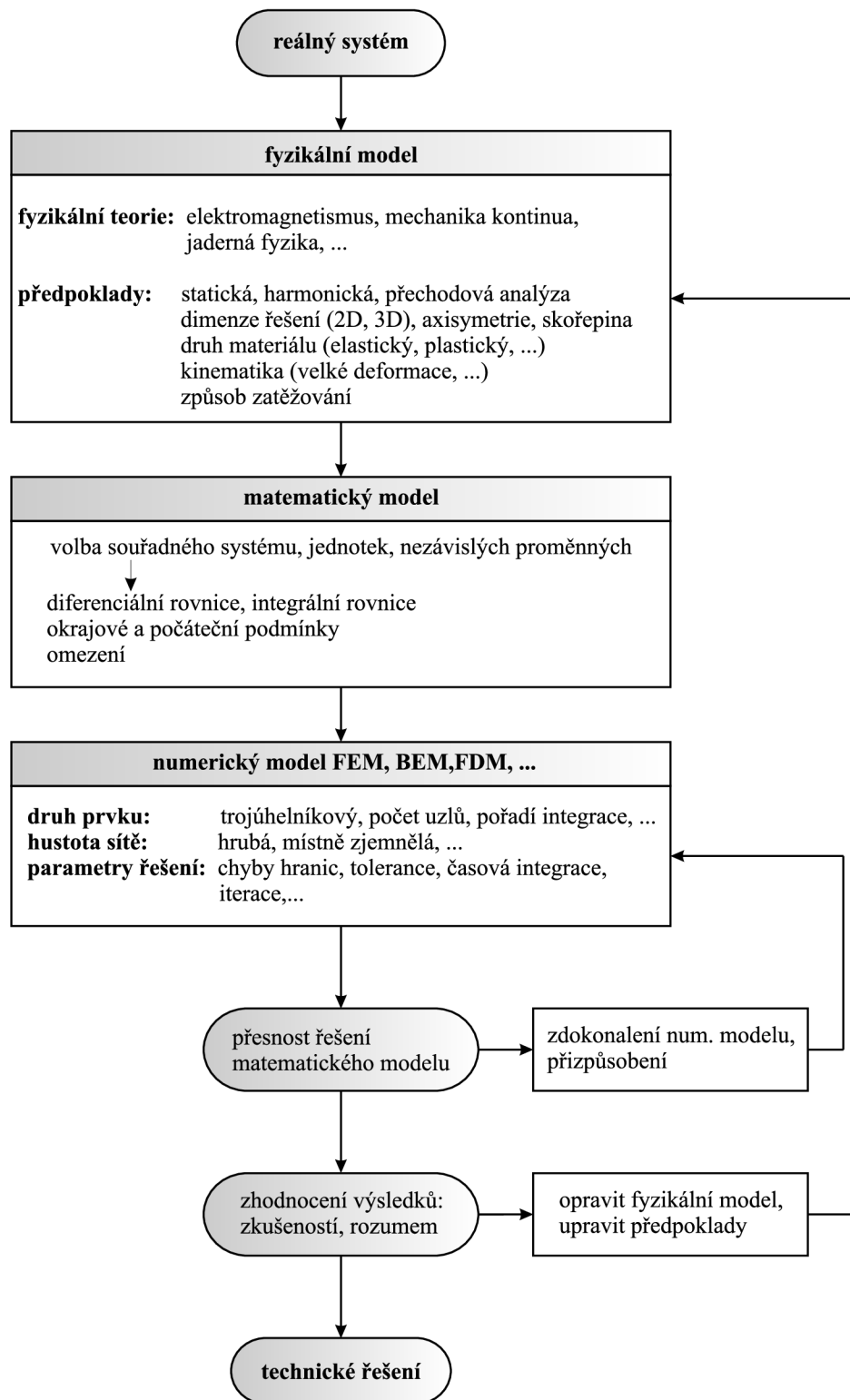
V následující kapitole si ukážeme, jak přistoupit k reálnému případu, který chceme řešit numerickou metodou, např. *metodou konečných prvků (MKP)*, *metodou hraničních prvků (MHP)*, *metodou sítí (FDM)*, apod. Záměrně zde neuvadíme konkrétní metodu, protože žádná z nich není univerzální a každá skrývá své výhody a nevýhody.

Nyní se podívejme na to, jak by měl celý proces vypadat. Na obr. 1 vidíme schématické znázornění přístupu ke skutečnému problému.

Na začátku máme zadání z praxe, které potřebujeme nějakým způsobem popsat. K tomu nám slouží první přiblížení v podobě fyzikální modelu, který se skládá ze dvou hlavních částí - teorie a předpokladů. Nejprve určíme základní fyzikální teorii, která nám nejlépe popisuje zadaný problém (mechanika kontinua, elektrodynamika, akustika, mechanika tekutin...). Tuto námi zvolenou teorii dále doplňujeme o další předpoklady jako jsou typ analýzy, dimenze problému, druh a vlastnosti materiálu (izotropie, homogenost, lineární chování, ...), způsob zatěžování, atd., tedy všechny vlastnosti, které nás zajímají a můžeme je s dostatečnou přesností popsat. Zavedením těchto předpokladů můžeme zjednodušit průběh dalšího řešení.

Když pro náš případ vybereme vhodný fyzikální model, potřebujeme ho v dalším kroku vyjádřit matematickým způsobem. Tentokrát vybíráme matematický model, který nás vede ke konkrétnímu matematickému popisu dané situace pomocí diferenciálních nebo integrálních rovnic, jež doplníme matematickým popisem počátečních, okrajových podmínek, případně dalších omezení vyplývajících např. ze způsobu uložení nebo typu kinematických vazeb. Tento krok v matematickém modelování je pro nás velmi důležitý, poněvadž udává nejlepší výsledek, jaký můžeme získat z použitého numerického nástroje. Musíme zde zdůraznit, že každá chyba udělaná během matematického modelování se vždy objeví v numerickém řešení. Z tohoto důvodu je nutné, abychom každou numerickou metodu chápali a brali pouze jako nástroj k řešení daného problému. Nesmíme totiž zapomínat, že výpočetní programy řeší pouze matematické rovnice a nemohou kontrolovat, zda vypočtené hodnoty poskytují adekvátní simulaci jevu, o který se zajímáme.

Nicméně v tomto bodě naše práce nekončí, následuje převedení matematického modelu do numerického. K úspěšnému numerickému řešení popisovaného problému potřebujeme rozumět, jak námi zvolená metoda funguje, protože proces řešení není často přímý. Zvolíme parametry, které zrychlují postup řešení nebo jsou pro řešení nezbytné. Zde si opět musíme dát pozor, protože použijeme-li některé parametry nesprávně, mohou přinášet chybná řešení, jako jsou nechtěné oscilace, vyhlazení, odchylky, ... a tím dostáváme nepoužitelné výsledky i přesto, že zvolíme správný matematický model pro naši analýzu. Pokud zjistíme, že numerické řešení není přijatelné pro daný matematický model, musíme zlepšit numerický model např. volbou menších časových úseků, jiného krokovacího schématu a nebo jemnější sítě v oblasti, kde předpokládáme problém.



Obrázek 1: Postup řešení

Po úpravách a zpřesnění numerického modelu dostáváme řešení, které popisuje matematický model. Tento výsledek musíme ještě interpretovat z fyzikálního hlediska a porovnat, zda dobře aproximuje zkoumaný fyzikální jev na požadované rozlišovací úrovni. Když tento předpoklad není splněn, modifikujeme fyzikální model, na kterém je naše analýza založena a celý proces opakujeme od začátku. To můžeme uvést na příkladu, kdy se v materiálu vlivem silného

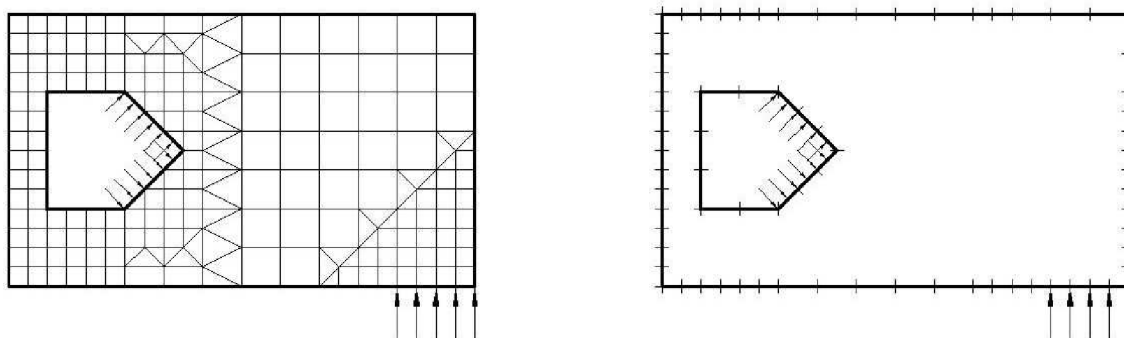
vnitřního tření uvolňuje významná část mechanické energie a přeměňuje se na tepelnou a ohřívá těleso. Jelikož tento mechanismus ovlivňuje výsledky, opustíme teorii o adiabatickém procesu a použijeme odpovídající teorii termoelasticity. Jakmile obdržíme výsledky, které uspokojivě simulují skutečný děj, můžeme proces analýzy považovat za hotový a výsledek použijeme při návrhu technického řešení. Konstrukční návrh tedy potvrdíme nebo ukážeme jaké změny by měly být udělány.

3 Metoda hraničních prvků

Zaměřme se nyní na jednu z rychle se vyvíjejících metod a to *metodu konečných prvků*.

Jak jsme uvedli výše, řadu fyzikálních problémů v nějaké oblasti můžeme popsat pomocí parciálních diferenciálních rovnic, jejichž řešení můžeme převést na řešení jim odpovídajících *hraničních integrálních rovnic* na hranici této oblasti. Výsledkem řešení hraničních integrálních rovnic je nalezení neznámých hraničních hodnot funkcí, resp. hodnot derivací těchto funkcí, které vystupují v původní diferenciální rovnici. Existuje skupina problémů, kde nalezení hraničních hodnot neznámých funkcí na dané oblasti je pro nás z hlediska praktických aplikací naprosto dostačující. Jako příklad můžeme uvést výpočet součinitele intenzity napětí pro těleso s trhlinou, který stanovíme z vypočtených hodnot posunutí okrajů trhliny. V tomto případě nepotřebujeme znát pole silových a deformačních veličin ve vnitřních bodech tělesa. Pokud se však zajímáme i o hodnoty funkcí uvnitř oblasti, je možné je vypočítat pomocí odpovídajících integrálních vztahů ze známých hraničních hodnot.

Hraniční integrální rovnice řešíme analyticky jen výjimečně. Jednou z nejužívanějších metod, kterou používáme pro jejich řešení, je *metoda hraničních prvků* (MHP), která podobně jako *metoda konečných prvků* (MKP) vyžaduje provést diskretizaci hranice. Zatímco však u MKP diskretizujeme celou oblast, u MHP diskretizujeme pouze její hranici, jak je uvedeno na obr. 2, čímž se snižuje dimenze řešeného problému. Řešení získaná pomocí MHP jsou zpravidla velmi přesná pro značně rozlehlé oblasti a dávají spolehlivé výsledky v okolí singularit typu trhlín a podobných koncentrátorů. Metoda hraničních integrálních rovnic využíváme zvláště pro lineární problémy. Můžeme ji rozšířit i do nelineárního oboru, avšak v tomto okamžiku přicházíme o její speciální výhody.



Obrázek 2: Diskretizace oblasti MKP (vlevo) a MHP (vpravo)

Za přednost MHP oproti MKP obvykle považujeme menší počet neznámých, vyšší přesnost aproximace derivací hledaných funkcí a snadnou analýzu nekonečných oblastí. V mechanice pak MHP nabývá na významu v úlohách o koncentracích napětí, ke kterým dochází zejména v okolí vrubů a na čelech trhlín.

Hraniční integrální rovnice můžeme získat např. tzv. *přímou formulací*, která vede k sestavení integrálních rovnic obsahující neznámé funkce, které vystupují v původní diferenciální rovnici. Základem přímé formulace je tzv. *fundamentální řešení* diferenciálních rovnic, *Greenova funkce*, nebo tzv. *Somiglianovy vzorce* v případě pružnosti. Přehled hlavních výhod a nevýhod metody hraničních prvků je uveden v tab. 1.

<i>výhody</i>	<i>nevýhody</i>
<ul style="list-style-type: none"> • diskretizace pouze hranice • zjednodušená předpříprava dat, tzn. přímá diskretizace vložených dat z CAD systému • jednoduché a přesné modelování problému obsahující nekonečnou oblast • zjednodušené zacházení se symetrickými problémy (není potřeba diskretizace v rovině symetrie) 	<ul style="list-style-type: none"> • nesymetrický, plně obsazený systém rovnic v rozložení MHP • obtížné zpracování nehomogenních a nelineárních problémů • požadavky na znalost použitelného fundamentálního řešení • praktické využití relativně novodobé, není tak dobře známo mezi uživateli jako MKP

Tabulka 1: Výhody a nevýhody MHP

3.1 Metoda vážených reziduí

Hledáme přibližné řešení diferenciální rovnice

$$u'(x) + u(x) = x \quad (1)$$

na intervalu $0 \leq x \leq 1$ s okrajovými podmínkami $\bar{u} = u(0) = 0$. Toto přibližné řešení bude získáno pěti derivacemi podle druhu vážených reziduí. U všech těchto derivací obdržíme chybu - nazývanou reziduum, které vyplývá z procesu aproximace a kterou je potřeba minimalizovat. Přesné řešení splňuje totožná diferenciální rovnice

$$u' + u - x \equiv 0. \quad (2)$$

Při okrajových podmínkách $u(0) = 0$, dostaneme řešení $u = e^{-x} + x - 1$, $u(1) = 0,3678\dots$. Řešením diferenciální rovnice (1) může být také mocninná řada

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (3)$$

která musí splňovat okrajovou podmínku $\bar{u} = 0$. Jako aproximaci \hat{u} k přesnému řešení vybereme část této mocninné řady, např.

$$\hat{u} = ax^2 + bx^3, \quad (4)$$

jenž také splňuje danou okrajovou podmínku. Aproximační funkce \hat{u} nyní nesplňuje přesně diferenciální rovnici (1), ale vede k odchylce nebo-li residuu

$$e(x) := \hat{u}'(x) + \hat{u}(x) - x. \quad (5)$$

3.2 Hraniční integrální rovnice pro 1-D případ diferenciální rovnice

V této části budeme řešit problém hraničních integrálních rovnic pro jednorozměrný případ pružnosti a pevnosti, tj. pro případ ohybu přímého prutu s různými předepsanými okrajovými podmínkami. Rovnice průhybové čáry transformujeme na hraniční integrální rovnici ve smyslu *metody vážených reziduí*.

Rovnice průhybové čáry je obyčejnou diferenciální rovnicí čtvrtého řádu neznáme funkce w , která charakterizuje průhyb prutu v místě $x \in [0, l]$, kde l je délka prutu. Její převedení na hraniční problém provedeme pomocí čtyřnásobné integrace metodou per-partes, čímž se stupeň derivace funkce w sníží na nulu. Výsledkem bude integrál liniového zatížení a série hraničních hodnot integrálů, ve kterých budou vystupovat různé stupně derivací váhové funkce δw . Jako váhová funkce δw zvolíme fundamentální řešení, čímž dojde k eliminaci neznámých na neznámé hraniční hodnoty průhybu, natočení příp. vnitřních účinků.

Naším cílem bude tedy nalézt průhybovou čáru přímého prutu, která je předepsána na intervalu $x \in [0, l]$ rovnicí

$$EJw^{(iv)} = q, \quad (6)$$

kde E je Youngův modul pružnosti, J je kvadratický moment průřezu prutu a q je průběh liniového zatížení podél prutu. Na hranici prutu, tj. na jeho koncích $x = 0, l$, budou předepsány hodnoty průhybu prutu w_0, w_l , hodnoty natočení $w'_0 = -\theta_0, w'_l = -\theta_l$, hodnoty momentů $EJw''_0 = -M_0, EJw''_l = -M_l$, příp. hodnoty posouvajících sil $EJw'''_0 = -T_0, EJw'''_l = -T_l$.

Prvním krokem jak převedem obyčejnou diferenciální rovnicí (6) na integrální rovnici je, že ji „vážíme“ testovací funkcí δw

$$\int_0^l (EJw^{(iv)} - q) \delta w \, dx = 0. \quad (7)$$

Čtyřnásobnou integrací rovnice (7) metodou per-partes ($\int f'gdx = [fg] - \int fg'dx$) postupně dostaneme

$$-EJ \int_0^l w''' \delta w' \, dx - \int_0^l q \delta w \, dx - T_l \delta w_l + T_0 \delta w_0 = 0, \quad (8)$$

$$EJ \int_0^l w'' \delta w'' \, dx - \int_0^l q \delta w \, dx - T_l \delta w_l + T_0 \delta w_0 - M_l \delta \theta_l + M_0 \delta \theta_0 = 0, \quad (9)$$

$$-EJ \int_0^l w' \delta w''' \, dx - \int_0^l q \delta w \, dx - T_l \delta w_l + T_0 \delta w_0 - M_l \delta \theta_l + M_0 \delta \theta_0 + \theta_l \delta M_l - \theta_0 \delta M_0 = 0, \quad (10)$$

$$EJ \int_0^l w \delta w^{(iv)} \, dx - \int_0^l q \delta w \, dx - T_l \delta w_l + T_0 \delta w_0 - M_l \delta \theta_l + M_0 \delta \theta_0 + \theta_l \delta M_l - \theta_0 \delta M_0 + w_l \delta T_l - w_0 \delta T_0 = 0. \quad (11)$$

Výrazy $T_l \delta w_l, T_0 \delta w_0, \dots, w_0 \delta T_0$ v závislosti na předepsaných okrajových podmínkách obsahují jak neznámé, tak i předepsané hodnoty průhybů, natočení, momentů, příp. posouvajících sil. V dalším kroku nalezení neznámých v (11) se jako váhovou funkci zvolíme fundamentální řešení rovnice (6), tj. řešení rovnice

$$EJ\delta w^{(iv)} = \delta(x - \xi), \quad (12)$$

kde $\delta(x - \xi)$ je tzv. *Diracova delta funkce*, pro kterou platí

$$\delta(x - \xi) = \begin{cases} \infty & \text{pro } x = \xi \\ 0 & \text{pro } x \neq \xi \end{cases}, \quad (13)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - \xi) dx = f(\xi). \quad (14)$$

Řešení rovnice (12) můžeme psát následovně

$$\delta w(x, \xi) = \frac{1}{12EJ} \operatorname{sgn}(x - \xi)(x - \xi)^3, \quad (15)$$

$$\delta \theta(x, \xi) = -\frac{dw(x, \xi)}{dx} = -\frac{1}{4EJ} \operatorname{sgn}(x - \xi)(x - \xi)^2, \quad (16)$$

$$\delta M(x, \xi) = -EJ \frac{d^2 w(x, \xi)}{dx^2} = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x - \xi)(x - \xi), \quad (17)$$

$$\delta T(x, \xi) = -EJ \frac{d^3 w(x, \xi)}{dx^3} = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x - \xi), \quad (18)$$

kde

$$\operatorname{sgn}(x - \xi) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > \xi \\ -1 & \text{pro } x < \xi \end{cases}. \quad (19)$$

Řešení rovnice (12) není nutné omezovat žádnými okrajovými podmínkami a z geometrického hlediska odpovídá prutu nekonečné délky bodově zatíženého jednotkovou silou v bodě ξ .

Pozámka: Souřadnice x a ξ je možné ve vztazích (15)–(18) zaměnit, tj. v lineárním problému je odezva v bodě x od jednotkové síly působící v bodě ξ rovna odezvě v bodě ξ od jednotkové síly působící v bodě x , viz. *Bettiho věta* [1], [2].

Dosazením (12) do prvního integrálu v (11) se dostane

$$EJ \int_0^l w \delta w^{(iv)} dx = \int_0^l w \delta(x - \xi) dx = w(\xi). \quad (20)$$

Pro hodnoty $\delta w_0, \delta w_l, \dots, \delta T_0$ a δT_l na základě vztahů (15)–(18) platí

$$\delta w_0 = \delta w(0, \xi) = \frac{1}{12EJ} \xi^3, \quad (21)$$

$$\delta w_l = \delta w(l, \xi) = \frac{1}{12EJ} (l - \xi)^3, \quad (22)$$

$$\delta \theta_0 = \delta \theta(0, \xi) = \frac{1}{4EJ} \xi^2, \quad (23)$$

$$\delta \theta_l = \delta \theta(l, \xi) = -\frac{1}{4EJ} (l - \xi)^2, \quad (24)$$

$$\delta M_0 = \delta M(0, \xi) = -\frac{1}{2} \xi, \quad (25)$$

$$\delta M_l = \delta M(l, \xi) = -\frac{1}{2} (l - \xi), \quad (26)$$

$$\delta T_0 = \delta T(0, \xi) = \frac{1}{2}, \quad (27)$$

$$\delta T_l = \delta T(l, \xi) = -\frac{1}{2}. \quad (28)$$

Dosazením (15), (20) a (21)–(28) do (11) se dostane hodnota průhybu prutu v jeho vnitřním bodě $\xi \in (0, l)$

$$12EJw(\xi) = \int_0^l q \operatorname{sgn}(x - \xi)(x - \xi)^3 dx +$$

$$+T_l(l - \xi)^3 - T_0\xi^3 - 3M_l(l - \xi)^2 - 3M_0\xi^2 + 6EJ\theta_l(l - \xi) - 6EJ\theta_0\xi + 6EJw_l + 6EJw_0. \quad (29)$$

V rovnici (29) vystupují pouze hraniční hodnoty w , θ , M a T , což je základní myšlenka MHP. Nejprve se vypočítají hodnoty na hranici a pak se vyjádří deformační parametry podél prutu. Postupným derivováním rovnice (29) se dostane

$$12EJw'(\xi) = -12EJ\theta(\xi) = \int_0^l 3q\text{sgn}(x - \xi)(x - \xi)^2 dx - \\ -3T_l(l - \xi)^2 - 3T_0\xi^2 + 6M_l(l - \xi) - 6M_0\xi - 6EJ\theta_l - 6EJ\theta_0, \quad (30)$$

$$12EJw''(\xi) = -12M(\xi) = \int_0^l 6q\text{sgn}(x - \xi)(x - \xi) dx + 6T_l(l - \xi) - 6T_0\xi - 6M_l - 6M_0, \quad (31)$$

$$12EJw'''(\xi) = -12T(\xi) = \int_0^l 6q\text{sgn}(x - \xi) dx - 6T_l - 6T_0. \quad (32)$$

Pro výpočet hraničních hodnot neznámých parametrů se bod ξ přesune na hranici, tj. do bodu $\xi = 0$ a $\xi = l$. Tímto se ze vztahů (29) a (30) dostane soustava rovnic

$$- \int_0^l qx^3 dx = T_l l^3 - 3M_l l^2 + 6EJ\theta_l l + 6EJw_l - 6EJw_0, \quad (33)$$

$$\int_0^l q(x - l)^3 dx = -T_0 l^3 - 3M_0 l^2 - 6EJ\theta_0 l - 6EJw_l + 6EJw_0, \quad (34)$$

$$- \int_0^l 3qx^2 dx = -3T_l l^2 + 6M_l l - 6EJ\theta_l + 6EJ\theta_0, \quad (35)$$

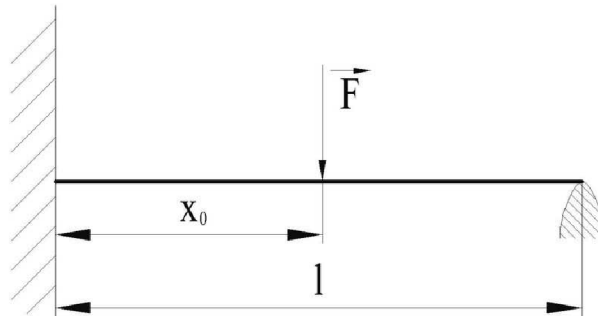
$$\int_0^l 3q(x - l)^2 dx = -3T_0 l^2 - 6M_0 l + 6EJ\theta_l - 6EJ\theta_0. \quad (36)$$

Soustava rovnic (33)–(36) obsahuje pouze hraniční hodnoty. Jedná se o hledané vztahy formulující MHP pro jednorozměrný případ průhybu prutu. Koncové body prutu jsou v pozici hraničních prvků a soustava lineárních rovnic (33)–(36) představuje vztahy mezi proměnnými na těchto prvcích. Hraniční prvky tvořené koncovými body kontrastují s případem metody konečných prvků, kdy konečné prvky jsou tvořeny segmenty podél prutu.

4 Modelový příklad

V tomto odstavci ukážeme jak získáme rovnici ohybové čáry, respektive průhybu v konkrétním bodě několika způsoby. Nejdříve spočítáme přesné řešení pomocí Maxwell-Mohrovy varianty Castiglianovy věty, poté najdeme průběh ohybové čáry přes diferenciální rovnici a poslední metodou bude výpočet pomocí metody hraničních prvků.

Prut na jednom konci vetknutý, na druhém podepřený a zatížený osamělou silou velikosti F působící v místě x_0 .

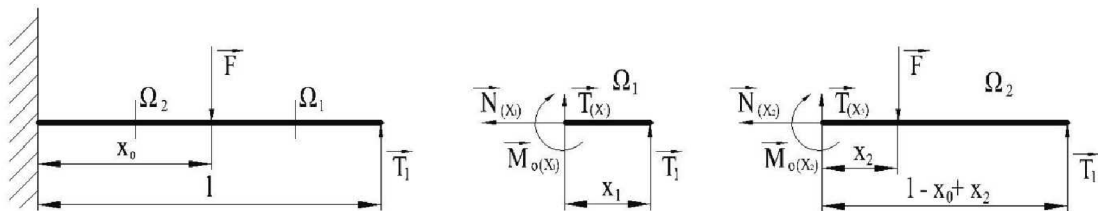


Obrázek 3: Modelový příklad

4.1 Maxwell-Mohrova varianta Castiglianovy věty

V této části spočítáme přesnou hodnotu průhybu nosníku v místě x_0 v důsledku působení síly F . Z charakteru uložení prutu, znázorněného na obr. 3, je patrné: $NP = \{N_0, T_0, M_0, T_l\}$; $s = \mu - \nu = 4 - 3 = 1$, prut je uložen 1x staticky neurčitě. Pro určení průhybu w v místě x_0 potřebujeme nejdříve určit stykovou sílu $T_l = f(F)$.

Částečné uvolnění je na obr. 4, stykovou sílu T_l určíme z deformační podmínky $w_L=0$ pomocí Maxwell-Mohrovy varianty Castiglianovy věty. Ze statické rovnováhy uvolněných prvků Ω_1 a Ω_2 určíme VVÚ



Obrázek 4: Částečné uvolnění

$$N_1(x_1) = 0; T_1(x_1) = -T_l; M_o(x_1) = T_l x_1 \quad (37)$$

$$N_2(x_2) = 0; T_2(x_2) = F - T_l; M_o(x_2) = T_l (l - x_0 + x_2) - F x_2 \quad (38)$$

deformační podmínku potom můžeme vyjádřit ve tvaru

$$w_l = \frac{\partial W}{\partial T_l} = \frac{1}{EJ_y} \left[\int_0^{l-x_0} M_o(x_1) \frac{\partial M_o(x_1)}{\partial T_l} dx_1 + \int_0^{x_0} M_o(x_2) \frac{\partial M_o(x_2)}{\partial T_l} dx_2 \right]. \quad (39)$$

Uvažujeme-li homogenní materiál a konstantní průřez ($E, J_y = konst.$), potom rovnice (39) s doplněním parciálních derivací ohybových momentů $\frac{\partial M_o(x_1)}{\partial T_l} = x_1$, a $\frac{\partial M_o(x_2)}{\partial T_l} = (l - x_0 + x_2)$ přejde do tvaru

$$w_l = \int_0^{l-x_0} (T_l x_1^2) dx_1 + \int_0^{x_0} [T_l (l - x_0 + x_2) - Fx_2] (l - x_0 + x_2) dx_2 \quad (40)$$

integrací této rovnice a algebraickými úpravami získáme stykovou sílu $T_l = f(F)$:

$$T_l = F \frac{3x_0^2}{l^3} \left(\frac{l}{2} - \frac{x_0}{6} \right). \quad (41)$$

Nyní můžeme vyřešit průhyb w_{x_0} . V bodě x_0 platí tato deformační podmínka $w_{x_0} \neq 0$, kterou nejprve napíšeme v obecném tvaru

$$w_{x_0} = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{1}{EJ_y} \left[\int_0^{l-x_0} M_o(x_1) \frac{\partial M_o(x_1)}{\partial F} dx_1 + \int_0^{x_0} M_o(x_2) \frac{\partial M_o(x_2)}{\partial F} dx_2 \right]. \quad (42)$$

I v tomto případě uvažujeme homogenní materiál, konstantní průřez ($E, J_y = konst.$). Parciální derivace jednotlivých ohybových momentů jsou $\frac{\partial M_o(x_1)}{\partial F} = 0$, a $\frac{\partial M_o(x_2)}{\partial F} = -x_2$. Po dosazení do rovnice (42) dostaneme

$$w_{x_0} = \frac{1}{EJ_y} \int_0^{x_0} [M_o(x_2)(-x_2)] dx_2 = \frac{1}{EJ_y} \int_0^{x_0} [-T_l x_2 (l - x_0 + x_2) + Fx_2^2] dx_2 = \quad (43)$$

$$= \frac{1}{EJ_y} \int_0^{x_0} [T_l (x_0 x_2 - l x_2 - x_2^2) + Fx_2^2] dx_2, \quad (44)$$

ze které integrací a algebraickými úpravami obdržíme rovnici pro průhyb

$$w_{x_0} = \frac{1}{EJ_y} \left[T_l \left(\frac{x_0^3}{6} - \frac{l x_0^2}{2} \right) + F \frac{x_0^3}{3} \right] \quad (45)$$

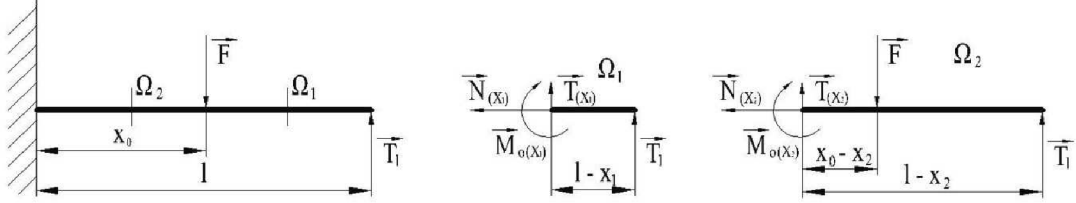
v posledním kroku dosadíme stykovou sílu z rovnice (41) do rovnice (45)

$$w_{x_0} = \frac{F}{EJ_y} \left(-\frac{x_0^6}{12l^3} + \frac{x_0^5}{2l^2} - \frac{3x_0^4}{4l} + \frac{x_0^3}{3} \right) \quad (46)$$

Rovnice (46) nyní vyjadřuje přesné řešení průhybu w_{x_0} v místě x_0 .

4.2 Diferenciální přístup

Z podmínky statické rovnováhy $s = \mu - \nu$ plyne, že úloha je 1x staticky neurčitá, výsledná síla v místě podpory byla vyřešena v předchozím odstavci, proto se nyní budeme věnovat rovnou rovnici ohybové čáry. Částečné uvolnění a jednotlivé řezy jsou znázorněny na obrázku 5.



Obrázek 5: Částečné uvolnění

Ze statické rovnováhy uvolněných prvků Ω_1 a Ω_2 určíme VVÚ:

$$N_1(x) = 0; T_1(x) = -T_l; M_{o1}(x) = T_l(l - x) \quad (47)$$

$$N_2(x) = 0; T_2(x) = F - T_l; M_{o2}(x) = T_l(l - x) - F(x_0 - x) \quad (48)$$

dále budeme uvažovat malé deformace tzn. $w''(x) \ll 1$, takže diferenciální rovnici ohybové čáry můžeme psát ve tvaru

$$w''(x) = -\frac{M_o(x)}{EJ(x)}. \quad (49)$$

Vzhledem k průběhu $M_o(x)$ podél střednice, musíme při řešení deformačních charakteristik rozdělit prut na dva intervaly $I_1 : x \in (x_0, l)$ a $I_2 : x \in (0, x_0)$ a pro každý úsek sestavit diferenciální rovnici průhybové čáry

$${}^I w''(x)EJ_y = -T_l l + T_l x \quad (50)$$

$${}^{II} w''(x)EJ_y = -T_l l + T_l x + Fx_0 - Fx \quad (51)$$

integrací rovnic (50) a (51) obdržíme nejprve průběh úhlu natočení střednice

$${}^I w'(x)EJ_y = -T_l l x + \frac{T_l x^2}{2} + C_1 \quad (52)$$

$${}^{II} w'(x)EJ_y = -T_l l x + \frac{T_l x^2}{2} + Fx_0 x - \frac{F x^2}{2} + C_2 \quad (53)$$

další integrací rovnic (52)–(53) získáme rovnice ohybové čáry v jednotlivých intervalech I_1, I_2 .

$${}^I w(x)EJ_y = -\frac{T_l l x^2}{2} + \frac{T_l x^3}{6} + C_1 x + C_3 \quad (54)$$

$${}^{II} w(x)EJ_y = -\frac{T_l l x^2}{2} + \frac{T_l x^3}{6} + \frac{F x_0 x^2}{2} - \frac{F x^3}{6} + C_2 x + C_4. \quad (55)$$

Integrační konstanty $C_1 \div C_4$ určíme:

- z vazbových podmínek prutu

$$x = 0 \quad {}^{II} w(0) = 0 \rightarrow C_4 = 0 \quad (56)$$

$$x = l \quad {}^I w(l) = 0 \rightarrow C_3 = \frac{T_l l^3}{3} - C_1 l \quad (57)$$

- z podmínek spojitosti a hladkosti průhybové čáry

$$x = x_0 \quad {}^I w'(x_0) = {}^II w'(x_0) \rightarrow C_1 = \frac{T_l l^2}{3} + \frac{F x_0^3}{6l} \quad (58)$$

$$x = x_0 \quad {}^I w(x_0) = {}^II w(x_0) \rightarrow C_2 = \frac{T_l l^2}{3} + F \left(\frac{x_0^3}{6l} - \frac{x_0^2}{2} \right) \quad (59)$$

po dosažení rovnice (58) do (57) dostaneme integrační konstantu C_3

$$C_3 = -\frac{F x_0^3}{6} \quad (60)$$

vypočtené integrační konstanty $C_1 \div C_4$ dosadíme do vztahů (54) a (55)

$${}^I w(x) E J_y = T_l \left(\frac{x^3 - 3lx^2 + 2l^2 x}{6} \right) + F \left(\frac{x_0^3 x}{6l} - \frac{x_0^3}{6} \right) \quad (61)$$

$${}^II w(x) E J_y = T_l \left(\frac{x^3 - 3lx^2 + 2l^2 x}{6} \right) + F \left(\frac{x_0^3 x}{6l} - \frac{x_0^2 x}{2} + \frac{x_0 x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right). \quad (62)$$

Nyní do rovnic (61) a (62) dosadíme výslednou stykovou sílu T_l z rovnice (41), a získáme rovnici ohybové čáry pro jednotlivé intervaly

$${}^I w(x) = \frac{F}{E J_y} \left(-\frac{x_0^3 x^3}{12l^3} - \frac{3x_0^2 x^2}{4l} + \frac{x_0^3 x^2}{4l^2} + \frac{x_0^2 x^3}{4l^2} + \frac{x_0^2 x}{2} - \frac{x_0^3}{6} \right) \quad (63)$$

$${}^II w(x) E J_y = \frac{F}{E J_y} \left(-\frac{x_0^3 x^3}{12l^3} - \frac{3x_0^2 x^2}{4l} + \frac{x_0^3 x^2}{4l^2} + \frac{x_0^2 x^3}{4l^2} + \frac{x_0 x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \quad (64)$$

4.3 Metoda hraničních prvků

V případě tohoto prutu je předepsáno vnější zatížení $q(x) = F\delta(x - x_0)$ a okrajové podmínky $w_0 = w_l = \theta_0 = M_l = 0$. Neznámé parametry jsou hraniční hodnoty M_0, T_0, θ_l a T_l . Soustava rovnic (33)–(36) má tedy tvar

$$-F x_0^3 = T_l l^3 + 6E J \theta_l, \quad (65)$$

$$F(x_0 - l)^3 = -T_0 l^3 - 3M_0 l^2, \quad (66)$$

$$-3F x_0^2 = -3T_l l^2 - 6E J_y \theta_l, \quad (67)$$

$$3F(x_0 - l)^2 = -3T_0 l^2 - 6M_0 l + 6E J_y \theta_l. \quad (68)$$

Rovnice (65)–(68) tvoří soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých,

T_0	T_l	M_0	θ_l	q
0	l^3	0	$6E J_y$	$-F x_0^3$
$-l^3$	0	$-3l^2$	0	$F(x_0 - l)^3$
0	$-3l^2$	0	$-6E j_y$	$-3F x_0^2$
$-3l^2$	0	$-6l$	$6E J_y$	$3F(x_0^2 - l)^2$

kterou vyřešíme Gaussovou eliminační metodou. Nyní máme řešení pro hledané hraniční hodnoty M_0 , T_0 , θ_l a T_l :

$$T_0 = \frac{-F(21x_0^2l - x_0^3 - 24x_0l^2 + 10l^3)}{2l^3} \quad (69)$$

$$T_l = \frac{Fx_0^2(3l + x_0)}{2l^3} \quad (70)$$

$$M_0 = \frac{F(9x_0^2l - x_0^3 - 10x_0l^2 + 4l^3)}{2l^2} \quad (71)$$

$$\theta_l = \frac{-Fx_0^2(l + x_0)}{4lEJ_y}. \quad (72)$$

V tomto okamžiku můžeme hraniční hodnoty (69)–(72) dosadit do rovnice průhybu prutu (29) a dostáváme řešení v obecném bodě ξ

$$w(\xi) = \frac{F}{EJ_y} \left(-\frac{1}{2}x_0^2\xi + \frac{3}{2}x_0\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3 - \frac{x_0^3}{12} + \frac{x_0^3\xi}{4l} - \frac{3x_0^2\xi^2}{4l} + \frac{3x_0^2\xi^3}{4l^2} - \frac{x_0\xi^3}{l} - \frac{l\xi^2}{2} \right).$$

5 Závěr

V práci jsme se zabývali, jak přistoupit k řešení reálného problému pomocí rychle se vyvíjejících numerických metod, ze kterých jsme vybrali metodu hraničních prvků (MHP). Jelikož je mezi uživateli více známá a také rozšířená metoda konečných prvků (MKP), uvedli jsme přehled hlavních výhod a nevýhod metody hraničních prvků. Za největší výhody bychom měli považovat způsob diskretizace zkoumané oblasti, díky čemuž můžeme vyšetřovat požadované chování v místech, kde MKP selhává nebo nepřináší uspokojivé výsledky. Jedná se především o náhlé změny tvaru, jako jsou trhliny nebo ostré přechody, ale také rozlehlé oblasti.

V další části jsme uvedli způsob převedení diferenciální rovnice pro jednorozměrný případ pružnosti a pevnosti na hraniční integrální rovnici, což je smyslem metody hraničních prvků. Tento obecný postup jsme následně aplikovali na modelový příklad z prosté pružnosti, pro který jsme vyjádřili rovnici průhybové čáry dalšími dvěma způsoby, používanými v pružnosti a pevnosti (Maxwell-Mohrova varianta Castiglianovi věty, diferenciální rovnice ohybové čáry). Při pohledu na jednotlivé přístupy, zjistíme, že jsou srovnatelné a hlavním odlišovacím znakem je náročnost potřebná k získání řešení, což se projeví zejména u řešení složitějších úloh, kde metoda hraničních prvků uplatní více své přednosti.

6 Literatura

- [1] JANÍČEK, P., ONDRÁČEK, E. & VRBKA, J. *Mechanika těles - pružnost a pevnost I*, Brno, CERM, 2004.
- [2] ODEN, J. T. *Mechanics of elastic structures*, New York, McGraw-Hill Book Company, 1967.
- [3] GAUL, L., KÖGL, M. and WAGNER, M. *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists*, Springer, 2003
- [4] JANÍČEK, P., FLORIAN, Z., *Mechanika těles - úslohy z pružnosti a pevnosti I*, Brno, PC-DIR Real, 1999