UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Problémy milénia: Riemannova hypotéza

Vedoucí bakalářské práce:
RNDr. Tomáš Fürst, Ph.D.
Rok odevzdání: 2011

Vypracoval:
Patricie Foltýnová
MAP, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto bakalářskou práci samostatně za vedení Tomáše Fürsta a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 21.4.2011

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala především svému vedoucímu bakalářské práce panu Tomáši Fürstovi za obětavou spolupráci i čas, který mi věnoval při konzultacích. Poděkování si zaslouží také má rodina a přítel, kteří mě po celou dobu studia podporovali.

Obsah

Úvod

Riemannova hypotéza je jeden z nejslavnějších a nejdůležitějších nevyřešených problémů současné matematiky. Poprvé byla formulována německým matematikem Bernhardem Riemannem v roce 1859, ale zůstala téměř nepovšimnuta po desítky let. Během 20. století, kdy postupně uchvátila představivost matematiků, odolávala všem pokusům o potvrzení nebo vyvrácení. Důkazem Riemannovy hypotézy by bylo vyřešeno velké množství hlubokých problémů z různých oblastí matematiky (zejména teorie čísel). Nejen proto byla v roce 2000 zařazena mezi 7 nejdůležitějších nevyřešených matematických problémů nového tisíciletí.

V posledních letech 20. století vznikly ve Spojených státech soukromé ústavy zaměřené na matematický výzkum. Jak Clayův matematický ústav (založený bostonským finančníkem Landonem T. Clayem v roce 1998), tak Americký ústav pro matematiku (založený v roce 1994 kalifornským podnikatelem Johnem Freyem) se zaměřily na Riemannovu hypotézu. Jak je popsáno v první kapitole, Clayův ústav vypsal odměnu ve výši jednoho milionu dolarů za důkaz nebo vyvrácení této domněnky. Americký ústav pro matematiku věnoval hypotéze tři velké konference (1996, 1998 a 2002), kterých se zúčastnili badatelé z celého světa a je jen otázkou, zda tyto nové přístupy a podněty nakonec Riemannovu hypotézu "rozlousknou". [1]

Cílem této bakalářské práce je v první řadě popsat a pochopit Riemannovu hypotézu. V kapitole 5.3 je uvedeno znění této domněnky, a protože jejím ústředním pojmem je Riemannova funkce zeta, je také potřeba tuto funkci náležitě popsat a ilustrovat na obrázcích. Dalším cílem je vytvořit nebo doplnit příslušná hesla na internetovou stránku http://www.wikipedia.cz

1 Problémy milénia

Clayův matematický ústav (Clay Mathematics Institute, CMI) vznikl díky dlouholetému přesvědčení jeho zakladatele, pana Landona T. Claye, že matematické znalosti je potřeba ohodnotit. Několikaleté diskuze s profesorem Arthurem Jaffem pomohly formovat Clayovy myšlenky, jak nejlépe podpořit rozvoj matematiky. Tyto diskuze měly za následek založení institutu dne 25. září 1998 pod vedením profesora Jaffeho. Hlavní cíle a účely CMI jsou zlepšit a šířit matematické znalosti, obohacovat samotné matematiky a jiné vědce o nové objevy v oblasti matematiky, podporovat nadané studenty k "vybudování matematické kariéry" a rozpoznat mimořádné úspěchy a pokroky v matematickém výzkumu. CMI podporuje "krásu, sílu a všestrannost matematického myšlení". [14]

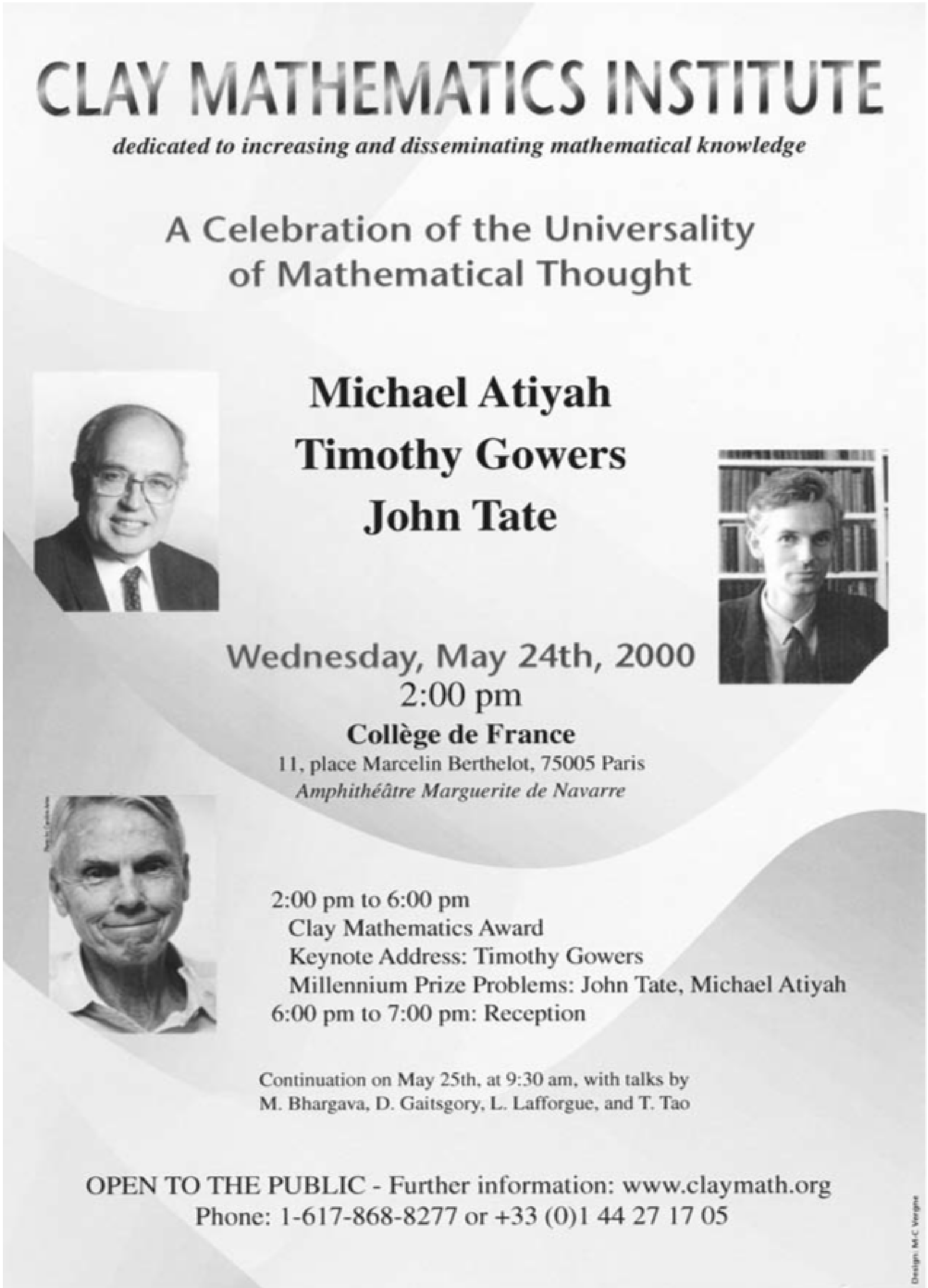
Velmi brzy po vzniku institutu se jeho vědecká rada – Alain Connes, Arthur Jaffe, Edward Witten a Andrew Wiles – rozhodla jmenovat několik nevyřešených problémů. Cílem ale nebylo definovat nové problémy, jak učinil David Hilbert o století dříve, kdy předložil seznam 23 takzvaných Hilbertových problémů na mezinárodním kongresu matematiků v Paříži v létě roku 1900. Spíše šlo o to, zaznamenat ty nejobtížnější otázky, se kterými matematici bojovali na přelomu druhého tisíciletí, rozpoznat matematické úspěchy z historie, povýšit do podvědomí široké veřejnosti skutečnost, že matematika má své hranice stále otevřené a oplývají důležitými nevyřešenými problémy a zdůraznit důležitost práce při řešení těch nejhlubších a nejobtížnějších problémů.

Po konzultaci s předními členy matematické obce byl přijat konečný seznam sedmi otevřených matematických problémů: Birchova a Swinnerton-Dyerova domněnka, Hodgeova domněnka, Yangova-Millsova teorie a hypotéza hmotnostních rozdílů, Navierovy-Stokesovy rovnice, Poincarého domněnka, Problém P versus NP a Riemannova hypotéza.

Dne 24. května 2000 na zasedání v přednáškové síni univerzity Collège de France v Paříži byly tyto problémy představeny, byla stanovena určitá pravidla [13] a vyhlášena odměna ve výši jednoho milionu amerických dolarů za vyřešení každého z nich. O problémech Riemannovy hypotézy, Birchovy a Swinnerton-

Dyerovy domněnky a Problému P versus NP hovořil matematik John Tate, zbylé čtyři odprezentoval Michael Atiyah. Kromě toho zde měl Timothy Gowers veřejnou přednášku na téma “On the Importance of Mathematics”. V kapitole 2 je uvedeno originální sdělení představenstva a vědecké poradní rady CMI.

Po necelých deseti letech, dne 18. března 2010, CMI oznámil, že Grigorij Perelman z Petěrburgu z Ruska je příjemcem ceny za vyřešení prvního z “Problémů tisíciletí” a to Poincarého domněnky. Nynější prezident CMI James Carlson prohlásil [15]: “Rozluštění Poincarého domněnky jistě přináší po staletí dlouhé snahy o nalezení řešení. Jedná se o velký pokrok v historii matematiky, na který se bude dlouho vzpomínat.”



Obrázek 1: Plakát pařížského zasedání ze dne 24. května 2000 [10]

2 Prohlášení představenstva a vědecké poradní rady CMI

[10] Za účelem proslavení matematiky v novém tisíciletí jmenoval Clayův matematický ústav v Cambridge, Massachusetts sedm tzv. “problémů tisíciletí”. Vědecká poradní rada CMI vybrala tyto problémy soustřeďující se na důležité otázky matematiky, které nebyly v průběhu let vyřešeny. Představenstvo společnosti CMI poskytlo 7 milionů dolarů za vyřešení těchto problémů, tedy jeden milion za každý z nich. Během shromáždění, 24. května 2000, prezentoval Timothy Gowers přednášku s názvem “Význam matematiky” zaměřenou pro širokou veřejnost, zatímco John Tate a Michael Atiyah hovořili o zmíněných sedmi problémech.

O sto let dříve, tedy 8. srpna 1900, pronesl David Hilbert na 2. mezinárodním kongresu matematiků v Paříži jeho známou přednášku o 23 otevřených matematických problémech. To ovlivnilo naše rozhodnutí představit “Problémy tisíciletí” jako hlavní téma pařížského setkání. Pravidla [13], vyplývající z přidělení odměny za vyřešení těchto problémů, mají podporu vědecké poradní rady CMI a schválení představenstva. Členové této rady mají odpovědnost za zachování podstaty, poctivosti a duchaplnosti této ceny.

Představenstvo: Finn M.W. Caspersen, Landon T. Clay, Lavinia D. Clay, Randolph R. Hearst III, Arthur Jaffe a David R. Stone

Vědecká poradní rada: Alain Connes, Arthur Jaffe, Andrew Wiles a Edward Witten

Paříž, 24. května 2000

Riemannova hypotéza i Riemannova funkce zeta nesou svůj název po německém matematikovi Bernhardu Riemannovi a proto si jistě zaslouží pár slov o jeho životě.

3 Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)

[1] Narodil se 17. září 1826 ve vesnici Breselenz v dnešním Německu. Jeho dětství v této chudé a zaostalé oblasti nebylo vůbec jednoduché. Bernhardův otec byl luteránský kněz a veterán napoleonských válek. Když byl Bernhard ještě dítě, jeho otec přijal nové místo jako farář v Quickbornu, nedaleko Breselenze, což bylo centrem jeho citového života až do téměř třiceti let.

I když o Riemannovi nevíme mnoho, protože o svém osobním životě nezanechal žádné záznamy, kromě těch, které se dají usoudit z jeho dopisů, zdá se, že Quickborn bylo jediným prostředím, kam se při každé příležitosti rád vracel do svého rodinného kruhu.

Již od raného dětství měl Riemann vyjímečné matematické nadání. Protože ale v Quickbornu nebylo žádné gymnázium, začal svoje vzdělání až o čtyři roky později než bylo obvyklé, a to ve svých čtrnácti letech. Bylo to na gymnáziu v Hanoveru, kde žila Bernhardova babička z matčiny strany a tím rodina ušetřila za ubytování a stravu. Avšak Riemann se zde cítil nešťastný a teskníćí po domově. Smrt jeho babičky roku 1842 tuto situaci mírně zlepšila, protože Riemann přestoupil na gymnázium v Lüneburgu. Blízkost domova a tím i možnost trávit prázdniny s rodinou činila jeho pozdější skolní léta poněkud šťastnějšími.

V roce 1846 byl úspěšně přijat na univerzitu v Göttingenu a tohle město mělo pro mladého Riemanna jednu zvláštní přitažlivost. Bylo totiž domovem jednoho z největších matematiků své doby a možná všech dob vůbec, Carla Friedricha Gausse (1777 – 1855). I když v té době bylo Gaussovi už 69 let, jeho nejvýznamnější období již bylo minulostí a přednášel jen málo, tak Riemann jeho přednášky z lineární algebry navštěvoval a jeho vášeň pro matematiku stoupala. Právě proto se Riemann v jistém okamžiku v letech 1846 – 1847 musel svěřit svému otci, že ho zajímá matematika daleko víc než teologie a jeho otec dal svůj souhlas, aby se matematika stala jeho povoláním.

V roce 1849 se začal Riemann pod vedením samotného Gausse připravovat na doktorát, kterého po dvou letech ve věku 25 let dosáhl. Za další dva roky se stal na univerzitě členem sboru a v roce 1857 docentem. To co se dnes v životopisech nazývá "průlomový okamžik" byl pro Riemanna právě rok 1857, kdy uveřejnil článek [17] z analýzy pod názvem "Teorie abelovských funkcí", který byl okamžitě uznán za zásadní příspěvek.

V roce 1859 byl v Göttingenu jmenován řádným profesorem a o tři roky později se oženil s Elise Kochovou. Krátce před svými třicátými třetími narozeninami byl jmenován také členem korespondentem berlínské akademie, která učinila své rozhodnutí na základě pouze dvou Riemannových prací, které byly dobře známy: na doktorské disertaci z roku 1851 a na článku o abelovských funkcích z roku 1857. Toto členství pro něj bylo velkou ctí a bylo zvykem vyjádřit za něj svoji vděčnost předložením práce popisující výzkum, kterým se nový člen zabývá. Riemann předložil práci [11] s názvem Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse ("O počtu prvočísel menších než daná hodnota").

Na stejné téma vedl v roce 1859 přednášku v berlínské akademii, která zřejmě byla jeho triumfem. Zde uvedeme první tři věty této přednášky: "Věřím, že za uznání, které mi Akademie projevila mým jmenováním jejím dopisujícím členem, mohu nejlépe projevit svoji vděčnost tím, že neprodleně využiji této cti, abych vás seznámil s výzkumem četnosti prvočísel, tématem, které s ohledem na zájem projevovaný po dlouhou dobu Gaussem a Dirichletem se jeví ne zcela nehodné takového sdělení. Mým výchozím bodem při tomto výzkumu bylo Eulerovo zjištění, že platí

$$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^{-s}}$$

pro všechna prvočísla p a celá čísla n. Funkci komplexní proměnné s, která je vyjádřena oběma těmito výrazy, pokud konvergují, označuji $\zeta(s)$."

Riemannova hypotéza, kterou se budeme zabývat, se objevuje na čtvrté stránce jeho práce.

4 Prvočíselná věta (PČV)

Nejdříve připomeneme co vlastně prvočíslo je: Prvočíslo je každé přirozené číslo, které má právě dva různé dělitele – samo sebe a jedničku. Podíváme-li se na seznam prvočísel například od 1 do 1000 pozorněji, zjistíme, že postupně “řídnou”. Mezi 1 a 100 je jich 25, mezi 301 a 400 jen 16, mezi 901 a 1000 jen 14. Zdá se, že počet prvočísel v každém bloku sta celých čísel klesá. Pokud bychom pokračovali s výčtem prvočísel až třeba do milionu, viděli bychom, že v posledním bloku (tj. od 999 901 do 1 000 000) je už jen osm prvočísel. Pokračováním do bilionu by byla v posledním bloku jen čtyři prvočísla.

Je zde na místě otázka, zda nakonec prvočísla zcela vymizí. Odpověď na tuto otázku, kterou nalezl již řecký matematik Euklides kolem roku 300 př. n. l., je záporná. Prvočísla nikdy zcela nevymizí, protože největší prvočíslo neexistuje.
Důkaz: Předpokládejme, že N je prvočíslo a utvoříme číslo $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots N) + 1$. Toto číslo není dělitelné beze zbytku žádným z čísel od jedné do N – vždycky dostaneme zbytek 1. Takže buď nemá žádné vlastní dělitele [1], v tom případě je samo prvočíslem větším než N nebo jeho nejmenší vlastní dělitel je větší než N. Protože nejmenší vlastní dělitel jakéhokoliv čísla je nutně prvočíslo, je tvrzení dokázáno. Je-li např. $N = 5$, pak $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 121$ a nejmenší vlastní dělitel čísla 121 je 11. Z toho plyne, že vždycky existuje nějaké větší prvočíslo než je to předchozí. Jiný důkaz nekonečného počtu prvočísel je uveden v kapitole 5.4.

Když byla tato otázka zodpovězena tak brzy v dějinách matematiky, začali se matematici přirozeně zajímat o další problém: Existuje pravidlo nebo vzorec, který by nám řekl, kolik je prvočísel menších než dané číslo? Touto otázkou mimochodem začal i Bernhard Riemann. Částečnou odpověď nám dává Tabulka 1, kde symbol $\pi(N)$ značí *prvočíselnou funkci*, která udává počet prvočísel až do N včetně. Je zřejmé, že prvočísla “řídnou”, protože kdyby držela krok s první tisícovkou, v níž je 168 prvočísel, pak by jich v posledním řádku tabulky muselo být asi 168 000 000 000 000 000. Ve skutečnosti jich tam je pouhá sedmina tohoto

[1] Jediné 2 dělitele prvočísla se nazývají triviální, všechny ostatní nazýváme vlastními děliteli.

počtu.

N	$\pi(N)$
1 000	168
1 000 000	78 498
1 000 000 000	50 847 523
1 000 000 000 000	37 607 912 018
1 000 000 000 000 000	29 844 570 422 669
1 000 000 000 000 000 000	24 739 954 287 740 860

Tabulka 1

Nyní proveďme s Tabulkou 1 malý trik. Vydělíme první sloupec druhým (argumenty hodnotami) a přidáme sloupec logaritmů N. Výsledkem je Tabulka 2. Hodnoty jsou zaokrouhleny na 4 desetinná místa.

N	$\ln N$	$N/\pi(N)$
1 000	6,9077	5,9524
1 000 000	13,8155	12,7592
1 000 000 000	20,7232	19,6665
1 000 000 000 000	27,6310	26,5901
1 000 000 000 000 000	34,5378	33,6247
1 000 000 000 000 000 000	41,4465	40,4204

Tabulka 2 (zdroj dat [1])

Z Tabulky 2 vidíme, že hodnota $N/\pi(N)$ je blízko hodnotě $\ln N$ a čím větší je N, tím je mu (poměrně) blíž. Tento fakt se dá zapsat ve tvaru: $N/\pi(N) \sim \ln N$, což znamená, že $N/\pi(N)$ se asymptoticky blíží logaritmu N. Upravením této formule dostáváme PRVOČÍSELNOU VĚTU:

$$\pi(N) \sim \frac{N}{\ln N}.$$

Tato věta říká, že limita podílu funkcí $\pi(N)$ a $N/\ln N$ pro N jdoucí k nekonečnu je 1, což vyjadřujeme vzorcem

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\pi(N)}{N/\ln N} = 1.$$

Podstatné je, že vzorec neříká nic o rozdílu těchto dvou funkcí, když N jde k nekonečnu. Chování tohoto rozdílu je ve skutečnosti velmi komplikované a je spojeno s jedním z nejdůležitějších nevyřešených problémů matematiky: Riemannovou hypotézou. Věta namísto toho vyjadřuje, že výraz $N/\ln N$ aproximuje $\pi(N)$ v tom smyslu, že chyba aproximace se blíží k nule, když se N blíží k nekonečnu.

Konkrétnější úvahy nad rozložením prvočísel se nacházely již u C. F. Gausse na přelomu 18. a 19. století. Během 19. století se pokusili PČV dokázat P. L. Čebyšev (1821 – 1894) a G. F. B. Riemann. Avšak první důkaz podali nezávisle na sobě francouzský matematik Jacques Hadamard (1865–1963) [7] a belgický matematik Charles Jean de la Vallée-Poussin (1866–1962) [6] v roce 1896 s použitím složitých metod komplexní analýzy. Důkazem prvočíselné věty se poté zabývali další matematici v průběhu 20. století, kteří našli několik dalších důkazů. O mnoho jednodušší důkaz [5] podal německý matematik Edmund Landau (1877 – 1938) v roce 1909 a v roce 1949 objevil elementární [2] důkaz [4] nejprve norský matematik Atle Selberg (1917 – 2007) a poté Paul Erdös (1913 – 1996), který lehce upravil některé Selbergovy myšlenky ke konstrukci vlastního důkazu [12].

4.1 Důsledky prvočíselné věty

Nyní se podívejme na dva důsledky této věty, které předpokládají její platnost.

1. Pravděpodobnost, že N je prvočíslo je přibližně rovna $\frac{1}{\ln N}$.
2. N-té prvočíslo je přibližně rovno $N \ln N$.

K odvození prvního důsledku stačí předpokládat rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti a máme $P(N \text{ je prvočíslo}) \sim 1/\ln N$. A tak tomu doopravdy je. Na začátku kapitoly 4 je uveden počet prvočísel v blocích sta čísel před čísly $100, 400, 1000$, milion a bilion. Výsledky jsou $25, 16, 14, 8$ a 4. Odpovídající hodnoty $100/\ln N$ pro $N = 100, 400, 1000$ atd. jsou, po zaokrouhlení na nejbližší celé

[2] Elementární zde neznamená jednoduchý, ale že nebyl proveden pomocí metod komplexní analýzy.

číslo, $22, 17, 14, 7$ a 4. Jinak řečeno, v okolí velkého čísla N je pravděpodobnost, že nějaké číslo je prvočíslem, přibližně rovna $1/\ln N$.

Nyní odhadneme velikost N-tého prvočísla. Mějme $\pi(N)$ počet prvočísel do N, kde $\pi(N) \sim N/\ln N$ a ptáme se jak velké je N-té prvočíslo? Hledáme K takové, že $\pi(K) \sim N$. Za platnosti PČV můžeme tuto přibližnou rovnost přepsat

$$\pi(K) \sim \frac{K}{\ln K} \sim N \tag{1}$$

Máme $f(K) \sim N$ a potřebujeme $K \sim g(N)$. Dosazením $K \sim N \ln N$ do výrazu (1) dostaneme

$$N \sim \frac{K}{\ln K} \sim \frac{N \ln N}{\ln(N \ln N)} \sim \frac{N \ln N}{\ln N + \ln(\ln N)} \sim \frac{N}{1 + \frac{\ln(\ln N)}{\ln N}}, \tag{2}$$

kde jmenovatel posledního zlomku (2) jde k 1, neboť výraz $\ln(\ln N)/\ln N$ jde k 0. Celkem dostáváme $N \sim N$. K je tedy skutečně přibližně rovno $N \ln N$ a tím dostáváme 2. důsledek PČV.

5 Riemannova hypotéza

5.1 Riemannova funkce zeta

Riemannova funkce zeta je dána tímto předpisem

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Podíváme-li se na proměnnou s této nekonečné řady na pravé straně tohoto výrazu, lehce zjistíme, že tato řada diverguje pro $s = 1$. V tomto případě se totiž tato řada nazývá *harmonická řada*, která je divergentní. Důkaz podal již v pozdním středověku francouzský badatel Nicole d'Oresme $(1323 - 1382)$, který si všiml, že $1/3 + 1/4$ je větší než $1/2$; totéž platí pro $1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8$; stejně i pro $1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16$ atd. Jinými slovy, vezmeme-li dva členy, potom čtyři členy, potom osm, potom šestnáct členů atd., můžeme členy řady seskupit do nekonečného počtu bloků, z nichž každý je větší než jedna polovina:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots\right) \geq$$

$$\geq 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots\right) =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \cdots = \infty$$

Celý součet tedy musí být nekonečný.
Pro $s > 1$ řada absolutně konverguje. Abychom mohli tuto skutečnost dokázat, musíme se chvíli této nekonečné řadě věnovat .

Máme tedy nekonečnou řadu typu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, kde s je parametr a nás zajímají jeho hodnoty větší než 1. Když se totiž podíváme na tuto s-řadu a zeptáme se, co se stane s jejími členy pro $s < 0$, pak podle nutné podmínky konvergence zjistíme, že posloupnost $1/n^s$ jde do nekonečna a proto řada diverguje. Podobně pro $s = 0$ dostaneme divergentní řadu, jejíž členy jsou všechny rovny 1. Jediný zbývající případ, kdy je šance na konvergenci řady, je tedy pro kladné hodnoty s, protože pak jdou členy $1/n^s$ k nule. Začneme-li od hodnoty $s = 0$, kde řada diverguje, zvětšovat s, tak se čísla $1/n^s$ zmenšují; to znamená, že sčítáme menší čísla a řada má větší šanci konvergovat. Ukazuje se, že jak zvětšujeme s, tak existuje hraniční hodnota, ve které se divergence mění v konvergenci. Tuto skutečnost si můžeme označit jako tzv. s-test [16]:

Jestliže $s > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konverguje.

Jestliže $s \leq 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \infty$.

Důkaz tohoto užitečného s-testu plyne z integrálního kritéria, které zní:

Nechť f je funkcí definovanou na intervalu $\langle 1, \infty)$, která je na tomto intervalu nezáporná a nerostoucí. Nechť $f(n) = a_n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak řada $\sum a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje nevlastní integrál $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

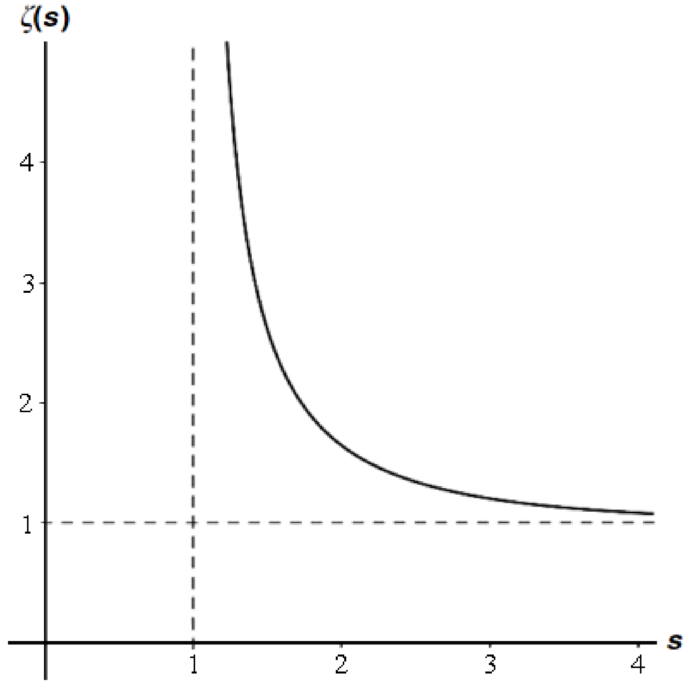
V našem případě

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} \frac{1}{x^s} dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right]_1^n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^{-s+1}}{-s+1} - \frac{1}{-s+1}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{1-s}\frac{1}{n^{s-1}} + \frac{1}{s-1}\right] = \frac{1}{s-1} + \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{1-s}\frac{1}{n^{s-1}}\right] = \frac{1}{s-1},$$

což je pro $s > 1$ vždy menší než nekonečno, takže $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx$ konverguje a tudíž konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. A protože jsou všechny členy této řady kladné, tak automaticky konverguje absolutně.



Obrázek 2

Na Obrázku 2 je znázorněn graf funkce zeta právě pro $s > 1$. Je vidět, že když se s blíží zprava k číslu 1, hodnoty funkce jdou do nekonečna a když hodnoty s postupují doprava do nekonečna, funkce se přibližuje k 1. Zatím jsme hovořili pouze o hodnotách $s \geq 1$, ale co když tomu tak není? Například pro $s = 1/2$ dostaneme řadu

$$\zeta(\frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \dots \tag{3}$$

Protože odmocnina z jakéhokoliv přirozeného čísla je menší nebo rovno než toto číslo, je každý člen řady (3) větší nebo roven než odpovídající člen harmonické řady, která diverguje, a proto musí nutně tato řada divergovat. Co když je například s rovno nule? Pak původní řada vypadá takto

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{3^0} + \frac{1}{4^0} + \frac{1}{5^0} + \frac{1}{6^0} + \frac{1}{7^0} + \frac{1}{8^0} + \frac{1}{9^0} + \frac{1}{10^0} + \frac{1}{11^0} + \dots,$$

kde vlastně sčítáme samé jedničky, což očividně diverguje. Pro záporné hodnoty s, například pro $s = -1$, dostáváme řadu $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots$ a ta je určitě divergentní.

Zdá se, že Obrázek 2 ukazuje vše co se dá o Riemannově funkci zeta ukázat. Tedy že definičním oborem funkce zeta je množina všech čísel větších než 1. Jak si ale v následujícím ukážeme, není tomu tak.

5.2 Rozšiřování definičního oboru

Zapomeňme na chvíli na funkci zeta a podívejme se na úplně jiný nekonečný součet:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots \tag{4}$$

Je zřejmé, že pro $|x| < 1$ platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Odtud nám plyne důležitý poznatek, že nekonečná řada může definovat funkci jen na části jejího definičního oboru a právě tohle platí i pro funkci zeta. Jak dále uvidíme, funkce zeta má totiž konečné hodnoty pro všechny argumenty $s \neq 1$.

Nyní se podívejme na základní myšlenku, jak zjistit hodnoty funkce $\zeta(s)$ pro $s < 1$. Nejdříve zavedeme novou funkci

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} - \dots$$

Tato nekonečná řada se nazývá *alternující řada* a konverguje pro $s > 0$.
Důkaz konvergence se provede pomocí Leibnitzova kritéria, které zní:
Nechť a_n je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Pak alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
V našem případě je $a_n = \frac{1}{n^s}$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} = 0$ pro všechna $s > 0$. Z toho tedy plyne, že řada konverguje pro $s > 0$.
Řadu $\eta(s)$ můžeme zapsat jako

$$\left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{10^s} + \frac{1}{11^s} + \dots\right)$$

minus

$$2\Big(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{8^s}+\frac{1}{10^s}+\dots\Big),$$

kde první závorka je vlastně $\zeta(s)$. Vytknutím $1/2^s$ z druhého výrazu a úpravou dostaneme

$$\eta(s)=\zeta(s)-2\frac{1}{2^s}\zeta(s)=\zeta(s)\Big(1-2\frac{1}{2^s}\Big).$$

Vyjádřením $\zeta(s)$ dojdeme ke vztahu

$$\zeta(s)=\frac{\eta(s)}{1-\frac{1}{2^{s-1}}},$$

ze kterého dokážeme vypočítat hodnoty $\zeta(s)$ pro s mezi 0 a 1. V 0 je hodnota funkce zeta rovna $-1/2$, jak můžeme vidět na Obrázku 4.

Nyní se podívejme, jak je to s argumenty funkce zeta, které jsou menší než 0. V Riemannově článku z roku 1859 [11] je důkaz formule, kterou poprvé navrhl Euler v roce 1749 a která vyjadřuje $\zeta(1-s)$ pomocí $\zeta(s)$:

$$\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\sin\Big(\frac{1-s}{2}\pi\Big)(s-1)!\zeta(s). \tag{5}$$

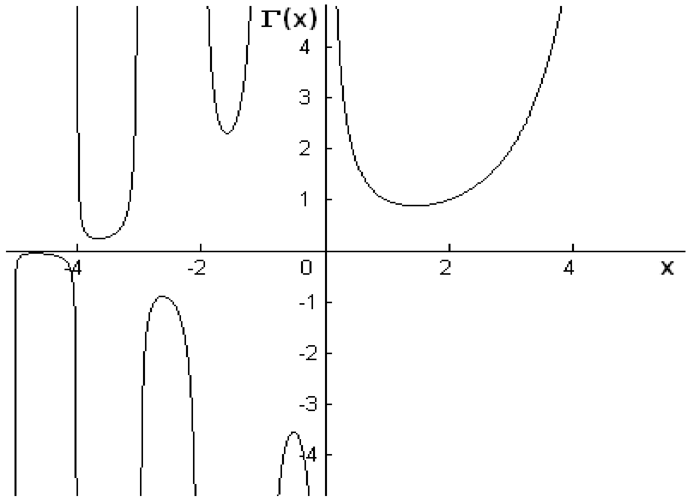
Chceme-li například vypočítat $\zeta(-9)$, stačí do vzorce dosadit známé $\zeta(10)$. Vzorcem (5) tedy vypočítáme hodnoty funkce zeta pro záporná celá čísla s. Abychom však mohli spočítat hodnoty funkce zeta pro všechna reálná $s<0$ musíme použít následující vzorec

$$\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s)=\pi^{-(1-s)/2}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\zeta(1-s), \tag{6}$$

který dokázal Riemann [11] v roce 1859. Velké písmeno řecké abecedy Γ v rovnici (6) je funkce gamma (Obrázek 3), která je rozšířením faktoriálu do reálných a komplexních čísel a je dána vztahem

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt. \tag{7}$$

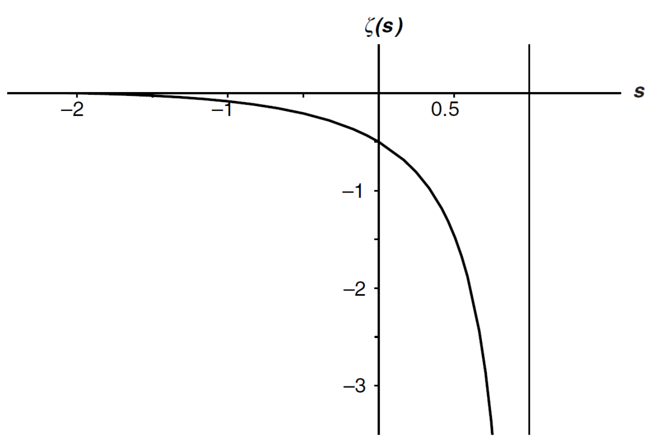
Ačkoliv je gamma funkce definována pro všechna komplexní čísla kromě nekladných celých čísel, je definována pomocí integrálu, který konverguje pouze pro komplexní čísla s kladnou reálnou částí.



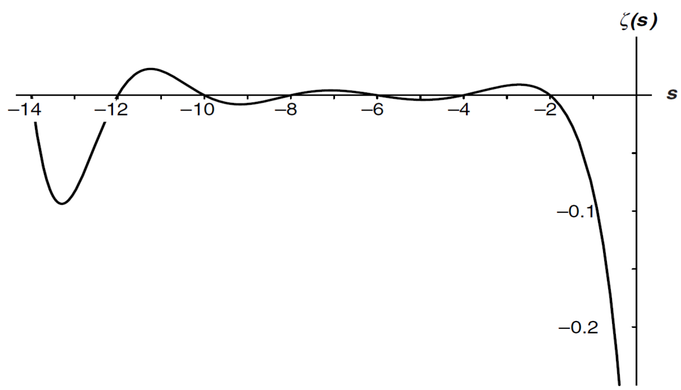
Obrázek 3

Tímto jsme došli k závěru, že funkce zeta má konečné hodnoty pro všechna reálná $s \neq 1$.

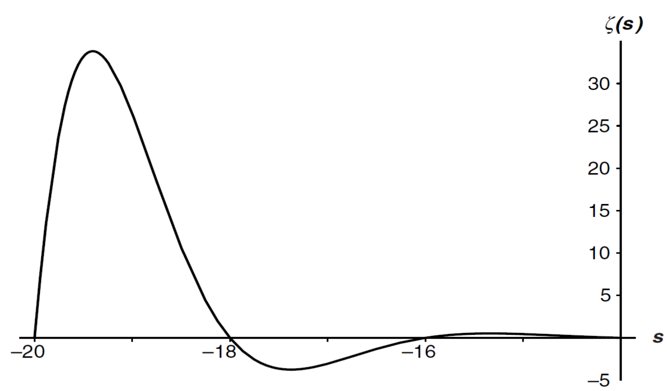
Na Obrázcích 4 - 7 jsou znázorněny některé hodnoty reálných argumentů $s < 1$. Z Obrázku 5 také vidíme, že zeta funkce má nulové body ve všech sudých záporných celých číslech. Tyto nulové body jsou označovány jako *triviální nulové body*.



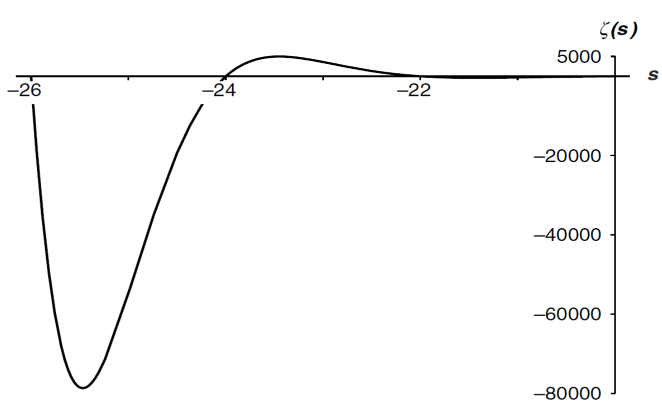
Obrázek 4



Obrázek 5



Obrázek 6



Obrázek 7

5.3 Problém

Hned na úvod si uveďme již zmíněnou Riemannovu hypotézu:

Riemannova hypotéza
Všechny netriviální nulové body funkce zeta
mají reálnou část rovnu jedné polovině.

Zatím jsme se zmiňovali pouze o triviálních nulových bodech funkce zeta a abychom mohli pochopit Riemannovu hypotézu, která se ovšem zabývá netriviálními nulovými body, musíme zabrousit do teorie komplexních čísel. Musíme tedy rozšířit definiční obor funkce zeta na obor komplexních čísel. Protože vzorec pro funkci zeta je dán pomocí nekonečné řady, opět se ptáme na otázku její konvergence.

Tak jako jsme ukázali v $\mathbb{R}$, tak tato řada konverguje pro každe komplexní číslo s, jehož reálná část[3] je větší než jedna. A stejně tak, jako jsme v $\mathbb{R}$ rozšířili definiční obor funkce zeta i na oblasti, kde nekonečná řada nekonverguje, to můžeme provést i v $\mathbb{C}$. Dostaneme tak úplnou funkci zeta definovanou pro všechna $\mathbb{C}$ s výjimkou $s = 1$.

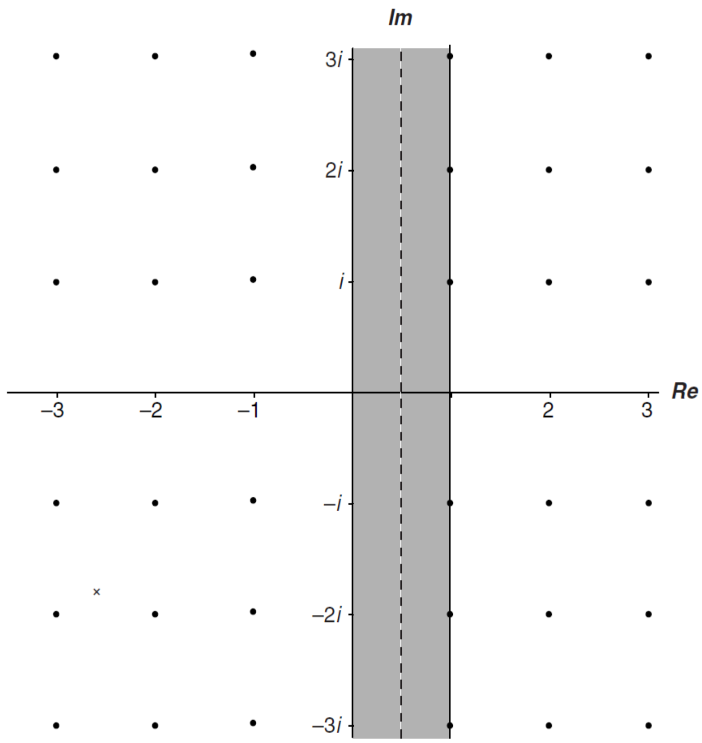
V roce 1900 byla s matematickou jistotou známa následující fakta o umístění netriviálních nulových bodů v komplexní rovině:

• Je jich nekonečně mnoho a všechny mají reálnou část mezi 0 a 1, přičemž krajní body vylučujeme. Použijeme-li komplexní rovinu ke znázornění této situace, můžeme říci, že víme, že všechny netriviální nulové body leží v *kritickém pásu*. Riemannova hypotéza je však daleko silnější tvrzení, totiž, že všechny leží na *kritické přímce* (Obrázek 8).

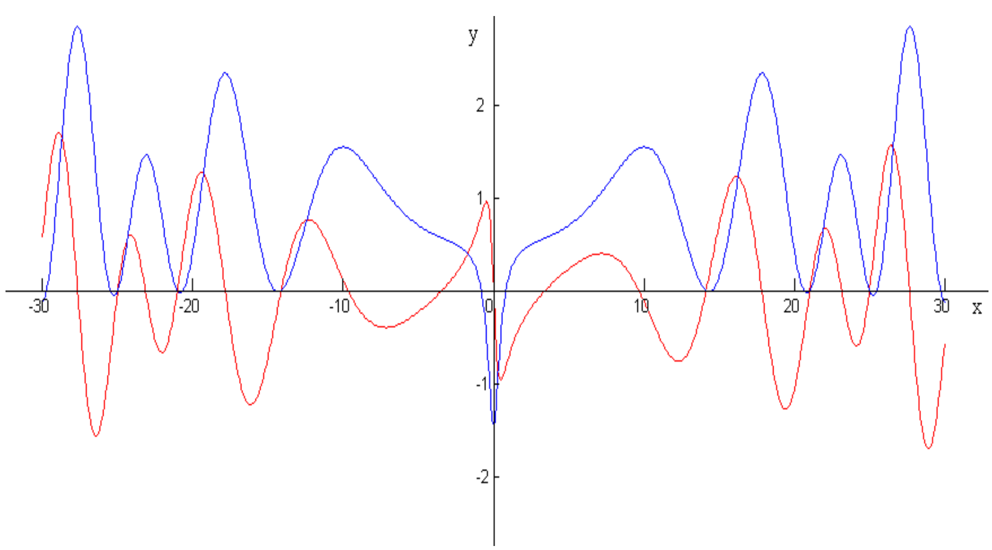
• Nulové body se objevují v komplexně sdružených dvojicích. Jinými slovy, je-li z nulový bod, je i $\overline{z}$ nulový bod.

• Jejich reálné části jsou symetrické podle kritické přímky. Tedy jestliže existuje nějaký nulový bod mimo kritickou přímku, pak jeho zrcadlový obraz podle kritické přímky je také nulovým bodem.

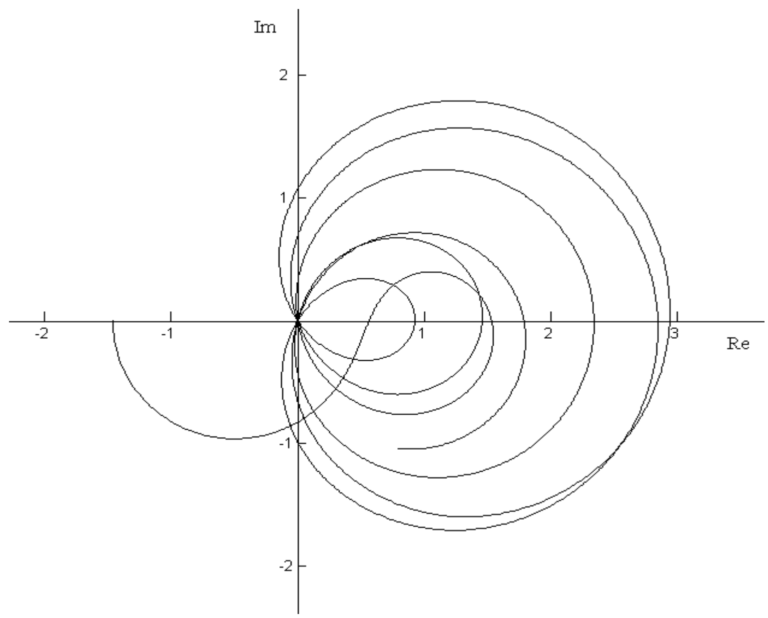
[3] Označujeme $Re(s)$ a $Im(s)$ reálnou a imaginární část komplexního čísla s.



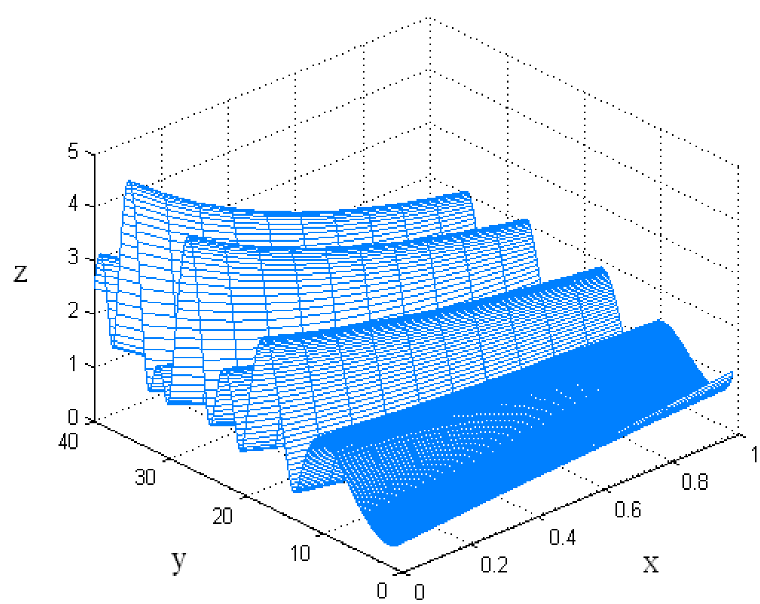
Obrázek 8: Kritická přímka (čárkovaně) a kritický pás (stínovaně) [1]



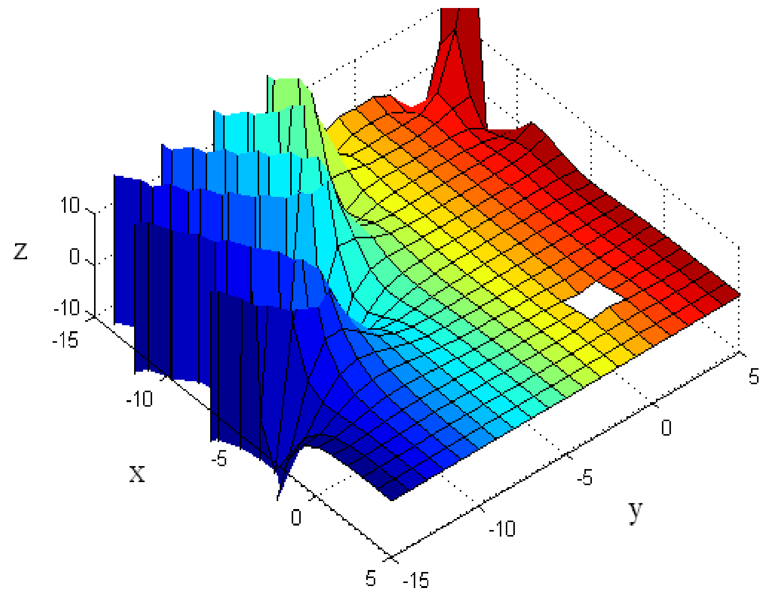
Obrázek 9: Modře funkce $y = Re\Big(\zeta(1/2 + ix)\Big)$, červeně $y = Im\Big(\zeta(1/2 + ix)\Big)$



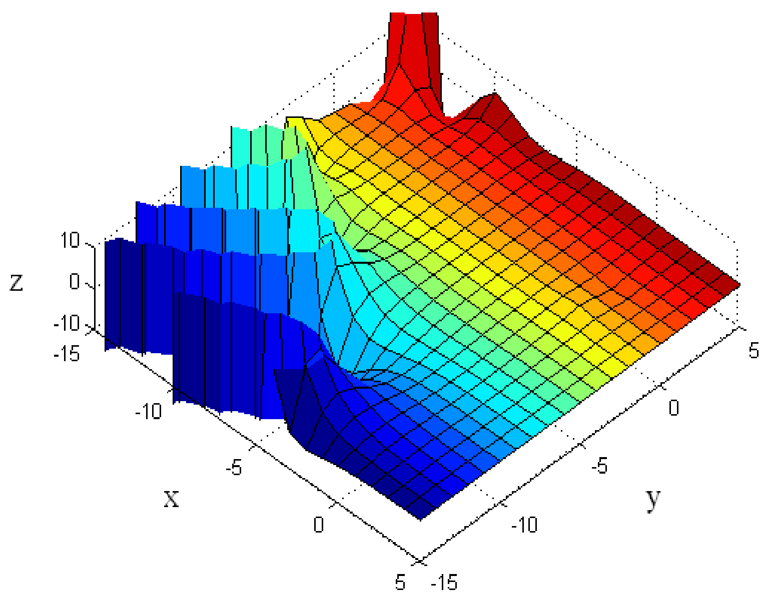
Obrázek 10: Graf funkce $\zeta(1/2 + ix)$, kde x probíhá od 0 do 40



Obrázek 11: Graf funkce $z = \left|\zeta(x + iy)\right|$



Obrázek 12: Graf funkce $z = Re\Big(\zeta(x+iy)\Big)$



Obrázek 13: Graf funkce $z = Im\Big(\zeta(x+iy)\Big)$

5.4 Historie a význam

Souvislost mezi prvočísly a funkcí zeta pomocí proslulého Eulerova součinu

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}, \tag{8}$$

který se poprvé objevil, i když v trochu jiném tvaru, v článku s názvem *Variae observationes circa series infinitas* („Různé poznámky o nekonečných řadách") napsaném Leonhardem Eulerem [8]. Důkaz této rovnosti je vlastně postup, jakým Euler k této souvislosti došel a je následující:

Funkce zeta na levé straně je pro připomenutí ve tvaru

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} + \dots \tag{9}$$

Součin na pravé straně, který je přes všechna prvočísla, je tvaru

$$\prod_p (1 - p^{-s})^{-1} = \frac{1}{1 - 2^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 3^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 5^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 7^{s}} \cdots \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Nyní vynásobíme obě strany rovnosti (9) číslem $1/2^s$ a dostaneme

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{10^s} + \frac{1}{12^s} + \frac{1}{14^s} + \frac{1}{16^s} + \frac{1}{18^s} + \dots \tag{10}$$

Teď výraz (10) odečteme od (9), což nám dá

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{17^s} + \frac{1}{19^s} + \dots \tag{11}$$

Odečtení vyloučilo všechny členy se sudým jmenovatelem a zůstaly nám jen členy s lichým jmenovatelem. Pokračujeme tak, že obě strany (11) vynásobíme číslem $1/3^s$:

$$\frac{1}{3^s}\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \frac{1}{27^s} + \frac{1}{33^s} + \frac{1}{39^s} + \frac{1}{45^s} + \frac{1}{51^s} + \dots \tag{12}$$

Nyní odečteme výraz (12) od (11):

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{17^s} + \frac{1}{19^s} + \frac{1}{23^s} + \frac{1}{25^s} + \frac{1}{29^s} + \dots \tag{13}$$

Z nekonečného součtu zmizely všechny násobky tří. Dále vynásobíme obě strany (13) číslem $1/5^s$:

$$\frac{1}{5^s}\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=\frac{1}{5^s}+\frac{1}{25^s}+\frac{1}{35^s}+\frac{1}{55^s}+\frac{1}{65^s}+\frac{1}{85^s}+\frac{1}{95^s}+\frac{1}{115^s}+\ldots \quad (14)$$

Odečtením (14) od (13) dostaneme

$$\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=1+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\frac{1}{17^s}+\frac{1}{19^s}+\frac{1}{23^s}+\frac{1}{29^s}+\frac{1}{31^s}+\ldots$$

Je vidět, že při odčítání pravých stran vynecháváme samotné prvočíslo spolu s jeho násobky. Kdybychom v tomto postupu pokračovali až do nekonečna, je zřejmé, že dojdeme k rovnosti

$$\ldots\left(1-\frac{1}{11^s}\right)\left(1-\frac{1}{7^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=1 \quad (15)$$

Vydělením obou stran rovnice (15) postupně všemi výrazy v závorkách dostaneme výsledný vzorec , který jsme chtěli dokázat

$$\zeta(s)=\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}\frac{1}{1-\frac{1}{7^s}}\frac{1}{1-\frac{1}{11^s}}\cdots=\prod_p(1-p^{-s})^{-1}$$

Jak součet na levé straně, tak i součin na pravé pokračují do nekonečna. To ve skutečnosti poskytuje další důkaz, že prvočísel je nekonečně mnoho. Kdyby jich totiž byl konečný počet, pak by i součin na pravé straně měl konečný počet členů a pro každé číslo s by měl určitou konečnou hodnotu. Když $s=1$, pak na levé straně dostaneme harmonickou řadu z kapitoly 5.1, která diverguje. A protože nekonečno na levé straně rovnice se nemůže rovnat konečnému číslu napravo, musí být prvočísel nekonečně mnoho.

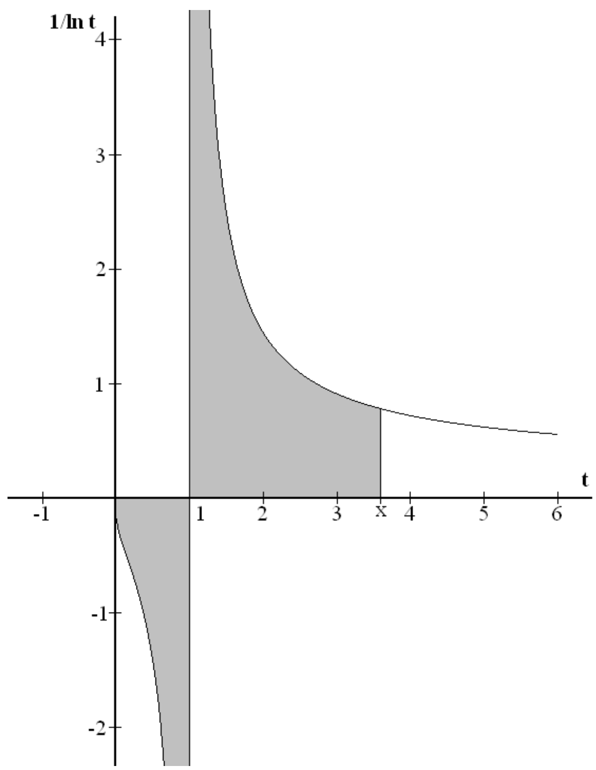
Problému s rozložením prvočísel poprvé věnovali pozornost Gauss a Legendre na konci 18. století. Gauss, v dopise hvězdáři Henckemu z roku 1849, uvedl, že již v dávných letech přišel na to, že počet prvočísel $\pi(x)$ od nuly až do x se dá dobře aproximovat funkcí

$$Li(x)=\int_0^x \frac{dt}{\ln t}. \quad (16)$$

Protože funkce $1/\ln t$ na pravé straně rovnosti (16) není v bodě 1 definovaná, musíme integrovat ve smyslu hlavní hodnoty, tzn. že si rovnost (16) přepíšeme do tvaru

$$Li(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\ln t} \Big),$$

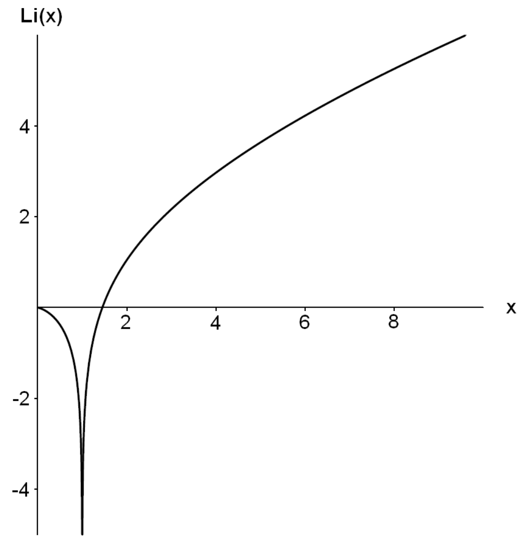
což je konečné číslo. Tato funkce má název "logaritmická integrální funkce" a obvyklý symbol pro ni je právě $Li(x)$ (někdy také $li(x)$). Definuje se jako "obsah obrazce pod grafem funkce $1/\ln t$ od nuly do x", což můžeme vidět na Obrázku 14.



Obrázek 14

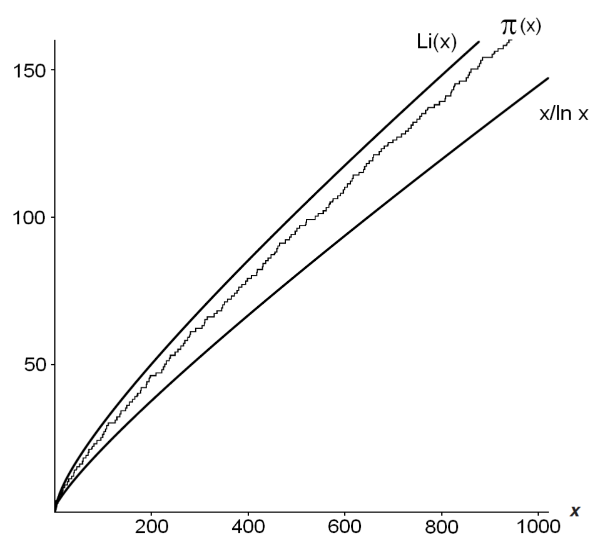
$Li(x)$ je vybarvená plocha braná záporně vlevo od $t = 1$ a kladně vpravo.

Obrázek 15 je graf funkce $Li(x)$. Všimněme si, že pro $x < 1$ nabývá záporných hodnot (protože obsah toho obrazce na Obrázku 14 bereme se záporným znaménkem), pro $x = 1$ klesne do $-\infty$ a pro $x > 1$ se záporný obsah postupně zruší kladným, takže $Li(x)$ se vrátí z minus nekonečna, dosáhne nulu (tj. záporný obsah se zcela vyruší) a dále už neustále roste.



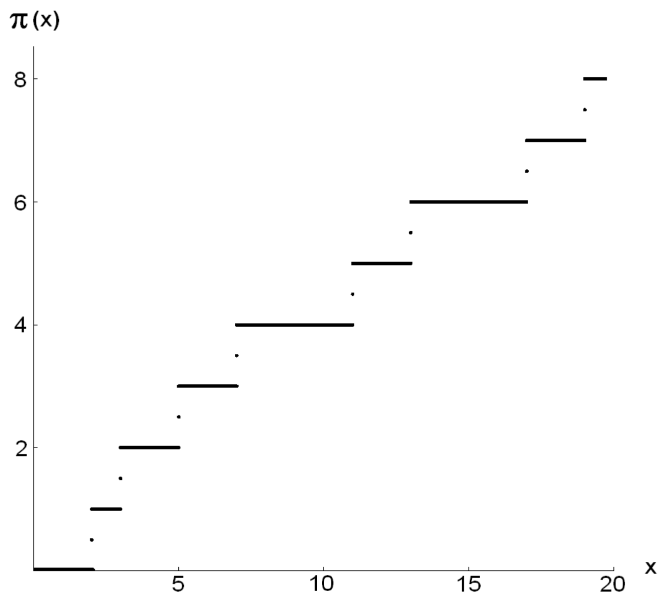
Obrázek 15

Celkem vidíme, že když x roste, pak $Li(x) \sim x/\ln x$. Přitom PČV tvrdí, že $\pi(x) \sim x/\ln x$. Tedy za platnosti PČV musí být nutně pravda, že $\pi(x) \sim Li(x)$, což potvrzuje Gaussovo zjištění. Stojí tedy za zmínku, že přesné vyjádření $\pi(x) \sim Li(x)$ je ve skutečnosti častější formulace PČV, protože $Li(x)$ jak můžeme vidět na Obrázku 16 je mnohem lepší odhad hodnoty $\pi(x)$.



Obrázek 16

Na Obrázku 17 je znázorněn graf funkce $\pi(x)$. Když proměnná x spojitě probíhá svým definičním oborem, tedy oborem všech nezáporných čísel, $\pi(x)$ bude zjevně dělat náhlé skoky. Takovéto funkci se říká *jednoduchá funkce* a obvykle se pro ně zavádí následující dohoda. Přesně v tom bodě, kde funkce skočí, jí přiřadíme hodnotu v polovině jejího skoku. Například pro argument $12,9$; $12,99$ nebo $12,9999$ je funkční hodnota rovna 5; pro argument $13,1$; $13,01$; nebo $13,00001$ je rovna 6; ale pro argument 13 je rovna $5,5$.



Obrázek 17 [1]

Nyní zavedeme další funkci, opět jednoduchou. Riemann ji ve své práci z roku 1859 nazývá funkce "f", ale protože od Riemannových časů si matematici zvykli používat "f" pro označení jakékoliv funkce, tak si ji označíme J. Pro každé nezáporné x je funkce J dána vztahem

$$J(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \frac{1}{4}\pi(\sqrt[4]{x}) + \frac{1}{5}\pi(\sqrt[5]{x}) + \cdots \qquad (17)$$

Uvědomme si, že to není nekonečná řada, protože ať počítáme odmocniny z jakéhokoliv velkého čísla, dříve či později klesnou pod 2 a od tohoto okamžiku jsou všechny sčítance rovny nule. Nyní potřebujeme vyjádřit $\pi(x)$ pomocí $J(x)$.

Aplikujeme-li na vzorec (17) Möbiovu inverzi [9], dojdeme k výsledku [1]

$$\pi(x) = J(x) - \frac{1}{2}J(\sqrt{x}) - \frac{1}{3}J(\sqrt[3]{x}) - \frac{1}{5}J(\sqrt[5]{x}) + \frac{1}{6}J(\sqrt[6]{x}) - \frac{1}{7}J(\sqrt[7]{x}) + \frac{1}{10}J(\sqrt[10]{x}) - \ldots, \tag{18}$$

což se dá také napsat ve tvaru

$$\pi(x) = \sum_n \frac{\mu(n)}{n} J(\sqrt[n]{x}),$$

kde μ je Möbiova funkce [9]. Rovnice (18) tedy vyjadřuje $\pi(x)$ pomocí $J(x)$, což je pro nás důležité, protože Riemann dále našel způsob, jak vyjádřit $J(x)$ pomocí funkce ζ a to inverzí tohoto vztahu [1]

$$\frac{1}{s}\zeta(s) = \int_0^\infty J(x) x^{-s-1} dx. \tag{19}$$

Z toho plyne, že se prvočíselná funkce $\pi(x)$ dá vyjádřit pomocí funkce ζ. A to je přesně to, do čeho se Riemann pustil, protože pak všechny vlastnosti funkce π jsou nějakým způsobem zakódovány ve vlastnostech funkce ζ. Funkce π náleží do teorie čísel zatímco funkce ζ patří do analýzy a infinitesimálního počtu[4]. Dalo by se tedy říci, že Riemann "postavil most přes propast mezi nimi", dosáhl mocného výsledku v analytické teorii čísel.

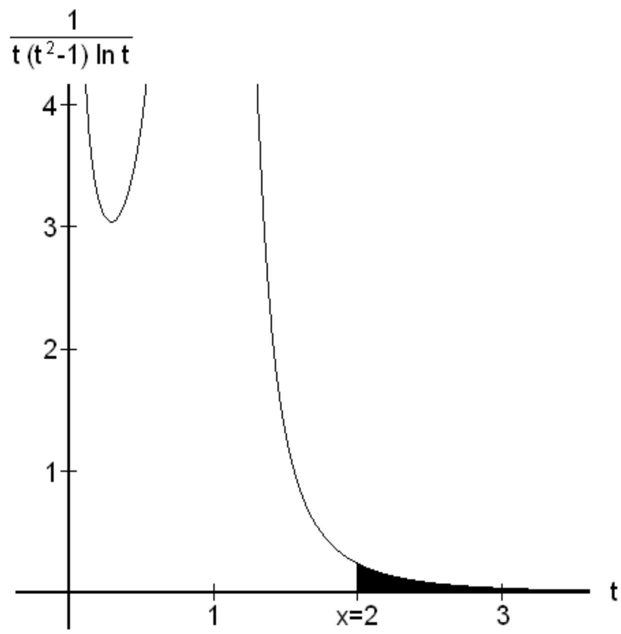
Nyní si ale ukažme, jak to souvisí s netriviálními nulovými body funkce zeta. Vzorec (20) ukazuje výsledek poslední iverze, tedy definitivní a přesné vyjádření $J(x)$ pomocí funkce zeta:

$$J(x) = Li(x) - \sum_\rho Li(x^\rho) - \ln 2 + \int_x^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t}. \tag{20}$$

Především poznamenejme, že tato rovnice je hlavním výsledkem Riemannova článku [11] z roku 1859. Podívejme se na ni tedy blíže. První člen, $Li(x)$, se všeobecně nazývá "hlavní člen". Druhý člen, $\sum_\rho Li(x^\rho)$, pojmenoval Riemann jako "periodické členy" a to pro to, že skáčou nepravidelně z kladných hodnot do záporných a naopak (přesněji řečeno nejsou "periodické", ale jen "oscilatorické").

[4]Infinitesimální počet je souhrnný název pro diferenciální a integrální počet.

Třetí člen je zřejmý, je to pouhé číslo $\ln 2$, což je rovno $0,6931471806\ldots$. Se čtvrtým členem se taky vypořádáme docela snadno. Je to integrál, čili obsach plochy pod grafem funkce $1/\big(t(t^2-1)\ln t\big)$ od bodu x až do nekonečna (Obrázek 18).



Obrázek 18

Uvědomme si ale, že se nezajímáme o hodnoty x menší než 2, protože pro ně je hodnota $J(x)$ vždycky rovna nule. Znamená to, že vybarvená oblast je největší možná hodnota, které může integrál dosáhnout. Její číselná hodnota, tedy maximální hodnota čtvrtého členu, je $0,1400101011\ldots$. Vidíme, že třetí a čtvrtý člen výrazu s příslušnými znaménky nám dohromady dá velmi malé číslo a protože hodnoty $\pi(x)$ jsou opravdu zajímavé až v řádech milionů a bilionů, tak se není třeba těmito členy příliš zabývat.

O hlavním členu jsme se již zmínili v kapitole 4, kde jsme uvedli PČV ve tvaru $\pi(N) \sim Li(N)$ a dále v kapitole 5.4, kde jsme definovali funkci $Li(x)$ jako obsah obrazce pod grafem funkce $1/\ln t$ od nuly do x, takže zjistit hodnotu tohoto členu taktéž není problém.

Zbývá nám rozebrat druhý člen, $\sum_\rho Li(x^\rho)$, což je jádro celého problému. Sčítací index ρ totiž značí netriviální nulové body Riemannovy funkce zeta! Abychom tedy tento člen spočetli, musíme sečíst $Li(x^\rho)$ pro všechny tyto kořeny tak, že ρ nabývá hodnoty těchto kořenů jednoho po druhém. Jak se ale tyto nulové body objevily ve vzorci (20)? Naznačíme zde část Riemannova postupu.

Vzpomeňme si na rovnost (19). Řekli jsme si, že Riemann tento vzorec invertoval tak, aby dostal vyjádření $J(x)$ pomocí funkce zeta. Jedním z kroků této inverze je totiž právě vyjádření funkce zeta pomocí jejich nulových bodů.

Definice 5.1. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina. Řekneme, že komplexní funkce f je holomorfní na G, jestliže $f'(z)$ existuje ve všech bodech množiny G.*

Funkce jejíž oborem jsou všechna komplexní čísla a která je holomorfní na této množině se nazývá *celistvá funkce*. Naneštěstí Riemannova funkce zeta celistvá není, protože její hodnota není definovaná pro argument roven 1. Riemann si ale s tímto problémem poradil a v průběhu onoho složitého procesu inverze transformoval funkci zeta na "něco trochu jiného" - na celistvou funkci, jejíž nulové body jsou přesně všechny netriviální nulové body funkce zeta. Nyní mohl tuto nepatrně se lišící funkci zapsat pomocí těchto nulových bodů (výhodou bylo, že triviální nulové body během transformace zmizely). Takhle tedy po jistých dalších úpravách dojdeme ke druhému členu výrazu (20).

Nyní se na tento člen podívejme podrobněji. Máme tedy reálné číslo x, které když umocníme na ρ, dostaneme komplexní číslo a pokud je Riemannova hypotéza pravdivá, pak má tvar $1/2 + it$ pro $t \in \mathbb{R}$. Dále najdeme hodnoty funkce Li ve všech těchto (nekonečně mnoha) bodech, což jsou také komplexní čísla. Jak se jich tedy zbavíme, když $J(x)$ má být reálné číslo? K tomu nám pomůže právě symbol sumy. Uvědomme si, že ke každému nulovému bodu v horní polovině kritické přímky existuje odpovídající nulový bod v její dolní polovině. Když provádíme tento součet, hraje právě dolní polovina kritického pásu významnou roli. Máme tedy komplexní číslo $(a + bi)$ a jemu odpovídající $(a - bi)$. Jejich sečtením dostaneme $2a$, což je reálné číslo.

Dále ještě potřebujeme zajistit konvergenci této řady. Reálné části sčítanců mohou být kladné i záporné, tedy řada, kterou nám tento součet připomíná je alternující řada $\eta(s)$ z kapitoly 5.2 pro $s = 1$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots, \tag{21}$$

která konverguje. Způsob konvergence snadno zjistíme podle následující definice:

Definice 5.2. *Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.*
Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relativně, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje.

V našem případě je $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ a tedy
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ konverguje (viz. kapitola 5.2)
$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje (viz. kapitola 5.1),
z čehož plyne relativní konvergence řady (21).

Závisí to ale na tom, abychom sčítali ve správném pořadí a to tak, že bereme nulové body jeden po druhém, spárujeme jej s jeho komplexně sdruženým nulovým bodem a takto postupujeme směrem vzhůru po kritické přímce. To znamená, že bereme nulové body v tomto pořadí:

$\frac{1}{2} + 14,134725i$ a $\frac{1}{2} - 14,134725i$, potom
$\frac{1}{2} + 21,022040i$ a $\frac{1}{2} - 21,022040i$, potom
$\frac{1}{2} + 25,010858i$ a $\frac{1}{2} + 25,010858i$, atd.

Jde vlastně o komutativní zákon, tzv. přerovnání řady, které je definováno:
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je číselná řada a posloupnost $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je permutaci množiny $\mathbb{N}$ (tj. je to posloupnost, v níž se každé přirozené číslo vyskytuje právě jednou). Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ se nazývá přerovnání řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 5.1 (Riemannova věta)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relativně, pak existuje přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, kde $s \in \mathbb{R}$. Dále existuje přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ určitě diverguje a existuje přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} a_{q_n}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{q_n}$ osciluje.*

Důkaz Riemannovy věty najdeme v literatuře [3].

Celkem jsme ukázali velmi úzký vztah mezi rozložením prvočísel, což je vyjádřeno funkcí $\pi(x)$, a netriviálními nulovými body funkce zeta. A také to, že tím zprostředkovatelem mezi nimi je právě funkce J zapsána pomocí ζ. Největší zásluhu má však oslňující práce Bernharda Riemanna z roku 1859 a i když dnes toho víme mnohem více než tehdy, tak velká otázka, poprvé vyjádřena v této práci, zůstává stále nevyřešena.

Na první pohled se možná zdá, že Riemannova hypotéza je pravděpodobně pouze zajímavá vlastnost speciální funkce $\zeta(s)$ a že sám Riemann tento názor přijal. Jeho vlastní slova, která následují tvrzení ekvivalentní hypotéze, byla: "Bezpochyby by bylo žádoucí mít precizní důkaz tohoto tvrzení, nicméně po několika zběžných marných pokusech jsem zanechal snahy takový důkaz najít, protože není nezbytný pro bezprostřední cíl mého bádání." To je pravda. Hypotéza neměla zásadní význam pro myšlenky, které Riemann sledoval, a proto ji ponechal bez důkazu. V již zmíněném článku "O počtu prvočísel menších než daná hodnota" [11] z roku 1859 je uvedeno několik dalších tvrzení, která jsme si uvedli a která nejsou důkladně dokázána - včetně hlavního výsledku Riemannovy práce.

Závěr

Riemannova hypotéza je, navzdory snaze a odhodlání stovek matematiků, stále nedokázána (stále zůstává pouhou hypotézou). Důkaz pravdivosti hypotézy je jistě klíčovým krokem i ve výzkumu mnoha jiných vědeckých problémů, některých zdánlivě naprosto nesouvisejících s teorií čísel. Protože již tak dlouho si ani ty nejlepší "matematické mozky" neumějí s problémem poradit, mohlo by se zdát, že hypotéza je spíše chybná než pravdivá. Do dnešní doby je však známo, že platí přibližně pro $1,5$ miliardy nulových bodů funkce zeta. Tento fakt je úžasný, ale zároveň dost frustrující!

Cílem této bakalářské práce bylo popsat Riemannovu hypotézu, kde jsme se v kapitole 5 nejprve věnovali Riemannově funkci zeta a jejímu rozšíření do roviny komplexních čísel. Funkci zeta jsme dále ilustrovali na obrázcích, abychom viděli její průběh alespoň na částech jejího definičního oboru jak v reálných tak v komplexních číslech. Následně jsme vyslovili znění Riemannovy hypotézy a ukázali si, jak souvisí s prvočíselnou větou, která je vyslovena v kapitole 4. Dalším cílem bylo vytvoření příslušných hesel na českou wikipedii. Na tuto internetovou stránku bylo přidáno heslo pro Clayův matematický ústav a doplněna hesla o Prvočíselné větě, Bernhardu Riemannovi, Riemannově funkci zeta a Riemannově hypotéze.

Riemannova hypotéza jako jeden z nevyřešených problémů milénia mě zaujala a proto jsem si ji vybrala jako téma své bakalářské práce. Při psaní této práce jsem se dozvěděla mnoho nových informací, prohloubila si znalosti v matematickém softwaru Matlab a typografickém systému TEX, kterým je práce vysázena.

Na úplný závěr bych citovala Andrew Odlyzka a jeho mínění o Riemannově hypotéze: "Říkalo se, že kdokoliv by dokázal prvočíselnou větu, stal by se nesmrtelným. A opravdu, Hadamard a de la Vallée Poussin se dožili téměř sta let. Možná, že z toho vyplývá jistý důsledek. Možná, že Riemannova hypotéza je nesprávná; ale pokud někdo opravdu dokáže její platnost – tedy nalezne nulový bod mimo kritickou přímku – zasáhne ho v tom okamžiku smrt, a jeho výsledek se nikdo nikdy nedozví."

Příloha

Zdrojový kód pro Tabulku 1 [18]

```
function pocet = erato(x)  % Eratosthenovo síto: vrací všechna
                           % prvočísla od 0 do x.
 P = [0 2:x] ;             % Vytvoří vektor všech celých čísel
                           % od 2 do x, kde na pozici 1 je
                           % nastavena 0 protože 1 není prvočíslo.
 for (n=2:sqrt(x))         % Každý prvočíselný dělitel čísla x
                           % leží mezi 2 a odmocninou z x.
    if P(n)                % Jestliže tato hodnota není 0
       P((2*n):n:x) = 0 ;  % (tj. prvočíslo), pak všechny
                           % jeho násobky nahradí nulou.
 end                       % V tomto bodě obsahuje vektor P pouze
                           % prvočísla a nuly.
 P = P(P ~= 0) ;           % Odstraní z P všechny nuly a ponechá
                           % pouze prvočísla.
pocet=size(P,2);           % Vypíše počet prvočísel.
```

Zdrojový kód pro Obrázek 2

```
clear
X = [1:0.1:4];
axescenter
plot(X,zeta(X),'k')
axis([-4 4 -5 5])
```

Pro Obrázky 4, 5, 6 a 7 použijeme stejný zdrojový kód, akorát se mění rozsah X.

Zdrojový kód pro Obrázek 3

```
clear
X = [-5:0.0001:5];
axescenter
plot(X,gamma(X),'k')
axis([-6 6 -5 5])
```

Zdrojový kód pro Obrázek 9

```
clear
X = [-30:0.1:30];
C = complex(0.5,X);
Y = imag(zeta(C));
Z = real(zeta(C));
plot(X,Y,'r')
axescenter
axis([-33 33 -3 3])
hold on
plot(X,Z,'b')
```

Zdrojový kód pro Obrázek 10

```
X = [0:0.01:40];
C = complex(0.5,X);
Y = imag(zeta(C));
Z = real(zeta(C));
plot(Z,Y,'k')
axescenter
axis([-4 4 -3 3])
```

Zdrojový kód pro Obrázek 11

```
clear
x=[0:0.1:1];
y=[1:0.1:40];
[X,Y] = MESHGRID(x,y);
M=X+i*Y;
N=zeta(M);
Z=abs(N);
mesh(X,Y,Z,Y)
```

Zdrojový kód pro Obrázek 12

```
clear
x = [-15:5];
y = [-15:5];
[X,Y] = MESHGRID(x,y);
M = X+i*Y;
N = zeta(M);
Z = real(N);
surf(X,Y,Z,Y)
axis([-15 5 -15 5 -10 10])
```

Zdrojový kód pro Obrázek 13

```
clear
x = [-15:5];
y = [-15:5];
[X,Y] = MESHGRID(x,y);
M = X+i*Y;
N = zeta(M);
Z = imag(N);
surf(X,Y,Z,Y)
```

```
axis([-15 5 -15 5 -10 10])
```

Zdrojový kód pro Obrázek 15

```
clear
x = [0:0.001:8];
y = mfun('Li',x);
axescenter
plot(x,y,'k')
axis([-7 7 -4 4])
```

Zdrojový kód pro Obrázek 16

```
clear
x = [1:1000];
hold off
plot(x,x./log(x),'k')
hold on
y = [];
for i = 1:1:1000
    y = [y,erato(i)];
end
plot(x,y,'k')
hold on
z = mfun('Li',x);
plot(x,z,'k')
```

Literatura

[1] Derbyshire J.: Posedlost prvočísly. Academia, Praha, 2007

[2] Devlin K.: Problémy pro třetí tisíciletí. Argo a Dokořán, Praha, 2005

[3] Došlá Z., Novák V.: Nekonečné řady. Masarykova univerzita, Brno, 2002

[4] Aubert K. E., Bombieri E., Goldfeld D.: Number Theory, Trace Formulas, and Discrete Groups. Academic Press, Boston, 1989

[5] Landau E.: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Chelsea Publishing Company, New York, 1974

[6] de la Vallée-Poussin Ch. J.: Recherches analytiques la théorie des nombres premiers. Ann. Soc. scient., Brusel, 1896

[7] Hadamard J.: Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. Bulletin Société Mathématique de France, 1896

[8] Sandifer C. E.: The Early Mathematics of Leonhard Euler. The Mathematical Association of America, 2007

[9] Hardy G. H., Wright E. M.: An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford University Press, USA, 1980

[10] Carlson J. a kol.: The Millennium Prize Problems [online]. dostupné z: http://www.claymath.org/library/monographs/MPPc.pdf

[11] Riemann B.: Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegeben Grösse [online]. dostupné z: http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Zeta/

[12] http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1063042/pdf/pnas01544-0034.pdf

[13] http://www.claymath.org/millennium/Rules_etc/

[14] http://www.claymath.org/about/mission.php

[15] http://www.claymath.org/poincare/

[16] http://math.feld.cvut.cz/mt/txte/1/txc3ea1.htm

[17] http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN243919689_0054

[18] http://rosettacode.org/wiki/Sieve_of_Eratosthenes#MATLAB

[19] http://www.wikipedia.org, http://www.wikipedia.cz