



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

APLIKACE ZOBECNĚNÉ LINEÁRNĚ ELASTICKÉ LOMOVÉ MECHANIKY NA ODHAD POČÁTKU ŠÍŘENÍ TRHLINY Z OSTRÉHO V-VRUBU

APPLICATION OF GENERALIZED LINEAR ELASTIC FRACTURE MECHANICS ON ESTIMATION
OF CRACK PROPAGATION ORIGIN FROM SHARP V-NOTCH

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. KATEŘINA ŠTEGNEROVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. LUBOŠ NÁHLÍK, Ph.D.

BRNO 2013

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2012/13

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Bc. Kateřina Štegnerová

který/která studuje v **magisterském studijním programu**

obor: **Inženýrská mechanika a biomechanika (3901T041)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Aplikace zobecněné lineárně elastické lomové mechaniky na odhad počátku šíření trhliny z ostrého V-vrubu

v anglickém jazyce:

Application of generalized linear elastic fracture mechanics on estimation of crack propagation origin from sharp V-notch

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Ostrý V-vrub představuje v praxi často se vyskytující singulární koncentrátor napětí. Byť v literatuře existuje řada kritérií za pomoci nichž je možno odhadnout počátek šíření trhliny z tohoto koncentrátoru, není problém stanovení počátku šíření trhliny zcela vyřešen.

Diplomová práce se bude věnovat vzájemnému porovnání již v literatuře se vyskytujících kritérií s kritérii a postupy založenými na aplikaci tzv. zobecněné lineárně elastické lomové mechaniky (LELM) vyvíjenými na ÚMTMB ve spolupráci s Ústavem fyziky materiálů AV ČR, v. v. i. Cílem práce bude stavit počátek šíření trhliny z ostrého V-vrubu za pomoci zobecněné LELM, přičemž vzít do úvahy změnu singularity napětí vyvolanou jak vlastní geometrií V-vrubu, tak i existencí volného povrchu (vertex singularity). Vypočítaná data budou následně porovnána s jinými v literatuře existujícími přístupy a dostupnými experimentálnímu daty.

Cíle diplomové práce:

- seznámení se s přístupy lineárně elastické lomové mechaniky a zobecněné LELM
- rešeršní práce v oblasti stanovení počátku šíření trhliny z ostrého V-vrubu, přehled kritérií a dostupných experimentálních dat v literatuře
- na základě kritérií zobecněné LELM odhadnout počátek šíření trhliny z ostrého V-vrubu pro zadané těleso
- porovnání vypočítaných dat s experimentálními i vypočítanými daty dostupnými v literatuře

Seznam odborné literatury:

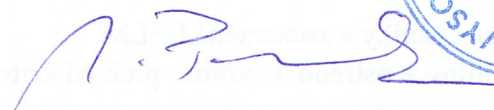
1. Anderson, T., L. (1995) Fracture Mechanics - Fundamentals and Applications Second Edition, CRC Press, Boca Raton
2. Atzori, B., Lazzarin, P., Tovo, (1999) R. Stress field parameters to predict the fatigue strength of notched components, Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 34: (6) pp 437– 453.
3. Klusák J. (2002) Lineární elastická lomová mechanika V-vrubu, Disertační práce VUT v Brně.
4. Knésl, Z. (1991) A criterion of V-notch stability, International Journal of Fracture, Volume 48, pp. 79-83.
5. Knésl, Z., Šrámek A., Kačourek, J. & Kroupa, F. (1991) Stress Concentration at the Edges of Coatings on Tensile Specimens, Acta Technica ČSAV, No. 5, pp. 574-593.
6. Náhlík, L. (2002) Šíření únavových trhlin v okolí rozhraní dvou elastických materiálů, Disertační práce VUT v Brně.
7. Sih, G. C., Ho, J. W., (1991), Sharp notch fracture strength characterized by critical energy density. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 16: (3) 179 – 214.
8. Taylor, D. (1999) Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical model, International Journal of Fatigue, 21, pp 413 – 420.
9. Williams, M. L. (1952) Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corner of Plates in Extension. Journal of Applied Mechanics, Volume 74, pp. 526-528.

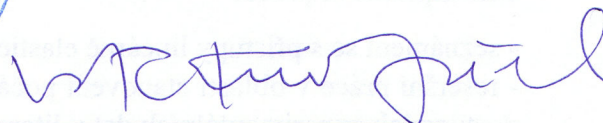
Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Luboš Náhlík, Ph.D.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2012/13.

V Brně, dne 22.11.2012




prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu


prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan

ABSTRAKT

Předkládaná diplomová práce se zabývá problémem stanovení počátku šíření trhliny z ostrého V-vrubu za pomoci zobecněné lineární elastické lomové mechaniky (LELM). Do úvahy je vzata změna exponentu singularity napětí vyvolaná jak vlastní geometrií V-vrubu, tak i existencí volného povrchu. První část práce je věnována stanovení exponentu singularity napětí V-vrubu, ať již z vlastního rozdělení napětí před vrcholem V-vrubu, tak i za pomoci analytického řešení. V druhé části práce jsou aplikována již dříve odvozená kritéria stability V-vrubu a je stanoven počátek šíření trhliny pro několik experimentálních těles.

Cílem diplomové práce je porovnat dostupná experimentálně zjištěná data s výsledky získanými pomocí kritérií založených na aplikaci zobecněné LELM vyvíjenými na Ústavu fyziky materiálů AV ČR, v. v. i. K výpočtům je použit konečnoprvkový software Ansys a matematický software Matlab.

KLÍČOVÁ SLOVA

Lomová mechanika, V-vrub, metoda konečných prvků, exponent singularity napětí, rohová singularita, zobecněný součinitel intenzity napětí, singulární koncentrátor napětí.

ABSTRACT

The master thesis is focused on estimation of crack propagation origin from sharp V-notch. Stress distribution around the tip of the V-notch is described on the base of generalized linear elastic fracture mechanics. The change of the stress singularity exponent caused by geometry of the V-notch and the vertex singularity is taken into account. The first part of the work is devoted to the estimation of the stress singularity exponent of the V-notch either from stress distribution around the tip of the V-notch or by using analytical solution. Formerly derived stability criteria are applied in the second part of the work. The origin of the crack propagation is estimated for several experimental specimens.

The aim of this thesis is to compare the available experimentally observed data with results obtained using those criteria based on the application of generalized linear elastic fracture mechanics developer at the Institute of Physics of Materials Academy of Sciences of the Czech Republic. The finite element code Ansys and mathematical software Matlab were used for the necessary calculations.

KEYWORDS

Fracture mechanics, V-notch, finite element method, stress singularity exponent, vertex singularity, generalized stress intensity factor, singular stress concentrator.

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

ŠTEGNEROVÁ, K. *Aplikace zobecněné lineárně elastické lomové mechaniky na odhad počátku šíření trhliny z ostrého V-vrubu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 61 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Luboš Náhlík, Ph.D.

ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci zpracovala samostatně na základě konzultací s mým vedoucím práce doc. Ing. Lubošem Náhlíkem, PhD. a s použitím uvedené literatury.

V Brně dne 30. dubna 2013

.....



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PODĚKOVÁNÍ

Diplomová práce vznikla s využitím zázemí Ústavu fyziky materiálů AV ČR, v. v. i. a za podpory projektu č. CZ.1.07/2.3.00/20.0214 „Rozvoj lidských zdrojů ve výzkumu fyzikálních a materiálových vlastností modelových, nově vyvíjených a inženýrsky aplikovaných materiálů“ poskytnutého Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy České republiky.

Ráda bych zde poděkovala svému vedoucímu diplomové práce doc. Ing. Luboši Náhlíkovi, PhD., bez něhož by práce nemohla vzniknout, za jeho cenné rady a připomínky. Také bych ráda poděkovala pracovníkům Ústavu fyziky materiálů AV ČR, v. v. i. v Brně za pomoc a rady při zpracovávání práce. Na závěr bych ráda poděkovala i rodině za trpělivost a podporu během studia.

OBSAH

1	ÚVOD	11
2	ZÁKLADNÍ POJMY LOMOVÉ MECHANIKY	13
2.1	Zatěžovací módy.....	14
2.2	Popis pole napětí v okolí kořene trhliny pomocí Airyho funkce napětí $\Phi(x,y)$	15
2.3	Součinitel intenzity napětí K	16
2.4	Určení součinitele intenzity napětí K	18
2.5	Popis pole napětí v okolí vrcholu ostrého V-vrubu	19
2.6	Zobecněný součinitel intenzity napětí H	21
3	KRITÉRIA STABILITY	23
3.1	Vliv volného povrchu na chování trhliny	23
3.2	Kritérium hustoty deformační energie	25
3.2.1	Rozložení hustoty deformační energie	25
3.2.2	Zobecněný faktor hustoty deformační energie	26
3.2.3	Kritérium stability	27
3.3	Kritérium střední hodnoty napětí σ	27
3.3.1	Střední hodnota napětí σ	27
3.3.2	Kritérium stability	28
3.4	Kritická vzdálenost d	29
4	FORMULACE PROBLÉMU A CÍLE PRÁCE	31
5	ŘEŠENÍ ZADANÉHO PROBLÉMU	32
5.1	Stanovení exponentu singularity napětí.....	32
5.1.1	Postup numerického určení exponentu singularity napětí.....	32
5.1.2	Numerický model tělesa s V-vrubem namáhaným tahem.....	33
5.1.3	Numericky odhadnuté hodnoty exponentu singularity napětí p	34

5.1.4	Numericky odhadnuté hodnoty exponentu singularity napětí p pro těleso s V-vrubem zatížené čtyřbodovým ohybem	36
5.2	Stanovení kritického napětí tělesa σ_{crit} s V-vrubem zatíženého tahem	37
5.2.1	Kritická vzdálenost d	37
5.2.2	Hodnoty kritického napětí σ_{crit}	39
5.3	Stanovení kritického napětí tělesa σ_{crit} s V-vrubem zatíženého tahem – vliv volného povrchu	41
5.3.1	Vliv volného povrchu	41
5.3.2	Hodnoty kritického napětí σ_{crit}	42
5.4	Stanovení kritického napětí tělesa σ_{crit} s V-vrubem namáhaného ohybem	45
5.4.1	Kritická vzdálenost d	45
5.4.2	Hodnoty kritického napětí σ_{crit}	46
6	SHRnutí VÝSLEDKŮ A DISKUZE	50
7	ZÁVĚR	53

1 ÚVOD

Lomová mechanika je jednou z nejmladších disciplín mechaniky a zabývá se popisem chování těles s trhlinami. Její počátky sahají do období druhé světové války, kdy bylo nutné pochopit řadu havárií, které měly na svědomí jak velké materiální ztráty, tak i lidské životy.

Lomová mechanika je založena na posuzování napjatosti a mezního stavu stability trhliny. Tato teorie vychází z předpokladu, že studované těleso již obsahuje počáteční trhlínu, která mohla vzniknout při výrobě, povrchové úpravě, přepravě tělesa nebo při jeho provozu.

Technické konstrukce obvykle obsahují mnoho koncentrátorů napětí, přičemž mezi nejčastější patří ostré V-vruby. Proto v literatuře můžeme najít mnoho článků o problémech křehkého porušování způsobeného těmito koncentrátory. Trhliny jsou považovány za nejjednodušší případ takového koncentrátoru a existuje celá řada kritérií, za pomoci kterých lze odhadnout počátek jejího šíření. Vzhledem k tomu, že se vrchol trhliny považuje za ideálně ostrý, vypočtená napětí se blíží nekonečnu. Děje se tak díky tomu, že není uvažována žádná plastická deformace v kořeni trhliny. Tento předpoklad je základním nedostatkem lineárně elastické lomové mechaniky (LELM), ale zároveň i vítaným zjednodušením, na němž je postavena.

Předmětem předkládané diplomové práce je problém stanovení počátku šíření trhliny z ostrého V-vrubu za pomoci zobecněné LELM. K tomuto odhadu jsou použita kritéria založená na aplikaci zobecněné LELM vyvíjenými na Ústavu fyziky materiálů AV ČR, v. v. i. (ÚFM) ve spolupráci s Ústavem mechaniky těles, mechatroniky a biomechanika na FSI VUT v Brně (ÚMTMB). Poznamenejme, že první práce v této oblasti vznikly na ÚFM na počátku devadesátých let 20. století. Jejich autorem byl prof. RNDr. Zdeněk Knésl, CSc., který představil dále uvedený koncept zobecnění, a publikoval v práci použitá kritéria stability ostrého V-vrubu. Během následujících let byl tento koncept rozpracován prof. Knéslem a jeho kolegy či studenty do podoby, jež umožňuje nejen odhadnout počátek šíření trhliny z ostrého V-vrubu za různých zatěžujících podmínek, ale také na šíření trhliny z bi-materiálového V-vrubu, pro případ trhliny šířící se za různých podmínek přes rozhraní dvou materiálů, či pro případ, kdy je chování trhliny ovlivněno volným povrchem tělesa, tzv. rohovou singularitou. Předložená diplomová práce navazuje na povětšinou teoretické práce prof. Knésly, a s využitím literárních zdrojů s publikovanými experimentálními daty, ukazuje způsob praktického využití představených kritérií stability ostrého V-Vrubu.

Mezi nejpoužívanější kritéria patří koncepce součinitele intenzity napětí, tzv. K-koncepce, kterou je možné využít při statické i dynamické iniciaci trhliny. Předpokladem pro její použití je existence pouze malé plastické zóny před vrcholem trhliny. K jednotlivým módům zatěžování jsou přiřazeny součinitelé intenzity napětí K , které charakterizují napjatost v tělese v okolí kořene trhliny. Tato koncepce předpokládá, že iniciovaná trhlina poroste ve směru původní trhliny, ve všech třech základních módech zatěžování. Toto je však splněno pouze v laboratorních podmínkách, nikoliv vždy u reálných konstrukcí.

Vztahy odvozené pro trhlinu je možné zobecnit pro ostrý V-vrub [8]. Obecně platí, že napjatost v okolí obecného singulárního koncentrátoru je určena exponentem singularity napětí a zobecněným součinitelem intenzity napětí H . V případě ostrého V-vrubu (nebo např. také v případě trhliny na bimateriálovém rozhraní) není singularita typu $r^{1/2}$, ale má podobu obecného singulárního koncentrátoru napětí, kde exponent singularity napětí je $p \neq 1/2$.

Mezi nejpoužívanější kritéria stability trhliny patří Sihova koncepce faktoru hustoty deformační energie [29], která umožňuje stanovit nejen podmínky pro počátek nestabilního růstu trhliny, ale také stanovit směr tohoto růstu. Dle této koncepce se trhlina bude šířit ve směru minimální hodnoty faktoru hustoty deformační energie. Zobecněnou koncepci faktoru hustoty deformační energie je možné aplikovat na vruby. Kritérium stability je získáno z porovnání kritických hodnot faktorů deformační energie stanoveného pro trhlinu a obecný koncentrátor napětí.

Základní charakteristikou druhé koncepce, se kterou bude čtenář seznámen, je kritérium založené na střední hodnotě normálové složky napětí určené před vrcholem V-vrubu ve směru iniciované trhliny. Střední hodnota napětí je v případě V-vrubu analogicky určena integrací maximálního nominálního napětí přes kritickou vzdálenost před vrcholem V-vrubu [9]. Kritérium stability je získáno porovnáním hodnot kritických napětí pro trhlinu a V-vrub a má stejný tvar jako u předchozí koncepce.

Cílem práce je sestavit výpočtové modely tak, aby bylo možné výsledky porovnat s daty dostupnými v literatuře [6] a [27]. Zkušební vzorky se liší v typech použitých materiálů, úhlech otevření vrubů a typech zatížení.

Protože je použito zobecněných koncepcí, je v první řadě nezbytné určit hodnoty exponentů singularity napětí. Do úvahy je vzata také změna exponentu singularity napětí vyvolaná jak vlastní geometrií V-vrubu, tak i existencí volného povrchu. Exponent singularity napětí V-vrubu je vypočten pomocí přímé metody z numericky získaného rozložení pole napětí u vrcholu V-vrubu. Výsledné hodnoty jsou porovnány s analytickým řešením z [10].

V druhé řadě jsou použita výše zmíněná kritéria a následně odhadnuty kritické hodnoty aplikovaných napětí pomocí zmíněných kritérií za použití zobecněného součinitele intenzity napětí. K výpočtům je použit konečnoprvkový software Ansys a matematický software Matlab.

2 ZÁKLADNÍ POJMY LOMOVÉ MECHANIKY

Lomová mechanika je založena na posuzování napjatosti a mezního stavu stability trhliny. Tato teorie vychází z předpokladu, že studované těleso již obsahuje počáteční trhlínu, která mohla vzniknout při výrobě, povrchové úpravě, přepravě tělesa nebo při jeho provozu.

Lomová mechanika se dělí do dvou hlavních oblastí:

- oblast lineárně-elastické lomové mechaniky (LELM) je založená na předpokladu lineární izotropní teorie pružnosti a platnosti Hookova zákona mezi složkami napětí a deformace v celém tělese i u kořene trhliny. Za určitých zjednodušujících předpokladů může popsat napěťové a deformační poměry i při existenci malé plastické zóny u kořene trhliny.
- oblast elasto-plastické lomové mechaniky (EPLM) uvažuje u kořene trhliny velkou plastickou zónu, popřípadě zplastizování celého průřezu tělesa.

Trhlina je singulárním koncentrátorem napětí, proto není napětí vhodné pro popis jejího chování. V průběhu rozvoje lomové mechaniky (především druhá polovina 20. století) byly hledány postupy pro popis chování trhliny v elastické oblasti.

Vzhledem k tomu, že se vrchol trhliny považuje za ideálně ostrý, vypočtená napětí se blíží nekonečnu. Děje se tak díky tomu, že se neuvažuje žádná plastická deformace v kořeni trhliny. Tento předpoklad je základním nedostatkem LELM, ale zároveň také zjednodušení, na němž je celá LELM postavena. **Vztahy popisující rozdělení napětí v okolí vrcholu trhliny je možné zobecnit také pro ostrý V-vrub.**

V této práci je uvažována pouze LELM. Tato oblast se v dnešní době považuje za prakticky uzavřenou, nicméně stále se objevují nové práce, které rozšiřují oblast platnosti LELM, či její použitelnost zejména pro nové druhy materiálů, např. do oblasti kompozitních materiálů [12], [13], [25], [33], [34].

Lomové kritérium může být formulováno na základě [1]:

- energetickém, které využívá změny energie při šíření trhliny – např. koncepce hnací síly trhliny G , J -integrál, hustota deformační energie, apod.
- napětí a deformací – např. koncepce součinitele intenzity napětí K , rozevření v kořeni trhliny $CTOD$, úhlu otevření trhliny COD , apod.

Poznamenejme, že v rámci LELM je možné jednotlivé lomové parametry vyjádřit za pomoci ostatních lomových parametrů LELM, čehož se v praxi často využívá.

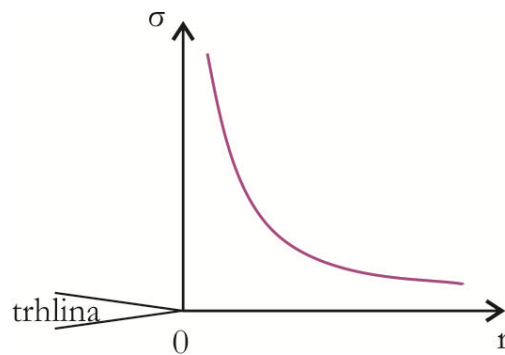
Jak již bylo zmíněno, trhlina se považuje za singulární koncentrátor napětí a díky tomu nabývají složky tenzoru napětí v kořeni trhliny teoreticky nekonečna, viz Obr. 1. V reálném materiálu

vznikají vždy v okolí kořene trhliny při jejím růstu plastické deformace, a proto jsou skutečné složky tenzoru napětí a přetvoření konečné.

Koncentrátorem může být nespojitost materiálová, geometrická nebo nespojitost zatížení. Singulární rozložení napětí (Obr. 1) můžeme vyjádřit vztahem [39]:

$$\sigma_{ij} \cong \frac{1}{r^p}, \quad (1)$$

kde p je exponent singularity napětí, který nabývá hodnot z intervalu $(0;1)$ a r je vzdálenost od vrcholu koncentrátoru. Zvláštním případem koncentrátoru napětí je právě trhlina, jejíž exponent singularity nabývá hodnoty $p = 1/2$. Pokud je $p \neq 1/2$, pak se jedná o tzv. obecný koncentrátor napětí, kterým může být např. ostrý V-vrub [10], trhlina na bimateriálovém rozhraní [11] a [24], atd.



Obr. 1 Rozložení napětí v okolí kořene trhliny v lineárně elastickém materiálu.

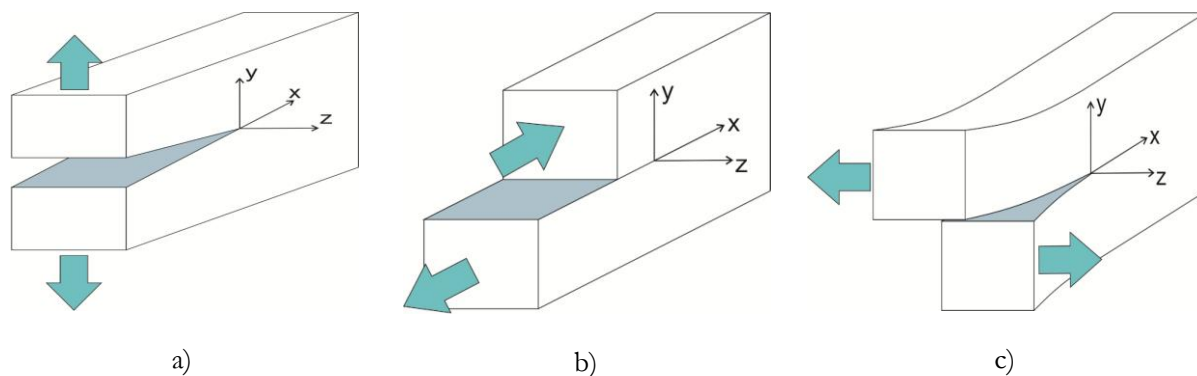
2.1 Zatěžovací módy

Existují tři základní módy zatěžování tělesa s trhlinou závislé na působení zatěžovací síly, viz Obr. 2. Každý další případ je potom superpozicí těchto tří případů. [1], [24]

Mód I – normálový – zatížení působí kolmo na líce trhliny a dochází k jejímu rozevírání, viz Obr. 2a. Dominantní složkou tenzoru napětí je v tom případě σ_y .

Mód II – smykový – zatížení působí ve směru rovnoběžném s lící trhliny a zároveň kolmo na její čelo, viz Obr. 2b. Dominantní složkou tenzoru napětí je σ_{xy} .

Mód III – antirovinový smyk – zatížení působí ve směru rovnoběžném s čelem trhliny, viz Obr. 2c. Dominantní složkou tenzoru napětí je σ_{yx} .



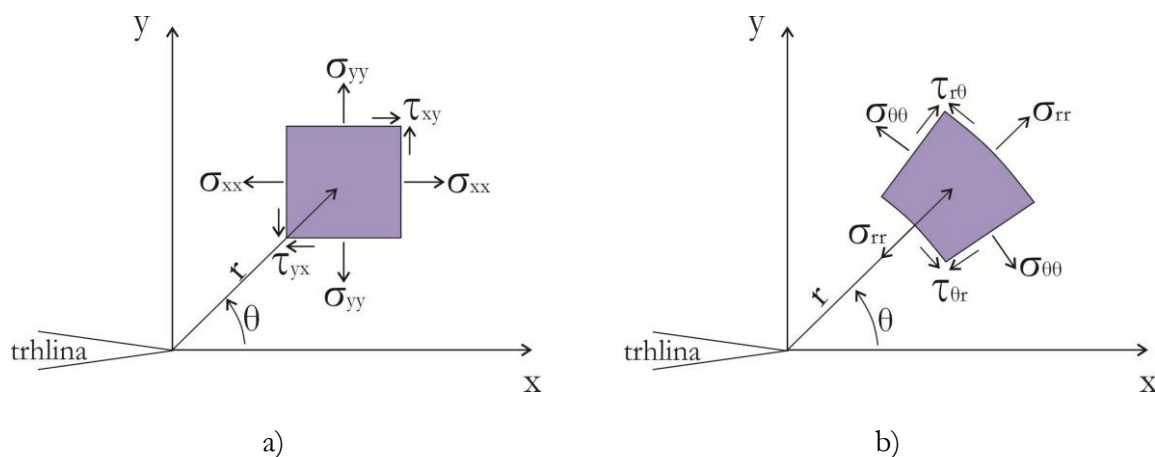
Obr. 2 Základní módy zatěžování tělesa s trhlinou: a) normálový, b) smykový, c) antirovinný smykový. [1], [24], [38]

2.2 Popis pole napětí v okolí kořene trhliny pomocí Airyho funkce napětí $\Phi(x,y)$

Z diferenciálních rovnic rovnováhy (bez uvažování objemových sil), konstitutivních vztahů lineárně elastického materiálu a rovnice kompatibility plyne:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = \Delta(\sigma_x + \sigma_y). \quad (2)$$

Souřadný systém, kartézský nebo polární, je obvykle definován v kořeni trhliny, viz Obr. 3.



Obr. 3 Lokální souřadnicový systém a) kartézský, b) polární umístěný v kořeni trhliny.

Rovnice rovnováhy lze splnit substitucí zavedením Airyho funkcí napětí $\Phi(x,y)$ [4]:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi(x,y)}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi(x,y)}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \Phi(x,y)}{\partial x \partial y}. \quad (3)$$

Rovnice rovnováhy a kompatibility jsou splněny dosazením (3) do (2):

$$\nabla^4 \Phi(x, y) = 0, \quad (4)$$

kde $\Phi(x, y)$ je bipotenciální (biharmonická) funkce. Řešení této funkce je hledáno ve tvaru nekonečné řady:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_k A_k r^{\lambda_k} f_k(\theta). \quad (5)$$

Po aplikaci okrajových podmínek pro volné líce trhliny (stejně lze odvodit výraz pro napětí ostrého V-vrubu) je pole napětí v okolí kořene trhliny popsáno pomocí Williamsova rozvoje [1]:

$$\sigma_{ij} = \frac{A_1}{\sqrt{r}} f_{ij}^{(1)}(\theta) + \frac{A_2}{\sqrt{r}} f_{ij}^{(2)}(\theta) + \frac{A_3}{\sqrt{r}} f_{ij}^{(3)}(\theta) + \dots, \quad (6)$$

kde můžeme zanedbat členy Williamsova rozvoje pro $k > 2$, protože:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} = 0 \quad (7)$$

a můžeme je tedy považovat za nepodstatné.

Vzhledem ke vzdálenosti od kořene trhliny je první člen singulární a druhý člen odpovídá napětí nezávislému na vzdálenosti od kořene trhliny, tzv. T-napětí.

2.3 Součinitel intenzity napětí K

Součinitel intenzity napětí K je také nazýván tzv. K -Konceptí, která patří mezi nejrozšířenější a nejvíce propracovanou koncepci. Je možné ji použít při statické i dynamické iniciaci trhliny. Předpokladem pro použití této koncepce je existence pouze malé plastické zóny.

K jednotlivým módům jsou přiřazeny součinitele intenzity napětí K_I , K_{II} a K_{III} , které charakterizují napjatost v tělese v okolí kořene trhliny. Rozložení napětí a posuvů před kořenem trhliny lze pro jednotlivé módy vyjádřit z následujících rovnic [1]:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_i}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(i)}(\theta), \quad i = I, II, III, \quad (8)$$

$$u_i = \frac{2K_i(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i(\theta, \nu), \quad i = I, II, III, \quad (9)$$

kde K_i ($i = I, II, III$) je součinitel intenzity napětí pro jednotlivé módy, $f_{ij}^{(i)}$ je známá funkce polohového úhlu θ , g_i je známá funkce polohového úhlu θ a Poissonova čísla ν a r je vzdálenost od kořene trhliny.

Pro dvourozměrný případ při použití polárního souřadného systému můžeme pole napětí před kořenem trhliny pro mód I a II vyjádřit ve známém tvaru [26], [14]:

- Mód I:

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right], \quad (10)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right], \quad (11)$$

$$\tau_{r\theta}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right). \quad (12)$$

- Mód II:

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right], \quad (13)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right), \quad (14)$$

$$\tau_{r\theta}(r, \theta) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]. \quad (15)$$

- Mód III:

$$\sigma_{r\theta}(r, \theta) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (16)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (17)$$

V případě obecného zatížení můžeme použít princip superpozice pro příspěvky napjatosti od jednotlivých módů [1]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^II + \sigma_{ij}^III = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(I)}(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(II)}(\theta) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(III)}(\theta). \quad (18)$$

Součinitel intenzity napětí závisí na okrajových podmínkách a na geometrii tělesa a trhliny, lze ho vyjádřit:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \cdot Y\left(\frac{a}{W}\right), \quad (19)$$

kde σ je normálové namáhání, a je délka trhliny a Y je korekční funkce závislá na geometrii tělesa. Korekčními funkcemi se zabývalo mnoho publikací, např. [18] - [22].

V rámci LELM existuje relace mezi součinitelem intenzity napětí K a hnací silou trhliny G :

$$G = \frac{K^2}{E'}, \quad (20)$$

kde pro rovinnou napjatost platí $E' = E$ a pro rovinnou deformaci $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$. E je modul pružnosti v tahu a ν je Poissonovo číslo.

2.4 Určení součinitele intenzity napětí K

K určení součinitele intenzity napětí byla vyvinuta celá řada metod (analytické, experimentální, inženýrské a numerické [38], [32]).

Použití analytických metod je značně omezeno, a to pouze na nejjednodušší případy. Mezi ně patří i rovinné úlohy. Patří sem např. komplexní napět'ové potenciály, konformní zobrazení, kolokace okrajových podmínek, metoda Greenovy funkce a metoda váhových funkcí.

Experimentální metoda již lze použít i pro složitější konstrukce s trhlínami. Zde se pro určení součinitele intenzity napětí (nebo hnací síly trhliny) měří poddajnost tělesa, rozevření trhliny (COD) nebo rozevření u čela trhliny (CTOD). U průhledných těles lze použít i fotoelasticimetrickou metodu. [38]

Inženýrskými metodami se myslí především užití tzv. handbooků. Ty obsahují velké množství geometrií s různými okrajovými podmínkami. Pro určení součinitele intenzity napětí používají aproximované analytické výrazy nebo tabulky sestavené na základě jiných metod. Např. to jsou [18] - [22].

Numerické metody se využívají především u složitějších úloh, kde můžeme součinitele intenzity napětí určit pomocí metody konečných prvků (MKP). Pro známé rozložení pole napětí v okolí vrcholu trhliny můžeme využít např. přímou metodu [1]. K dalším patří použití speciálních trhlínových prvků, energetické přístupy (hnací síly trhliny G , J -integrál) aj.

Přímá metoda

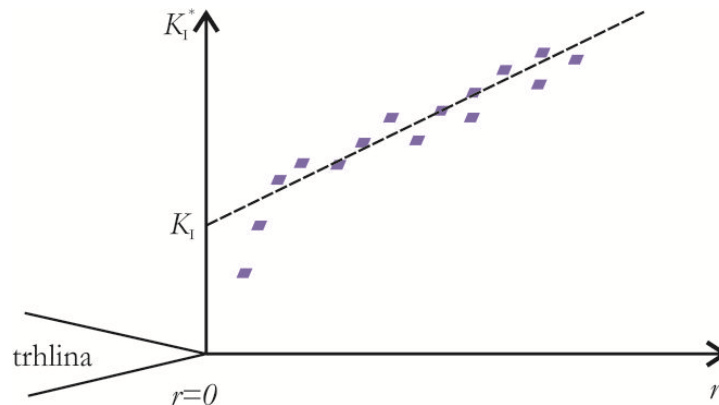
Součinitel intenzity napětí se vyhodnocuje buď z posuvů nebo z napětí v okolí kořene trhliny. Je tedy nutné použít definiční vztahy, pro mód I jde o (10) - (12). Tzv. otevírací napětí potom můžeme vyjádřit z rovnice (11) pro $\theta \rightarrow 0$ jako:

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}. \quad (21)$$

Z (21) potom snadno odvodíme výraz pro výpočet součinitele intenzity napětí:

$$K_I = \sigma_{yy} \sqrt{2\pi r}, \quad (22)$$

kde r je vzdálenost od vrcholu trhliny. Závislost $K_I = f(r)$ je vynesena do grafu a následně extrapolována, viz Obr. 4. Z extrapolovaných hodnot je nutné vyjmout prvky z těsné blízkosti kořene trhliny, protože jsou zatíženy velkou numerickou chybou a ponechat tedy jen lineární část grafu. Hodnota součinitele intenzity napětí je získána z této extrapolace pro $r \rightarrow 0$.



Obr. 4 Určení součinitele intenzity napětí extrapolací pomocí přímé metody. [1], [16], [32]

Nevýhodou této metody je, že je velice citlivá na kvalitu použité sítě. V oblasti blízké kořeni trhliny je nutné použít velice jemnou síť, což v případě 3D modelu geometrie značně zvyšuje nároky na výpočet.

2.5 Popis pole napětí v okolí vrcholu ostrého V-vrubu

Rozdělení napětí v okolí ostrého V-vrubu lze vyjádřit analogicky, jako v případě trhliny. Zde však není singularita typu $r^{-1/2}$, ale má podobu obecného koncentrátoru napětí (1), kde exponent singularity napětí $p \in (0;1)$.

Singulární rozdělení napětí před vrcholem V-vrubu lze vyjádřit pomocí řešení Airyho funkce napětí $\Phi(x,y)$ a aplikování okrajových podmínek ve tvaru:

$$\Phi(r, \theta) = r^{\lambda+1} [c_1 \sin(\lambda + 1) \theta^* + c_2 \cos(\lambda + 1) \theta^* + c_3 \sin(\lambda - 1) \theta^* + c_4 \cos(\lambda - 1) \theta^*] = r^{\lambda+1} F(\theta^*, \lambda), \quad (23)$$

K základním přístupům, jak vyřešit Airyho funkci napětí je použití Williamsova řešení [16]:

$$\sigma_{ij}^I = \frac{H_I}{\sqrt{2\pi}} \cdot r^{-p_I} \cdot f_{ij}^I(p_I, \theta), \quad (24)$$

$$\sigma_{ij}^{II} = \frac{H_{II}}{\sqrt{2\pi}} \cdot r^{-p_{II}} \cdot f_{ij}^{II}(p_{II}, \theta), \quad (25)$$

kde koeficienty c_1, c_2, c_3 a c_4 jsou konstanty, $\lambda = 1 - p$ je vlastní číslo a θ^* je úhel znázorněný na Obr. 5.

Pro složky napětí obdržíme vztahy:

$$\sigma_{rr} = r^{\lambda-1} [F''(\theta^*) + (\lambda + 1)F(\theta^*)], \quad (26)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = r^{\lambda-1} [\lambda(\lambda + 1)F(\theta^*)], \quad (27)$$

$$\sigma_{r\theta} = r^{\lambda-1} [-\lambda F'(\theta^*)], \quad (28)$$

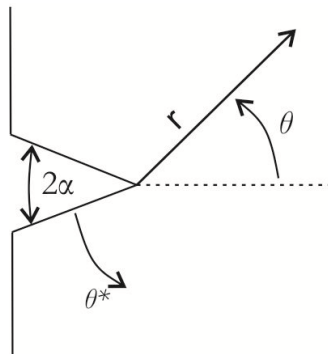
kde $F' = \frac{\partial F}{\partial \theta^*}$. Pro nezatížené líce V-vrubu jsou uvažovány následující okrajové podmínky:

$$\sigma_{\theta\theta}(\theta = \pi - \alpha) = 0, \quad (29)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(\theta = \pi + \alpha) = 0, \quad (30)$$

$$\sigma_{r\theta}(\theta = \pi - \alpha) = 0, \quad (31)$$

$$\sigma_{r\theta}(\theta = \pi + \alpha) = 0. \quad (32)$$



Obr. 5 Ostrý V-vrub.

Za použití uvedených podmínek jsou sestaveny čtyři rovnice, které obsahují pět neznámých, a koeficienty c_1, c_2, c_3 a c_4 a vlastní číslo λ . Rovnice zapsané do maticového tvaru:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (33)$$

kde $\mathbf{x} = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4]^T$. Neznámá λ je vypočtena z definice:

$$\det(\mathbf{A}) = 0. \quad (34)$$

Pro známé vlastní číslo λ je potom možné vypočítat vektor neznámých \mathbf{x} .

2.6 Zobecněný součinitel intenzity napětí H

V případě zobecněného součinitele intenzity napětí H je používána singularita, kdy $p \neq 1/2$, ale má podobu obecného koncentrátoru napětí (1), kde exponent singularity napětí $p \in (0;1)$. Tento exponent lze spolu s konstantou q pro mód I a II vyjádřit ze vztahů [10]:

$$\sin(2(1-p_I)(\pi-\alpha)) + (1-p_I)\sin(2(\pi-\alpha)) = 0, \quad (35)$$

$$\sin(2(1-p_{II})(\pi-\alpha)) - (1-p_{II})\sin(2(\pi-\alpha)) = 0, \quad (36)$$

$$q_I = -\frac{\cos(p_I(\pi-\alpha))}{\cos((2-p_I)(\pi-\alpha))}, \quad (37)$$

$$q_{II} = -\frac{\sin(p_{II}(\pi-\alpha))}{\sin((2-p_{II})(\pi-\alpha))}. \quad (38)$$

Konstanty p_I , p_{II} a q_I , q_{II} závisí pouze na úhlu otevření vrubu, jejich hodnoty pro mód I a II jsou uvedeny v Tab. 1.

Tab. 1 Hodnoty exponentu singularity p_I , p_{II} a konstanty q_I , q_{II} . [10]

α [°]	p_I	q_I	p_{II}	q_{II}
0	0,500	0,333	0,500	1,000
5	0,500	0,336	0,471	0,992
10	0,500	0,343	0,438	0,966
15	0,499	0,356	0,402	0,921
20	0,497	0,373	0,362	0,855
25	0,493	0,395	0,318	0,767
30	0,488	0,423	0,269	0,658
35	0,480	0,457	0,216	0,529
40	0,470	0,497	0,157	0,382
45	0,456	0,543	0,191	0,219
50	0,437	0,595	0,020	0,045
55	0,414	0,653	0,000	0,000
60	0,384	0,714		
65	0,348	0,778		
70	0,303	0,841		
75	0,248	0,901		
80	0,181	0,951		
85	0,100	0,986		
90	0,000	1,000		

Uvedené hodnoty exponentu singularity napětí p jsou uvedeny pro tělesa o větších tloušťkách, tzn. pro tělesa, kde není významný vliv volného povrchu na šíření únavových trhlin. Volný povrch může u součástí s malou tloušťkou způsobit změnu charakteru rozložení napětí a změnu exponentu singularity napětí.

Po dosažení hodnoty λ získávají rovnice pro popis pole napětí v okolí kořene V-vrubu (26) - (28) tvar:

- Múd I:

$$\sigma_{\theta\theta}^I = \frac{H_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-p_I} [(2 - 3p_I + p_I^2) \cos p_I \theta + q_I (2 - 3p_I + p_I^2) \cos(2 - p_I) \theta], \quad (39)$$

$$\sigma_{rr}^I = \frac{H_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-p_I} [(2 - p_I - p_I^2) \cos p_I \theta - q_I (2 - 3p_I + p_I^2) \cos(2 - p_I) \theta], \quad (40)$$

$$\sigma_{r\theta}^I = \frac{H_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-p_I} [p_I (1 - p_I) \sin p_I \theta + q_I (2 - 3p_I + p_I^2) \sin(2 - p_I) \theta], \quad (41)$$

- Múd II:

$$\sigma_{\theta\theta}^{II} = \frac{H_{II}}{\sqrt{2\pi}} r^{-p_{II}} [-(2 - 3p_{II} + p_{II}^2) \sin p_{II} \theta - q_{II} (2 - 3p_{II} + p_{II}^2) \sin(2 - p_{II}) \theta], \quad (42)$$

$$\sigma_{rr}^{II} = \frac{H_{II}}{\sqrt{2\pi}} r^{-p_{II}} [-(2 - p_{II} - p_{II}^2) \sin p_{II} \theta + q_{II} (2 - 3p_{II} + p_{II}^2) \sin(2 - p_{II}) \theta], \quad (43)$$

$$\sigma_{r\theta}^{II} = \frac{H_{II}}{\sqrt{2\pi}} r^{-p_{II}} [p_{II} (1 - p_{II}) \cos p_{II} \theta + q_{II} (2 - 3p_{II} + p_{II}^2) \cos(2 - p_{II}) \theta], \quad (44)$$

kde H_I a H_{II} jsou zobecnění součinitelé intenzity napětí a konstanty p_I , p_{II} a q_I , q_{II} lze vyjádřit z rovnic (35)-(38).

3 KRITÉRIA STABILITY

Kritériem stability rozumíme podmínky, kdy se z uvažovaného koncentrátoru začne šířit nebo iniciovat trhlina. Tato kritéria mohou být definována na základě energetickém (koncepte hnací síly trhliny G , koncepte hustoty deformační energie, koncepte J -integrálu) nebo odvozená z pole napětí a posuvů (koncepte součinitele intenzity napětí K , koncepte kritického rozevření trhliny COD). [32]

V rámci LELM můžeme definovat lomově-mechanické parametry L , které popisují chování trhlín. Například se může jednat o součinitel intenzity napětí K , zobecněný součinitel intenzity napětí H , hnací sílu trhliny G , J -integrál atd. Tyto veličiny lze stanovit výpočtem jako funkci proměnných, které jsou pro daný mechanismus porušená rozhodující. Srovnáním těchto parametrů s jejich kritickými hodnotami L_c (K_c , H_c , G_c , J_c) zjištěnými experimentálně, které považujeme za materiálové charakteristiky lze stanovit podmínku stability [24]:

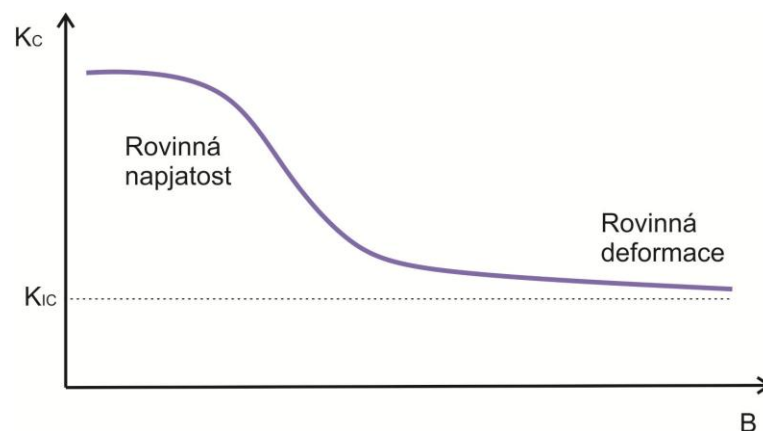
$$L < L_c. \quad (45)$$

3.1 Vliv volného povrchu na chování trhliny

Hodnocení stability trhliny se provádí pomocí různých kritérií. V praxi se velice často používá kritérium založené na koncepci součinitele intenzity napětí, kdy:

$$K_I < K_{IC}, \quad (46)$$

kde K_{IC} je lomová houževnatost, která vyjadřuje odolnost materiálu vůči iniciaci a růstu trhliny a je získána experimentálně. Tato hodnota je závislá na tloušťce tělesa, rychlosti zatěžování, teplotě, druhu pracovního prostředí, atd. [38]



Obr. 6 Vliv tloušťky vzorku na hodnotu lomové houževnatosti vzorku. [40], [38]

Závislost lomové houževnatosti na tloušťce tělesa je uvedena na Obr. 6. U těles s malou tloušťkou převládá stav rovinné napjatosti a hodnota lomové houževnatosti bývá podstatně vyšší než u těles s větší tloušťkou (stav rovinné deformace). Aby bylo dosaženo lomové houževnatosti při rovinné deformaci v oblasti čela trhliny, uvádí se, že pro těleso platí vztah:

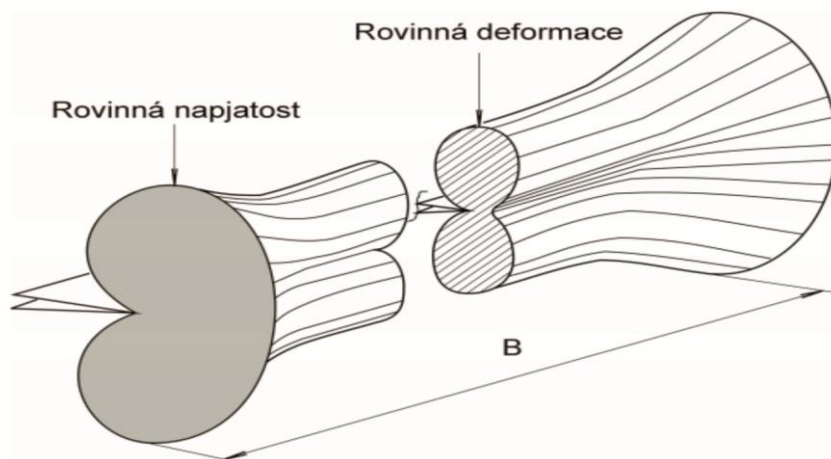
$$B \geq 2,5 \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_{ys}} \right)^2, \quad (47)$$

kde B je tloušťka tělesa a σ_{ys} je mez kluzu materiálu.

Stav rovinné napjatosti ve vzorku převládá v případě, že velikost plastické zóny a tloušťky vzorku je řádově stejná:

$$r_p = B = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_{ys}} \right)^2. \quad (48)$$

S podmínkami rovinné deformace také souvisí změna tvaru a velikosti plastické zóny po tloušťce tělesa, viz Obr. 7.



Obr. 7 Změna tvaru a velikosti plastické zóny po tloušťce tělesa. [38]

Stanovení K_{IC}

Hodnota lomové houževnatosti K_{IC} udává odolnost materiálu proti statické iniciaci křehkého porušení při rovinné deformaci v oblasti kořene trhliny a to za platnosti předpokladů LELM.

Tato hodnota se stanovuje experimentálně zkouškami těles pro trojbodový ohyb nebo excentrický tah. Zkoušky popisuje norma ČSN EN ISO 12373 „Kovové materiály – Určení lomové houževnatosti“. Kromě určení K_{IC} norma zahrnuje i určení δ_C , J_{IC} a R-křivek. [38]

3.2 Kritérium hustoty deformační energie

Koncepce faktoru hustoty deformační energie S byla původně uvedena pro trhliny [29]. Koncepce součinitele intenzity napětí K předpokládá, že iniciovaná trhlina poroste ve směru původní trhliny, ve všech třech základních módech zatěžování. Toto je splněno v laboratorních podmínkách, ale nikoliv vždy u reálných konstrukcí.

Sihovo vypracování koncepce deformační energie umožnilo stanovení podmínek pro iniciaci nestabilního růstu a možnost stanovit směr tohoto růstu. Zobecněnou koncepci deformační energie je možné aplikovat na vruby.

3.2.1 Rozložení hustoty deformační energie

Hustota deformační energie se obecně vyjádří ve tvaru:

$$w = \frac{dW}{dV} = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (49)$$

Pro rovinnou úlohu můžeme hustotu deformační energie vyjádřit [10]:

$$w = \frac{dW}{dV} = k_n(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2, \quad (50)$$

kde $n = 1, 2$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II}$. Pro rovinnou napjatost platí vztah:

$$k_1 = \frac{1 - \nu}{1 + \nu}, \quad (51)$$

pro rovinnou deformaci platí vztah:

$$k_2 = 1 - 2\nu, \quad (52)$$

kde ν je Poissonovo číslo.

Rozložení hustoty deformační energie v okolí ostrého V-vrubu:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{A_{11}H_1^2 + 2A_{12}H_1H_2 + A_{22}H_2^2}{r}, \quad (53)$$

kde H_1 a H_2 jsou hodnoty zobecněných součinitelů intenzity napětí a A_{11} , A_{12} a A_{22} jsou funkcemi polárního úhlu θ a vzdálenosti od vrcholu trhliny r , vyjádřené vztahy:

$$A_{11} = \frac{k_n U_I + V_I}{16\pi\mu} r^{1-2p_I}, \quad (54)$$

$$A_{22} = \frac{k_n U_{II} + V_{II}}{16\pi\mu} r^{1-2p_{II}}, \quad (55)$$

$$A_{12} = \frac{k_n Q + T}{16\pi\mu} r^{1-p_I-p_{II}}, \quad (56)$$

kde μ je modul pružnosti ve smyku a:

$$U_I = 16(1-p_I)^2 \cos^2 p_I \theta, \quad (57)$$

$$V_I = 4(p_I^2(1-p_I)^2 + q_I^2(2-3p_I+p_I^2)^2 - 2p_I q_I(1-p_I)(2-3p_I+p_I^2)) \cos 2\theta, \quad (58)$$

$$U_{II} = 16(1-p_{II})^2 \sin^2 p_{II} \theta, \quad (59)$$

$$V_{II} = 4(p_{II}^2(1-p_{II})^2 + q_{II}^2(2-3p_{II}+p_{II}^2)^2 - 2p_{II} q_{II}(1-p_{II})(2-3p_{II}+p_{II}^2)) \cos 2\theta, \quad (60)$$

$$Q = -16(1-p_I)(1-p_{II}) \cos p_I \theta \sin p_{II} \theta, \quad (61)$$

$$T = 4 \left[\begin{array}{l} p_I p_{II} (1-p_I)(1-p_{II}) \sin(p_I - p_{II}) \varphi + \\ + q_I q_{II} (2-3p_I+p_I^2)(2-3p_{II}+p_{II}^2) \sin(p_{II} - p_I) \varphi + \\ + q_{II} p_I (1-p_I)(2-3p_{II}+p_{II}^2) \sin(2+p_I - p_{II}) \varphi + \\ + q_I p_{II} (1-p_{II})(2-3p_I+p_I^2) \sin(2+p_{II} - p_I) \varphi \end{array} \right]. \quad (62)$$

3.2.2 Zobecněný faktor hustoty deformační energie

Zobecněný faktor hustoty deformační energie je vyjádřen ve vztahu:

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{\Sigma(\alpha, \theta, r, \nu, \mu)}{r}, \quad (63)$$

kde Σ je zobecněný faktor hustoty deformační energie a platí:

$$\Sigma = A_{11} H_1^2 + 2A_{12} H_1 H_2 + A_{22} H_2^2. \quad (64)$$

Pro trhlinu platí $H_I = K_I$ a $H_{II} = K_{II}$. Faktor hustoty deformační energie má potom tvar:

$$\Sigma(\alpha = 0) = a_{11} K_1^2 + 2a_{12} K_1 K_2 + a_{22} K_2^2 = S, \quad (65)$$

kde S je faktor deformační energie pro trhlinu vyjádřený Sihem [29].

Trhlina se bude vždy šířit ve směru minimální hodnoty faktoru hustoty deformační energie. V případě módu I se jedná o $\theta = 0$. Proto lze pro V-vrub (resp. pro trhlinu) zatížený módem I vyjádřit (zobecněný) faktor hustoty deformační energie ve tvaru:

$$\Sigma = A_{11}H^2, \text{ resp. } S = a_{11}K^2, \quad (66)$$

kde a_{11} je funkcí polárního úhlu φ , která ale není závislá na vzdálenosti od vrcholu trhliny r na rozdíl od A_{11} .

3.2.3 Kritérium stability

Kritérium stability je vyjádřeno pomocí kritických hodnot faktorů deformační energie:

$$A_{11}H_{IC}^2 = a_{11}K_{IC}^2, \quad (67)$$

kde hodnotu funkce A_{11} uvažujeme pro $r = d$ a je vyjádřena ze vztahu (54) pomocí (57) a (58) a kde a_{11} vyjádříme jako:

$$a_{11} = \frac{(2k_n + 1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)}{16\pi\mu}, \quad (68)$$

kde k_n je vyjádřeno pomocí (51) nebo (52).

Dosažením do podmínky (65) potom dostaneme vztah pro vyjádření zobecněné lomové houževnatosti H_{IC} pomocí lomové houževnatosti K_{IC} a výše uvedených funkcí:

$$H_{IC} = K_{IC}d^{p-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{4k_n}{k_n U_1(\varphi = 0) + V_1(\theta = 0)}}, \quad (69)$$

kde již výše zmíněná hodnota d je kritická vzdálenost, viz kap. 3.4.

Kritérium stability je potom uvažováno ve tvaru:

$$H_{IC}(K_{IC}, \alpha) > H(\sigma_{appl}, \alpha), \quad (70)$$

kdy závislost $H_I = H_I(\sigma_{appl}, a)$ je určena numericky pro dané okrajové podmínky a hodnota zobecněné lomové houževnatosti je vždy funkcí parametru d .

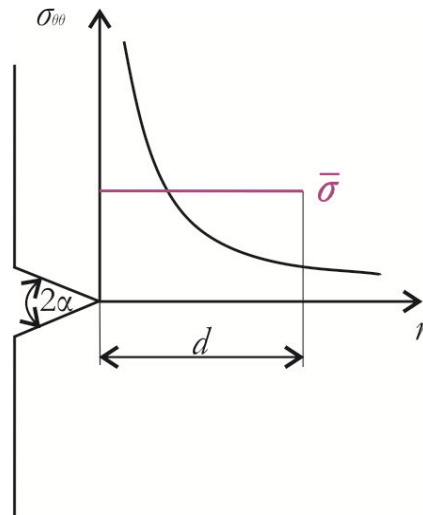
3.3 Kritérium střední hodnoty napětí $\bar{\sigma}$

3.3.1 Střední hodnota napětí $\bar{\sigma}$

Základní charakteristikou tohoto kritéria je střední hodnota normálové složky napětí určená před vrcholem V-vrubu ve směru iniciované trhliny, viz Obr. 8.

Střední hodnota napětí $\bar{\sigma}$ je určena z hodnoty maximálního nominálního napětí $(\sigma_{\theta\theta})_{max}$ ve vzdálenosti 0 až d před vrcholem V-vrubu [9]:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{d} \int_0^d (\sigma_{\theta\theta})_{max} dr. \quad (71)$$



Obr. 8 Střední hodnota napětí v kritické vzdálenosti d od kořene V-vrubu.

3.3.2 Kritérium stability

Pokud je tato hodnota srovnána s kritickou hodnotou napětí, dostáváme kritérium stability ve tvaru [9]:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{d} \int_0^d (\sigma_{\theta\theta})_{max} dr < \sigma_{crit}. \quad (72)$$

Úpravou toho kritéria můžeme získat vztah pro výpočet kritické hodnoty napětí σ_{crit} pro trhlinu:

$$\sigma_{crit} = \frac{2K_{IC}}{\sqrt{2\pi d}} \quad (73)$$

Pokud (72) aplikujeme na V-vrub, dostaneme hodnotu kritického napětí σ_{crit} ve tvaru:

$$\sigma_{crit} = \frac{2H_{IC}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(2-p)(1+q)}{d^p}, \quad (74)$$

kde pro zjednodušení není uváděn index módu, H_{IC} zobecněná lomová houževnatost, p je exponent singularity napětí, který je možné získat z (35) - (36) nebo Tab. 1, q je parametr závislý na úhlu otevření V-vrubu $2a$ a lze ho získat z (37) - (38) nebo je uveden v Tab. 1.

Úpravou rovnosti rovnic (73) a (74) získáme finální vztah pro závislost zobecněné lomové houževnatosti H_{IC} na lomové houževnatosti tělesa K_{IC} , úhlu otevření vrubu $2a$ a kritické vzdálenosti d (viz kap. 3.4):

$$H_{IC} = K_{IC} \frac{2d^{p-\frac{1}{2}}}{(2-p)(1+q)}. \quad (75)$$

Výsledné kritérium stability má potom stejný tvar, jako v případě kritéria formulovaného na základě hustoty deformační energie, tj.:

$$H_{IC}(K_{IC}, \alpha) > H(\sigma_{appl}, \alpha). \quad (76)$$

3.4 Kritická vzdálenost d

Pro určení této hodnoty neexistuje jednotný vztah. Za tuto vzdálenost se nejčastěji uvažuje např. velikost zrna, velikost procesní zóny, velikost plastické zóny. Vždy je tato hodnoty vyjádřena vztahem [43]:

$$d = C \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_c} \right)^2, \quad (77)$$

kde C je konstanta, která se liší podle práce autora. Shrnutí je uvedeno v přehledové práci [43].

Autoři [28] porovnávali vypočtené hodnoty kritického zatížení získané pomocí čtyř různých kritérií s experimentálně získanými hodnotami pro vzorek z PMMA zatížený ohybem. Pro výpočet kritické vzdálenosti d použili vztahy (78) - (83). [43]

Vztah z [28] byl odvozen z kritéria hustoty deformační energie a je vyjádřen ve tvaru:

$$d_1 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{IC}}{1,122 \cdot \sigma_c} \right)^2, \quad (78)$$

Druhý vztah stojí na předpokladu kritéria maximální rychlosti uvolňované energie [28]:

$$d_2 = 0,474 \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_c} \right)^2, \quad (79)$$

Další vztah pro vyjádření kritické vzdálenosti d je použit v kritériu hustoty deformační energie vyjádřené Sihem [30], [28]:

$$d_3 = \frac{1-\nu}{\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_c} \right)^2, \quad (80)$$

Následující vztah je možné použít pro předpověď křehkého porušení pomocí kritéria Griffith-Irwin [28], [5], [7]:

$$d_4 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_c} \right)^2, \quad (81)$$

Stejný vztah, jak je v rovnici (81) pro vyjádření kritické vzdálenosti d používá ve své práci i David Taylor [35], [36], [37], kde popisuje vlastní teorii „Teorie kritické vzdálenosti“ (TCD). Porovnání analyticky a experimentálně zjištěných hodnot kritického zatížení bylo provedeno pro polykarbonát a ocel při nízkých teplotách v práci [37] při použití Taylorovy TCD teorie. [43]

Tento vztah byl vyjádřen pro trhlinu v případě křehkého porušení, jak je uvedeno v [27], [28]:

$$d_5 = \frac{2}{\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_c} \right)^2, \quad (82)$$

Vztah pro výpočet kritické vzdálenosti d pro předpověď křehkého porušení na základě kritéria stability Griffith-Irwin pro případ rovinné deformace [5], [7] má tvar:

$$d_6 = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_c} \right)^2, \quad (83)$$

Autoři v práci [42] porovnávají vypočtené hodnoty kritického zatížení vzorku s V-vrubem z PMMA a keramiky s experimentálně zjištěnými daty. Bylo použito kritérium založené na hustotě deformační energie (SED) vyjádřené pro stav rovinné deformace:

$$d_7 = \frac{(1 + \nu)(5 - 8\nu)}{4\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_c} \right)^2, \quad (84)$$

kde ν je Poissonovo číslo, K_{IC} je lomová houževnatost a σ_c je pevnost v tahu. Hodnoty jsou materiálovými charakteristikami.

Pro stav rovinné napjatosti využíváme vztahy (78) - (82) a pro rovinnou deformaci (83) - (84).

4 FORMULACE PROBLÉMU A CÍLE PRÁCE

Předmětem řešení této diplomové práce je stanovení počátku šíření trhliny z ostrého V-vrubu za pomoci zobecněné LELM. K tomuto odhadu je nutné použít vhodná kritéria založená na aplikaci zobecněné LELM. Ostrý V-vrub patří mezi obecné singulární koncentrátory napětí, které se v technické praxi vyskytují velice často. Z tohoto důvodu je možné v literatuře najít mnoho prací zabývajících se tímto tématem, např. [8], [9], [10], [15], [27], [28], [29], [41]. Nicméně ne všechny otázky týkajícího se tohoto tématu jsou uspokojivě vyřešeny.

V této práci jsou použita kritéria používající koncepci zobecněného součinitele intenzity napětí H , který charakterizuje rozdělení napětí v tělese v okolí kořene V-vrubu. K jeho určení je nezbytné znát i exponent singularity napětí p , který je závislý na úhlu otevření V-vrubu α . Existence volného povrchu vyvolává změnu exponentu singularity napětí způsobenou existencí rohové singularity. Prvním vybraným kritériem je zobecněná koncepce faktoru hustoty deformační energie, která umožní stanovit počátek nestabilního růstu trhliny (a také směr jejího růstu) v křehkých materiálech. Druhým kritériem je koncepce střední hodnoty napětí založené na hodnotě normálové složky napětí určené před vrcholem V-vrubu ve směru iniciované trhliny. Obě kritéria jsou sestavena na základě podobnosti chování trhlín a V-vrubů.

Pro stanovení exponentů singularity napětí je nezbytné:

1. Vytvořit trojdimensionální výpočtové modely zkušebních vzorků s V-vrubem. Odlišnost vzorků spočívá v typu použitých materiálů, úhlech otevření V-vrubů α a typech zatížení.
2. Popsat rozložení singulárního pole napětí v okolí vrcholu V-vrubu v závislosti na tloušťce vzorku.
3. Určit hodnoty exponentů singularity napětí uprostřed vzorků a na volném povrchu a stanovit tak vliv volného povrchu, kde převládá rohová singularita.

Pro stanovení kritických hodnot aplikovaného napětí je nezbytné:

1. Ze stanoveného rozložení singulárního pole napětí v okolí vrcholu V-vrubu stanovit zobecněný součinitel intenzity napětí H za použití přímé metody.
2. Aplikovat zobecněnou koncepci faktoru hustoty deformační energie a koncepci střední hodnoty napětí pro výpočet kritické hodnoty maximálního napětí v závislosti na kritické vzdálenosti d uprostřed vzorku i na volném povrchu.
3. Získané výsledky porovnat s daty dostupnými v literatuře.

Výsledkem je pak kritická hodnota aplikovaného zatížení, při které se začne z ostrého V-vrubu šířit trhlina. Výpočtem stanovená hodnota kritického napětí bude porovnána s dostupnými experimentálními daty v literatuře a to pro případ tělesa s V-vrubem zatíženého tahem a ohybem.

5 ŘEŠENÍ ZADANÉHO PROBLÉMU

Pro řešení zadaného problému je potřeba znát rozložení napětí před vrcholem V-vrubu. K jeho stanovení je zapotřebí určit hodnotu exponentu singularity napětí a zobecněného součinitele intenzity napětí H . U silnějších zkušebních těles toto rozdělení napětí odpovídá 2D řešení za podmínky rovinné deformace. U tenkých vzorků se již významněji projevuje vliv volného povrchu, který způsobuje změnu v rozložení pole napětí, změnu singularity, a tím dochází ke změně chování trhliny šířící se z vrcholu V-vrubu. Určení napjatosti u čela V-vrubu s volným povrchem je již složitější a proto nelze použít klasický popis V-vrubu (získaný analyticky), odvozený a platný pro singularitu typu $1/r^p$.

Z důvodu neexistence analytického řešení beroucího v potaz vliv singularity napětí v podélné rovině tělesa a zároveň vliv tzv. rohové singularity, je rozložení pole napětí odhadnuto numericky za pomoci metody konečných prvků. K numerickému řešení bylo využito systému ANSYS, který patří ke komerčně nejpoužívanějším a je také dostupný na ÚMTMB FSI VUT v Brně.

5.1 Stanovení exponentu singularity napětí

Primárně je doporučeno získávat exponent singularity napětí p analyticky ze vztahů (35) a (36). Numerický odhad je vhodné používat pouze v případě, že analytické řešení není pro daný případ známo.

Analytické řešení odpovídá 2D řešení za podmínky rovinné deformace, tj. za stavu, který odpovídá prostředku tělesa. Pro tenké 3D těleso zatížené tahem již toto řešení nemusí odpovídat skutečnosti, protože vlivem volného povrchu dochází ke změně rozdělení pole napětí a tedy i změně exponentu singularity napětí. Tento fakt není v analytickém řešení, uvedeném v předcházejících kapitolách, zahrnut.

5.1.1 Postup numerického určení exponentu singularity napětí

Numerické určení exponentu singularity napětí lze provést, pokud je známé rozložení pole napětí (posuvů) v okolí obecného singulárního koncentrátoru napětí.

Rozdělení napětí před vrcholem V-vrubu pro 2D těleso můžeme vyjádřit [23]:

$$\sigma_{ij} = \frac{H}{r^p} \cdot f(p, \theta), \quad (85)$$

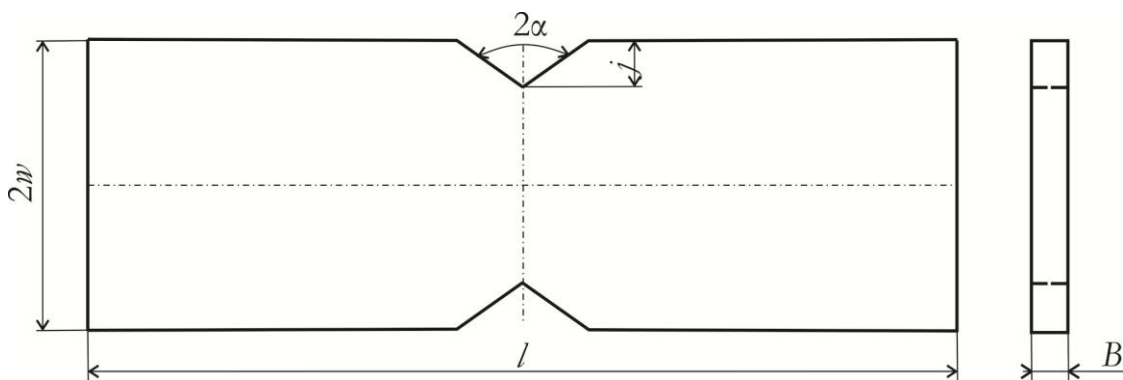
kde H je zobecněný součinitel intenzity napětí, p je exponent singularity napětí a r , θ jsou souřadnice s počátkem ve vrcholu V-vrubu, viz Obr. 3. V okolí kořene V-vrubu lze rozložení pole napětí vyjádřit pomocí (39) - (44). Zde budou použity pouze vztahy (39) - (41), protože se zabýváme pouze tahovým módem I.

Určení exponentu singularity napětí plyne přímo ze vztahu (85). Rozdělení pole napětí je možné získat numericky pomocí konečnoprvkového systému ANSYS. Byla vybrána složka napětí kolmá na směr šíření trhliny z koncentrátoru. Vykreslením závislosti toho napětí na vzdálenosti r v log-log souřadnicovém systému získáme závislost, kterou lze aproximovat za pomoci metody nejmenších čtverců lineární funkcí. Exponent singularity napětí potom odpovídá směrnici této přímky. Metodika je podobná, jak při určování hodnoty součinitele intenzity napětí K pomocí přímé metody v kapitole 2.4.

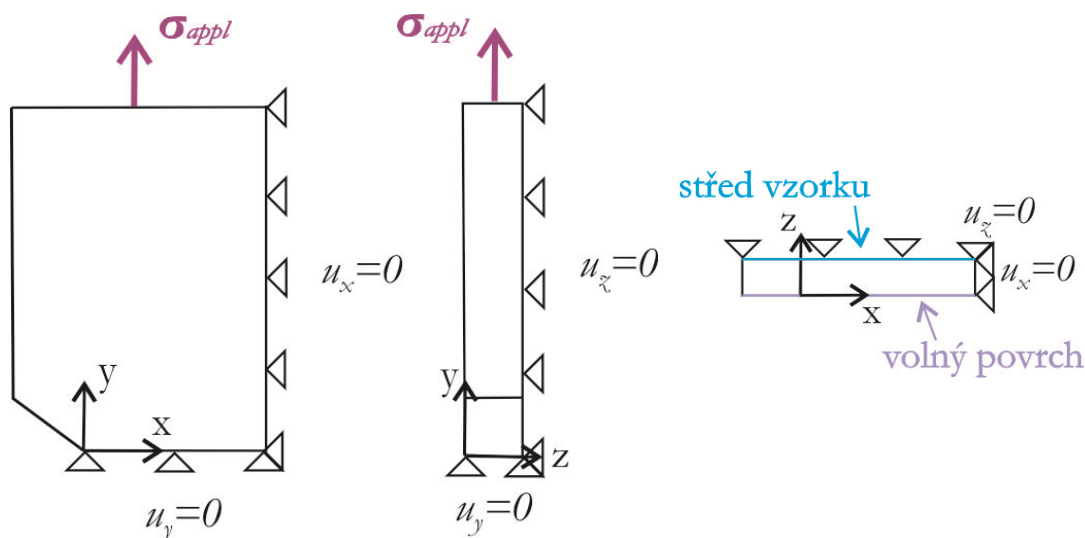
Při určování exponentu singularity napětí pomocí rozložení pole napětí v okolí kořene V-vrubu je nutné mít velmi jemnou síť v okolí tohoto koncentrátoru. Přesnost metody je na ní závislá, čímž se zvyšují nároky na výpočtový čas i přípravu modelu.

5.1.2 Numerický model tělesa s V-vrubem namáhaným tahem

Geometrie je zvolena tak, aby bylo možné získané výsledky porovnat s výsledky experimentální analýzy [27]. Model geometrie tělesa je uveden na Obr. 9.



Obr. 9 Rozměry tělesa s V-vrubem.



Obr. 10 Aplikované okrajové podmínky a zatížení na numerickém modelu.

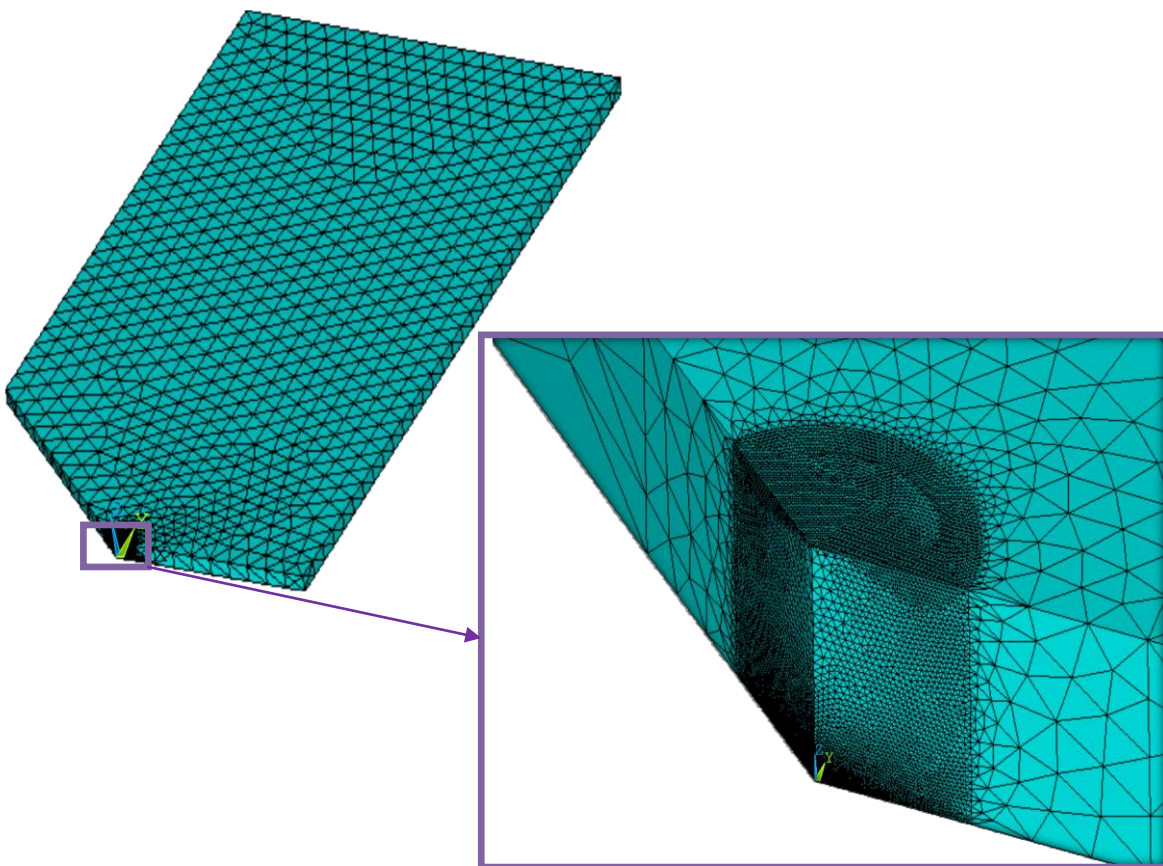
Rozměry vzorku jsou: délka $l = 192$ mm, šířka $2w = 109$ mm, hloubka vrubu $j = 27$ mm, úhel otevření $\alpha = 0 \div 80^\circ$ v krocích po 10° . Model je vytvořen pro dva různé materiály, a to pro dural

a polymethylmetakrylát (PMMA), lidově řečeno plexisklo. Tloušťka vzorku je různá pro každý z použitých materiálů. Pro dural je $B = 5$ mm a pro PMMA je $B = 4$ mm.

Pro dural jsou definovány elastické konstanty $E = 70\,000$ MPa, $\nu = 0,33$ a pro PMMA $E = 2\,300$ MPa a $\nu = 0,36$.

Nezbytné numerické výpočty byly provedeny pomocí metody konečných prvků (MKP) výpočetním systémem ANSYS. Vzhledem k určování vlivu závislosti exponentu singularity napětí na volném povrchu byl vzorek modelován jako 3D těleso. Protože je těleso symetrické ve třech osách, lze pro výpočet použít pouze osminový model a aplikovat okrajové podmínky symetrie. Na model je aplikováno jednotkové zatížení, viz Obr. 10.

Z důvodu přesnosti výsledků je nutné v okolí vrcholu V-vrubu použít velmi jemnou síť (viz Obr. 11), což v případě 3D geometrie vede k vyšším nárokům na hardware a výpočtový čas. V okolí vrcholu V-vrubu v numerickém modelu jsou použity speciální trhlinové prvky, které lépe zachytí gradientní změnu napětí.



Obr. 11 Konečnoprvková síť numerického modelu. Detail zjemnění sítě v okolí vrcholu V-vrubu

5.1.3 Numericky odhadnuté hodnoty exponentu singularity napětí p

Exponent singularity napětí byl numericky vypočítán pro $\alpha = 0 \div 80^\circ$ pro dural i PMMA v krocích po 10° . Jeho hodnota byla vyčíslována uprostřed vzorku (Tab. 2) i na volném povrchu (Tab. 3), viz Obr. 10, aby bylo možné vyhodnotit vliv volného povrchu na singularitu napětí.

APLIKACE ZOBECNĚNÉ LINEÁRNĚ ELASTICKÉ LOMOVÉ MECHANIKY
NA ODHAD POČÁTKU ŠÍŘENÍ TRHLINY Z OSTRÉHO V-VRUBU

V blízkosti volného povrchu dochází k poklesu exponentu singularity napětí, jak je uvedeno v [31], což je způsobeno vlivem rohové singularity.

Exponent singularity p je pro 2D řešení totožný s analytickým řešením. Z uvedených výsledků vyplývá, že analytické řešení vykazuje velice dobrou shodu i s 3D řešením uprostřed vzorku, protože odchylka numerického řešení je zde vždy menší než 1%. Na volném povrchu 3D tělesa již hodnoty exponentu singularity p nevykazují dobrou shodu s analytickým řešením, což je patrné z Obr. 12. Rozptyl výsledků je způsobený vlivem rohové singularity, která má na volném povrchu významný vliv, jak je uvedeno v kapitole 5.3.1.

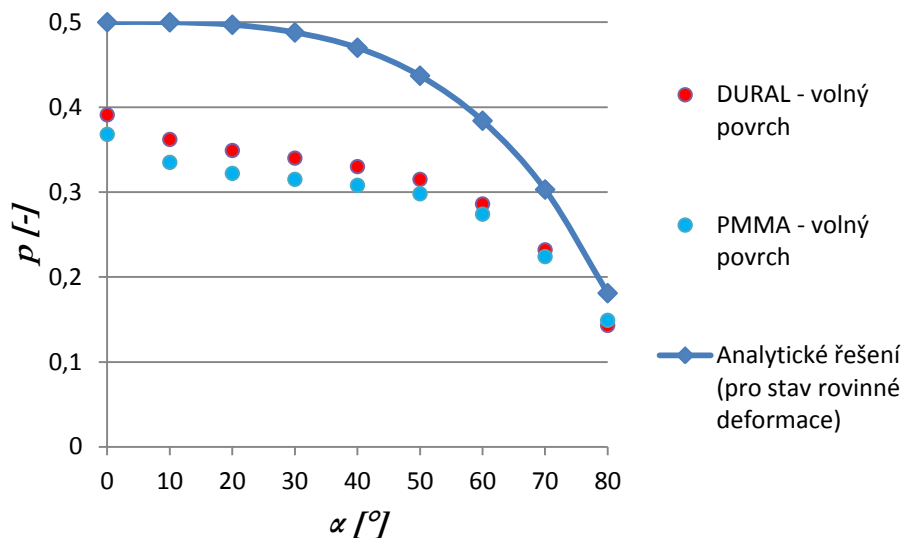
Exponent singularity napětí je funkcí úhlu otevření V-vrubu α a není závislý na materiálových parametrech. Rozdíly mezi hodnotami pro dural a pro PMMA jsou způsobeny pouze numerickou chybou sítě (díky rozdílné tloušťce modelovaných těles, nebyly konečnoprvkové sítě shodné), ne vlivem použitého materiálu.

Tab. 2 Numericky a analyticky vypočtené hodnoty exponentu singularity napětí p tělesa s V-vrubem uprostřed vzorku.

α [°]	Analytický výpočet	Numerický výpočet	
		DURAL	PMMA
0	0,500	0,500	0,500
10	0,500	0,499	0,500
20	0,497	0,497	0,500
30	0,488	0,489	0,492
40	0,470	0,472	0,474
50	0,437	0,439	0,440
60	0,384	0,385	0,386
70	0,303	0,303	0,304
80	0,181	0,191	0,189

Tab. 3 Numericky a analyticky vypočtené hodnoty exponentu singularity napětí p tělesa s V-vrubem na volném povrchu.

α [°]	Analytický výpočet	Numerický výpočet	
		DURAL	PMMA
0	0,500	0,391	0,368
10	0,500	0,362	0,335
20	0,497	0,349	0,322
30	0,488	0,340	0,315
40	0,470	0,330	0,308
50	0,437	0,315	0,298
60	0,384	0,286	0,274
70	0,303	0,232	0,224
80	0,181	0,143	0,149

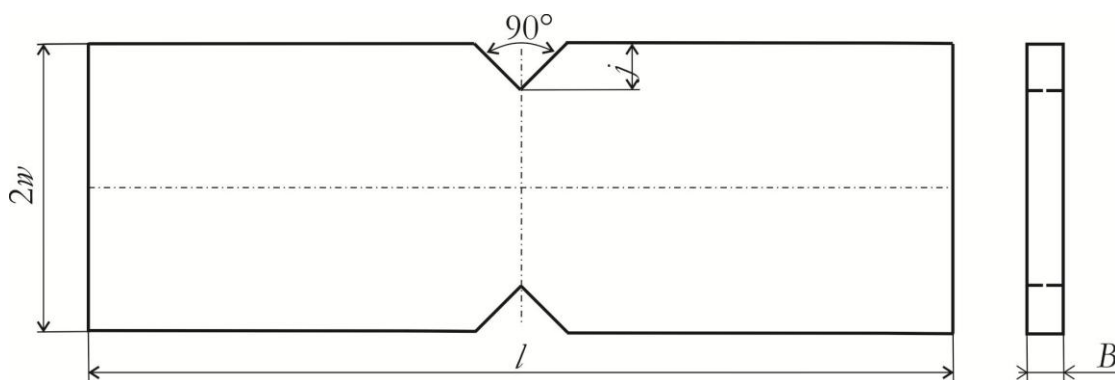


Obr. 12 Průběh exponentu singularity napětí v závislosti na úhlu otevření vrubu.

5.1.4 Numericky odhadnuté hodnoty exponentu singularity napětí p pro těleso s V-vrubem zatížené čtyřbodovým ohybem

V dalším byl uvažován také jiný způsob zatížení tělesa s V-vrubem, a to zatížení ohybem. Byla modelována série vzorků s různými hloubkami vrubu j tak, aby bylo možné výsledky porovnat s výsledky experimentální analýzy provedené v [6].

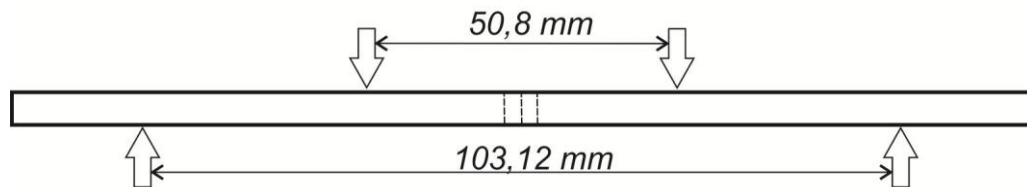
Model geometrie tělesa je uveden na Obr. 13. Vzorek je vyroben z PMMA s Rozměry vzorku jsou: délka $l = 203,2$ mm, šířka $2w = 40,64$ mm, tloušťka vzorku $B = 2,921$ mm a úhel otevření $\alpha = 45^\circ$.



Obr. 13 Rozměry tělesa s V-vrubem zatíženého ohybem.

Výpočty byly provedeny pomocí metody konečných prvků (MKP) ve výpočetním systému ANSYS. Protože je těleso symetrické, lze pro výpočet použít pouze poloviční model a aplikovat okrajovou podmínku symetrie.

Zkušební těleso je zatíženo čtyřbodovým ohybem, viz Obr. 14. Pomocí přímé metody je pro každý typ vzorku vyhodnocen exponent singularity napětí.



Obr. 14 Těleso s V-vrubem zatížené čtyřbodovým ohybem.

Exponent singularity napětí byl určen stejnou metodikou, jako u vzorku zatíženého tahem, která je popsána dříve. Z tohoto numerického řešení vyšla jeho hodnota na volném povrchu 0,177 shodně pro všechny vzorky.

Z výsledku analytického řešení vychází hodnota exponentu singularity napětí 0,456, z čehož vyplývá, že je u tohoto vzorku významný vliv rohové singularity na volném povrchu, která výrazně snižuje hodnotu exponentu singularity napětí. Do vypočítané hodnoty se promítá také vliv zatížení.

5.2 Stanovení kritického napětí tělesa σ_{crit} s V-vrubem zatíženého tahem

Ke stanovení hodnoty kritického napětí σ_{crit} pomocí výše zmíněných kritérií je nutné znát nejprve rozložení pole napětí v blízkosti vrcholu V-vrubu. Z něho je možné odhadnout exponenty singularity napětí p , jak bylo zmíněno v kap. 5.1.

Tloušťka zkušebních vzorků byla pro PMMA 4 mm a pro dural 5 mm. Ostré V-vruby byly na vzorcích připraveny pomocí svislé frézky. Dokončovací operace byly provedeny tvrdým karbidovým nástrojem ostřeným na elektrolytickém stroji. Vzorek byl kontrolován na odečítacím mikroskopu, kde byla zjištěna maximální odchylka úhlu otevření V-vrubu $0,5^\circ$.

Pro dural jsou definovány elastické konstanty $E = 70\,000$ MPa, $\nu = 0,33$ a pro PMMA $E = 2\,300$ MPa a $\nu = 0,36$. Hodnoty lomových houževnatostí jsou získány numericky z výpočtu pro $\alpha = 0^\circ$ při použití kritické zatěžovací síly převzaté z [27]. Pro PMMA je lomová houževnatost $K_{IC} = 1,8625$ MPa.m^{1/2} a pro dural $K_{IC} = 54,3$ MPa.m^{1/2}.

5.2.1 Kritická vzdálenost d

Pro odhad hodnot kritického napětí je nezbytné správně zvolit hodnotu kritické vzdálenosti d , pro kterou, neexistuje jednotný vztah, viz (78) - (84). V Tab. 4 jsou pro porovnání uvedeny hodnoty kritických vzdáleností vypočtené podle uvedených vztahů.

Tab. 4 Vypočítané hodnoty kritických vzdáleností d .

	d_1 [mm]	d_2 [mm]	d_3 [mm]	d_4 [mm]	d_5 [mm]	d_6 [mm]	d_7 [mm]
PMMA	0,18	0,34	0,14	0,11	0,45	0,04	0,16
DURAL	4,50	6,72	3,02	2,26	9,03	0,75	3,54

Volba kritické vzdálenosti d zpravidla závisí na použitém kritériu, nejčastěji se používají vztahy pro d_4 a d_7 . Vztah pro d_4 vyjadřuje poloměr procesní zóny před vrcholem trhliny, viz např. [1]. Vztah pro kritickou vzdálenost označenou jako d_7 (84) předpokládá mechanismus křehkého porušení materiálu a použití kritéria založeného na hustotě deformační energie. Jeho odvození je uvedeno dále.

Základní myšlenkou pro jeho odvození je, že kritická hodnota hustoty deformační energie (SED) je materiálovou charakteristikou a její velikost musí být shodná jak pro těleso bez koncentrátoru napětí, tak pro těleso obsahující koncentrátor napětí. SED je vyjádřena pro oba případy a z porovnání vyplyne výraz pro hledanou kritickou vzdálenost.

Pokud uvažujeme nekonečně dlouhý tažený pás bez trhliny, je mezní hodnota hustoty deformační energie vyjádřena vztahem [41]:

$$SED = \frac{\sigma_C}{2E}, \quad (86)$$

kde σ_C je pevnost materiálu v tahu a E je modul pružnosti v tahu.

Rozložení pole napětí v blízkosti vrcholu trhliny v tělese namáhaného tahem můžeme vyjádřit pomocí vztahů (10) - (12). Tenzor napětí v případě porušení ve vrcholu trhliny získáme dosazením $K_I = K_{IC}$ do uvedených vztahů:

$$\sigma_{11} = \frac{K_{IC}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right], \quad (87)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_{IC}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right], \quad (88)$$

$$\tau_{12} = \frac{K_{IC}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right). \quad (89)$$

Deformační energii lze pomocí uvedeného tenzoru napětí vyjádřit v případě rovinné deformace následovně [41]:

$$w = \frac{1(1-\nu)b}{2E} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^d [(1+\nu)(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2) - 2\nu\sigma_{11}\sigma_{22} + \tau_{12}^2] r dr d\theta. \quad (90)$$

Dosazením (87) - (89) do rovnice (90) a úpravou získáme výsledný vztah pro hustotu deformační energie v případě tělesa obsahujícího trhlínu:

$$SED = \frac{(1+\nu)(5-8\nu)}{8\pi d E} K_{IC}^2. \quad (91)$$

Vzájemným porovnáním vztahů pro hustotu deformační energie pro těleso s (86) a bez koncentrátoru napětí (91), můžeme vyjádřit výsledný vztah pro výpočet kritické vzdálenosti d následně:

$$d = \frac{(1 + \nu)(5 - 8\nu)}{4\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_c} \right)^2. \quad (92)$$

Výše uvedené je platné za předpokladu, že kritická hodnota SED je materiálová charakteristika, a že mechanismus porušení tělesa bez koncentrátoru a s koncentrátorem napětí je stejný.

5.2.2 Hodnoty kritického napětí σ_{crit}

V následujícím byly stanoveny hodnoty kritického napětí σ_{crit} za použití zobecněného kritéria faktoru hustoty deformační energie (viz kapitola 3.2) a kritéria založeného na střední hodnotě napětí otevírajícího koncentrátor (viz kapitola 3.3). Získané výsledky jsou uvedeny postupně v Tab. 5 až Tab. 8 vždy v závislosti na úhlu otevření V-vrubu α a použité kritické vzdálenosti d pro oba dva uvažované materiály. Z uvedených výsledků je patrné, že i při volbě různých vyjádření d existuje zde poměrně dobrá shoda s experimentem, protože jednotlivé definice (78) - (84) jsou si velmi podobné.

Tab. 5 Závislost kritického napětí σ_{crit} na úhlu otevření V-vrubu α pro různé hodnoty kritických vzdáleností d pro PMMA a stav rovinné deformace při použití zobecněného kritéria faktoru hustoty deformační energie publikovaného v [10].

α [°]	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	experiment
10	5,05	5,05	5,05	5,05	5,05	5,05	5,05	5,45
20	5,17	5,16	5,17	5,18	5,15	5,19	5,17	5,28
30	5,42	5,38	5,43	5,45	5,36	5,52	5,42	5,86
40	5,85	5,74	5,88	5,98	5,69	6,13	5,86	6,04
50	6,56	6,31	6,64	6,75	6,19	7,24	6,59	6,39
60	7,75	7,21	7,94	8,18	6,97	9,29	7,82	7,51
70	9,98	8,82	10,38	10,93	8,32	13,58	10,12	11,08

Tab. 6 Závislost kritického napětí σ_{crit} na úhlu otevření V-vrubu α pro různé hodnoty kritických vzdáleností d pro PMMA a stav rovinné deformace při použití kritéria založeného na střední hodnotě napětí publikovaného v [9].

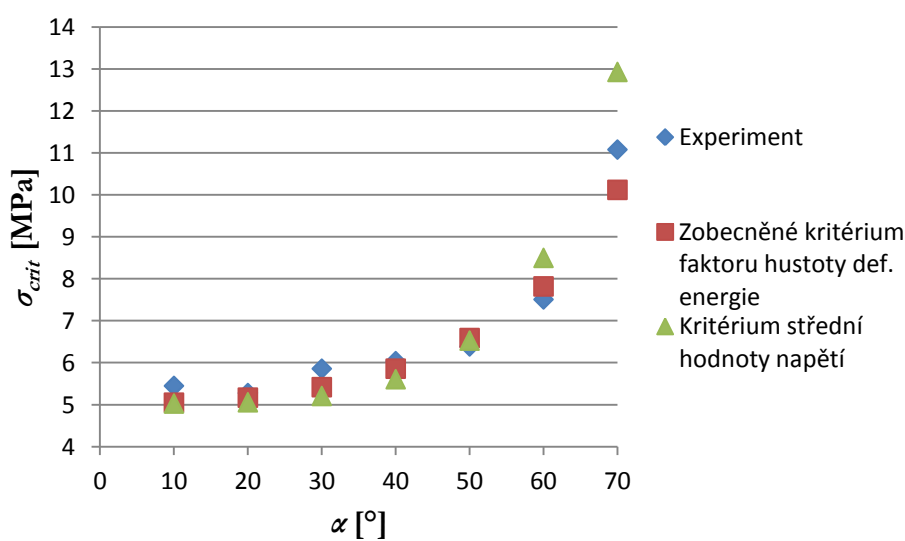
α [°]	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	experiment
10	5,03	5,03	5,03	5,03	5,03	5,03	5,03	5,45
20	5,06	5,05	5,06	5,07	5,05	5,01	5,06	5,28
30	5,21	5,17	5,22	5,24	5,15	5,30	5,21	5,86
40	5,60	5,50	5,63	5,68	5,45	5,87	5,61	6,04
50	6,50	6,25	6,58	6,69	6,13	7,17	6,53	6,39
60	8,43	7,84	8,63	8,90	7,57	10,11	8,50	7,51
70	12,76	11,28	13,28	13,98	10,64	17,36	12,93	11,08

Tab. 7 Závislost kritického napětí σ_{crit} na úhlu otevření V-vrubu α pro různé hodnoty kritických vzdáleností d pro DURAL a stav rovinné deformace při použití zobecněného kritéria faktoru hustoty deformační energie publikovaného v [10].

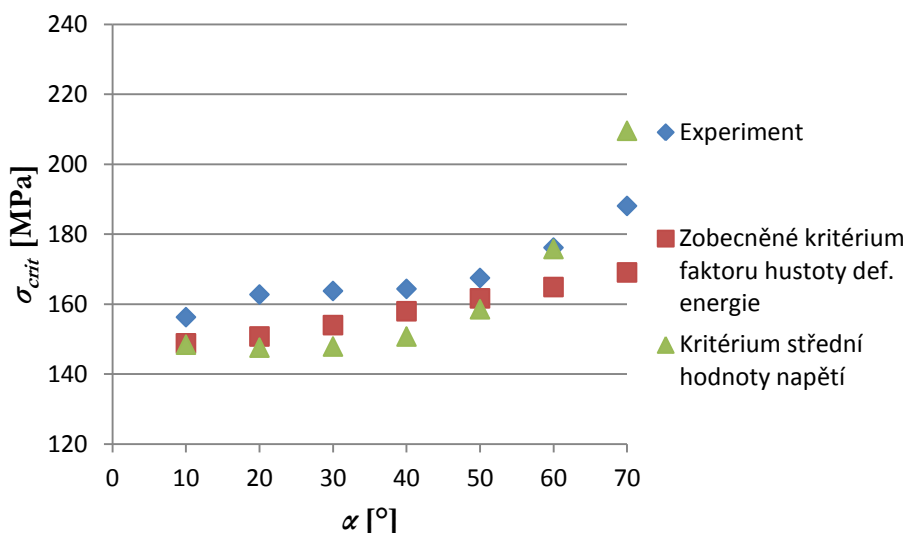
α [°]	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	experiment
10	148,79	148,79	148,79	148,79	148,79	148,79	148,79	156,28
20	150,72	150,43	150,81	150,93	150,30	151,43	150,75	162,75
30	153,88	152,72	154,25	154,73	152,18	156,79	154,00	163,76
40	157,64	154,69	158,59	159,84	153,33	165,20	157,96	164,36
50	160,97	154,72	163,01	165,73	151,87	177,61	161,65	167,48
60	163,59	152,09	167,45	172,62	146,98	196,08	164,88	176,15
70	166,82	147,40	173,55	182,75	139,08	226,91	169,06	188,07

Tab. 8 Závislost kritického napětí σ_{crit} na úhlu otevření V-vrubu α pro různé hodnoty kritických vzdáleností d pro DURAL a stav rovinné deformace při použití kritéria založeného na střední hodnoty napětí publikovaného v [9].

α [°]	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	experiment
10	148,41	148,41	148,41	148,41	148,41	148,41	148,41	156,28
20	147,54	147,26	147,63	147,75	147,13	148,24	147,57	162,75
30	147,76	146,65	148,12	148,59	146,13	150,56	147,88	163,76
40	150,44	147,63	151,35	152,54	146,33	157,65	150,74	164,36
50	157,85	151,73	159,86	162,53	148,93	174,17	158,53	167,48
60	174,39	162,13	178,49	184,01	156,67	209,02	175,76	176,15
70	206,79	182,71	215,12	226,53	172,40	281,27	209,56	188,07



Obr. 15 Průběh kritického napětí σ_{crit} v závislosti na úhlu otevření V-vrubu α pro vzorek z PMMA, stav rovinné deformace a hodnotu kritické vzdálenosti d_7 .



Obr. 16 Průběh kritického napětí σ_{crit} v závislosti na úhlu otevření V-vrubu α pro vzorek z DURALU, stav rovinné deformace a hodnotu kritické vzdálenosti d_7 .

Porovnání obou kritérií pro oba zvolené materiály je uvedeno na obrázcích Obr. 15 a Obr. 16. Pro názornost bylo zvoleno $d_7 = 0,16$ mm pro PMMA, $d_7 = 3,54$ mm pro dural. Na uvedených obrázcích jsou vykresleny grafy závislosti kritického napětí σ_{crit} na úhlu otevření V-vrubu α pro oba materiály a obě uvedená kritéria (kritérium střední hodnoty napětí a zobecněného faktoru hustoty deformační energie). Z grafů je patrná dobrá shoda s experimentálními daty s výjimkou hodnot pro $\alpha = 70^\circ$.

5.3 Stanovení kritického napětí tělesa σ_{crit} s V-vrubem zatíženého tahem – vliv volného povrchu

Jak již bylo zmíněno, uprostřed vzorku odpovídá exponent singularity napětí analytickému řešení 2D tělesa s V-vrubem. Když se blížíme k volnému povrchu, dochází ke změně rozložení napětí a tím i ke změně exponentu singularity napětí. Na povrchu tělesa je již dominantní rohová singularita. Oblast ovlivněná rohovou singularitou je jednoznačně definována pouze velikostí Poissonova čísla a není závislá na tloušťce tělesa [15]. Se vzrůstající hodnotou Poissonova čísla roste i vliv rohové singularity, a proto může být velikost exponentu singularity napětí různá po tloušťce celého vzorku od 2D analytického řešení i pro vzorky o tloušťce několika milimetrů. Z tohoto důvodu má význam se volným povrchem zabývat.

5.3.1 Vliv volného povrchu

Analytické určení exponentu singularity napětí p pro dvourozměrné těleso s ostrým V-vrubem a homogenním materiálem má singularitu napětí:

$$\sigma_{ij} \cong \frac{1}{r^p}. \quad (93)$$

Popis pole napjatosti u čela V-vrubu v blízkosti volného povrchu je složitější, protože mimo uvedené singularity zde má vliv i tzv. rohová singularita typu [2], [3], [17]:

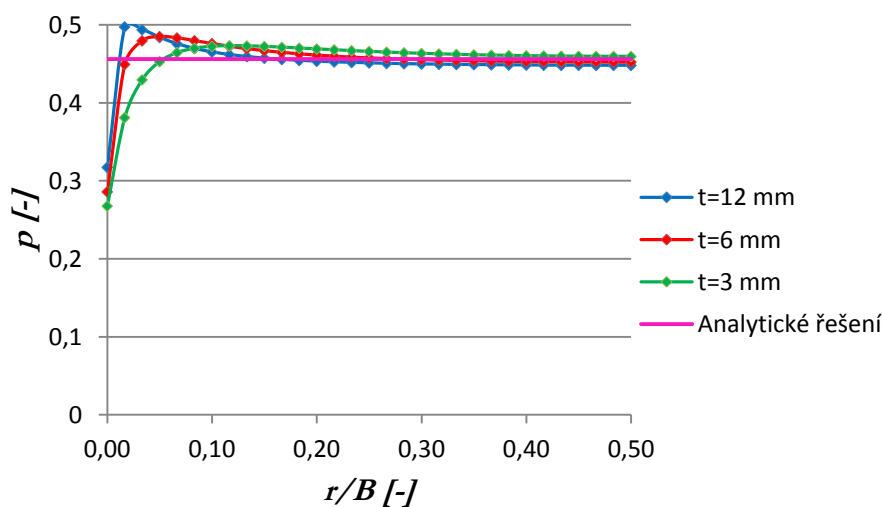
$$\sigma_{ij} \cong \frac{1}{r^\lambda}, \quad (94)$$

kde $\lambda \in (0; 1)$. Z tohoto důvodu zde není možné použít klasický přístup pro popis V-vrubu se singularitou typu (93). K hodnocení tenkých těles s obecným koncentrátorem napětí je nutné nejprve stanovit velikost exponentů singularity napětí p v závislosti na tloušťce vzorku.

Rozdělení napětí u trojdimenzionálního tělesa s V-vrubem se skládá ze dvou částí. Jedna odpovídá dvojdimenzionálnímu řešení a převládá ve středu vzorku. Druhá část odpovídá rohové singularitě, která převládá v oblasti blízko volnému povrchu V-vrubu. [17]

Exponent singularity napětí je možné určit pomocí přímé metody z numerického řešení. V [15] byly zkoumány tři vzorky o různých tloušťkách a průběh exponentů singularity napětí po průřezu vzorku v okolí ostrého V-vrubu, viz Obr. 17.

Z grafu je patrné, že uprostřed vzorku numerické řešení exponentu singularity napětí p odpovídá analytickému řešení 2D tělesa s V-vrubem. Velikost hodnoty p se mění po tloušťce vzorku B a na volném povrchu dosahuje nejmenší hodnoty, protože zde má již dominantní vliv rohová singularita.



Obr. 17 Závislost exponentu singularity napětí p po tloušťce tělesa B . [15]

5.3.2 Hodnoty kritického napětí σ_{crit}

Na volném povrchu již hodnoty exponentu singularity napětí nesouhlasí s 2D analytickým řešením, a proto je nezbytné získat je numericky. Výsledky jsou pro oba použité materiály uvedeny v Tab. 3.

Hodnoty vypočteného kritického napětí σ_{crit} jsou uvedeny postupně v Tab. 9 až Tab. 12 vždy v závislosti na úhlu otevření V-vrubu α a použité kritické vzdálenosti d .

APLIKACE ZOBECNĚNÉ LINEÁRNĚ ELASTICKÉ LOMOVÉ MECHANIKY
NA ODHAD POČÁTKU ŠÍŘENÍ TRHLINY Z OSTRÉHO V-VRUBU

Do kritéria zobecněného faktoru deformační energie vstupuje i koeficient závislý na tom, zda se jedná o řešení uprostřed vzorku (stav rovinné deformace) nebo na volném povrchu.

Tab. 9 Závislost kritického napětí σ_{crit} na úhlu otevření V-vrubu α pro různé hodnoty kritických vzdáleností d pro PMMA na volném povrchu při použití zobecněného kritéria faktoru hustoty deformační energie publikovaného v [10].

α [°]	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	experiment
10	3,65	3,29	3,77	3,94	3,14	4,73	3,69	5,45
20	7,46	6,67	7,73	8,10	6,33	9,85	7,55	5,28
30	10,17	9,05	10,55	11,08	8,57	13,57	10,30	5,86
40	11,22	9,95	11,66	12,26	9,40	15,14	11,37	6,04
50	11,57	10,19	12,05	12,71	9,60	15,87	11,73	6,39
60	12,29	10,66	12,86	13,65	9,98	17,49	12,48	7,51
70	14,31	12,03	15,12	16,26	11,09	22,02	14,58	11,08

Tab. 10 Závislost kritického napětí σ_{crit} na úhlu otevření V-vrubu α pro různé hodnoty kritických vzdáleností d pro PMMA na volném povrchu při použití kritéria střední hodnoty napětí publikovaného v [9].

α [°]	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	experiment
10	-	-	-	-	-	-	-	5,45
20	13,88	12,41	14,38	15,07	11,78	138,87	14,05	5,28
30	13,78	12,27	14,30	15,01	11,62	18,39	13,95	5,86
40	13,57	12,02	14,10	14,83	11,36	18,31	13,74	6,04
50	13,64	12,01	14,20	14,98	11,32	18,70	13,83	6,39
60	14,87	12,90	15,56	16,51	12,07	21,16	15,10	7,51
70	18,62	15,65	19,68	21,16	14,43	28,65	18,97	11,08

Tab. 11 Závislost kritického napětí σ_{crit} na úhlu otevření V-vrubu α pro různé hodnoty kritických vzdáleností d pro DURAL na volném povrchu při použití zobecněného kritéria faktoru hustoty deformační energie publikovaného v [10].

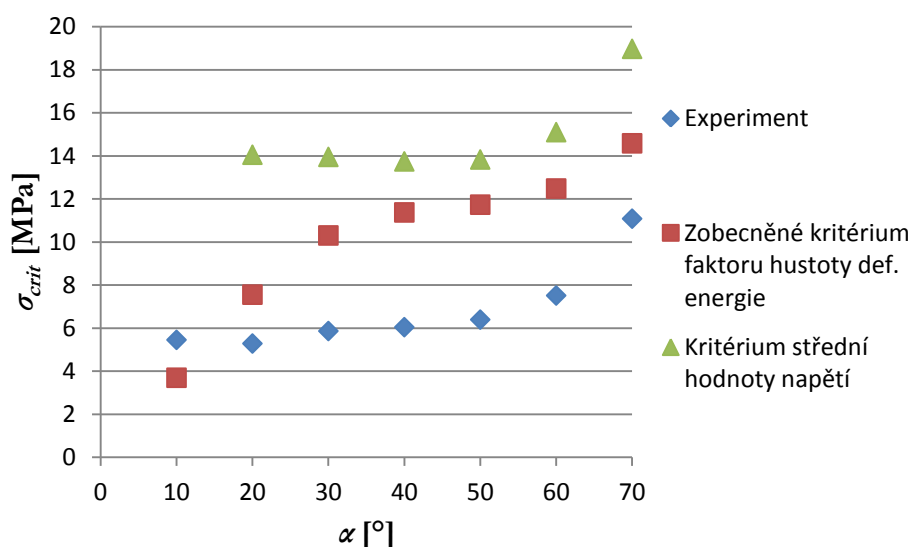
α [°]	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	experiment
10	84,24	77,25	86,61	89,80	74,17	104,50	84,39	156,28
20	157,79	143,51	162,64	169,22	137,26	199,75	158,08	162,75
30	195,10	176,44	201,47	210,10	168,31	250,48	195,49	163,76
40	200,79	180,45	207,75	217,23	171,62	261,84	201,21	164,36
50	195,48	174,02	202,87	212,96	164,78	260,95	195,92	167,48
60	189,96	166,05	198,29	209,74	155,90	265,33	190,45	176,15
70	189,27	159,94	199,72	214,27	147,78	287,63	189,89	188,07

Tab. 12 Závislost kritického napětí σ_{crit} na úhlu otevření V-vrubu α pro různé hodnoty kritických vzdáleností d pro DURAL na volném povrchu při použití kritéria střední hodnoty napětí publikovaného v [9].

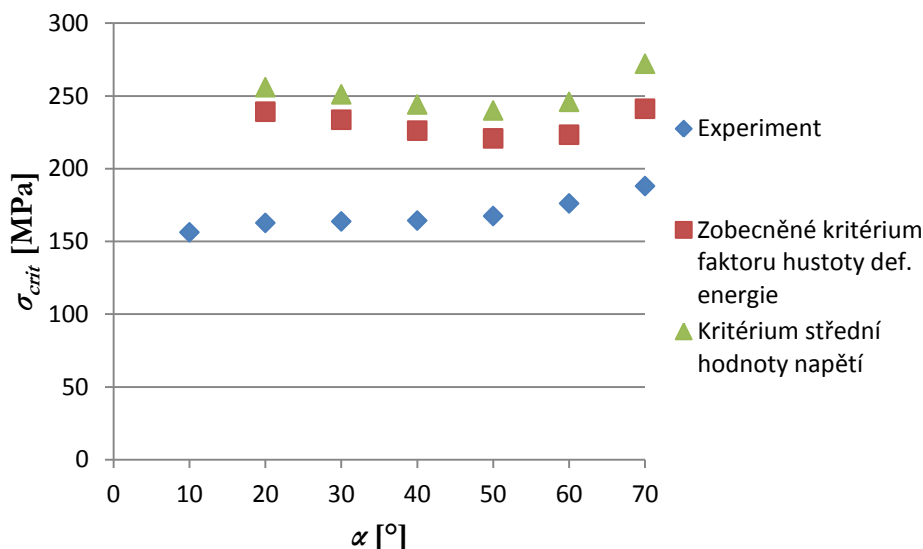
α [°]	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	experiment
10	-	-	-	-	-	-	-	156,28
20	238,74	217,13	246,08	256,02	207,67	712,74	239,18	162,75
30	233,21	210,90	240,81	251,13	201,18	299,40	233,66	163,76
40	225,68	202,81	233,50	244,15	192,89	294,29	226,15	164,36
50	220,34	196,16	228,67	240,04	185,74	294,14	220,84	167,48
60	222,76	194,73	232,53	245,96	182,82	311,15	223,34	176,15
70	240,41	203,15	253,69	272,17	187,71	365,35	241,20	188,07

Pro názornost byla zvolena stejná hodnota d , jako v předchozí kapitole, které vycházelo ze znalosti singularity napětí uprostřed vzorku. Tedy d_7 bylo opět zvoleno 0,16 mm pro PMMA a $d_7 = 3,54$ mm pro dural. Na Obr. 18 - Obr. 19 jsou vykresleny grafy závislosti kritického napětí σ_{crit} na úhlu otevření V-vrubu α pro oba materiály a obě uvedená kritéria (kritérium střední hodnoty napětí a zobecněného faktoru hustoty deformační energie).

Z grafů je patrné, že ani v jednom případě není dosaženo shody tak, jak tomu bylo uprostřed vzorku, a to i přes to, že do zobecněného kritéria faktoru hustoty deformační energie vstupuje konstanta, která je ovlivněna tím, zda se jedná o rovinnou deformaci nebo napjatost. Kritérium střední hodnoty napětí nerozlišuje mezi stavem rovinné deformace či napjatosti, a proto dosahuje v tomto případě lepší shody s experimentálními daty.



Obr. 18 Průběh kritického napětí σ_{crit} v závislosti na úhlu otevření V-vrubu α pro vzorek z PMMA na volném povrchu a hodnotu kritické vzdálenosti d_7 .



Obr. 19 Průběh kritického napětí σ_{crit} v závislosti na úhlu otevření V-vrubu α pro vzorek z DURALU na volném povrchu a hodnotu kritické vzdálenosti d_7 .

Z výsledků je patrné, že použít řešení, jež významně zahrnuje vliv tzv. rohové singularity není pro tak tlustá tělesa vhodné. Ani jedno kritérium není možné použít pro popis chování trhliny, protože zde po tloušťce tělesa nepřevažuje vliv volného povrchu tzn., že těleso není dostatečně tenké. Z tohoto důvodu je možné problém řešit jako 2D úlohu s podmínky rovinné deformace, viz předchozí kapitola.

5.4 Stanovení kritického napětí tělesa σ_{crit} s V-vrubem namáhaného ohybem

V případě tělesa s V-vrubem namáhaného ohybem dochází k jinému způsobu porušování. Trhlina se začíná šířit z bodu na povrchu tělesa, z místa průniku čela trhliny s volným povrchem tělesa. V tomto místě má významný vliv rohová singularita a rozdělení napětí v okolí místa počátku šíření trhliny je tak významně odlišné od rozdělení napětí v okolí vrcholu koncentrátoru uprostřed tělesa, které odpovídá stavu rovinné deformace.

Numerický model vzorku byl již sestaven pro stanovení exponentu singularity napětí p , viz kapitola 5.1.4. Model materiálu je definován jako lineární elastický homogenní se dvěma elastickými konstantami: modulem pružnosti v tahu $E = 2\,300$ MPa a Poissonovým číslem $\nu = 0,36$. Geometrie tělesa je znázorněna na Obr. 13.

5.4.1 Kritická vzdálenost d

Hodnoty použitých kritických vzdáleností vypočtené podle uvedených vztahů jsou pro PMMA uvedeny v Tab. 4.

Z výsledků vyplývá, že nejlepší shody by experimentálními daty bylo dosaženo při volbě kritické vzdálenosti $d_s = 0,45$ mm definované vztahem (82). Ten je odvozen pomocí střední hodnoty

normálového napětí z (79). Integrace podél vzdálenosti d umožňuje definovat střední hodnotu napětí vztahem [41]:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{d} \int_0^d \sum_{i=1}^{\infty} A_i r^{p-1} S_{yy}^i(\theta = 0) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{p} d^{p-1} S_{yy}^i(\theta = 0), \quad (95)$$

kde členy pro $i \geq 2$ jsou zanedbatelné ve srovnání s prvním členem a výraz je možné zjednodušit:

$$\bar{\sigma} = \frac{A_I}{p_I} d^{p_I-1} S_{yy}^I(\theta = 0). \quad (96)$$

V případě, kdy se začíná šířit trhlinka je možné vztah dále upravit do podoby [42]:

$$A_I S_{yy}^I(\theta = 0) = \frac{K_{IC}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (97)$$

kde K_{IC} je lomová houževnatost materiálu. Úpravou vzorců (96) a (97) obdržíme finální vztah pro výpočet kritické vzdálenosti [41], [43]:

$$d = \frac{2}{\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_C} \right)^2. \quad (98)$$

5.4.2 Hodnoty kritického napětí σ_{crit}

Byla použita stejná metodika, jak v případě vzorků zatížených tahem, tedy velikost lomové houževnatosti H_{IC} byla určena pomocí dříve uvedených kritérií (69) a (75). Z těchto vypočtených veličin bylo možné odhadnout hodnotu kritického napětí pro iniciaci trhliny v kořeni V-vrubu pomocí obou uvedených kritérií.

Hodnoty kritického napětí byly vypočteny jak uprostřed vzorku, tak na volném povrchu. Výsledné hodnoty uprostřed vzorku byly vyhodnocovány s exponentem singularity napětí získaným z analytického řešení pro mód I (viz Tab. 13 a Tab. 14).

Tab. 13 Hodnoty kritického napětí σ_{crit} v závislosti na hloubce vrubu j pro různé hodnoty kritických vzdáleností d při použití zobecněného kritéria hustoty deformační energie [10] uprostřed vzorku.

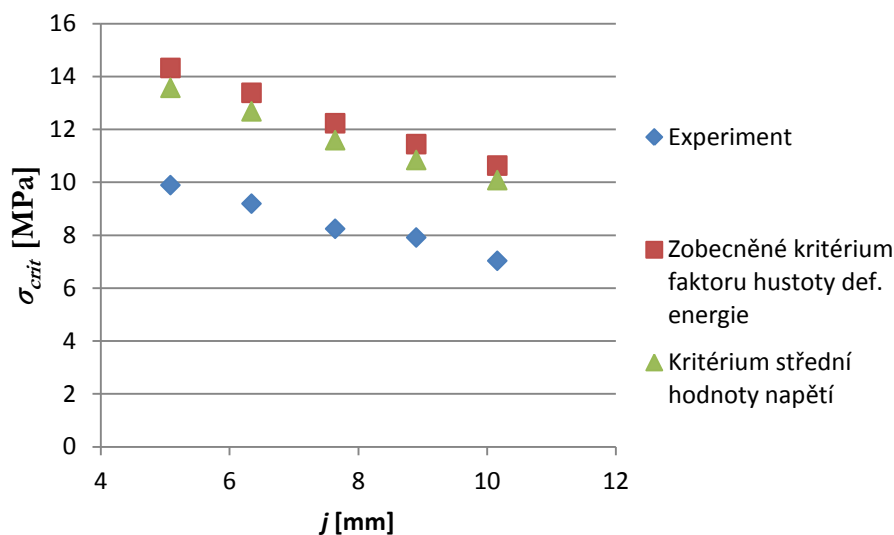
j [mm]	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	experiment
5,08	14,03	13,65	14,15	14,32	13,47	15,03	14,07	9,89
6,34	13,11	12,75	13,22	13,38	12,59	14,04	13,15	9,19
7,64	11,98	11,66	12,09	12,23	11,51	12,84	12,02	8,24
8,90	11,21	10,90	11,31	11,44	10,76	12,01	11,24	7,91
10,16	10,42	10,13	10,51	10,63	10,00	11,16	10,45	7,03

APLIKACE ZOBECNĚNÉ LINEÁRNĚ ELASTICKÉ LOMOVÉ MECHANIKY
NA ODHAD POČÁTKU ŠÍŘENÍ TRHLINY Z OSTRÉHO V-VRUBU

Tab. 14 Hodnoty kritického napětí σ_{crit} v závislosti na hloubce vrubu j pro různé hodnoty kritických vzdáleností d při použití kritéria střední hodnoty napětí [9] uprostřed vzorku.

j [mm]	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	experiment
5,08	13,30	12,94	13,42	13,57	12,77	14,24	13,34	9,89
6,34	12,42	12,09	12,53	12,68	11,93	13,31	12,46	9,19
7,64	11,36	11,05	11,46	11,59	10,91	12,17	11,39	8,24
8,90	10,62	10,33	10,72	10,84	10,20	11,38	10,66	7,91
10,16	9,87	9,60	9,96	10,08	9,48	10,58	9,90	7,03

Pro názornost byla vybrána jedna hodnota kritické vzdálenosti $d_5 = 0,45$ mm a na Obr. 20 je vykreslen graf závislosti kritického napětí σ_{crit} na úhlu otevření V-vrubu α pro obě uvedená kritéria (kritérium střední hodnoty napětí a zobecněného faktoru hustoty deformační energie).



Obr. 20 Průběh kritického napětí σ_{crit} v závislosti na hloubce V-vrubu j a hodnotu kritické vzdálenosti d_5 (stav rovinné deformace).

Při namáhání čtyřbodovým ohybem dochází k jinému namáhání, než bylo uvedeno v předchozím případě a trhlina se šíří z místa na povrchu, tedy z místa, kde má dominantní vliv rohová singularita. Je tedy nezbytné určit exponent singularity napětí na volném povrchu vzorku za pomoci numerického řešení rozložení pole napětí v okolí vrcholu V-vrubu. Výsledky jsou uvedeny v Tab. 15 a Tab. 16.

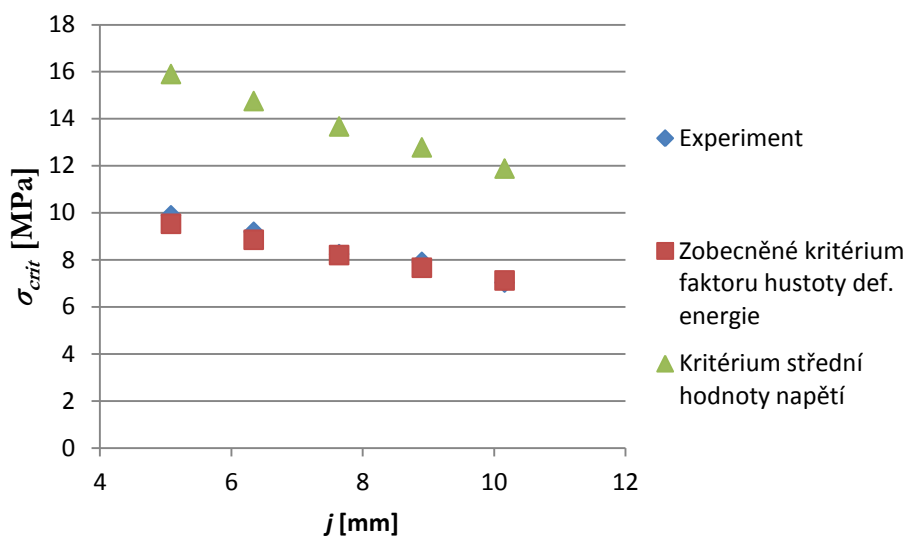
Pro přehlednost byly opět vykresleny hodnoty kritického napětí σ_{crit} při volbě kritické vzdálenosti $d_7 = 0,16$ mm. Na Obr. 21 je vykreslen jeho průběh obě uvedená kritéria (kritérium střední hodnoty napětí a zobecněného faktoru hustoty deformační energie).

Tab. 15 Hodnoty kritického napětí σ_{crit} v závislosti na hloubce vrubu j pro různé hodnoty kritických vzdáleností d při použití zobecněného kritéria hustoty deformační energie [10] na volném povrchu.

j [mm]	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	experiment
5,08	9,32	7,61	9,95	10,83	6,92	15,44	9,53	9,89
6,34	8,66	7,07	9,23	10,05	6,42	14,33	8,85	9,19
7,64	8,02	6,55	8,56	9,31	5,95	13,28	8,20	8,24
8,90	7,50	6,12	8,00	8,71	5,56	12,42	7,66	7,91
10,16	6,97	5,69	7,44	8,09	5,17	11,54	7,12	7,03

Tab. 16 Hodnoty kritického napětí σ_{crit} v závislosti na hloubce vrubu j pro různé hodnoty kritických vzdáleností d při použití kritéria střední hodnoty napětí [9] na volném povrchu.

j [mm]	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	experiment
5,08	15,55	12,70	16,59	18,06	11,54	25,75	15,90	9,89
6,34	14,44	11,78	15,40	16,73	10,71	23,91	14,75	9,19
7,64	13,38	10,92	14,27	15,53	9,93	22,15	13,67	8,24
8,90	12,51	10,21	13,34	14,52	9,28	20,71	12,78	7,91
10,16	11,63	9,49	12,40	13,50	8,63	19,25	11,88	7,03



Obr. 21 Průběh kritického napětí σ_{crit} v závislosti na hloubce V-vrubu j a hodnotu kritické vzdálenosti d_7 (na volném povrchu).

Z výsledků je patrné, že experimentální data vykazují lepší shodu při uvažování volného povrchu. Vzhledem k jinému typu namáhání (ohybu) zde má oproti namáhání tahem dominantní vliv rohová singularita. Z tohoto důvodu je nezbytné v uvedených kritériích uvažovat exponent singularity napětí odhadnutý numericky na volném povrchu vzorku. Lepší shody s experimentálními daty dosahuje zobecněné kritérium faktoru hustoty deformační energie. Děje

APLIKACE ZOBECNĚNÉ LINEÁRNĚ ELASTICKÉ LOMOVÉ MECHANIKY
NA ODHAD POČÁTKU ŠÍŘENÍ TRHLINY Z OSTRÉHO V-VRUBU

se tak z toho důvodu, že toto kritérium bere v potaz všechny složky tenzoru napětí, na rozdíl od kritéria střední hodnoty napětí, které bere v potaz pouze jednu složku napětí.

6 SHRNU TÍ VÝSLEDKŮ A DISKUZE

Předkládaná diplomová práce se věnuje problému stanovení počátku šíření trhliny z ostrého V-vrubu za použití již existujících kritérií založených na aplikaci zobecněné LELM. V rámci ní se předpokládá analogie mezi chováním trhlín a V-vrubů (obecně singulárních koncentrátorů napětí), kdy trhlina je uvažována jako speciální případ V-vrubu s úhlem otevření $\alpha = 0^\circ$. Je ukázáno, že rozdělení napětí v okolí vrcholu V-vrubu (určující chování tohoto singulárního koncentrátoru), je jednoznačně určeno zobecněným součinitelem intenzity napětí H a exponentem singularity napětí p , který je závislý na úhlu otevření V-vrubu α .

V případě ostrého V-vrubu má exponent singularity napětí hodnotu $0 < p < 1/2$. V případě silnějších zkušebních vzorků lze použít rozdělení pole napětí z 2D řešení za podmínky rovinné deformace, čemuž odpovídá dříve uvedené analytické řešení. U tenkých vzorků se významně projevuje vliv volného povrchu, který způsobuje změnu rozdělení singulárního pole napětí a tím i změnu exponentu singularity napětí, čímž dochází ke změně chování trhliny, která se šíří z ostrého V-vrubu.

Určení rozdělení napětí v okolí vrcholu V-vrubu s volným povrchem je složité a v tomto případě nelze použít klasický popis V-vrubu získaný analyticky a platný pro singularitu typu $1/r^p$. Vzhledem k významnému vlivu rohové singularity na volném povrchu není možné použít známé analytické řešení pro zjištění hodnoty exponentu singularity napětí a je nutné pro jeho vyčíslení použít rozložení pole napětí odhadnuté numericky za pomoci metody konečných prvků z rozdělení napětí před vrcholem koncentrátoru. Významný pokles exponentu singularity napětí v místě průniku čela koncentrátoru a volného povrchu tělesa je ukázán v kapitole 5.1.3.

V předložené práci byla modelována sada takových vzorků, aby bylo možné výsledky porovnat s experimentálními daty dostupnými v literatuře. Vždy se jednalo o model s oboustranným ostrým V-vrubem s úhlem otevření 2α . Vzorky se lišily v použitém materiálu (polymethylmethakrylát a dural), úhlu otevření proměnném pro otevření $\alpha = 0 \div 80^\circ$ v krocích po 10° a způsobu zatěžování. Z důvodu přesnosti výsledků bylo nutné použít velmi jemnou síť a speciální trhlínové prvky v okolí vrcholu V-vrubu, aby byla lépe popsána gradientní změna napětí v blízkosti vrcholu koncentrátoru.

V případě vzorků vyhodnocovaných uprostřed jejich tloušťky (stav rovinné deformace) hodnota exponentu singularity napětí přesně odpovídala známému analytickému řešení. V případě vzorků vyhodnocovaných na volném povrchu (ať už zatížených tahem nebo ohybem) již nebylo dosaženo této shody, protože zde již měla významný vliv rohová singularita a tím došlo ke snížení hodnoty exponentu singularity napětí. Trend jeho změny byl ale zachován.

V práci byla uvedena již existující kritéria stability vyvinutá na pracovišti ÚFM AV ČR, v. v. i. Kritériem stability se myslí podmínka, kdy se z uvažovaného koncentrátoru začne šířit trhlina. Je vyjádřeno porovnáním lomově-mechanického parametru s jeho kritickou hodnotou. K nejpoužívanějším v praxi patří koncepce součinitele intenzity napětí K [MPa.m^{1/2}] (platná pro

trhliny, kde je exponent singularity $p = 1/2$). Tato koncepce se dá zobecnit pro obecný singulární koncentrátor napětí. Zobecněný parametr se nazývá zobecněný součinitel intenzity napětí H [MPa.m^p].

V této práci byla použita dvě kritéria zobecněná pro ostré V-vruby. Prvním je zobecněná koncepce faktoru deformační energie, které umožňuje stanovit počátek nestabilního růstu trhliny z vrcholu koncentrátoru. Do tohoto kritéria vstupuje koeficient závislý na tom, zda se jedná o řešení ve stavu rovinné deformace nebo rovinné napjatosti. Druhým kritériem je koncepce střední hodnoty napětí před vrcholem koncentrátoru. Řídícím parametrem určujícím zda se z koncentrátoru začne šířit trhlina, je střední hodnota normálové složky napětí určená před vrcholem V-vrubu ve směru iniciované trhliny. Obě kritéria vycházejí z analogie chování trhlín a V-vrubů a je možné je použít i pro další obecné singulární koncentrátory napětí za předpokladu, stejného mechanismu šíření trhliny z vrcholu koncentrátoru, jakým se šíří trhlina v homogenním materiálu.

Do obou kritérií vstupuje hodnota kritické vzdálenosti d , pro kterou neexistuje jednotný vztah. Zpravidla má každé kritérium vlastní formulaci této kritické vzdálenosti plynoucí z fyzikální podstaty kritéria. Nejčastěji je za tuto hodnotu použit např. poloměr procesní zóny před vrcholem trhliny u křehkého porušení materiálu či poloměr plastické zóny u houževnatých materiálů či únavového šíření trhliny. Jednotlivé definice kritické vzdálenosti uváděné v literatuře jsou si podobné a výsledná kritická vzdálenost stanovená na základě těchto definic se příliš neliší, viz tabulka 4. Navíc závislost výsledné kritické hodnoty na tomto parametru není silná, i proto je dosažena poměrně dobrá shoda experimentu s uvedenými kritérii při volbě jakékoliv z uvedených definic, u vzorku zatíženém tahem, za předpokladu stavu rovinné deformace.

Z výsledků studia vzorků zatížených tahem vyplývá, že pro tak tlustá tělesa není vhodné používat řešení zahrnující vliv rohové singularity, protože zde po tloušťce nepřevažuje vliv volného povrchu. Z tohoto důvodu je možné problém řešit jako 2D úlohu s podmínkami rovinné deformace, kde je dosaženo dobré shody s experimentálními daty (s výjimkou hodnot pro úhel $\alpha = 70^\circ$, kde je odchylka větší). Lze tedy formulovat závěr, že v případě tahem namáhaného tělesa s V-vrubem je možné dosáhnout dobrého odhadu počátku šíření trhliny z vrcholu vrubu při aproximaci podmínkou rovinné deformace. Pouze u velmi tenkých těles, do tloušťky cca 2 mm, je vliv rohové singularity natolik silný, že je její existenci nutné brát při odhadu chování tělesa s V-vrubem do úvahy.

V případě druhého experimentálního tělesa bylo úmyslně zvoleno těleso namáhané ohybem. V případě vzorků namáhaných ohybem dochází k jinému způsobu jejich porušování, protože se trhlina začíná šířit z bodu na povrchu tělesa (průnik čela koncentrátoru a volného povrchu), kde má významný vliv rohová singularita. Rozdělení napětí v okolí počátku šíření trhliny je odlišné od rozdělení napětí v okolí vrcholu koncentrátoru uprostřed tělesa (kde odpovídá stavu rovinné deformace). V uvedeném případě se na šíření trhliny z V-vrubu opět dominantně podílí normálové napětí, nicméně singularita tohoto napětí se skládá ze dvou složek, vlivu existence vrubu tj. složkou napětí působící v rovině dané délkou tělesa a jeho šířkou a vlivu rohové singularity napětí tj. složkou působící v rovině dané šířkou tělesa a jeho tloušťkou. Analytické řešení exponentu singularity napětí pro tento případ by bylo velmi komplikované. Z tohoto důvodu byl v práci použit relativně jednoduchý postup, který využívá numericky stanoveného

rozdělení napětí před vrcholem koncentrátoru, z jehož normálové složky stanoví efektivní exponent singularity napětí, který zahrnuje oba dva uvedené vlivy. Tento postup je možné použít za předpokladu, že velikost normálové složky napětí je určující pro šíření trhliny z vrcholu koncentrátoru. Další postup je již shodný s dříve popsáním postupem, tj. využije se znalosti exponentu singularity napětí, na jeho základě se stanoví zobecněný součinitel intenzity napětí, a oba dva parametry pak vstupují do vhodného kritéria stability. Ve studovaném případě byla použita obě uvedená kritéria, přičemž lepší shody s experimentálními daty bylo dosaženo o kritéria založeného na zobecněném faktoru hustoty deformační energie. Hlavním důvodem je, že toho kritérium uvažuje všechny složky tenzoru napětí, na rozdíl od kritéria střední hodnoty napětí, které uvažuje pouze jednu složku napětí.

Poznamenejme, že uvedený postup odhadu exponentu singularity napětí je obecný a dá se použít také pro jiné typy singulárních koncentrátorů napětí, např. pro případ trhliny s vrcholem na rozhraní dvou materiálů.

7 ZÁVĚR

Diplomová práce staví na teoretických základech lineárně elastické lomové mechaniky (LELM) a zobecněné LELM. V práci je nejprve provedena rešerše v oblasti stanovení počátku šíření trhliny z ostrého V-vrubu a přehled kritérií LELM, na jejichž základě je možné odhadnout počátek šíření trhliny z ostrého V-vrubu pro zadané těleso. Tělesa byla volena tak, aby bylo možné získané vypočítané výsledky porovnat s dostupnými experimentálními daty v literatuře.

Byla provedena analýza závislosti exponentu singularity napětí na úhlu otevření V-vrubu v různých místech tělesa (tj. na povrchu tělesa a uprostřed jeho tloušťky) a pro různé typy zatěžování (byl uvažován tah a čtyřbodový ohyb). Bylo ověřeno, že exponent singularity napětí uprostřed tělesa s V-vrubem přesně odpovídá analytickému řešení pro stav rovinné deformace. Popis pole napjatosti u čela V-vrubu v blízkosti volného povrchu je složitější, nelze pouze využít podmínky rovinné napjatosti, protože mimo uvedenou singularitu napětí zde má vliv i tzv. rohová singularita. K hodnocení tenkých těles s obecným singulárním koncentrátorem napětí je tedy nutné nejprve stanovit velikost exponentů singularity napětí p (numericky) v závislosti na tloušťce vzorku pomocí rozložení pole napětí v blízkosti vrcholu V-vrubu.

V rámci rešeršní práce byla uvedena kritéria stability zobecněná pro obecné singulární koncentrátoři (V-vrubby), která je možné použít pro stanovení počátku šíření trhliny pro zadané těleso. Prvním kritériem je zobecněná koncepce faktoru deformační energie, která umožňuje stanovit počátek nestabilního růstu trhliny z koncentrátoru. Dalším kritériem je koncepce střední hodnoty napětí, která je postavena na střední hodnotě normálové složky napětí určené před vrcholem V-vrubu ve směru iniciované trhliny. Do obou kritérií vstupuje hodnota kritické vzdálenosti d a hodnota zobecněného součinitele intenzity napětí H . Pro určení kritické vzdálenosti neexistuje jednotný vztah. V literatuře existuje několik doporučení jak tuto vzdálenost volit, nicméně vzhledem k tomu, že publikované definice jsou si podobné, je dosaženo poměrně dobré shody experimentu s uvedenými kritérii, při volbě jakékoliv z nich, u vzorku zatíženém tahem a stavu rovinné deformace. Zobecněný součinitel intenzity napětí je stanoven pomocí přímé metody z rozložení singulárního pole napětí před vrcholem ostrého V-vrubu získaného numerickou analýzou.

Cílem práce bylo odhadnout počátek šíření trhliny z ostrého V-vrubu pomocí kritérií založených na základě zobecněné LELM a porovnat vypočítané hodnoty kritických napětí s experimentálními daty dostupnými v literatuře. V první fázi bylo uvažováno těleso s oboustranným V-vrubem zatížené tahem. Výsledky ukázaly, že v uvedeném případě je vliv tzv. rohové singularity nevýznamný. V tomto případě obě uvedená kritéria poskytla dobrý odhad nezbytného aplikovaného zatížení pro šíření trhliny z V-vrubu. K dobrému odhadu postačí v tomto případě 2D řešení s podmínkou rovinné deformace a to až do úhlu rozevření V-vrubu $\alpha = 70^\circ$. U druhého studovaného typu tělesa s V-vrubem namáhaného ohybem se trhlina začíná šířit z bodu průniku čela V-vrubu s povrchem tělesa. V tomto případě hraje rohová singularita významnou roli. Znamé analytické řešení pro stanovení exponentu singularity napětí nelze

v tomto případě použít, a proto byl exponent singularity napětí odhadnut z rozdělení napětí před vrcholem V-vrubu stanoveným numericky pomocí metody konečných prvků. Dosažené výsledky ukázaly velký rozdíl ve velikosti singularity napětí v případě výrazného vlivu rohové singularity napětí. Opět byla aplikována obě zobecněná kritéria stability, přičemž dobrého odhadu počátku šíření trhliny z V-vrubu bylo dosaženo pouze v případě kritéria založeného na zobecněném faktoru hustoty deformační energie. Důvodem je, že toho kritérium uvažuje všechny složky tenzoru napětí a také lépe vystihuje křehký charakter porušení studovaného tělesa s V-vrubem.

Závěrem lze konstatovat, že byla ukázána aplikovatelnost kritérií zobecněné lineárně-elastické lomové mechaniky na odhad šíření trhliny z ostrého V-vrubu a to i v případě, kdy je oblast počátku šíření trhliny významně ovlivněna tzv. rohovou singularitou. Poznamenejme, že veškeré vytčené cíle práce byly splněny.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] Anderson, T. L.: *Fracture mechanics: Fundamental applications*. Third edition . Boca Raton: CRC Press, 2005. 625 s. ISBN 0-8493-1656-1.
- [2] Bažant, Z. P., Estenssoro, L. F.: Surface singularity and crack propagation, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 15, p. 405-429, 1979.
- [3] Benthem, J. P.: State of stress at vertex of a quarter-infinite crack in half-space, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 13, p. 479-492, 1977.
- [4] Brdička, M.: *Mechanika kontinua*. Nakladatelství ČSAV Praha, 1959.
- [5] Griffith, A. A.: The phenomena of rupture anflowing solids, *Philosophical Transactions, Series A*, Vol. 221, p. 163-198, 1920.
- [6] Huang, C-S., Labossiere, P.: Stress singularities, stress intensities and fracture initiation at sharp reentrant corners in elastic plates in bending, *Damage and Fracture Mechanics VII*, 2003.
- [7] Irwin, G. R.: Analysis of stresses and strains Nera the end of crack traversing a plate, *Journal of applied mechanics*, Vol. 24, p. 361-364, 1957.
- [8] Klusák, J.: *Lineárně elastická lomová mechanika V-vrubu*. Disertační práce na VUT v Brně, 2002.
- [9] Knésl, Z.: A criterion of V-notch stability. *International Journal of Fracture*, Vol. 48, p. 79-83, 1991.
- [10] Knésl, Z.: The application of the strain energy density concept to the determinativ of a crack propagation direction initiated at a sharp notch tip. *Acta Technica ČSAV*, 38, p. 221 – 234, 1993.
- [11] Knésl, Z., Knápek, A.: Lomově – mechanický popis trhliny s vrcholem v bimateriálovém rozhraní, *Inženýrská mechanika 96*, p. 71-76, Svratka, 1996.
- [12] Knésl, Z., Náhlík, L., Radon J. C.: Influence of interface on fatigue threshold values in elastic bimetals. *Computational Materials Science*, Vol. 28, p. 620-627, 2003.
- [13] Kotoul, M., Ševeček, O., Vysloužil, T.: Theoretical and Applied Fracture Mechanics. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 61, p. 40-50, 2012.
- [14] Kunz, J.: *Základy lomové mechaniky*. 2. přeprac. vyd. Praha: ČVUT, 1994, 172 s. ISBN 80-010-1215-8.

- [15] Majer, Z.; Hutař, P.; Náhlík, L.: Influence of the singularity induced by the free surface on behaviour of thin body with a V- notch. In *Applied Mechanics 2007 - Book of Extended Abstract*. Ostrava: VŠB - Technical University of Ostrava, 2007. s. 155-156. ISBN: 978-80-248-1389- 9.
- [16] Majer, Z.: *Lomově-mechanický model částicového kompozitu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 82 s. Vedoucí disertační práce prof. RNDr. Zdeněk Knésl, CSc.
- [17] Majer, Z., Hutař, P., Náhlík, L.: Odhad iniciace trhliny pro ohýbaný vzorek s V- vrubem. In *Problémy lomové mechaniky X*. Brno: 2010. s. 31-34. ISBN: 978-80-214-4153- 8.
- [18] Murakami, Y. and Co-editors: *Stress intensity factors handbook*, Vol. 1, The Society of Mat. Science & Elsevier Science, 1987.
- [19] Murakami, Y. and Co-editors: *Stress intensity factors handbook*, Vol. 2, The Society of Mat. Science & Elsevier Science, 1987.
- [20] Murakami, Y. and Co-editors: *Stress intensity factors handbook*, Vol. 3, The Society of Mat. Science & Elsevier Science, 1992.
- [21] Murakami, Y. and Co-editors: *Stress intensity factors handbook*, Vol. 4, The Society of Mat. Science & Elsevier Science, 2001.
- [22] Murakami, Y. and Co-editors: *Stress intensity factors handbook*, Vol. 5, The Society of Mat. Science & Elsevier Science, 2001.
- [23] Náhlík, L.: Odhad exponentu singularity napětí a prahových napětí pro šíření trhliny přes rozhraní dvou ortotropních materiálů, *Problémy lomové mechaniky VI*, s. 59-68, 2006.
- [24] Náhlík, L.: *Šíření únavových trhlin v okolí rozhraní dvou elastických materiálů*. Disertační práce VUT v Brně, 2002.
- [25] Náhlík, L., Šestáková, L., Hutař, P., Bermejo, R.: Prediction of crack propagation in layered ceramics with strong interfaces. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 77, p. 2192-2199, 2010.
- [26] Ondráček, E., Vrbka, J., Janíček, P., Burša, J.: *Mechanika těles: Pružnost a pevnost II*. 4. přepracované vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., 2006. 262 s. ISBN 80-214-3260-8.
- [27] Seweryn, A.: Brittle fracture criterion for structures with sharp notches, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 47, p. 673-681, 1994.
- [28] Seweryn, A., Lukaszewicz, A.: Verification of Britce fracture kriteria for elements with V-shaped notches, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 69, p. 1487-1510, 2002.

- [29] Sih, G. C.: *A special theory of crack propagation, in Mechanics of fracture*, ed. G. C. Sih. Noordhoff Intern. Publishing, Leyden 1977.
- [30] Sih, G. C.: Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. *International Journal of Fracture*, Vol. 10, No. 3, p. 305-321, 1974.
- [31] Ševčík, M., Hutař, P., Náhlík, L.: Description of the stress distribution around the crack front in the case of thin structures. *Bulletin of Applied Mechanics* 6 (22), p. 30-33, 2010.
- [32] Ševčík, M.: *Vliv volného povrchu tělesa a gradientní změny materiálových vlastností na chování trhlíny*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 103 s. Vedoucí disertační práce doc. Ing. Luboš Náhlík, Ph.D.
- [33] Ševeček, O., Kotoul, M., Profant, T.: Effect of higher order asymptotic terms on the competition between crack penetration and debond at a bimaterial interface between aligned orthotropic materials. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 80, p. 28-51, 2012.
- [34] Ševeček, O., Bermejo, R., Kotoul, M.: Prediction of the crack bifurcation in layered ceramics with high residual stresses. *Engineering Fracture Mechanics*, v tisku, 2013.
- [35] Taylor, D.: Tudory of critical distance, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, p. 1696-1705, 2008.
- [36] Taylor, D., Kasiri, S.: A comparison of critical distance methods for fracture prediction, *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 50, p. 1075-1081, 2008.
- [37] Taylor, D., Cornetti, P., Pugno, N.: The fracture mechanics of finite crack extension, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 72, p. 1021-1038, 2005.
- [38] Vlk, M., Florian, Z.: *Mezní stavy a spolehlivost*. Brno: Ústav mechaniky těles mechatroniky a biomechaniky, Fakulta strojního inženýrství Vysoké učení technické v Brně, 2007.
- [39] Williams, M. L.: On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics* 24, p. 109-114, 1957.
- [40] Wallin, K.: The size effect in K_{IC} results. *Engineering Fracture Mechanics* 22 (1), p. 149-163, 1985.
- [41] Yosibash, Z.: *Singularities in elliptic boundary value problems and elasticity and their connection with failure initiation*. New York, NY [u.a.]: Springer Science Business Media, LLC. ISBN 978-146-1415-077.
- [42] Yosibash, Z., Bussiba, A., Gilad, I.: Failure kriteria for Britce elastics materials, *International Journal of Fracture*, Vol. 125, p. 307-333, 2004.
- [43] Zouhar, M.; Náhlík, L.; Hutař, P.; Ševčík, M.; Knésl, Z. The effect of critical distance on stability conditions for a crack at the interface between two polymer materials. *Engineering Mechanics*, 2012, roč. 19, č. 2/ 3, s. 155-164. ISSN: 1802- 1484.

**PUBLIKACE AUTORKY ZAMĚŘENÁ NA DANOU
PROBLEMATIKU**

1. Náhlík L., Štegnerová K., Hutař P., Majer Z.: Critical value for crack propagation from sharp V-notch, manuscript příspěvku pro *7th International Conference on Materials Structure & Micromechanics of Fracture (MSMF7)* určený pro publikaci v časopise Key Engineering Materials, Trans Tech Publications Inc.

SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

COD	kritérium rozevření trhliny
CTOD	Kritérium otevření ve vrcholu trhliny
EPLM	elasto-plastická lomová mechanika
LELM	lineárně-elastická lomová mechanika
MKP	metoda konečných prvků
PMMA	polymethylmethakrylát, plexisklo
SED	hustota deformační energie (strain energy density)
TCD	teorie kritické vzdálenosti (theory of critical distance)
A_k	koeficient Williamsova rozvoje
A_{11}, A_{12}, A_{22}	koeficienty pro určení zobecněného faktoru hustoty deformační energie pro obecný singulární koncentrátor napětí
B	tloušťka zkušební vzorku
C	konstanta
E, E'	modul pružnosti v tahu
G	hnací síla trhliny
G_C	kritická velikost hnací síly trhliny
H, H_i	zobecněný součinitel intenzity napětí pro daný mód namáhání
H_O, H_{IC}	vrubová lomová houževnatost
I, II, III	označení módu zatížení
J	J-integrál
J_O, J_{IC}	kritická hodnota J-integrálu
K, K_i	součinitel intenzity napětí pro daný mód namáhání
K_O, K_{IC}	lomová houževnatost (kritická hodnota součinitele intenzity napětí)
L	lomově mechanický parametr
L_C	kritická hodnota lomově mechanického parametru
Q	funkce polárního úhlu potřebná pro určení zobecněného faktoru hustoty deformační energie pro obecný singulární koncentrátor napětí
R	R-křivky
S	faktor hustoty deformační energie

T	funkce polárního úhlu potřebná pro určení zobecněného faktoru hustoty deformační energie pro obecný singulární koncentrátor napětí
U_I, U_{II}	funkce polárního úhlu potřebná pro určení zobecněného faktoru hustoty deformační energie pro obecný singulární koncentrátor napětí
V_I, V_{II}	funkce polárního úhlu potřebná pro určení zobecněného faktoru hustoty deformační energie pro obecný singulární koncentrátor napětí
$Y(a/w)$	korekční funkce závislá na geometrii tělesa
a	délka trhliny
a_{II}	koeficient pro určení faktoru hustoty deformační energie pro trhlínu
c_1, c_2, c_3, c_4	koeficienty
d	kritická vzdálenost před vrcholem trhliny nebo V-vrubu
$f_k(\theta), f_{ij}(\theta)$	známá funkce polohového úhlu θ
$g_i(\theta)$	známá funkce polohového úhlu θ
j	hloubka V-vrubu
l	délka zkušební vzorku
p, p_I, p_{II}	exponent singularity napětí
q, q_I, q_{II}	konstanty
k_n, k_p, k_2	koeficienty rozložení hustoty deformační energie
r	polární souřadnice, vzdálenost od vrcholu koncentrátoru
r_p	velikost plastické zóny
u_i	složky vektoru posuvů
w	hustota deformační energie
Σ	zobecněný faktor hustoty deformační energie
θ, θ^*	polární souřadnice, úhel
$\Delta \equiv \nabla^2$	Laplaceův operator
$\Phi(x,y)$	Airyho funkce napětí
τ_{ij}	složky smykového napětí
α	úhel rozevření V-vrubu
δ_c	kritická hodnota rozevření trhliny
ε_{ij}	složky tenzoru přetvoření
λ	vlastní číslo, $\lambda = 1 - p$
μ	modul pružnosti ve smyku
ν	Poissonovo číslo
σ	normálové napětí

APLIKACE ZOBECNĚNÉ LINEÁRNĚ ELASTICKÉ LOMOVÉ MECHANIKY
NA ODHAD POČÁTKU ŠÍŘENÍ TRHLINY Z OSTRÉHO V-VRUBU

σ_{appl}	aplikované zatížení
σ_C	pevnost v tahu
σ_{crit}	kritická hodnota napětí
σ_{ij}	složku tenzoru napětí
$\bar{\sigma}$	střední hodnota napětí
σ_{ys}	mez kluzu materiálu
$(\sigma_{yy})_{max}$	maximální nominální napětí