



Pedagogická  
fakulta  
Faculty  
of Education

Jihočeská univerzita  
v Českých Budějovicích  
University of South Bohemia  
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích  
Pedagogická fakulta  
Katedra matematiky

Bakalářská práce

# Funkce a křivky skryté v obrázcích

Vypracovala: Elena Stratulat  
Vedoucí práce: Mgr. Hana Štěpánková, Ph.D.

České Budějovice, 2016

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Funkce skryté v obrázcích jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne .....

.....

## **Poděkování**

Ráda bych poděkovala své vedoucí bakalářské práce Mgr. Haně Štěpánkové, Ph.D., za její cenné rady, připomínky a nápady, také za vstřícný přístup, trpělivost a čas. Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D. děkuji za inspiraci. Dále bych chtěla poděkovat své rodině a blízkým, kteří mě ve studiu podporovali.

## **Anotace**

Tato bakalářská práce s názvem Funkce a křivky skryté v obrázcích je souborem zajímavých úloh, rozdělených do šesti pracovních listů, které jsou zaměřené na grafické znázornění různých funkcí a křivek do soustavy souřadnic  $Oxy$ . Výsledkem těchto úloh, jsou obrázky, tvořeny v matematickém programu GeoGebra, znázorněny na konci každého pracovního listu. Součástí bakalářské práce je také názorný vyřešený úkol v matematickém programu GeoGebra.

## **Annotation**

This bachelor thesis named Functions and curves hidden in pictures is a collection of interesting tasks divided into six work sheets, which are focused on the graphical representation of different functions and curves into the coordinate system  $Oxy$ . The results of these tasks are pictures formed in the mathematical program GeoGebra, shown at the end of each work sheet. Part of bachelor thesis is also illustrative, solved exercise in mathematical program GeoGebra.

## Obsah

<b>1. ÚVOD.....</b>	<b>5</b>
<b>2. PRACOVNÍ LISTY .....</b>	<b>6</b>
2.1. PRACOVNÍ LIST Č.1 NA BODOVÉ FUNKCE .....	7
2.1.1. Řešení pracovního listu č.1 na bodové funkce .....	9
2.2. PRACOVNÍ LIST Č.2 NA LINEÁRNÍ FUNKCE .....	10
2.2.1. Řešení pracovního listu č.2 na lineární funkce .....	14
2.3. PRACOVNÍ LIST Č. 3 NA LINEÁRNÍ FUNKCE ZAKRESLENÉ DO MAPY.....	16
2.3.1. Řešení pracovního listu č. 3 na lineární funkce zakreslené do mapy.....	20
2.4. PRACOVNÍ LIST Č.4 NA LINEÁRNÍ FUNKCE .....	22
2.4.1. Řešení pracovního listu č.4 na lineární funkce .....	26
2.5. PRACOVNÍ LIST Č.5 NA SMÍŠENÉ FUNKCE.....	28
2.5.1. Řešení pracovního listu č.5 na smíšené funkce .....	32
2.6. PRACOVNÍ LIST Č.6 S GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI.....	34
2.6.1. Řešení pracovního listu č.6 s goniometrickými funkcemi .....	38
<b>3. ŘEŠENÍ ÚKOLU Č. 4 V PRACOVNÍM LISTĚ Č. 6 POMOCI MATEMATICKÉHO PROGRAMU GEOGEBRA.....</b>	<b>40</b>
<b>4. ZÁVĚR.....</b>	<b>48</b>
<b>LITERATURA A ZDROJE.....</b>	<b>49</b>
<b>SEZNAM OBRÁZKŮ .....</b>	<b>50</b>

## 1. Úvod

Tuto bakalářskou práci na téma Funkce a křivky skryté v obrázcích jsem si vymyslela sama. Cílem této práce je vytvořit soubor zajímavých úloh, které budou zaměřeny na grafické znázornění funkcí a křivek, kde výsledkem jsou právě obrázky. Myslím si, že u žáků základních a středních škol by mohly tyto úlohy vyvolat zájem a zvědavost právě tím, že výsledkem těchto úloh jsou nějaké obrázky.

Bakalářská práce je psaná v textovém editoru Microsoft Office Word 2007. Práce obsahuje jeden pracovní list se dvěma úkoly a pět pracovních listů po čtyřech úkolech. Ke každému úkolu je připravená kartézská soustava souřadnic. Na konci každého pracovního listu jsou popsány a vyřešeny úkoly v matematickém programu GeoGebra verze 4.2. Listy jsou seřazeny chronologicky od nejjednoduššího po ty obtížnější. Při práci s těmito pracovními listy se předpokládá, že žáci mají dané učivo již probrané. Nejvíce jsou v této práci zastoupeny lineární funkce, ale také se zde vyskytnou bodové funkce, kvadratické funkce, mocninná funkce se záporným celým mocnitelem, lineárně lomená funkce, funkce s absolutní hodnotou a goniometrické funkce. Úlohy mají posloužit k procvičování dané látky, kde si žáci dostatečně osvojí a upevní znalosti a vědomosti.

Pracovní listy můžeme ve výuce využít i k procvičení a osvojení matematického programu GeoGebra.

## 2. Pracovní listy

Pracovní list číslo 1 je zaměřen na procvičení znázorňování bodů do kartézské soustavy souřadnic. Žáci zaznamenávají zadané body do připravené soustavy, a jejich spojením jim vznikne určitý obrázek, který by měli správně pojmenovat.

Pracovní list číslo 2 je na procvičování lineárních funkcí, u kterých je zadán jejich definiční obor. Také zde žáci zaznamenávají zadané body a lineární funkce do kartézské soustavy souřadnic. Výsledkem těchto úkolů v pracovním listě č. 2 jsou různé vlnky, čímž si žáci procvičí i znalosti ze zeměpisu.

V pracovním listě číslo 3 jsou připravené 4 mapy. Žáci správným sestrojováním lineárních funkcí a nanášením bodů do soustavy souřadnic  $Oxy$ , se v každém úkolu ocitnou na jiné ulici. Hlavní cíl v těchto mapách je v úkolu č. 4, který se nazývá Karlův most, nacházející se v Praze.

Pracovní list číslo 4 je zaměřen hlavně na lineární funkce a nanášení bodů do soustavy. Žáci sestrojováním funkcí se zúženým definičním oborem si upevní znalosti lineárních funkcí. V každém úkolu jim vznikne obrázek, který by měli správně pojmenovat.

V pracovním listě číslo 5 jsou příklady již o něco obtížnější. Vyskytují se zde kvadratické, mocninné, lineárně lomené funkce a také funkce s absolutní hodnotou. Jejich sestrojením a nanesením zadaných bodů vzniknou zajímavé obrázky. Žáci základních škol, jelikož nejsou s některými funkcemi seznámeni, mohou využít matematického programu GeoGebra. Žáci středních škol by měli tyto úkoly zvládnout i bez pomoci GeoGebry.

Pracovní list číslo 6 slouží k procvičení goniometrických funkcí. Žáci základních škol ke splnění tohoto pracovního listu, mohou použít matematický program GeoGebra, kde se seznámí s tím, jak vypadá goniometrická funkce. Žáci středních škol, by měli tento pracovní list zvládnout bez pomoci GeoGebry. Výsledkem těchto úkolů je řada zajímavých obrázků.

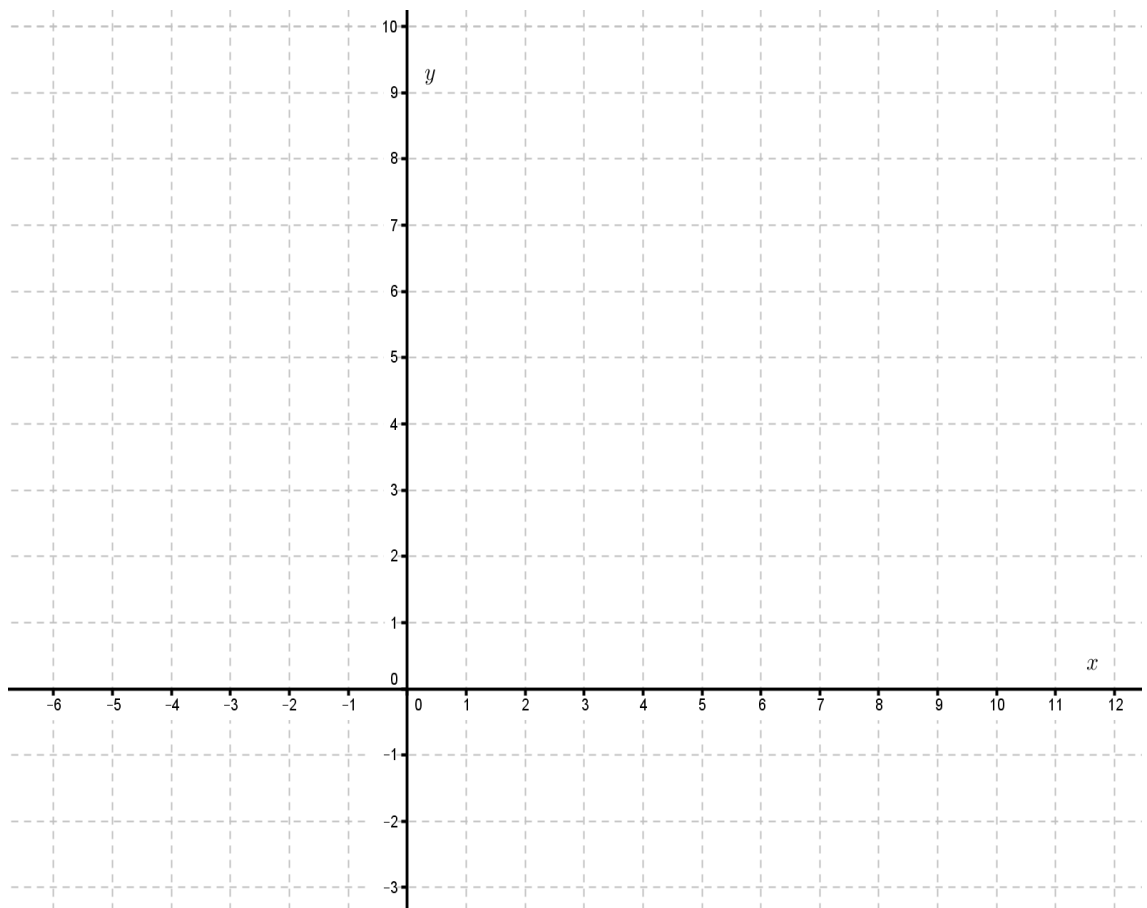
## 2.1. Pracovní list č. 1 na bodové funkce

Jméno, třída .....

Úkol č. 1

Funkce je zadána následujícími body:  $A=[5;1]$ ,  $B=[7;2]$ ,  $C=[8,4; 3,1]$ ,  $D=[9,7; 4,5]$ ,  $E=[9,5; 6,6]$ ,  $F=[8,7; 7,5]$ ,  $G=[7,5; 7,7]$ ,  $H=[6; 6,3]$ ,  $Ch=[5,3; 7,6]$ ,  $I=[4;8]$ ,  $J=[3; 7,3]$ ,  $K=[2,6; 6]$ ,  $L=[2,8; 4,5]$ ,  $M=[3,5; 3]$ . Zaneste tyto body do soustavy souřadnic  $Oxy$  a spojte je v pořadí abecedy. Pro úplnost útvaru spojte bod  $A$  s bodem  $M$ .

Napište, jaký útvar vznikne .....

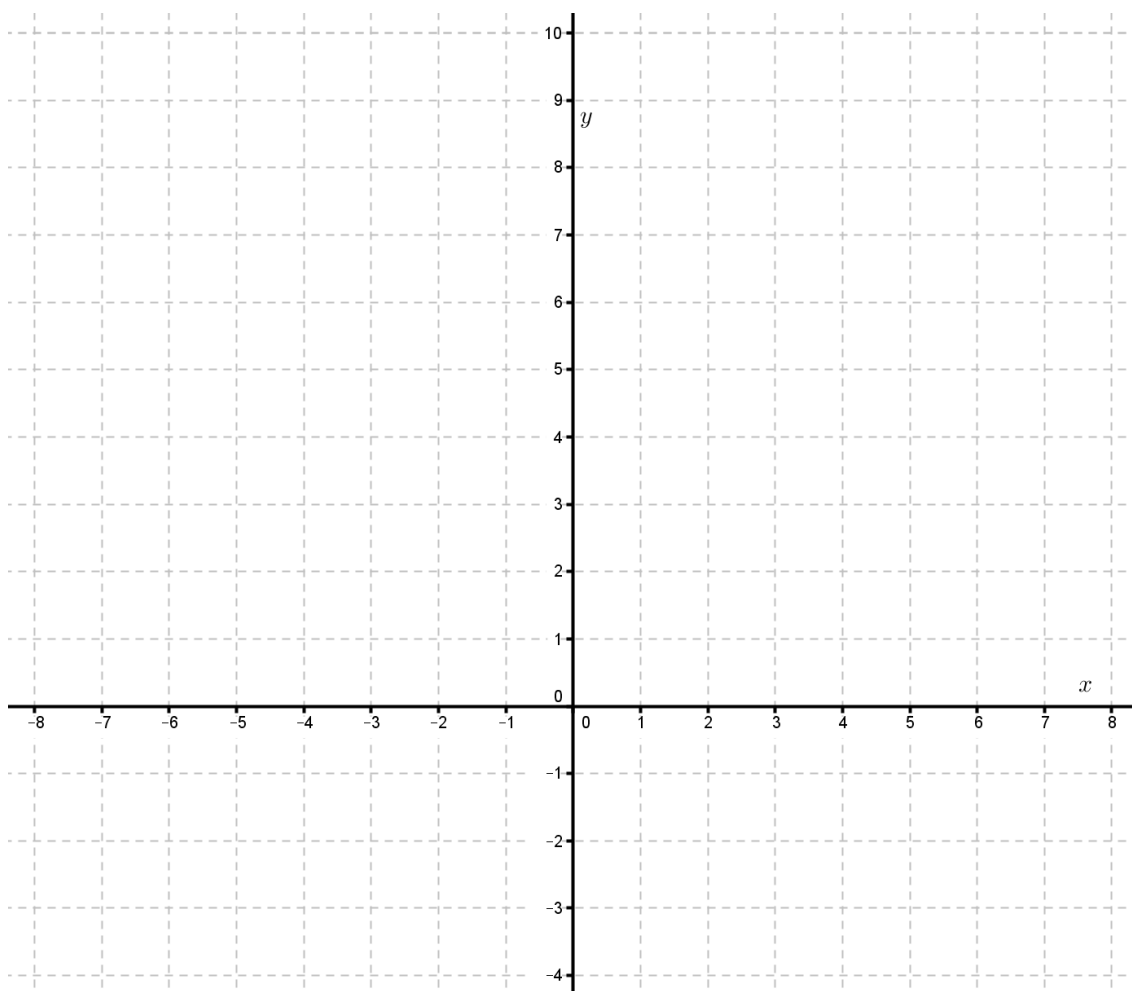




Úkol č. 2

Funkce je zadána následujícími body:  $A=[-2; -2,5]$ ,  $B=[-1,5; -1,5]$ ,  $C=[-1; -0,5]$ ,  $D=[-7; -0,5]$ ,  $E=[-1,6; 2]$ ,  $F=[-5; 2]$ ,  $G=[-0,9; 4]$ ,  $H=[-3,5; 4]$ ,  $Ch=[-0,7; 6]$ ,  $I=[-2,5; 6]$ ,  $J=[0; 8]$ ,  $K=[2,5; 6]$ ,  $L=[0,7; 6]$ ,  $M=[3,5; 4]$ ,  $N=[0,9; 4]$ ,  $O=[5; 2]$ ,  $P=[1,6; 2]$ ,  $Q=[7; -0,5]$ ,  $R=[1; -0,5]$ ,  $S=[1,5; -1,5]$ ,  $T=[2; -2,5]$ . Zaneste tyto body do soustavy souřadnic  $Oxy$  a spojte je v pořadí abecedy. Pro úplnost útvaru spojte bod  $A$  s bodem  $T$ .

Jaký obrázek vznikl? .....



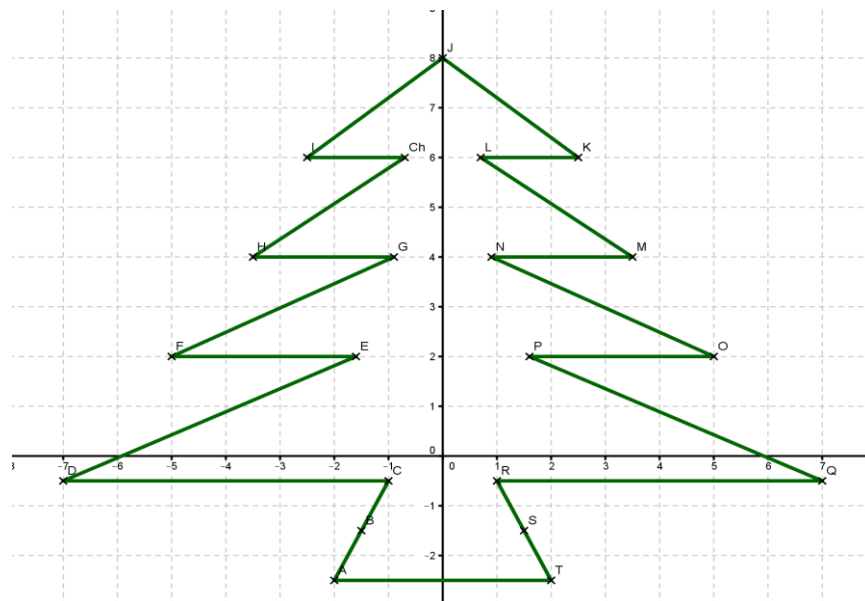
### 2.1.1. Řešení pracovního listu č. 1 na bodové funkce

Úkol č. 1: Po správném nanesení bodů a jejich spojení vznikne srdce.



Obr. 1: Řešení úkolu č. 1 v pracovním listě č. 1

Úkol č. 2: Když naneseme body do soustavy souřadnic  $Oxy$  a spojíme je, vznikne stroměček.



Obr. 2: Řešení úkolu č. 2 v pracovním listě č. 1

## 2.2. Pracovní list č. 2 na lineární funkce

Jméno, třída .....

Úkol č. 1

a) Sestrojte grafy funkcí, které jsou dané předpisem:

$$f_1: y = 1, D(f_1) = \langle 0; 5 \rangle,$$

$$f_4: y = -x+5, D(f_4) = \langle 0; 2 \rangle,$$

$$f_2: y = 5, D(f_2) = \langle 0; 5 \rangle,$$

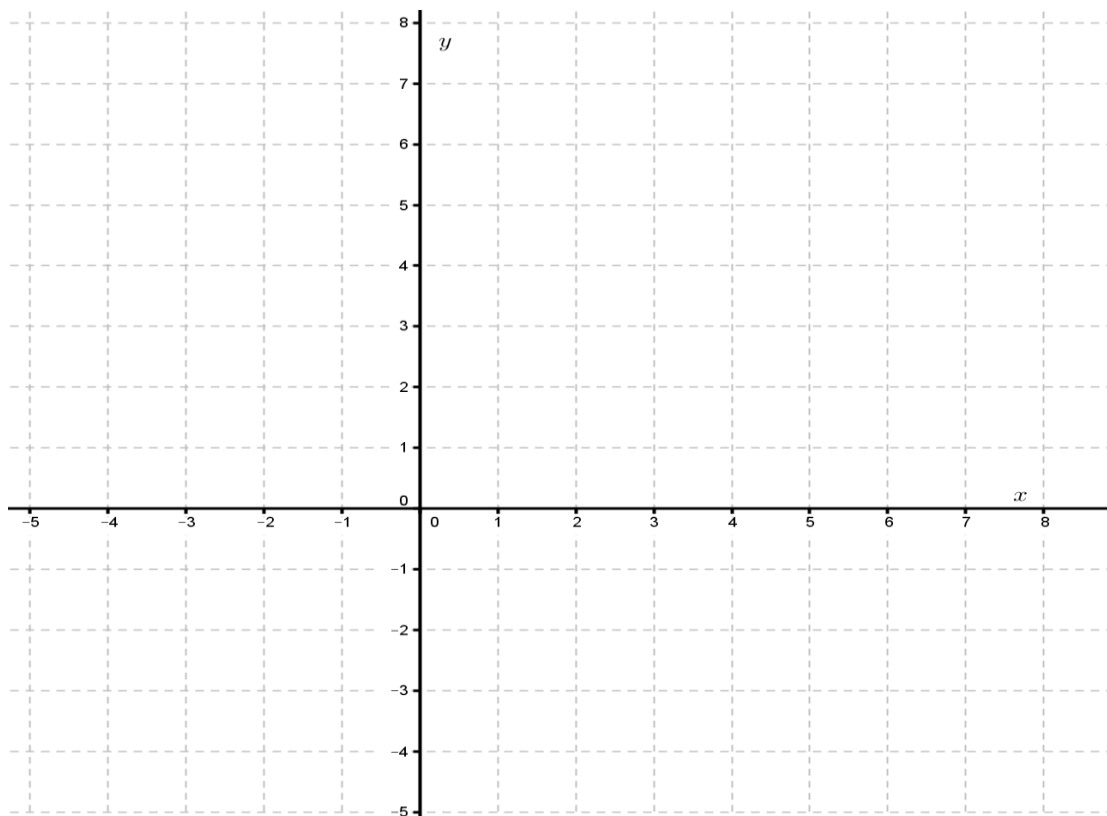
$$f_5: y = x+1, D(f_5) = \langle 0; 2 \rangle.$$

$$f_3: y = 3, D(f_3) = \langle 2; 5 \rangle,$$

b) Naneste tyto body:  $A=[0;1]$ ,  $B=[0;5]$ ,  $C=[5;1]$ ,  $D=[5;5]$ ,  $E=[2;3]$ ,  $F=[5;3]$ . Bod  $A$  spojte s bodem  $B$ , bod  $C$  spojte s bodem  $D$ .

c) Trojúhelník  $AEB$  vybarvěte modře, lichoběžník  $EFDB$  ponechte bílý, lichoběžník  $AEFC$  vybarvěte červeně.

d) Jaké zemi tento útvar patří? .....



Úkol č. 2

a) Sestrojte grafy funkcí, které jsou dané předpisem:

$$f_1: y = x+3, D(f_1) = \langle -3; 1 \rangle,$$

$$f_4: y = x-3, D(f_4) = \langle 0; 4 \rangle,$$

$$f_2: y = x-6, D(f_2) = \langle 1,5; 5,5 \rangle,$$

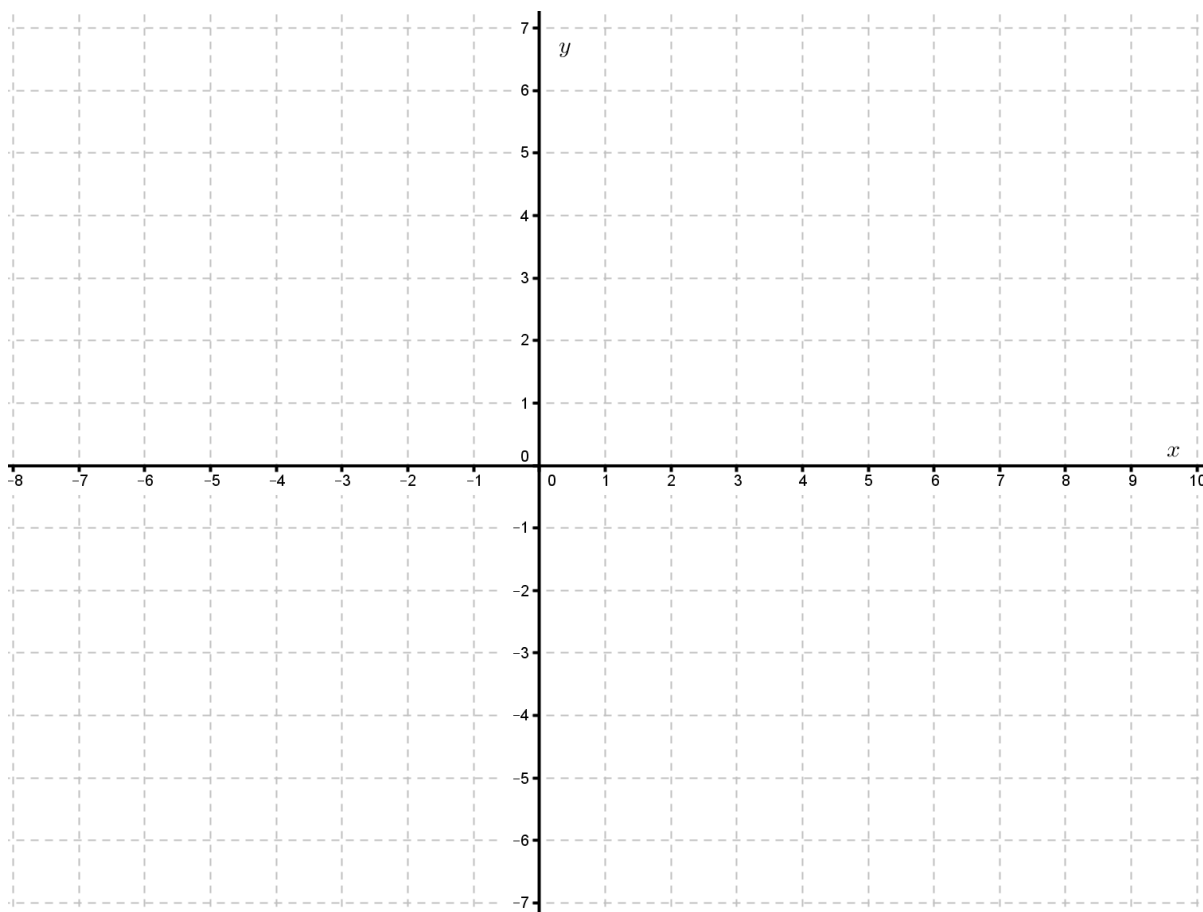
$$f_5: y = -x+5, D(f_5) = \langle 1; 5,5 \rangle,$$

$$f_3: y = x, D(f_3) = \langle -1,5; 2,5 \rangle,$$

$$f_6: y = -x-3, D(f_6) = \langle -3; 1,5 \rangle.$$

b) Čtyřúhelník  $ABCD$ , kde  $A=[-3;0]$ ,  $B=[-1,5; -1,5]$ ,  $C=[2,5; 2,5]$ ,  $D=[1;4]$ , vybarvěte modře. Čtyřúhelník  $BEFC$ , kde  $E=[0;-3]$ ,  $F=[4;1]$ , ponechte bílý. Čtyřúhelník  $EGHF$ , kde  $G=[1,5; -4,5]$ ,  $H=[5,5; -0,5]$ , vybarvěte červeně.

c) Poznali jste, které zemi patří tento útvar? Jméno této země je .....  
(náповěda: v této zemi najdete např. Eiffelovou věž).



Úkol č. 3

a) Sestrojte grafy funkcí, které jsou dané předpisem:

$$f_1: y = x - 3, D(f_1) = \langle 3; 7 \rangle,$$

$$f_4: y = -x + 12, D(f_4) = \langle 4; 7 \rangle,$$

$$f_2: y = -x + 6, D(f_2) = \langle 0; 3 \rangle,$$

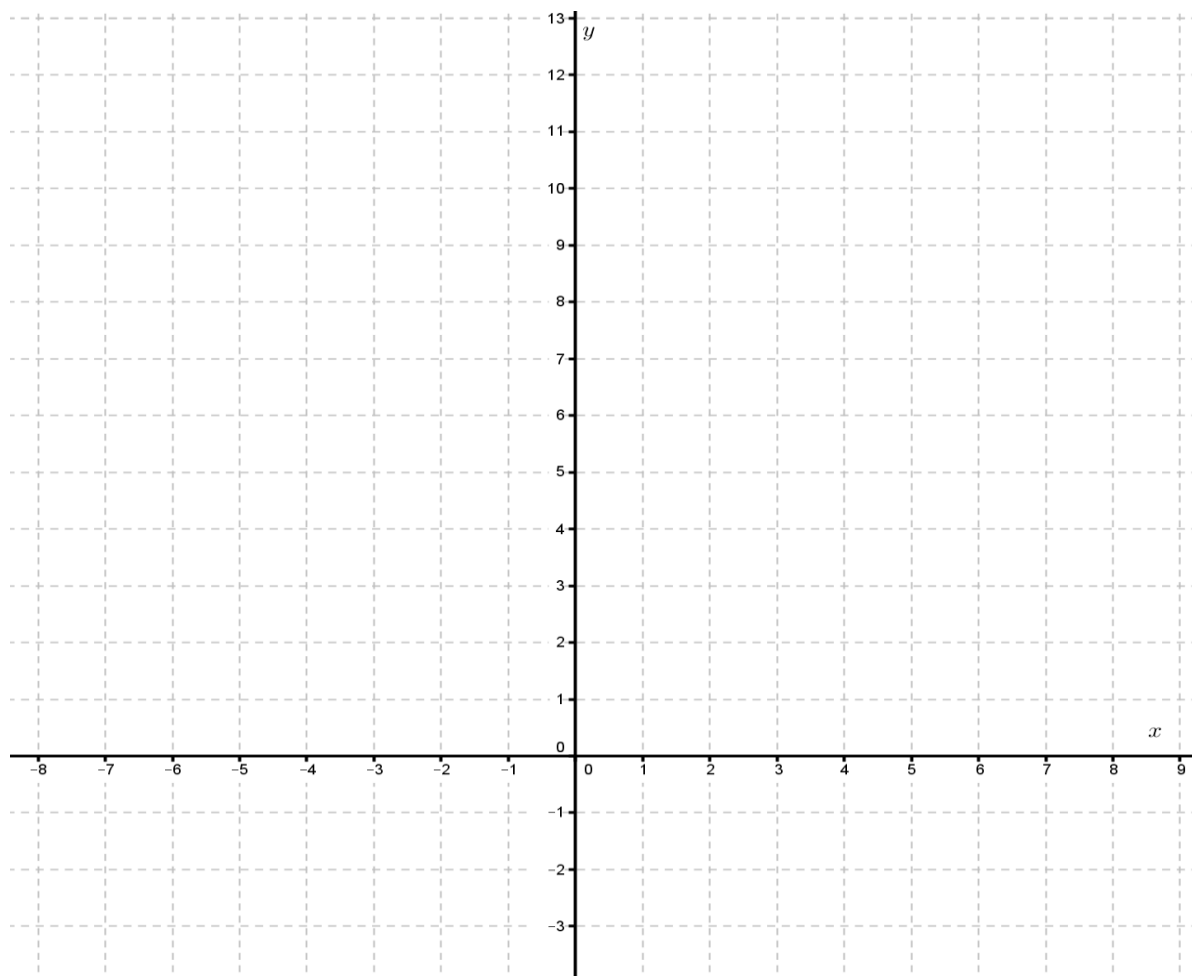
$$f_5: y = x + 4, D(f_5) = \langle 0; 4 \rangle,$$

$$f_3: y = x, D(f_3) = \langle 2; 6 \rangle,$$

$$f_6: y = x + 5, D(f_6) = \langle 1; 5 \rangle.$$

b) Sestrojte body  $A=[0;4]$ ,  $B=[1;3]$ ,  $C=[5;7]$ ,  $D=[4;8]$ ,  $E=[2;2]$ ,  $F=[6;6]$ ,  $G=[3;1]$ ,  $H=[7;5]$ . Vzniklé čtyřúhelníky vyšrafujte takto:  $ABCD$  – černě,  $BEFC$  – červeně,  $EGHF$  – žlutě.

c) Jaké zemi patří výsledný útvar? ..... (náповěда: tato země je jedna ze sousedních zemí České republiky).



Úkol č. 4

a) Sestrojte grafy funkcí, které jsou dané předpisem:

$$f_1: y = x + \frac{5}{10}, D(f_1) = \langle -1; 1 \rangle,$$

$$f_4: y = -x + \frac{5}{2}, D(f_4) = \langle -2; 1 \rangle,$$

$$f_2: y = -x - \frac{6}{4}, D(f_2) = \langle -4; -1 \rangle,$$

$$f_5: y = x + \frac{36}{8}, D(f_5) = \langle -3; -1 \rangle,$$

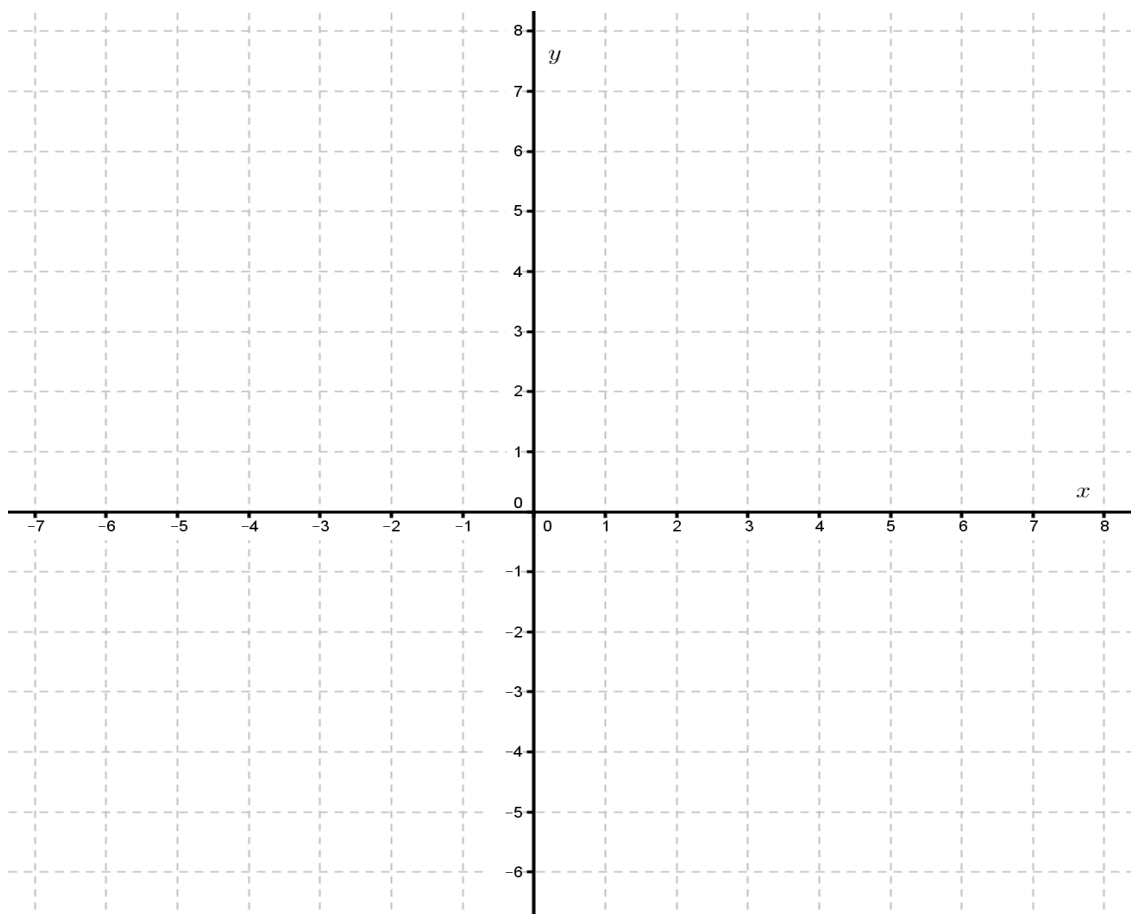
$$f_3: y = x + \frac{20}{4}, D(f_3) = \langle -4; -2 \rangle,$$

$$f_6: y = x + \frac{5}{2}, D(f_6) = \langle -2; 0 \rangle.$$

Poznámka: Pokud to jde, zlomek zkrat'te.

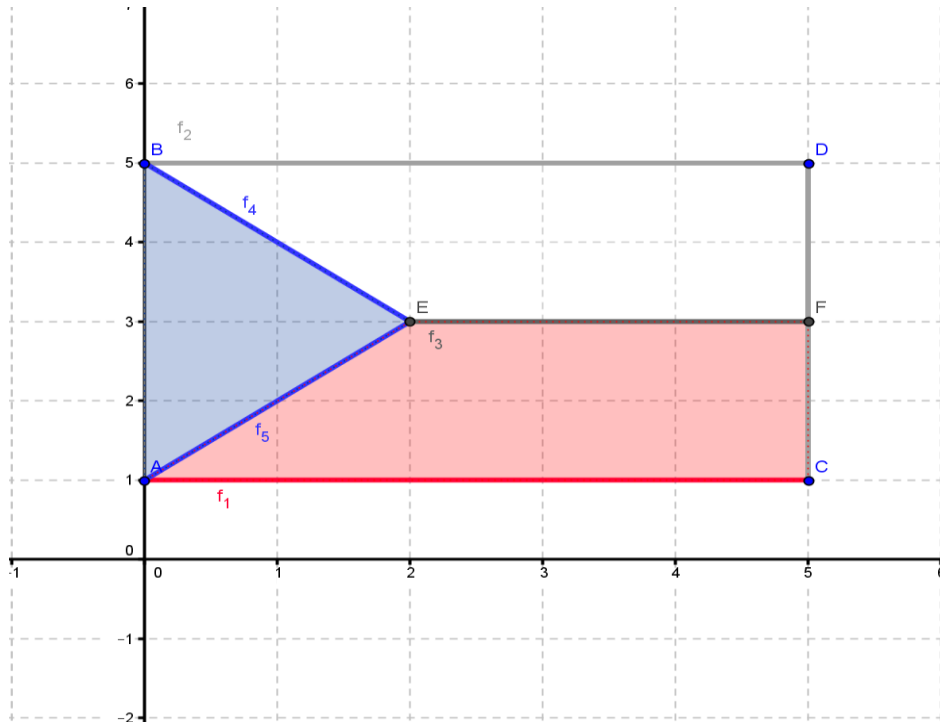
b) Čtyřúhelník  $ABCD$ , kde  $A=[-4; 2,5]$ ,  $B=[-3; 1,5]$ ,  $C=[-1; 3,5]$ ,  $D=[-2; 4,5]$ , vybarv'ete zelen'ě. Čtyřúhelník  $BEFC$ , kde  $E=[-2; 0,5]$ ,  $F=[0; 2,5]$ , ponechte bílý. Čtyřúhelník  $EGHF$ , kde  $G=[-1; -0,5]$ ,  $H=[1; 1,5,5]$ , vybarv'ete červen'ě.

c) Poznali jste, které zemi patří tento útvar? .....(nápověda: Benátky jsou jedním z měst této země).



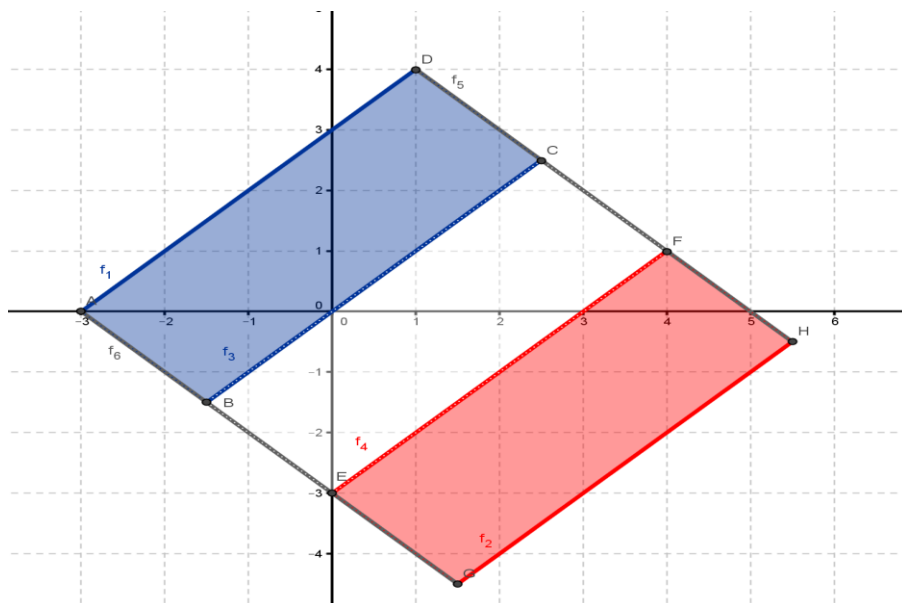
### 2.2.1. Řešení pracovního listu č. 2 na lineární funkce

Úkol č. 1: Výsledkem zadané úlohy je česká vlajka.



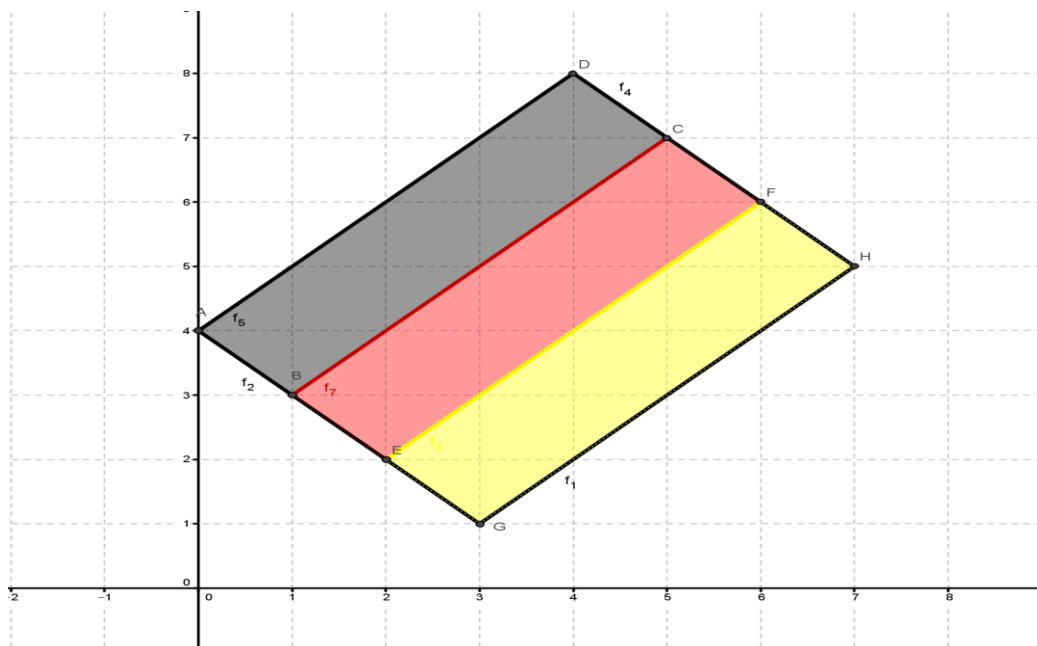
Obr. 3: Řešení úkolu č. 1 v pracovním listě č. 2

Úkol č. 2: Po splnění úloh a), b), by měla být správná odpověď na úlohu c) Francie.



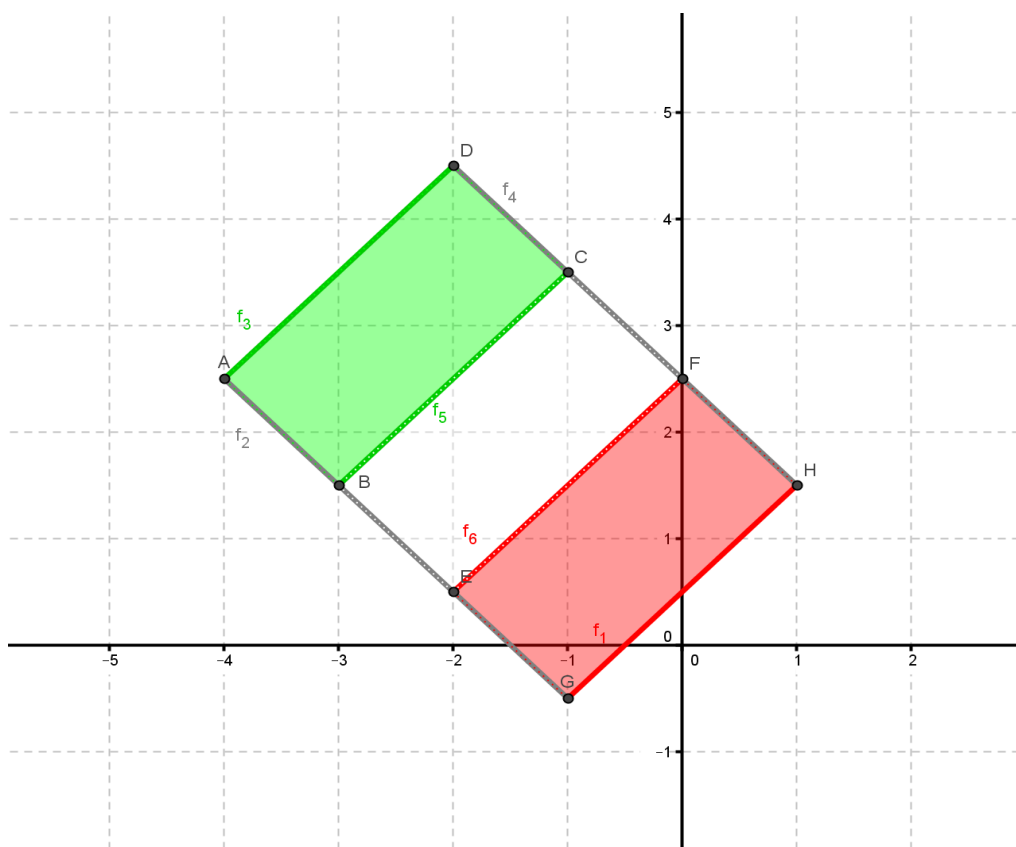
Obr. 4: Řešení úkolu č. 2 v pracovním listě č. 2

Úkol č. 3: Výsledkem úlohy c) je Německo.



Obr. 5: Řešení úkolu č. 3 v pracovním listě č. 2

Úkol č. 4: Tato vlajka patří Itálii.



Obr. 6: Řešení úkolu č. 4 v pracovním listě č. 2



### 2.3. Pracovní list č. 3 na lineární funkci zakreslené do mapy

Jméno, třída .....

Úkol č. 1

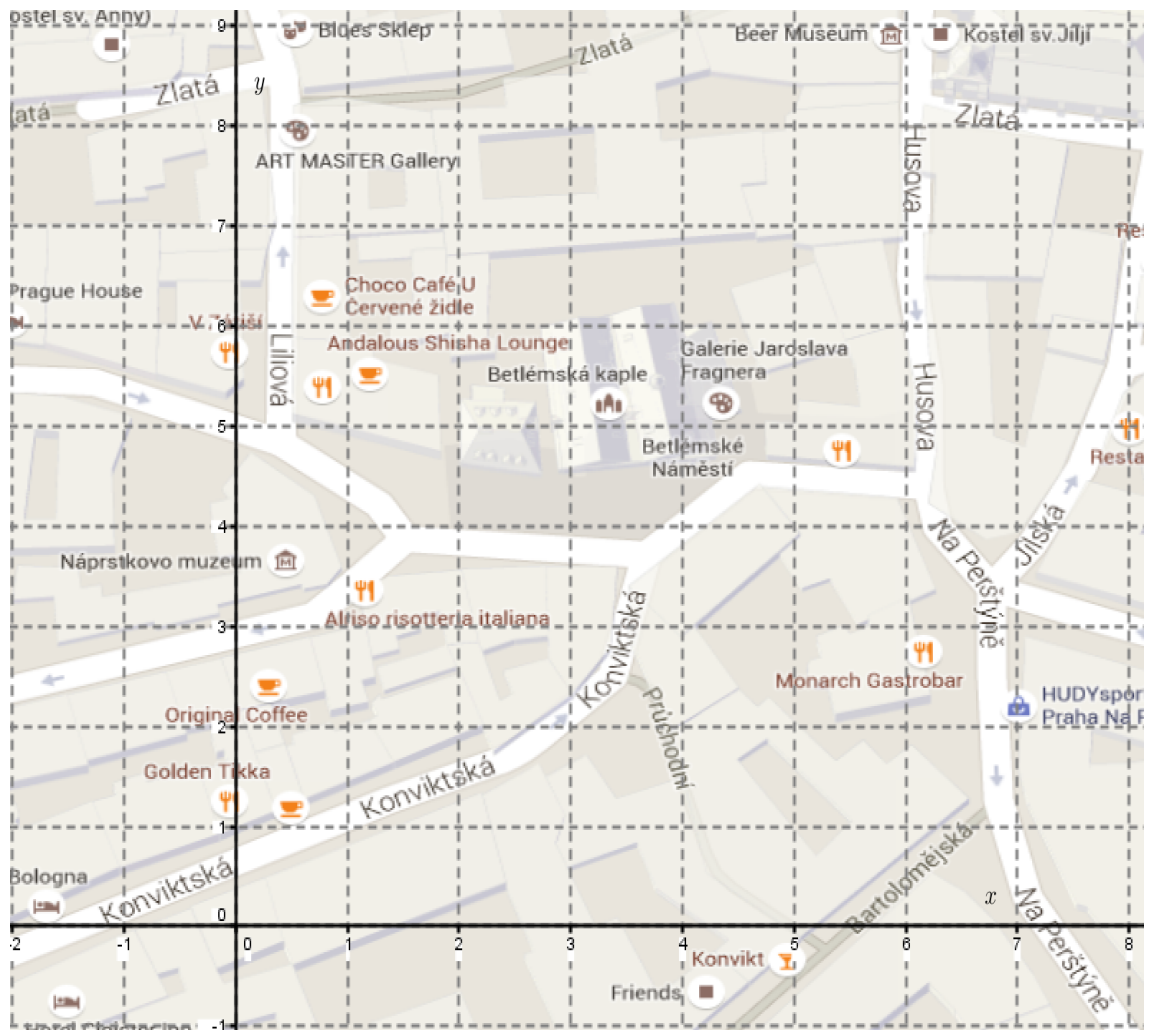
Sestrojte grafy funkcí, které jsou dané předpisem:

$$f_1: y = x + 1, D(f_1) = \langle 0; 6,5 \rangle,$$

$$f_2: y = 3x + 1, D(f_2) = \langle 0; 1 \rangle,$$

$$f_3: y = \frac{1}{3}x + 1, D(f_3) = \langle 0; 3 \rangle.$$

Na jaké ulici se nachází? .....



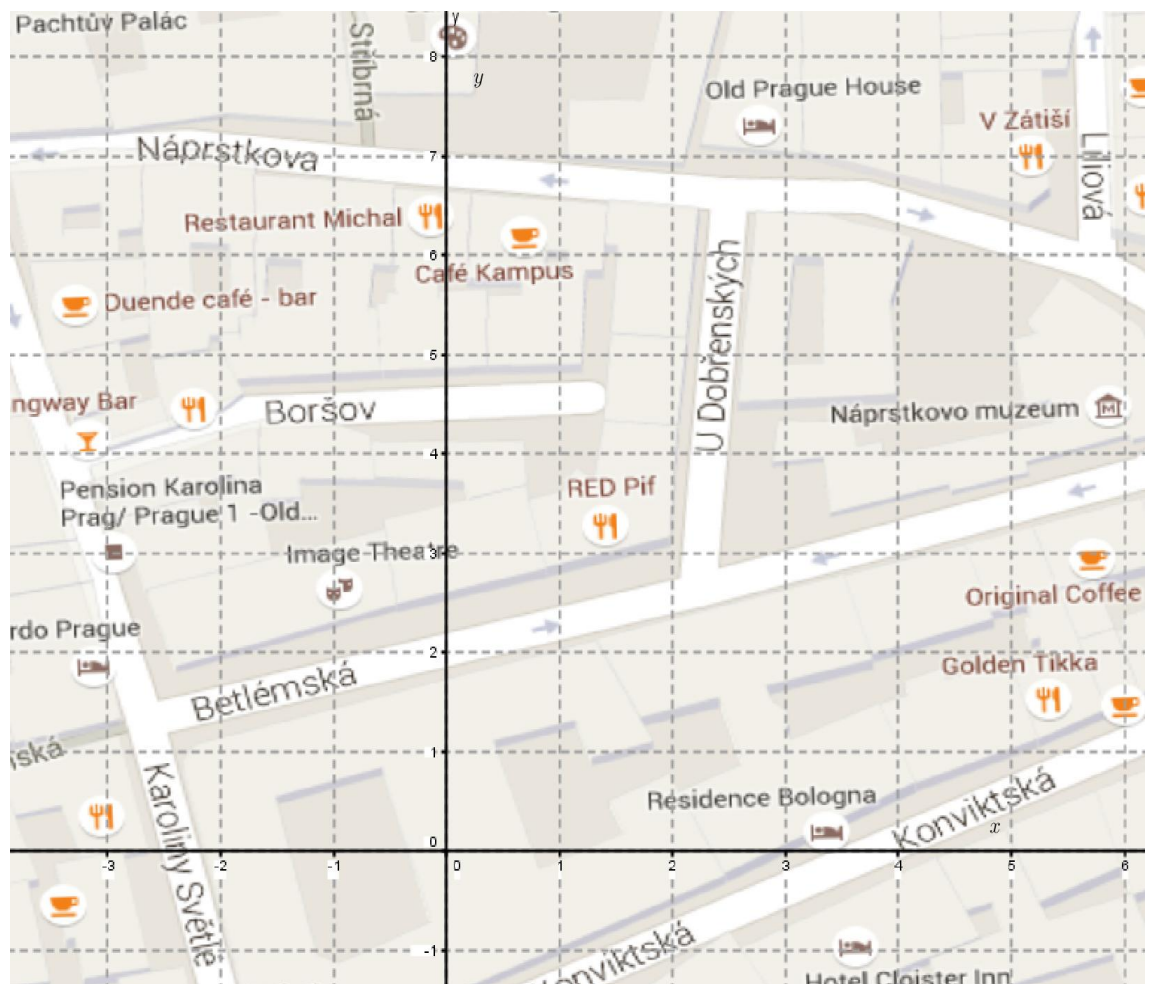
Úkol č. 2

a) Načrtněte graf funkce:

$$f: y = -x + 5, D(f) = \langle -2; 4,5 \rangle.$$

b) Naneste tyto body:  $A = [-3; 5]$ ,  $B = [-2; 7]$ ,  $C = [0; 7,5]$ . Spojte bod  $A$  a bod  $C$  s bodem  $B$ .

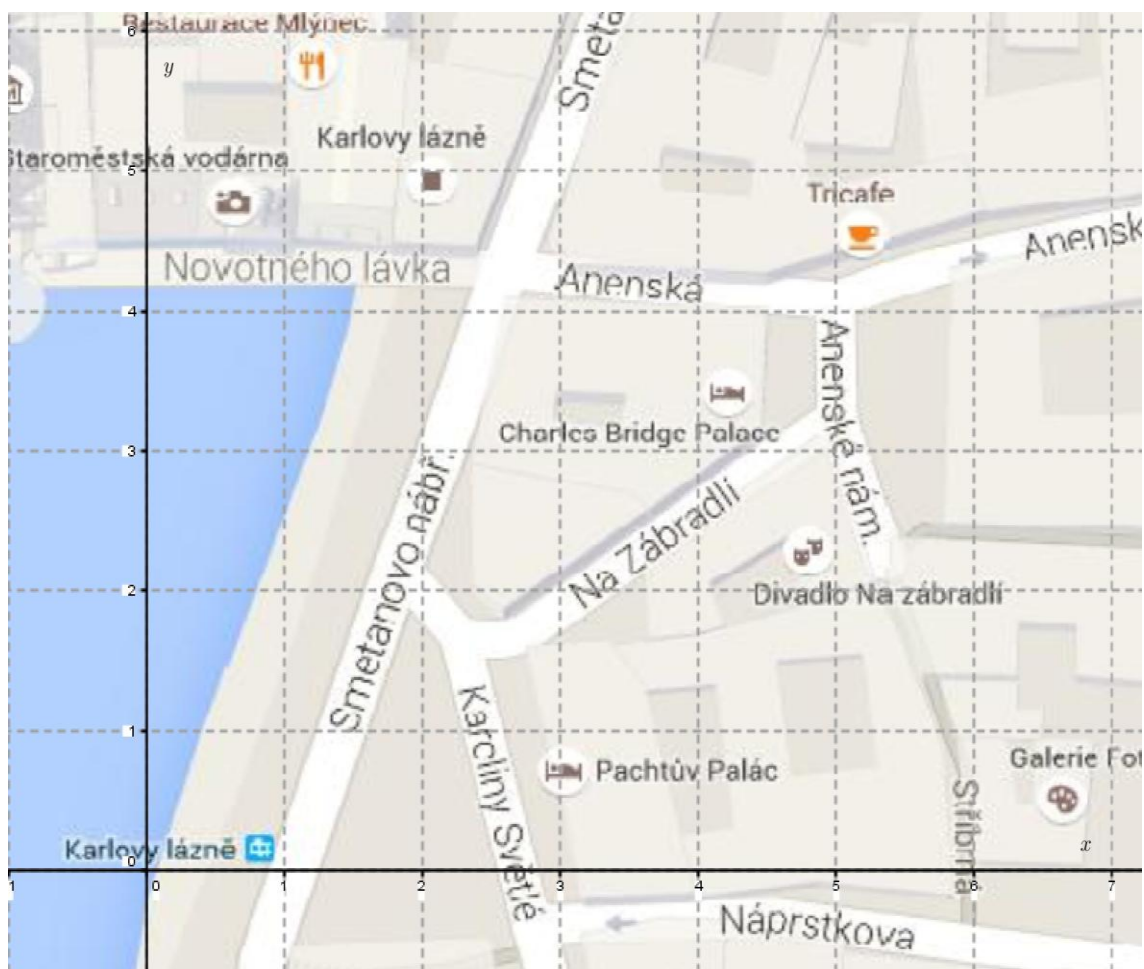
Napiš jméno ulice, kde ses ocitl/a: .....



### Úkol č. 3

Nacházíte se v bodě  $A=[5;0]$ , který značí start na ulici ..... Po spojení s bodem  $B=[5;2]$  a následnému přesunu, jste u budovy ..... Když sestrojíte graf funkce  $f_1: y = 2$ ,  $D(f_1) = \langle 3; 5 \rangle$  a nanese bod  $C=[3;2]$  přesunete se do ulice jménem ..... Po sestrojení grafů funkcí  $f_2: y = x+1$ ,  $D(f_2) = \langle 2; 3 \rangle$ ,  $f_3: y = -x+7$ ,  $D(f_3) = \langle 3; 4 \rangle$ , naneste cílový bod  $D=[3;4]$ , který spojte s bodem  $C$ .

Jméno ulice v cíli je .....



Úkol č. 4

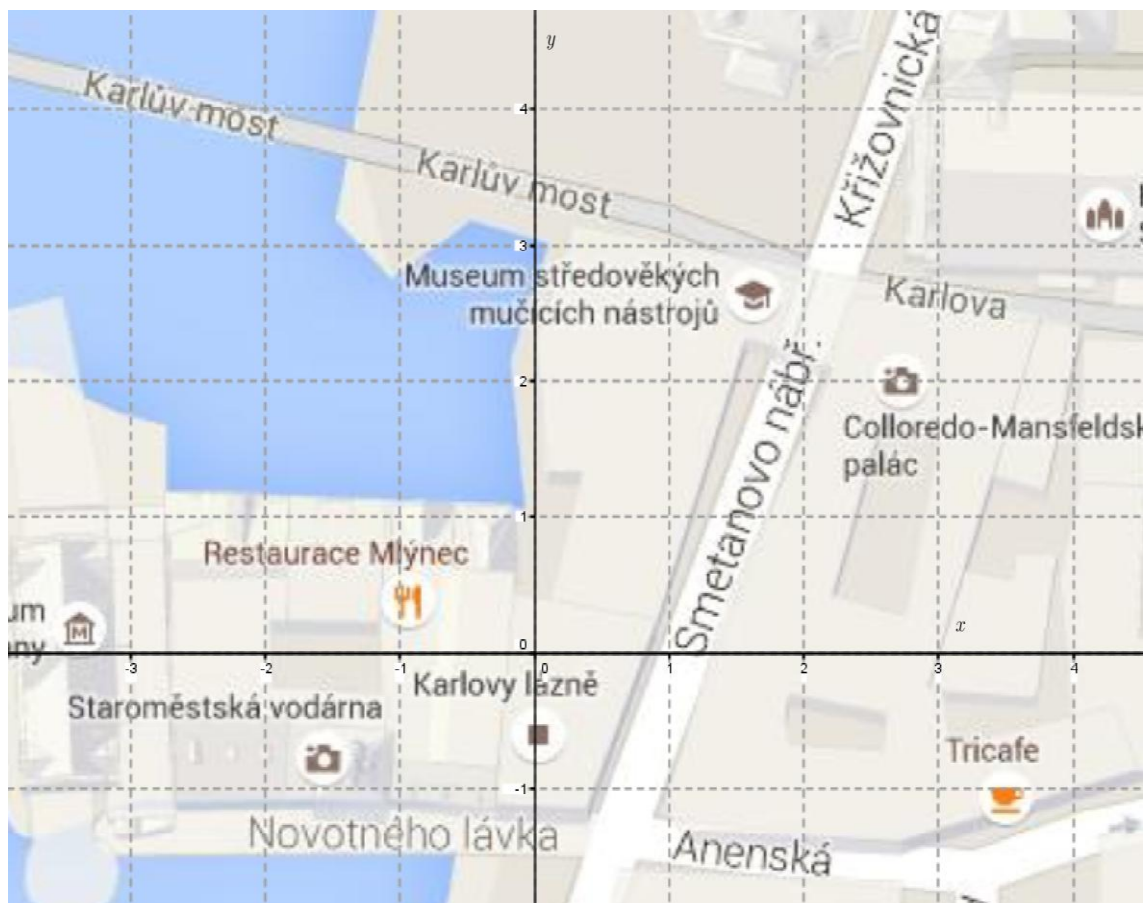
a) Sestrojte grafy funkcí, které jsou dané předpisem:

$$f_1: y = -x + 1, D(f_1) = \langle -3; 2 \rangle,$$

$$f_2: y = 4, D(f_2) = \langle -3; -2 \rangle.$$

b) Naneste tyto body a spojte je:  $A = [-3; 3]$ ,  $B = [-3; 4]$ .

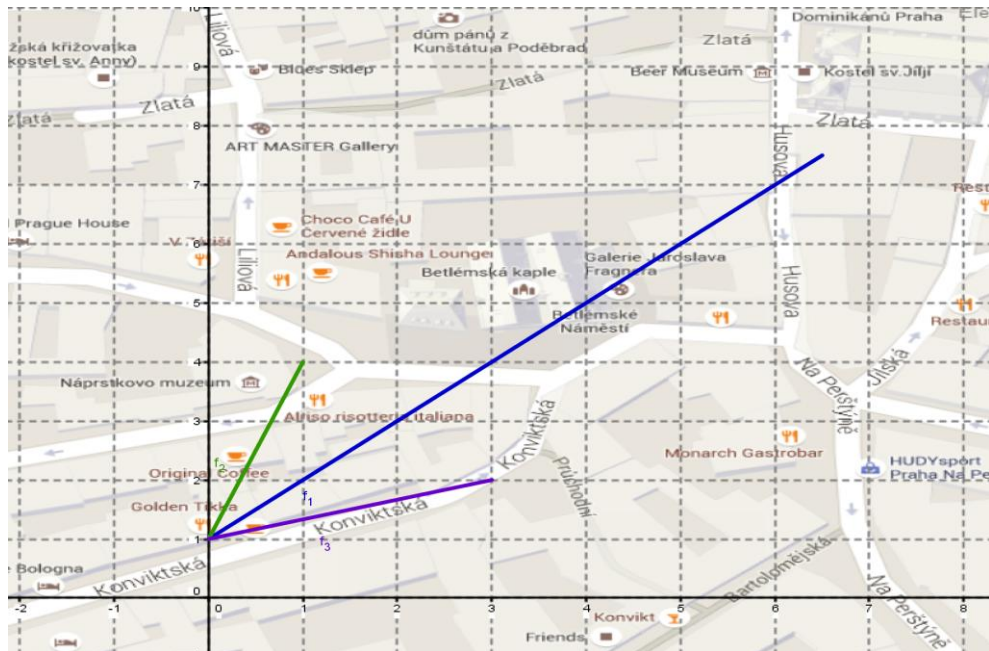
Nacházíš se na ..... Víš, ve kterém městě se nacházíš? Město se nazývá .....





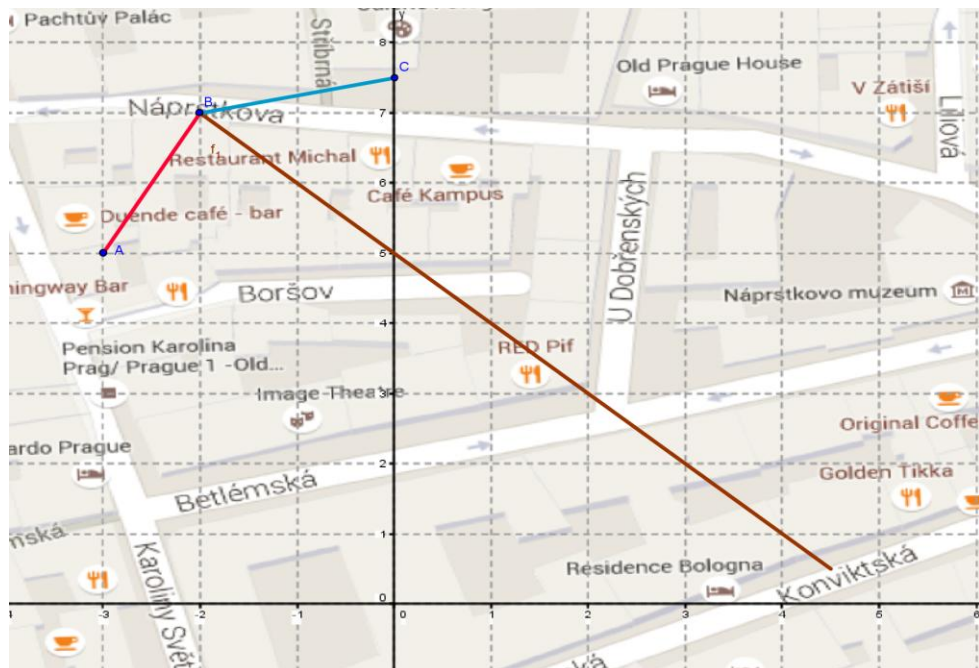
### 2.3.1. Řešení pracovního listu č. 3 na lineární funkce zakreslené do mapy

Úkol č. 1: Po správném sestrojení grafů ukazuje šipka na Konviktskou ulici.



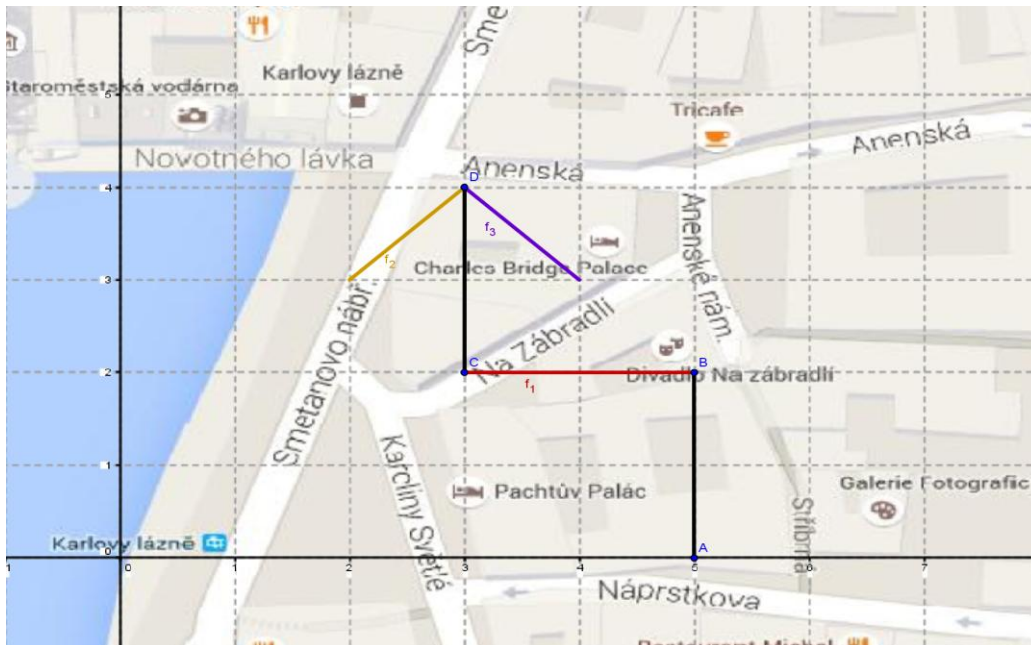
Obr. 7: Řešení úkolu č. 1 v pracovním listě č. 3

Úkol č. 2: Po splnění úkolu, jméno správné ulice je Náprstkova.



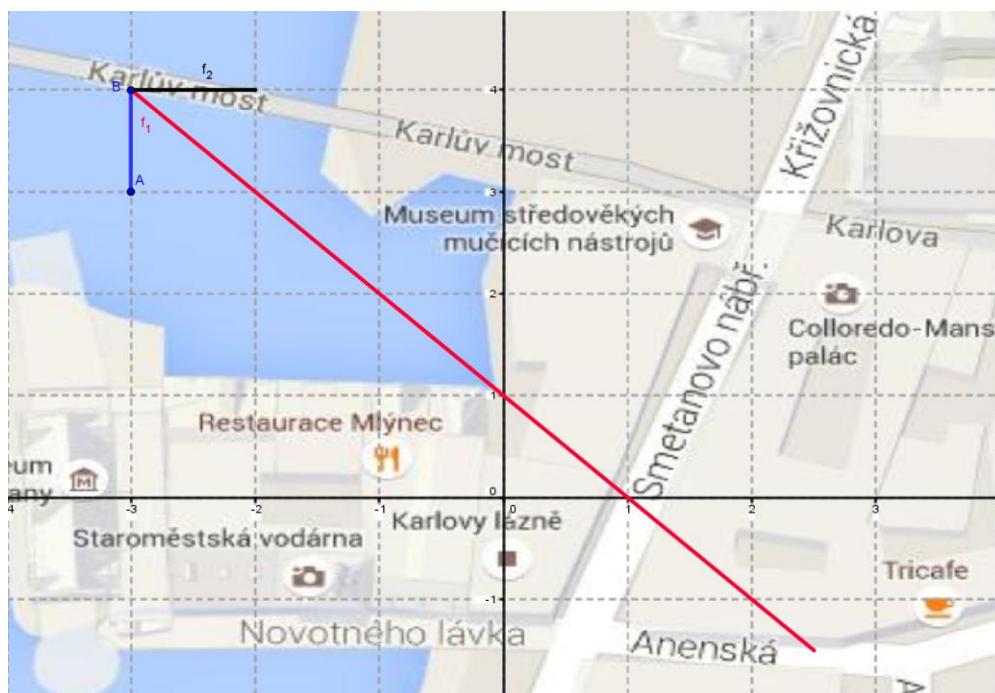
Obr. 8: Řešení úkolu č. 2 v pracovním listě č. 3

Úkol č. 3: Start je na ulici Náprstkova. Po sestrojení bodu  $B$  a přesunu je tato budova divadlo Na zábradlí. Následně po správném splnění zadání, je jméno ulice Na Zábradlí. Cíl je v ulici Anenská.



Obr. 9: Řešení úkolu č. 3 v pracovním listě č. 3

Úkol č. 4: Správná odpověď je Karlův most, který se nachází v Praze.



Obr. 10: Řešení úkolu č. 4 v pracovním listě č. 3

## 2.4. Pracovní list č. 4 na lineární funkce

Jméno, třída .....

Úkol č. 1

a) Sestrojte grafy funkcí, které jsou dané předpisem:

$$f_1: y = 0, D(f_1) = \langle 1; 9 \rangle,$$

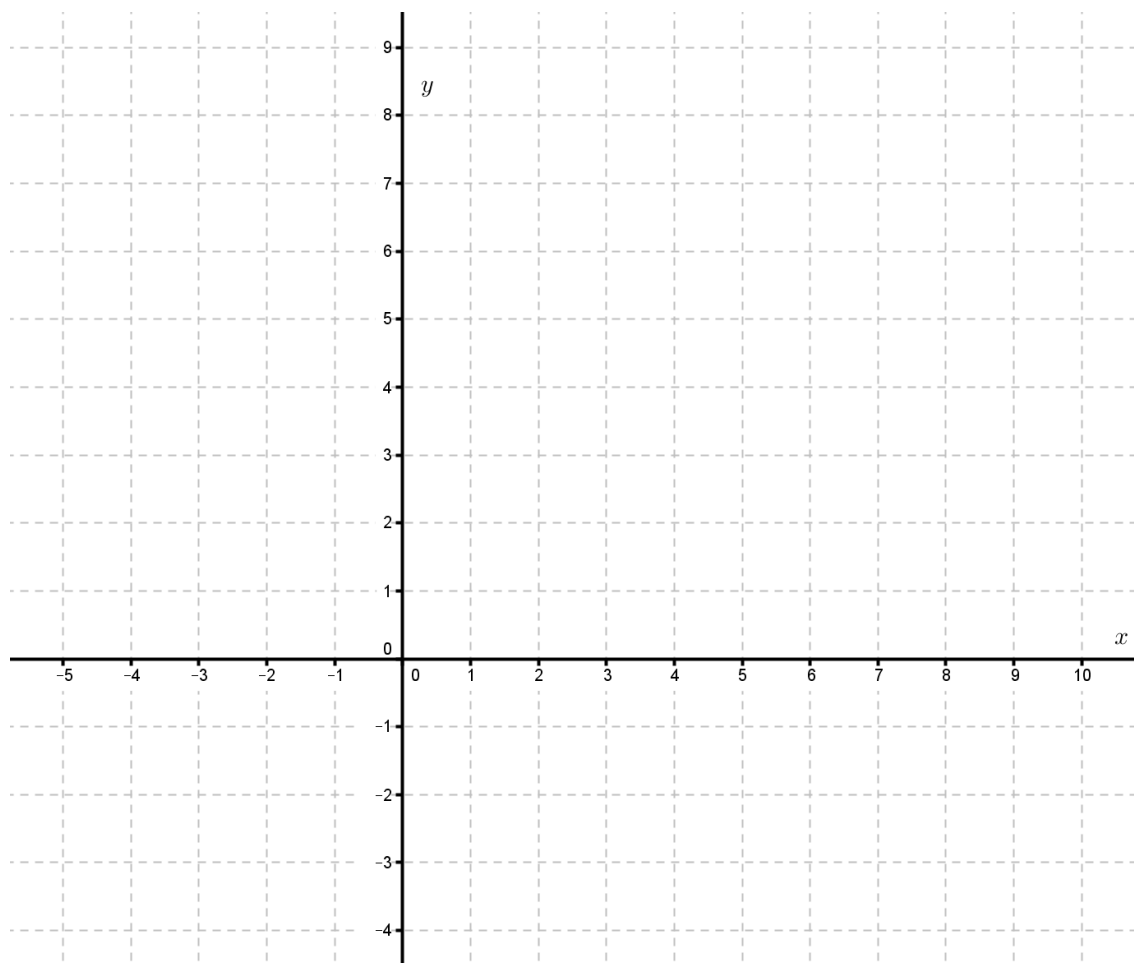
$$f_2: y = 4, D(f_2) = \langle 1; 9 \rangle,$$

$$f_3: y = x+3, D(f_3) = \langle 1; 5 \rangle,$$

$$f_4: y = -x+13, D(f_4) = \langle 5; 9 \rangle.$$

b) Spojte bod  $A=[1;0]$  s bodem  $B=[1;4]$  a bod  $C=[9;0]$  s bodem  $D=[9;4]$ .

c) Pojmenujte vzniklý útvar: .....



Úkol č. 2

a) Sestrojte grafy funkcí, které jsou dané předpisem:

$$f_1: y = -2, D(f_1) = \langle 2; 8 \rangle,$$

$$f_4: y = x-10, D(f_4) = \langle 5; 8 \rangle,$$

$$f_2: y = -6, D(f_2) = \langle 2; 8 \rangle,$$

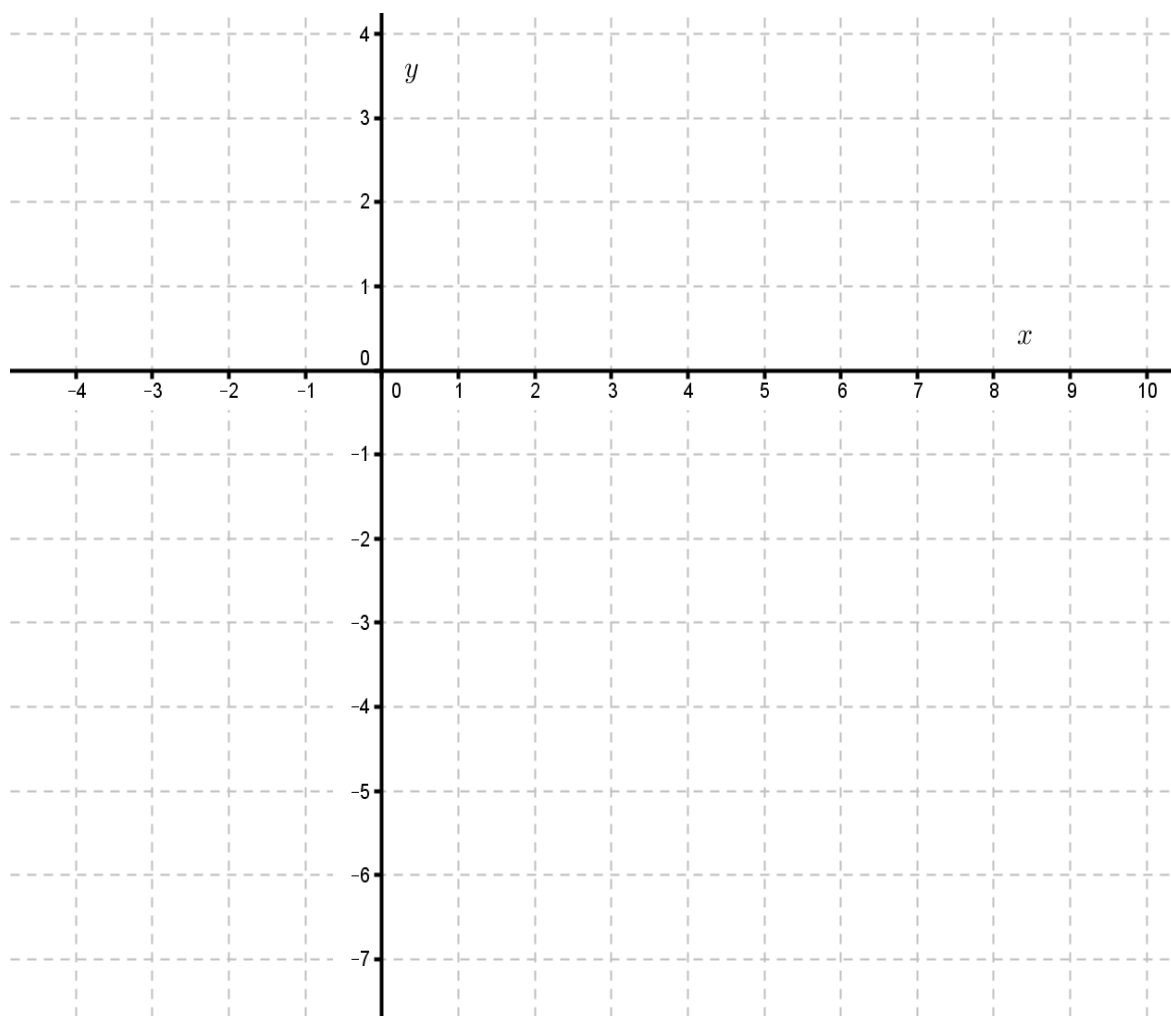
$$f_5: y = x-8, D(f_5) = \langle 2; 4 \rangle,$$

$$f_3: y = -x, D(f_3) = \langle 2; 5 \rangle,$$

$$f_6: y = -x+2, D(f_6) = \langle 6; 8 \rangle.$$

b) Naneste tyto body:  $A=[2;-6]$ ,  $B=[2;-2]$ ,  $C=[8;-6]$ ,  $D=[8;-2]$ . Bod  $A$  spojte s bodem  $B$ , bod  $C$  spojte s bodem  $D$ .

c) Pojmenujte vzniklý útvar: .....





Úkol č. 3

a) Sestrojte grafy funkcí, které jsou dané předpisem:

$$f_1: y = 2, D(f_1) = \langle 1; 3 \rangle,$$

$$f_5: y = x-1, D(f_5) = \langle 7; 9 \rangle,$$

$$f_2: y = 4, D(f_2) = \langle 1; 3 \rangle,$$

$$f_6: y = 3, D(f_6) = \langle 7; 9 \rangle,$$

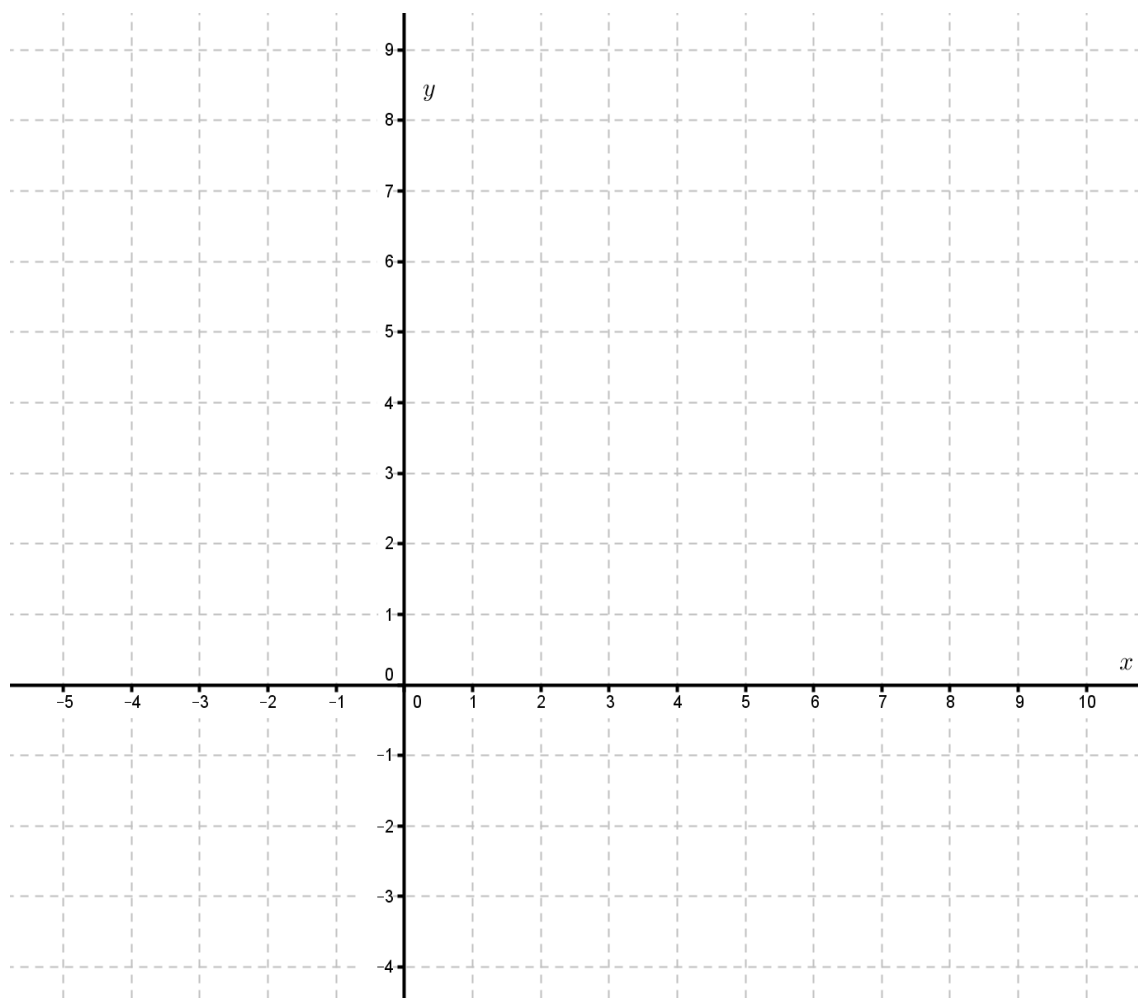
$$f_3: y = x+1, D(f_3) = \langle 3; 6 \rangle,$$

$$f_7: y = -x+7, D(f_7) = \langle 7; 9 \rangle.$$

$$f_4: y = -x+5, D(f_4) = \langle 3; 6 \rangle,$$

b) Naneste tyto body:  $A=[1;2]$ ,  $B=[1;4]$ ,  $C=[3;2]$ ,  $D=[3;4]$ ,  $E=[6;-1]$ ,  $F=[6;7]$ . Bod  $A$  spojte s bodem  $B$ , bod  $C$  spojte s bodem  $D$ , bod  $E$  spojte s bodem  $F$ .

c) Pojmenujte vzniklý útvar: .....



Úkol č. 4

a) Sestrojte grafy funkcí, které jsou dané předpisem:

$$f_1: y = 1, D(f_1) = \langle 0; 4 \rangle,$$

$$f_5: y = 3, D(f_5) = \langle 2; 6 \rangle,$$

$$f_2: y = 6, D(f_2) = \langle 0; 4 \rangle,$$

$$f_6: y = x+2, D(f_6) = \langle 4; 6 \rangle,$$

$$f_3: y = x-3, D(f_3) = \langle 4; 6 \rangle,$$

$$f_7: y = 8, D(f_7) = \langle 2; 6 \rangle,$$

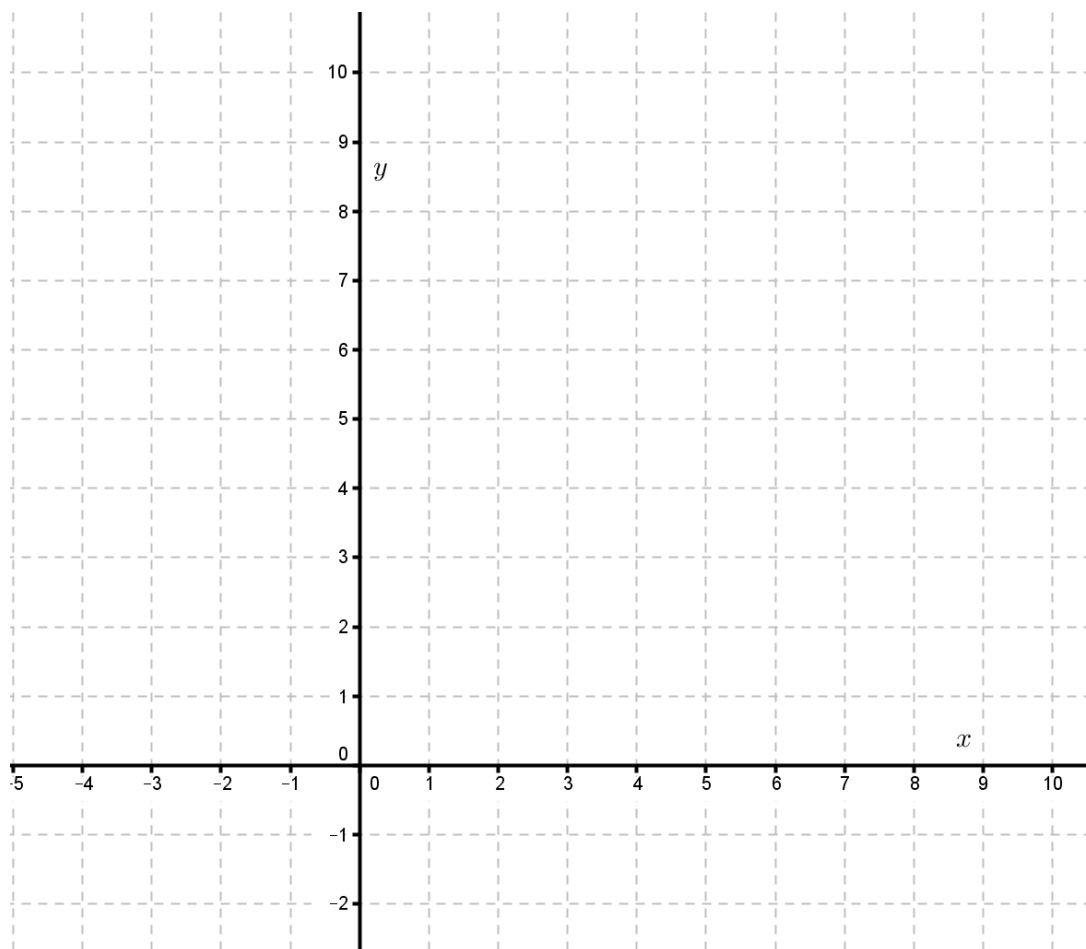
$$f_4: y = x+1, D(f_4) = \langle 0; 2 \rangle,$$

$$f_8: y = x+6, D(f_8) = \langle 0; 2 \rangle.$$

Poznámka: funkce  $f_4$  a  $f_5$  sestrojte čárkovaně.

b) Naneste tyto body:  $A=[0;1]$ ,  $B=[4;1]$ ,  $C=[2;3]$ ,  $D=[6;3]$ ,  $E=[0;6]$ ,  $F=[4;6]$ ,  $G=[2;8]$ ,  $H=[6;8]$ . Spojte je úsečkou v následujícím pořadí: Bod  $A$  s bodem  $E$ , bod  $B$  s bodem  $F$  a bod  $D$  s bodem  $H$ . Bod  $C$  s bodem  $G$  spojte čárkovanou úsečkou.

c) Pojmenujte vzniklý útvar: .....



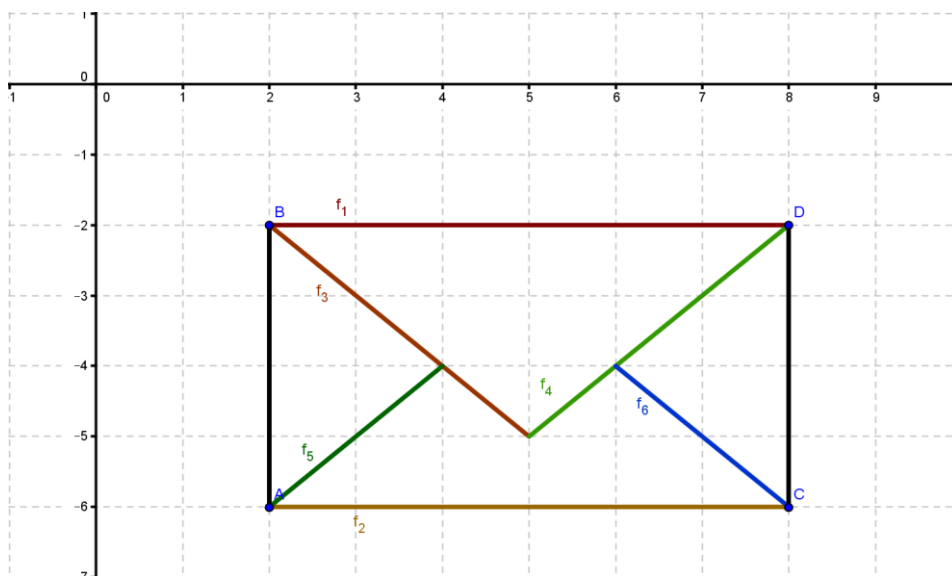
### 2.4.1. Řešení pracovního listu č. 4 na lineární funkce

Úkol č. 1: Správná odpověď je domek.



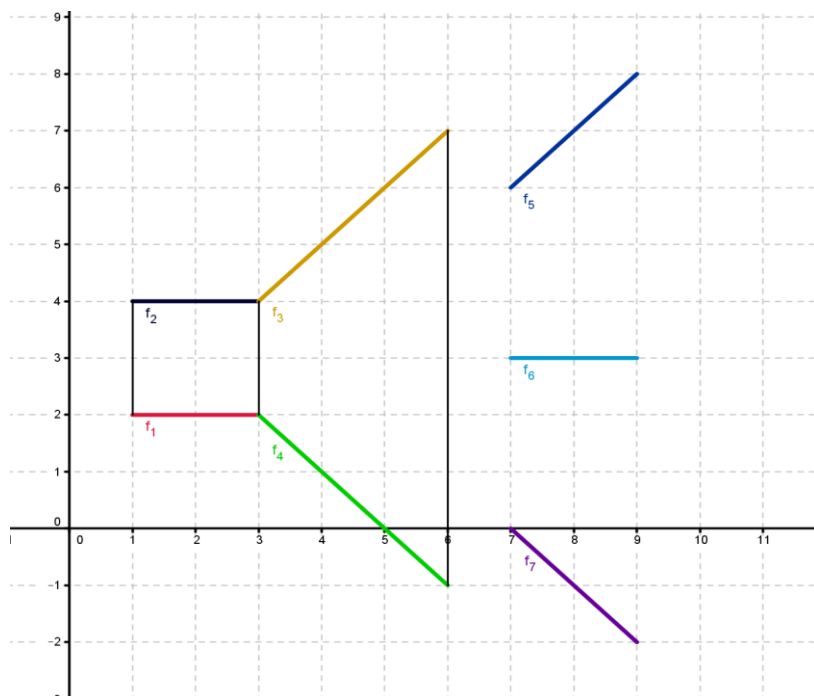
Obr. 11: Řešení úkolu č. 1 v pracovním listě č. 4

Úkol č. 2: Po sestrojení grafů a nanesení bodů vznikne obálka.



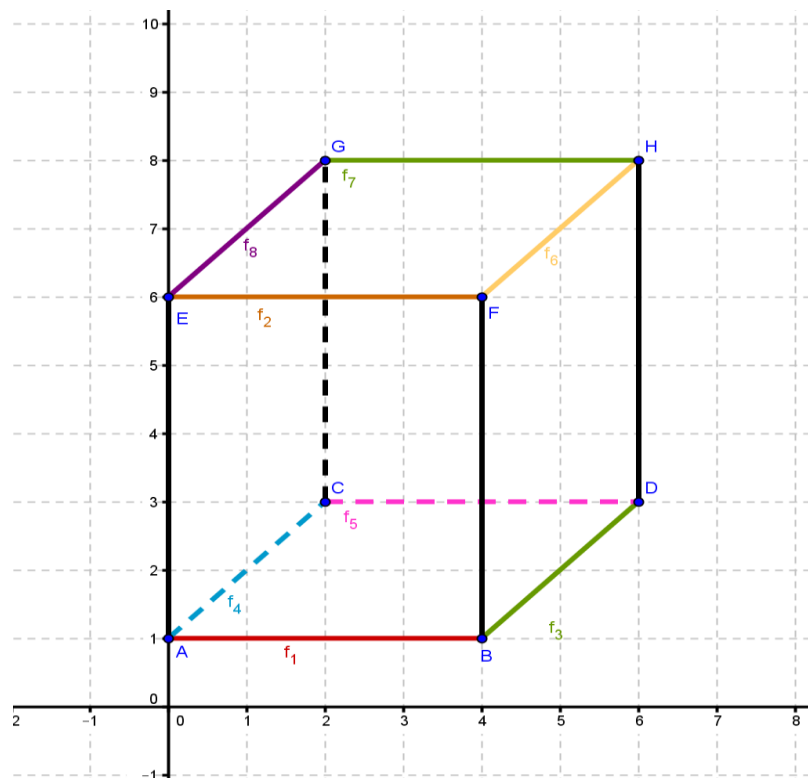
Obr. 12: Řešení úkolu č. 2 v pracovním listě č. 4

Úkol č. 3: Vzniklý útvar je amplion.



Obr. 13: Řešení úkolu č. 3 v pracovním listě č. 4

Úkol č. 4: Správný název tohoto útvaru je kvádr.



Obr. 14: Řešení úkolu č. 4 v pracovním listě č. 4

## 2.5. Pracovní list č. 5 na smíšené funkce

Jméno, třída.....

Úkol č.1

a) Sestrojte grafy funkcí, které jsou dané předpisem:

$$f_1: y = (x-3)^2, D(f_1) = \langle 1; 5 \rangle,$$

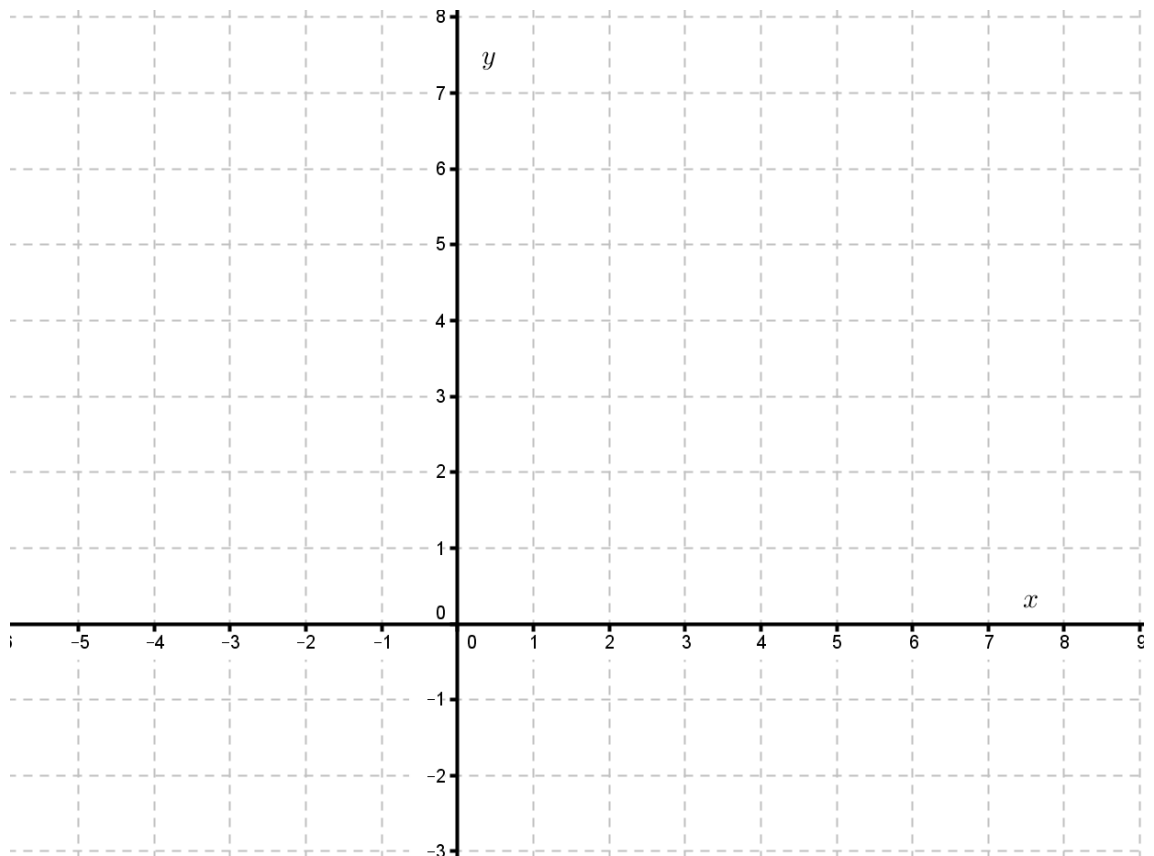
$$f_2: y = 4, D(f_2) = \langle 1; 5 \rangle,$$

$$f_3: y = -x+9, D(f_3) = \langle 2; 3 \rangle,$$

$$f_4: y = 6, D(f_4) = \langle 2; 3 \rangle.$$

b) Naneste tyto body a spojte je:  $A=[2;4]$ ,  $B=[2;7]$ .

c) Pojmenujte vzniklý útvar: .....



Úkol č. 2

a) Sestrojte grafy funkcí, které jsou dané předpisem:

$$f_1: y = \frac{4}{x}, D(f_1) = \langle 1; 4 \rangle,$$

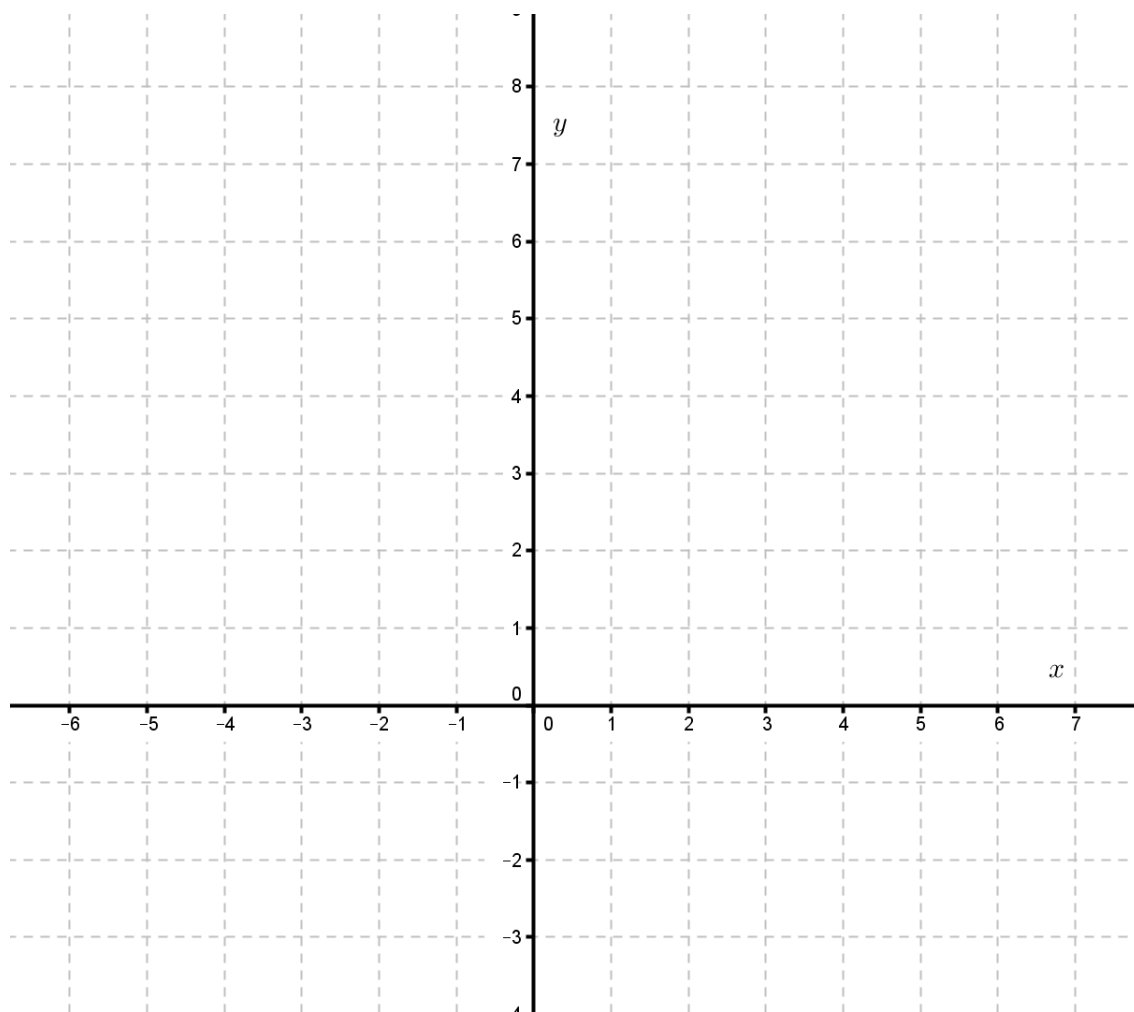
$$f_2: y = -\frac{1}{3}(x-1)^2 + 4, D(f_2) = \langle 1; 4 \rangle,$$

$$f_3: y = -x+5, D(f_3) = \langle 1; 4 \rangle,$$

$$f_4: y = 2, D(f_4) = \langle 2; 3 \rangle.$$

b) Sestrojte následující body:  $A=[2,6; 2,3]$ ,  $B=[2,4; 3,3]$ ,  $C=[2;3]$ ,  $D=[1,2; 3,2]$ . Bod  $A$  spojte s bodem  $B$ , bod  $C$  spojte s bodem  $D$ .

c) Pojmenujte vzniklý útvar: .....



Úkol č. 3

a) Sestrojte grafy funkcí, které jsou dané předpisem:

$$f_1: y = (x-2)^2, D(f_1) = \langle 2; 4 \rangle,$$

$$f_6: y = -x+11, D(f_6) = \langle 6; 7 \rangle,$$

$$f_2: y = x - \frac{1}{2}, D(f_2) = \langle 5; 9 \rangle,$$

$$f_7: y = -x+8,5, D(f_7) = \langle 1; 4 \rangle,$$

$$f_3: y = |x-4,5| + 6, D(f_3) = \langle 3; 5 \rangle,$$

$$f_8: y = (x-7)^2, D(f_8) = \langle 5; 7 \rangle,$$

$$f_4: y = 6, D(f_4) = \langle 1; 2,5 \rangle,$$

$$f_9: y = -x+12, D(f_9) = \langle 5; 6,2 \rangle,$$

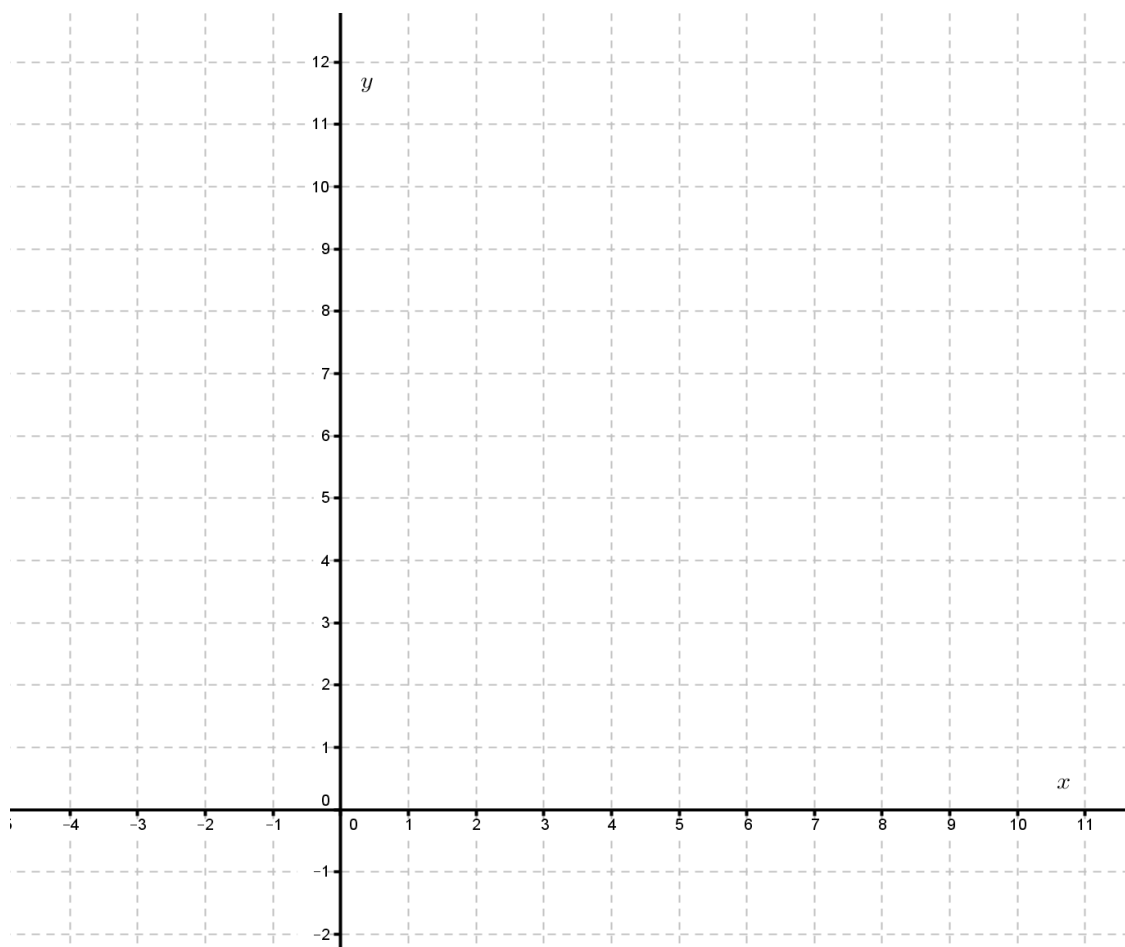
$$f_5: y = |x-4,3| + 9, D(f_5) = \langle 4; 6 \rangle,$$

$$f_{10}: y = 7, D(f_{10}) = \langle 7,5; 10 \rangle,$$

$$f_{11}: y = 5, D(f_{11}) = \langle 5,5; 7 \rangle.$$

b) Naneste tyto body:  $A=[4,6; 4]$ ,  $B=[4,3; 10,4]$  a spojte je.

c) Pojmenujte vzniklý útvar: .....



Úkol č. 4

a) Sestrojte grafy funkcí, které jsou dané předpisem:

$$f_1: y = 2, D(f_1) = \langle -5; 5 \rangle,$$

$$f_5: y = x+2, D(f_5) = \langle 2; 4 \rangle,$$

$$f_2: y = -\frac{1}{3}x^2 + 5, D(f_2) = \langle -3; 3 \rangle,$$

$$f_6: y = -(x-2)^2 + 7, D(f_6) = \langle 1; 3 \rangle,$$

$$f_3: y = 3, D(f_3) = \langle -6; -3 \rangle \cup \langle 3; 6 \rangle,$$

$$f_7: y = -(x-4)^2 + 7, D(f_7) = \langle 3; 5 \rangle,$$

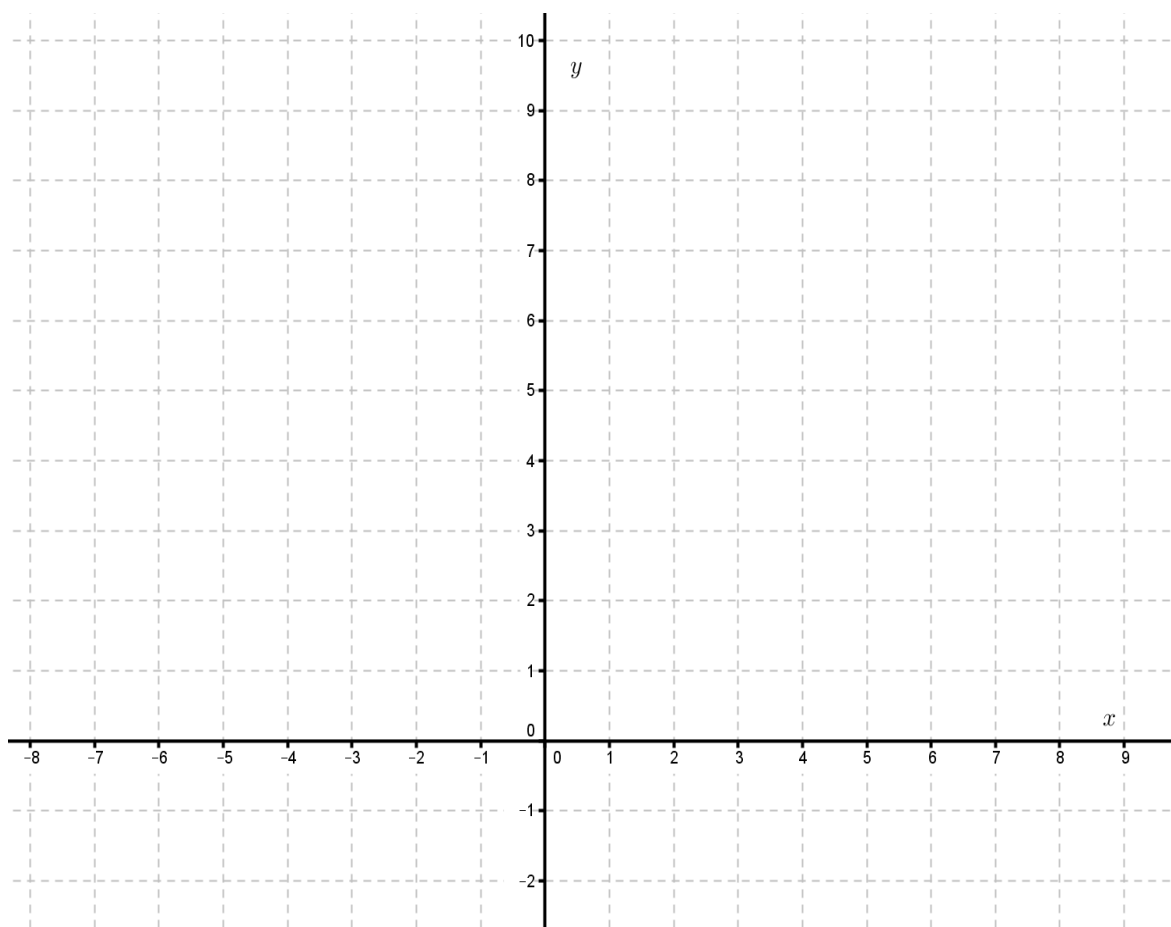
$$f_4: y = -x+2, D(f_4) = \langle -4; -2 \rangle,$$

$$f_8: y = -(x-4)^2 + 9, D(f_8) = \langle 3; 5 \rangle,$$

$$f_9: y = -(x-6)^2 + 9, D(f_9) = \langle 5; 7 \rangle.$$

b) Naneste tyto body:  $A=[0;5]$ ,  $B=[0;7]$  a spojte je úsečkou.

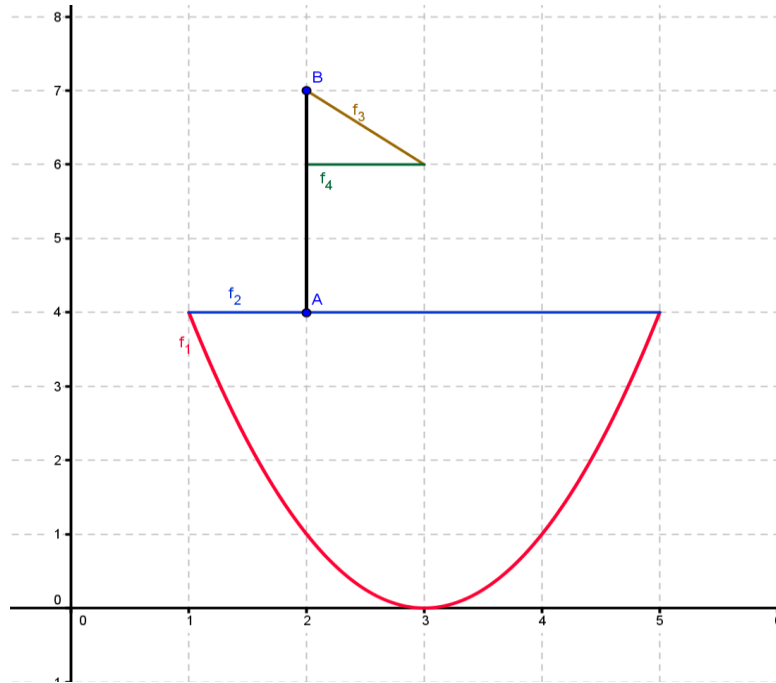
c) Pojmenujte vzniklý útvar: .....





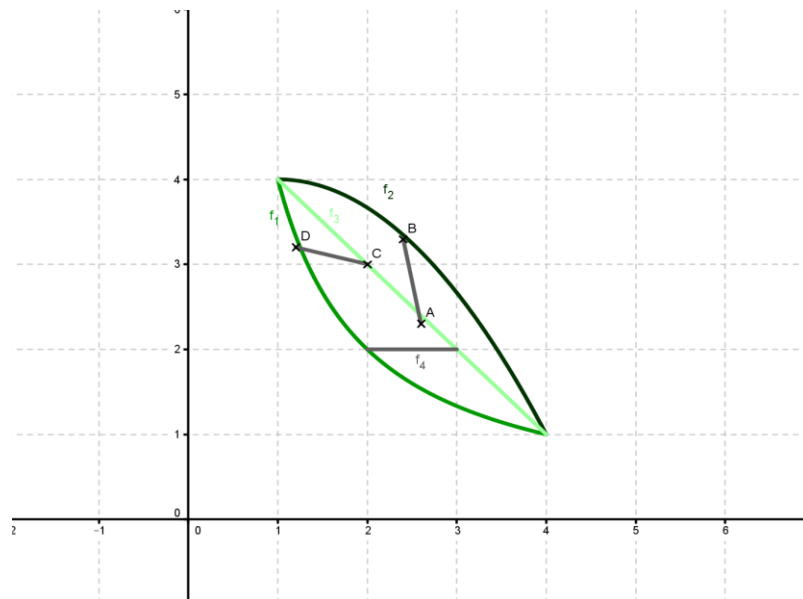
### 2.5.1. Řešení pracovního listu č. 5 na smíšené funkce

Úkol č. 1: Řešení tohoto úkolu je lodička.



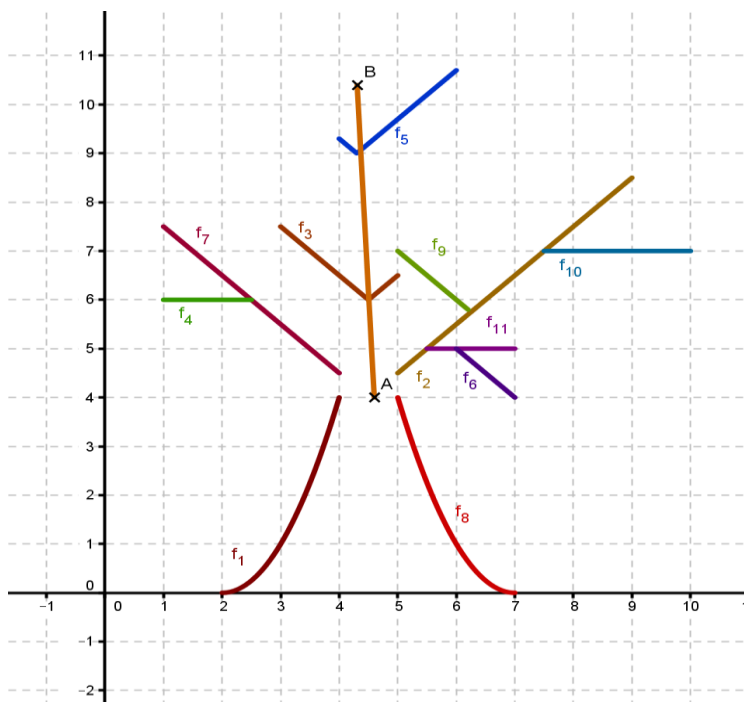
Obr. 15: Řešení úkolu č. 1 v pracovním listě č. 5

Úkol č. 2: Po správném sestrojení grafů funkcí, a správném nanesení a spojení bodů vznikne list.



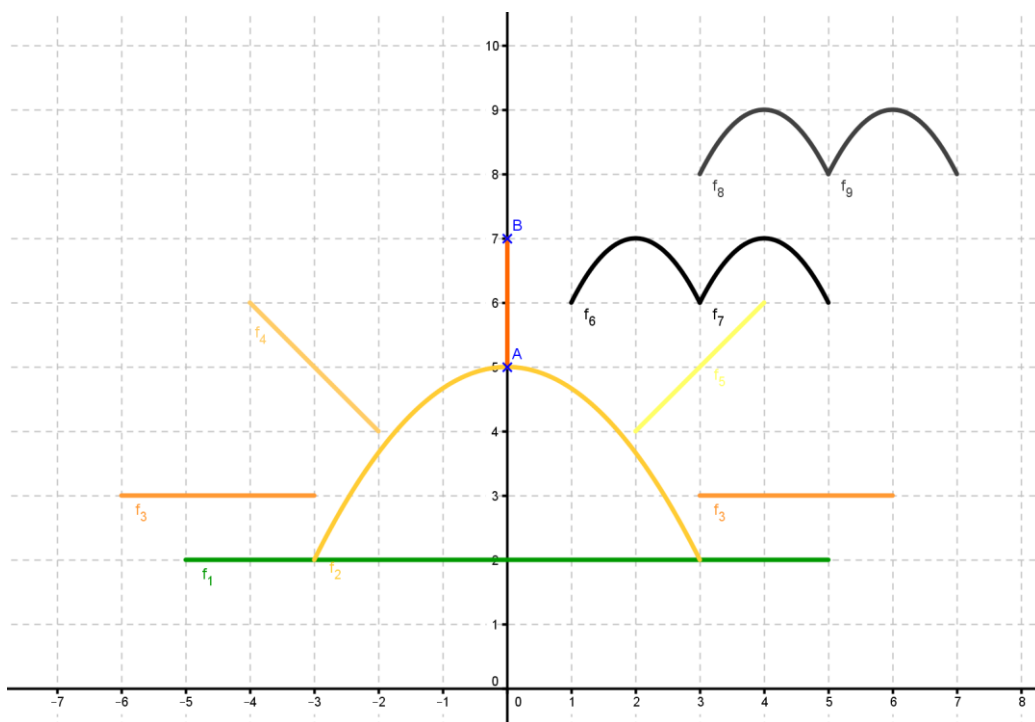
Obr. 16: Řešení úkolu č. 2 v pracovním listě č. 5

Úkol č. 3: Řešením tohoto úkolu je strom.



Obr. 17: Řešení úkolu č. 3 v pracovním listě č. 5

Úkol č. 4: V tomto úkolu vznikne západ slunce s ptáčky.



Obr. 18: Řešení úkolu č. 4 v pracovním listě č. 5

## 2.6. Pracovní list č. 6 s goniometrickými funkcemi

Jméno, třída .....

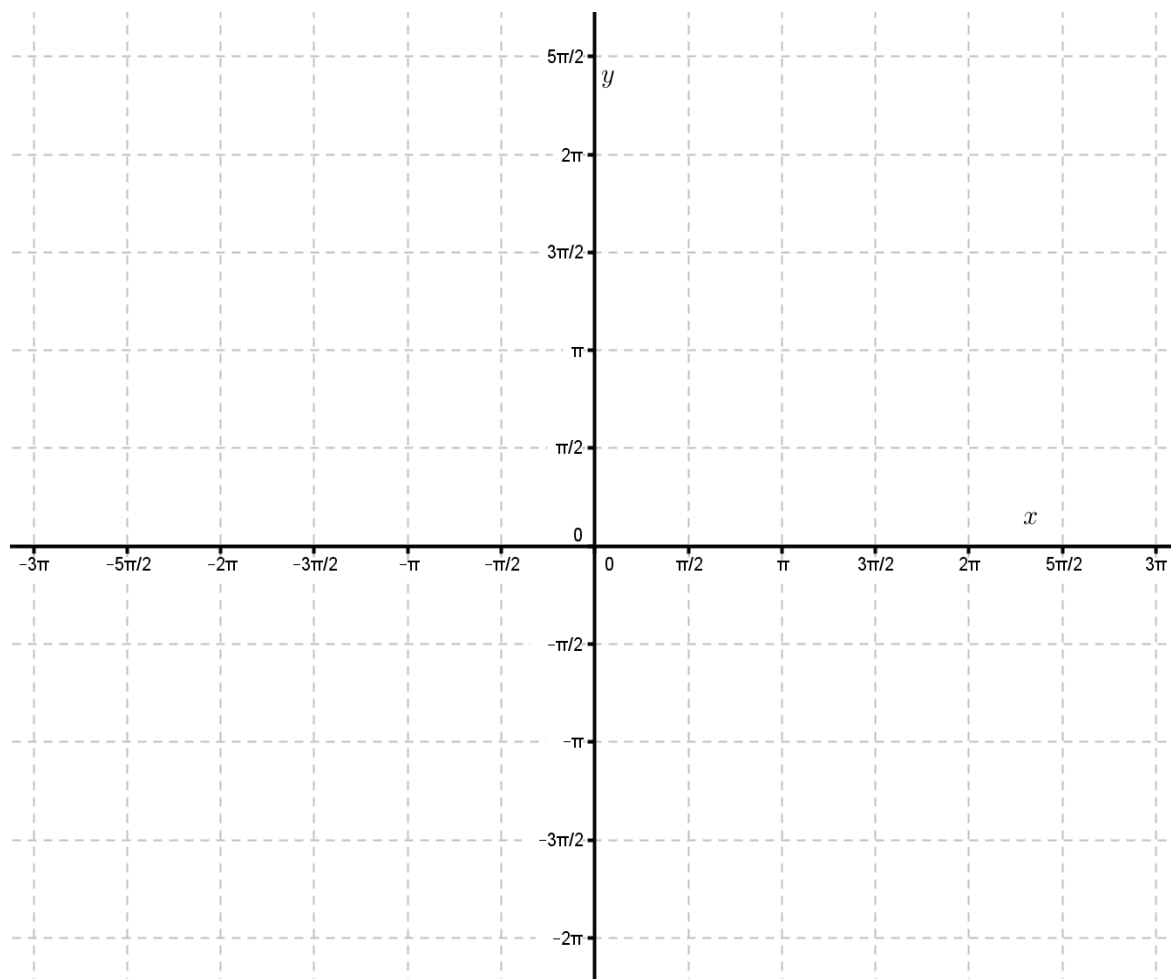
Úkol č. 1

a) Sestrojte grafy funkcí, které jsou dané předpisem:

$$f_1: y = \sin(x), D(f_1) = \langle -\pi; \pi \rangle,$$

$$f_2: y = -\sin(x), D(f_2) = \langle -\pi; \pi \rangle.$$

b) Pojmenujte vzniklý útvar: .....(náповěda: tento symbol se používá v matematice).



Úkol č. 2

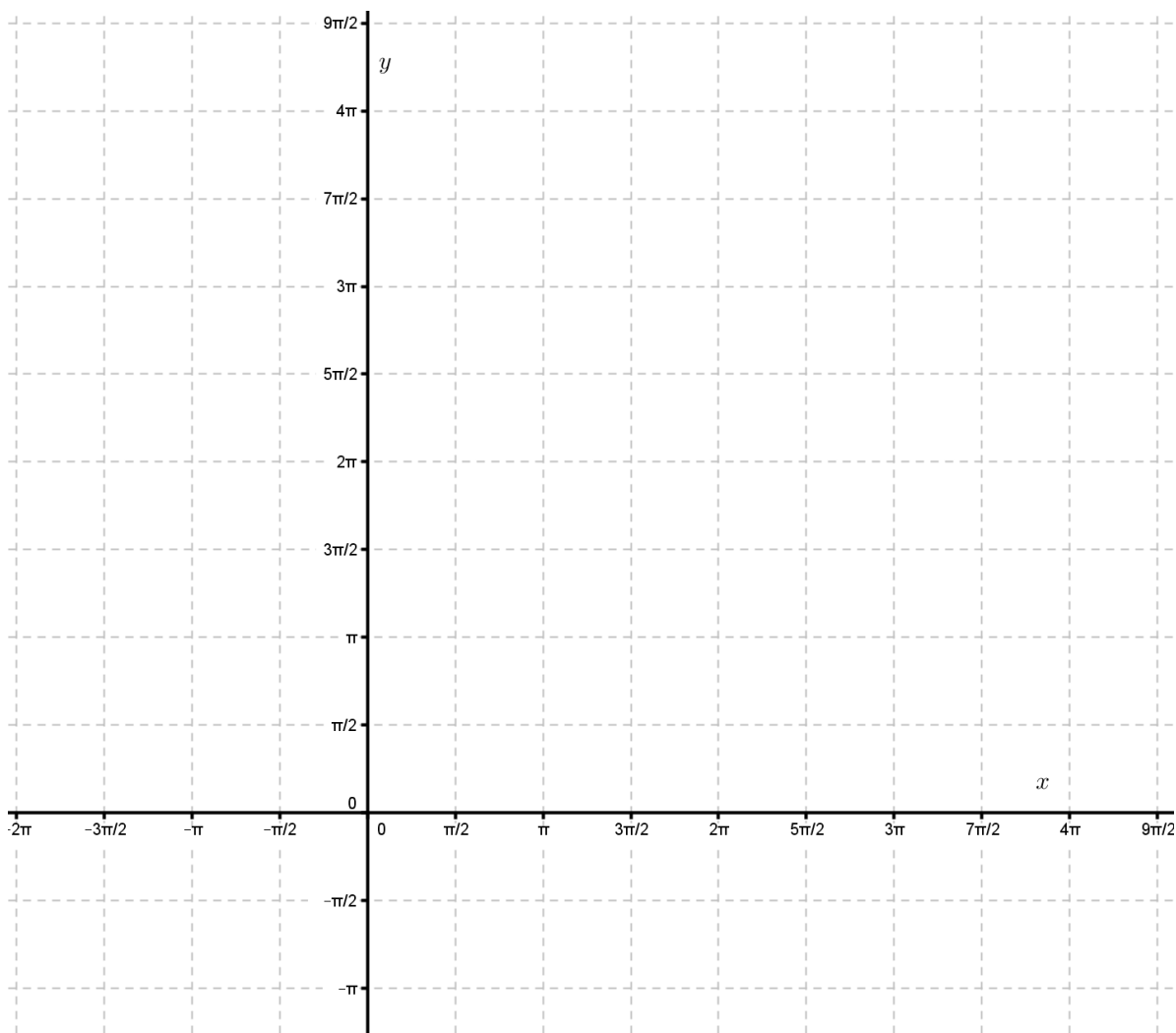
a) Sestrojte grafy funkcí, které jsou dané předpisem:

$$f_1: y = \cos(x) + 3\frac{\pi}{2}, D(f_1) = \left\langle \frac{\pi}{2}; 5\frac{\pi}{2} \right\rangle,$$

$$f_2: y = \cos(x) + 5\frac{\pi}{2}, D(f_2) = \left\langle \frac{\pi}{2}; 5\frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

b) Sestrojte následující body:  $A = [\frac{\pi}{2}; 0]$ ,  $B = [\frac{\pi}{2}; 5\frac{\pi}{2}]$ ,  $C = [5\frac{\pi}{2}; 3\frac{\pi}{2}]$ ,  $D = [5\frac{\pi}{2}; 5\frac{\pi}{2}]$ . Bod  $A$  spojte s bodem  $B$ , bod  $C$  spojte s bodem  $D$ .

c) Pojmenujte vzniklý útvar: .....



Úkol č. 3

a) Sestrojte grafy funkcí, které jsou dané předpisem:

$$f_1: y = -2\sin(x) + \pi, D(f_1) = \langle -3\pi; -\pi \rangle,$$

$$f_4: y = x + 2\pi, D(f_4) = \langle -\pi; 0 \rangle,$$

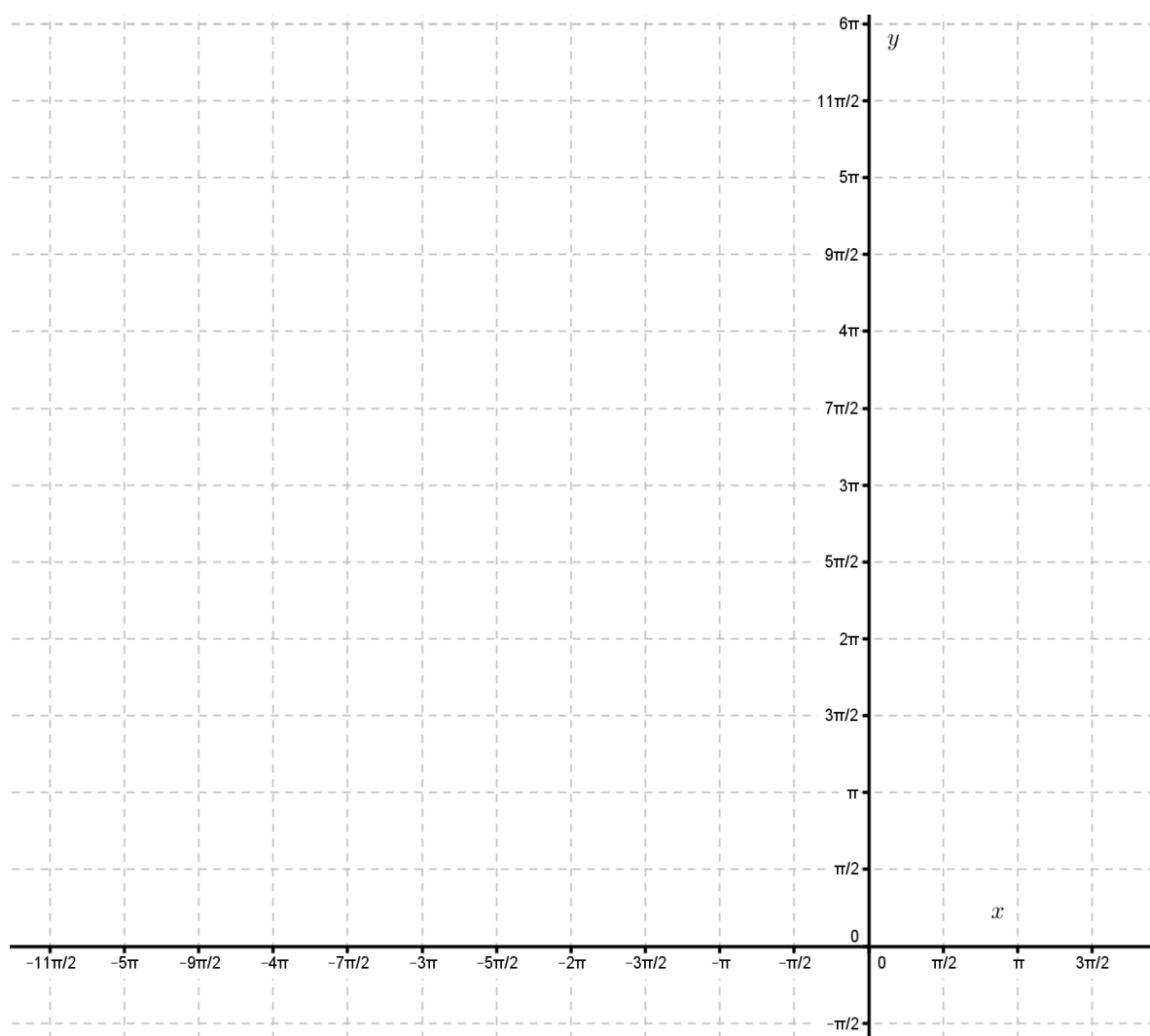
$$f_2: y = 2\sin(x) + \pi, D(f_2) = \langle -3\pi; -\pi \rangle,$$

$$f_5: y = -x + 2\pi, D(f_5) = \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle,$$

$$f_3: y = -x - 2\pi, D(f_3) = \langle -4\pi; -3\pi \rangle,$$

$$f_6: y = x + 6\pi, D(f_6) = \langle -9\frac{\pi}{2}; -4\pi \rangle.$$

b) Pojmenujte vzniklý útvar: .....



Úkol č. 4

a) Sestrojte grafy funkcí, které jsou dané předpisem:

$$f_1: y = \sin(x) + \frac{\pi}{2}, D(f_1) = \langle \frac{\pi}{2}; 6\pi \rangle,$$

$$f_5: y = 2\pi, D(f_5) = \langle 5\frac{\pi}{2}; 7\frac{\pi}{2} \rangle,$$

$$f_2: y = 3\frac{\pi}{2}, D(f_2) = \langle 2\pi; 4\pi \rangle,$$

$$f_6: y = \frac{1}{6}(x-3\pi)^2 + \pi, D(f_6) = \langle 2\pi; 4\pi \rangle,$$

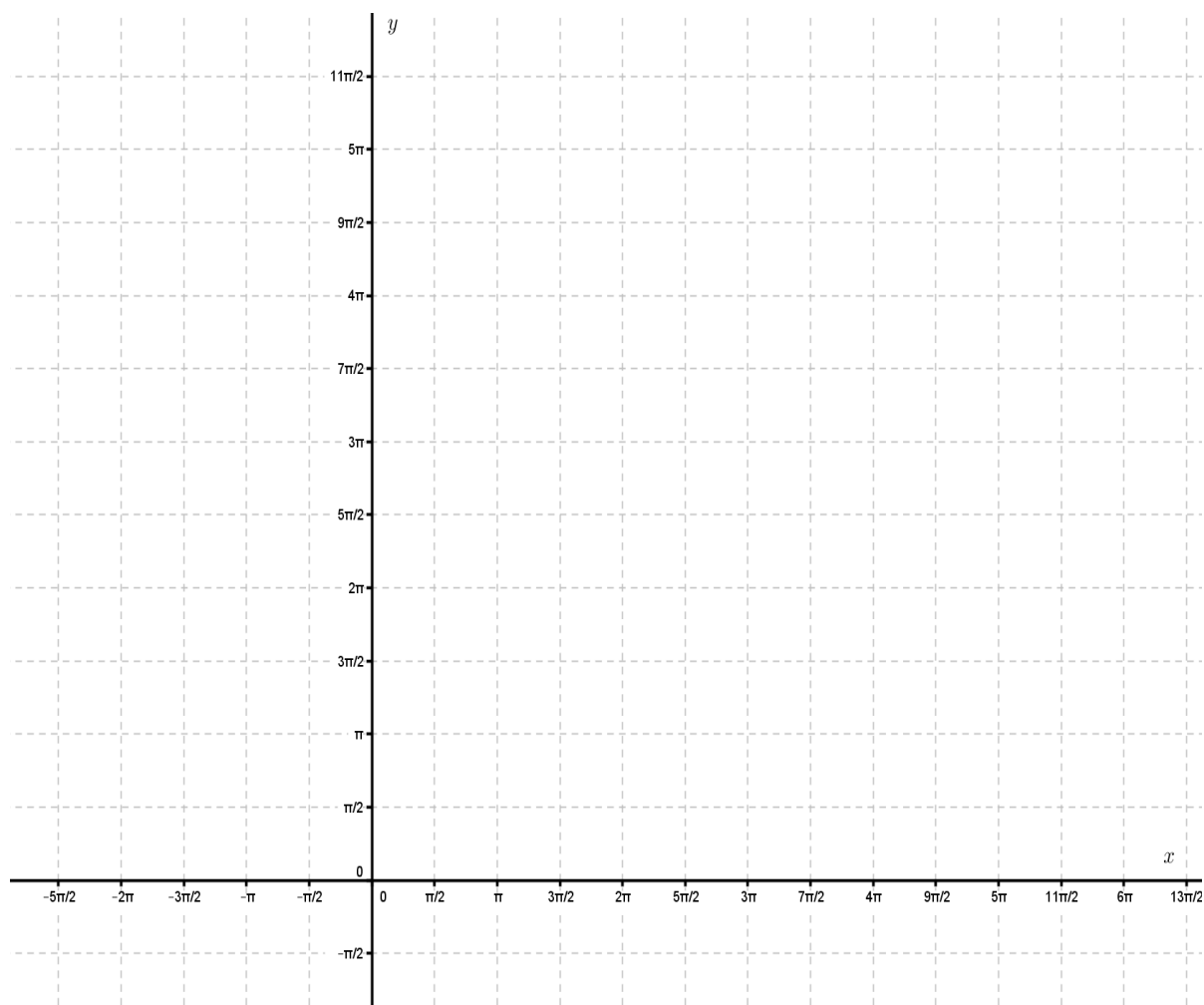
$$f_3: y = -x + 11\frac{\pi}{2}, D(f_3) = \langle 3\pi; 7\frac{\pi}{2} \rangle,$$

$$f_7: y = x - \frac{\pi}{2}, D(f_7) = \langle 5\frac{\pi}{2}; 3\pi \rangle.$$

$$f_4: y = \cos(x) + \frac{\pi}{2}, D(f_4) = \langle \frac{\pi}{2}; 11\frac{\pi}{2} \rangle,$$

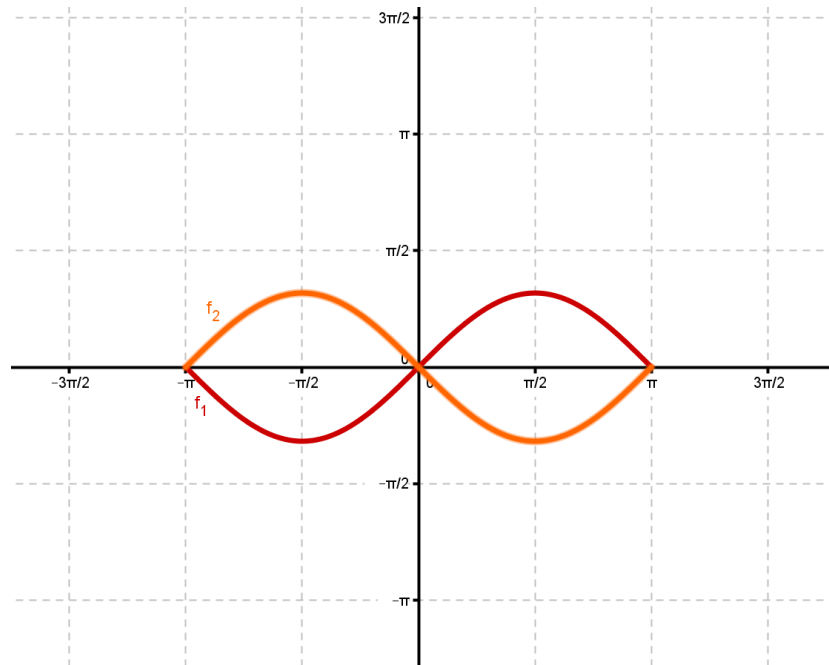
b) Naneste tyto body:  $A=[3\pi; 3\frac{\pi}{2}]$ ,  $B=[3\pi; 5\frac{\pi}{2}]$  a spojte je úsečkou.

c) Pojmenujte vzniklý útvar: .....



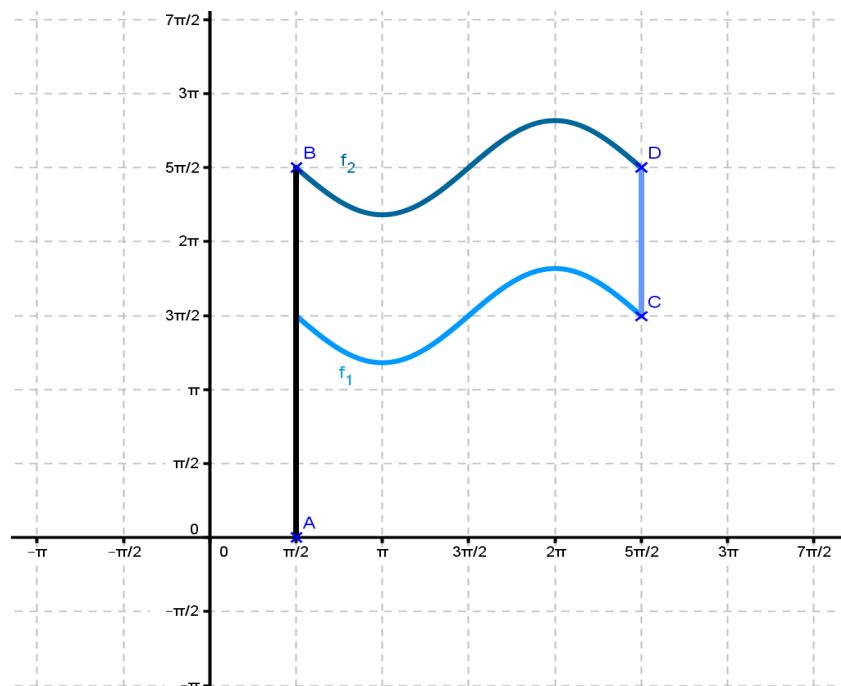
## 2.6.1. Řešení pracovního listu č. 6 s goniometrickými funkcemi

Úkol č. 1: Tento symbol v matematice se nazývá nekonečno.



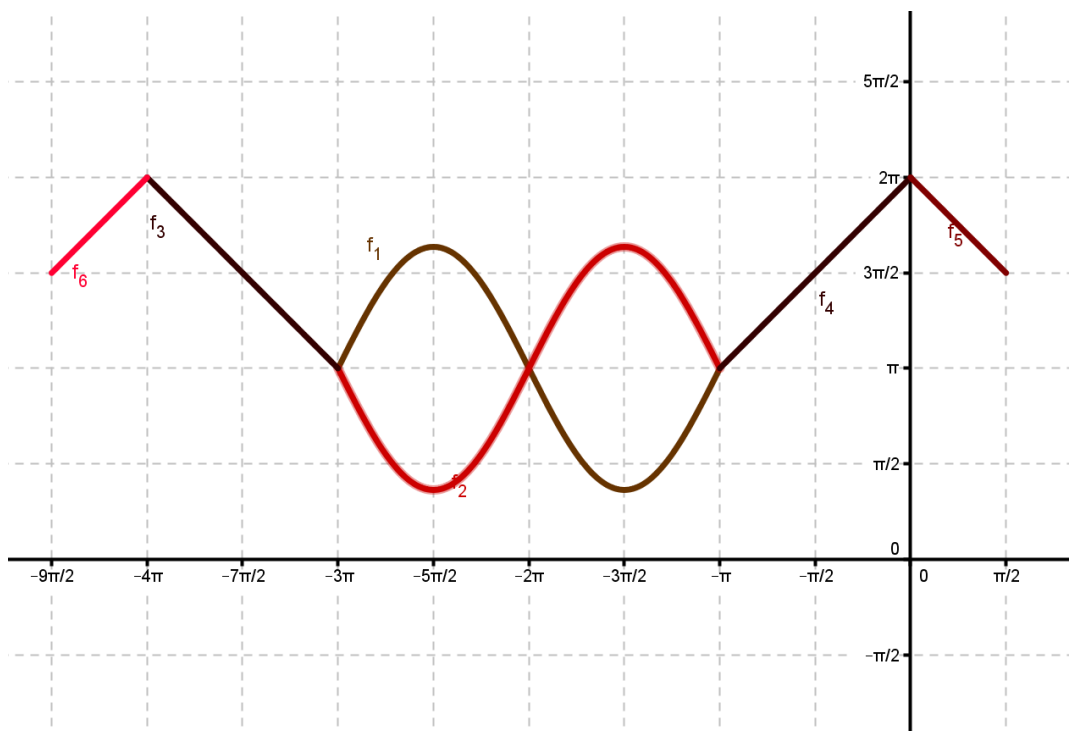
Obr. 19: Řešení úkolu č. 1 v pracovním listě č. 6

Úkol č. 2: Výsledkem tohoto úkolu je vlajka.



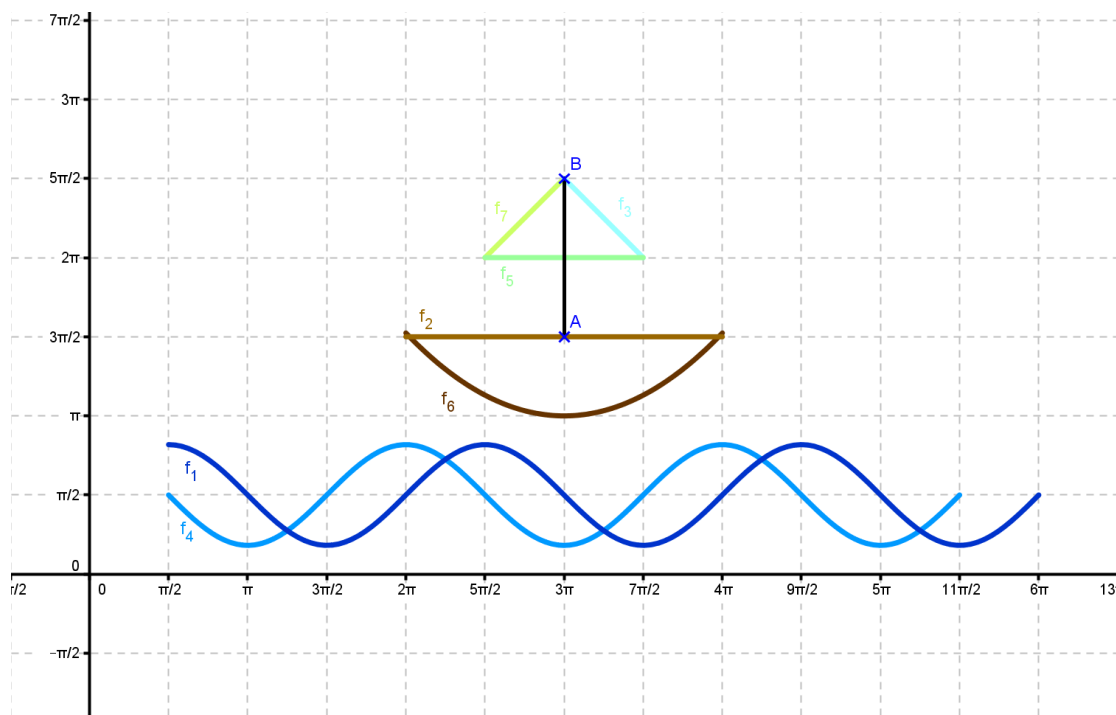
Obr. 20: Řešení úkolu č. 2 v pracovním listě č. 6

Úkol č. 3: Po správném sestrojení funkcí vzniklým útvarem jsou brýle.



Obr. 21: Řešení úkolu č. 3 v pracovním listě č. 6

Úkol č. 4: Když správně splníme úlohy a) a b) vznikne lodička na vlnách.



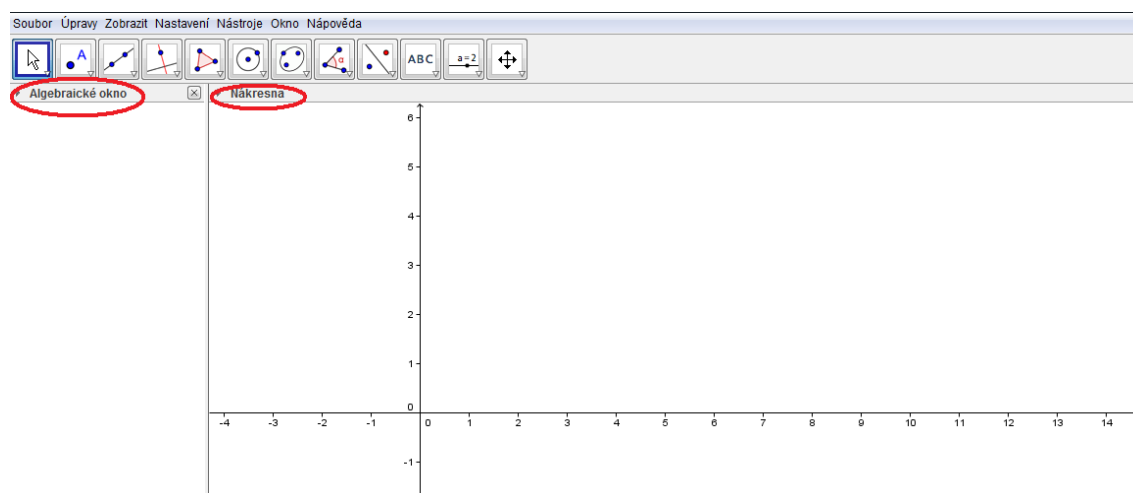
Obr. 22: Řešení úkolu č. 4 v pracovním listě č. 6



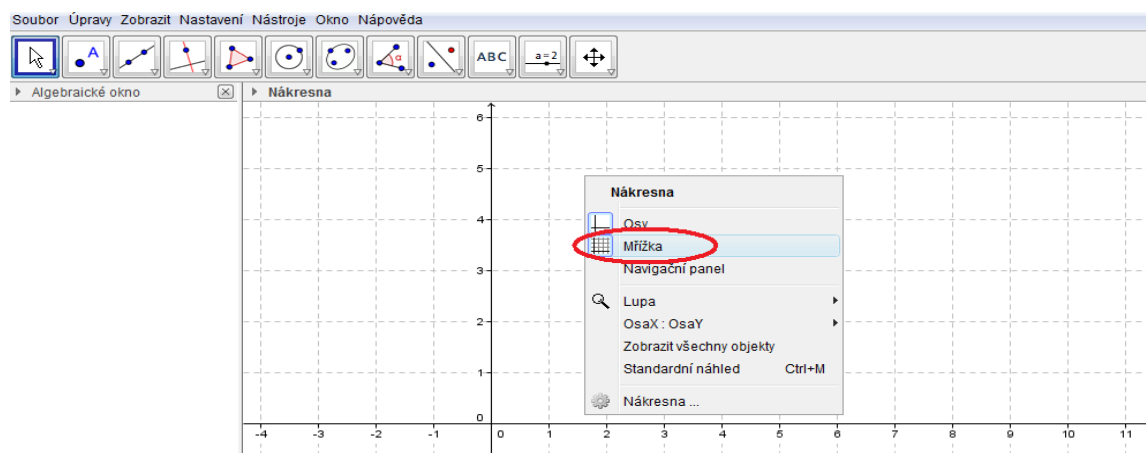
### 3. Řešení úkolu č. 4 v pracovním listě č. 6 pomoci matematického programu GeoGebra

V této bakalářské práci používám matematický program GeoGebra verze 4.2. Při sestrojování funkcí a bodů využívám nákresnu a algebraické okno. Nákresna slouží k zobrazení funkcí. Algebraické okno je vhodné pro zkontrolování zadaných funkcí a bodů.

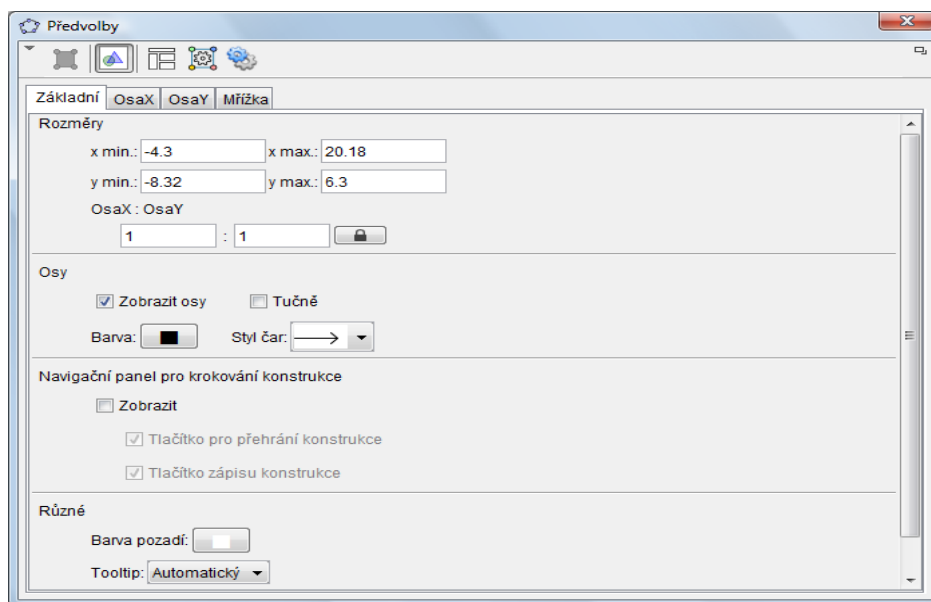
Když otevřeme program Geogebra na ploše se zobrazí „Nákresna“ a „Algebraické okno“.



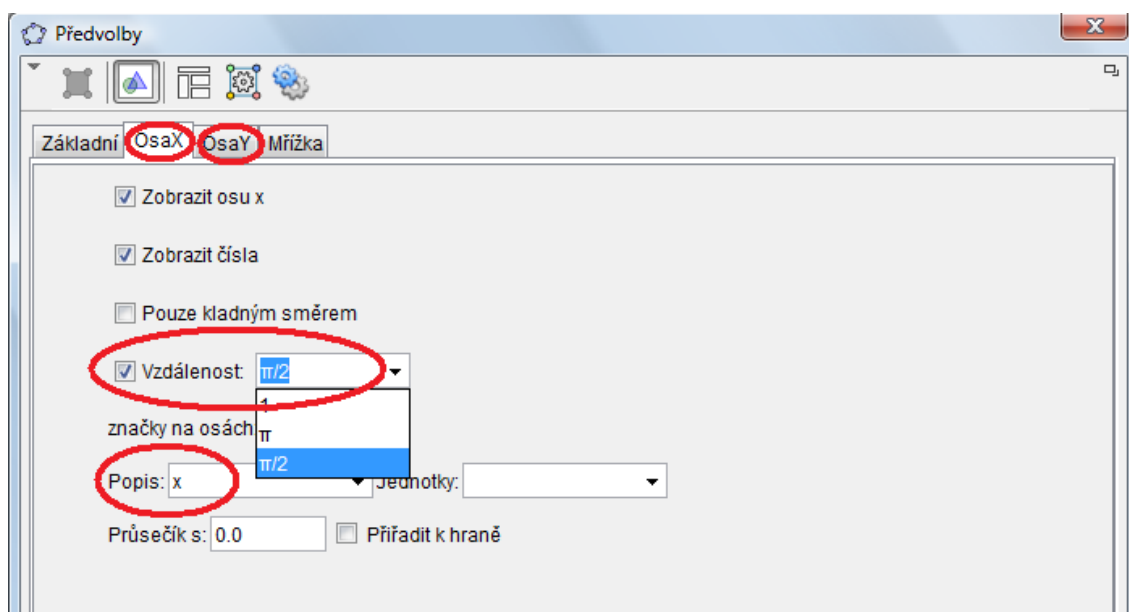
Pro sestojení funkcí a bodů budeme potřebovat mřížku. Tu si zapneme na liště, kterou si otevřeme pomocí pravého tlačítka myši.



Dále pro úpravu os a mřížky opět zmáčkneme pravé tlačítko a klikneme na „Nákresnu“. Otevře se nám okno „Předvolby“, kde si nastavíme všechno potřebné.



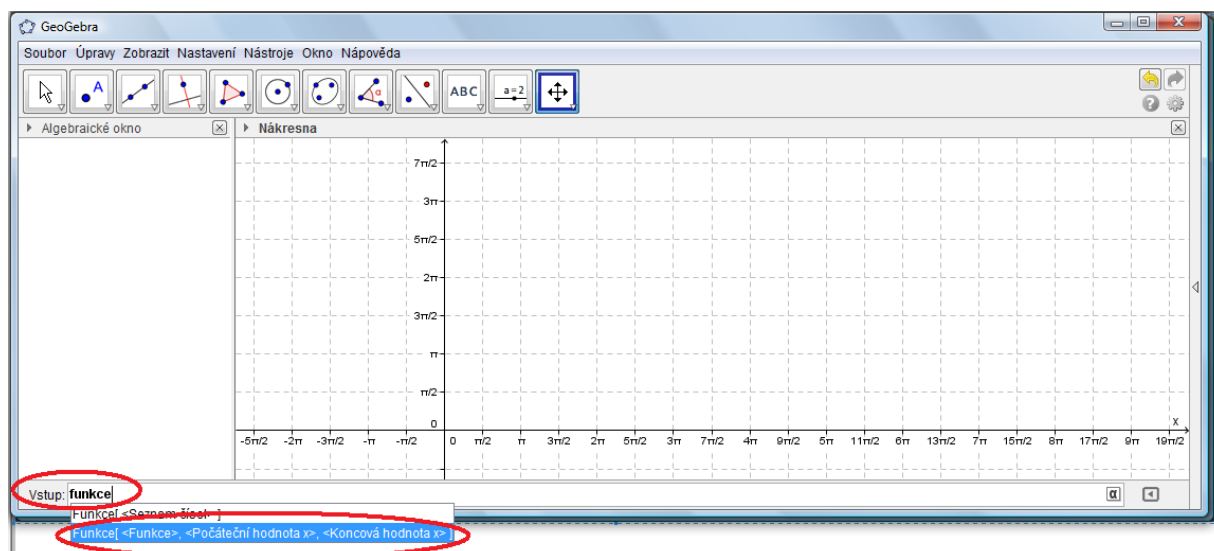
V úkolu č. 4 v pracovním listě č. 6 vzdálenost na osách  $xy$  je  $\frac{\pi}{2}$ . Tuto vzdálenost si zvolíme pomocí kliknutí na „OsaX“ kde zaškrtneme vzdálenost  $\frac{\pi}{2}$ , analogicky to provedeme i u osy  $y$  „OsaY“ v „Předvolbách“. Popis os  $xy$  si upravíme pomocí „Popisu“.



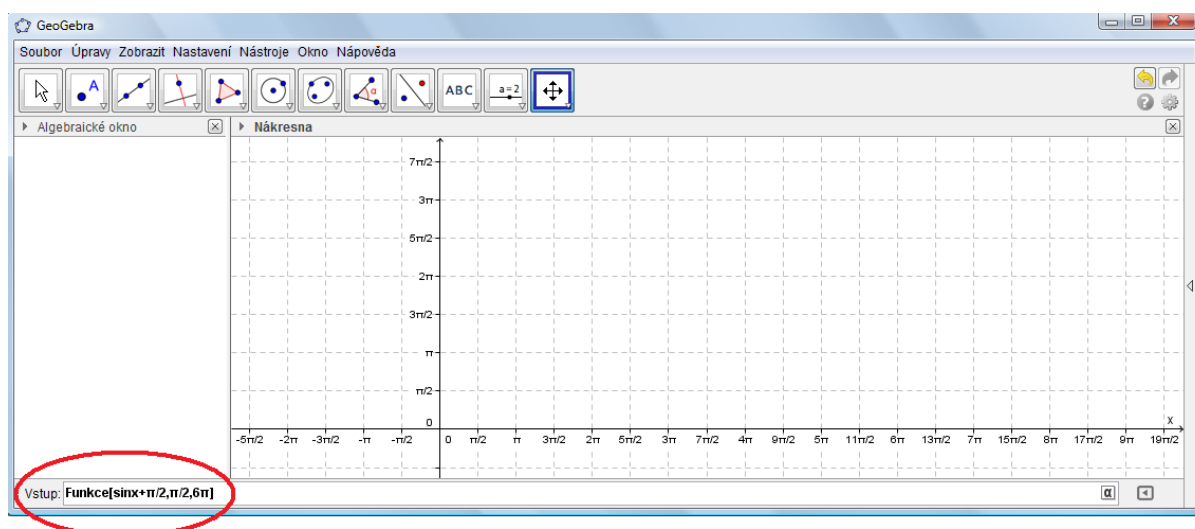
Po všech potřebných nastavení máme připravenou pracovní plochu a můžeme začít sestavovat funkce zadané v úkolu č. 4 v pracovním listě č. 6.

Ty zadáváme do řádku s označením „Vstup“, kde si nadepíšeme „funkce“ a zvolíme příkaz, který vypadá následovně:

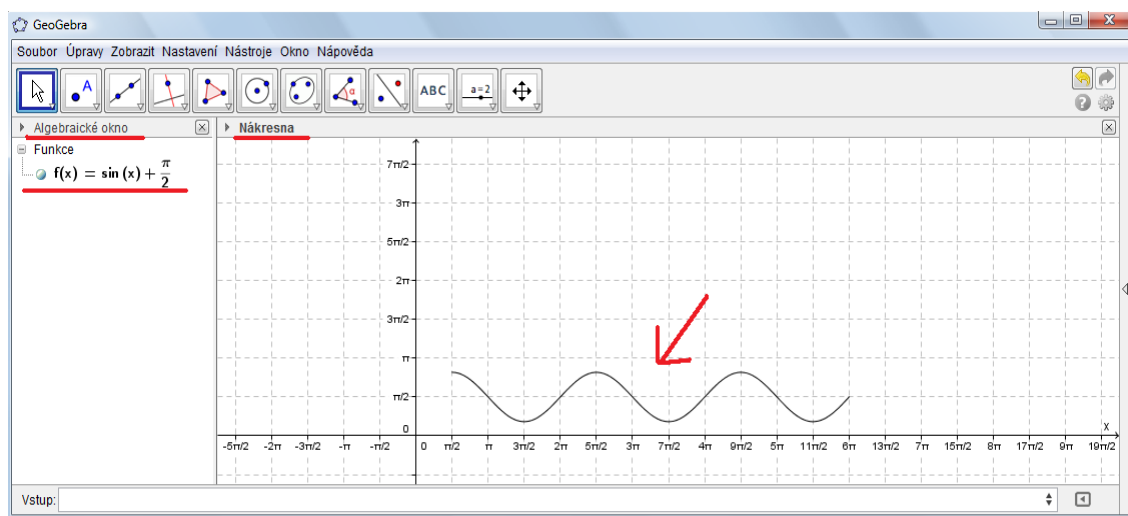
„Funkce[ <Funkce>, <Počáteční hodnota x>, <Koncová hodnota x> ]“.



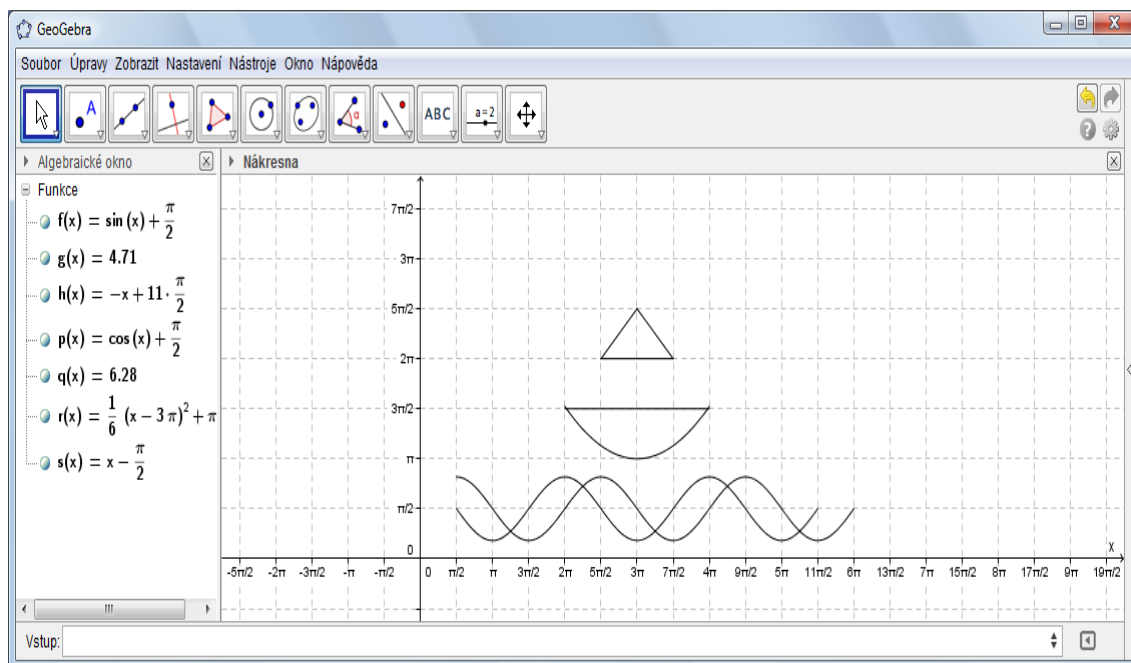
Např. funkce  $f_1: y = \sin(x) + \frac{\pi}{2}$ ,  $D(f_1) = \langle \frac{\pi}{2}; 6\pi \rangle$  vypadá takto: Funkce[sinx+ $\pi/2$ , $\pi/2$ , $6\pi$ ] (poznámka: číslo  $\pi$  píšeme do příkazu pomocí klávesové zkratky Alt+P).



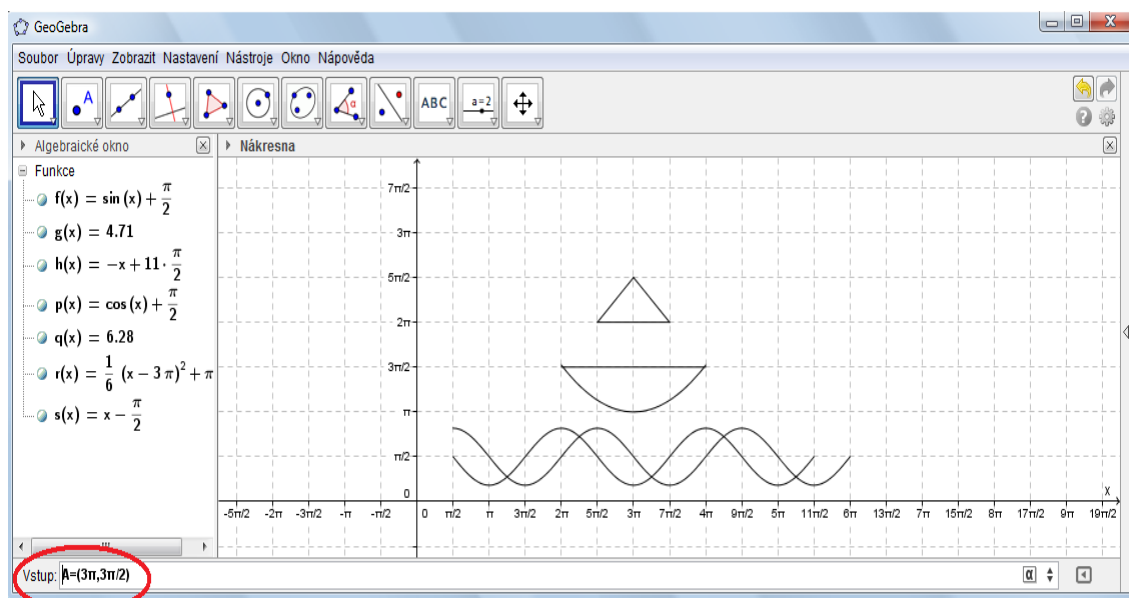
Po správném zapsání funkce a intervalu zmáčkne Enter. Funkce se nám zakreslí do náčrtky a její předpis se nám zobrazí v algebraickém okně.



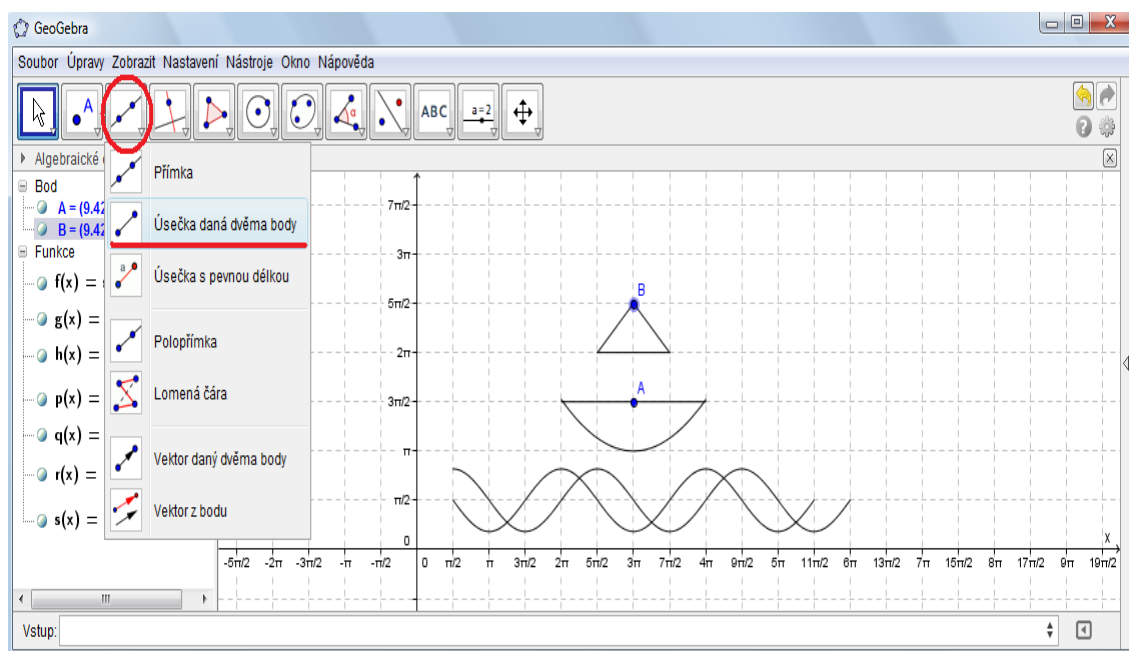
Analogicky zadáme do řádku označený „Vstup“ všechny funkce v úloze za a). „Náčrtka“ pak vypadá takto:



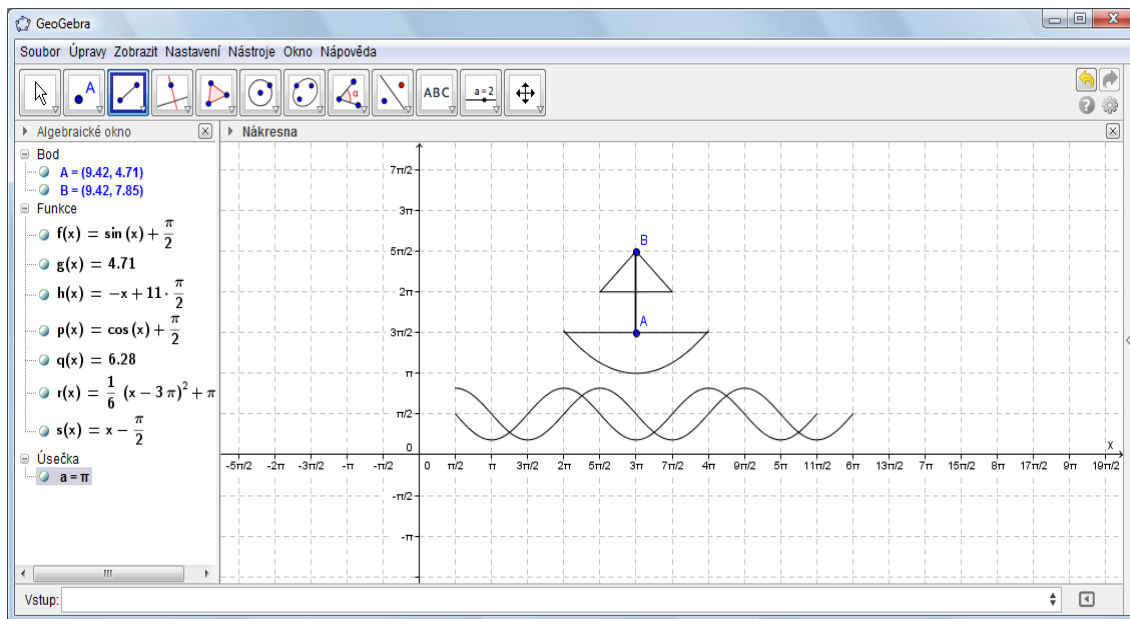
V úkolu b) máme nanést body  $A=[3\pi; 3\frac{\pi}{2}]$  a  $B=[3\pi; 5\frac{\pi}{2}]$  a spojit je úsečkou. Opět využijeme „Vstup“ kam napíšeme:  $A=(3\pi; 3\frac{\pi}{2})$ , takto zapíšeme i bod B.



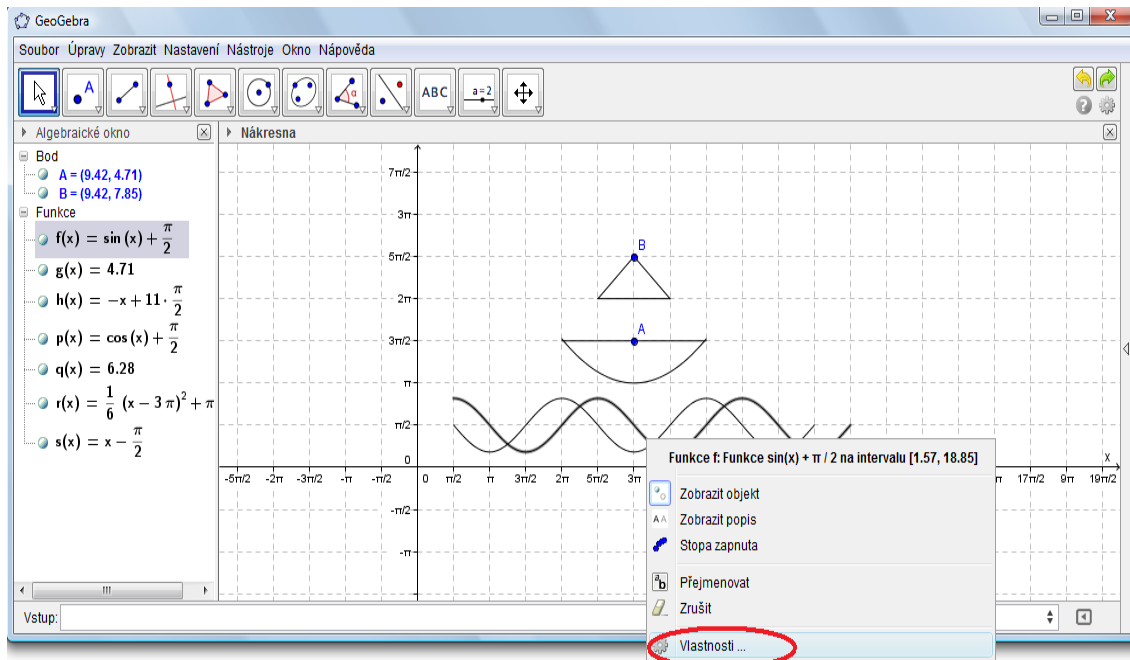
Úsečku sestrojíme pomocí rozkliknutí třetího okýnka v horní liště, kde si zvolíme nástroj „Úsečka daná dvěma body“ a klikneme postupně na bod A a B.



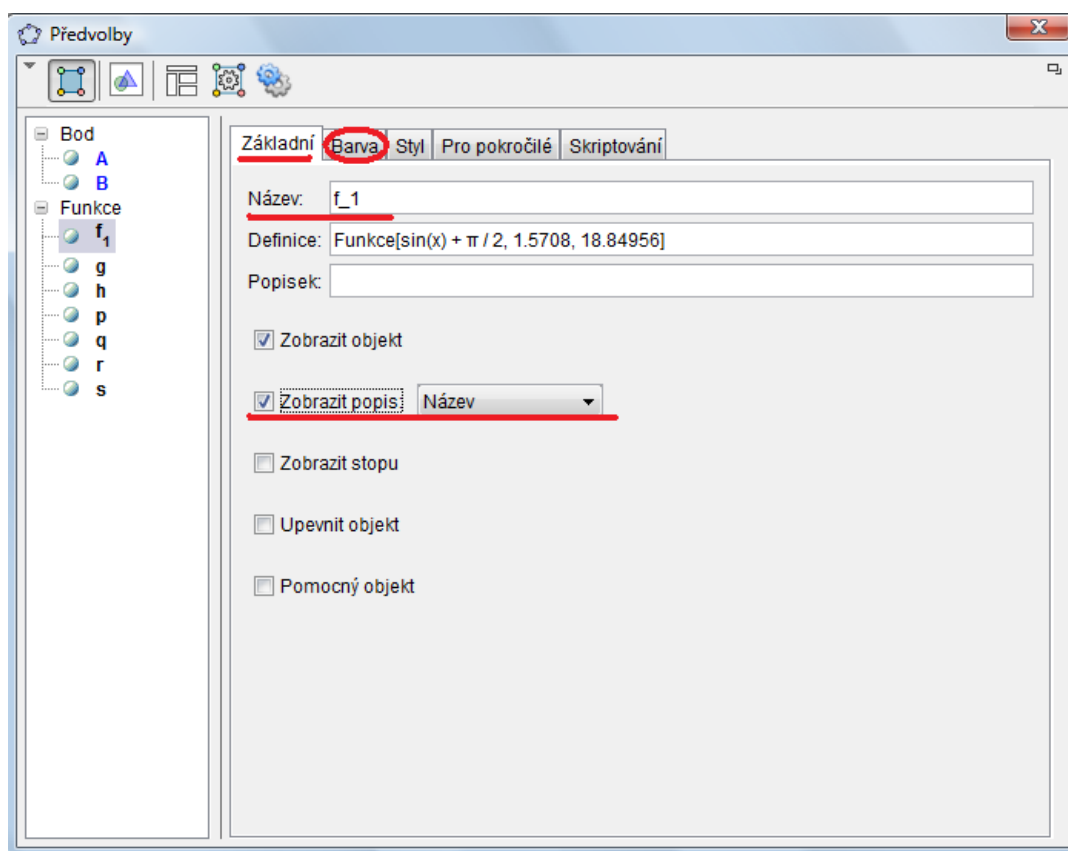
Splněná úloha za a) a b) v matematickém programu GeoGebra vypadá takto:



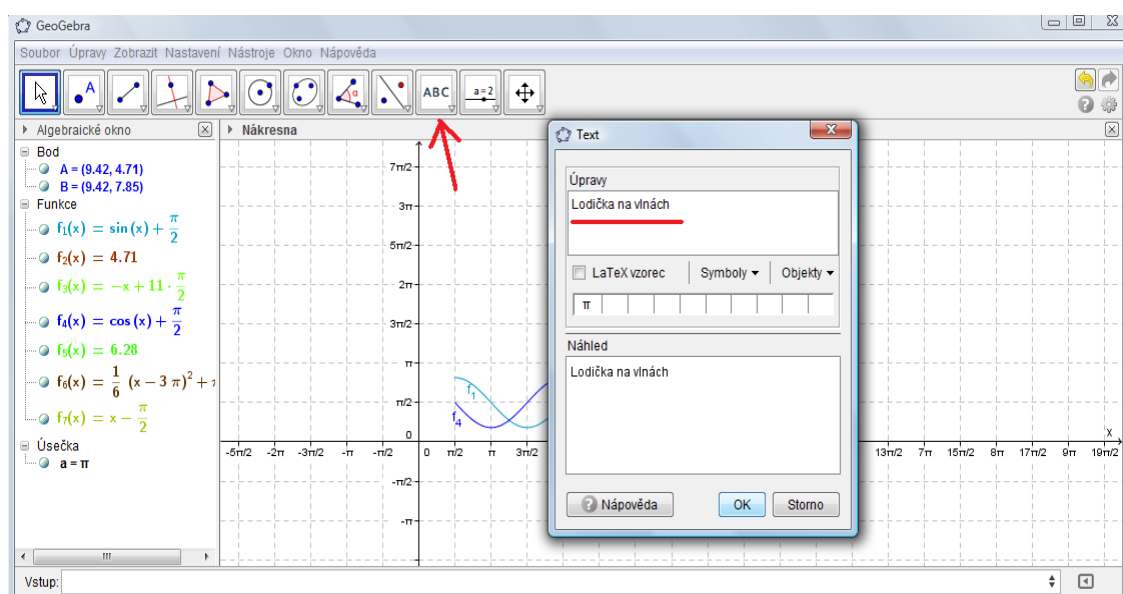
Na závěr funkce přejmenujeme a každé přiřadíme jinou barvu pro lepší znázornění. To uděláme kliknutím na jednotlivé funkce v „Nákresně“ nebo „Algebraické okně“, a pomocí pravého tlačítka si otevřeme lištu, kde si zvolíme „Vlastnosti“.



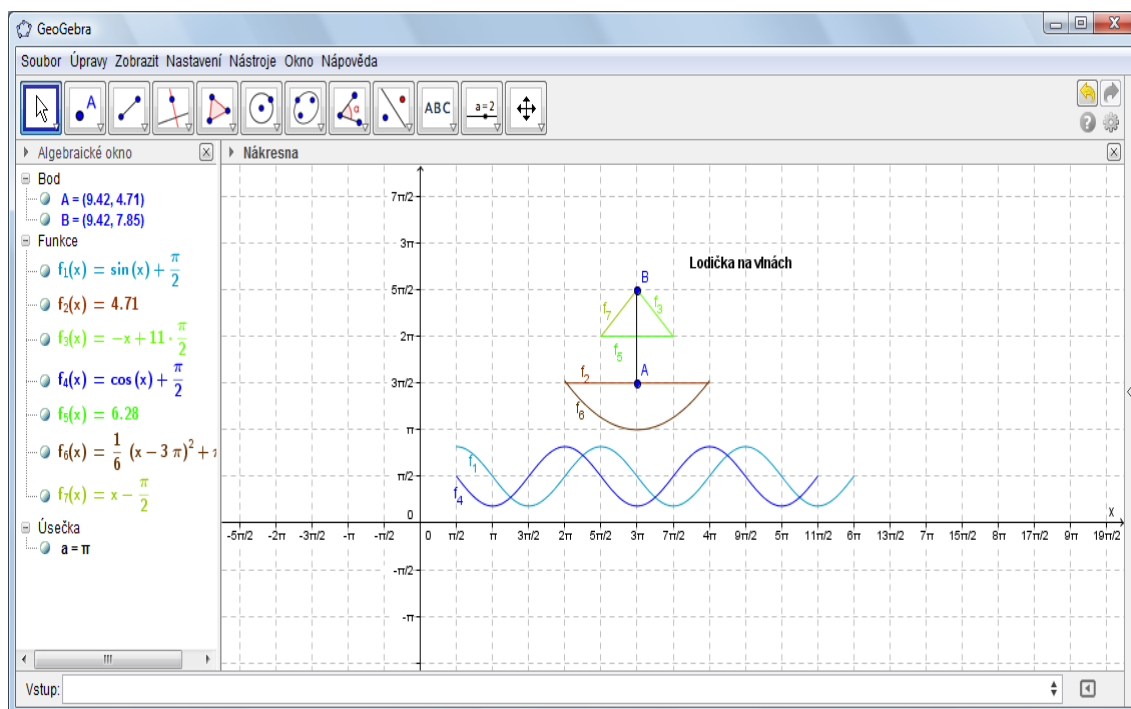
V okně „Předvolby“ změním název na  $f_1$  (resp.  $f_2, f_3$  atd.), zaškrtneme „zobrazit popis - Název“ a změním barvu. Takto postupujeme u všech funkcí.



Pro splnění úlohy za c) klikneme na desáté okýnko v horní liště „Vložit text“ a napíšeme, jaký obrázek nám vznikl.



Výsledek celého úkolu č. 4 v pracovním listě č. 6:





## 4. Závěr

Psaní této bakalářské práce mě velice bavilo. Cílem bylo vytvořit řadu zajímavých úloh, které jsou zaměřeny na grafické znázornění funkcí a křivek. Sloužit by měly k procvičení a upevnění znalosti o danou látku.

Sestavila jsem šest pracovních listů, kde jsem vymyslela zadání týkající se funkcí. Jeden pracovní list slouží k procvičení znázorňování bodů v kartézské soustavě souřadné. Ostatních pět pracovních listů je zaměřeno spíše na sestrojování funkcí, ale také na znázorňování bodů do soustavy. Výsledkem každého úkolu jsou zajímavé obrázky. Pracovní listy jsou seřazeny chronologicky od nejjednodušších po ty obtížnější.

Osobně bych chtěla v budoucnu po absolvování didaktiky z matematiky na toto téma navázat v diplomové práci.

## Literatura a zdroje

1. BĚLOUN, F. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu*. 8. upr. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 978-80-7196-107-8
2. ČERMÁK, P. *Odmaturuj! Z matematiky 1*. 4. vydání. Brno: Didaktis, 2007. ISBN 978-80-7358-102-2
3. ODVARKO, O. *Matematika pro gymnázia, Funkce*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-357-8
4. PETRÁŠKOVÁ, V., ŠTĚPÁNKOVÁ, H.: *Algebraické funkce a diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. 1. vydání. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2014. ISBN 978-80-7394-473-5
5. POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky*. 8. vydání. Praha: Prometheus, 2005. ISBN 80-7196-267-8
6. POLÁK, J. *Didaktika matematiky: jak učit matematiku zajímavě a užitečně*. 1. vydání. Plzeň: Fraus, 2014. ISBN 978-80-7238-449-5

## Seznam obrázků

<i>Obr. 1: Řešení úkolu č. 1 v pracovním listě č. 1 .....</i>	<i>9</i>
<i>Obr. 2: Řešení úkolu č. 2 v pracovním listě č. 1 .....</i>	<i>9</i>
<i>Obr. 3: Řešení úkolu č. 1 v pracovním listě č. 2 .....</i>	<i>14</i>
<i>Obr. 4: Řešení úkolu č. 2 v pracovním listě č. 2 .....</i>	<i>14</i>
<i>Obr. 5: Řešení úkolu č. 3 v pracovním listě č. 2 .....</i>	<i>15</i>
<i>Obr. 6: Řešení úkolu č. 4 v pracovním listě č. 2 .....</i>	<i>15</i>
<i>Obr. 7: Řešení úkolu č. 1 v pracovním listě č. 3 .....</i>	<i>20</i>
<i>Obr. 8: Řešení úkolu č. 2 v pracovním listě č. 3 .....</i>	<i>20</i>
<i>Obr. 9: Řešení úkolu č. 3 v pracovním listě č. 3 .....</i>	<i>21</i>
<i>Obr. 10: Řešení úkolu č. 4 v pracovním listě č. 3 .....</i>	<i>21</i>
<i>Obr. 11: Řešení úkolu č. 1 v pracovním listě č. 4 .....</i>	<i>26</i>
<i>Obr. 12: Řešení úkolu č. 2 v pracovním listě č. 4 .....</i>	<i>26</i>
<i>Obr. 13: Řešení úkolu č. 3 v pracovním listě č. 4 .....</i>	<i>27</i>
<i>Obr. 14: Řešení úkolu č. 4 v pracovním listě č. 4 .....</i>	<i>27</i>
<i>Obr. 15: Řešení úkolu č. 1 v pracovním listě č. 5 .....</i>	<i>32</i>
<i>Obr. 16: Řešení úkolu č. 2 v pracovním listě č. 5 .....</i>	<i>32</i>
<i>Obr. 17: Řešení úkolu č. 3 v pracovním listě č. 5 .....</i>	<i>33</i>
<i>Obr. 18: Řešení úkolu č. 4 v pracovním listě č. 5 .....</i>	<i>33</i>
<i>Obr. 19: Řešení úkolu č. 1 v pracovním listě č. 6 .....</i>	<i>38</i>
<i>Obr. 20: Řešení úkolu č. 2 v pracovním listě č. 6 .....</i>	<i>38</i>
<i>Obr. 21: Řešení úkolu č. 3 v pracovním listě č. 6 .....</i>	<i>39</i>
<i>Obr. 22: Řešení úkolu č. 4 v pracovním listě č. 6 .....</i>	<i>39</i>