Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Vybrané aplikace matematiky

Vypracoval: Bc. Daniel Kratochvíl
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.

České Budějovice Rok 2022

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma *Vybrané aplikace matematiky* jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 8. 7. 2022 ………………………….

Kratochvíl Daniel

Poděkování

Velké díky patří prof. RNDr. Pavlu Tlustému, CSc. za vedení, odborné připomínky a inspiraci nejen při psaní této práce, ale i v průběhu celého studia na univerzitě.

Anotace

Diplomová práce se zabývá tématem teorie her, která spadá do oblasti aplikované matematiky. Celá práce je rozdělena do tří částí. V úvodní části jsou čtenáři představeny základní pojmy teorie her, které jsou následně aplikovány v matematických konfliktních modelových situacích. Druhá část se věnuje historii teorie her a uvádí některé historické problémy a milníky v této oblasti matematiky. Poslední část je pak zaměřena na různé varianty NIM her, jejich analýzu a hledání optimální strategie.

Klíčová slova

NIM, optimální strategie, NIM součet, teorie her

Abstract

The thesis is a contribution to the topic of game theory which belongs to the field of applied mathematics. The work is divided into three parts. In the first part, the basic terminology of game theory is introduced and subsequently applied in conflict mathematical model situations. The second part deals with the history of game theory and presents some historical problems as well as milestones in this area of mathematics. The last part is focused on different variants of NIM games, their analysis and the search for an optimal strategy.

Keywords

NIM, optimal strategy, NIM sum, game theory

Obsah

Úvod

Existuje spousta disciplín, kterým se aplikovaná matematika věnuje. V této diplomové práci se budeme zabývat teorií her, která má široké využití v řešení reálných problémů. Tyto problémy nazýváme konflikty, přičemž právě teorie her dává účastníkům konfliktu návod k nalezení optimální strategie. Účastník konfliktu, který se rozhoduje v souladu s optimální strategií, dosahuje nejlepšího možného výsledku. Účastník konfliktu je označován jako hráč.

Teorie her zasahuje svým zaměřením do životů lidí napříč všemi věkovými kategoriemi. Prakticky celý život lidé řeší konflikty v každodenních situacích, ať už se jedná o spor dvou spolužáků, souboj dvou zápasníků, slovní výměny mezi dvěma kolegy, nebo například o různé herní situace. Z tohoto důvodu je teorie her velmi atraktivní disciplínou, ve které mohou nalézt zalíbení jak zkušení matematičtí nadšenci, tak i děti na základní škole, pokud se jim jednotlivé poznatky předají způsobem, který nebude nad rámec jejich kognitivní úrovně.

Cílem práce bude seznámit čtenáře se základními principy teorie her. V první části diplomové práce se zaměříme na základní pojmy, které následně budeme aplikovat v konfliktních modelových situacích, které do značné míry odráží reálné situace. Ve druhé části se podíváme na některé historické problémy a milníky, díky kterým se teorie her jako samostatná matematická vědní disciplína dále rozšiřovala i do jiných vědních oblastí. Poslední část bude věnována NIM hrám, jejichž základní varianta spočívá v odebírání sirek z hromádek. V této části se zaměříme na důkladný rozbor těchto her a postupnými úvahami se budeme snažit dojít k nalezení optimální strategie. Tyto úvahy budou podpírány matematickou terminologií, zároveň však budou konstruovány tak, aby jednotlivé postupy pro hledání optimální strategie byly pochopitelné i pro žáky základních škol.

1 Teorie her

1.1 Co to je teorie her?

Teorie her je matematická vědní disciplína, kterou můžeme chápat jako můstek mezi reálnými každodenními problémy, ve kterých hraje velkou roli naše vědomé rozhodování, a teoretickou matematikou, u které bychom si na první pohled mohli říct, že má s reálným životem pramálo společného. Situace, kde jsou hráči nuceni činit rozhodnutí, budeme nazývat konflikty. Pod tím si můžeme představit obrovskou škálu situací, jako je například spor o to, kdo z manželů vyluxuje koberec, marketingové předhánění dvou obchodních řetězců, šachová partie, nebo třeba obyčejná hra kámen, nůžky, papír. Teorie her je pak mocným nástrojem při výběru strategie, která vede k pozitivnímu výsledku. (Chvoj, 2013)

1.2 Základní pojmy

Hra – Jde o jakoukoliv rozhodovací situaci nebo též konflikt mezi dvěma či více zúčastněnými hráči.

Hráč – Účastník konfliktu. Může jít o hráče pokeru, firmu, politickou stranu, jedince, či jakéhokoliv účastníka běžných her. (Dlouhý, 2009)

Hráčů bude vždy konečný počet, proto můžeme hráče označovat čísly 1, 2, 3, …, n a budeme mluvit o množině hráčů $H = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Strategie – Konkrétní alternativa, kterou hráč vybírá z množiny prostoru strategií.

Ke každému hráči $i \in H$ přísluší jedna množina X_i, která zahrnuje soubor všech jeho možných strategií. Množinu X_i budeme tedy nazývat *prostorem strategií* hráče i.

Optimální strategie – Soubor rozhodnutí, které vedou k nejvýhodnějšímu možnému výsledku.

Prostor strategií – Seznam všech možných alternativ a rozhodnutí, které má hráč k dispozici. (Dlouhý, 2009)

Ve hře zvolí každý hráč i z množiny H určitou strategii $x_i \in X_i$. Vznikne nám n-tice $x = [x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n]$, která určuje důsledek pro každého hráče, vyplývající z jeho účasti v rozhodovací situaci. Za předpokladu, že zmíněný důsledek lze charakterizovat funkcí, která nabývá číselných hodnot, můžeme každému hráči přiřadit funkci $V_i(x)$, kde $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, která je modelovou kvantitativní charakteristikou hráče i. Funkce $V_i(x)$ se nazývají *výplatní funkce*. Tyto funkce jsou definované na kartézském součinu prostoru strategií $X = X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_n$. Pokud výplatní funkce nabývá pro nějaké x kladné hodnoty, hovoříme o zisku nebo o výhře, v případě záporné hodnoty se jedná o ztrátu nebo o prohru. Množina hráčů H, množina prostorů strategií X_i a množina výplatních funkcí $V_i(x)$ nám určují tzv. *hru v normálním tvaru*. (Maňas, 1991)

Výplatní funkce – Jedná se o výsledek hry, čímž myslíme zisk nebo ztrátu hráče na základě jeho zvolených strategií.

Inteligentní hráč – Účastník konfliktu, o kterém se předpokládá, že má dokonalé informace o hře a chová se tak, aby maximalizoval hodnotu svojí výplatní funkce. (Dlouhý, 2009)

Takový hráč bere při výběru strategie do úvahy všechna možná rozhodnutí ostatních hráčů. Můžeme také říci, že jeho chování a rozhodování je racionální. Hráč, který volí strategie zcela náhodně bez logické analýzy aktuální situace ve hře, a tudíž nedbá na hodnoty své modelované výplatní funkce, se nazývá *neinteligentní hráč*. Existují i takoví hráči, kteří mají určitou pravděpodobnost p takovou, že se budou chovat jako inteligentní hráči, a pravděpodobnost $1 - p$, že se budou chovat jako neinteligentní hráči.

Lze ukázat, že pokud máme ve hře více neinteligentních hráčů, můžeme všechny vlivy jejich rozhodnutí sesumírovat do rozhodnutí jediného neinteligentního hráče. Pokud je ve hře jeden hráč neinteligentní, popř. podle předchozí věty více hráčů neinteligentních, nazvěme ho hráč A, a pouze jeden hráč inteligentní, nazvěme ho hráč *B*, pak může pro hráče *B* nastat dvojí způsob rozhodování. První způsob se nazývá *rozhodování při riziku*, pokud hráč *B* zná rozložení pravděpodobnosti výběru strategie hráče *A*. Jestliže toto rozložení pravděpodobnosti hráč *B* nezná, pak mluvíme o *rozhodování při nejistotě*. (Chvoj, 2013)

1.3 Klasifikace her

Utvořit jednotné rozdělení her není tak jednoduché. Můžeme se totiž zaměřit na počet hráčů, kteří hru hrají, přítomnost či nepřítomnost náhodných mechanismů, informovanost hráčů v okamžiku, kdy se mají rozhodnout, dále počty strategií, které má hráč k dispozici, nebo třeba způsoby generování a rozdělování výher. (Maňas, 1991)

Uvedeme si tedy několik typů her, kterými se teorie her nejvíce zabývá.

Kooperativní hry – Jedná se o hry, kde jednotliví hráči smí uzavírat dohody mezi sebou.

Nekooperativní hry – Hráči během hry nemohou uzavírat dohody.

Jednokolové hry – V případě jednokolových her hráči vždy odehrají jednu hru, rozeberou si výplaty a zkušenosti nabyté v této hře dál neuplatňují. Faktem také je, že hráči volí své strategie na základě vědomí, že nebudou následovat další kola hry.

Vícekolové hry – Hry, které se hrají vícekrát za sebou a hráči tak mají možnost své strategie měnit v průběhu dalších kol. Jsou specifické tím, že hráče nutí přemýšlet několik kol dopředu, a na základě toho vymýšlet výhodné strategie. Speciální situace nastává, pokud hráči ví, že hrají poslední kolo vícekolové hry. V takové situaci se hráči chovají tak, jako by hráli jednokolovou hru.

Symetrické hry – Rozumíme takové hry, kde množina strategií je pro všechny hráče shodná.

Asymetrické hry – V těchto hrách naopak hráči volí z různých množin řešení, čímž se ocitají v nerovnocenném postavení.

Hry s nulovým součtem – V případě těchto her je součet výplat rovný nule. Co jeden hráč získá, ten druhý ztratí. Někdy se tyto hry nazývají také antagonistické hry.

Hry s nenulovým součtem – Hry, ve kterých nelze předem určit, jakou hodnotu bude mít součet výplat všech hráčů.

Hry s úplnou informací – V tomto typu her hráči mohou znát všechny možné průběhy hry.

Hry s částečnou informací – Hráči dopředu neznají některé prvky ve hře, ale v průběhu hry můžou některé chybějící informace získávat. Za chybějící informaci můžeme považovat například množinu všech strategií protihráče, hodnoty výplat jednotlivých hráčů či samotný počet hráčů.

Nekonečné hry – Jedná se spíše o hypotetické hry, jejichž počet kol je nekonečný. Zkoumání těchto her se odehrává především v teoretické rovině a nachází význam při poznávání chování nějakého modelu, který je limitován předem danými omezeními.

Konečné hry – V případě konečných her je množina strategií každého hráče konečná.

Diskrétní hry – Množina strategií daného hráče je v diskrétních hrách konečná nebo spočetná.

Spojité hry – Naopak u spojitých her je množina strategií jednoho hráče nespočetná množina.

Simultánní hry – Hry, ve kterých hrají hráči v jednotlivých kolech současně. Obecněji tyto hry můžeme popsat jako hry, ve kterých jednotliví hráči při volbě své strategie nevědí, jaké strategie uplatnili ostatní hráči.

Sekvenční hry – V těchto hrách volí hráči své strategie postupně, čímž se mohou dostávat k informacím, jaké strategie volili někteří protihráči. Sekvenčním hrám se někdy také říká *metahry*. (Chvoj, 2013)

1.4 Nashova rovnováha

V případě nějakého konfliktu napadne každého hráče, který chce vyhrát, otázka: „Jak bych měl postupovat, abych dosáhl co nejlepšího možného výsledku?“ Hledáním rovnovážné strategie se zabývá tzv. *Nashova rovnováha*, jejíž název nese jméno amerického matematika Johna Nashe, který tento pojem zavedl už ve své diplomové práci.

Nashova rovnováha je takové řešení, ve kterém platí následující pravidlo. Pokud se některý z hráčů nebude držet své optimální strategie, zatímco jeho soupeř se jí držet bude, jeho výhra se sníží, nebo v nejlepším případě zůstane stejná. Neboli ten, kdo se odchýlí od optimální strategie, si nemůže polepšit. Pro náš příklad se budeme bavit o konfliktu, ve kterém figurují pouze dva hráči. Nashova rovnováha nastává, pokud nalezneme strategie obou hráčů $x_o \in X$ a $y_o \in Y$ takové, pro které platí následující:

$$V_1(x, y_o) \leq V_1(x_o, y_o) \wedge V_2(x_o, y) \leq V_1(x_o, y_o),$$

kde x_o je optimální strategie prvního hráče,

y_o je optimální strategie druhého hráče,

$V_i(x, y)$ je výplatní funkce i-tého hráče.

Tyto nerovnosti vyjadřují již zmíněný fakt, že pokud se první nebo druhý hráč odchýlí od optimální strategie, zatímco jeho soupeř se bude držet optimální strategie, jeho výhra se sníží, nebo v nejlepším případě zůstane stejná. Tyto optimální strategie, které představují Nashovu rovnováhu, nazýváme *rovnovážnými strategiemi*. (Dlouhý, 2009)

Proč nás vůbec Nashovy rovnováhy zajímají? Je to hlavně ze dvou důvodů:

1) Předpokládáme, že každý inteligentní hráč nakonec k tomuto řešení svým vlastním uvažováním dojde.
2) Druhým důvodem je, že se k tomuto řešení hráči dostanou metodou pokusu a omylu v jakémsi evolučním procesu. (Binmore, 2014)

V následujících podkapitolách si uvedeme některé známé problémy a pokusíme se najít Nashovu rovnováhu.

1.4.1 Hra na kuře

Tato hra je inspirována filmem z padesátých let minulého století, který nese název *Rebel bez příčiny*. Hlavní roli charismatického mladíka v něm ztvárnil herec James Dean. Scéna z filmu je následující. Dva mladíci se baví tím, že se rozjedou proti sobě středem silnice a kdo první uhne, ztratí prestiž. Z tohoto filmu pak vytvořil Howard Raiff v roce 1957 modelovou situaci, která se od té doby stala součástí teorie her. Je to hra, ve které každý hráč sleduje svůj zájem a jde o to, kdo v této konfliktní situaci podlehne nátlaku a stane se tak slabším jedincem. Pro tuto modelovou situaci budeme aktéry konfliktu místo mladíků označovat hráč 1 a hráč 2.

Zanalyzujeme si situaci. Pokud oba hráči neustoupí a pojedou rovně, auta se srazí a dojde k tragické havárii. Pokud se první hráč rozhodne neustoupit a druhý hráč nakonec uhne volantem, druhý hráč ztrácí prestiž, stejně je tomu i naopak. Pokud oba hráči s dostatečným předstihem uhnou (předpokladem je, že oba uhnou na stejnou stranu z jejich pohledu), výsledek je neutrální. (Skuhra, 2010)

Situaci popisuje následující tabulka, kde čísla odpovídají hodnotám výplatních funkcí jednotlivých hráčů.

		Hráč 2	
		Uhnout	Rovně
Hráč 1	Uhnout	0 0	5 -5
	Rovně	-5 5	-100 -100

Tabulka 1 – Hra na kuře

Ani jeden z hráčů nemá dominantní strategii, protože strategie obou hráčů jsou symetrické. Jak se tedy dostaneme k rovnovážnému bodu? Víme, že optimální strategie je taková, které když se nebudeme držet, nedosáhneme lepšího výsledku v důsledku změny této strategie. Podíváme se na situaci z pohledu prvního hráče. Pokud oba hráči zvolí možnost rovně, změna strategie prvního hráče mu přinese lepší výsledek, místo hodnoty -100 bude mít hodnotu -5, to znamená, že sice ztratí prestiž, ale alespoň zůstane naživu. Pokud oba hráči naopak zvolí možnost uhnout, opět změna strategie prvního hráče mu přinese lepší užitek, místo hodnoty 0 se dostane na hodnotu 5, jinými slovy místo neutrálního stavu získá prestiž. Proto strategie na hlavní diagonále nepřináší Nashovu rovnováhu. Pokud hráč 2 zvolí strategii uhnout a hráč 1 strategii rovně, pak změna strategie hráče 1 nepřináší lepší hodnotu výplatní funkce, a tudíž se jedná o rovnovážný bod. Zrovna tak v situaci, kdy hráč 2 zvolí strategii rovně a hráč 1 strategii uhnout, nepřináší změna strategie prvnímu hráči užitek, ale naopak smrt, a tudíž se změna nevyplácí. Hra na kuře má tak dva rovnovážné body, a to (*uhnout*, *rovně*) a (*rovně*, *uhnout*). Našli jsme dva rovnovážné body Nashovy rovnováhy, ale nejedná se o stabilní rovnováhu, jelikož se hráči rozhodují nastejno a nemůžeme si tak být stoprocentně jistí, že hráči zvolí odlišné strategie a tím oba přežijí.

Do hry tak vstupuje psychologický faktor, který může misky vah této hry naklonit na jednu či druhou stranu. Například, pokud hráč 1 bude před touto modelovou situací vykazovat psychickou a sociální dominanci nad druhým hráčem, má velkou šanci právě tímto sociálním aspektem zvýšit pravděpodobnost, že druhý hráč nakonec uhne. Zrovna tak, pokud první hráč bude před začátkem konfliktu deklarovat, že má zaseklý volant a nemůže jej strhnout do strany, druhý hráč nemá na výběr a v případě racionálního chování mu nezbývá než uhnout, protože chce maximalizovat svoji výplatní funkci, což v tomto případě odpovídá především tomu, že přežije. (Skuhra, 2010)

Tato modelová situace se dá ukázat i na konfliktu dvou států o nezávislé území, kde oba státy volí ze strategií bojovat nebo ustoupit. Pokud oba státy zvolí strategii bojovat, dojde k velkému masakru a zemře spousta lidí. Pokud oba státy ustoupí, pak nezávislé území nezíská ani jeden stát, popř. dojde k rozdělení území napůl. Pokud jeden ze států zvolí strategii bojovat a druhý ustoupit, pak ani jednomu ze států se nevyplatí svoji strategii změnit, a to je náš rovnovážný bod. Tato volba je však pro jednu stranu vždy méně výhodná. Jedna strana vždy získá, zatímco druhá se musí vzdát svých preferencí, a tudíž ztrácí.

1.4.2 Souboj pohlaví

Souboj pohlaví je konfliktní modelová situace, kde každý z hráčů dává přednost jinému výsledku. Hráče zde představují muž a žena, ať už se jedná o manželský nebo partnerský pár. Může se jednat o spor, kdy jeden z partnerů preferuje dovolenou u moře, zatímco druhý by raději jel na dovolenou do hor.

Souboj pohlaví si ilustrujeme na následujícím příběhu. Jednoho rána se manželský pár baví u snídaně o tom, co spolu ihned po práci podniknou. Jejich cílem je trávit čas společně, na druhou stranu každý z nich má jiné preference. Zatímco muž dává přednost fotbalovému utkání svého oblíbeného týmu, jeho žena by ráda zašla na balet. Odpoledne se jednomu z nich vybije mobil, a tak nemají možnost se spolu spojit a domluvit se. Každý z nich se musí sám nezávisle rozhodnout, kam nakonec půjde.

Situaci si znázorníme v tabulce a následně najdeme Nashovu rovnováhu.

		Žena	
		Fotbal	Balet
Muž	Fotbal	2 3	1 1
	Balet	0 0	3 2

Tabulka 2 - Souboj pohlaví

Podíváme se na situaci z pohledu muže. Pokud muž zvolí fotbal a žena zvolí balet, pak by ale v případě změny své strategie získal větší hodnotu výplatní funkce z 1 na 2. Pokud se naopak oba manželé rozhodnou současně pro preferovanou zábavu toho druhého, tzn. muž půjde na balet a žena půjde na fotbal, pak by pro maximalizaci užitku bylo pro muže vhodné, aby změnil svoji strategii. Hodnoty výplatních funkcí obou manželů jsou v tomto případě nejmenší, protože v konečném důsledku spolu nebudou trávit čas, a ještě navíc se zúčastní akce, která ani jednoho z nich nezajímá. Pokud oba zvolí fotbal, pak změnou strategie muž nedosáhne větší hodnoty výplatní funkce. Zrovna tak tomu je, pokud oba zvolí balet.

Možnosti (*fotbal*; *fotbal*) a (*balet*; *balet*) jsou rovnovážnými body Nashovy rovnováhy. Jelikož jeden o druhém neví, jakou alternativu nakonec zvolí, nám tento model nezajišťuje, že oba hráči zvolí optimální strategii, protože k ní je potřeba spolupráce. Pokud by muž věděl, že žena zvolí balet, zvolil by také balet, aby maximalizoval svůj užitek. Kdyby naopak věděl, že žena zvolí fotbal, rozhodl by se také pro fotbal pro maximalizaci užitku. To nás vede k tomu, že k dosažení optimální rovnováhy je zapotřebí kooperace a jednotlivé alternativy střídat, což manželský pár vede ke kompromisu. To se dá zajistit v případě vícekolových her, kdy na tyto akce budou chodit společně a svoje účasti na akcích budou střídat. Do těchto rozhodnutí se pak mohou promítnout další faktory jako je četnost fotbalových utkání a divadelních představení, míra záliby manželů do jednotlivých možností, ale také míra závislosti obou partnerů na vztahu a další psychologické vlivy.

Psycholog jistě doporučí jednotlivé aktivity střídat v závislosti na již zmíněných faktorech, aby potřeby jedince byly ve vztahu naplňovány a nedocházelo tak k pocitu nenaplnění jednoho z partnerů při nedostatku jím preferované aktivity, což by mělo za následek odpoutání od partnera. Pokud by jeden z partnerů v této oblasti vykazoval silnou dominanci a preferoval by pořád jeden a ten samý typ zábavy, zanechávalo by to v manželství katastrofální důsledky, které by eskalovaly k čím dál větší propasti mezi jednotlivými manžely. (Skuhra, 2010)

1.4.3 Vězňovo dilema

Vězňovo dilema je obecně nejznámější modelový konflikt z teorie her a vychází ze situace dvou vězňů, jejichž cílem je dostat co možná nejmenší trest. Uvedeme si opět příběh, ze kterého budeme vycházet.

Dva zločinci, kteří spolu spáchali ozbrojenou loupež, jsou zatčeni a vyslýcháni policií v oddělených celách, tudíž nemají možnost se spolu nějak domluvit. Policie však nemá dostatek důkazů na to, aby je odsoudila, takže potřebuje na zločince vyvinout tlak, a dá každému z nich nabídku. Pokud oba zločinci budou zapírat svoji vinu, půjdou oba na tři roky do vězení. V případě, kdy se oba přiznají, budou odsouzeni na pět let vězení. Pokud se jeden ze zločinců přizná a udá toho druhého, který bude zapírat, hlavní část viny padne na druhého zločince a prvnímu zločinci, který se přiznal, bude přiznána polehčující okolnost. Tím dostane trest pouze na jeden rok, zatímco jeho komplic, kterého zradil, bude odsouzen na 10 let vězení. (Chvoj, 2013)

Hodnoty výplatní funkce udává následující tabulka.

		Vězeň 2	
		zapírat	přiznat
Vězeň 1	zapírat	-3 -3	-1 -10
	přiznat	-10 -1	-5 -5

Tabulka 3 - Vězňovo dilema

Dilema se této situaci říká proto, že by zjevně bylo pro oba lepší zapírat, čímž by oba dostali nižší trest ve výši tří let. Bohužel pro ně je vzájemná spolupráce nemožná, a tak do hry vstupuje pokušení toho druhého zradit a získat pro sebe nižší trest.

Pokušení by přicházelo i v momentě, kdy by se společně mohli domluvit, protože se nikdy stoprocentně nemůžou spolehnout na loajalitu toho druhého, nebo může jeden z nich podlehnout nátlaku a mučení. Pak je představa deseti let za mřížemi daleko hrozivější, než představa pěti let. A tak nakonec oba zvolí strategii (*přiznat*; *přiznat*) a dostanou pět let vězení.

Ukážeme si, že strategie (*přiznat*; *přiznat*) je rovnovážným bodem Nashovy rovnováhy. Podíváme se na strategie optikou prvního vězně. Když se druhý vězeň rozhodne pro strategii zapírat a první vězeň také, změnou strategie by si polepšil a dostal by nižší trest. Zrovna tak pokud by se druhý vězeň rozhodl přiznat a první vězeň zapírat, opět by změnou strategie dosáhl pozitivnějšího výsledku. Pokud by naopak první vězeň volil strategii přiznat se, nezáleží na tom, co by zvolil druhý vězeň, v obou případech by si změnou strategie nepolepšil. Jelikož se jedná o symetrickou hru, platí to samé pro strategie druhého vězně. Tudíž skutečně strategie (*přiznat*; *přiznat*) je rovnovážným bodem. V tomto případě strategie *přiznat* dominuje u obou hráčů nad strategií *zapírat*.

1.4.4 Kámen, nůžky, papír

Tato hra se velmi často využívá v situacích, kdy se má rozhodnout mezi dvěma hráči, například kdo bude mít první tah v libovolné hře, kde předem není určeno pořadí a zároveň možnost prvního tahu znamená pro začínajícího hráče výhodu. Jedná se o *maticovou hru s nulovým součtem*, a tak si zde uvedeme vlastnosti tohoto typu hry.

Vlastnosti maticových her s nulovým součtem:

- *Maticová hra* má dva hráče.
- Prostor strategií každého hráče v maticové hře je konečná množina. To znamená, že každý hráč má k dispozici konečný počet strategií. Tyto strategie jsou předem známé.
- Tabulka, která obsahuje číselné vyjádření hodnot výplatní funkce, se nazývá *výplatní matice*. Předpokládejme, že hráč 1 má k dispozici m strategií a hráč 2 n strategií, pak výplatní matice vypadá následujícím způsobem:

$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{matrix}
$$

Tabulka 4 - Výplatní matice

- *Realizace hry* znamená, že hráč 1 zvolí strategii *i*, hráč 2 zvolí strategii *j*, pak hráč 2 vyplatí hráči 1 částku a_{ij}, která je zapsána v *i*-tém řádku a *j*-tém sloupci výplatní matice. Částka a_{ij} se nazývá *hodnota hry*.
- Jedna realizace hry se nazývá *partie*. (Skuhra, 2010)

Nyní už ale k samotné hře kámen, nůžky, papír. Pravidla hry jsou jednoduchá, na znamení každý z hráčů ukáže symbol, který reprezentuje jednu ze tří možností, a to kámen, nůžky nebo papír. Výsledek hry je pak důsledkem předem stanovených kritérií. Kámen ztupí nůžky, nůžky rozstříhají papír a papír zabalí kámen. Když hráči ukáží stejný symbol, dochází k remíze. Matice hry z pohledu prvního hráče vypadá následovně:

	Kámen	Nůžky	Papír
Kámen	0	+1	-1
Nůžky	-1	0	+1
Papír	+1	-1	0

Tabulka 5 - Kámen, nůžky, papír

V této matici není možné najít Nashovo rovnovážné řešení v ryzích strategiích. Přesto danou hru běžně hrajeme a známe rovnovážnou strategii, která spočívá v náhodném výběru z prostoru strategií. Pro oba hráče je rovnovážnou strategií vektor ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$), kde jednotlivé prvky vektoru charakterizují pravděpodobnost výběru jedné ze tří strategií. První pozice odpovídá strategii *kámen*, druhá *nůžky* a třetí *papír*. Tento typ strategií řadíme do kategorie *smíšené pravděpodobnostní strategie*. Pro tyto strategie platí, že hráč, který se odchýlí od rovnovážné strategie, tzn. zvolí jiné pravděpodobnosti výběru, nemůže nic získat, ale může naopak ztratit. Pro prostor strategií, který představuje pravděpodobnostní vektor $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ platí: $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1; x_i \geq 0$, to znamená, že součet pravděpodobností jednotlivých strategií každého hráče je roven 1. (Dlouhý, 2009)

Pokud by například hráč 1 zvolil strategii $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$, což odpovídá, že by kámen zvolil dvakrát častěji než nůžky a papír by nedával vůbec, hráč 2 by se pak přizpůsobil a dával by mnohem častěji papír, čímž by porazil preferovanou strategii kámen prvního hráče. Kdyby hráč 2 zvolil strategii (0, 0, 1), vítězil by v průměru ve dvou ze tří her.

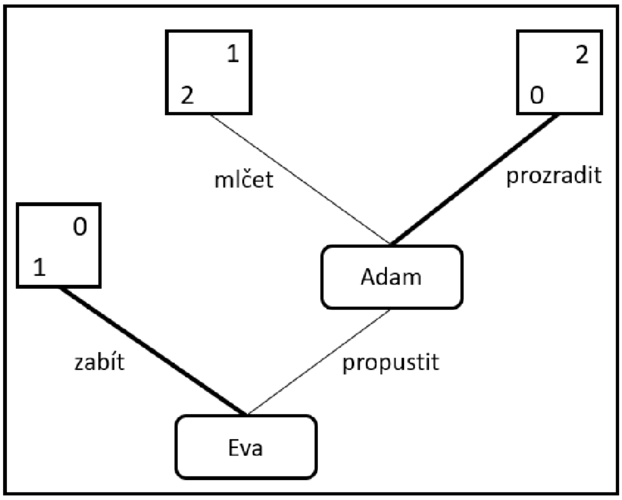
1.4.5 Hra na únos

Ukážeme si další způsob odstraňování dominované strategie v modelové situaci, která se jmenuje *Hra na únos*. Vycházíme z následující situace. Eva unesla Adama. Výkupné za Adama bylo již zaplaceno a Eva se teď rozhoduje, zda Adama zabít, nebo ho má nechat jít. Prostor strategií Evy obsahuje strategie *zabít* a *propustit*. Prostor strategií Adama je *mlčet* a *prozradit*.

		Adam	
		mlčet	prozradit
Eva	zabít	0 1	0 1
	propustit	1 2	2 0

Tabulka 6 - Hra na únos

Řekněme, že se Eva rozhodne Adama propustit. Jaká bude Adamova strategie, aby mu vynesla co nejvyšší užitek? Jelikož už je na svobodě, má 1 bod. Pokud bude mlčet, nic navíc nezíská, avšak pokud by se rozhodl Evu prozradit, získá tím další bod za spolupráci s policií. Eva bude dopadena a následně poslána do vězení. Pokud je tedy Adam propuštěn na svobodu, je jeho dominantní strategie *prozradit*. V případě, že by se Eva rozhodla Adama zabít, je už pak jedno, zda by se Adam rozhodl pro mlčení nebo prozrazení, v obou případech je hodnota jeho výplatní funkce rovna 0, protože přišel o svůj život. Hodnota výplatní funkce Evy je 1, protože si zachránila krk. Adamova strategie *prozradit* je vždy přinejmenším stejně dobrá jako *mlčet*. Adam tak nemá důvod mlčet, protože jako racionální hráč bude chtít maximalizovat svůj užitek, zvolí tedy *prozradit*. V této nově vzniklé hře je pro Evu strategie *zabít* lepší než strategie *propustit*, a tak zvolí *zabít*. Nashova rovnováha je tedy bod (*zabít*; *prozradit*). Průběh konfliktu znázorňuje obrázek 1, kdy zpětnou indukcí Eva zvolí strategii *zabít*, protože v případě opačné strategie by Adam zvolil *prozradit*.



Obrázek 1 – Strom hry na únos

Jak tedy docílit toho, aby Eva Adama propustila? Psychologové doporučují obětem únosu, aby se snažili s únosci navázat dobrý vztah. Pokud by se Adamovi povedlo Evu přesvědčit, že mu na ní záleží natolik, že jeho výplatní funkce za mlčení je větší než ta za prozrazení, zvýšil by si tak šanci, že se nakonec dostane na svobodu. (Binmore, 2014)

2 Historie teorie her

Ačkoliv se počátek teorie her jako samostatné vědní disciplíny datuje až k polovině 20. století, její kořeny sahají do dávné minulosti a s jejími principy se lidé setkávali již dávno před jejím oficiálním založením.

Od počátku existence lidského druhu se člověk jako inteligentní stvoření vypořádává s rozmanitými situacemi každý den. Řeší problémy, jejichž řešení závisí nejen na vlastním rozhodování a chování, ale také musí brát do úvahy faktor rozhodování ostatních inteligentních bytostí. I v situaci, kdy člověk při řešení problému nevychází z žádné propracované teorie, musí přesto ve svém zájmu analyzovat situaci, ve které se ocitl, a zároveň hledat vhodnou strategii, kterou má k dispozici, stejně tak musí analyzovat dostupné strategie protivníka, a ze všech těchto strategií se rozhodnout pro tu nejvhodnější. Tyto úvahy, vycházející především z racionálního pojetí řešení problému, se nakonec staly základními pilíři dnešní teorie her. (Hykšová, 2004)

V této kapitole se podíváme na některé starověké problémy, a následně uvedeme zajímavé a důležité milníky, které stály za zrozením teorie her jako vědní disciplíny tak, jak ji známe dnes.

2.1 Talmud

Talmud je sbírka z židovského zákona, jejíž součástí je *Mišna* a *Gemara*. Zatímco Mišna je záznam ústně tradovaného náboženského práva, Gemara je pak doplněním Mišny a jedná se o rozsáhlé komentáře, které obsahují také diskuse a polemiky jednotlivých učenců. Mišna je členěna do šesti oddílů, přičemž ve druhém traktátu třetího oddílu zvaného *Náším* se řeší mimo jiné otázky spojené se svatební smlouvou, kterou je muž ženě zavázán vyplacením obnosu v případě rozvodu nebo své smrti. V tomto oddíle můžeme nalézt zajímavé volby řešení následujícího problému:

Zemře muž, který po sobě zanechá tři vdovy, z nichž každá měla ve svatební smlouvě přesně stanovenou částku, která jí bude vyplacena v případě manželova úmrtí. První žena má dostat 100, druhá 200 a třetí 300 peněžních jednotek. Jak mezi vdovy rozdělit pozůstalost, je-li mužova pozůstalost menší než součet všech obnosů, které mají vdovy inkasovat? Pozůstalost představuje pouze 100, 200 nebo 300 peněžních jednotek.

Podíváme se na řešení, které je uvedeno v traktátu:

		Závazek		
		100	200	300
Pozůstalost	100	33,3	33,3	33,3
	200	50	75	75
	300	50	100	150

Tabulka 7 – Vyplacení částek

Když se zaměříme na poslední řádek tabulky, jeví se toto rozdělení na první pohled jako nejracionálnější a jistě by takové rozdělení volila většina z nás. Zkrátka spravedlivě rozdělíme pozůstalost v takovém poměru, v jakém poměru jsou závazky k jednotlivým vdovám. V tomto případě je poměr 1 : 2 : 3.

V prvním řádku jde o rovnoměrné rozdělení, kdy pozůstalost není vyšší než minimum ze všech tří závazků. V takovém případě se rozdělí pozůstalost rovnoměrně bez ohledu na poměr jednotlivých závazků.

Prostřední řádek se na první pohled neřídí nějakou intuitivní strategií. Zdůvodnění celé tabulky, dokonce ze čtyř různých perspektiv, zprostředkovali Robert Aumann a Michael Maschler v pojednání s názvem *Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud*. Tři z nich vychází ze zdůvodnění, které jsou založeny na principech obsažených v Talmundu. Čtvrté zdůvodnění tabulky pak vychází přímo z teorie her a opírá se o základní axiomy kooperativní hry. (Hykšová, 2004)

Bližší zpracování těchto zdůvodnění je uvedeno ve sborníku *Matematika v proměnách věků. III*, kde se touto problematikou zabývá Magdaléna Hykšová v kapitole *Historické počátky teorie her*.

2.2 Šalamounův soud

Král Šalamoun je známá postava ze Starého zákona v dobách Izraelského království. Jeho vláda se datuje do 10. století před Kristem. Šalamoun je znám pro svou moudrost nejen těm, kteří se zajímají o židovskou či křesťanskou kulturu, ale i dnešní široké veřejnosti. Jeho moudrost zachycuje biblický příběh, kde je popisován spor dvou žen o dítě. Tento příběh si zde připomeneme a zanalyzujeme použitou Šalamounovu strategii.

Tehdy přišly ke králi dvě ženy nevěstky a postavily se před něj. Jedna z nich řekla: „Prosím, můj pane, já a tato žena bydlíme v jednom domě a já jsem u ní v domě porodila. Třetího dne po mém porodu také tato žena porodila. Byly jsme spolu a v tom domě s námi nebyl nikdo cizí, v domě nebyl nikdo kromě nás dvou. Syn této ženy však v noci zemřel, neboť ho zalehla. Proto v noci vstala, a zatímco tvá otrokyně spala, vzala mého syna od mého boku, položila si ho do klína a svého mrtvého syna položila do klína mně. Ráno jsem vstala, abych svého syna nakojila, ale on byl mrtev. Když jsem si ho však zrána pozorně prohlédla, zjistila jsem, že to není můj syn, kterého jsem porodila.“ Druhá žena však prohlásila: „Nikoli. Můj syn je ten živý a ten mrtvý je tvůj.“ Ale první trvala na svém: „Ne. Tvůj syn je ten mrtvý, a ten živý je můj.“ A tak se před králem hádaly. Král řekl: „Tato tvrdí: ‘Ten živý je můj syn, a ten mrtvý je tvůj.‘ A tato tvrdí: ‘Ne, tvůj syn je ten mrtvý, a ten živý je můj.‘“ Král proto poručil: „Podejte mi meč.“ Přinesli tedy před krále meč. A král nařídil: „Rozetněte to živé dítě ve dví. Jednu polovinu dejte jedné a druhou polovinu druhé.“ Tu řekla králi žena, jejíž syn byl ten živý a jíž se srdce svíralo soucitem nad jejím synem: „Prosím, můj pane, dejte to živé novorozeně jí, jen jej neusmrcujte!“ Ale druhá řekla: „Ať není ani moje ani tvoje. Rozetněte jej!“ Tu král rozhodl: „Dejte to živé novorozeně té, která řekla: ‘Neusmrcujte jej,‘ to je jeho matka.“ (Bible, 2008)

Tato ukázka Šalamounovy moudrosti by selhala v případě, kdy by falešná matka zvolila lepší strategii. Je zřejmé, že pravou matku představa rozseknutí jejího dítěte vejpůl enormně vystrašila, přesto kdyby falešná matka použila stejnou strategii a hrála by, že jí královo rozhodnutí také rve srdce, neměl by král přesvědčivý důkaz k tomu, aby poznal, komu patří živé dítě. Jaký postup by tedy fungoval lépe?

Pojmenujme si pravou matku jako Petru a falešnou matku jako Fionu. Pro zjednodušení situace předpokládejme, že Petra by za svoje dítě dala všechno, co má, zatímco Fiona by byla za dítě ochotna zaplatit pouze nějakou nižší částku. Cílem Šalamouna je přisoudit dítě jeho pravé matce a na začátku je v pozici, kdy neví, která z nich to je. V případě, že by se jich zeptal, Petra jistě odpoví, že to je její dítě a Fiona odpoví zrovna tak, protože nemá žádnou motivaci odpovědět jinak. Šalamounova strategie bude vypadat následovně:

Nejdříve začne náhodným tahem, který postaví Pavlu do role žalobkyně a Fionu do role obžalované anebo naopak. Tento náhodný tah spočívá v položení následující otázky jedné z žen: „Jsi pravá matka?" Tato otázka staví tázanou osobu do pozice žalobkyně, druhou ženu do pozice obžalované.

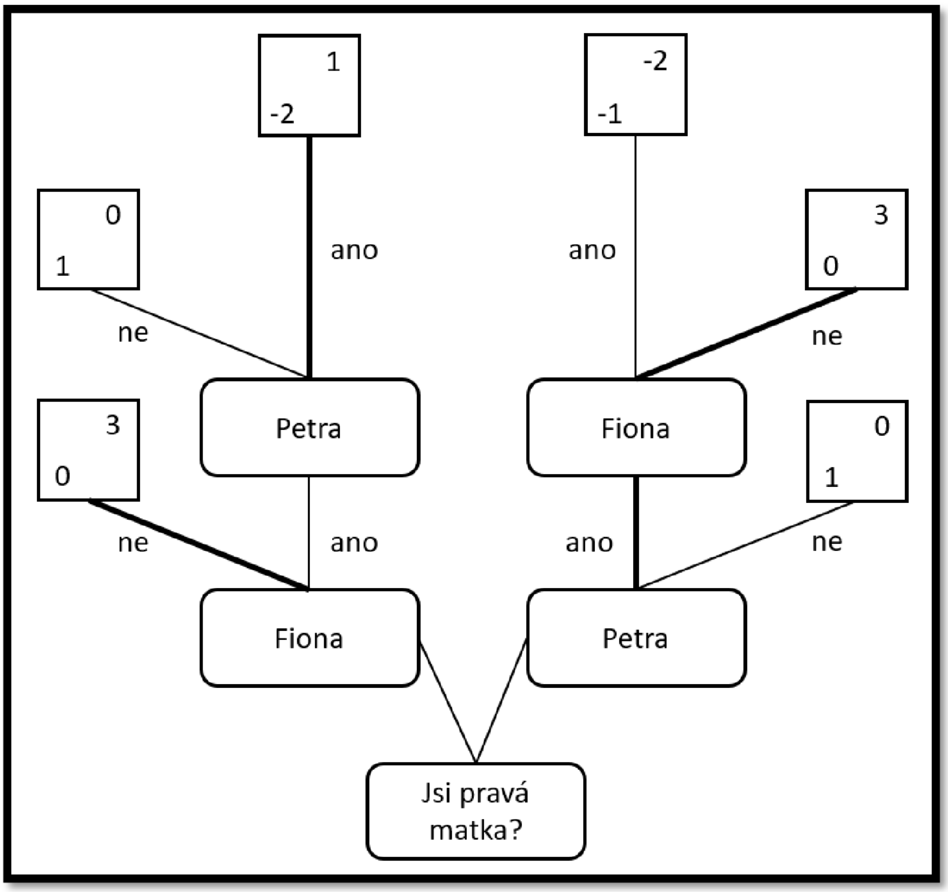
Následuje mechanismus, který s největší jistotou dosáhne požadovaného výsledku a přisoudí dítě jeho pravé matce. Žalobkyně odpovídá na otázku, zda je pravou matkou. Pokud to popře, dítě dostane obžalovaná. Pokud naopak tvrdí, že je pravou matkou, je na řadě obžalovaná strana, která také odpovídá na stejnou otázku, zda je pravou matkou. Popírá-li to, dostane dítě žalobkyně. Pokud obě ženy tvrdí, že je dítě jejich, dítě připadne obžalované a obě ženy zaplatí pokutu.

Ukážeme si pravidla tohoto mechanismu na následujícím obrázku.

Obrázek 2 - Pravidla

Šalamounova moudrost bude spočívat v tom, že nastaví správné pobídky pro Petru a pro Fionu tak, aby je správně motivoval. Pokuta musí být vyšší než cena, kterou je za dítě ochotna zaplatit Fiona, ale musí být nižší, než co je schopná dát Petra. Pokud se budou všichni držet dokonalé rovnováhy, Petra dostane dítě pokaždé a nikdo nebude platit žádnou pokutu.

Uvažujme situaci, kdy si Petra cení dítě na tři peněžní jednotky, Fiona si dítě cení na jednu peněžní jednotku a král Šalamoun nastaví pokutu dvě peněžní jednotky. Jaké situace podle zmíněného mechanismu můžou nastat, je znázorněno na obrázku 3. Když bude první tázána Fiona, a na otázku, zda je pravou matkou, odpoví ne, nebude platit pokutu a zůstane tedy na hodnotě 0. Nic nezíská, nic neztratí. Petra tím pádem dostane dítě a nebude platit pokutu, dostává se tedy na hodnotu 3. Pokud Fiona odpoví na otázku ano, dostává se k tahu Petra. Pokud by odpověděla ne, dítě by nezískala a neplatila by pokutu, zůstala by tedy na bilanci 0, avšak toto rozhodnutí je iracionální, protože dítě je ve skutečnosti její. Fiona by získala dítě a neplatila pokutu, tudíž je na hodnotě 1. V případě, že Petra odpoví ano, získává dítě a obě platí pokutu, dostává se tudíž na hodnotu 1 a Fiona je kvůli pokutě na hodnotě -2. Celý diagram je znázorněn na obrázku 3:



Obrázek 3 - Pobídky

Když se obě ženy budou držet dokonalé rovnováhy, Petra dostane dítě pokaždé a žádná z žen nebude platit pokutu. Tyto rovnovážné tahy jsou v diagramu znázorněny zvýrazněnými čarami. V případě, kdy by Fiona měla šanci získat dítě, tzn. Petra by byla dotazována jako první a Fiona by následně odpověděla ano, vidíme, že by obě ženy bilancovaly se zápornou hodnotou, a tudíž se Fioně nevyplatí odpovídat ano. Tento strategický model nám tedy dává návod, jak přisoudit dítě pravé matce, avšak zdaleka nepokrývá všechny reálné aspekty, jako například nastavení pobídek pro jednotlivé ženy, protože nereflektuje finanční situaci jednotlivých žen. Šalamoun by si tedy nejprve musel zjistit finanční situaci žen a následně podle toho nastavit pokuty tak, aby v případě Fiony pokuta přesahovala cenu, kterou je ochotná za dítě dát, a zároveň aby pokuta byla nejvýše stejně vysoká jako cena, kterou je ochotná dát pravá matka Petra. (Binmore, 2014)

2.3 Důležité milníky ve vývoji teorie her

Émile Borel (1871 – 1956), francouzský matematik a politik, byl uznávanou autoritou v oblasti teorie pravděpodobnosti. V letech 1921 až 1927 vydal čtyři publikace, ve kterých se věnoval hledání optimálních strategií. (Walker, 2012)

Borel jako první zkoušel matematizovat pojem *strategická hra* a zasloužil se o zavedení pojmu *metoda hry*, který odpovídá dnešnímu pojmu *ryzí strategie*. Předpokládal, že každý hráč se snaží maximalizovat svoji pravděpodobnost na výhru a snažil se nalézt nejlepší *metodu hry*. Jeho práce o strategických hrách zůstávaly ve světě dlouho prakticky neznámé. Až ve chvíli, kdy tři jeho práce vyšly v roce 1953 v anglickém překladu v časopise *Econometrica*, se o nich začalo více diskutovat, a tím se dostaly více do povědomí matematickému světu. (Hykšová, 2004)

John von Neumann (1903 – 1957) byl americko-maďarský matematik. I přesto, že o prvenství, kdo by měl být považován za zakladatele matematické teorie her, kde na jedné straně byl již uvedený Émile Borel, a na druhé straně John von Neumann, se vedly mnohé diskuse, většina odborníků se shoduje na druhém jmenovaném. Za opravdový mezník ve vývoji teorie her je všeobecně považován článek J. von Neumanna *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, který byl publikován v roce 1928. Tento článek byl přínosný primárně matematizací strategických her a podáním důkazu základní věty maticových her. (Hykšová, 2004)

Mezi další významné mezníky ve vývoji teorie her patří vydání publikace *Theory of Games and Economic Behavior* z roku 1944, která pramení ze spolupráce J. von Neumanna a ekonoma Oskara Morgensterna (1902 – 1976). Tato publikace stála za zrodem teorie her jako samostatné matematické vědní disciplíny. Kromě obsáhlého teoretického výkladu zde také autoři ukázali využití herně-teoretických modelů v oblasti modelování ekonomických rozhodovacích situací, a tím se zasloužili o to, že byla teorie her rozšířena a následně pevně ukotvena v ekonomii. (Hykšová, 2004)

Po vydání publikace J. von Neumanna a O. Morgensterna nabral vývoj teorie her velmi rychlý spád. Vyšla celá řada významných prací ve čtyřech sbornících. Tyto sborníky byly vydány Princetonskou univerzitou. (Maňas, 1991)

Je důležité zmínit jméno John Forbes Nash (1928 – 2015), který také významně obohatil vědní disciplínu teorie her. Ve svých publikacích, které byly vydány mezi lety 1950 – 1953, se Nash věnoval nekooperativním hrám a teorii vyjednávání. (Walker, 2012)

Nash je dnes neodlučitelně spjatý s pojmem *rovnovážného bodu*, kterému se také říká *Nashova rovnováha*. Této problematice jsme se věnovali již v minulých kapitolách.

Od těchto počátků vzniku teorie her jako matematické vědní disciplíny vyšlo spousta publikací, které se tomuto tématu věnují, a dále tak rozšířily naše poznání. Díky tomu se pak teorie her rozšířila do několika dalších oblastí, které se dotýkají našeho každodenního života. Spoustu těchto oblastí znázorňuje následující obrázek, dostupný z: http://euler.fd.cvut.cz/predmety/teorie_her/.

Obrázek 4 - Využití teorie her

3 Hry NIM

V této kapitole se zaměříme na hry NIM. Nejdříve si vysvětlíme, o jaké hry se jedná, následně si pak uvedeme různé variace těchto her, zanalyzujeme optimální strategie a nalezneme vyhrávající pozice.

3.1 Co je to hra NIM?

Jedná se o hru, které se účastní dva hráči a hraje se s různými předměty, kterými mohou být například kameny nebo sirky. V naší práci budeme pro ilustraci používat sirky. Na začátku hry máme n hromádek, kdy v každé hromádce může být odlišný počet sirek. Hráči se střídají v tazích, přičemž hráč, který je na tahu, může odebrat pouze z jedné hromádky 1 až k sirek, kde k nepřevyšuje počet sirek v konkrétní hromádce, ze které odebírá. Pokud pravidla neurčují jinak, vyhrává ten hráč, který jako poslední odebere sirky z poslední hromádky, tudíž druhý hráč už nemá co brát.

Hry NIM se řadí mezi kombinatorické hry, které splňují tyto vlastnosti:

1) Hru hrají dva hráči.
2) Množina dosažitelných pozic je konečná.
3) Pravidla hry určují, na které pozice se mohou hráči přesunout. Hráči mají díky pravidlům úplnou informaci o hře a není zde přítomna náhoda.
4) Hráči se v jednotlivých tazích střídají.
5) Hra končí, pokud druhý hráč již nemůže táhnout. Takové pozici se říká k*oncová pozice* a ta určuje vítěze hry.
6) Jedná se o konečnou hru, kdy po konečném počtu tahů jeden z hráčů dosáhne koncové pozice.

V případě her NIM se navíc jedná o tzv. *nestranné kombinatorické hry*, kdy oba hráči mají z každé pozice stejný výběr možností tahů. (Vopravil, 2020)

3.2 Variace her NIM

V každé NIM hře máme různá pravidla. Ve startovní pozici můžeme mít několik hromádek a zároveň je dovoleno z jedné hromádky odebírat různý počet sirek. Pro přehlednost budeme typ hry rozlišovat uspořádanou $(n + 1)$-ticí $(n_1, n_2, \ldots, n_m; k)$, kde m je počet hromádek, $n_1, n_2, \ldots, n_m$ je počet sirek na jednotlivých hromádkách, a k je maximální možný počet sirek, který lze v jednom tahu z hromádky odebrat.

Uspořádaná trojice (8, 7; 4) představuje hru NIM, kde na začátku máme dvě hromádky o počtu osm a sedm sirek, přičemž v jednom tahu lze odebrat jednu až čtyři sirky.

Prohrávající pozice – Každá pozice, ve které hráč, který je na tahu, nemá šanci vyhrát, pokud jeho soupeř zná optimální strategii.

Vyhrávající pozice – Taková pozice, ze které lze soupeře dostat do prohrávající pozice. Hráč v této pozici má hru pod kontrolou, pokud zná optimální strategii.

3.2.1 Hry NIM 1

Začneme od nejjednoduššího typu, kdy na začátku budeme mít jednu hromádku sirek a hráči Adam a Marek budou odebírat po jedné až k sirkách. Jedná se tedy o typ $(n; k)$.

Příklad 1. Mějme hru NIM 1 (18; 4). Uvedeme si možný průběh hry v tabulce za předpokladu, že ani jeden z hráčů nezná optimální strategii.

Kolo	Hráč	Začátek a konec kola	Počet odebraných sirek
1	Adam	$(18 \to 16)$	2
2	Marek	$(16 \to 13)$	3
3	Adam	$(13 \to 10)$	3
4	Marek	$(10 \to 6)$	4
5	Adam	$(6 \to 5)$	1
6	Marek	$(5 \to 3)$	2
7	Adam	$(3 \to 0)$	3

Tabulka 8

V tomto případě vyhrál Adam, protože odebral poslední tři sirky.

Mohl Marek zahrát nějaký tah v průběhu hry jinak, aby vyhrál?

K rozřešení této otázky využijeme metodu zpětné indukce a rozebereme od konce všechny Markovo tahy. V šestém kole Marek odebral dvě sirky ($5 \rightarrow 3$). Ať už by odebral libovolný počet sirek dle pravidel, Adamovi by na hromádce zbyly 1 až 4 sirky, tudíž v sedmém kole by sebral zbývající počet sirek. Vypadá to tedy, že z pozice, kde hráči na tahu zbývá na hromádce pět sirek, neexistuje tah, který by směřoval k výhře. Zaměříme se na předcházející Markovo tah ($10 \rightarrow 6$). V tomto tahu odebral čtyři sirky. Opět, ať už by odebral libovolný počet sirek od jedné do čtyř, Adam by měl možnost se odebráním příslušného počtu sirek dostat na pět sirek, a tudíž by tato pozice byla opět vítězná pro Adama. Ve druhém kole ($16 \rightarrow 13$) Marek odebral tři sirky. Dal Adamovi možnost dostat se do vyhrávající pozice tahem ($13 \rightarrow 10$). Všimněme si, že pokud by odebral pouze jednu sirku ($16 \rightarrow 15$), Adam by pak odebral 1 až 4 sirky, a tudíž by měl Marek možnost dostat se do vyhrávající pozice. V tomto případě mohl táhnout lépe a tah ($16 \rightarrow 15$) je správný tah. Adam hned na začátku zvolil špatný tah ($18 \rightarrow 16$), a dal tak možnost Markovi se dostat do vyhrávající pozice. Marek však tuto možnost nevyužil.

Optimální strategie pro hru NIM 1 (18; 4) je tedy dostat soupeře do prohrávajících pozic, které spočívají v situaci, kdy hráč, který jde na řadu, má na hromádce $5 \cdot q$ sirek, kde $q \in N$.

Příklad 2. Mějme hru NIM 1 (31; 6) s tím, že Adam zná optimální strategii.

Jeho cílem je každým tahem dostat soupeře do prohrávající pozice.

Kolo	Hráč	Začátek a konec kola	Počet odebraných sirek
1	Adam	($31 \rightarrow 28$)	3
2	Marek	($28 \rightarrow 22$)	6
3	Adam	($22 \rightarrow 21$)	1
4	Marek	($21 \rightarrow 20$)	1
5	Adam	($20 \rightarrow 14$)	6
6	Marek	($14 \rightarrow 10$)	4
7	Adam	($10 \rightarrow 7$)	3
8	Marek	($7 \rightarrow 5$)	2
9	Adam	($5 \rightarrow 0$)	5

Tabulka 9

Pozorně si všimněme, jaké tahy volil Adam. Každý jeho tah dostává Marka do prohrávající pozice. Nejprve tah ($31 \rightarrow 28$) vede do prohrávající pozice (28). Následně bez ohledu na tah soupeře Adam opět dokáže soupeře dostat do prohrávající pozice, konkrétně tahem ($22 \rightarrow 21$). Kdyby Marek předtím odebral místo šesti sirek například jen tři ($28 \rightarrow 25$), jaký by byl Adamovo následující tah? Vzhledem k tomu, že další prohrávající pozice je 21 sirek, jeho tah by byl ($25 \rightarrow 21$), odebral by čtyři sirky.

Znát optimální strategii znamená znát množinu všech prohrávajících pozic. Návod na výhru pak zní následovně: Tahej vždy tak, abys vytvořil pro soupeře prohrávající pozici. (Gatial, 1982)

Jakým způsobem Adam dostává Marka v tomto případě do prohrávajících pozic? Jak ukazuje tabulka 9, nejdříve svým tahem Marka dostane do prohrávající pozice. Jeho následující tahy se odvíjí od toho, kolik sirek odebírá Marek. Pokud Marek odebere šest sirek, Adam odebere jednu. Pokud odebere čtyři, Adam odebere tři. Adam vždy odebere doplněk toho, co odebral Marek, aby součet jejich odebraných sirek byl sedm. To platí pouze u hry (n; 6). Obecně u her NIM 1 (n; k) bude součet odebraných sirek obou hráčů $k + 1$. Dosažení prohrávající pozice je zajištěno tak, že druhý hráč reaguje na počet sirek, které odebere první hráč, který začíná v kritické pozici. Tah druhého hráče už je pouze doplňkem do součtu $k + 1$.

Množina všech prohrávajících pozic u hry NIM 1 (n; k) je tedy $M = \{q \cdot (k + 1); q \in N; q \cdot (k + 1) \leq n\}$.

PŘÍKLAD 3. Urči množinu všech prohrávajících pozic u hry NIM 1 (45; 7).

Množina prohrávajících pozic je ve tvaru $M = \{q \cdot (7 + 1); q \cdot 8 \leq 45\}$.

$$45 : 8 = 5,625$$

Z tohoto čísla potřebujeme celou část, tzn. 5.

Koeficient q bude tedy nabývat hodnot {1, 2, 3, 4, 5} a množina všech prohrávajících pozic bude vypadat následovně: $M = \{8, 16, 24, 32, 40\}$.

Prvním správným tahem u začínajícího hráče bude tedy tah ($45 \rightarrow 40$).

PŘÍKLAD 4. Mějme hru NIM 1 (41; 5) s tím, že oba hráči znají optimální strategii.

Jak by mohla taková hra vypadat? To si ukážeme v následující tabulce.

Kolo	Hráč	Začátek a konec kola	Počet odebraných sirek
1	Adam	(41 → 36)	5
2	Marek	(36 → 34)	2
3	Adam	(34 → 30)	4
4	Marek	(30 → 27)	3
5	Adam	(27 → 24)	3
6	Marek	(24 → 20)	4
7	Adam	(20 → 18)	2
8	Marek	(18 → 13)	5
9	Adam	(13 → 12)	1
10	Marek	(12 → 11)	1
11	Adam	(11 → 6)	5
12	Marek	(6 → 4)	2
13	Adam	(4 → 0)	4

Tabulka 10

Adam začal ve vyhrávající pozici, a jelikož zná optimální strategii, svým prvním tahem dostal Marka do prohrávající pozice. Následně si pak už pohlídal, aby každým svým dalším tahem v závislosti na Markových tazích dostal Marka do prohrávající pozice, a tím Adam vyhrál. Nyní trochu pozměníme počáteční podmínky.

Příklad 5. Mějme hru NIM 1 (36; 5). Jak nyní dopadne tato hra za předpokladu, že oba hráči znají optimální strategii?

Kolo	Hráč	Začátek a konec kola	Počet odebraných sirek
1	Adam	(36 → 34)	2
2	Marek	(34 → 30)	4
3	Adam	(30 → 27)	3
4	Marek	(27 → 24)	3
5	Adam	(24 → 20)	4
6	Marek	(20 → 18)	2
7	Adam	(18 → 13)	5
8	Marek	(13 → 12)	1
9	Adam	(12 → 11)	1
10	Marek	(11 → 6)	5
11	Adam	(6 → 4)	2
12	Marek	(4 → 0)	4

Tabulka 11

Adam tentokrát začal v prohrávající pozici, tudíž svým tahem mu není umožněno dostat Marka do prohrávající pozice. Musí tedy táhnout libovolně od jedné do pěti sirek, čímž dostává Marka do vyhrávající pozice. Toho následně Marek využívá a je to naopak on, kdo dostává Adama do prohrávající pozice. V následujících tazích si již Marek celý průběh hry pohlídá a vítězí.

Pokud oba hráči znají ve hře NIM 1 (n; k) optimální strategii, začínající hráč vyhrává v případě, pokud začíná ve vyhrávající pozici. Naopak pokud začínající hráč začíná v prohrávající pozici, vyhrává soupeř. Jestliže oba hráči znají optimální strategii, je výhra závislá na tom, kdo je začínající hráč a v jaké pozici začíná.

3.2.2 Hry NIM 2

Nyní počet hromádek zvýšíme a budeme mít dvě hromádky sirek, přičemž každý z hráčů bude moci odebírat libovolný počet sirek, ale v každém kole pouze z jedné hromádky. Takovou hru budeme označovat hra NIM 2 (n_1, n_2; ∞).

Opět se na začátku podíváme, jak by průběh takové hry mohl vypadat.

Příklad 6. Mějme hru NIM 2 (9, 7; ∞). Uvedeme si možný průběh hry za předpokladu, že ani jeden z hráčů nezná optimální strategii.

Kolo	Hráč	První hromádka	Druhá hromádka	Počet odebraných sirek
1	Adam	(9 → 8)	7	1
2	Marek	8	(7 → 2)	5
3	Adam	(8 → 4)	2	4
4	Marek	(4 → 2)	2	2
5	Adam	2	(2 → 1)	1
6	Marek	(2 → 1)	1	1
7	Adam	(1 → 0)	1	1
8	Marek	0	(1 → 0)	1

Tabulka 12

Třetí a čtvrtý sloupec v tabulce nám ukazuje, kolik sirek je ještě na konkrétní hromádce, popř. zaznamenává změnu v počtu sirek, jako tomu bylo u tabulek, které jsme využívali u her typu NIM 1. Například první řádek tabulky nám říká, že Adam z první hromádky odebral jednu sirku, tudíž z devíti sirek zbývá jen osm, zapsáno jako (9 → 8). Druhá hromádka zůstala beze změny, tudíž je zde zapsán počet sirek, které jsou momentálně na hromádce (7).

V této hře vyhrál Marek, protože odebral poslední sirku.

Pokusíme se odhalit, kde mohl Adam zahrát lepší tah, který by ho dovedl k vítězství.

Aktuální pozici budeme označovat uspořádanou dvojicí (n_1, n_2) kde n_1 je počet zbývajících sirek na první hromádce a n_2 je počet zbývajících sirek na druhé hromádce.

V sedmém kole Adam neměl na výběr, protože na každé hromádce zbývala už pouze jedna sirka, tudíž bylo jedno, z jaké hromádky sirku odebere. V sedmém kole tedy nemohl zahrát lépe. Pozice (1, 1) je prohrávající pozice. V pátém kole, kdy Adam vycházel z pozice (2, 2), odebral jednu sirku z první hromádky, což následně vedlo k prohře. Pokud je na obou hromádkách stejný počet sirek, jsou tahy symetrické a je jedno, zda Adam odebere jednu sirku z první hromádky, nebo z druhé hromádky. Zaměříme se na první hromádku. Pokud by Adam odebral z první hromádky obě sirky, v následujícím tahu by Marek odebral poslední dvě sirky z druhé hromádky, a tím by Marek vyhrál. V pozici (2, 2) tedy z pohledu Adama neexistuje lepší tah a jedná se o prohrávající pozici. Zaměříme se na třetí kolo, kdy Adam začínal v pozici (8, 2) a volil tah (8 → 4). Z předchozích úvah víme, že pozice (2, 2) je prohrávající pozice. Kdyby Adam zvolil tah (8 → 2), dostal by Marka do prohrávající pozice a následně by už jeho další tahy vedly k vítězství dle šablony tahů, které volil Marek. Druhé kolo Marek nezahrál správný tah a dal tak možnost Adamovi zvrátit hru na svoji stranu ve třetím kole. Jelikož ale Adam neznal optimální strategii, nebyl schopen tohoto špatného tahu využít. Od čtvrtého kola hrál Marek tak, jako by znal optimální strategii. Marek v této hře zahrál pouze jeden špatný tah, Adam toho však nevyužil.

Příklad 7. Mějme hru NIM 2 (11, 8; ∞) s tím, že Adam zná optimální strategii.

Jeho cílem bude opět každým tahem dostat Marka do prohrávající pozice. Jak toho dosáhne, to si ukážeme v tabulce a následně tahy zanalyzujeme.

Kolo	Hráč	První hromádka	Druhá hromádka	Počet odebraných sirek
1	Adam	$(11 \rightarrow 8)$	8	3
2	Marek	$(8 \rightarrow 6)$	8	2
3	Adam	6	$(8 \rightarrow 6)$	2
4	Marek	$(6 \rightarrow 3)$	6	3
5	Adam	3	$(6 \rightarrow 3)$	3
6	Marek	3	$(3 \rightarrow 1)$	2
7	Adam	$(3 \rightarrow 1)$	1	2
8	Marek	$(1 \rightarrow 0)$	1	1
9	Adam	0	$(1 \rightarrow 0)$	1

Tabulka 13

Adam odebral poslední sirku a vyhrál.

Na začátku byla hra v pozici, kdy na první hromádce bylo jedenáct sirek a na druhé hromádce osm sirek (11, 8). Adamův první tah byl $(11 \rightarrow 8)$ na první hromádce, takže se hra dostala do pozice (8, 8). Marek následně odebral z první hromádky dvě sirky, na to Adam reagoval odebráním dvou sirek z druhé hromádky. Hra byla po třetím kole v pozici (6, 6). Ve čtvrtém kole Marek odebral tři sirky z první hromádky, na to Adam odpověděl odebráním tří sirek z druhé hromádky. Po pátém kole byla hra v pozici (3, 3). V šestém kole Marek odebral dvě sirky z druhé hromádky, na to Adam odebral v sedmém kole také dvě sirky, akorát z první hromádky. Hra byla po tomto kole v pozici (1, 1), kdy pak už Markovi nezbyla jiná možnost než odebrat jednu sirku z kterékoliv hromádky. Následně pak Adam odebral poslední sirku, čímž vyhrál.

Množina prohrávajících pozic v této hře vypadá následovně:

$$M = \{(8, 8), (6, 6), (3, 3), (1, 1)\}.$$

Jak si můžeme všimnout, prohrávající pozice u hry NIM 2 (n_1, n_2; ∞) jsou takové pozice, kde na první i druhé hromádce zbývá stejný počet sirek. Obecně jsou prohrávající pozice ve tvaru (n, n). Hráč, který zná optimální strategii, se těchto pozic snaží dosáhnout. Dosáhne jich tím, že nejdříve svého protihráče dostane do prohrávající pozice, následně už pouze zrcadlí tahy svého protihráče. Pokud protihráč odebere z první hromádky dvě sirky, potom hráč, který zná optimální strategii, odebere z druhé hromádky také dvě sirky. Tímto stylem se dostane až do koncové pozice (0, 0), čímž vyhrává hru.

Příklad 8. Nalezněte všechny prohrávající pozice a určete první správný tah ve hře NIM 2 (7, 5; ∞).

Množina všech prohrávajících pozic obsahuje prvky ve tvaru (n, n), kde $n \leq \min\{n_1, n_2\}$.

Množina všech prohrávajících pozic v této hře bude vypadat následovně:

$M = \{(5, 5), (4, 4), (3, 3), (2, 2), (1, 1)\}$.

První správný tah bude takový tah, který soupeře dostane do prohrávající pozice. Jelikož počáteční pozice je (7, 5), první prohrávající pozice, která je k dispozici, je (5, 5). První správný tah bude (7 → 5).

Příklad 9. Mějme hru NIM 2 (13, 10; ∞) s tím, že oba hráči znají optimální strategii.

Jak by mohla taková hra vypadat? Na to se podíváme v následující tabulce.

Kolo	Hráč	První hromádka	Druhá hromádka	Počet odebraných sirek
1	Adam	(13 → 10)	10	3
2	Marek	(10 → 8)	10	2
3	Adam	8	(10 → 8)	2
4	Marek	8	(8 → 5)	3
5	Adam	(8 → 5)	5	3
6	Marek	(5 → 2)	5	3
7	Adam	2	(5 → 2)	3
8	Marek	(2 → 1)	2	1
9	Adam	1	(2 → 1)	1
10	Marek	(1 → 0)	1	1
11	Adam	0	(1 → 0)	1

Tabulka 14

Adam začíná ve vyhrávající pozici a v prvním kole má tak možnost dostat Marka do prohrávající pozice. Markovi nezbývá nic jiného než v každém svém tahu odebrat libovolný počet sirek z jedné hromádky, protože na začátku jeho kola je počet sirek na obou hromádkách stejný. Následně pak Adam opět zrcadlí Markovo tahy a dostává ho tak do prohrávajících pozic. Adam se drží optimální strategie a vyhrává. Marek i přes znalost optimální strategie nemá šanci vyhrát, protože v tomto případě oba hráči znají optimální strategii. Upravíme opět počáteční podmínky a podíváme se na hru, kdy bude Adam začínat v prohrávající pozici.

Příklad 10. Mějme hru NIM 2 (10, 10; ∞) s tím, že oba hráči znají optimální strategii.

Kolo	Hráč	První hromádka	Druhá hromádka	Počet odebraných sirek
1	Adam	(10 → 8)	10	2
2	Marek	8	(10 → 8)	2
3	Adam	8	(8 → 5)	3
4	Marek	(8 → 5)	5	3
5	Adam	(5 → 2)	5	3
6	Marek	2	(5 → 2)	3
7	Adam	(2 → 1)	2	1
8	Marek	1	(2 → 1)	1
9	Adam	(1 → 0)	1	1
10	Marek	0	(1 → 0)	1

Tabulka 15

Vidíme, že Adam začal v prohrávající pozici. Jeho první tah nutně musel směřovat do vyhrávající pozice, čehož Marek využil. Dostal naopak Adama do prohrávající pozice a zbytek hry si již následně pohlídal. I ve hře NIM 2 (n_1, n_2; ∞) platí stejně jako u prvního typu hry NIM následující tvrzení:

Pokud oba hráči znají ve hře NIM 2 (n_1, n_2; ∞) optimální strategii, začínající hráč vyhrává v případě, pokud začíná ve vyhrávající pozici. Naopak pokud začínající hráč začíná v prohrávající pozici, vyhrává soupeř. Jestliže oba hráči znají optimální strategii, je výhra závislá na tom, kdo je začínající hráč a v jaké pozici začíná.

Příklad 11. Kolik prvků má množina všech pozic ve hře NIM 2 (8, 6; ∞)? Které z nich jsou prohrávající? (Gatial, 1982)

Tabulkou určíme počet všech pozic a následně deduktivně zobecníme nalezený výsledek.

(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	(0, 5)	(0, 6)
(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 0)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 0)	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 0)	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 0)	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)
(7, 0)	(7, 1)	(7, 2)	(7, 3)	(7, 4)	(7, 5)	(7, 6)
(8, 0)	(8, 1)	(8, 2)	(8, 3)	(8, 4)	(8, 5)	(8, 6)

Tabulka 16

Jelikož na první hromádce je osm sirek, průběžný počet sirek na první hromádce může být od nuly do osmi, tzn. počet sirek na první hromádce může nabývat devíti hodnot . Na druhé hromádce je šest sirek, průběžný počet sirek během kol na druhé hromádce tak může být od nuly do šesti. Počet sirek na druhé hromádce může nabývat sedmi hodnot. Celkový počet pozic pak vypočítáme pomocí jednoduchého kombinatorického pravidla součinu, kdy ke každému počtu sirek na první hromádce můžeme mít až sedm možných počtů sirek na druhé hromádce, výpočtem pak $P = 9 \cdot 7 = 63$ pozic, kde P počet všech pozic. Množina všech pozic tak má 63 prvků.

Obecně pak pro libovolnou hru NIM 2 (n_1, n_2; ∞) je počet všech pozic dán součinem $P = (n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1)$.

Zeleně jsme vyznačili prohrávající pozice, o kterých víme, že v tomto typu hry NIM jsou ve tvaru (n, n). Pozice (0, 0) je koncová pozice.

Doteď jsme se zaměřovali u her NIM 2 na situaci, kdy každý z hráčů mohl ve svém kole z hromádky odebrat libovolný počet sirek. Zbývá nám podívat se na to, jak bude situace vypadat u hry NIM 2 (n_1, n_2; k), kde k je konečné číslo a zároveň $k < \max\{n_1, n_2\}$.

Příklad 12. Mějme hru NIM 2 (8, 6; 3). Určete počet všech pozic a určete všechny prohrávající pozice v této hře.

I přesto, že každý z hráčů může odebírat maximálně tři sirky každé kolo pouze z jedné hromádky, neexistuje žádná nová pozice, nebo naopak pozice, do které by se hra nemohla dostat vlivem jiných počátečních podmínek. Počet všech pozic v této hře tedy bude stejný, a to $P = 9 \cdot 7 = 63$ pozic.

Co se týká prohrávajících pozic, pozice tvaru (n, n) zůstávají. Nyní musíme ověřit, zda neexistují ještě jiné prohrávající pozice v této hře.

Jako první se zaměříme na první sloupec tabulky. První řádek tabulky je do určitého bodu symetrický s tím rozdílem, že obsahuje méně pozic, protože v druhé hromádce je méně sirek. Pokud vezmeme do úvahy pouze první sloupec tabulky, mění se nám hra do podoby hry, kterou už známe, a to je hra NIM 1 (8; 3). V této hře už známe prohrávající pozice. Jsou to ty pozice, ve kterých je počet sirek násobkem čtyř. Budou to tedy pozice (8, 0), (4, 0), symetricky pak máme pozici (0, 4). Ve druhém sloupci máme prohrávající pozici (1, 1). Pro odhalení další prohrávající pozice nás bude zajímat, z jaké pozice se pomocí dvou tahů můžu do této kritické pozice dostat za předpokladu, že oba hráči hrají racionálně a znají optimální strategii. Jelikož hráč ve svém tahu může odebrat jednu až tři sirky, pozice (2, 1), (3, 1) a (4, 1) prohrávající nejsou. Co pozice (5, 1)? Pokud hráč začíná své další kolo na pozici (5, 1), může odebrat buď jednu sirku z druhé hromádky, na to však druhý hráč odpoví odebráním jedné sirky z první hromádky, čímž jsme na pozici (4, 0), a ta je prohrávající. Pokud odebere jednu, dvě nebo tři sirky z první hromádky, druhý hráč odebere příslušný počet sirek tak, aby dosáhl pozice (1, 1), která je také prohrávající. Pozice (5, 1) je tak prohrávající. Symetricky je také pozice (1, 5) prohrávající. Podobnými úvahami dospějeme k tomu, že je i pozice (6, 2) prohrávající, protože bez ohledu na tah hráče, který v této pozici začíná, se druhý hráč dostane na jednu z prohrávajících pozic (2, 2), (5, 1) nebo (4, 0). Symetricky pak k této pozici máme ještě pozici (2, 6). Následují ještě dvě prohrávající pozice, které už k sobě nemají symetrického parťáka, a to jsou pozice (7, 3) a (8, 4). Z těchto pozic se bez ohledu na tah hráče, který v těchto pozicích začíná, druhý hráč dostane na prohrávající pozice, které již známe.

(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	(0, 5)	(0, 6)
(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 0)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 0)	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 0)	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 0)	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)
(7, 0)	(7, 1)	(7, 2)	(7, 3)	(7, 4)	(7, 5)	(7, 6)
(8, 0)	(8, 1)	(8, 2)	(8, 3)	(8, 4)	(8, 5)	(8, 6)

Tabulka 17

Všech prohrávajících pozic je tedy patnáct, plus koncová pozice (0, 0).

Můžeme si všimnout, že všechny prohrávající pozice v této hře splňují vlastnost:

$$4 \mid (a - b), \text{ kde } a \in N_1 \wedge b \in N_2.$$

N_1 a N_2 jsou všechny možné počty sirek na první a druhé hromádce.

Obecně pro prohrávající pozice u her NIM 2 (n_1, n_2; k) platí, že $(k + 1) \mid (a - b)$.

3.2.3 NIM součet

V přechozích hrách typu NIM 1 a NIM 2 nám stačily k nalezení prohrávajících pozic analýzy jednotlivých her a logické úvahy. Pokud však budeme počet hromádek, popř. počet sirek navyšovat, odrazí se to i na náročnosti logických úvah k nalezení optimální strategie.

V dosavadních NIM hrách byly strategie k nalezení prohrávajících pozic různé. Nyní si uvedeme strategii, která nám sjednotí způsob hledání prohrávajících pozic pro NIM hry s libovolným počtem hromádek i libovolným počtem sirek. K tomu budeme potřebovat silnější matematický aparát, který si nyní uvedeme.

Binární soustava

Pro každé nezáporné celé číslo x existuje binární rozvoj tvaru

$$x = \sum_{i=0}^{m} x_i \cdot 2^i = x_m \cdot 2^m + x_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \dots + x_1 \cdot 2 + x_0$$

pro $m \in N$ a zároveň $x_i \in \{0, 1\}$.

Pro číslo v binární soustavě používáme zápis pomocí nul a jedniček, a to ve tvaru $(x_m x_{m-1} \dots x_1 x_0)_2$. (Vopravil, 2020)

Například číslo $(110100)_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 32 + 16 + 4 = 52$.

Binární součet

Nechť jsou dána dvě čísla v binárním zápisu x a y.

$$x = (x_m x_{m-1} \dots x_1 x_0)_2,$$

$$y = (y_m y_{m-1} \dots y_1 y_0)_2.$$

Sčítání v binární soustavě je principem stejné jako sčítání v jakékoli jiné soustavě.

Uvedeme si příklad, kdy $x = (1110)_2$ a $y = (1011)_2$.

$$\begin{array}{r} (1110)_2 \\ (1011)_2 \\ \hline (11001)_2 \end{array}$$

NIM součet

Nim součet dvou nezáporných celých čísel je jejich součet v binárním zápisu bez přenosu do vyšších řádů. Toho je docíleno tak, že cifry jednotlivých řádů spolu sčítáme odděleně v aritmetice modulo 2. Nim součet budeme označovat $\oplus$.

Nim součet $(x_m x_{m-1} \dots x_1 x_0)_2$ a $(y_m y_{m-1} \dots y_1 y_0)_2$ zapisujeme

$$(x_m x_{m-1} \dots x_1 x_0)_2 \oplus (y_m y_{m-1} \dots y_1 y_0)_2 = (z_m z_{m-1} \dots z_1 z_0)_2,$$

kde pro každé $0 \leq i \leq m$ je $z_i \equiv x_i + y_i \pmod 2$. (Vopravil, 2020)

Vlastnosti NIM součtu

Pro NIM součet tří libovolných celých nezáporných čísel x, y, z platí:

a) Komutativní zákon

$$x \oplus y = y \oplus x$$

b) Asociativní zákon

$$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$$

c) Existence nulového prvku (nulovým prvkem je 0)

$$x \oplus 0 = x$$

d) Existence inverzního prvku ke každému prvku

Každý prvek je sám sobě inverzním. To znamená, že rovnost

$$x \oplus x = 0,$$

platí pro každé x.

V matematice se NIM součet vyskytuje také pod logickou spojkou exkluzivní disjunkce $\veebar$, známou pod zkratkou XOR. (Vopravil, 2020)

Příklad 13: NIM součtem sečtěte čísla $(11011)_2$ a $(10101)_2$.

$$\begin{array}{r} (11011)_2 \\ \oplus\ (10101)_2 \\ \hline (01110)_2 \end{array}$$

Jak vidíme, v tomto případě jsme nepřenášeli jedničku do vyššího řádu.

Nalezení optimální strategie

Jak již bylo dříve uvedeno, cílem každého hráče, který zná optimální strategii, je svým tahem dostat soupeře do prohrávající pozice. Jak toho dosáhnout v jakékoliv hře NIM s libovolným počtem hromádek a sirek nám řekne následující věta:

Boutonova věta

„Pozice NIM $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *n hromádkové varianty hry NIM je prohrávající pozice, právě když* $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n = 0$.*“* (Vopravil, 2020)

Prohrávající pozice u hry NIM s libovolným počtem hromádek a sirek je tedy taková pozice, ve které je NIM součet všech jednotlivých hromádek nulový. Tohoto nulového součtu se každý inteligentní hráč snaží dosáhnout. To platí pro všechny hry s více než jednou hromádkou sirek, protože u jedné hromádky nemáme co sčítat.

Tuto metodu si nyní vyzkoušíme na hře NIM 2, kde optimální strategii už známe.

Příklad 14. Mějme hru NIM 2 $(9, 7; \infty)$ s tím, že začínající hráč Adam zná optimální strategii. To, zda druhý hráč Marek bude znát optimální strategii je irelevantní, pokud Adam neudělá chybu a bude se chovat jako inteligentní hráč.

Zapíšeme si počet sirek v jednotlivých hromádkách pomocí binární soustavy a následně odebereme takový počet sirek, aby byl NIM součet nulový.

Výchozí pozice: $9 = (1001)_2$

$7 = (0111)_2$

Provedením NIM součtu ve výchozí pozici Adam zjistí, zda začal v prohrávající nebo vyhrávající pozici.

$$\begin{array}{r} (1001)_2 \\ \oplus\ (0111)_2 \\ \hline (1110)_2 \end{array}$$

NIM součet je nenulový, Adam tak začíná ve vyhrávající pozici. Z předchozích úvah víme, že optimální strategie spočívá v tom, že se hráč snaží v tomto typu hry dosáhnout pozice (n, n). Víme tedy, že Adam jako inteligentní hráč odebere dvě sirky z první hromádky. Ověříme, zda tento tah skutečně vede k nulovému NIM součtu.

$$\begin{array}{r} (0111)_2 \\ \oplus\ (0111)_2 \\ \hline (0000)_2 \end{array}$$

U her typu NIM 2 je zřejmé, že v pozici (n, n) bude NIM součet nulový. To vychází z vlastnosti, že každý prvek v binární soustavě spolu s operací NIM součet je samoinverzní. Platí tedy, že $n \oplus n = 0$. Další možné průběhy hry již známe. Marek by odebral libovolný počet sirek z jedné hromádky, na to by Adam odebral stejný počet sirek z druhé hromádky, až by se hra dostala do koncové pozice (0, 0) s příznivým výsledkem pro Adama. Co kdyby ale Adam neznal množinu prohrávajících pozic z předchozích úvah? Musel by si vystačit s Boutonovou větou, která nám říká, že prohrávající pozice je taková pozice, kde je NIM součet nulový. Zaměříme se tedy nyní na to, jak postupovat pouze s touto znalostí.

Postup bude na začátku stejný, nejdříve Adam provede NIM součet:

$$\begin{array}{r} (1001)_2 \\ \oplus\ (0111)_2 \\ \hline (1110)_2 \end{array}$$

Pokud je výsledkem NIM součtu jednotlivých cifer nula, pak je vše v pořádku a s touto pozicí nemusí nic dělat. Pokud je součet roven jedné, bude se snažit odebrat takový počet sirek, aby byl NIM součet nulový. Můžeme si všimnout, že inteligentní hráč je nucen odebrat sirky z první hromádky, kde je více sirek, protože odebráním libovolného počtu sirek ve druhé hromádce nikdy nemůže dostat jedničku v prvním sloupci, protože nemá dostatečný počet sirek pro vytvoření jedničky ve vyšším řádu. Musí tedy odebrat sirky z první hromádky a to tak, aby následným NIM součtem dostal v každém sloupci samé nuly. Jelikož v posledním sloupci se po NIM součtu nula nachází, stačí se zaměřit na první tři sloupce v prvním binární čísle.

$$\begin{array}{r} (1001)_2 \\ \oplus \; (0111)_2 \\ \hline (1110)_2 \end{array}$$

Z jedničky v prvním sloupci čísla reprezentujícího první hromádku musíme z pohledu Adama nutně dostat nulu, následně pak z nul ve druhém a třetím sloupci potřebujeme dostat jedničky, aby byly cifry v jednotlivých sloupcích obou čísel stejné. I tímto způsobem se dostáváme k závěru, že jediným správným tahem je dostat soupeře do pozice (n, n). Z toho vyplývá i již zmíněný fakt, že musíme odebírat vždy z hromádky, kde je větší počet sirek.

Nyní si ověříme Boutonovu větu na dalším typu hry NIM, kde už by bylo vymýšlení optimální strategie bez znalosti této věty náročnější.

3.2.4 Hry NIM 3

Zvýšíme počet hromádek na tři hromádky, přičemž každý hráč může ve svém kole odebrat libovolný počet sirek z jedné hromádky. Takový typ hry budeme označovat hra NIM 3 $(n_1, n_2, n_3; \infty)$.

Už si nebudeme uvádět modelové situace hry, kdy ani jeden z hráčů nezná optimální strategii, protože už nebudeme analyzovat prohrávající pozice z hlediska logických úvah, ale za pomoci Boutonovy věty. Uvedeme si však hru, kde alespoň začínající hráč zná optimální strategii. Tuto hru si nejdříve znázorníme tabulkou, dále rozebereme jednotlivé tahy a ověříme, zda byla Boutonova věta použita správně.

Příklad 15. Mějme hru NIM 3 (10, 7, 6; ∞) s tím, že začínající hráč Adam zná optimální strategii.

Kolo	Hráč	První hromádka	Druhá hromádka	Třetí hromádka	Počet odebraných sirek
1	Adam	(10 → 1)	7	6	9
2	Marek	1	(7 → 4)	6	3
3	Adam	1	4	(6 → 5)	1
4	Marek	(1 → 0)	4	5	1
5	Adam	0	4	(5 → 4)	1
6	Marek	0	(4 → 2)	4	2
7	Adam	0	2	(4 → 2)	2
8	Marek	0	(2 → 1)	2	1
9	Adam	0	1	(2 → 1)	1
10	Marek	0	1	(1 → 0)	1
11	Adam	0	(1 → 0)	0	1

Tabulka 18

To, že se Adam držel optimální strategie, nám ukáže až následná analýza NIM součtu. Už ale na první pohled si můžeme všimnout, že ve čtvrtém tahu Marek odebral poslední sirku z první hromádky, čímž se následně hra přenesla do tvaru hry, kterou již známe. Jedná se o hru NIM 2 (4, 5; ∞). V této hře se Adam zachoval jako inteligentní hráč, když odebral jednu sirku ze třetí hromádky, čímž dostal Marka do prohrávající pozice (4, 4). Následné tahy hry proběhly dle očekávání s konečným Adamovo vítězstvím. Jak ale víme, Adam znal optimální strategii od začátku, nikoli až od určitého kola. Podíváme se tedy na jednotlivá kola z pohledu NIM součtu.

Kolo	Hráč	První hromádka	Druhá hromádka	Třetí hromádka	NIM součet
0		1010	0111	0110	1011
1	Adam	0001	0111	0110	0000
2	Marek	0001	0100	0110	0011
3	Adam	0001	0100	0101	0000
4	Marek	0000	0100	0101	0001
5	Adam	0000	0100	0100	0000
6	Marek	0000	0010	0100	0110
7	Adam	0000	0010	0010	0000
8	Marek	0000	0001	0010	0011
9	Adam	0000	0001	0001	0000
10	Marek	0000	0001	0000	0001
11	Adam	0000	0000	0000	0000

Tabulka 19

Pro přehlednost si tabulku popíšeme. Oproti tabulkám používaným dříve se zde nachází ještě nulté kolo, které popisuje počet sirek na začátku hry, jedná se tedy o výchozí pozici. Třetí až pátý sloupec popisuje počet sirek na jednotlivých hromádkách. Tento počet je vyjádřen v binární soustavě. Jednotlivá kola ukazují změnu oproti předchozímu kolu, tudíž jak hráč táhnul. V hromádce, ve které se změnil binární zápis oproti předchozímu kolu, se změnil počet sirek. Poslední sloupec reprezentuje NIM součet, který je klíčový pro určování optimální strategie.

Adam v každém svém kole táhnul tak, aby po každém jeho tahu byl NIM součet roven nule. Ve třetím kole učinil tah (0110 → 0101) ve třetí hromádce, protože pak

$$\begin{array}{r} (0001) \\ (0100) \\ \oplus\ (0101) \\ \hline (0000) \end{array}$$

Pozn.: Jelikož víme, že se jedná o binární zápis a o NIM součet, obejdeme se již bez zápisu dolního indexu čísla 2 za závorkami.

Adam si vybral třetí hromádku a svým tahem dosáhl nulového NIM součtu. Mohl si vybrat ještě jinou hromádku?

$$\begin{array}{r} (0001) \\ (0100) \\ \oplus\ (0110) \\ \hline (0011) \end{array}$$

Pokud by si vybral první hromádku, není schopen ve třetím sloupci vytvořit jedničku, protože to by znamenalo, že musí mít k dispozici dvě (0010) sirky. K dispozici má ale pouze jednu sirku, tudíž první hromádka nepřipadá do úvahy. Zaměříme-li se na sloupce, které Adam potřebuje změnit k nulovému součtu, tak je to třetí a čtvrtý sloupec. Je to dáno tím, že právě v těchto sloupcích je lichý počet jedniček. Pokud máme sudý počet jedniček, z vlastnosti NIM součtu vyplývá, že sudý počet jedniček nám dá nulový součet, kdežto lichý počet jedniček nám vrátí jedničku. Pokud by si Adam vybral druhou hromádku, je schopen odebráním určitého počtu sirek vytvořit nulový součet ve třetím i čtvrtém sloupci, zároveň by však vytvořil lichý počet jedniček ve druhém sloupci, který musí být zachován sudý. Tah, který zvolil Adam, je tedy jediným správným tahem v tomto kole. Ukážeme si však, že v určitých situacích platí, že existuje více správných tahů, které vedou k nulovému NIM součtu.

Příklad 16. Určete všechny správné tahy v prvním kole začínajícího hráče ve hře NIM 3 (11, 12, 13; ∞).

Zapíšeme čísla v binárním zápisu a provedeme NIM součet této hry:

$$\begin{array}{r} (1011) \\ (1100) \\ \oplus\ \underline{(1101)} \\ (1010) \end{array}$$

Potřebujeme změnit počet jedniček v prvním a třetím sloupci. V prvním sloupci máme u každé hromádky v binárním zápisu jedničky, tudíž si můžeme vybrat libovolnou hromádku. Pokud si vybereme prvním hromádku, změníme binární zápis tak, aby v každém sloupci byl následně sudý počet jedniček. Situace bude vypadat následovně:

$$\begin{array}{r} (0001) \\ (1100) \\ \oplus\ \underline{(1101)} \\ (0000) \end{array}$$

Provedli jsme tah (1011 → 0001), což odpovídá tahu (11 → 1). Odebrali jsme tak z první hromádky deset sirek.

Zaměříme se na druhou hromádku, kde opět odebereme příslušný počet sirek pro dosažení nulového NIM součtu:

$$\begin{array}{r} (1011) \\ (0110) \\ \oplus\ \underline{(1101)} \\ (0000) \end{array}$$

Tah (1100 → 0110) odpovídá v dekadickém zápisu tahu (12 → 6). Odebrali jsme tak z druhé hromádky šest sirek.

Totéž provedeme u třetí hromádky:

$$\begin{array}{r} (1011) \\ (1100) \\ \oplus\ (0111) \\ \hline (0000) \end{array}$$

Tahem $(1101 \rightarrow 0111)$ jsme dosáhli nulového NIM součtu, což odpovídá tahu $(13 \rightarrow 7)$. Ve třetí hromádce jsme odebrali šest sirek.

Ve hře NIM 3 $(11, 12, 13; \infty)$ existují tři správné první tahy začínajícího hráče, a to konkrétně $(11 \rightarrow 1)$ v první hromádce, $(12 \rightarrow 6)$ ve druhé hromádce, nebo $(13 \rightarrow 7)$ ve třetí hromádce.

Není tedy podmínkou, že bychom museli tahat sirky vždy z hromádky, kde je nejvíce sirek, avšak v binárním zápisu konkrétní hromádky musíme mít k dispozici jedničku v nejvyšším řádu, ve kterém počet jedniček potřebujeme změnit.

Tvrzení. Jestliže Adam vystaví Marka do prohrávající pozice, Marek po svém tahu vystaví Adama do vyhrávající pozice, ať se jedná o libovolný tah z jeho prostoru strategií.

Důkaz. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jsou počty sirek na jednotlivých hromádkách po Adamovo tahu a $m_1, m_2, \ldots, m_k$ jsou počty sirek na jednotlivých hromádkách po Markovo tahu. Pak NIM součet $a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_k$ budeme označovat A, NIM součet $m_1 \oplus m_2 \oplus \ldots \oplus m_k$ budeme označovat M. Předpokládejme, že Marek provede tah odebráním určitého počtu sirek z j-té hromádky. Pak platí $a_i = b_i$ pro $i \neq j$ a $a_j > m_j$.

Platí následující rovnosti:

$M = 0 \oplus M$

$M = A \oplus A \oplus M$

$M = A \oplus (a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_k) \oplus (m_1 \oplus m_2 \oplus \ldots \oplus m_k)$

$M = A \oplus (a_1 \oplus m_1) \oplus \ldots \oplus (a_j \oplus m_j)$

$M = A \oplus 0 \oplus \ldots \oplus (a_j \oplus m_j) \oplus \ldots \oplus 0$

$M = A \oplus a_j \oplus m_j$

Jelikož je A vyhrávající pozice, znamená to, že NIM součet je roven nule.

Dostáváme tak $M = 0 \oplus a_j \oplus m_j$. Jelikož platí $a_j \neq m_j$, pak $M \neq 0$.

Marek tak nemá šanci dostat Adama do prohrávající pozice, protože jeho NIM součet M bude různý od nuly. ■

3.2.5 Hry NIM *X*

V této podkapitole shrneme hry NIM s vyšším počtem hromádek. Se zvyšováním počtu hromádek se optimální strategie nemění, stačí se držet strategie nulového NIM součtu. Ukážeme si na příkladu určité strategie a postupy, jak strategii nulového součtu vhodně kombinovat ve specifických herních situacích.

Příklad 17. Mějme hru NIM 4 (7, 6, 8, 6; ∞). Podíváme se na první tah začínajícího hráče, který zná optimální strategii.

Nejdříve si zapíšeme čísla v binárním zápisu a provedeme NIM součet:

$$\begin{array}{r} (0111) \\ (0110) \\ \oplus\ (1000) \\ \underline{(0110)} \\ (1111) \end{array}$$

Můžeme si všimnout, že potřebujeme změnit počet jedniček ve všech sloupcích. Jedinou hromádku, kterou můžeme využít k dosažení nulového NIM součtu, je třetí hromádka, protože má jako jediná ve svém binárním zápisu jedničku v prvním sloupci, což je nejvyšší řád binárního zápisu. Odebereme tedy takový počet sirek, aby byl NIM součet roven nule.

$$\begin{array}{r} (0111) \\ (0110) \\ \oplus\ (0111) \\ \underline{(0110)} \\ (0000) \end{array}$$

Provedli jsme tah ($1000 \rightarrow 0111$), což odpovídá tahu ($8 \rightarrow 7$). Odebrali jsme tak jednu sirku ze třetí hromádky, což bude správný tah začínajícího hráče. Zaměříme se na to, v jakém tvaru je hra po tomto tahu.

Nyní se hra nachází ve tvaru hry NIM 4 (7, 6, 7, 6; ∞). Co je na tomto tvaru specifického? Můžeme si všimnout, že máme dvě dvojice hromádek, na kterých se nachází stejný počet sirek. Uspořádáme-li hromádky tak, aby příslušné počty byly vedle sebe, obecně budeme mít hru NIM 4 ($n, n, p, p; \infty$). V našem případě máme hru NIM 4 (7, 7, 6, 6; ∞). Jaký bude další tah prvního hráče, pokud druhý hráč v této pozici táhnul ($7 \rightarrow 4$) v první hromádce? Jelikož je každý prvek v NIM součtu samoinverzní, stejný počet sirek na třetí a čtvrté hromádce nám NIM součet nezmění. Na první hromádce máme nyní čtyři sirky, na druhé sedm. Právě z důvodu uvedené vlastnosti samoinverzního prvku bude jedním z dalších správných tahů tah ($7 \rightarrow 4$) ve druhé hromádce, protože tím první hráč dosáhne stejného počtu sirek na první a druhé hromádce, což nám vytvoří nulový NIM součet. V této situaci tak ani není nutné provádět zápis NIM součtu, jelikož hráč začínající v pozici (n, n, p, p) se nachází v prohrávající pozici, a po svém provedeném tahu do pozice ($n - k, n, p, p$), kde k je počet odebraných sirek, stačí prvnímu hráči odebrat k sirek z hromádky, kde zůstalo n sirek. Dostane tak soupeře do pozice ($n - k, n - k, p, p$), která je opět prohrávající. Této vlastnosti se dá využít následujícím způsobem:

Hra NIM 4 ($n, n, p, p; \infty$) se dá rozdělit na dvě hry, a to konkrétně na hru NIM 2 ($n, n; \infty$) a hru NIM 2 ($p, p; \infty$). V těchto typech her optimální strategii známe i bez znalosti NIM součtu, tudíž inteligentnímu hráči stačí provádět tahy v jednotlivých hrách v závislosti na tom, ve které hře zrovna provede tah hráč v prohrávající pozici.

Toto rozdělení pak můžeme provádět v libovolné hře NIM o libovolném počtu hromádek. Jakmile se ve hře objeví dvě nebo jiný sudý počet hromádek o stejném počtu sirek, můžeme tyto hromádky oddělit od celkové hry, protože tyto hromádky nám počet jedniček v NIM součtu nemění. To vychází z vlastnosti $x \oplus x = 0$.

Této vlastnosti inteligentní hráč může, ale nemusí využít. Pokud máme hru NIM 4 v uvedené pozici (7, 4, 6, 6), jedním ze správných tahů je ($7 \rightarrow 4$) v první hromádce.

Tento tah je na první pohled zřejmý. Avšak není to jediný správný tah, který má hráč k dispozici. Zaměříme se na NIM součet v této pozici a zjistíme další možné tahy v této situaci:

$$\begin{array}{r} (0111) \\ (0100) \\ \oplus\ (0110) \\ \underline{(0110)} \\ (0011) \end{array}$$

Ve třetím sloupci musí být počet jedniček zachován, tudíž druhou hromádku o čtyřech sirkách musíme nechat beze změny. Ve třetí a čtvrté hromádce, které obsahují šest sirek, však můžeme provést změny, které povedou k nulovému NIM součtu. Zvolíme například třetí hromádku, kde provedeme tah $(0110 \to 0101)$, odebereme tak jednu sirku:

$$\begin{array}{r} (0111) \\ (0100) \\ \oplus\ (0101) \\ \underline{(0110)} \\ (0000) \end{array}$$

Tento NIM součet skutečně vychází nulový.

V pozici (7, 4, 6, 6) má tak inteligentní hráč na výběr ze tří možností. Buď ze znalosti NIM součtu samoinverzního prvku zvolí tah (7 → 4), čímž dosáhne pozice (4, 4, 6, 6), jejíž NIM součet je nutně nulový, nebo sáhne do jedné ze dvou hromádek o šesti sirkách, čímž naruší strukturu stejného počtu sirek na dvou hromádkách (n, n), avšak nulového NIM součtu tahem (6 → 5) dosáhne také.

Je tak na každém inteligentním hráči, jakou možnost si ve své strategii zvolí. Základem strategií těchto her je držet se nulového NIM součtu, některé cesty však zahrnují menší úsilí při reálné hře. Inteligentní hráč se může držet kombinované strategie, pokud se hra nachází v situaci, kdy na dvou hromádkách je stejný počet sirek. Inteligentní hráč tyto hromádky může oddělit od všech ostatních hromádek, v případě zásahu druhého hráče do jedné z těchto dvou hromádek mu stačí odebrat stejný počet sirek ze druhé hromádky, než ze které bylo odebráno jeho protihráčem. Může si tak ulehčit výpočet NIM součtu a tím získat výhodu oproti soupeři.

3.3 Další alternativy her NIM

Doposud jsme se zabývali NIM hrami, kde bylo cílem odebrat poslední sirku. Měnili jsme pouze počet hromádek a počet sirek v jednotlivých hromádkách. V této kapitole se zaměříme na další typy NIM her, které budou svými pravidly odlišné.

3.3.1 Reverse NIM

Prvním typem, který si zde uvedeme, bude reverse NIM. Hráči v této variantě NIMu mají za cíl donutit soupeře, aby odebral poslední sirku z hromádky. To znamená, že kdo odebere poslední sirku, prohrál. Ukážeme si na příkladu, jakým způsobem bude inteligentní hráč hrát hru reverse NIM 2 $(n, n; \infty)$.

Příklad 18. Mějme hru reverse NIM 2 (8, 8; ∞). Uvedeme si možný průběh hry Adama a Marka za předpokladu, že Marek je inteligentní hráč.

Kolo	Hráč	První hromádka	Druhá hromádka	Počet odebraných sirek
1	Adam	(8 → 6)	8	2
2	Marek	6	(8 → 6)	2
3	Adam	(6 → 3)	6	3
4	Marek	3	(6 → 3)	3
5	Adam	3	(3 → 2)	1
6	Marek	(3 → 2)	2	1
7	Adam	(2 → 1)	2	1
8	Marek	1	(2 → 0)	2
9	Adam	(1 → 0)	0	1

Tabulka 20

Adam začíná v prohrávající pozici, alespoň z hlediska klasického NIMu. Vzhledem k tomu, že Adam nakonec v této hře prohrál, jedná se o prohrávající pozici i ve hře reverse NIM. Můžeme si všimnout, že Marek táhl podle známé strategie, kdy po každém svém tahu zanechal nulový NIM součet, v tomto případě zkrátka odebíral stejný počet sirek jako Adam, akorát z druhé hromádky. Tuto strategii zachovával až do osmého kola. V tomto kole se hra nacházela v pozici (1, 2). Marek pak táhnul (2 → 0) ve druhé hromádce, čímž nechal na první hromádce pouze jednu sirku, kterou Adam musel odebrat v posledním tahu. Změna strategie tedy nastala v situaci, kdy na jedné z hromádek zbývala už pouze jedna sirka. Marek tento počet na druhé hromádce nedorovnal, jako jsme byli zvyklí u klasické NIM hry. Místo toho zanechal takovou pozici, kdy Adamovi nezbývala jiná možnost než poslední sirku odebrat.

Nyní se podíváme na jednotlivé tahy a vyhodnotíme, zda Adam v průběhu hry mohl situaci zvrátit na svoji stranu. Mějme na paměti, že Marek je inteligentní hráč, tudíž Adamovo potenciální šance nespočívá v chybném Markovo tahu, ale v nalezení vyhrávající strategie, pokud v jeho případě existuje. V sedmém kole v pozici (2, 2) vzal Adam jednu sirku z první hromádky. Další alternativa byla vzít obě sirky z první hromádky. To by znamenalo, že by se hra nacházela v pozici (0, 2). Marek by pak samozřejmě odebral jednu sirku z druhé hromádky, čímž by Adam následně prohrál. Pozice (2, 2) je tedy prohrávající. Pokud se podíváme do předešlých kol, nenalezneme žádnou mezeru, které by mohl Adam využít. Adam zkrátka odebíral sirky a Marek jeho tahy pouze kopíroval na druhé hromádce. Této strategii se nedá vzdorovat. Pokud by Adam hned v prvním tahu vzal sedm sirek z první hromádky (8 → 1), Marek by ve druhém kole odebral všechny sirky z druhé hromádky, čímž by pro Adama zbyla poslední sirka na první hromádce. Poslední možnost je, že by Adam v prvním tahu vzal všechny sirky z první hromádky, ale na to by Marek odpověděl odebráním sedmi sirek z druhé hromádky a opět bychom se dostali do stejné situace, na Adama by zbývala poslední sirka. Vypadá to tedy, že neexistuje tah, který by Adamovi zajistil výhru v případě, že stojí v této hře proti inteligentnímu hráči. Optimální strategie se v tomto případě od klasické hry NIM lehce liší, a to až v závěru hry. Nejdříve zůstává stejná, zkrátka inteligentní hráč po svém tahu zanechává nulový NIM součet. To dělá až do chvíle, kdy na jedné z hromádek zbývá pouze jedna sirka. Pokud je tedy hra v pozici $(1, n)$, nastává změna strategie a inteligentní hráč odebírá z druhé hromádky n sirek tak, aby zanechal poslední sirku. Pokud se hra ocitne ve tvaru $(0, n)$, inteligentní hráč odebere $n - 1$ sirek a zanechává tak poslední sirku. Této znalosti využijeme při analýze reverse NIM hry s více hromádkami a následně optimální strategii zobecníme právě pro větší počet hromádek.

Příklad 19. Mějme hru reverse NIM 4 (7, 8, 10, 6; ∞). Uvedeme si průběh hry s tím, že Adam zná optimální strategii.

Kolo	Hráč	První hromádka	Druhá hromádka	Třetí hromádka	Čtvrtá hromádka	NIM součet
0		0111	1000	1010	0110	0011
1	Adam	0100	1000	1010	0110	0000
2	Marek	0100	1000	0100	0110	1110
3	Adam	0100	0110	0100	0110	0000
4	Marek	0001	0110	0100	0110	0101
5	Adam	0001	0110	0001	0110	0000
6	Marek	0001	0100	0001	0110	0010
7	Adam	0001	0100	0001	0100	0000
8	Marek	0001	0001	0001	0100	0101
9	Adam	0001	0001	0001	0000	0001
10	Marek	0000	0001	0001	0000	0000
11	Adam	0000	0000	0001	0000	0001
12	Marek	0000	0000	0000	0000	0000

Tabulka 21

Pro přehlednost tabulku uvedeme v dekadickém zápisu, aby byly zřejmé jednotlivé tahy a počet sirek v jednotlivých kolech.

Kolo	Hráč	První hromádka	Druhá hromádka	Třetí hromádka	Čtvrtá hromádka	Počet odebraných sirek
0		7	8	10	6	
1	Adam	$(7 \to 4)$	8	10	6	3
2	Marek	4	8	$(10 \to 4)$	6	6
3	Adam	4	$(8 \to 6)$	4	6	2
4	Marek	$(4 \to 1)$	6	4	6	3
5	Adam	1	6	$(4 \to 1)$	6	3
6	Marek	1	$(6 \to 4)$	1	6	2
7	Adam	1	4	1	$(6 \to 4)$	2
8	Marek	1	$(4 \to 1)$	1	4	3
9	Adam	1	1	1	$(4 \to 0)$	4
10	Marek	$(1 \to 0)$	1	1	0	1
11	Adam	0	$(1 \to 0)$	1	0	1
12	Marek	0	0	$(1 \to 0)$	0	1

Tabulka 22

Zelenou barvou jsou v tabulce 21 vyznačeny nulové NIM součty, které Adam po svých tazích zanechával. Držel se tak optimální strategie. Deváté kolo již nezachoval NIM součet nulový, podíváme se tedy na pozici, která byla na začátku devátého kola. Jednalo se o pozici (1, 1, 1, 4). V této pozici Adam odebral čtyři sirky z poslední hromádky, čímž zanechal nenulový NIM součet. Byl to však správný tah, protože poté už zbývaly tři hromádky s jednou sirkou a na tahu byl Marek. Tudíž také Marek musel odebrat poslední sirku. Pozice (1, 1, 1, 0) v desátém kole je pro Marka prohrávající.

Ve hře reverse NIM ($n_1, n_2, \ldots, n_k; \infty$) o k hromádkách je prohrávající pozice taková, pokud je alespoň jedna z hromádek $n_i > 1$ a zároveň NIM součet $n_1 \oplus n_2 \oplus \ldots \oplus n_k = 0$, nebo pokud jsou všechny hromádky $n_i \leq 1$ a zároveň $n_1 \oplus n_2 \oplus \ldots \oplus n_k = 1$.

V praxi to znamená, že inteligentní hráč se drží strategie nulového NIM součtu až do chvíle, kdy se hra dostane do pozice (1, 1, 1, …, n), kde $n \geq 2$. V tomto případě nastává změna a hráč se již nesnaží dosáhnout nulového NIM součtu. Mohou nastat dva případy:

1) Ve hře zůstal sudý počet hromádek. Máme zde lichý počet hromádek, kde se nachází jedna sirka a na zbylé hromádce je n sirek, kde $n \geq 2$. V takovém případě inteligentní hráč odebere všech n sirek z poslední hromádky. Tím je zajištěn lichý počet hromádek s jednou sirkou, což je prohrávající pozice pro hráče, který se dostává na řadu.

2) Ve hře zůstal lichý počet hromádek s tím, že zde máme jednu hromádku o n sirkách, kde $n \geq 2$, a pak zbývá sudý počet hromádek, kde se na každé hromádce nachází pouze jedna sirka. V tomto případě odebere inteligentní hráč $n - 1$ sirek z hromádky, kde se nachází n sirek, aby vytvořil nenulový NIM součet. Lichý počet zbývajících hromádek s jednou sirkou pak dostává soupeře do prohrávající pozice.

Prohrávající pozice u her reverse NIM jsou např. (1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1) a jakékoliv pozice, kde je lichý počet hromádek s pouze jednou sirkou. Toto jsou prohrávající pozice v již konečné fázi hry. V předcházejících fázích, dokud hra není v pozici (1, 1, 1, …, n), kde $n \geq 2$, jsou prohrávající pozice stejné jako u klasického NIMu, a to v podobě pozic, kde je NIM součet nulový.

3.3.2 Hra NIM L

Jako hry NIM L (n; k) budeme označovat takové hry, kde budeme mít jednu hromádku s n sirkami, a každé kolo může hráč odebrat jednu až k sirek. Vyhrává ten hráč, který bude mít na konci lichý počet sirek. Aby hra dávala smysl, musí být n liché. Pokud by bylo n sudé, budou mít na konci hry oba hráči buď lichý počet sirek, nebo oba sudý počet sirek, a hra by tak neměla vítěze. Lichý počet sirek ve výchozí pozici nám zajistí, že na konci jeden z hráčů bude mít sudý počet sirek, a druhý hráč bude mít lichý počet sirek, což mu zajistí výhru.

Příklad 20. Mějme hru NIM L (n; 2). Začneme od nejmenších možných počtů a postupně budeme počet sirek na hromádce zvyšovat. Začínající hráč bude Adam, který bude hrát proti Markovi.

Jedna sirka na hromádce

Vyhrává Adam, protože odebere jedinou sirku. Má tak lichý počet sirek.

Tři sirky na hromádce

Adam má dvě možnosti. Pokud odebere jednu sirku, Marek odebere také jednu sirku, na Adama zbývá poslední, má tedy dvě sirky, vyhrává Marek. Pokud Adam odebere hned dvě sirky na začátku, Marek odebere jednu sirku. Vyhrává Marek.

Pět sirek na hromádce

Pokud by brali v každém kole po jedné sirce, vyhraje Adam, protože jako začínající hráč by měl na konci tři sirky a Marek by měl dvě sirky. Je tedy v zájmu Marka, aby alespoň jednou vzal dvě sirky. Řekněme, že Adam vezme na začátku jednu sirku. Zbývají čtyři. Marek tedy vezme dvě sirky, na to ale Adam vezme také dvě sirky. V konečném součtu má Adam tři sirky a Marek dvě sirky. Další možností je, že Adam na začátku odebere jednu sirku, Marek také jednu sirku. Zbývají tři sirky, a v této situaci si Adam zařídí výhru tak, že vezme dvě sirky. Vyhrává Adam. Pokud Adam vezme hned na začátku dvě sirky, Marek může vzít jednu sirku, na to Adam vezme jednu sirku a vyhraje. Nebo poslední možnost, že Adam vezme dvě sirky, na to Marek odebere také dvě sirky, Adam vezme poslední, vyhrává Adam. Adam tak může na začátku kola odebrat libovolný počet sirek a vyhraje.

Sedm sirek na hromádce

Pokud by každý bral po jedné sirce, vyhraje Marek, protože Adam by měl na konci čtyři sirky, zatímco Marek by měl tři sirky. Adam je tedy nucen alespoň jednou odebrat dvě sirky v jednom tahu. Pokud odebereme čtyři sirky, dostaneme se do situace, kdy na hromádce jsou tři sirky, kde víme, že vyhrává druhý hráč Marek. Musíme však splnit počáteční podmínky, kdy oba hráči mají sudý počet sirek. Pokud Adam vezme dvakrát po sobě jednu sirku, Marek udělá to samé a jsme v pozici se třemi sirkami. Pokud Adam vezme dvě sirky, Marek vezme také dvě sirky, opět máme žádanou pozici pro Marka. Pokud však Adam vezme jednu sirku, Marek pak také jednu sirku, a následně Adam dvě sirky, zbývají nám sice tři sirky, ale v této pozici nemají hráči sudý počet sirek v ruce. Adam má tři a Marek jednu. Podíváme se do tabulky, jak bude Marek dál táhnout, aby vyhrál.

Kolo	Hráč	Začátek a konec kola	Počet sirek jednotlivých hráčů na začátku a na konci kola
1	Adam	(7 → 6)	0 → 1
2	Marek	(6 → 5)	0 → 1
3	Adam	(5 → 3)	1 → 3
4	Marek	(3 → 1)	1 → 3
5	Adam	(1 → 0)	3 → 4

Tabulka 23

Marek odebere dvě sirky, a tím v podstatě znemožní Adamovi vyhrát, protože počáteční předpoklad pro vítězství Adama je, že Adam musí odebrat v jednom ze svých tahů dvě sirky. Marek tak vyhraje v každém případě.

Se zvyšujícím se počtem sirek ve výchozí pozici na hromádce je tento způsob rozboru tohoto typu NIM her značně neefektivní. Pro menší počet sirek se logickými úvahami dá poměrně snadno zjistit, kdo je na začátku ve vyhrávající pozici. Pokud však budeme počet sirek na hromádce zvyšovat, nemůžeme si být jisti, že jsme promysleli všechny situace, navíc by tento způsob hledání optimálních strategií byl značně zdlouhavý. Budeme tak potřebovat výhodnější způsob hledání optimální strategie.

Zaměříme se na strategii z pohledu hráče, který je v průběhu hry na tahu. K tomu budeme potřebovat znát několik údajů:

1. Kolik sirek je aktuálně na hromádce.
2. Hráč, který je na tahu, má v ruce sudý nebo lichý počet sirek?
3. Hráč, který není na tahu, má v ruce sudý nebo lichý počet sirek?

Pokud známe dva ze tří těchto údajů, ten třetí snadno dopočítáme. (Gatial, 1982) Například když bude na hromádce 11 sirek, hráč na tahu bude mít v ruce lichý počet sirek, je zřejmé, že jeho soupeř bude mít v ruce také lichý počet sirek, protože součet tří lichých čísel nám dá liché číslo. Pokud by soupeř měl sudý počet sirek, součet dvou lichých čísel a jednoho sudého čísla nám dá sudý výsledek, a to rozporuje pravidlům hry, kdy na začátku musíme mít lichý počet sirek.

Uvedeme si tabulku, která udává, kolik sirek musí odebrat hráč, který je na tahu, pokud se bude držet optimální strategie.

i		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	S	1	1	*x*	*x*	*c*	1	*x*	*x*	*c*	1	*x*	*x*
	L	*x*	2	2	1	*x*	2	2	1	*x*	2	2	1

Tabulka 24

i – počet zbývajících sirek na hromádce.

S – hráč na tahu vlastní sudý počet sirek.

L – hráč na tahu vlastní lichý počet sirek.

Označení *x* nám říká, že u hráče na tahu neexistuje správný tah. Jedná se o prohrávající pozici. Označení *c* pak značí, že hráč na tahu může odebrat libovolný počet sirek (v našem případě jednu nebo dvě) s jistotou, že tento tah bude stále v souladu s optimální strategií. Kdekoliv v tabulce, kde hráč může odebrat jednu, dvě sirky nebo libovolný počet sirek v rámci pravidel, se v tu chvíli hráč na tahu nachází ve vyhrávající pozici. Svým tahem se vždy snaží dostat soupeře do prohrávající pozice *x*.

Jak takovou tabulku vytvořit? Začneme od začátku. Pokud zbývá jedna sirka na hromádce a hráč na tahu má sudý počet, odebráním sirky má lichý počet a vyhrál.

Pokud má v této pozici lichý počet sirek, musí poslední sirku odebrat, dostává tak sudý počet sirek a prohrává. Tuto pozici označíme *x*. Takto nyní vypadá tabulka:

i		1	2	3	4	5	6
	S	1					
	L	*x*					

Tabulka 25

Pokračujeme dále. Pokud zbývají na hromádce dvě sirky a hráč na tahu vlastní sudý počet sirek, znamená to, že protihráč má lichý počet sirek. Hráči na tahu tak stačí odebrat jednu sirku, tím svého protihráče dostane do prohrávající pozice *x*. Hráč na tahu tak bude mít lichý počet, kdežto protihráč se z lichého počtu dostane odebráním poslední sirky na sudý počet. Pokud hráč na tahu má lichý počet a zbývají dvě sirky, odebráním dvou sirek mu lichý počet zůstane.

i		1	2	3	4	5	6
	S	1	1				
	L	*x*	2				

Tabulka 26

Zbývají-li na hromádce tři sirky a hráč na tahu má sudý počet sirek, protihráč musí mít také sudý počet sirek. Vidíme, že u počtů, kde zbývají jedna nebo dvě sirky v sudém řádku, není žádná prohrávající pozice. Hráč na tahu tak nemá možnost, jak protihráče dostat do prohrávající pozice. Tato pozice je tedy prohrávající. Pokud při třech sirkách na hromádce má hráč na tahu lichý počet sirek, protihráč musí mít také lichý počet sirek. V lichém řádku vidíme prohrávající pozici při jedné sirce, tudíž hráč na tahu odebere dvě sirky a tím dostane protihráče do prohrávající pozice.

i		1	2	3	4	5	6
	S	1	1	*x*			
	L	*x*	2	2			

Tabulka 27

Tímto způsobem vyplňujeme dál celou tabulku. Vždy ze znalosti počtu sirek na hromádce a sudého nebo lichého počtu sirek začínajícího hráče v ruce zjistíme, ve které pozici bude začínat soupeř, zda v lichém nebo sudém řádku. Následně hráč na tahu odebírá takový počet sirek, aby dostal protihráče do prohrávající pozice *x*. Jestliže takový tah neexistuje, znamená to, že hráč na tahu je sám v prohrávající pozici. Uvedeme si zde znovu vyplněnou tabulku s tím, že počty sirek budeme brát jako začátek hry, tudíž oba hráči budou mít sudý počet sirek ve vlastnictví, protože nula je sudé číslo.

i		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	S	1	1	*x*	*x*	*c*	1	*x*	*x*	*c*	1	*x*	*x*
	L	*x*	2	2	1	*x*	2	2	1	*x*	2	2	1

Tabulka 28

Dle úvodních rozborů jsou skutečně výchozí pozice s jednou, pěti a devíti sirkami vyhrávající pro začínajícího hráče, kdežto pozice se třemi, sedmi a jedenácti sirkami jsou prohrávající pozice pro začínajícího hráče.

Navíc si zde můžeme všimnout posloupnosti, podle které se jednotlivé správné tahy periodicky opakují.

i		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	S	1	1	*x*	*x*	*c*	1	*x*	*x*	*c*	1	*x*	*x*
	L	*x*	2	2	1	*x*	2	2	1	*x*	2	2	1

Tabulka 29

Takto bychom mohli rozšířit tabulku do požadovaného čísla podle výchozí pozice hry NIM *L*.

V případě, že hru hrají dva inteligentní hráči, můžeme uvést následující tvrzení.

Ve hře NIM L $(n; 2)$ začínající hráč vyhraje, pokud $n \in \{1 + 4k\}$, kde $k \in N_0$.

Ve hře NIM L $(n; 2)$ začínající hráč prohraje, pokud $n \in \{3 + 4k\}$, kde $k \in N_0$.

Uvedeme si zde tabulku, která dává návod pro optimální strategii začínajícího hráče ve hře NIM L $(n; 3)$.

i		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	S	1	1	3	3	*x*	2	2	*x*	1	1	3	3
	L	*x*	2	2	*x*	1	1	3	3	*x*	2	2	*x*

Tabulka 30

Tabulky a optimální strategie hry NIM L $(n; k)$, kde $k \geq 4$ ponecháme čtenáři.

Závěr

Cílem práce bylo představit čtenářům teorii her, její aplikaci v matematických modelových situacích a její využití v hledání optimální strategie u her NIM. V úvodní kapitole byly definovány některé důležité termíny z teorie her, o které se zbytek textu často opírá. Byly také představeny jednotlivé typy her, se kterými se hráči mohou setkat. Následně se text práce v této části zaměřuje na hledání Nashovy rovnováhy v konfliktních modelových situacích. V prostřední části bylo stručně vymezeno historické pozadí teorie her a uvedeno několik historických problémů, ve kterých se poznatky z teorie her dají aplikovat. Poslední nejobsáhlejší část byla zaměřena na NIM hry, kde jsme k hledání optimální strategie využívali postupné logické úvahy, a pro lepší přehlednost a pochopení byly využívány tabulky.

Celá práce zahrnuje pouze malý zlomek variant NIM her. Tyto hry se dají hrát se sirkami, kameny, žetony, zkrátka s libovolnými předměty, u kterých se dá zajistit dostatečný počet a snadná manipulace při přesunu jednotlivých předmětů. Klasické NIM hry jsou navrhovány tak, že proti sobě hrají dva hráči, kteří ve svém kole tahají pravidly definovaný počet sirek. Můžeme zde měnit počet hromádek, nebo také maximální možný počet sirek odebraných v jednom tahu. Podle pravidel je pak určen vítěz. Může se jednat o to, kdo jako poslední odebere sirku nebo kdo má na konci lichý počet sirek v ruce. Těmto variantám jsme se věnovali v této práci. Existují ale i další varianty, které zahrnují odlišná pravidla, popř. je pro jejich hraní vytvořen speciální prostor, kterým může být například matice nebo herní deska. V takovém prostoru pak můžeme definovat nová pravidla a vytvářet tak nové varianty NIM her, kterých je opravdu velké množství.

Práce může sloužit jako pomůcka pro učitele ve škole, kteří by svoji hodinu chtěli zatraktivnit zajímavými podněty konfliktních situací a jejich řešením s žáky, popř. hraním NIM her pro rozvoj žákova logického myšlení. V neposlední řadě je text určen pro všechny zájemce o matematiku, zejména pak o atraktivní disciplínu teorie her.

Bibliografie

Bible. 2008. *Písmo svaté Starého a Nového zákona.* Praha : Česká biblická společnost, 2008. stránky 411-412. 978-80-85810-75-2.

Binmore, Ken. 2014. *Teorie her ... a jak může změnit váš život.* Praha : Dokořán, 2014. 978-80-7363-549-7.

Dlouhý, Fiala. 2009. *Úvod do teorie her.* Praha : Oeconomica, 2009. 978-80-245-1609-7.

Gatial, Hecht, Hejný. 1982. *Hry takmer matematické.* Praha : ÚV matematické olympiády, 1982.

Hykšová, Magdaléna. 2004. *Historické počátky teorie her.* Praha : Výzkumné centrum pro dějiny vědy, 2004. 80-7285-040-7.

Chvoj, Martin. 2013. *Pokročilá teorie her ve světě kolem nás.* Praha : Grada Publishing a.s., 2013. 978-80-247-4620-3.

Maňas, Miroslav. 1991. *Teorie her a její aplikace.* Praha : Nakladatelství technické literatury, 1991. 80-03-00358-X.

Skuhra, Jiří. 2010. *Kurz teorie her.* 2010. Dostupné z: http://www.george11.eu/matematika/hry/index.htm

Vopravil, Václav. 2020. Hry Nim. *Rozhledy matematicko-fyzikální.* Rozhledy matematicko-fyzikální, 2020, Sv. 95, stránky 16-31.

Walker, Paul. 2012. *A chronology of game theory.* University of Canterbury, New Zeland, 2012. Dostupné z: https://competitionandappropriation.pre.ss.ucla.edu/wp-content/uploads/sites/95/2017/08/HistoryGameTheory.pdf

Seznam obrázků

Seznam tabulek