Mendelova univerzita v Brně
Provozně ekonomická fakulta

Kvantitativní podpora optimalizace akciového portfolia

Diplomová práce

Vedoucí práce:
doc. Mgr. Ing. Jitka Janová, Ph.D.

Bc. Edita Bumbálková

Brno 2015

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucí předložené diplomové práce, doc. Mgr. Ing. Jitce Janové, Ph.D, za její rady a poznámky. Dále Ing. Martinu Širůčkovi, Ph.D. za nasměrování v počátcích vzniku diplomové práce a všem ostatním, kteří mi v případech nouze pomohli.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto práci: **Kvantitativní podpora optimalizace akciového portfolia** vypracovala samostatně a veškeré použité prameny a informace jsou uvedeny v seznamu použité literatury. Souhlasím, aby moje práce byla zveřejněna v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách ve znění pozdějších předpisů, a v souladu s platnou *Směrnicí o zveřejňování vysokoškolských závěrečných prací.*

Jsem si vědoma, že se na moji práci vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, a že Mendelova univerzita v Brně má právo na uzavření licenční smlouvy a užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 Autorského zákona.

Dále se zavazuji, že před sepsáním licenční smlouvy o využití díla jinou osobou (subjektem) si vyžádám písemné stanovisko univerzity o tom, že předmětná licenční smlouva není v rozporu s oprávněnými zájmy univerzity, a zavazuji se uhradit případný příspěvek na úhradu nákladů spojených se vznikem díla, a to až do jejich skutečné výše.

V Brně dne 20.12.2014 ____________________________

Abstract

Bumbálková, E. *Quantitative stock portfolio optimization support*. The thesis: Brno: Mendel University in Brno, 2014.
The thesis deals with the optimization of the stock portfolio using modern portfolio theory and mathematical programming. Optimization is achieved by Markowitz Model, the Capital Asset Pricing Model and Black-Litterman model. Stocks traded on the Prague Stock Exchange, Inc., are selected as exploration assets. The simulation technique Monte Carlo is used for the model evaluation.

Keywords

Stock portfolio, modern portfolio theory, mathematical programming, Markowitz Model, Capital Asset Pricing Model, Black-Litterman Model, Monte Carlo

Abstrakt

Bumbálková, E. *Kvantitativní podpora optimalizace akciového portfolia*. Diplomová práce. Brno: Mendelova univerzita v Brně, 2014.
Diplomová práce se zabývá optimalizací akciového portfolia s využitím moderní teorie portfolia a matematického programování. Optimalizace je dosaženo využitím Markowitzova modelu, dále pomocí modelu oceňování kapitálových aktiv (CAPM) a Black-Littermanova modelu. Jako zkoumaná aktiva byly vybrány akcie obchodované na Burze cenných papírů Praha, a.s. k evaluaci modelů je použito simulační techniky Monte Carlo.

Klíčová slova

Akciové portfolio, moderní teorie portfolia, matematické programování, Markowitzův model, model oceňování kapitálových aktiv, Black-Littermanův model, Monte Carlo

Obsah

1 Úvod, cíl a metodika práce 11

1.1 Úvod 11

1.2 Cíl práce 11

1.3 Metodika 11

2 Investování 13

3 Portfolio 14

3.1 Typy portfolií 14

3.2 Teorie portfolia 15

3.3 Motivy sestavování portfolia 15

3.4 Správa portfolia 16

3.5 Typy investičních strategií ve vztahu ke způsobům správy portfolia 17

3.6 Význam portfolia pro manažerské rozhodování 17

3.7 Sestavení portfolia 18

3.8 Charakteristiky aktiv a portfolia 19

3.8.1 Očekávaný výnos aktiva a portfolia 20

3.8.2 Riziko aktiva a portfolia 22

3.8.3 Likvidita aktiva 24

4 Optimalizace portfolia 25

5 Modely používající se při optimalizaci portfolia 26

5.1 Markowitzův model 26

5.2 Model oceňování kapitálových aktiv 34

5.3 Black-Littermanův model 39

6 Validace a evaluace modelu 42

6.1 Metoda Monte Carlo 42

6.2 Evaluace modelu 43

6.2.1 Sharpův index 43

7 Úvod praktické části 44

7.1 Burza cenných papírů Praha ... 44

7.2 Zadání úlohy ... 45

8 Výpočet ukazatelů jednotlivých aktiv 47

9 Hledání optimálního portfolia 52

9.1 Markowitzův model ... 52

9.2 Přímka kapitálového trhu CML ... 56

9.3 Přímka cenného papíru SML ... 60

9.4 Black-Littermanův model ... 63

10 Validace modelů a evaluace portfolií 68

10.1 Simulace denních výnosností aktiv ... 68

10.2 Evaluace portfolií ... 69

11 Diskuse 71

12 Závěr 73

13 Literatura 74

13.1 Internetové zdroje ... 75

A Kovarianční a korelační matice historických výnosností 78

B Kovarianční matice Black-Littermanova modelu 80

C Kovarianční matice ze simulace Monte Carlo 81

Seznam obrázků

Obr. 1 Investorova indiferenční mapa (Hagin, 2004) 28

Obr. 2 Indiferenční křivky investorů s různým vztahem k riziku (Hagin, 2004) 28

Obr. 3 Neefektivní množina investičních variant (Hagin, 2004) 29

Obr. 4 Efektivní množina investičních variant (Hagin, 2004) 30

Obr. 5 Srovnání rozdělení pravděpodobných výnosů (Hagin, 2004) 30

Obr. 6 Dvě hypoteticky perfektně korelované investice (Hagin, 2004) 31

Obr. 7 Dvě hypoteticky perfektně nekorelované investice (Hagin, 2004) 31

Obr. 8 Hypotetická efektivní hranice odvozená z investic X a Y 32

Obr. 9 Optimální portfolio (Hagin, 2004) 33

Obr. 10 Přímka kapitálového trhu CML (Sharpe, 1994) 35

Obr. 11 Přímka trhu cenných papírů SML (Sharpe, 1994) 36

Obr. 12 Vztah výnosnosti a rizikovosti jednotlivých aktiv 51

Obr. 13 Přímka CML 58

Obr. 14 Přímka SML 61

Seznam tabulek

Tab. 1 Báze indexů PX a PX-TR za roky 2009-2013 46

Tab. 2 Průměrné denní očekávané výnosnosti aktiv 47

Tab. 3 Vyplacené dividendy za léta 2009-2013 47

Tab. 4 Porovnání kapitálové a celkové výnosnosti 48

Tab. 5 Rozptyly a směrodatné odchylky denních výnosností 49

Tab. 6 Anualizované výnosnosti, směrodatné odchylky a rozptyly 50

Tab. 7 Optimální řešení Markowitzova modelu 54

Tab. 8 Řešení maximalizace poměru výnosnosti k rizikovosti portfolia 56

Tab. 9 Optimální řešení pro model CML 57

Tab. 10 Optimální řešení úlohy maximalizace Sharpova indexu 60

Tab. 11 Hodnoty konstanty α, koeficientu β a roční rovnovážné očekávané výnosnosti pro jednotlivá aktiva 60

Tab. 12 Lineární výnosnost a rozptyl chybového členu ε_i 62

Tab. 13 Optimální řešení pro model SML 63

Tab. 14 Rizikové prémie jednotlivých aktiv 65

Tab. 15 Odhad středních hodnot výnosů E[R] pro jednotlivá aktiva – nízká důvěra v názory 66

Tab. 16 Odhad středních hodnot výnosů E[R] pro jednotlivá aktiva – vysoká důvěra v názory 66

Tab. 17 Výnosnost, rizikovost portfolia při maximalizaci užitkové funkce v programu MATLAB 66

Tab. 18 Výnosnost, rizikovost portfolia při maximalizaci užitkové funkce v programu LINGO 67

Tab. 19 Váhy jednotlivých aktiv pro případ nízké a vysoké důvěry v programu MATLAB 67

Tab. 20 Váhy jednotlivých aktiv pro případ nízké a vysoké důvěry v programu LINGO 67

Tab. 21 Výnosnosti, rozptyly a směrodatné odchylky nasimulovaných dat 68

Tab. 22 Celková výnosnost po zdanění po započítání dividend 69

Tab. 23 Evaluace portfolií 70

Tab. 24 Výnosnosti a rizikovosti portfolií získaných řešením jednotlivých modelů 72

Tab. 25 Kovarianční matice denních výnosností 78

Tab. 26 Korelační matice denních výnosností 78

Tab. 27 Kovarianční matice anualizovaná 79

Tab. 28 Kovarianční matice Black-Littermanova modelu pro nízkou důvěru v expertovy názory 80

Tab. 29 Kovarianční matice Black-Littermanova modelu pro vysokou důvěru v expertovy názory 80

Tab. 30 Anualizované kovarianční matice nasimulovaných výnosností 81

1 Úvod, cíl a metodika práce

1.1 Úvod

Investování je ať už pro fyzickou či právnickou osobu již běžnou činností. Fyzické osoby investují pro svoji finanční nezávislost. Společnosti alokují své volné finanční prostředky s cílem zvýšit svá aktiva, která poté budou moci použít pro svůj další rozvoj. Investování je tudíž každodenní aktivitou dnešního světa. S investicemi ale nesouvisí pouze zisky. Investoři musí brát v potaz i ztráty, kterých mohou v případě vložení financí do nesprávné investice dosáhnout. Velikost zisků i ztrát tak leží v rukou investorů a je založena na jejich investiční strategii.

Jednou z nejvíce rozšířených metod pro výběr strategie a složení investičního portfolia je moderní teorie portfolia, se kterou přišel Harry Max Markowitz. Přestože obsahuje mnohé zjednodušující předpoklady, její výsledky lze použít při vysvětlení vztahu mezi rizikovostí a výnosností optimálního portfolia. Postupem času se původní teorie portfolia začala rozšiřovat a vyvíjet až do podoby modelu oceňování kapitálových aktiv, který rozšiřuje portfolio rizikových aktiv o bezrizikovou investici, přímku kapitálového trhu CML a přímku cenného papíru SML. Teorie portfolia se poté vyvíjela dalšími směry, mezi které patří i Black-Littermanův model. Black s Littermanem vytvořili model, do kterého bylo možno navíc integrovat názory experta, což bylo něco nového. Dali tak teorii portfolia nový rozměr.

V této práci budou postupně popsány modely výše zmíněných autorů. Předtím bude ale vysvětleno, co se za samotným pojmem portfolia skrývá, a to včetně motivů jeho sestavování, způsobu tvorby, jeho charakteristik a dalších. Následně bude ukázáno využití jednotlivých modelů na konkrétním příkladu za využití akciových titulů obchodovaných na Burze cenných papírů Praha, a.s. Bude tak možné posoudit jejich výsledky v závislosti na omezeních jednotlivých modelů.

1.2 Cíl práce

Cílem této diplomové práce je sestavení optimálního portfolia z akciových titulů obchodovaných na Burze cenných papírů Praha, a.s., které maximalizuje výnos a minimalizuje riziko, a to za využití Markowitzova modelu, modelu oceňování kapitálových aktiv a Black-Littermanova modelu.

Dílčími cíli jsou určení výnosností a rizikovostí jednotlivých aktiv, jejich vzájemných korelací a kovariancí. Dále zjištění charakteristik výsledných portfolií určených jednotlivými metodami.

1.3 Metodika

Úvodní část práce bude popisovat problematiku investování. Tedy jaké investice jsou možné, typy investic a způsoby jejich financování. Dále bude nastíněna oblast moderní teorie portfolia, jaké existují motivy pro sestavování portfolií a jakým způsobem je možné portfolia spravovat. Následující kapitoly popíšou typy investičních strategií, ze kterých si investoři mohou vybírat, dále jaký význam má tvorba portfolií pro manažerské rozhodování a v neposlední řadě postup, jak portfolio sestavit. Podrobněji budou zmíněny charakteristiky portfolia a způsoby optimalizace portfolia využívající Markowitzův model, metodu oceňování kapitálových aktiv a Black-Littermanův model. Nakonec bude popsán způsob validace a evaluace modelu.

V praktické části bude využito matematických a statistických metod. Nejprve bude představena Burza cenných papírů Praha, a.s., pak zadáno znění úlohy a následně budou shromážděny denní kurzy zvolených aktiv. Poté budou vypočteny statistické charakteristiky jednotlivých aktiv. Následovat bude sestavení jednotlivých modelů pro zadanou úlohu, výpočty charakteristik výsledného portfolia a výsledky modelů, a to za pomoci programů MATLAB a LINGO. Poté budou jednotlivé výsledky mezi sebou porovnány pomocí ukazatelů hodnocení portfolií, a to jak na historických datech, tak na datech získaných simulací Monte Carlo.

2 Investování

Investicí bývají obvykle myšlena kapitálová aktiva zahrnující statky, které nejsou určeny pro okamžitou spotřebu, ale jsou určeny pro použití ve výrobě spotřebních statků či dalších kapitálových aktiv. Investovat může v podstatě kdokoliv. Největší podíl na trhu mají podnikové investice. Podnikové investice představují jednorázově vynaložené finanční zdroje, které budou v budoucnu přinášet peněžní příjmy. (Synek, 2011)

A co může investicí být? Investiční majetek v širším pojetí zahrnuje dlouhodobý hmotný a nehmotný majetek, který je určen pro užití ve vlastní činnosti podniku. (Synek, 2011)

Při investování je důležité brát v potaz dva atributy a těmi jsou čas a riziko. Zdržení se nynější spotřeby se děje v přítomnosti a je jisté, zatímco odměna za toto zdržení přichází později, pokud vůbec, a její velikost je obecně neurčitá. (Sharpe, 1994)

Investice mohou být buď reálné, nebo finanční. Reálnými investicemi jsou myšlena hmotná či nehmotná aktiva, zatímco finanční investice představují kontrakty napsané na papíře. Hmotnou investicí může být výstavba budovy či dopravní cesty, nákup pozemku nebo výrobního zařízení. Nehmotnou investicí je například nákup know-how, softwaru, autorských práv, atd. Na druhé straně finančními investicemi je myšlen nákup cenných papírů, jako jsou obligace, zástavní listy či akcie. V této práci bude později pracováno pouze s finančními investicemi. (Sharpe, 1994; Synek, 2011)

Investice je v podniku možné financovat několika způsoby. Jednou z možností jsou vlastní zdroje, kam patří vklady vlastníků nebo společníků, nerozdělený zisk, odpisy a výnosy z prodeje a z likvidace hmotného majetku a zásob. Druhou variantou jsou cizí zdroje, což je investiční úvěr, obligace, dlouhodobé rezervy, splátkový prodej, leasing, rizikový kapitál či dotace ze státního nebo místního rozpočtu nebo prostředky z fondů Evropské unie. (Synek, 2011)

A proč podniky vůbec investují? Nejvyšším motivem je především rozmnožení majetku a bohatství vůbec. (Synek, 2011)

3 Portfolio

Portfoliem je označována skupina tržních akcií a ostatních aktiv držených individuálním investorem. Ideální je držet takové portfolio, které má výnosnost co nejvyšší a riziko co nejnižší. Investor se z toho důvodu řídí čtyřmi pravidly:

- ze dvou investic se stejným rizikem je lepší investice s vyšší výnosností
- ze dvou investic se stejnou výnosností je lepší investice s nižším rizikem
- ze dvou investic, kde jedna má vyšší riziko i vyšší výnosnost, si investor vybere tu, která více vyhovuje jeho vztahu k riziku
- je nutné snížit riziko bez snížení výnosnosti, pokud je to možné

(Synek, 2011)

3.1 Typy portfolií

Existuje několik pohledů na rozlišení typů portfolií. Jeden přístup dělí typy portfolia na privátní a institucionální. Privátní typ portfolií náleží jednotlivcům, zatímco institucionální typ může mít více podob. Můžeme do něj zařadit všechny typy fondů kolektivního investování, penzijní fondy, pojišťovny, banky, nefinanční firmy, nadace, vládní instituce a další. (Husárová, 2012)

Druhý přístup člení typy investičních portfolií, z nichž si investor může vybrat, následovně:

- *Agresivní portfolio*. Tento typ portfolia obsahuje investice, které přinášejí vysoký výnos, ale zároveň představují vysoké riziko. Investice zahrnuté v tomto typu portfolia jsou i citlivější na trh jako celek. Velká část agresivních akcií je v počátečních fázích růstu, a proto investor musí vyhledávat společnosti právě v této fázi životního cyklu. Při budování a udržování tohoto typu portfolia je velmi důležité řízení rizik.
- *Defenzivní portfolio*. Investice obsažené v tomto typu portfolia nejsou tolik citlivé na tržní pohyby. Jedná se tedy o akcie, které nekopírují hospodářský cyklus a zároveň přináší relativně vysoké dividendy, které by měly pomoci minimalizovat dopad případných kapitálových ztrát. Toto portfolio je vhodné pro většinu opatrných investorů.
- *Příjmové portfolio*. Tento typ portfolia je podobný defenzivnímu portfoliu. Obsahuje relativně bezpečné akcie, ale měly by investorovi nést vyšší výnosy, například prostřednictvím dividend. Příjmové portfolio je vhodné pro většinu lidí jako doplněk k jinému příjmu.
- *Spekulativní portfolio*. Ze všech ostatních typů představuje spekulativní portfolio pro investora mnohem větší riziko. Funguje zde silný pákový efekt, tudíž investor může dosáhnout vysokých zisků, ale na druhé straně i vysokých ztrát v případě výběru nesprávné investice.
- *Smíšené portfolio*. V tomto případě portfolio obsahuje nejrůznější typy investičních produktů, jako jsou dluhopisy, komodity, nemovitosti či akcie. Smíšené

portfolio je samo o sobě již dobře diverzifikované, pokud obsahuje jednotlivé investiční produkty v daných proporcích.

(trhy.mesec.cz, 2013)

3.2 Teorie portfolia

Na teorii portfolia je nahlíženo jako na mikroekonomickou disciplínu, která zkoumá, jaké kombinace aktiv je dobré držet dohromady, aby takto vytvořené portfolio mělo určité, předem dané vlastnosti.

A kde lze teorii portfolia využít? Existují přibližně čtyři oblasti, kde lze poznatků teorie portfolia využít. Jedná se o:

- *Instituce kolektivního investování*. Portfolio těchto společností tvoří nakoupené cenné papíry a depozita u bankovních i nebankovních institucí. Instituce kolektivního investování portfolio sestavují za účelem dosažení rozumné míry výnosnosti při zachování snesitelné míry rizikovosti, že nebude této předem zvolené míry výnosnosti dosaženo.
- *Řízení aktiv a pasiv obchodních bank*. Na straně aktiv je portfolio tvořeno z velké části poskytnutými úvěry a nakoupenými cennými papíry. Na druhé straně portfolio pasiv obsahuje především přijaté vklady a nakoupené cenné papíry. Pro obchodní banky spočívá význam portfolia při řízení aktiv a pasiv banky ve zkoumání možností, jak zabránit nedostatečné likviditě banky.
- *Měnová portfolia*. Tato portfolia obsahují především cenné papíry znějící na různé měny a nakoupené a vypsané termínované kontrakty znějící na cizí měny. Důvodem pro tvorbu měnových portfolií je minimalizace rizika změny měnových kurzů.
- *Komoditní portfolia*. Takováto portfolia jsou tvořena především termínovanými kontrakty na komodity. Cílem komoditního portfolia je většinou zajistit pro velké společnosti plynulý tok surovin za stabilní ceny.

(Brada, 1996)

3.3 Motivy sestavování portfolia

Existuje hned několik motivů, proč ekonomické subjekty portfolia sestavují. Jedná se například o:

- *Motiv získání kapitálu*. Ekonomický subjekt, který potřebuje získat hotovost, řeší tuto situaci za pomoci některého z finančních zprostředkovatelů, což jsou většinou banky. Nebo se ji snaží získat sám. Velké ekonomické subjekty si mohou finanční prostředky zajistit prostřednictvím emise akcií či dluhopisů. Na druhé straně ekonomický subjekt, který má dočasně volné finanční prostředky, usiluje o jejich zapůjčení.
- *Motiv spekulační*. Některé ekonomické subjekty mohou díky určitým informacím v budoucnu očekávat jisté ekonomické situace, a proto provedou potenci-

álně nadměrně rizikové obchody na peněžních a kapitálových trzích. Při spekulaci může subjekt dosáhnout na jedné straně velkého zisku, na druhé ale i velké ztráty.
- *Motiv arbitráže*. V tomto případě investoři využívají místních a časových rozdílů v cenách obchodovaných aktiv a dosahují tak nadměrných zisků. Na rozdíl od spekulace není arbitráž riziková a nehrozí tak investorovi ztráta.
- *Motiv zajišťovací*. Investoři se snaží pojistit si výnos z portfolia aktiv pro případ, že by došlo k náhlým změnám v ekonomice.

(Brada, 1996)

Teorii portfolia lze klasifikovat podle způsobu sestavování a realizace portfolia. Statická teorie portfolia je použita v případě, kdy je portfolio jednorázově sestaveno v okamžiku sestavení portfolia a požadované vlastnosti by mělo mít v okamžiku realizace portfolia. Dynamická teorie portfolia naproti tomu zkoumá i samotný proces sestavování a realizace portfolia. Nicméně dynamická teorie portfolia je náročná na kvalitu vstupních informací, které ekonomická praxe nemůže poskytnout. (Brada, 1996)

3.4 Správa portfolia

Správa portfolia je proces, jakým jsou spravovány investorovy peníze. Správa portfolia může využívat explicitní nebo implicitní postupy a může být relativně řízená či neřízená. Dále si investor může vybrat mezi aktivní a pasivní správou svého portfolia. (Sharpe, 1994; Brada, 1996)

Při aktivní správě portfolia podle Brady po celou dobu existence portfolia investor vyhledává na trhu nové investiční příležitosti a upravuje složení portfolia podle určitých zásad. Příkladem u akciových portfolií může být nákup či prodej akcií z portfolia na základě metod technické či fundamentální analýzy. Podle Reillyho a Browna vypadá tak, že se správce portfolia snaží překonat vlastní benchmark upravený o riziko. Lze vypočítat tak, že se k očekávanému výnosu připočte alfa. Alfa reprezentuje hodnotu, kterou manažer přidal nebo odebral do investičního procesu. (Brada, 1996; Reilly a Brown, 2009)

U pasivní správy podle Brady nedochází k úpravě složení portfolia po celou dobu trvání portfolia. Zde může být u akciového portfolia příkladem sestavení množiny efektivních portfolií, z nichž si konstruktér vybere takové, které mu bude nejlépe vyhovovat. U Reillyho a Browna vypadá pasivní správa portfolia tím způsobem, že management drží akcie tak, aby výnosy portfolia sledovaly ty z benchmarku v průběhu času. Celkový aktuální výnos je tak složen pouze z rizikové prémie a bezrizikové úrokové míry. Neobsahuje alfu jako aktivní správa. (Brada, 1996; Reilly Brown, 2009)

Se správou portfolia se vážou i určité náklady, které jsou představovány makléřskými poplatky a transakčními náklady. Výhodou pasivní správy portfolia je skutečnost, že není potřeba platit žádné makléřské poplatky za obchodování s cennými papíry. (Brada, 1996)

3.5 Typy investičních strategií ve vztahu ke způsobům správy portfolia

V případě, že si investor vybere aktivní správu portfolia, může si vybrat mezi několika strategiemi:

- *Fundamentální strategie* – odpovídá fundamentální analýze, která je popsána v kapitole 3.7.
- *Technická strategie* – odpovídá technické analýze popsané taktéž v kapitole 3.7.
- *Strategie anomálií a vlastností* – tato strategie se zabývá především charakteristikami samotných společností, a to celkovou kapitalizaci nesplaceného kapitálu společnosti a finanční pozicí společnosti indikovanou například ukazateli jako jsou P/E či P/BV. Mimo to se soustředí na kalendářní anomálie (např. kup každé pondělí, prodej každý pátek) nebo posuzování akcií na základě vztahu mezi finančním ukazatelem a velikostí výnosu. (Reilly a Brown, 2009)

U pasivní správy portfolia má investor na výběr hned ze tří strategií:

- *Plná replikace* – u této strategie jsou všechny akcie v indexu nakoupeny v proporci s jejich váhami v indexu. Tato technika pomáhá zajistit blízké trackování akcií s benchmarkem.
- *Vzorkování* – v tomto případě stačí, když investor nakoupí reprezentativní vzorek akcií, které zahrnují benchmark index. Do portfolia jsou akcie zařazené podle podílu v indexu (čím větší váha v indexu, tím větší podíl v portfoliu).
- *Kvadratická optimalizace* – změny cen v historii a korelace mezi akciemi jsou vloženy do počítačového programu, který určí skladbu portfolia, které minimalizuje odchylku od benchmarku.

(Reilly a Brown, 2009)

3.6 Význam portfolia pro manažerské rozhodování

Na problematiku optimalizace akciového portfolia lze nahlížet jako na rozhodovací problém. Rozhodování je jednou z nejdůležitějších činností, kterou manažeři v rámci managementu provádějí. Při rozhodovacím procesu dochází k volbě alespoň mezi dvěma variantami rozhodování. Kvalita a výsledky rozhodování značně ovlivňují fungování a budoucí prosperitu podniku, a proto nekvalitní rozhodování může být jednou z příčin zániku podniku. (Fotr, 2010)

V případě rozhodování existují pravidla, která pomáhají určit variantu, jež bude realizována. Tato pravidla rozhodování se člení na pravidla rozhodování za rizika a pravidla rozhodování za nejistoty. V případě sestavování akciového portfolia se využívají pravidla rozhodování za rizika, jež umožní stanovit preferenční uspořádání variant vzhledem ke zvolenému kritériu hodnocení, a nebo zredukovat soubor hodnocených rizikových variant. Do skupiny preferenčního uspořádání variant patří pravidlo očekávaného užitku a očekávané hodnoty, které ale pro stanovení akciového portfolia nejsou vhodné, proto se jimi nebude zabýváno. Nicméně druhá skupina pravidel, která pomáhají zredukovat soubor hodnocených rizikových variant, obsahuje pravidlo očekávané hodnoty a míry rizika a pravidlo stochastické dominance, kde první z nich lze v sestavování akciového portfolia běžně použít. (Fotr, 2010)

Základem hodnocení rizikových variant podle pravidla očekávané hodnoty a míry rizika jsou charakteristiky očekávané hodnoty, která je reprezentována mírou výhodnosti variant rozhodování, a míry rizika představované např. rozptylem či variačním koeficientem. Toto pravidlo vychází z předpokladů (pravidel), jež byly zmíněny v kapitole 2.2 Portfolio. Dalšími předpoklady je averze rozhodovatele k riziku, normální rozdělení zvoleného kritéria hodnocení jednotlivých rizikových variant a nepříliš lišící se očekávaná hodnota variant obsažených v hodnoceném souboru rizikových variant. V případě, kdy je poslední předpoklad porušen, je potřeba nahradit rozptyl variačním koeficientem. (Fotr, 2010)

Kromě rozhodovacích pravidel existují i rozhodovací metody, které mají stejný cíl jako rozhodující pravidla. Tedy vybrat správnou variantu řešení daného problému. Existují tři typy metod podle vztahu mezi empirií a teorií obsažené v jednotlivých rozhodovacích metodách:

- *Empirické metody*. Jedná se o metody založené na principech praktických zkušeností, poznání a vědomostí rozhodovatele. (Magdolenová)
- *Exaktní metody*. Tyto metody využívají vědecké analýzy.
- *Heuristické metody*. Kombinuje empirické a exaktní metody.

(Husárová, 2012)

V případech, kdy je nutné se rozhodovat za nejistoty, tzn. situace, kdy jsou známy možné výsledky, ale není známa pravděpodobnost, s jakou se objeví, je vhodné použít exaktní a matematické modely na podporu rozhodovacího modelu. Jednou z těchto metod je matematické programování, které umožňuje najít optimální variantu řešení rozhodovacího problému. (Husárová, 2012)

3.7 Sestavení portfolia

Investování probíhá v několika krocích, které se souhrnně nazývají investiční proces. Investiční proces má celkem pět fází.

Prvním krokem je sestavení investiční politiky, což znamená určení investorových záměrů a množství bohatství, které je investor ochoten investovat. Investiční záměr by měl být sestaven s ohledem na výnosnost i riziko. Tento první krok končí určením potenciálních kategorií finančních aktiv, které mohou být zahrnuty ve výsledném portfoliu. (Sharpe, 1994)

Druhým krokem je provedení analýzy cenných papírů. V tomto kroku investor zkoumá velké množství jednotlivých cenných papírů, které spadají do kategorií finančních aktiv zvolených v předešlém kroku. Cílem této analýzy je nalézt ty cenné papíry, které jsou v dané době nesprávně ohodnoceny. Nejčastěji se pro toto zjištění využívá technické či fundamentální analýzy. (Sharpe, 1994)

- *Technická analýza*. Studuje minulé ceny akcií, aby mohla předpovědět vývoj těchto cen v budoucnu. Zkoumáním minulých cen se analytik snaží určit opakující se vzorce chování v jejich pohybu. Následně jsou analyzovány nedávné hodnoty cen akcií s cílem nalézt trendy či vzorce, které jsou podobné těm minulým. Pokud by vzorce souhlasily, bylo by možné předpovědět pohyb cen těchto akcií.
- *Fundamentální analýza*. Ta na druhé straně předpovídá časování a velikost hotovostních toků, které vlastníkovi aktiva náleží. Tyto toky jsou převedeny na dnešní hodnotu použitím diskontního faktoru a dividendového diskontního modelu a následně je tato hodnota porovnána s aktuální tržní cenou dané akcie. Pokud je skutečná hodnota akcie nižší než aktuální tržní hodnota, pak je tato akcie nadhodnocená. Naopak, pokud je skutečná hodnota akcie vyšší než aktuální tržní hodnota akcie, pak je akcie podhodnocená.

(Sharpe, 1994)

Sestavení samotného portfolia je třetím krokem, který spočívá v určení specifických aktiv, do nichž bude investováno, a zároveň se určí proporce investorova bohatství vloženého do jednotlivých aktiv. V tomto kroku se investor musí zabývat i diverzifikací, kdy investor sestaví své portfolio tak, aby minimalizoval riziko při daných omezeních. (Sharpe, 1994)

Ve čtvrtém kroku probíhá revize portfolia, kdy se opakují tři předchozí kroky. Může se stát, že investor změní investiční záměr a tím pádem nebude již současné portfolio vyhovovat. Revize portfolia může nastat i v případě změny ceny cenných papírů v čase, kdy některé cenné papíry jsou lákavější a jiné naopak již méně. Ty lákavější bude chtít investor začlenit do svého portfolia a ty druhé naopak vyřadit. Důležité je v tomto případě brát v úvahu transakční náklady a velikost zlepšení investičních vyhlídek revidovaného portfolia, protože mohou investorův záměr na revizi portfolia zhatit. (Sharpe, 1994)

Posledním krokem je hodnocení výkonnosti portfolia, kdy se pravidelně sestavuje nejen výnosnost portfolia, ale i jeho rizikovost. K tomu je potřebné stanovit standardy pro měření výnosnosti a rizikovosti. (Sharpe, 1994)

3.8 Charakteristiky aktiv a portfolia

Charakteristikou aktiva či portfolia je myšlena vlastnost tohoto aktiva nebo portfolia. Stěžejními charakteristikami aktiv (portfolií) jsou:

- očekávaný výnos
- riziko
- likvidita

V teorii portfolia se předpokládá, že je možné tyto charakteristiky kvantifikovat a takto získané informace o charakteristikách jednotlivých aktiv využít při sestavování požadovaných charakteristik portfolia. (Brada, 1996)

3.8.1 Očekávaný výnos aktiva a portfolia

Výnos je základní vlastností každé investice. Obvykle se hovoří o očekávaném výnosu, pod kterým si lze představit buď tok důchodů, nebo růst či pokles tržní ceny investice. (Brada, 1996)

Příkladem toku důchodů může být dividenda, která náleží vlastníkovi akcie. Tento typ výnosu u akcií či obligací je nazýván dividendovým výnosem. (Brada, 1996)

V druhém případě, kdy dochází k růstu či poklesu tržní ceny akcie, může investor dosáhnout výnosu pouhým prodejem této akcie či obligace. V této situaci se hovoří o kapitálovém výnosu. (Brada, 1996)

Očekávaná výnosnost ale i rizikovost aktiva lze spočítat obecně třemi metodami:

- *Odhad z pravděpodobností výnosností:* Tato metoda je nejčastěji používána před započetím investice. K jejímu výpočtu je potřebné znát pravděpodobnostní strukturu, tedy s jakou pravděpodobností $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ bude i-tý cenný papír nabývat hodnot $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$. Pak lze již určit střední míru zisku, pro kterou platí:

  $$\bar{r}_i = \sum_{i=1}^{n} r_i p_i \tag{1}$$

  kde $\bar{r}_i$ je průměrná očekávaná výnosnost daného aktiva, r_i je dílčí očekávaní výnosnost aktiva a p_i je pravděpodobnost dílčí očekávané výnosnosti aktiva. Pro sumu pravděpodobností musí platit $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
- *Odhad z historických dat:* Tuto metodu lze uplatnit ve dvou případech. První z nich je případ, kdy se výnosnost, případně jak bude později ukázáno i rizikovost, počítá až po realizaci investice. Druhým případem výpočet výnosnosti (rizikovosti) aktiva před realizací investice a jako odhad jsou využity historické výsledky. U tohoto přístupu je ale nutné si uvědomit, že historická výnosnost aktiva není zárukou pro dosažení stejných výsledků i v budoucnu. Pro výpočet očekávané výnosnosti za pomoci historické metody je nutné nejprve vypočíst dílčí historickou výnosnost aktiva, pro kterou je dán vzorec:

  $$r_{it} = \frac{\mathrm{P}_{it} - P_{it-1}}{P_{it-1}} \tag{2}$$

  kde r_{it} je relativní výnosnost i-tého aktiva v časovém okamžiku t, P_{it} a P_{it-1} jsou náhodné veličina popisující velikost tržní ceny i-tého aktiva v časových okamžicích t a t-1. Tímto způsobem lze vypočíst kapitálovou výnosnost. (Brada, 1996)

  Očekávaná výnosnost na základě historických výnosností je dána vztahem:

  $$\bar{r}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} r_{i_t} \tag{3}$$

  kde r_{i_t} je pozorovaná míra zisku i-té akcie v čase t=1, 2, 3, …, T a T je počet období. Celková výnosnost aktiva se vypočte:

$$r_{i_t} = \frac{P_{i_t} - P_{i_{t-k}} + D_{i_t}}{P_{i_{t-k}}} \quad (4)$$

kde P_{i_t} je tržní cena i-té akcie na začátku následujícího období (případně prodejní cena), $P_{i_{t-k}}$ je tržní cena i-té akcie na počátku období, D_{i_t} značí dividendu i-té akcie za příslušné období. Tímto způsobem se vypočte celková výnosnost, která zahrnuje jak kapitálovou tak dividendovou výnosnost. Průměrná historická výnosnost je dána vztahem:

$$\bar{r} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} r_t \quad (5)$$

kde $\bar{r}$ je průměrná historická výnosnost, T je počet sledovaných období a r_t je dílčí historická výnosnost aktiva.

- *Ekonometrické metody:* Jsou další metodou, jak lze odhadnout výnosnost. Využívá se zde velkého množství ekonometrických metod, které pracují především s časovými řadami. Konkrétně jde o základní modely využívající regresní analýzu, faktorové modely, dále klouzavé průměry (jednoduchý, exponenciální, …) a pokročilé ekonometrické modely jako kvantilová regrese a další.

(Čámský, 2007; Alexander, 2008)

Kromě očekávaných výnosností aktiv je nutné spočítat i očekávanou výnosnost portfolia, což je střední hodnota náhodné veličiny popisující výnosnost portfolia aktiv za dobu trvání tohoto portfolia. Vzorec vypadá následovně:

$$\bar{r}_p = \sum_{i=1}^{N} Z_i \bar{r}_i \quad (6)$$

kde $\bar{r}_p$ je očekávaná výnosnost portfolia, Z_i relativní podíl i-tého aktiva v portfoliu, $\bar{r}_i$ jako v předchozích případech a N je počet cenných papírů v portfoliu. (Brada, 1996; Sharpe, 1994)

U výnosnosti, ať už aktiva nebo celého portfolia, je potřebné brát v úvahu inflaci, pak se jedná o reálnou výnosnost. Pokud inflace není uvažována, jedná se o nominální výnosnost. V dnešní době ale nominální výnosnost investorovi téměř nic neřekne, a proto je potřeba nominální výnosnost upravit, aby byl vliv inflace odstraněn. Často se pro úpravu nominální výnosnosti na reálnou používá indexu spotřebitelských cen CPI. V případě, kdy chce investor zjistit reálnou výši kapitálu na konci úrokovacího období, které se předpokládá roční, použije pro výpočet vzorce:

$$K_r = K_0 \frac{1+i}{1+i_{inf}} \quad (7)$$

K_r značí reálnou výši kapitálu na konci úrokovacího období, K_0 kapitál na počátku úrokovacího období, i nominální úrokovou sazbu a i_{inf} míru inflace. (Sharpe, 1994; Čámský, 1997)

Pro odhad výnosností v dlouhém období je také vhodné použít ocenění podniků. Ačkoliv v dnešní době jednotlivé přístupy ocenění poskytují investorovi velké množství informací ohledně budoucích výnosností, neříkají už, jaké bude jejich rozložení v čase. Empirické důkazy založené na historickém pozorování naznačují, že existuje vztah mezi oceněním, zisky a ekonomickým cyklem, které poskytují radu pro budoucí očekávané výnosnosti. Mezi tradiční přístupy pro ocenění podniku patří například růst tržeb, růst zisků a peněžních toků, účetní hodnota a růst aktiv, růst dividend, rentabilita vlastního kapitálu, rentabilita aktiv, ekonomická přidaná hodnota či hodnota přidaná trhem. Novým přístupem je pak ocenění přes ekonomický cyklus a rozdělení výnosností. (Fabozzi, 2011)

3.8.2 Riziko aktiva a portfolia

Investor se částečně při realizaci investice vystavuje riziku. Tímto rizikem je myšlena nepravidelnost v tocích z důchodu z realizované investice.

Existuje několik typů rizik, kterým potenciální investor může být na trhu cenných papírů vystaven. Jedná se například o:

- *Call risk*. Zdrojem tohoto rizika je jeho znovunákup před dobou jeho splatnosti.
- *Convertible risk*. Jedná se o riziko, které může vzniknout při přeměně jednoho typu aktiva na jiný typ.
- *Default risk*. Příčinou rizika je neschopnost firmy dostát svým závazkům.
- *Interest-rate risk*. Variabilita vzniká pohybem úrokových sazeb.
- *Management risk*. Jde o proměnlivost výnosu způsobenou špatnými rozhodnutími řídících orgánů firem.
- *Marketability risk*. Zdrojem rizika jsou ceny brokerských poplatků a služeb spojených se správou aktiv.
- *Political risk*. Variabilita zapříčiněná změnami v zákonech, daních a změnami vládních rozhodnutí.
- *Purchasing-power risk*. V tomto případě je zdrojem rizika působení inflace.
- *Systematic risk*. Jedná se o riziko, kdy vlivem působení faktorů dojde ke změnám cen na celém trhu.
- *Unsystematic risk*. Zde působení jedinečných faktorů ovlivňuje sledované aktivum.

(Brada, 1996)

Riziko změny výnosu aktiva se vypočítá jako směrodatná odchylka σ náhodné veličiny popisující výnos aktiva za dobu trvání portfolia. Pro což je obecný vzorec:

$$\sigma_i = +\sqrt{Var(X_i)}, \tag{8}$$

kde X_i značí náhodnou veličinu popisující výnos z i-tého aktiva za dobu trvání portfolia. (Čámský, 2007)

Stejně jako u výnosností i u rizika existují metody, jakými lze rizikovost spočítat. Opět se jedná o odhad z pravděpodobností, odhad z historických dat a ekonometrické metody:

- *Odhad z pravděpodobností:* Rizikovost cenného papíru se u této metody vypočítá následujícím způsobem:

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{r_i} - \bar{\mathrm{r}}_\mathrm{i})^2 \mathrm{p_i}} \tag{9}$$

  kde symboly znamenají totéž co u odhadu z pravděpodobností výnosností.
- *Odhad z historických dat:* Riziko změny výnosnosti se u této metody pak určí:

$$\sigma_\mathrm{i} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{T}-1} \sum (\mathrm{r}_{\mathrm{i}_\mathrm{t}} - \bar{\mathrm{r}}_\mathrm{i})^2} \tag{10}$$

kde symboly opět souhlasí se značením u odhadu výnosností podle historických dat. (Čámský, 2007)

Riziko změny výnosnosti portfolia se pak spočítá jako směrodatná odchylka náhodné veličiny popisující výnosnost portfolia aktiv za dobu trvání tohoto portfolia. Vzorec pro směrodatnou odchylku portfolia vypadá následovně:

$$\sigma_p = \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Z}_i Z_j \sigma_{ij}\right]^{1/2} \tag{11}$$

(Brada, 1996)

Výpočet směrodatné odchylky obsahuje Z_i a Z_j značící relativní podíl cenných papíru v portfoliu a kovarianci výnosností mezi dvěma cennými papíryσ_{ij}. Kovariance vyjadřuje statistickou míru vztahu mezi dvěma náhodnými veličinami. Kladná kovariance znamená, že výnosnosti těchto dvou cenných papírů mají sklon měnit se souhlasně. Naopak záporná kovariance značí tendenci výnosností vzájemně se kompenzovat. Pokud kovariance dosahuje malých hodnot či dokonce nuly, znamená to, že mezi výnosnostmi dvou cenných papírů je malá nebo dokonce žádná závislost. Kovariance se vypočte:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} [(i_l - \bar{\imath})(j_l - \bar{\jmath})] \tag{12}$$

(Sharpe, 1994)

Jednotlivé kovariance lze zapsat do kovarianční matice, která má tvar:

$$C = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots \ \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} \cdots & \sigma_{nn} \end{vmatrix} \tag{13}$$

Kovarianční matice je symetrická, tudíž platí $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$. Na hlavní diagonále jsou zobrazeny rozptyly náhodných veličin. Při výpočtu kovariance se využívá korelačního koeficientu ρ mezi výnosnostmi dvou cenných papírů. Korelační koeficient mění měřítko kovariance tak, aby bylo možné srovnání s odpovídajícími hodnotami jiných dvojic náhodných veličin. Korelační koeficient nabývá hodnot od -1 do +1. Hodnota -1 značí dokonalou negativní korelaci. To znamená, že výnosnosti investice A a investice B se mění opačným směrem. Dojde-li ke zvýšení výnosnosti investice A, poklesne výnosnost investice B o stejnou velikost. Zatímco hodnota +1 značí dokonalou pozitivní korelaci, kdy se mění výnosnost obou investic stejným směrem. V reálném světě se ale tyto extrémní případy nevyskytují. Pro výpočet korelace se využívá následujícího vzorce:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \tag{14}$$

Stejně jako jednotlivé kovariance lze i korelace zobrazit do korelační matice mající tvar:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots \; \vdots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} \ldots & 1 \end{vmatrix} \tag{15}$$

Stejně tak jako kovarianční matice, je i korelační matice symetrická a čtvercová. (Čámský, 2007; Sharpe, 1994; Fabozzi, 2011)

3.8.3 Likvidita aktiva

Likvidita v teorii portfolia obvykle kvantifikována nebývá, nicméně je možné se s ní setkat ve formě nákladů, které investorovi vzniknou, musí-li aktivum, které vlastní, okamžitě prodat. Někdy totiž může být problematické dané aktivum v okamžiku realizace portfolia prodat. (Brada, 1996)

Vzhledem k tomu, že likvidita jde vyčíslit jako náklad, je často řazena mezi rizikové faktory. Jde o riziko ztráty likvidity daného aktiva či portfolia. Z toho důvodu bude v práci dále pracováno pouze s výnosně-rizikovým profilem. (Husárová, 2012)

4 Optimalizace portfolia

Nejprve je dobré si uvědomit, co si pod optimálním portfoliem představit. Optimálním portfoliem je nazýváno takové efektivní portfolio, které má podle investora optimální vlastnosti. Jiná definice říká, že optimálním portfoliem je takové portfolio, které poskytuje nejvyšší očekávané výnosy při dané míře rizika nebo ekvivalentně, nejnižší míru rizika při daném očekávaném výnosu. (Hindls, 1996; Fabozzi, 2011)

Vzhledem k tomu, že při sestavování akciového portfolia existuje více omezení a pracuje se se spojitými proměnnými, používá se pro řešení úlohy optimálního portfolia model nelineárního programování. Pro určení portfolia, které maximalizuje očekávanou výnosnost a nepřekračuje omezené zdroje, lze kriteriální funkci tohoto modelu zapsat jako:

$$EV = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} v_i \times x_{\mathrm{i}} \tag{16}$$

kde EV je očekávaná výnosnost portfolia v %, v_i je očekávaná výnosnost i-té finanční investice, x_i je podíl i-té finanční investice v portfoliu a n značí počet druhů finančních investic. Jde o jiný zápis vzorce č. 6. (Fotr, 2010)

Funkce pro rozptyl R portfolia finančních investic má tvar:

$$R = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_{\mathrm{i}}^2 \times R_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \times x_j \times r_{ij} \times \sigma_i \times \sigma_j, \tag{17}$$

kde R je rozptyl portfolia finančních investic v %^{2}, R_i rozptyl i-té finanční investice, r_{ij} korelační koeficient i-té a j-té finanční investice, x_i podíl i-té finanční investice v portfoliu, x_j podíl j-té finanční investice v portfoliu, σ_i směrodatná odchylka i-té finanční investice, σ_j směrodatná odchylka j-té finanční investice, n jako v předešlém případě. (Fotr, 2010)

Z důvodu spojitých proměnných se v případě maximalizace očekávané výnosnosti portfolia pracuje s nelineárními omezeními vztahujícími se k rizikovosti tohoto portfolia. Stejně tak při minimalizaci rizikovosti portfolia bude kriteriální funkce modelu nelineární. Analytické řešení těchto nelineární optimalizačních problémů je ovšem obtížné a využívá se proto počítačové podpory ve formě nějakého programu, např. OptQuest. (Fotr, 2010)

Specifickým rysem optimalizace portfolia finančních investic, na rozdíl od optimalizace například výzkumného či investičního programu, je, že výnosy finančních investic mají velmi často svoji historii. Proto je možné stanovit rozdělení pravděpodobnosti výnosů určitých finančních investic a zároveň také určit jejich statistické závislosti zpracováním historických časových řad těchto výnosů. (Fotr, 2010)

5 Modely používající se při optimalizaci portfolia

Základy moderní teorie portfolia lze najít již v článku J. Hickse „Application of Mathematical Methods to the Theory of Risk“ z roku 1934, kde upozornil na to, že se ekonomické subjekty při investičním rozhodování řídí statistickými charakteristikami rozdělení pravděpodobnosti výnosů z těchto investic. Nicméně se vznikem teorie portfolia je spojován Harry Markowitz, který v roce 1952 napsal článek „Portfolio selection“. (Čámský, 2007)

Na něj v 60. letech navázal William F. Sharpe se svým modelem oceňování kapitálových aktiv (Capital Asset Pricing Model - CAPM). Tento model představil ve svém článku „Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk“ z roku 1964, kterým rozšířil portfolio rizikových aktiv o bezrizikovou investici, přímku kapitálového trhu CML a přímku trhu cenného papíru SML. (Čámský, 2007)

Teorie výběru portfolia od Markowitze spolu s teorií oceňování kapitálových aktiv poskytují základy managementu portfolií. Cílem výběru portfolia je nalezení optimálního portfolia, při jehož výběru se používá modelovacích technik pro měření očekávaných výnosností portfolia a akceptovatelné míry rizikovosti portfolia. (Fabozzi, 2011)

Další etapou ve vývoji teorie portfolia je arbitrážní teorie oceňování (Arbitrage Pricing Theory – APT), která je ale založena na jiné myšlence než předešlé dvě teorie. Tato teorie předpokládá, že investoři dávají přednost vyšší úrovni bohatství před nižší. (Čámský, 2007)

Dalším důležitým bodem v historii portfolia je Black-Littermanův model, který byl publikován Fischerem Blackem a Robertem Littermanem v časopise Journal of Fixed Income v roce 1991. Delší a bohatší článek byl publikován ve Financial Analysts Journal v roce 1992. Tento model využívá při optimalizaci historicky starší modely a těmi jsou Markowitzův model a model oceňování kapitálových aktiv. I tento model byl později rozšířen, a to především Attiliem Meuccim. (Walters, 2007; Medková, 2011)

5.1 Markowitzův model

Markowitzův přístup předpokládá, že investor má v současné době k dispozici určitý objem peněz. Tyto peníze budou investovány na dané časové období, které se označuje jako investorova doba držení. Na konci tohoto časového období investor prodá cenné papíry, které nakoupil na začátku doby držení, a buď výnosy utratí pro svoji potřebu, a nebo je reinvestuje do dalších cenných papírů. Případně udělá od každého trochu. (Sharpe, 1994)

Markowitzova teorie je teorií normativní, která popisuje standardy nebo normy chování, které by investor měl využívat při konstrukci portfolia. Jinak řečeno, říká, co má investor dělat. (Fabozzi, 2011)

Existuje několik předpokladů Markowitzova modelu:

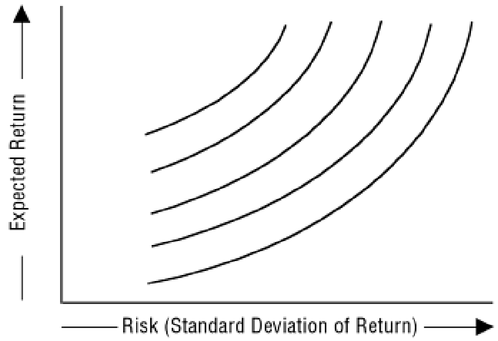
- investice probíhá v jednom určitém časovém období
- portfolio je hodnoceno podle očekávaného výnosu a očekávaného rizika
- ze dvou portfolií se stejným očekávaným rizikem si investor vybere to s vyšším výnosem
- ze dvou portfolií se stejným očekávaným výnosem si investor vybere to s nižším rizikem
- cenné papíry jsou libovolně dělitelné
- existuje bezrizikový cenný papír
- nejsou brány v úvahu daně, poplatky a další transakční náklady
- výnosnosti cenných papírů jsou náhodné veličiny

(Čámský, 2007)

Jedná se o přístup jednoho období, kde *t=0* je značen začátek doby držení a *t=1* je označen konec doby držení. V *t=0* se musí investor rozmyslet, které cenné papíry do svého portfolia nakoupí a bude je držet do *t=1*. Toto rozhodnutí odpovídá výběru optimálního portfolia z množiny možných portfolií. (Sharpe, 1994)

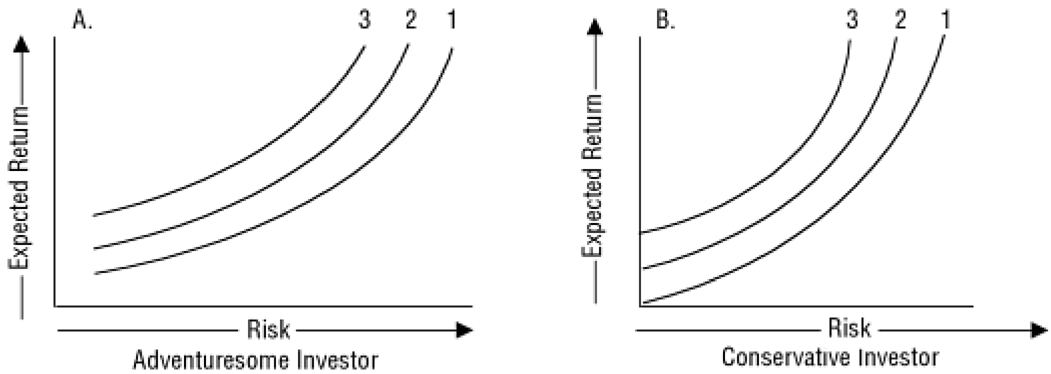
Při rozhodování v *t=0* jsou výnosnosti cenných papírů za dobu držení neznámé. Nicméně investor může odhadnout očekávané výnosnosti cenných papírů, které připadají v úvahu. Dále investor musí sledovat kromě očekávané výnosnosti, kterou požaduje co nejvyšší, i riziko, které chce co nejnižší. Investor by měl odhadnout očekávanou výnosnost a směrodatnou odchylku každého portfolia a potom vybrat to nejlepší z nich na základě relativní velikosti těchto dvou charakteristik. Důsledkem sledování těchto dvou konfliktních cílů (očekávaná výnosnost a riziko) je snaha o diverzifikaci, kdy investor nakoupí několik cenných papírů místo jednoho. (Sharpe, 1994)

Jakým způsobem si investor vybere nejlepší portfolio? Pomocí metody indiferenčních křivek, kde tyto křivky reprezentují investorovy preference výnosnosti a rizika. Mohou být nakresleny ve dvourozměrném grafu, kde se na vodorovnou osu nanáší riziko měřené směrodatnou odchylkou σ_p a na svislé ose je vyznačena odměna měřená očekávanou výnosností $\bar{r}_p$. Jedna indiferenční křivka znázorňuje všechny kombinace portfolií, které jsou pro investora stejně žádoucí. Z toho důvodu se křivky nemohou protínat. Pro investora je více žádoucí portfolio ležící na indiferenční křivce, která je umístěna výše než ostatní křivky, protože nabízí vyšší užitek. Každý investor má nekonečně mnoho těchto indiferenčních křivek, které se souhrnně nazývají indiferenční mapou. Nicméně ne všechny křivky na této mapě jsou možné. Racionální investor tak bude preferovat křivku, která je možnou alternativou a zároveň je křivkou nejvyšší. (Hagin, 2004; Sharpe, 1994)



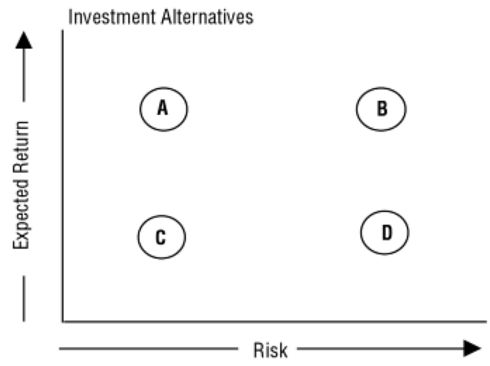
Obr. 1 Investorova indiferenční mapa (Hagin, 2004)

Tvar těchto křivek je dán investorovým vztahem k riziku a výnosnosti. Obecně se předpokládá, že investoři mají averzi k riziku a tím pádem jsou křivky indiference konvexní s kladným sklonem. Čím jsou křivky indiference strmější, tím vyšší má investor averzi k riziku. Na následujícím obrázku vlevo je zobrazena indiferenční mapa investora s nižší averzí k riziku, zatímco vpravo je indiferenční mapa investora s vyšší averzí k riziku. (Sharpe, 1994; Hagin, 2004)



Obr. 2 Indiferenční křivky investorů s různým vztahem k riziku (Hagin, 2004)

Na dalším obrázku je zobrazen neefektivní vztah mezi rizikem a očekávanou výnosností. Na horizontální ose je zobrazeno riziko, na vertikální očekávaná výnosnost. Pokud investor porovná investiční alternativy A a B, rozhodne se pro investici A, protože i když obě varianty přináší stejnou míru očekávaného výnosu, varianta B nese vyšší riziko. V případě, že porovná varianty A a C, opět se rozhodne pro variantu A. Sice obě možnosti jsou stejně rizikové, ale investice A přináší oproti C vyšší míru očekávané výnosnosti. Při srovnání variant A a D se rozhodne pro A, jelikož přináší jak vyšší očekávanou výnosnost, tak i nižší riziko než investice D. (Hagin, 2004)

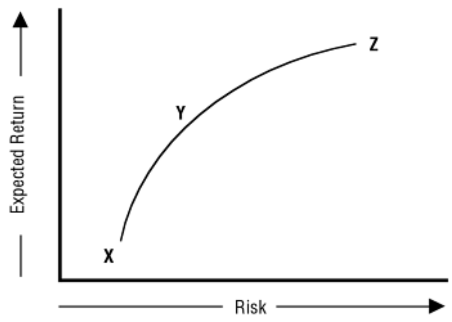


Obr. 3 Neefektivní množina investičních variant (Hagin, 2004)

V případě, že by předešlé čtyři investice existovaly ve skutečném světě, všichni investoři by preferovali investici A před ostatními variantami. Ale tato zvýšená poptávka po této investici by zvýšila její cenu. Růst ceny investice A by ale snížil její očekávanou výnosnost. Tím by se vyrovnala neefektivnost trhu, na kterém by existovala investice oceněná tak, že by byla preferovaná před ostatními variantami. (Hagin, 2004)

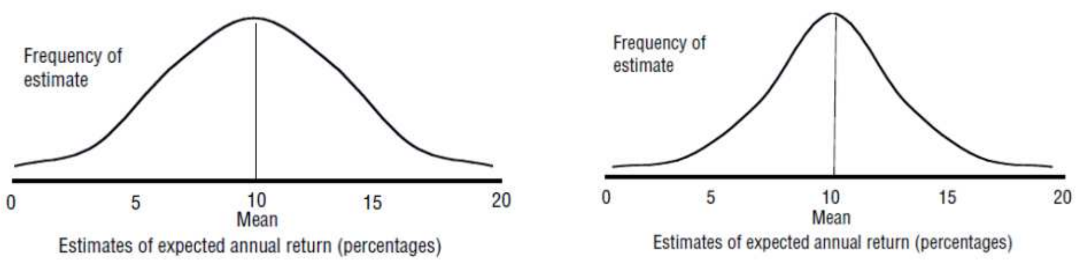
I když investoři mají různé rizikově-výnosné preference, racionální investoři se vždy snaží najít portfolio, které buď maximalizuje míru očekávaného výnosu pro každou úroveň rizika, nebo minimalizuje úroveň rizika pro každou možnou míru očekávaného výnosu. Trhy, které tohoto dosahují, se nazývají efektivními. Naopak trhy, které tohoto nedosahují, se nazývají neefektivní. (Hagin, 2004)

Křivka XYZ na obrázku č. 4 zobrazuje efektivní hranici investičních variant, která nabízí nejvyšší úroveň výnosu pro daný stupeň rizika, nebo alternativně, poskytuje nejnižší úroveň rizika pro danou míru výnosu. Investice X je investice nabízející nejnižší riziko a bude vhodná pro investora, který chce co nejvyšší možnou výnosnost spojenou s minimální úrovní rizika. Naopak pro investora spekulanta je vhodná investice Z, která poskytuje co nejnižší možné riziko a zároveň je spojena s nejvyšší očekávanou výnosností. Zlatou střední cestou mezi těmito dvěma extrémy je investice Y nabízející vyrovnanost mezi rizikem a výnosností. (Hagin, 2004)



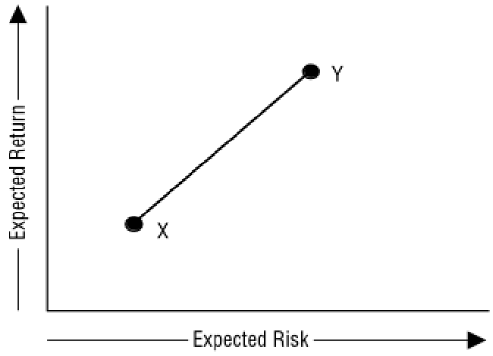
Obr. 4 Efektivní množina investičních variant (Hagin, 2004)

Obrázek č. 5 ukazuje rozdělení pravděpodobnosti dosáhnutí očekávaných výnosů u dvou investic A a B. Obě investice mají stejný průměrný očekávaný výnos. Nicméně rozdělení očekávaného výnosu je jiné. Investice A zobrazená vlevo má větší rozptyl, tedy riziko, že nedosáhne očekávaného výnosu je vyšší, než u investice B zobrazené vpravo, která je z toho důvodu preferovanější u rizikově averzních investorů. (Hagin, 2004)



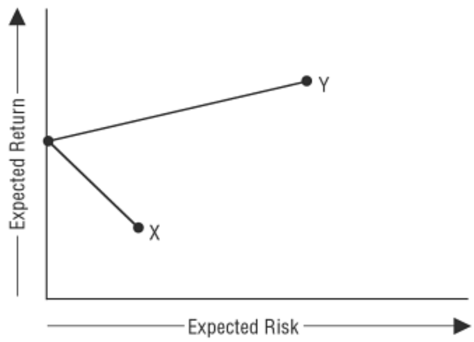
Obr. 5 Srovnání rozdělení pravděpodobných výnosů (Hagin, 2004)

Kromě očekávaného výnosu a rizika bral Markowitz při identifikaci efektivního portfolia v úvahu i korelaci výnosů cenného papíru s ostatními cennými papíry, které přicházely v úvahu. V případě, kdy by existovaly dvě perfektně korelované investice, by bylo možné znázornit různé kombinace těchto dvou investic úsečkou spojující tyto dvě investice, jako na následujícím obrázku:



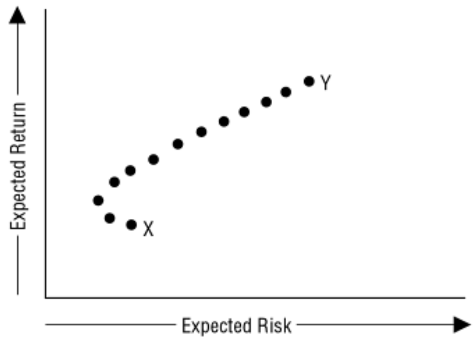
Obr. 6 Dvě hypoteticky perfektně korelované investice (Hagin, 2004)

Naopak by mohla nastat situace, kdy by dvě investice byly perfektně nekorelované, a pak by za určitých podmínek bylo možné zneutralizovat rizika těchto dvou investic. Pak by bylo vytvořeno portfolio, které by mělo očekávané riziko nulové. Tato situace je znázorněna na obrázku č. 7:



Obr. 7 Dvě hypoteticky perfektně nekorelované investice (Hagin, 2004)

V reálném světě ale nejsou riziko a očekávaná výnosnost perfektně korelované nebo perfektně nekorelované, a tak portfolio sestavené ze dvou investic mívá obvykle podobu, jaká je zachycena na obrázku č. 8:



Obr. 8 Hypotetická efektivní hranice odvozená z investic X a Y

(Hagin, 2004)

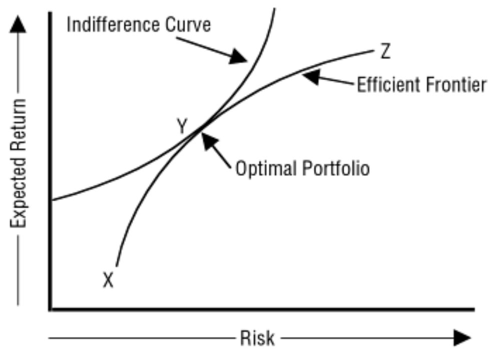
Při použití Markowitzova přístupu by měl investor vyhodnotit alternativní portfolia na základě jejich očekávaných výnosností a směrodatných odchylek pomocí křivek indiference. Očekávanou výnosnost portfolia může investor vypočítat na základě vzorce č. 6. Směrodatnou odchylku podle vzorce č. 11. Dále by vypočítal kovariance výnosností zanesené do kovarianční matice a korelační koeficienty zanesené do korelační matice, jejichž výpočty jsou uvedeny ve vzorcích č. 13 a č. 15. Tím investor vytvoří portfolio z vybraných cenných papírů. (Čámský, 2007)

Vzhledem k tomu, že investor může mít k dispozici nekonečné množství portfolií, znamenalo by to, že by investor musel vyhodnocovat všechna tato portfolia. Nicméně investorovi stačí, zaměří-li se na podmnožinu dostupných portfolií označovanou jako efektivní množina. Efektivní množina musí obsahovat portfolia, která nabízejí maximální očekávanou výnosnost při různých úrovních rizika a zároveň nabízejí minimální riziko při různých úrovních očekávané výnosnosti. Předešlá věta se nazývá větou o efektivní množině. (Sharpe, 1994)

Markowitzova množina efektivních portfolií se nalezne následovně:

1. Stanoví se přípustná množina, která je tvořena všemi portfolii, která mohou být vytvořena ze skupiny cenných papírů. Obecně má tato přípustná množina tvar deštníku.
2. Použije se věta o efektivní množině na přípustnou množinu.

Efektivní portfolia se nacházejí na levé horní hranici přípustné množiny, což znamená, že efektivní množina je konkávní. Důkazem konkávnosti efektivní množiny se tato práce nezabývá. Optimální portfolio investor nalezne nakreslením křivek indiference do grafu, kde je zobrazena efektivní množina portfolií. Optimální portfolio odpovídá bodu, kde se indiferenční křivka dotýká efektivní množiny právě v tomto jediném bodu. (Sharpe, 1994)



Obr. 9 Optimální portfolio (Hagin, 2004)

Pro hledání optimálního portfolia je nutné zvolit účelovou funkci, jejíž extrém bude chtít investor nalézt. Extrémy mohou být dva. Buď investor bude maximalizovat očekávaný výnos portfolia, a nebo minimalizovat riziko změny výnosu portfolia. První varianta se nedoporučuje z toho důvodu, že pro tento typ úlohy neexistuje obecně vhodná metoda jejího řešení. Při minimalizaci rizika změny výnosu vypadá funkce následovně:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}} \tag{18}$$

Omezující podmínky pro tuto funkci jsou:

1. podmínka vychází z požadavku, aby se součet relativních podílů jednotlivých aktiv v portfoliu rovnal jedné. Tím je zaručeno, že bude investována právě částka pro tento účel stanovená $\sum_{i=1}^{n} w_i$.

2. podmínka může dávat požadavky na váhy jednotlivých aktiv v portfoliu $w_i \geq 0$. Touto podmínkou je krátká pozice zakázána.

3. podmínka stanovuje minimální požadovaný výnos, kterého chce investor dosáhnout $\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i = \bar{r}_p$.

(Čámský, 2007)

Kromě zahrnutí rizikových aktiv do portfolia umožňuje Markowitzův přístup i zahrnutí bezrizikových aktiv. Tedy aktiv, u nichž je výnosnost jistá. Dále existují další modifikace tohoto přístupu. Jedná se o umožnění různých sazeb pro zapůjčování a vypůjčování, povolení či zakázání krátké pozice (zapůjčení cenných papírů, které jsou v okamžiku vzniku portfolia prodány a v okamžiku realizace portfolia zpětně nakoupeny a vráceny osobě, která je půjčila). (Brada, 1996)

Jedna z podob Markowitzova modelu, která minimalizuje riziko portfolia při současné podmínce kladené na určitou výši očekávaného výnosu portfolia, je modelem kvadratického programování. Při optimalizaci portfolia se mnohdy uplatňují i metody stochastického programování, ovšem základní problém lze řešit i při předpokladu normálního rozdělení očekávaných výnosů. Stejně tak pokud se v modelu vyskytuje předpoklad averze k riziku, může se jednat o kvadratické programování. Jak je z výše uvedeného modelu patrné, kvadratické programování se od lineárního liší v tom, že obsahuje kvadratický člen. Pro úlohy kvadratického programování jsou dány Khun-Tuckerovy podmínky, které při jejich splnění zajišťují optimální řešení. Tuto soustavu rovnic a nerovnic je pak možné řešit upravenou simplexovou metodou. (Pánková, 2003; Hillier, 2009)

5.2 Model oceňování kapitálových aktiv

V 60. letech 20. století se hned několik osob, z nichž byl William Sharpe vedoucí osobou, zabývalo využitím Markowitzovy teorie portfolia jako základu pro rozvoj cenové teorie – modelu oceňování kapitálových aktiv. Model oceňování kapitálových aktiv, který je u Sharpeho nazýván jako cenový model kapitálových aktiv, označovaný zkratkou CAPM, je modelem portfolia složeného alespoň z jednoho rizikového a alespoň jednoho bezrizikového aktiva. CAPM pomáhá investorovi rozhodnout, zda je cenný papír na trhu relativně drahý nebo naopak levný. Tím tedy pomáhá určit, které aktivum koupit, a které prodat. Stejně jako u Markowitzova modelu se jedná o modely kvadratického programování. (Hagin, 2004; Brada, 1996)

Oproti Markowitzově přístupu je CAPM teorií pozitivní, tj. popisnou. (Fabozzi, 2011)

Existuje několik předpokladů pro používání modelu oceňování kapitálových aktiv.

- Portfolio je ohodnoceno na základě investorovy očekávané výnosnosti a směrodatné odchylky při horizontu jednoho období.
- Investor si při výběru mezi dvěma jinak shodnými portfolii vybere to, které má vyšší očekávanou výnosnost.
- Investor si při výběru mezi dvěma jinak shodnými portfolii vybere to, které má menší směrodatnou odchylku.
- Jednotlivá aktiva jsou nekonečně dělitelná. Investor tedy může koupit zlomek cenného papíru.
- Existuje bezriziková sazba, za kterou může investor půjčovat nebo si vypůjčovat peníze.
- Transakční náklady a daně nejsou brány v úvahu.
- Všichni investoři sestavují portfolio na stejný horizont jednoho období.
- Bezriziková sazba je pro všechny investory identická.
- Všechny typy informací jsou všem investorům kdykoliv volně dostupné.
- Investoři mají stejná očekávání ohledně budoucí očekávané výnosnosti, budoucí směrodatné odchylky a budoucí kovariance cenných papírů.

(Sharpe, 1994)

Na model CAPM se lze dívat dvojím způsobem, a to buď jako na úlohu o nalezení efektivní množiny, kde je portfolio složeno jen z kombinace rizikových portfolií a jednoho bezrizikového aktiva. Nebo jako na hledání množiny efektivních portfolií úlohy teorie portfolia, kde nejsou žádná dodatečná omezení na velikost relativních podílů jednotlivých aktiv v portfoliu. Vzhledem k tomu, že druhá možnost je snáze řešitelná než první, v praxi se využívá řešení druhé úlohy. Navíc při řešení praktických úloh se řešení obou úloh nemusí příliš lišit. (Brada, 1996)

Model oceňování kapitálových aktiv existuje ve dvou podobách, a to ve tvaru přímky kapitálového trhu CML a ve tvaru přímky cenného papíru SML.

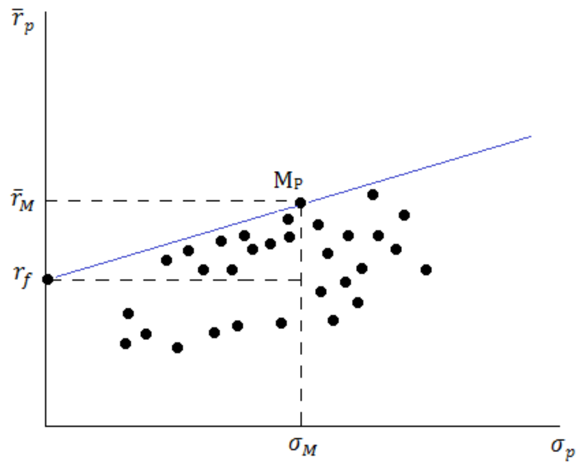
- *Přímka kapitálového trhu CML*. CML představuje rovnovážný vztah mezi očekávanou výnosností a směrodatnou odchylkou efektivních portfolií. Jinak řečeno, CML označuje portfolia vzniklá kombinací bezrizikového aktiva a efektivního portfolia M_P. Efektivní portfolio M_P, které bývá nazýváno tržním portfoliem, bude vysvětleno později. CML lze vyjádřit následující rovnicí:

$$\bar{r}_p = r_f + \sigma_p \left(\frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M}\right) \tag{19}$$

(Sharpe, 1994; Brada, 1996)

Směrnice CML je dána rozdílem mezi očekávanou výnosností tržního portfolia a očekávanou výnosností bezrizikového cenného papíru dělenému rozdílem jejich rizik:

$$\frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M} \tag{20}$$



Obr. 10 Přímka kapitálového trhu CML (Sharpe, 1994)

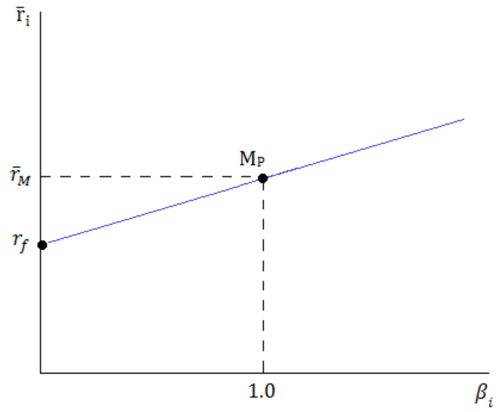
Jednotlivé rizikové cenné papíry budou vždy ležet pod přímkou CML, protože samostatně držený cenný papír není efektivním portfoliem. Portfolia, která leží na CML, přinášejí vyšší výnosnost než efektivní množina složená jen z rizikových aktiv, a to při stejném riziku. Polopřímka CML začíná v bodě r_f a dotýká se efektivní množiny portfolia v bodě M_P, který představuje tržní portfolio. Tržní portfolio je takové portfolio, které obsahuje investice do všech cenných papírů v takovém poměru, že část investovaná do jednotlivého cenného papíru se rovná jeho relativní tržní hodnotě. Tržním portfoliem může být například stanoven index burzy – v této práci index PX-TR, nebo může být vypočítáno, jak je zmíněno v kapitole 6.2. Relativní tržní hodnota cenného papíru odpovídá agregované tržní hodnotě cenného papíru podělené sumou agregovaných tržních hodnot všech cenných papírů. Body vpravo od tržního portfolia zobrazují portfolia vypůjčeného kapitálu, při kterých by si investor s nižší averzí k riziku vypůjčil finanční prostředky za bezrizikovou úrokovou míru. Takto získané prostředky by investor následně investoval do tržního portfolia. Body nalevo od tržního portfolia představují zápůjčná portfolia, při kterých by investor s vyšší averzí k riziku část kapitálu investoval do bezrizikového aktiva a část do tržního portfolia. Pod přímkou CML by ležela všechna portfolia, která by používala jiné než tržní portfolio a bezrizikové vypůjčení a zapůjčení, i když některá by se mohla nacházet v její těsné blízkosti. Tato portfolia jsou zobrazena na obrázku č. 10, která leží pod CML. (Sharpe, 1994; Husárová, 2012; Brada, 1996)

- *Přímka trhu cenných papírů SML*. Pomocí SML může investor kvantifikovat systematické a nesystematické riziko změny výnosu aktiva na trhu cenných papírů. Zároveň investorovi pomůže při rozhodování, zda dané finanční aktivum koupit nebo prodat. Rovnice přímky SML vyjadřující rovnovážný vztah mezi očekávanou výnosností a systematickým rizikem, vyjadřující též lineární výnosnost, je dána:

$$\bar{\mathrm{r}}_{\mathrm{i}} = r_f + (r_M - r_f)\beta_i \tag{21}$$

$\bar{r}_i$ značí očekávanou výnosnost, r_f je očekávaná výnosnost bezrizikového cenného papíru, r_M označuje očekávanou výnosnost tržního portfolia a β_i je faktor beta, který značí tržní riziko cenného papíru *i* a jedná se o jiný způsob, jak vyjádřit kovarianční riziko cenného papíru:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} \tag{22}$$



Obr. 11 Přímka trhu cenných papírů SML (Sharpe, 1994)

Beta je důležitou mírou rizika cenného papíru, a proto je vhodné se podívat, jaký je vztah mezi tímto faktorem a celkovým rizikem cenného papíru. Vztah mezi nimi je následující (Brada, 1996; Sharpe, 1994):

$$\sigma_i = \left[{\beta_i}^2 {\sigma_M}^2 + \sigma_{\epsilon i}^2\right]^{1/2} \quad (23)$$

Jak je možno vidět, riziko cenného papíru *i* lze rozložit na tržní (systematické) riziko, což je první část vzorce ${\beta_i}^2 {\sigma_M}^2$ vyjadřující pohyb tržního portfolia, a na jedinečné (nesystematické) riziko, které je vyjádřeno $\sigma_{\varepsilon i}^2$. Rozdělení rizika na tyto dvě komponenty je důležité z toho důvodu, že jedno z rizik je korelováno s očekávanou výnosností. Konkrétně se jedná o tržní riziko, kde cenné papíry s vyšším beta faktorem mají i vyšší očekávanou výnosnost. Zatímco jedinečné riziko s beta faktorem nesouvisí. Faktor beta může nabývat různých hodnot. Pokud $\beta_i > 0$, pak růst očekávaných výnosů z portfolia způsobí i růst očekávaného výnosu i-tého aktiva. V případě, kdy $\beta_i < 0$, pak růst očekávaných výnosů z portfolia způsobí pokles očekávaného výnosu z i-tého aktiva. Poslední možnou variantou je $\beta_i = 0$, což znamená, že změna očekávaných výnosů z portfolia nemá vliv na očekávaný výnos i-tého aktiva. Vzhledem k tomu, že vlivem působení dalších faktorů, které nejsou zahrnuty do modelu $r_i = r_f + (r_m - r_f)\beta_i$, může dojít k nepřesnostem, bývá do tohoto modelu zahrnut vliv těchto blíže nespecifikovatelných faktorů ve formě náhodné chyby e_i. Model pak vypadá následovně:

$$\bar{r}_i = r_f + (r_M - r_f)\beta_i + e_i \quad (24)$$

(Sharpe, 1994 a Brada, 1996)
Obvykle se provádí substituce $\alpha_i = r_f - \beta_i r_f$ pro zjednodušení. Pak je rovnice SML dána předpisem:

$$\bar{r}_i = \alpha_i + r_M\beta_i + e_i \quad (25)$$

(Brada, 1996)
Alfa cenných papírů ale také může označovat rozdíl mezi očekávanou výnosností $\bar{r}_i$ a rovnovážnou očekávanou výnosností r_i^e:

$$\alpha_i = \bar{r}_i - r_i^e \quad (26)$$

kde

$$r_i^e = r_f + \beta_i(r_M - r_f) \quad (27)$$

Pokud je $\alpha_i > 0$, jedná se o podhodnocený cenný papír, který leží nad SML a je vhodné jej koupit. Pokud je $\alpha_i < 0$, situace je opačná – cenný papír je nadhodnocený, leží pod SML a je vhodné jej prodat. (Čámský, 2007)
Rozptyl aktiva lze vypočítat z rovnice:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2 \tag{28}$$

Z této rovnice lze odvodit riziko aktiva:

$$\sigma_i = \sqrt{\beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2} \tag{29}$$

Kovariance dvou aktiv *i* a *j* se spočte:

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_M^2 \tag{30}$$

Podíl systematického rizika na celkovém riziku aktiva vyjadřuje koeficient determinace, který je dán vztahem:

$$R^2 = \beta_i^2 \frac{\sigma_M^2}{\sigma_i^2} \tag{31}$$

Předešlá část práce se zabývala rozložením rizika cenného papíru na systematickou a nesystematickou složku. Nyní bude provedeno obdobné rozložení u portfolia. Ačkoliv SML slouží především pro určení rovnovážné výnosnosti aktiv, lze tento model použít i pro určení systematického rizika a výnosnosti portfolia, a to v tom případě, kdy je o portfoliu uvažováno jako o aktivu. Rovnice SML je pro portfolio dána vztahem:

$$\bar{r}_p = \alpha_p + r_M \beta_p + e_p \tag{32}$$

Rozptyl portfolia lze vypočítat z rovnice:

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon p}^2 \tag{33}$$

Z této rovnice lze odvodit riziko portfolia:

$$\sigma_p = \sqrt{\beta_p^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon p}^2} \tag{34}$$

kde β_p a $\sigma_{\varepsilon p}^2$ jsou vážené β_i a $\sigma_{\varepsilon i}^2$, kde vahami jsou váhy aktiv v portfoliu. Nakonec koeficient determinace u portfolia má tvar:

$$R^2 = \beta_p^2 \frac{\sigma_M^2}{\sigma_p^2} \tag{35}$$

(Čámský, 2007)

SML musí procházet bodem značící tržní portfolio. Beta tohoto bodu je 1 a jeho očekávaná výnosnost je r_M. Zároveň musí SML procházet bodem značící bezrizikový cenný papír, který má betu rovnu 0 a očekávanou výnosnost odpovídající r_f. Pomocí těchto dvou bodů lze nakreslit přímku SML, která bude mít směrnici $r_M - r_f$. (Sharpe, 1994)

Investoři vyhledávají cenné papíry, které nejsou dle jejich názoru správně ohodnoceny. K nesprávnému ohodnocení může dojít ve dvou případech. Buď může být cenný papír podhodnocený, a to tehdy, kdy je jeho očekávaná výnosnost vyšší než předpokládaná (leží nad SML). Druhou možností je nadhodnocený cenný papír, kdy je jeho očekávaná výnosnost nižší než předpokládaná (leží pod SML). V případě, že je cenný papír ohodnocen správně, je jeho očekávaná výnosnost rovna předpokládané (leží na SML). V případě, že je cenný papír podhodnocený, je vhodné cenný papír nakoupit. Naopak nadhodnocený cenný papír je nutno prodat. (Čámský, 2007)

Při tvorbě portfolia dochází obecně ke snižování rizika. Je tomu tak proto, že velikost rizika portfolia je závislá nejen na velikosti rizika jednotlivých cenných papírů obsažených v portfoliu, ale i na míře jejich statistické závislosti, korelaci. Pozitivní korelace složek portfolia vede ke zvýšení rizika portfolia. Negativní korelace naopak riziko portfolia snižuje. Z předchozího vyplývá, že pro snížení rizika portfolia je vhodné do něj zahrnout negativně korelované cenné papíry. Při diverzifikaci portfolia lze dosáhnout pouze snížení rizika nesystematického. To je způsobeno tím, že u části cenných papírů zahrnutých v portfoliu se cena zvýší jako následek neočekávaných pozitivních zpráv specifických pro společnost, která dané cenné papíry emitovala. U jiných cenných papírů může cena poklesnout v důsledku nečekaných negativních zpráv specifických pro danou společnost. Je možné tedy očekávat, že přibližně stejný počet společností bude očekávat pozitivní a negativní zprávy, což bude mít malý předpokládaný vliv na výnosnost portfolia. Na systematické riziko diverzifikace vliv nemá, pouze jej průměruje. Je tomu tak proto, že faktor beta portfolia β_P je průměrem jednotlivých beta faktorů cenných papírů a není tak důvod předpokládat, že se beta portfolia, a tím i systematické riziko, změní nějakým určitým směrem. Míra snížení rizika při diverzifikaci závisí na proporci systematického a nesystematického rizika. Zároveň je míra snížení rizika diverzifikací závislá na:

- velikosti portfolia pozitivně,
- statistické závislosti cenných papírů, kdy málo pozitivně závislé cenné papíry vedou k rychlejšímu poklesu rizika.

(Fotr, 2010; Sharpe, 1994)

5.3 Black-Littermanův model

Black-Littermanův model dosáhl dvou významných příspěvků k problému alokace aktiv. Za prvé slouží jako výchozí bod pro použití bayesovské techniky pro odhad výnosů, a za druhé poskytuje způsob, jak určit investorovy názory, a jak je zakomponovat do modelu využívajícího bayesovské techniky. Tento proces odhaduje očekávané výnosy a kovariance, které mohou být použity jako vstup pro optimalizaci. (Walters, 2008)

Kvantitativní modely podle Blacka a Littermana vedou k nesmyslným výsledkům, a to v případě, kdy investor nezadá žádná omezení. Tyto modely často navrhnou řešení s nulovými vahami u velkého počtu aktiv, případně s nepřiměřeně velkými váhami u aktiv trhu s malou kapitalizací. Tyto nesmyslné výsledky dle nich pramení ze dvou velmi dobře rozpoznatelných faktorů. Prvním je, že očekávané výnosy jde velmi obtížně odhadnout. Investoři totiž mají přehled o výnosech jen na několika trzích, jenže standardní model optimalizace po nich požaduje, aby stanovili výnosy pro všechna aktiva. Druhým faktorem je, že váhy aktiv optimálního portfolia jsou extrémně citlivé na předpokládané výnosy. (Black a Litterman, 1992)

Black-Littermanův model kombinuje dva principy moderní teorie portfolia – optimalizační rámec Markowitze a Sharpův CAPM. Zároveň investorovi dovoluje kombinovat jeho názory na výhled pro vlastní kapitál, dluhopisy a měny s rizikovou prémií. (Black a Litterman, 1992)

Tento model nepředpokládá, že by se trhy vždy nacházely v rovnováze, kterou popisuje CAPM. V případě, kdy se očekávané výnosy vzdálí od svých rovnovážných hodnot, bude mít nerovnováha na trzích tendenci tlačit výnosy zpět na rovnovážnou úroveň. Předpokládá se tedy, že očekávané výnosy se příliš nevychýlí ze své rovnováhy. Velikost odchylky mezi očekávanými výnosy a rovnovážnou rizikovou prémií závisí na stupni přesvědčení investora o správnosti svých názorů. Model navíc vychází z historických kovariancí výnosů různých aktiv a měn. (Black a Litterman, 1992)

Investor může specifikovat hned několik názorů na absolutní výnosnost. Výhodou je, že investor může specifikovat i názory na relativní výnosnosti a specifikovat stupeň jistoty o správnosti každého názoru. Velká část názorů bývá vyjádřena právě relativně. (Black a Litterman, 1992)

V případě, že investor nemá žádné představy o očekávaných hodnotách, lze pro sestavení optimálního portfolia využít hned několik přístupů. Je to přístup historického průměru, přístup vyrovnané střední hodnoty a přístup rizikově vážené vyrovnané střední hodnoty. V praktické části investor představy o očekávaných hodnotách mít bude, z toho důvodu nebudou tyto přístupy použity. (Black a Litterman, 1992)

Na druhou stranu, pokud investor představy má, jsou kombinovány s tržní rovnováhou. Investor samozřejmě nemusí mít představy o celém trhu. Pokud o některých aktivech představy nemá, pak by je neměl vyjadřovat. Naopak pokud o některých aktivech má silné představy, měl by být schopný tyto rozdíly vyjádřit. Kombinace investorových představ a tržní rovnováhy předpokládá:

- existenci dvou vzdálených zdrojů informací o budoucích nadměrných výnosech – investorův názor a tržní rovnováha,
- že oba zdroje informací jsou nejisté a nejlépe jsou vyjádřeny pravděpodobnostním rozdělením,
- že očekávané nadměrné výnosy, které jsou rozdílem skutečných výnosů a bezrizikových výnosů, jsou co nejvíce v souladu, jak je jen možné, s oběma zdroji informací.

(Black a Litterman, 1992)

V Black-Littermanově modelu se využívá následujících symbolů a předpokladů:

- Black-Littermanův model se skládá z N akcií, které jsou na trhu dostupné.
- M_i symbolizuje tržní kapitalizaci akcií a dluhopisů.
- Vektor $\boldsymbol{W}=\{W_1,...,W_n\}$ značí tržní váhy N akcií. Vektor $\boldsymbol{R}=\{R_1,...,R_n\}$ symbolizuje nadměrné výnosy aktiv.
- Nadměrné výnosy aktiv mají normální rozdělení s kovarianční maticí $\boldsymbol{\Sigma}$.
- Vektor $\boldsymbol{\Pi}=\delta\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{W}$ představuje rovnovážnou rizikovou prémii, kde δ je konstanta úměrnosti, která se vypočte $\delta = \frac{r_M - r_f}{\sigma_M^2}$.
- Očekávané nadměrné výnosy $E[R]$ nejsou pozorovatelné, a proto se předpokládá, že mají pravděpodobnostní rozdělení, které je přímo úměrné součinu dvou normálních rozdělení. První distribuce představuje rovnováhu, což je soustředěno v $\boldsymbol{\Pi}$ s kovarianční maticí $\tau\boldsymbol{\Sigma}$, kde τ je konstanta. Druhá distribuce reprezentuje investorovy názory o k lineárních kombinacích prvků $E[R]$. Tyto názory jsou zobrazeny v modelu: $\boldsymbol{P}E[R]=\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{\varepsilon}$. $\boldsymbol{P}$ je známa jako matice $k \times N$, $\boldsymbol{Q}$ je k-rozměrný vektor a $\boldsymbol{\varepsilon}$ je nepozorovatelný náhodný vektor s normálním rozdělením, s nulovou střední hodnotou.
- Ω je diagonála kovarianční matice chybového členu vyjádřených názorů, které představují nejistotu v každém názoru.
- Výsledná distribuce pro $E[R]$ je normální se střední hodnotou $E[R]$:

$$E[R]=[(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}+\boldsymbol{P}'\Omega^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}[(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{\Pi}+\boldsymbol{P}'\Omega^{-1}\boldsymbol{Q}] \tag{36}$$

(Black a Litterman, 1992)

Tato rovnice zároveň vyjadřuje Black-Littermanův model na základě konceptu dvou zdrojů informací. (Yu, 2007)

Váhy optimálního portfolia w* se vypočítají ze vztahu:

$$w^*=(\lambda\boldsymbol{\Sigma})^{-1}E[R], \tag{37}$$

kde λ symbolizuje rizikově-averzní koeficient. (Yu, 2007)

6 Validace a evaluace modelu

Validace modelu poskytuje ověření, že výsledky modelu jsou takové, jaké by byly při pozorování stejného systému za stejných podmínek. Validace se ověřuje za pomoci zpětného testování. Výstupy ze zpětného testování se porovnají s výsledky původního modelu a poté může být určena přesnost modelu. Vzhledem k tomu, že nejsou dopředu známy budoucí hodnoty výnosností jednotlivých cenných papírů, je zapotřebí tyto hodnoty nasimulovat. Tuto simulaci lze provést například metodou Monte Carlo.

6.1 Metoda Monte Carlo

Metoda Monte Carlo je numerická simulační metoda, kde odhady náhodné veličiny mají pravděpodobnostní rozdělení. Základem této metody je určení statistického parametru veličiny, která je výsledkem náhodného děje. Vygenerovaná náhodná čísla mají stejnou pravděpodobnost, že se v sekvenci náhodných čísel objeví. Tato sekvence se neopakuje, a to ať je jakkoliv dlouhá. Metoda Monte Carlo ale nevyužívá skutečných náhodných čísel, i když je statistickými metodami od náhodných čísel není možné téměř rozlišit. Jedná se tak o pseudonáhodná čísla. (Fabian, 1998; Virius, 2010)

K simulaci cen aktiv se používá simulace Brownova pohybu, který modeluje přirozený logaritmus poměru dnešní a včerejší ceny. Tento logaritmus vyjadřuje kontinuálně složenou periodickou výnosnost. Ta má zhruba normální rozdělení dané vztahem:

$$ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \sim \Phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right), \sigma\right] \tag{38}$$

(Alexander, 2009)

Výnosnost simulovaná metodou Monte Carlo se skládá z deterministické a stochastické části. Deterministická část vyjadřuje směr, tedy očekávání, kam se cena aktiva v průběhu času pohne. Stochastická část je funkcí volality aktiva a náhodné proměnné z_t:

$$r_t = ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \alpha + z_t\sigma \tag{39}$$

kde $z_t\sigma$ je stochastická část, α deterministická část daná vzorcem $\alpha = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$. (Alexander, 2009)

Sekvenci náhodných proměnných z_t pro 251 dní lze získat v programu MS Excel za použití příkazu =NORMSINV(RAND()). Jelikož s rostoucím počtem opakování klesá velikost chyby simulace, bude provedena opakovaná simulace. Výsledné simulace bude dosaženo zprůměrováním jednotlivých simulací. (Husárová, 2012; Alexander, 2009)

6.2 Evaluace modelu

Evaluace modelu může proběhnout pomocí některého ze složených ukazatelů obsahujících výnosnost, tak současně i rizikovost. Může se jednat o metodu Value-at-risk, ukazatele výnosnosti vzhledem k tržnímu riziku, ukazatele výnosnosti vzhledem k celkovému riziku a další ukazatele (např. Information ratio, Tracking error, ….). (Husárová, 2012)

Metoda VaR může být vypočtena hned několika metodami. Jedná se o metodu variančně-kovarianční, metodu historické simulace či metodu Monte Carlo. (Husárová, 2012)

Mezi ukazatele výnosnosti vzhledem k tržnímu riziku patří Jensenova alfa a Treynorův index. Ukazatelem výnosnosti vzhledem k celkovému riziku je pak Sharpův index, který je možno využít též k určení tržního portfolia. (Husárová, 2012)

V této práci evaluace modelu proběhne za využití nasimulovaných dat. Z těchto dat budou vypočteny charakteristiky jako výnosnosti a směrodatné odchylky pro jednotlivá aktiva, které budou následně použity při výpočtech výnosností a rizikovostí jednotlivých portfolií. Ve výpočtech charakteristik pro jednotlivá portfolia budou použity tytéž váhy, které byly výsledky jednotlivých modelů vypočtených z historických dat.

6.2.1 Sharpův index

Sharpův index SR_P je ukazatelem poměru odměny k proměnlivosti. Tento poměr je kritériem na riziko upravené výnosnosti. To znamená, že měří výnosnost vzhledem k celkovému riziku portfolia, kde celkové riziko portfolia je dáno směrodatnou odchylkou výnosnosti portfolia. Sharpův index má podobu:

$$SR_P = \frac{r_P - r_f}{\sigma_P} \tag{40}$$

(Sharpe, 1994)

Nejprve je nutné stanovit přímku CML, poté se určí průměrná výnosnost a směrodatná odchylka odhadovaného portfolia. Poté je možné zakreslit přímku, která má směrnici odpovídající Sharpovu indexu do stejného grafu jako CML. Tato přímka prochází body $[0; r_f]$ a $[\sigma_P; r_P]$. Jelikož CML představuje různé kombinace bezrizikového zapůjčování a vypůjčování s investováním do tržního portfolia, je možné ho použít jako benchmark pro poměr odměny k proměnlivosti. V případě kdy je SR_P větší než směrnice CML, leželo by portfolio nad CML, což by znamenalo lepší výkonnost než trh. (Sharpe, 1994)

7 Úvod praktické části

Tato část práce je zaměřena na praktické využití metod popsaných v dřívějších kapitolách na konkrétní úloze. Bude hledáno optimální akciové portfolio sestavené z akciových titulů obchodovaných na Burze cenných papírů Praha, a.s.

7.1 Burza cenných papírů Praha

Burza cenných papírů Praha, a.s. (BCPP), jejíž historie sahá až do roku 1871, je jednou ze dvou burz cenných papírů existujících v České republice. Tou druhou je RM-SYSTÉM, česká burza cenných papírů a.s. Dříve se na pražské burze obchodovalo nejen s cennými papíry, ale i s komoditami. Po první světové válce se od obchodů s komoditami ustoupilo a byly zde obchodovány už jen cenné papíry. V meziválečném období byla pražská burza dokonce významnější než vídeňská. Nicméně s druhou světovou válkou přišel konec obchodování na pražské burze, a to na dlouhých 60 let. K obnovení obchodování došlo až 6. dubna 1993. (bcpp.cz, 2014)

K uzavírání obchodů na BCPP dochází prostřednictvím licencovaných obchodníků s cennými papíry, kteří jsou zároveň členy burzy. Jedná se zejména o významné banky a makléřské firmy. BCPP patří do skupiny CEE Stock Exchange Group (CEESEG), jejímiž členy jsou dále další tři středoevropské burzy cenných papírů. Konkrétně se jedná o Burzu cenných papírů Vídeň, Burzu cenných papírů Budapešť a Burzu cenných papírů Lublaň. CEESEG vstoupila na burzovní trh jako nový a silný protihráč v září 2009 a dnes je největší skupinou burz ve střední a východní Evropě. Na BCPP je momentálně obchodováno s cennými papíry jako jsou akcie, dluhové cenné papíry, strukturované produkty a upisovací práva. S akciemi se na BCPP obchoduje buď na Prime Market, Standard Market nebo Start Market. (bcpp.cz, 2014)

Prime Market je trh, na kterém se obchodují největší a nejprestižnější emise českých a zahraničních společností. Přijaté emise na Prime trhu splňují náročnější zákonné podmínky oficiálního trhu s cennými papíry, nebo jen zákonné podmínky regulovaného trhu. (bcpp.cz, 2014)

Standard Market je stejně jako Prime market trh určený k obchodování velkých a prestižních akcií českých i zahraničních společností a taktéž je trhem regulovaným. Rozdílem mezi Prime market a Standard Market je fakt, že burza umožňuje přijetí akcií bez souhlasu emitenta, a to za předpokladu, že jsou již obchodovány na jiném regulovaném trhu v rámci Evropské Unie. (bcpp.cz, 2014)

Start Market je na rozdíl od předchozích dvou trhů trhem neregulovaným, a to ve smyslu zákonném. Regulovaný je pouze samotnou burzou, a to takovým způsobem, aby pravidla maximálně vyhovovala emitentům a zároveň zajišťovala dostatečnou likviditu důležitou pro investory. Je specializovaný pro malé a střední firmy. (bcpp.cz, 2014)

Na BCPP nyní existují tři indexy:

- Index PX je cenovým indexem blue chips emisí, který vznikl 20.3.2006, kdy došlo ke sloučení indexů PX50 a PX-D. Aktualizuje se první burzovní den následující po třetím pátku v měsících březnu, červnu, září a prosinci.
- Index PX-TR, jehož výpočet BCPP zahájila 24.3.2014 a byl zpětně dopočítán k 20.3.2006, je dividendovým indexem blue chips emisí. Index PX-TR popisuje vývoj burzovního trhu a zohledňuje na rozdíl od indexu PX i dividendové výnosy. Báze tohoto Total Return indexu odpovídá bázi indexu PX a aktualizuje se stejně jako index PX první burzovní den následující po třetím pátku v měsících březnu, červnu, září a prosinci. (bcpp.cz, 2014 a investujeme.cz, 2014)
- Index PX-GLOB je cenový index se širokou bází, jehož aktualizace probíhá stejně jako u indexů předešlých. (bcpp.cz, 2014)

7.2 Zadání úlohy

Úkolem je sestavit akciové portfolio z akciových titulů obchodovaných na Prime Market Burzy cenných papírů Praha, a.s. ke dni 28.6.2013 s dobou trvání jeden rok, tedy do 27.6.2014. Portfolio bude sestaveno pro fyzickou osobu. Jedná se o rizikově averzního investora, který požaduje minimální výnosnost ve výši výnosnosti indexu PX-TR. Reinvestice dividend nebude brána v úvahu.

Prime Market byl vybrán z toho důvodu, že emise akcií českých a zahraničních společností na tomto trhu jsou největší a nejprestižnější. Celkem bylo z tohoto trhu vybráno jedenáct titulů a index PX-TR.

Tituly byly vybrány na základě jejich obchodování. Musely být obchodovány po celou dobu od 2.1.2009 do 27.6.2014. Tomuto parametru odpovídají Central European Media Enterprises Ltd. (CETV), ČEZ, a.s. (ČEZ), Erste Group Bank AG (ERSTE), Komerční banka, a.s. (KB), New Worl Resources Plc (NWR), O2 Czech Republic, a.s. (O2), Orco Property Group S.A. (ORCO), Pegas Nonwovens SA (PEGAS), Unipetrol, a.s. (UNIPETROL), VGP NV (VGP) a Vienna Insurance Group (VIG). Pro výpočet očekávaných hodnot jednotlivých ukazatelů jako jsou například výnosnost či rizikovost byly brány v potaz kurzy od 2.1.2009 do 28.6.2013. Starší data by byla ovlivněna finanční krizí započatou v roce 2008.

Společně s akciovými tituly bude do výpočtů zahrnut i index Burzy cenných papírů Praha, a.s. - index PX-TR. Bázi indexu PX a PX-TR za léta 2009-2013 zobrazuje následující tabulka:

Tab. 1 Báze indexů PX a PX-TR za roky 2009-2013

	2009	2010	2011	2012	2013
ČEZ	25,03%	24,81%	23,59%	20,30%	20,15%
O2	20,69%	16,45%	12,79%	16,50%	11,96%
ERSTE	20,09%	24,41%	26,89%	17,76%	20,34%
KB	17,10%	18,25%	17,54%	16,92%	17,49%
UNIPETROL	4,12%	3,09%	3,72%	4,15%	2,73%
VIG	0,60%	1,86%	2,22%	13,69%	18,34%
CETV	0,59%	2,76%	2,27%	0,97%	1,46%
PEGAS	0,33%	0,50%	0,45%	0,56%	1,31%
ORCO	0,29%	0,23%	0,23%	0,19%	0,95%
NWR	0,00%	0,00%	0,00%	4,80%	2,96%
ECM	0,18%	0,26%	0,07%	0,00%	0,00%
AAA	0,09%	0,11%	0,15%	0,16%	0,15%
ZENTIVA	6,23%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
NWN	2,93%	5,21%	7,46%	0,00%	0,00%
PHILIP MORRIS ČR	1,75%	2,06%	2,04%	3,22%	1,76%
FORTUNA	0,00%	0,00%	0,56%	0,64%	0,38%
KITD	0,00%	0,00%	0,30%	0,14%	0,00%
Suma	11,18%	7,64%	10,58%	4,16%	2,29%

Zdroj: bcpp.cz, 2014

Jak je v tabulce patrné, do indexů byly brány v úvahu i akcie společností, se kterými v sestavovaném portfoliu nebude počítáno. Suma je součtem vah těchto aktiv.

Základem pro výpočet jednotlivých ukazatelů portfolia je určení očekávaných výnosností jednotlivých akciových titulů. Pro denní výnosnost akciových titulů se bude počítat s denními závěrečnými kurzy titulů určených výše, a to v období od 2.1.2009 do 28.6.2013. Očekávaná výnosnost se pak vypočte historickou metodou ze vzorce č. 3, která je určena průměrnými historickými výnosnostmi jednotlivých akcií. Stejným způsobem bude vypočtena očekávaná výnosnost indexu PX-TR, který bude pro zjednodušení při výpočtech brán jako samostatné aktivum.

8 Výpočet ukazatelů jednotlivých aktiv

Pro výpočet očekávané výnosnosti akciových titulů je potřebné nejprve spočítat denní výnosnosti, a to podle vzorce č. 2. Následující tabulka zobrazuje průměrné denní očekávané výnosnosti jednotlivých aktiv vypočtených historickou metodou pomocí vzorce č. 3.

Tab. 2 Průměrné denní očekávané výnosnosti aktiv

	CETV	ČEZ	ERSTE	KB	NWR	O2
Kapitálový výnos (v % p.d.)	-0,0833	-0,0351	0,0681	0,0420	-0,0784	-0,0293

	ORCO	PEGAS	UNIPETROL	VGP	VIG	PX-TR
Kapitálový výnos (v % p.d.)	-0,0247	0,0794	0,0284	-0,0071	0,0550	0,0314

Tento způsob výpočtu ale nebere do úvahy dividendy, které byly u některých aktiv vyplacené. Jedná se tak pouze o kapitálovou výnosnost. Vyplacené dividendy v českých korunách u jednotlivých titulů jsou znázorněny v následující tabulce. Dividendy vyplacené v eurech byly přepočítány kurzem vyhlášeným Českou národní bankou v den výplaty dividendy. U některých aktiv dividendy ve sledovaném období nebyly vyplaceny. Jedná se o CETV, ORCO a UNIPETROL. V roce 2013 byly do úvahy brány dividendy vyplacené do konce sledovaného období – 28.6.2013.

Tab. 3 Vyplacené dividendy za léta 2009-2013

	ČEZ	ERSTE	KB	NWR	O2	PEGAS	VGP	VIG
2009	53,00	17,35	170,00	4,81	18,00	22,66	0,00	29,51
2010	50,00	16,72	270,00	5,17	20,00	23,37	6,89	23,18
2011	45,00	17,13	160,00	9,29	27,00	24,83	0,00	24,39
2012	40,00	0,00	230,00	3,23	40,00	26,28	0,00	28,02
2013	0,00	10,40	230,00	0,00	0,00	0,00	0,00	30,97

Zdroj: Kurzy.cz, Skupina ČEZ, Dividenda.cz, KB, O2, Pegas Nonwovens

Jak již bylo zmíněno, index PX-TR je dividendovým indexem, proto nejsou v tabulce obsaženy vyplacené dividendy tohoto indexu.

Nyní, když je vypočítána kapitálová výnosnost a jsou známy vyplacené dividendy, je možné spočítat celkovou výnosnost. Tentokrát bude spočítána v ročním vyjádření, a to podle vzorce č. 4. Takto vypočítaná celková výnosnost ale nezahrnuje zdanění a jedná se tak o hrubou celkovou výnosnost. Kapitálový výnos se podle Zákona č. 586/1992 Sb., o daních z příjmů zdaňuje jinak u fyzických a právnických osob. U fyzických osob se zdaňuje 15% daňovou sazbou. Výnosy z cenných papírů nakoupených v roce 2013 fyzickými osobami nepodnikateli držených po dobu minimálně šesti měsíců jsou osvobozeny od daně. V roce 2014 se ale tento daňový test pro osvobození výnosů od daně u fyzických osob nepodnikatelů prodloužil, a to na dobu tří let. Další novinkou v osvobození od daně u fyzických osob nepodnikatelů je osvobození celkových ročních příjmů z prodeje cenného papíru nepřesahujících 100 000 Kč. Fyzická osoba podnikatel těchto výhod využít nemůže, ale může si snížit základ daně dalšími výdaji či náklady vynaložené k dosažení, zajištění či udržení svých příjmů z podnikání. U právnických osob se kapitálový výnos podle Zákona č. 586/1992 Sb. o daních z příjmů zdaňuje 19% daňovou sazbou. Dividendový výnos se podle téhož zákona zdaňuje jak u fyzických, tak u právnických osob, a to shodnou výší daňové sazby 15 %. (patria.cz, 2011; Zákon č.586/1992 Sb)

I přesto, že by se mělo pracovat se zdaněnými kapitálovými výnosy, v této práci bude tento fakt zanedbán, a to nejen pro zjednodušení, ale i proto, že většina modelů zanedbání zdanění má ve svých předpokladech. Dividendy naopak zdaněny budou, a to z toho důvodu, že zdanění dividend je totožné jak pro fyzické, tak pro právnické osoby a navíc v době trvání portfolia se na rozdíl od zdanění kapitálových výnosů nikterak neměnilo. Čistá celková výnosnost se počítá za pomocí vzorce:

$$r_i = \frac{p_{i_t} + \sum CF * (1 - s_D)}{p_{i_{t-1}}} \tag{41}$$

kde s_D je daňová sazba ve výši 15 %. V následující tabulce jsou porovnány kapitálové výnosnosti, hrubé celkové výnosnosti a čisté celkové výnosnosti, a to za období od 2.1.2009 do 28.6.2013.

Tab. 4 Porovnání kapitálové a celkové výnosnosti

	CETV	**ČEZ**	**ERSTE**	**KB**	**NWR**	**O2**
Kapitálová výnosnost (v %)	-83,41	-40,79	26,46	20,85	-75,93	-35,29
Celková nezdaněná výnosnost (v %)	-83,41	-17,55	41,16	55,37	-45,85	-10,59
Celková zdaněná výnosnost (v %)	-83,41	-21,04	38,95	50,20	-50,36	-14,29

	ORCO	PEGAS	UNIPE TROL	VGP	VIG	PX-TR
Kapitálová výnosnost (v %)	-66,49	116,74	17,81	-7,89	43,87	27,12
Celková nezdaněná výnosnost (v %)	-66,49	157,38	17,81	-6,08	64,80	27,12
Celková zdaněná výnosnost (v %)	-66,49	151,29	17,81	-6,35	61,66	27,12

Vzhledem k tomu, že byly vybrány akcie, se kterými se obchoduje po celé sledované období, můžeme výsledky mezi sebou relevantně porovnávat.

K dalším statistickým charakteristikám, které je potřebné určit, patří rizikovost (volalita) jednotlivých historických výnosností, která se spočítá pomocí směrodatné odchylky výnosností. Směrodatná odchylka je dána vzorcem č. 10. Kromě směrodatné odchylky je vhodné určit i rozptyl jednotlivých aktiv, který je dán umocněním směrodatné odchylky. Jak směrodatná odchylka σ_i, tak i rozptyl σ_i^2 jsou v následující tabulce.

Tab. 5 Rozptyly a směrodatné odchylky denních výnosností

	CETV	ČEZ	ERSTE	KB	NWR	O2
Směrodatná odchylka (v %)	3,91	1,50	3,08	2,24	3,09	1,35
Rozptyl	0,0015	0,0002	0,0009	0,0005	0,0010	0,0002

	ORCO	PEGAS	UNIPET ROL	VGP	VIG	PX-TR
Směrodatná odchylka (v %)	3,82	1,48	1,67	0,16	2,14	1,42
Rozptyl	0,0015	0,0002	0,0003	0,0000	0,0005	0,0002

Pro určení rizika celého portfolia je nutné vypočítat kovarianční matici, která je symetrická a na její diagonále jsou rozptyly jednotlivých aktiv. Jednotlivé kovariance se vypočítají pomocí vzorce č. 12. Uspořádání kovariancí do kovarianční matice probíhá podle vzorce č. 13. Kovarianční matice je zobrazena v tabulce č. 25 v kapitole Přílohy.

Spočtené kovariance lze použít při výpočtu korelací jednotlivých aktiv, které lze stejně jako kovariance zobrazit v korelační matici. K výpočtu korelace aktiv se využívá vzorce č. 14. Pro sestavení korelační matice se postupuje podle vzorce č. 15. Korelační matice je uvedená v tabulce č. 26 v kapitole Přílohy. Jak je z tabulky patrné, nejsilnější pozitivní korelace je mezi aktivem ERSTE a PX-TR, což není na jednu stranu příliš překvapující, jelikož ERSTE se značně podílí na bázi indexu PX-TR. Na druhou stranu se nejvíce na bázi indexu PX-TR podílí ČEZ, ale jejich korelace je oproti předchozí dvojici nižší téměř o 0,2. Naopak nejvyšší záporná korelace je mezi aktivy NWR a VGP. V tomto případě je tak tomu zřejmě proto, že NWR patří do těžařského sektoru, který je proticyklický, zatímco VGP náleží do sektoru realitního, který se naopak chová procyklicky.

Vzhledem k tomu, že nejčastěji se pracuje s ročními hodnotami ukazatelů, je vhodné jak výnosnosti, rizikovost, tak i další ukazatele anualizovat. Anualizace ale nebude mít vliv na výsledky modelů. U anualizace průměrných výnosností a směrodatné odchylky se denní hodnoty vynásobí průměrným počtem obchodních dní v roce, což je v tomto případě po zaokrouhlení 251 obchodních dní. Kovariance a rozptyl se převede na roční hodnotu vynásobením umocněného průměrného počtu obchodních dní, tedy 251^2. Anualizované charakteristiky jsou zobrazeny v následující tabulce, kromě kovarianční matice zobrazené v tabulce č. 27 v Přílohách a korelační matice, která zůstává ve stejné podobě jako v tabulce č. 26 v Přílohách.

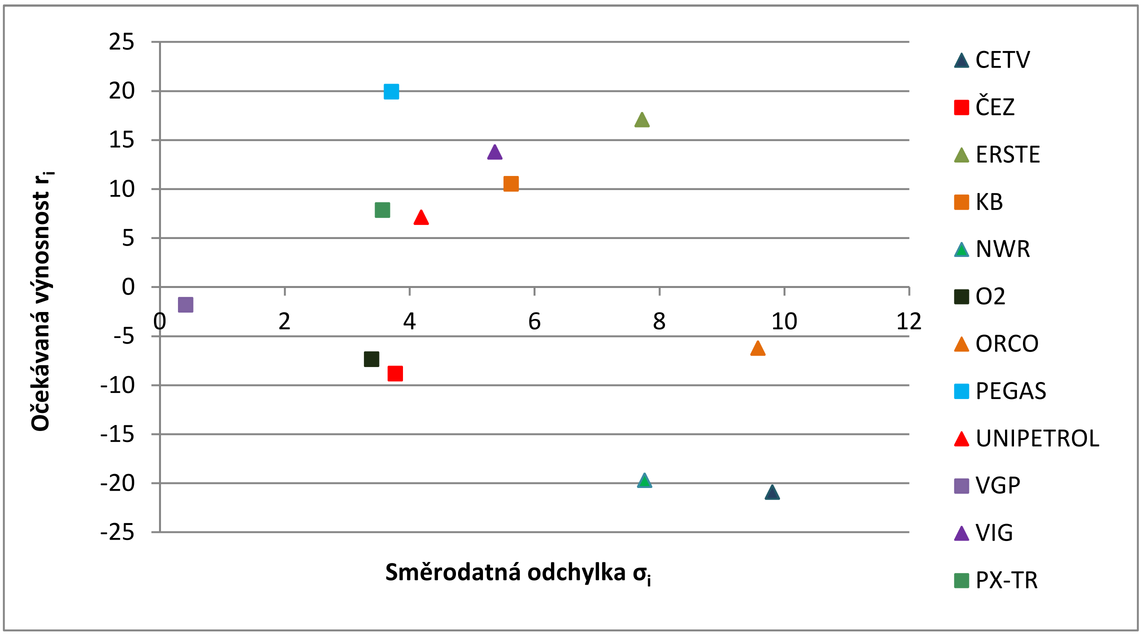
Tab. 6 Anualizované výnosnosti, směrodatné odchylky a rozptyly

	CETV	**ČEZ**	**ERSTE**	**KB**	**NWR**	**O2**
Kapitálová výnosnost (v % p.a.)	-18,54	-9,07	5,88	4,63	-16,88	-7,85
Celková výnosnost nezdaněná (v % p.a.)	-18,54	-3,90	9,15	12,31	-10,19	-2,35
Celková výnosnost zdaněná (v % p.a.)	-18,54	-4,68	8,66	11,16	-11,20	-3,18
Směrodatná odchylka (v % p.a.)	9,8097	3,7699	7,7213	5,6278	7,7658	3,3907
Rozptyl	96,2276	14,2119	59,6187	31,6726	60,3080	11,4969

	ORCO	**PEGAS**	**UNIPETROL**	**VGP**	**VIG**	**PX-TR**
Kapitálová výnosnost (v % p.a.)	-14,78	25,95	3,96	-1,76	9,75	6,03
Celková výnosnost nezdaněná (v % p.a.)	-14,78	34,99	3,96	-1,35	14,41	6,03
Celková výnosnost zdaněná (v % p.a.)	-14,78	33,63	3,96	-1,41	13,71	6,03
Směrodatná odchylka (v % p.a.)	9,5787	3,7118	4,1884	0,4118	5,3633	3,5673
Rozptyl	91,7516	13,7773	17,5425	0,1696	28,7647	12,7259

Jak je možné vidět, některá aktiva mají i po započtení dividend výnosnost zápornou, a proto s nimi dále v modelech nebude počítáno. Konkrétně se jedná o aktiva CETV, ČEZ, NWR, O2, ORCO a VGP.

V dalších částech této práce bude při výpočtech výnosností používána očekávaná výnosnost, která odpovídá celkové výnosnosti aktiv se zdaněnou dividendou. Na následujícím obrázku jsou zobrazené kombinace jednotlivých výnosností a rizikovostí pro jednotlivá aktiva:



Obr. 12 Vztah výnosnosti a rizikovosti jednotlivých aktiv

Jak je z grafu patrné, vynechány budou všechna aktiva nacházející se pod osou x. Jde o aktiva, která mají zápornou očekávanou výnosnost a jejich názvy byly zmíněny již výše. Naopak dále bude pracováno s aktivy nacházející se nad osou x, tedy s aktivy ERSTE, KB, PEGAS, UNIPETROL, VIG a PX-TR. Již zde je možno si povšimnout, které z aktiv bude pravděpodobně v optimálních portfoliích převažovat. Aktivum PEGAS nabízí ze všech aktiv nejvyšší výnosnost a zároveň jeho rizikovost je oproti zbylým aktivům nacházejících se nad osou x relativně nízká (nižší je pouze u PX-TR).

9 Hledání optimálního portfolia

V této části práce bude za pomoci programů MATLAB a LINGO vypočteno optimální portfolio. Výsledky z obou programů budou podobné, jelikož programy používají jen trochu jiný algoritmus při výpočtech.

Bude provedeno hned několik výpočtů optimálního portfolia, a to v závislosti na dříve uvedených přístupech teorie portfolia.

9.1 Markowitzův model

Jak již bylo dříve zmíněno, jednou z podob Markowitzova modelu je model kvadratického programování, který minimalizuje rizikovost portfolia za podmínky dosažení alespoň předem stanovené výnosnosti. V tomto případě je stanovená výnosnost rovna celkové výnosnosti indexu PX-TR po zdanění 6,03 %. Další podmínkou tohoto modelu je, aby součet vah jednotlivých aktiv portfolia byl roven jedné. Poslední podmínkou je, aby suma vah jednotlivých aktiv v portfoliu byla rovna jedné. Pro výpočet výnosnosti portfolia se použije vztah č. 6. Pro určení rizikovosti portfolia pak vzorce č. 18.

Všeobecný model Markowitzova přístupu je znázorněn v podkapitole 5.1. Model tak bude vypadat následovně:

Minimalizuj:

$$z^* = min\{\sigma_p\} \tag{42}$$

za podmínek:

$$r_p \geq r_d \tag{43}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \tag{44}$$

$$w_i \geq 0 \tag{45}$$

kde r_d značí minimální požadovanou výnosnost portfolia, která v tomto příkladě byla určena na 6,03 % p.a. Konkrétní podoba matematického modelu po dosazení příslušných parametrů je:

$$z^* = min(\ 59{,}6187 * w_{ERSTE}^2 \ + \ 31{,}6726 * \ w_{KB}^2 \ + \ 13{,}7773 * w_{PEGAS}^2 \ + 17{,}5425 * w_{UNIPETROL}^2 \ + \ 28{,}7647 * w_{VIG}^2 \ + \ 12{,}7259 * w_{PXTR}^2 \ + 2 * (\ 23{,}9371 * w_{ERSTE} * w_{KB} \ + \ 7{,}0930 * w_{ERSTE} * w_{PEGAS} + \ 12{,}6467 * w_{ERSTE} * w_{UNIPETROL} \ + \ 21{,}9030 * w_{ERSTE} * w_{VIG} + \ 23{,}3622 * w_{ERSTE} * w_{PXTR} \ + 5{,}8509 * w_{KB} * w_{PEGAS} \ + \ 9{,}0968 * w_{KB} * w_{UNIPETROL} \ + \ 11{,}8481 * w_{KB} * w_{VIG} \ + \ 15{,}0979 * w_{KB} * w_{PXTR} \ + 4{,}8003 * w_{PEGAS} * w_{UNIPETROL} + \ 3{,}5342 * w_{PEGAS} * w_{VIG} + \ 4{,}8931 * w_{PEGAS} * w_{PXTR} + \ 5{,}2257 * w_{UNIPETROL} * w_{VIG} \ + \ 7{,}8331 * w_{UNIPETROL} * w_{PXTR} \ + 10{,}5317 * w_{VIG} * w_{PXTR}))^{1/2}$$

za podmínek:

I.

$$0{,}0866 * w_{ERSTE} + \ 0{,}01116 * w_{KB} \ + \ 0{,}3363 * w_{PEGAS} + \ 0{,}0396 * w_{UNIPETROL} + \ 0{,}1371 * w_{VIG} \ + \ 0{,}0603 * w_{PXTR} \geq 0{,}0603$$

II.

$$w_{ERSTE} + \ w_{KB} \ + w_{PEGAS} + \ w_{UNIPETROL} \ + \ w_{VIG} \ + \ w_{PXTR} = 1$$

III.

$$w_{ERSTE}, w_{KB}, w_{PEGAS}, w_{UNIPETROL}, w_{VIG}, w_{PXTR} \geq 0$$

Výsledky modelu z programů MATLAB a LINGO jsou zobrazeny v následující tabulce:

Tab. 7 Optimální řešení Markowitzova modelu

	MATLAB	LINGO
w_{ERSTE}	0,01%	0,00%
w_{KB}	0,23%	0,24%
w_{PEGAS}	93,90%	93,92%
$w_{UNIPETROL}$	0,02%	0,03%
w_{VIG}	1,93%	1,91%
w_{PXTR}	3,91%	3,90%
Výnosnost portfolia r_P	6,03%	6,03%
Rizikovost portfolia σ_P	3,58%	3,58%

Pomocí optimalizace portfolia Markowitzovým modelem bylo dosaženo stejné výnosnosti jako v případě investování jen do indexu PX-TR, a to přitom za podstoupení vyššího rizika, které v případě diverzifikace činí 3,58 %, zatímco u indexu PX-TR rizikovost činila 3,57 %. Vyšší rizikovost optimálního portfolia než indexu PX-TR může být zapříčiněna složením indexu PX-TR, který obsahuje i jiná aktiva, než aktiva v optimálním portfoliu, a tudíž je celkově jeho rizikovost nižší. Další příčinou může být způsob sestavování indexu oproti portfoliu. Index je sestavován čtyřikrát ročně, tudíž některé jeho složky mohou být čtvrtletně méně rizikové (případně i výnosnější) než pokud by index byl sestavován jednou ročně, jako optimální portfolio. Tím pádem rozdíl rizikovosti o jednu setinu procentního bodu je brán za velmi dobrý výsledek.

Obvykle pokud investor požaduje vyšší výnos, musí podstoupit větší riziko. Jak ale investor určí, zda riziko, které podstupuje, je vzhledem k výši výnosu přijatelné? Může se rozhodnout podle velikosti výnosu připadajícího na jednotku rizika. Tento výnos na jednotku rizika bude chtít samozřejmě co nejvyšší, tudíž půjde o maximalizační úlohu lomeného programování, která bude mít následující podobu:

$$z^* = max\left\{\frac{r_p}{\sigma_p}\right\} \tag{46}$$

za podmínek:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \tag{47}$$

$$w_i \geq 0 \tag{48}$$

Konkrétní podoba matematického modelu po dosazení příslušných parametrů je:

$$z^* = max\,(0{,}0866 * w_{ERSTE} + 0{,}01116 * w_{KB} + 0{,}3363 * w_{PEGAS} + 0{,}0396 * w_{UNIPETROL} + 0{,}1371 * w_{VIG} + 0{,}0603 * w_{PXTR}) /(59{,}6187 * w_{ERSTE}^2 + 31{,}6726 * w_{KB}^2 + 13{,}7773 * w_{PEGAS}^2 + 17{,}5425 * w_{UNIPETROL}^2 + 28{,}7647 * w_{VIG}^2 + 12{,}7259 * w_{PXTR}^2 + 2 * (23{,}9371 * w_{ERSTE} * w_{KB} + 7{,}0930 * w_{ERSTE} * w_{PEGAS} + 12{,}6467 * w_{ERSTE} * w_{UNIPETROL} + 21{,}9030 * w_{ERSTE} * w_{VIG} + 23{,}3622 * w_{ERSTE} * w_{PXTR} + 5{,}8509 * w_{KB} * w_{PEGAS} + 9{,}0968 * w_{KB} * w_{UNIPETROL} + 11{,}8481 * w_{KB} * w_{VIG} + 15{,}0979 * w_{KB} * w_{PXTR} + 4{,}8003 * w_{PEGAS} * w_{UNIPETROL} + 3{,}5342 * w_{PEGAS} * w_{VIG} + 4{,}8931 * w_{PEGAS} * w_{PXTR} + 5{,}2257 * w_{UNIPETROL} * w_{VIG} + 7{,}8331 * w_{UNIPETROL} * w_{PXTR} + 10{,}5317 * w_{VIG} * w_{PXTR}))^{1/2}$$

za podmínek:
I.

$$w_{ERSTE} + w_{KB} + w_{PEGAS} + w_{UNIPETROL} + w_{VIG} + w_{PXTR} = 1$$

II.

$$w_{ERSTE}, w_{KB}, w_{PEGAS}, w_{UNIPETROL}, w_{VIG}, w_{PXTR} \geq 0$$

První omezující podmínka modelu ukládá, aby součet vah jednotlivých aktiv v optimálním portfoliu byl roven jedné neboli 100 %. Druhá podmínka zakazuje krátkou pozici, tedy že jednotlivé váhy musí být větší nebo rovny nule.

Optimální řešení tohoto modelu je uvedeno v následující tabulce:

Tab. 8 Řešení maximalizace poměru výnosnosti k rizikovosti portfolia

	MATLAB	LINGO
w_{ERSTE}	2,11%	2,10%
w_{KB}	0,00%	0,00%
w_{PEGAS}	82,21%	82,18%
$w_{UNIPETROL}$	1,46%	1,47%
w_{VIG}	6,09%	6,10%
w_{PXTR}	8,13%	8,15%
Výnosnost portfolia r_P	29,22%	29,21%
Rizikovost portfolia σ_P	3,34%	3,34%
Kompromis r_p/σ_p	8,75	8,75

Tento model nabídl výrazně vyšší výnosnost oproti předchozímu modelu. Je tomu tak pravděpodobně z toho důvodu, že v tomto modelu došlo ke změně omezujících podmínek, konkrétně k vypuštění podmínky o minimální výnosnosti. Navíc portfolio získané z tohoto modelu má oproti Markowitzově řešení nižší rizikovost, a to o 0,24 procentního bodu. Váhy jednotlivých aktiv jsou ale v obou modelech obdobné. V modelu maximalizace poměru výnosnosti k rizikovosti portfolia došlo pouze k výraznějšímu poklesu váhy u aktiva PEGAS a k růstu u aktiv VIG a PX-TR. Nicméně PEGAS se na portfoliu stále podílí největší měrou.

9.2 Přímka kapitálového trhu CML

V případě, kdy k investičním aktivům, ze kterých bude tvořeno optimální portfolio, bude přidáno bezrizikové aktivum, vznikne tím nový model CML. Za bezrizikové aktivum v tomto případě bude považována státní pokladniční poukázka emitovaná 28.6.2013 Ministerstvem financí České republiky splatná 27.6.2014. Její výnosnost činí 0,16 % p.a. Pokud má toto aktivum představovat bezrizikovou investici, pak musí být rozptyl výnosnosti tohoto aktiva roven nule. To stejné musí platit pro kovariance výnosností s ostatními aktivy. (mfcr.cz, 2013)

Pokud jsou kovariance výnosností bezrizikového aktiva nulové, pak je logické, že kriteriální funkce zůstává ve stejné podobě jako v předchozím případě minimalizace rizika portfolia v Markowitzově modelu. Změna nastane pouze u omezujících podmínek, ke kterým bude přidána váha a výnosnost bezrizikového instrumentu. První omezující podmínka bude vyjadřovat minimální výnosnost portfolia, a to alespoň na úrovni 6,03 % p.a. Druhá podmínka bude zaručovat, aby součet vah jednotlivých aktiv v optimálním portfoliu byl roven 100 %. Posledním podmínka zakáže krátkou pozici, váhy aktiv tedy musí být nezáporné. Omezující podmínky pak budou mít následující podobu:

I.

$$0{,}0866 * w_{ERSTE} + 0{,}01116 * w_{KB} + 0{,}3363 * w_{PEGAS} + 0{,}0396 * w_{UNIPETROL} + 0{,}1371 * w_{VIG} + 0{,}0603 * w_{PXTR} + 0{,}0016 * w_f \geq 0{,}0603$$

II.

$$w_{ERSTE} + w_{KB} + w_{PEGAS} + w_{UNIPETROL} + w_{VIG} + w_{PXTR} + w_f = 1$$

III.

$$w_{ERSTE}, w_{KB}, w_{PEGAS}, w_{UNIPETROL}, w_{VIG}, w_{PXTR}, w_f \geq 0$$

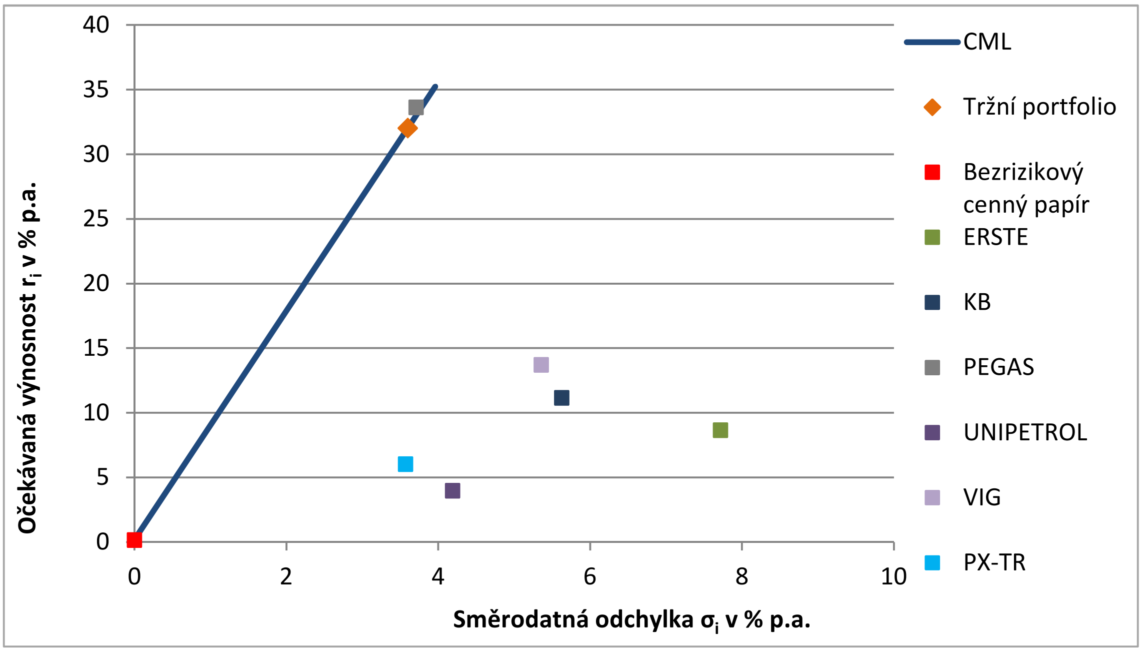
Výsledky tohoto modelu řešené opět v programech MATLAB a LINGO jsou znázorněné v následující tabulce:

Tab. 9 Optimální řešení pro model CML

	MATLAB	**LINGO**
w_{ERSTE}	0,05%	0,05%
w_{KB}	0,04%	0,04%
w_{PEGAS}	7,42%	7,42%
$w_{UNIPETROL}$	1,95%	1,95%
w_{VIG}	5,11%	5,11%
w_{PXTR}	0,01%	0,01%
w_f	85,42%	85,42%
Výnosnost portfolia r_P	6,03%	6,03%
Rizikovost portfolia σ_P	0,46%	0,46%

V tomto případě je výsledek modelu zcela odlišný od předchozích dvou. Největší změna se promítla ve vahách jednotlivých aktiv. V tomto modelu nepřevažuje PEGAS, ale bezrizikový cenný papír, což je ale vzhledem k minimalizaci rizikovosti portfolia vcelku pochopitelné. S tím souvisí i velmi nízká rizikovost portfolia oproti předchozím dvěma portfoliím – bezrizikový cenný papír má nulovou rizikovost a jeho největší podíl v portfoliu snižuje celkovou rizikovost optimálního portfolia. Výnosnost portfolia je v tomto případě stejná jako u Markowitzova modelu, a to zřejmě kvůli podmínce minimální výnosnosti.

Nyní je možné vykreslit přímku kapitálového trhu CML. Graf bude znázorňovat kombinace rizikovostí a výnosností. Přímka CML bude vycházet ze souřadnice [0; 0,0016] a je tečnou efektivní hranice. Bod, kde se přímka CML dotýká efektivní hranice, se nazývá tržní portfolio. Tržní portfolio má souřadnice [σ_M; r_M], jak bude následně spočteno konkrétně [3,6; 32,02] a její směrnice má tvar (r_M – r_f)/ σ_M.



Obr. 13 Přímka CML

Ačkoliv se může zdát, že přímka CML začíná v bodě [0; 0], není tomu tak. Přímka skutečně začíná v bodě [0; 0,16], ale tento bod je počátku os velmi blízko. Jak je z grafu patrné, téměř všechna aktiva se nacházejí pod přímkou CML, jak bylo uvedeno v kapitole 5.2. Pouze PEGAS se nachází v blízkosti přímky CML.

Bod dotyku přímky CML a tržního portfolia lze určit za pomoci maximalizace Sharpova indexu. Sharpův index udává, jak velký dodatečný výnos nad bezrizikový investor získá za každou další podstoupenou jednotku rizika.

V této chvíli je potřebné určit tržní portfolio, a to tedy za pomoci Sharpova indexu, jehož podobu lze nalézt ve vzorci č. 40. První omezující podmínkou tohoto modelu je, aby výnosnost portfolia byla na nějaké minimální úrovni, která je i pro tento model dána výnosností indexu PX-TR – 6,03 %. Druhá podmínka požaduje, aby suma vah aktiv byla rovna jedné. Třetí podmínka opět zakazuje krátkou pozici – nutnost nezáporných vah aktiv. Model tak bude mít podobu:

$$z^* = max\left\{\frac{r_p - r_f}{\sigma_p}\right\} \tag{49}$$

za podmínek:

$$r_p \geq r_d \tag{50}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \tag{51}$$

$$w_i \geq 0 \tag{52}$$

Konkrétní podoba matematického modelu po dosazení příslušných parametrů je:

$$z^* = max\ (0{,}0866 * w_{ERSTE} + 0{,}01116 * w_{KB} + 0{,}3363 * w_{PEGAS} + 0{,}0396 * w_{UNIPETROL} + 0{,}1371 * w_{VIG} + 0{,}0603 * w_{PXTR} - 0{,}0016) /(59{,}6187 * w_{ERSTE}^2 + 31{,}6726 * w_{KB}^2 + 13{,}7773 * w_{PEGAS}^2 + 17{,}5425 * w_{UNIPETROL}^2 + 28{,}7647 * w_{VIG}^2 + 12{,}7259 * w_{PXTR}^2 + 2 * (23{,}9371 * w_{ERSTE} * w_{KB} + 7{,}0930 * w_{ERSTE} * w_{PEGAS} + 12{,}6467 * w_{ERSTE} * w_{UNIPETROL} + 21{,}9030 * w_{ERSTE} * w_{VIG} + 23{,}3622 * w_{ERSTE} * w_{PXTR} + 5{,}8509 * w_{KB} * w_{PEGAS} + 9{,}0968 * w_{KB} * w_{UNIPETROL} + 11{,}8481 * w_{KB} * w_{VIG} + 15{,}0979 * w_{KB} * w_{PXTR} + 4{,}8003 * w_{PEGAS} * w_{UNIPETROL} + 3{,}5342 * w_{PEGAS} * w_{VIG} + 4{,}8931 * w_{PEGAS} * w_{PXTR} + 5{,}2257 * w_{UNIPETROL} * w_{VIG} + 7{,}8331 * w_{UNIPETROL} * w_{PXTR} + 10{,}5317 * w_{VIG} * w_{PXTR}))^{1/2}$$

za podmínek:

I.

$$0{,}0866 * w_{ERSTE} + 0{,}01116 * w_{KB} + 0{,}3363 * w_{PEGAS} + 0{,}0396 * w_{UNIPETROL} + 0{,}1371 * w_{VIG} + 0{,}0603 * w_{PXTR} \geq 0{,}0603$$

II.

$$w_{ERSTE} + w_{KB} + w_{PEGAS} + w_{UNIPETROL} + w_{VIG} + w_{PXTR} = 1$$

III.

$$w_{ERSTE}, w_{KB}, w_{PEGAS}, w_{UNIPETROL}, w_{VIG}, w_{PXTR} \geq 0$$

Výsledky modelu obou programů jsou opět v následující tabulce:

Tab. 10 Optimální řešení úlohy maximalizace Sharpova indexu

	MATLAB	LINGO
w_{ERSTE}	0,07%	0,07%
w_{KB}	4,61%	4,61%
w_{PEGAS}	93,28%	93,28%
$w_{UNIPETROL}$	0,02%	0,02%
w_{VIG}	0,07%	0,07%
w_{PXTR}	1,94%	1,94%
Výnosnost portfolia r_P	32,02%	32,02%
Rizikovost portfolia σ_P	3,60%	3,60%
Sharpův index	8,85	8,85

Tržní portfolio, které je optimálním řešením úlohy, je složené ze všech šesti aktiv. Největší podíl v něm má, jak je již zvykem, aktivum PEGAS. Proto je i v grafu na obrázku č. 13 v těsné blízkosti tržního portfolia. Nejmenší zastoupení v tržním portfoliu má UNIPETROL. Stejného složení portfolia by bylo dosaženo i v případě, kdy by z jakéhokoliv z portfolií získaných minimalizací rizikovosti u portfolia obsahujícího bezrizikové aktivum bylo toto aktivum poměrně rozděleno mezi zbylé složky portfolia.

9.3 Přímka cenného papíru SML

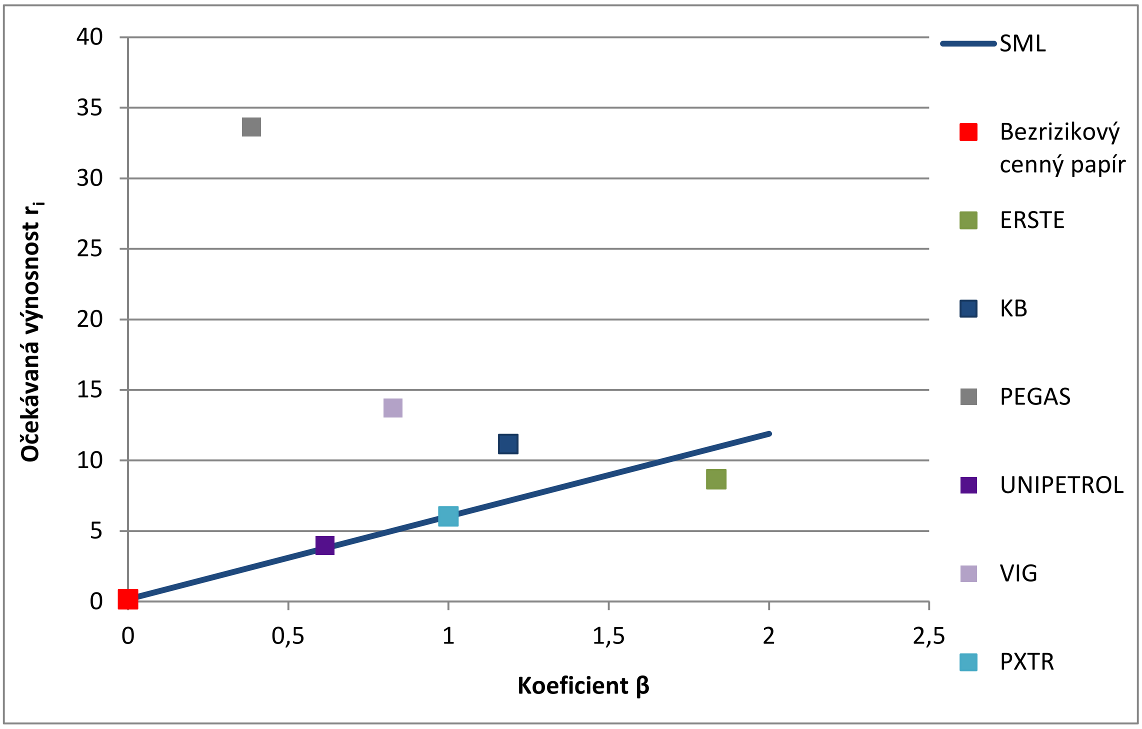
Jak již bylo zmíněno v kapitole 5.2, beta koeficient je důležitou charakteristikou aktiva a zároveň součástí rovnice přímky SML. Výpočet koeficientu beta se provede pomocí vzorce č. 22. Další složkou rovnice přímky SML je konstanta alfa vyjadřující rozdíl mezi očekávanou výnosností a rovnovážnou očekávanou výnosností. Výpočet konstanty alfa bude proveden podle vztahu č. 26. Pro výpočet konstanty alfa je ale ještě předtím nutné dopočítat rovnovážnou očekávanou výnosnost, a to za využití vzorce č. 27. Hodnoty koeficientu beta, konstanty alfa a rovnovážné očekávané výnosnosti pro jednotlivé tituly jsou znázorněny v následující tabulce:

Tab. 11 Hodnoty konstanty α, koeficientu β a roční rovnovážné očekávané výnosnosti pro jednotlivá aktiva

	ERSTE	KB	PEGAS	UNIPETROL	VIG	PX-TR
Konstanta α_i	-0,0241	0,0401	0,3132	0,0025	-0,0640	0,0000
Beta koeficient β_i	1,8358	1,1864	0,3845	0,6155	0,8276	1,0000
Rovnovážná očekávaná výnosnost v % p.a.	11,07	7,15	2,32	3,71	4,99	6,03

V tabulce lze vidět, že nejvyšší hodnotu koeficientu beta má aktivum ERSTE. Z toho důvodu je možné očekávat při růstu očekávané výnosnosti portfolia i růst očekávané výnosnosti tohoto aktiva. Opačně tomu bude u aktiva PEGAS, které má beta koeficient ze všech aktiv nejnižší. To jestli je cenný papír nadhodnocený či podhodnocený, vyjadřuje konstanta alfa. O podhodnocené cenné papíry jde v případě titulů KB, PEGAS a UNIPETROL. Nicméně kromě titulu PEGAS je ve všech těchto případech sice alfa kladná, ale je tak nízká, že se blíží téměř 0. Z toho důvodu je možné hovořit o téměř správně ohodnocených cenných papírech. Naopak nadhodnocenými cennými papíry podle konstanty alfa jsou ERSTE a VIG. I v případě těchto cenných papírů je alfa velmi nízká, a proto jde o téměř správně oceněné cenné papíry.

S nyní již známými koeficienty beta bude vytvořen graf, jenž bude znázorňovat závislost koeficientu beta na očekávané výnosnosti v % p.a. vypočítané z historických dat. Zároveň bude graf zobrazovat přímku SML, která prochází souřadnicemi [0; 0,16] a [1; 6,03] a její směrnice odpovídá rozdílu tržní výnosnosti a bezrizikové výnosnosti *($r_M - r_f$)*, což je 5,87 %.



Obr. 14 Přímka SML

V případě, kdy je vypočítaná očekávaná rovnovážná výnosnost vyšší než skutečná, tvoří aktivum nižší výnosnost, než která by odpovídala jejímu systematickému riziku vzhledem k beta koeficientu aktiva. Těmto aktivům odpovídají všechny nacházející se pod přímkou SML. O nadhodnocený cenný papír se tedy jedná podle tohoto grafu v případě aktiva ERSTE. Podhodnocené jsou pak PEGAS, VIG a KB. UNIPETROL je podle grafu správně oceněný.

Aby bylo možné vypočítat optimální portfolio, je nutné určit očekávané výnosnosti cenných papírů, které jsou lineárně závislé na výnosnosti tržního portfolia, včetně rozptylu chybového členu. Lineární výnosnost lze vypočíst za pomoci vztahu č. 21. Chybový člen je rozdílem mezi historickými a lineárními výnosnostmi.

Tab. 12 Lineární výnosnost a rozptyl chybového členu ε_i

	ERSTE	**KB**	**PEGAS**	**UNIPETROL**	**VIG**	**PX-TR**
Lineární výnosnost v % p.a.	8,66	11,16	33,63	3,96	-1,41	6,03
Rozptyl chybového členu σ_ε^2	0,0667	0,0548	0,0474	0,0507	0,0799	0,0000

Při optimalizaci portfolia v tomto případě bude minimalizována rizikovost celého portfolia, která je uvedena ve vzorci č. 34. Model bude mít opět omezující podmínky. Tou první je zákaz krátké pozice, tedy nezápornost vah jednotlivých aktiv. Druhou podmínkou je, aby suma vah jednotlivých aktiv byla rovna jedné. Třetí podmínka zaručuje minimální výnosnost portfolia nad danou výnosnost, která je v tomto případě 6,03 %, což je výnosnost indexu PX-TR.

Model tak bude mít obecnou podobu:

$$z^* = min\,\{\textstyle\sum_{i=1}^{n}(w_i^2 \beta_i^2)\sigma_M^2 + \sum_{i=1}^{n}(w_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2)\} \qquad (53)$$

za podmínek:

$$w_i \geq 0 \qquad (54)$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \qquad (55)$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i r_M) \geq r_d \qquad (56)$$

Po dosazení příslušných parametrů do modelu:

$$\begin{aligned} z^* = min\{(&1{,}8358^2 * w_{ERSTE}^2 + 1{,}1864^2 * w_{KB}^2 + 0{,}3845^2 * w_{PEGAS}^2 + 0{,}6155^2 \\ &* w_{UNIPETROL}^2 + 0{,}8276^2 * w_{VIG}^2) * 0{,}0507 + 0{,}0667 * w_{ERSTE}^2 \\ &+ 0{,}0548 * w_{KB}^2 + 0{,}0474 * w_{PEGAS}^2 + 0{,}0507 * w_{UNIPETROL}^2 \\ &+ 0{,}0799 * w_{VIG}^2\} \end{aligned}$$

I.

$$w_{ERSTE}, w_{KB}, w_{PEGAS}, w_{UNIPETROL}, w_{VIG} \geq 0$$

II.

$$w_{ERSTE} + w_{KB} + w_{PEGAS} + w_{UNIPETROL} + w_{VIG} = 1$$

III.

$$0{,}0866 * w_{ERSTE} + 0{,}1116 * w_{KB} + 0{,}3363 * w_{PEGAS} + 0{,}0396 * w_{UNIPETROL} - 0{,}0141 * w_{VIG} \geq 0{,}0603$$

Následující tabulka ukazuje výsledky z optimalizace modelu z programů MATLAB a LINGO:

Tab. 13 Optimální řešení pro model SML

	MATLAB	LINGO
w_{ERSTE}	17,21%	17,20%
w_{KB}	21,03%	21,05%
w_{PEGAS}	24,44%	24,42%
$w_{UNIPETROL}$	22,83%	22,86%
w_{VIG}	14,48%	14,47%
Beta portfolia β_P	0,9198	0,9198
Výnosnost portfolia r_P	12,76%	12,75%
Rizikovost portfolia σ_P	3,70%	3,70%

Jak je z tabulky patrné, výnosnost tohoto portfolia je vyšší téměř dvojnásobně oproti výnosnosti zde stanoveného tržního portfolia PX-TR. Této vyšší výnosnosti bylo dosaženo na úkor jen o přibližně 0,13 procentního bodu vyšší rizikovosti. Pokud jde o váhy aktiv v portfoliu, ty jsou zde jiné, než ve většině předešlých portfolií. I když zde má stále největší zastoupení PEGAS, jsou zde ostatní aktiva zastoupena téměř ve stejné proporci. Beta portfolia je blízko 1, což znamená, že systematické riziko portfolia a odměna za něj jsou blíže k tržnímu portfoliu PX-TR.

9.4 Black-Littermanův model

Poslední portfolio bude sestavené na základě Black-Littermanova modelu, který obsahuje názory experta na vývoj výnosností, což je největší výhoda tohoto modelu. Nejprve je nutné stanovit právě tyto expertní názory, které ovšem nemusí být určené pro všechny cenné papíry. Celkem byly autorkou této práce vysloveny tři názory:

- výnosy z akcií KB budou 1,416 % p.a.
- PEGAS bude mít dvakrát větší výnosy než VIG
- výnosy ERSTE budou o 4,5 procentního bodu vyšší než UNIPETROL

Tyto názory je potřeba vyjádřit jako lineární kombinace středních hodnot výnosů jednotlivých aktiv. To vypadá následně:

$$\mu_{KB} = 0{,}01416$$

$$2\mu_{PEGAS} - \mu_{VIG} = 0$$

$$\mu_{ERSTE} - \mu_{UNIPETROL} = 0{,}045$$

Názory je nutné vyjádřit v matici **P**, jak již bylo zmíněno v kapitole 5.3. **P** matice bude mít rozměry 3× 5, jelikož jsou dány tři názory a je pracováno s pěti aktivy. S burzovním indexem se v tomto případě nepočítá, jelikož bude pracováno s bází indexu, tedy podíly jednotlivých aktiv na tvorbě burzovního indexu PX-TR. **P** matice bude mít po dosazení tuto podobu:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dále je potřeba sestavit vektor **Q** obsahující pravou stranu lineárních rovnic příslušných názorů:

$$\boldsymbol{Q} = (0{,}01416 \quad 0 \quad 0{,}045)'$$

Nyní je zapotřebí určit matici **Ω**, která bude vyjadřovat důvěru v expertovy názory. Pro ukázku, jak velikost vstupů matice **Ω** ovlivňuje to, zda se výsledek více blíží k trhu či expertovým názorům, budou uvedeny dvě matice **Ω**. V prvním případě bude důvěra v expertovy názory nízká, ve druhém vysoká. Příslušné matice tedy jsou:

$$\mathbf{\Omega}_1 = 10^{-3}\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}_2 = 10^{-3}\begin{pmatrix} 0{,}04 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}04 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}04 \end{pmatrix}$$

Dalším krokem je určení konstanty τ, která je v tomto konkrétním případě $\tau = \frac{1}{1129}$, jelikož časová řada má 1129 údajů. Výnosnosti se opět vypočítají podle vzorce č. 2. Kovarianční matice $\mathbf{\Sigma}$ odpovídají anualizované kovarianční matici, jejíž hodnoty jsou v tabulce č. 27 v Přílohách.

Báze indexu (váhy jednotlivých cenných papírů na tržním portfoliu), která je znázorněna v tabulce č. 1, spolu s kovarianční maticí $\mathbf{\Sigma}$ poslouží k výpočtu vektoru rizikových prémií $\mathbf{\Pi}$. Vzorec pro tento vektor je taktéž v kapitole 5.3 a obsahuje parametr δ, který je vyjadřuje koeficient averze k riziku a je dán pro tuto úlohu:

$$\delta = \frac{0{,}0603 - 0{,}0016}{0{,}0507} \doteq 1{,}2$$

V následující tabulce jsou jednotlivé rizikové prémie:

Tab. 14 Rizikové prémie jednotlivých aktiv

ERSTE	22,935
KB	14,8700
PEGAS	4,5226
UNIPETROL	9,0962
VIG	9,5508

Jak je z tabulky patrné, největší rizikovou prémii má cenný papír ERSTE. Naopak nejnižší je u aktiva PEGAS. Platí, že čím větší je riziko, tím větší je riziková prémie.

Nyní lze určit odhad střední hodnoty výnosů E[R] aktiv pomocí vzorce č. 36 a kovarianční matici Σ_{BL}. Výsledky E[R] jsou v následujících tabulkách:

Tab. 15 Odhad středních hodnot výnosů E[R] pro jednotlivá aktiva – nízká důvěra v názory

ERSTE	6,3046
KB	0,1247
PEGAS	1,3678
UNIPETROL	6,2150
VIG	2,7297

Tab. 16 Odhad středních hodnot výnosů E[R] pro jednotlivá aktiva – vysoká důvěra v názory

ERSTE	6,2392
KB	0,0320
PEGAS	1,3493
UNIPETROL	6,1871
VIG	2,6976

Příslušné kovarianční matice Σ_{BL} jsou v tabulkách č. 28 a 29 v Přílohách. Příliš se od kovarianční matice zobrazené v tabulce č. 27 neliší, tudíž jejich komentář by byl obdobný jako v případě anualizované matice v Přílohách.

Nyní je možné spočítat optimální portfolio. Nechť je užitková funkce investora dána předpisem:

$$U(R, S^2) = R - 0{,}7\, S^4$$

Tento investor je rizikově averzní, jak je z užitkové funkce patrné. Nyní bude hledán bod, kdy je funkce užitku investora maximální, a to jak pro případ nízké důvěry v expertovy názory, tak i pro případ vysoké důvěry v expertovy názory.

Tab. 17 Výnosnost, rizikovost portfolia při maximalizaci užitkové funkce v programu MATLAB

	Nízká důvěra	**Vysoká důvěra**
Hodnota funkce	1,8157	1,8157
Výnosnost	4,8181%	4,7702%
Rizikovost	3,3705%	3,3617%

Tab. 18 Výnosnost, rizikovost portfolia při maximalizaci užitkové funkce v programu LINGO

	Nízká důvěra	Vysoká důvěra
Hodnota funkce	1,8155	1,8155
Výnosnost	4,8109%	4,7698%
Rizikovost	3,3701%	3,3613%

Jak je z tabulek č. 17 a 18 viditelné, výnosnost tohoto portfolia je daleko nižší než u indexu PX-TR – pokles o zhruba 1,22 procentního bodu. Za to rizikovost se o tolik nepropadla – pokles o zhruba 0,2 procentního bodu, takže v poměru s ostatními vypočítanými portfolii, je tento model nejhorší. Z tabulek též plyne, že na výnosnost a rizikovost vypočteného portfolia neměla příliš vliv různá důvěra v investorovy názory. Rozdíly jsou vskutku minimální.

V následujících tabulkách jsou vyobrazeny váhy jednotlivých aktiv, a to jak pro případ nízké, tak i vysoké důvěry:

Tab. 19 Váhy jednotlivých aktiv pro případ nízké a vysoké důvěry v programu MATLAB

	ERSTE	KB	PEGAS	UNIPETROL	VIG
Nízká důvěra	1,39%	0,00%	19,07%	65,94%	13,60%
Vysoká důvěra	1,19%	0,00%	19,40%	65,69%	13,72%

Tab. 20 Váhy jednotlivých aktiv pro případ nízké a vysoké důvěry v programu LINGO

	ERSTE	KB	PEGAS	UNIPETROL	VIG
Nízká důvěra	1,25%	0,00%	19,27%	65,81%	13,67%
Vysoká důvěra	1,09%	0,01%	19,57%	65,52%	13,81%

Oproti většině předchozích modelů v tomto případě převažuje v optimálním portfoliu aktivum UNIPETROL. Už tento fakt naznačuje, že expertovy názory nebyly pravděpodobně správně odhadnuty. Naopak aktivum KB nebude ve většině případů v portfoliu vůbec obsaženo, což může být zapříčiněno nízkou rizikovou prémií.

10 Validace modelů a evaluace portfolií

Zda navrhnuté modely jsou vhodným řešením, bude ověřeno za pomoci hodnotících kritérií. Hodnotící kritéria budou vypočítána z historických dat, ze kterých bylo vycházeno při sestavování modelů, a z hypotetických dat, která budou získána prostřednictvím simulace Monte Carlo.

Evaluace portfolií bude provedena za využití charakteristik z nasimulovaných výnosností. Výnosnosti a rizikovosti jednotlivých portfolií budou znovu vypočteny s využitím vah získaných z modelů a charakteristik nasimulovaných dat. Nakonec budou výnosnosti a rizikovosti portfolií získaných stejnou metodou ale s odlišnými daty mezi sebou porovnány.

10.1 Simulace denních výnosností aktiv

Jak již bylo zmíněno, k simulaci denních výnosností jednotlivých cenných papírů bude použita simulační technika Monte Carlo. Bude nasimulováno celkem 251 hodnot pro každou akcii, které budou vyjadřovat denní kapitálovou výnosnost v období od 28.6.2013 do 27.6.2014. Dividendový výnos ke kapitálovému bude připočten až poté, a to jako poměr poslední vyplacené dividendy a ceny aktiva k 28.6.2013. Tím vznikne celková výnosnost.

Simulace 251 hodnot pro každý cenný papír proběhne stokrát, čímž bude zaručeno přiblížení nasimulovaných hodnot skutečným. Po každé simulaci bude zaznamenána průměrná denní výnosnost aktiva, rozptyl a směrodatná odchylka. Na konci bude těchto sto průměrných denních hodnot zprůměrováno a bude tak dosaženo výsledné nasimulované denní výnosnosti, rozptylu a směrodatné odchylky. Tyto výsledky jsou uvedené v následující tabulce, roční kovariance jsou v Příloze v tabulce č. 30:

Tab. 21 Výnosnosti, rozptyly a směrodatné odchylky nasimulovaných dat

	ERSTE	KB	PEGAS	UNIPETROL	VIG	PX-TR
Výnosnost (v %)	24,70	25,44	16,00	-25,72	14,75	17,69
Rozptyl	23,0251	13,7410	4,2309	9,3128	11,0142	4,5632
Směrodatná odchylka (v %)	4,80	3,71	2,06	3,05	3,32	2,14

V následující tabulce je zobrazena celková výnosnost, které bylo dosaženo způsobem popsaným výše:

Tab. 22 Celková výnosnost po zdanění po započítání dividend

	ERSTE	KB	PEGAS	UNIPET ROL	VIG	PX-TR
Poslední dividenda (v Kč)	31,0	230,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Cena akcie k 28.6.2013 (v Kč)	530,0	3710,0	518,0	172,0	935,0	1223,2
Cena akcie k 27.6.2014 (v Kč)	646,9	4647,0	602,0	130,8	1059,0	1444,75
Dividendová výnosnost (v %)	4,97	5,27	0,00	0,00	0,00	0,00
Celková výnosnost (v %)	29,67	30,71	16,00	-25,72	14,75	17,69

10.2 Evaluace portfolií

V této části budou všechna portfolia hodnocena s použitím dvou různých dat. Jedná se o historická data a data získaná ze simulace Monte Carlo. Evaluace proběhne dosazením výnosností, rizikovostí a případně dalších charakteristik jednotlivých aktiv vypočtených z nasimulovaných výnosností do vzorců pro výpočet výnosností a rizikovostí portfolií pro jednotlivé modely. Váhy aktiv v těchto výpočtech budou totožné s vahami aktiv získaných z modelů.

Následující tabulka porovnává výnosnosti a rizikovosti portfolií, které byly vypočítány pomocí dvou datových řad. Výnosnosti a rizikovosti portfolií z historických dat jsou výnosnosti a rizikovosti portfolií vypočítaných na základě historických výnosností aktiv. Z těchto výnosností byly vypočteny další charakteristiky, které sloužily jako podklad pro výpočty jednotlivých modelů, ze kterých byly následně získány váhy jednotlivých aktiv v jednotlivých optimálních portfoliích, a taktéž výnosnosti a rizikovosti těchto optimálních portfolií. Výnosnosti a rizikovosti portfolií z nasimulovaných dat, byly získány z nasimulovaných výnosností aktiv, jejich charakteristik a vah získaných z modelů z předchozí části (jsou použity výsledné váhy pouze z programu MATLAB, jelikož ty z programu LINGO se příliš neliší):

Tab. 23 Evaluace portfolií

	Min. rizika	Max. poměru	Max. Sharpova indexu	CML	SML	Black-Litterman	
						Nízká důvěra	Vysoká důvěra
w_{ERSTE}	0,01%	2,11%	0,07%	0,05%	17,21%	1,39%	1,19%
w_{KB}	0,23%	0,00%	4,61%	0,04%	21,03%	0,00%	0,00%
w_{PEGAS}	93,90%	82,21%	93,28%	7,42%	24,44%	19,07%	19,40%
$w_{UNIPETROL}$	0,02%	1,46%	0,02%	1,95%	22,83%	65,94%	65,69%
w_{VIG}	1,93%	6,09%	0,07%	5,11%	14,48%	13,60%	13,72%
w_{PXTR}	3,91%	8,13%	1,94%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%
w_f	0,00%	0,00%	0,00%	85,45%	0,00%	0,00%	0,00%
Výnosnost historická	6,03%	29,22%	32,02%	6,03%	12,76%	4,82%	4,77%
Rizikovost historická	3,58%	3,34%	3,60%	0,46%	3,70%	3,70%	3,70%
Výnosnost simulovaná	16,07%	15,74%	16,71%	2,28%	11,39%	-11,42%	-11,42%
Rizikovost simulovaná	1,96%	1,76%	1,95%	0,24%	1,90%	2,16%	2,15%

Jak je v tabulce patrné, zvláštní situace nastala u Markowitzova modelu, kdy výnosnost z historických dat je o cca 10 procentních bodů nižší než u nasimulovaných, ale rizikovost je vyšší o 1,62 procentního bodu. Příčinu těchto odlišných výsledků není autorka této práce schopna odhadnout, jelikož k nárůstu nasimulované výnosnosti u nejvíce zastoupeného aktiva PEGAS nedošlo. V tabulce je taktéž viditelné, že výnosnosti a rizikovosti portfolií se liší u modelů maximalizace poměru výnosnosti k rizikovosti, maximalizace Sharpova indexu a CAPM v podobě CML téměř o polovinu. U těchto modelů jsou výsledky nasimulovaných dat nižší, což značí jakýsi pesimističtější a riziku-averznější vývoj budoucích výnosností – tj. pokles výnosností, ale zároveň i rizikovostí aktiv v průběhu trvání portfolia. V případě CAPM v podobě SML to na první pohled vypadá, že se výsledky od sebe tolik jako v jiných případech neliší. Nicméně v případě výpočtu výnosnosti na jednotku rizikovosti je situace taková, že se tento poměr liší opět téměř o polovinu, což by mohlo být opět způsobeno pesimističtějším vývojem výnosností aktiv. U Black-Littermanova modelu opět došlo k poklesu výnosnosti, tentokrát ale v daleko větší míře než v předešlých případech. Zde je pokles výnosnosti způsoben propadem výnosnosti u aktiva UNIPETROL, který v případech nízké i vysoké důvěry zastává v optimálním portfoliu největší podíl. Rizikovost v tomto případě nepoklesla o tak značnou míru jako výnosnost, a to z toho důvodu, že rizikovost cenného papíru UNIPETROL poklesla jen o 1,14 procentního bodu.

11 Diskuse

V této práci bylo sestaveno několik akciových portfolií za využití různých modelů. Portfolia byla sestavena z akciových titulů obchodovaných na Burze cenných papírů Praha, a.s. na Prime Marketu. Existuje ale širší nabídka investičních instrumentů, ze kterých lze investiční portfolio sestavit. Kromě akcií to mohou být dluhové cenné papíry, strukturované produkty, upisovací práva, cizí měny a další. Navíc se český investor nemusí omezovat pouze na domácí trh, ale může obchodovat i na zahraničních burzách a otevřít se tak téměř neomezeným možnostem.

Portfolia v této práci byla vypočítána nejprve na základě Markowitzova modelu minimalizujícího riziko. Následovalo portfolio určené modifikací Markowitzova modelu do maximalizace poměru výnosnosti k rizikovosti, dále následoval model maximalizace Sharpova indexu, model CAPM, a to jak v podobě CML, tak i SML, a nakonec Black-Littermanovův model. Nicméně existuje několik dalších modelů, kterými lze portfolia získat. Patří mezi ně například faktorové modely (např. APT), stochastické modely, heuristické metody a další.

Všechny použité modely vycházejí z několika předpokladů, které v reálném investičním světě neplatí. Například není možné obchodovat se zlomkem cenného papíru. V případě zaokrouhlení výsledků optimalizace na celočíselné řešení se už nebude jednat o optimální řešení, ale o suboptimální řešení, které se už ale nebude nacházet na efektivní hranici.

Dalším předpokladem téměř všech použitých modelů je neexistence zdanění a transakčních nákladů. Tento předpoklad je odtržený od reality, jelikož v našem státě je míra zdanění značná a výnosnost tak poklesne o nemalé procento. Stejně tak transakční náklady by v reálném světě někdy mohly změnit názor na obchodování daného aktiva, kdy by bylo výhodnější neobchodovat.

Některé z modelů počítají s bezrizikovým aktivem. V dnešním světě je ale těžké uznávat existenci bezrizikového cenného papíru vzhledem ke státním dluhopisům například Řecka či Islandu. Celkově vzato bezrizikový cenný papír neexistuje.

Model oceňování kapitálových aktiv předpokládá neomezenou informovanost všech investorů, což je další omezení těchto modelů. V reálném světě existuje příliš velké množství informací a jednotliví investoři nemohou a nejsou schopni všechny tyto informace získat a správně zpracovat. Nemohou se tak objektivně rozhodovat.

Na druhou stranu není možné vytvořit model, který by žádná omezení neměl. Vždy je potřebné problém nějakým způsobem zjednodušit. Zjednodušení by ale mělo být na takové úrovni, aby výsledky řešení měly nějakou váhu. Na řešiteli pak je, aby si vybral takový model s danými omezujícími podmínkami, který bude vyhovovat jeho potřebám.

V úvodu praktické části byl již na základě určení výnosností a rizikovostí jednotlivých aktiv stanoven předpoklad, že největší zastoupení v jednotlivých optimálních portfoliích by měl mít PEGAS. Skutečně tomu tak bylo, a to v Markowitzově modelu, maximalizaci poměru výnosnosti k rizikovosti, maximalizaci Sharpova indexu a CAPM v podobě SML. V CAPM v podobě CML tomu tak nebylo, jelikož tento model pracuje s bezrizikovým cenným papírem a jde o model minimalizace rizika portfolia, proto bylo nejvíce zastoupeno právě bezrizikové aktivum. PEGAS nepřevažoval ani v Black-Littermanově modelu, což mohlo být způsobeno nesprávně stanovenými expertními názory na vývoj výnosností aktiv.

V následující tabulce jsou znázorněny výsledky jednotlivých modelů:

Tab. 24 Výnosnosti a rizikovosti portfolií získaných řešením jednotlivých modelů

	Min. rizika	Max. poměru	Max. Sharpova indexu	CML	SML	Black-Litterman Nízká důvěra	Black-Litterman Vysoká důvěra
w_{ERSTE}	0,01%	2,11%	0,07%	0,05%	17,21%	1,39%	1,19%
w_{KB}	0,23%	0,00%	4,61%	0,04%	21,03%	0,00%	0,00%
w_{PEGAS}	93,90%	82,21%	93,28%	7,42%	24,44%	19,07%	19,40%
$w_{UNIPETROL}$	0,02%	1,46%	0,02%	1,95%	22,83%	65,94%	65,69%
w_{VIG}	1,93%	6,09%	0,07%	5,11%	14,48%	13,60%	13,72%
w_{PXTR}	3,91%	8,13%	1,94%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%
w_f	0,00%	0,00%	0,00%	85,45%	0,00%	0,00%	0,00%
Výnosnost historická	6,03%	29,22%	32,02%	6,03%	12,76%	4,82%	4,77%
Rizikovost historická	3,58%	3,34%	3,60%	0,46%	3,70%	3,70%	3,70%
r_p/σ_p	1,68	8,75	8,89	13,11	3,45	1,30	1,29

Výsledky jednotlivých modelů se v mnoha případech značně liší. Důvodem může být, že jednotlivé modely předpokládají různé omezující podmínky, případně v některých modelech je vynechána některá z omezujících podmínek. Příkladem může být Markowitzův model a maximalizace poměru výnosnosti k rizikovosti. Markowitzův model má tři omezující podmínky: výnosnost optimálního portfolia musí být alespoň na úrovni, jakou si investor určí, suma vah aktiv v portfoliu musí být rovna jedné a jednotlivé váhy aktiv nesmí být záporné. Maximalizace poměru výnosnosti k rizikovosti má podmínky stejné až na jednu. Vypouští podmínku minimální výnosnosti portfolia, čímž může být výsledek ovlivněn. Investor by se tak měl rozhodnout podle toho, který model nejvíce vyhovuje jeho potřebám. Zda chce kopírovat benchmark nebo mít portfolio s nejvyšší výnosností v poměru k rizikovosti (r_p/σ_p). Měl by brát do úvahy i podmínky jednotlivých modelů.

Jak bylo vidět v předcházející části práce, evaluace portfolií na základě výkonnosti pomocí historických a nasimulovaných dat se u některých modelů značně lišila. Jednou z příčin může být nedostatečný počet opakování simulací, kdy se nasimulované hodnoty příliš odchýlily od skutečného budoucího vývoje. Další příčinnou může být způsob odhadu budoucích hodnot, ze kterých bylo vycházeno při tvorbě modelů. Odhad těchto hodnot byl vypočten na základě historické metody z kapitoly 3.8. Existují ale i jiné metody pro určení charakteristik aktiv a portfolia.

12 Závěr

Tato práce se zaměřila na kvantitativní podporu optimalizace akciového portfolia. V první části práce bylo přiblíženo téma investování, jeho jednotlivé kroky, a teorie portfolia, na kterou navazovalo přiblížení Markowitzova modelu jakožto výchozího bodu teorie portfolia. Dále byl popsán model oceňování kapitálových aktiv CAPM, a to jak v podobě CML, tak i SML. Posledním modelem, na který se tato práce zaměřila, byl Black-Littermanův model. Dále proběhlo seznámení se se simulační technikou Monte Carlo, která napomohla k validaci modelů, a Sharpovým indexem, který byl použit k vytvoření tržního portfolia.

Druhá část práce se věnovala aplikaci vybraných modelů na akcie obchodované na Prime trhu Burzy cenných papírů Praha, a.s. Cílem bylo sestavení optimálního portfolia za využití těchto modelů. Portfolia byla následně podrobena validaci a evaluaci.

Výpočty modelů probíhaly v programech MATLAB a LINGO. Výsledky z obou programů se v mnoha případech příliš nelišily, jelikož tyto programy se liší pouze v algoritmu výpočtů. U obou programů byl problém v tom, že výpočet optimálních portfolií trval ve většině případů několik minut. Což je ale vzhledem k rozsahu některých modelů pochopitelné.

Z pohledu hodnocení portfolií získaných z jednotlivých modelů vychází jako nejvýnosnější portfolio vypočítané modelem maximalizace Sharpova indexu. Jeho výnosnost činí 32,02 % p.a. s rizikovostí 3,6 % p.a. Tímto modelem bylo spočítáno tržní portfolio. Portfolio s druhým nejvyšším výnosem je to vypočítané na základě maximalizace poměru výnosnosti k rizikovosti, jehož výnosnost dosahuje 29,22 % p.a. s rizikovostí 3,34 % p.a. Toto portfolio investorovi přinese výnosnost za přijatelné riziko. Naopak nejnižší výnosnost by investorovi přineslo portfolio sestavené na základě Black-Littermanova modelu. Jeho výnosnost se pohybuje okolo 4,8% p.a. s rizikovostí 3,7 % p.a. Pokud by se investor rozhodoval mezi investicí do indexu PX-TR nebo tímto portfoliem, logicky by v případě averze k riziku zvolil index PX-TR, který nabízí vyšší výnosnost s nižší rizikovostí.

Obecně ale nelze říci, že model maximalizace Sharpova indexu bude dávat nejlepší výsledky. Stejně tak u Black-Littermanova modelu, kdy jeho výsledky velmi závisí na stanovené užitkové funkci investora, expertních názorech a v neposlední řadě také na důvěře v tyto názory. To jaký model je pro daného investora nejvhodnější, závisí na tom, co od portfolia očekává. Zda má kopírovat benchmark, maximalizovat nadměrný výnos nebo si zvolí jiné kritérium. Toto by mělo být obsaženo v investiční politice investora, na kterou navazuje investiční proces, jehož součástí je právě sestavení portfolia.

Pro investora v tomto příkladě by bylo nejvhodnější zvolit model maximalizace poměru výnosnosti k rizikovosti, jelikož výnosnost tohoto portfolia je nad investorovým stanoveným benchmarkem, kterým je index PX-TR a rizikovost je nižší než benchmark. V případě, že by chtěl portfolio maximalizující výnosnost na jednotku rizika, zvolil by portfolio vypočítané na základě CAPM v podobě CML.

13 Literatura

ALEXANDER, C. *Market Risk Analysis: Practical Financial Econometrics (Volume II).* 1. vyd. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2008. 426 s. ISBN 0-470-99801-4.

BLACK, Fischer a Robert LITTERMAN. Global portfolio optimalization. *Financial Analysts Journal*. 1992, č. 48. Dostupné z: https://ciber.fuqua.duke.edu/~charvey/Teaching/BA453_2005/blacklitterman.pdf

BRADA, Jaroslav. *Teorie portfolia*. 1. vyd. Praha: Vysoká škola ekonomická, 1996, 160 s. ISBN 80-707-9259-0.

BROWN, k C. a REILLY, F K. *Analysis of investments and management of portfolios*. 9. vyd. [Mason, Ohio? ;Great Britain]: South-Western Cengage Learning, 2009. 1041 s. ISBN 0-324-65842-7.

ČÁMSKÝ, F. *Finanční matematika*. 1. vyd. Brno: 1997. 78 s. ISBN 80-210-1509-8.

ČÁMSKÝ, František. *Teorie portfolia*. 2., přeprac. a rozš. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2007, 115 s. ISBN 978-80-210-4252-0.

FABIAN, František. *Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění*. 1. vyd. Prospektrum, spol.s.r.o., 1998, 148 s. ISBN 80-7175-058-1.

FABOZZI, Frank J a H MARKOWITZ. *The theory and practice of investment management: asset allocation, valuation, portfolio construction, and strategies*. 2nd ed. Hoboken, N.J.: Wiley, c2011, xxi, 682 p. Frank J. Fabozzi series. ISBN 04-709-2990-1.

FABOZZI, Frank J a H MARKOWITZ. *Equity valuation and portfolio management.* Hoboken, N.J.: John Wiley, c2011, xxvi, 550 p. Frank J. Fabozzi series. ISBN 11-181-5655-2.

FOTR, Jiří a Lenka ŠVECOVÁ. *Manažerské rozhodování: postupy, metody a nástroje*. 2., přeprac. vyd. Praha: Ekopress, 2010, 474 s. ISBN 978-80-86929-59-0.

HAGIN, Robert. *Investment management: portfolio diversification, risk, and timing--fact and fiction*. Hoboken, N.J.: Wiley, c2004, xiv, 304 p. Wiley finance series. ISBN 04-714-6920-3.

HILLIER, Frederick s a Gerald J LIEBERMAN. *Introduction to operations research.* 9th ed. Boston: McGraw-Hill, 2009, xxiv, 1047 s. ISBN 978-007-126767-0.

HINDLS, Richard. *Ekonomický slovník.* 2. aktualiz. vyd. Praha: C. H. Beck, 1996, 160 s. ISBN 80-717-9819-3.

HUSÁROVÁ, L. *Matematické programování v úloze optimalizace portfolia*. Diplomová práce. Brno: MENDELU Brno, 2012. 92 s.

KRACÍK, Lukáš. Jak si postavit investiční portfolio a který druh vybrat?. *Měšec.cz* [online]. 30. 8. 2013 [cit. 2014-03-27]. Dostupné z: http://trhy.mesec.cz/clanky/jak-si-postavit-investicni-portfolio-a-ktery-druh-vybrat/

MAGDOLENOVÁ, Ing. Jana. *Empirické metódy rozhodovania v manažmente*. Žilinská univerzita v Žiline, Katedra manažérskych teórií, Detašované pracovisko Prievidza. Dostupné z: http://dspace.upce.cz/bitstream/10195/32318/1/CL662.pdf. Žilinská univerzita v Žiline.

MEDKOVÁ, Bc. Jana. *Blackuv-Littermanuv model* [online]. Brno, 2011 [cit. 2014-07-19]. Dostupné z: http://is.muni.cz/th/251365/esf_b/bakalarska_prace.pdf. Bakalářská práce. Masarykova univerzita.

PÁNKOVÁ, Václava. *Nelineární optimalizace pro ekonomy.* 1. vyd. Praha: Professional Publishing, 2003, 153 s. ISBN 80-864-1950-9.

SHARPE, William F. *Investice.* Praha: Victoria Publishing, 1994, 810 s. ISBN 80-856-0547-3.

SYNEK, M. a kol. *Manažerská ekonomika*. 5. vyd. Praha: Grada, 2011. 471 s. ISBN 978-80-247-3494-1.

VIRIUS, Miroslav. *Metoda Monte carlo*. Vyd. 1. v Praze: České vysoké učení technické, 2010, 233 s. ISBN 978-800-1045-954.

WALTERS, Jay. *The Black-Litterman Model In Detail* [online]. 2007, 2014-06-20 [cit. 2014-09-21]. Dostupné z: http://www.blacklitterman.org/Black-Litterman.pdf

WALTERS, Jay. *The BlackLitterman Model: a Detailed Exploration* [online]. 2008 [cit. 2014-05-21]. Dostupné z: http://www.master272.com/finance/BL/JWalters_Black-Litterman.pdf

YU, Dan. *Black-Litterman model in a company environment: Using The Black-Litterman Model as a Supporting Tool in the Geographical Selection of Equity Market in Novo A/S* [online]. Aarhus, 2007 [cit. 2014-07-21]. Dostupné z: http://pure.au.dk/portal/files/1604/000161016-161016.pdf.

Zákon o daních z příjmů. In: *586/1992 Sb*. 2013.

13.1 Internetové zdroje

Burza cenných papírů Praha [online]. © 1998-2014 [cit. 2014-09-25]. Dostupné z: http://www.bcpp.cz/

Dividenda.cz [online]. c2014 [cit. 2014-09-29]. Dostupné z: www.dividenda.cz

Dividendy. *O2* [online]. c2014 [cit. 2014-09-29]. Dostupné z: http://www.o2.cz/spolecnost/dividendy/236568-index_cz.html

Dividendy. *Skupina ČEZ* [online]. c2014 [cit. 2014-09-29]. Dostupné z: http://www.cez.cz/cs/pro-investory/akcie/dividendy.html

Dividendy. *Unipetrol* [online]. c2014 [cit. 2014-09-29]. Dostupné z: http://www.unipetrol.cz/cs/VztahySInvestory/Stranky/Dividendy.aspx

Kurzy.cz [online]. c2000-2014 [cit. 2014-09-29]. Dostupné z: http://www.kurzy.cz/

Pegas Nonwovens [online]. c2005 [cit. 2014-09-29]. Dostupné z: http://www.pegas.cz/default.asp?nLanguageID=1

Pražská burza zahájí výpočet Total Return Indexu PX. *Investujeme.cz* [online]. 2014 [cit. 2014-10-25]. Dostupné z: http://www.investujeme.cz/prazska-burza-zahaji-vypocet-total-return-indexu-px/

Valné hromady a výplaty dividend. *KB* [online]. c2014 [cit. 2014-09-29]. Dostupné z: https://www.kb.cz/cs/o-bance/vztahy-s-investory/akcionari/valne-hromady-a-vyplata-dividend.shtml

Výsledky aukcí SPP za rok 2013. *Ministerstvo financí ČR* [online]. 2013 [cit. 2014-09-25]. Dostupné z: http://www.mfcr.cz/cs/verejny-sektor/hospodareni/rizeni-statniho-dluhu/emise-statnich-dluhopisu/vysledky-aukci-spp/2013/vysledky-aukci-spp-za-rok-2013-9633

Zdaňování zisků z obchodování s cennými papíry. *Patria.cz* [online]. 2011 [cit. 2014-10-02]. Dostupné z: https://www.patria.cz/pravo/1907008/zdanovani-zisku-z-obchodovani-s-cennymi-papiry.html

Přílohy

A Kovarianční a korelační matice historických výnosností

Tab. 25 Kovarianční matice denních výnosností

	CETV	ČEZ	ERSTE	KB	NWR	O2	ORCO	PEGAS	UNIPETROL	VGP	VIG	PX-TR
CETV	0,0015	0,0002	0,0006	0,0003	0,0005	0,0001	0,0002	0,0001	0,0002	0,0000	0,0003	0,0003
ČEZ	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0002	0,0001	0,0000	0,0001	0,0001	0,0000	0,0001	0,0001
ERSTE	0,0006	0,0002	0,0009	0,0004	0,0005	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0000	0,0003	0,0004
KB	0,0003	0,0001	0,0004	0,0005	0,0003	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0002	0,0002
NWR	0,0005	0,0002	0,0005	0,0003	0,0010	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0000	0,0002	0,0003
O2	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
ORCO	0,0002	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0015	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001
PEGAS	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0002	0,0001	0,0000	0,0001	0,0001
UNIPETROL	0,0002	0,0001	0,0002	0,0001	0,0002	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0000	0,0001	0,0001
VGP	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
VIG	0,0003	0,0001	0,0003	0,0002	0,0002	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0005	0,0002
PX-TR	0,0003	0,0001	0,0004	0,0002	0,0003	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0002	0,0002

Tab. 26 Korelační matice denních výnosností

	CETV	ČEZ	ERSTE	KB	NWR	O2	ORCO	PEGAS	UNIPETROL	VGP	VIG	PX-TR
CETV	1,00	0,36	0,47	0,37	0,44	0,17	0,14	0,23	0,31	-0,02	0,34	0,56
ČEZ	0,36	1,00	0,39	0,42	0,37	0,31	0,06	0,24	0,32	0,06	0,28	0,65
ERSTE	0,47	0,39	1,00	0,55	0,51	0,19	0,13	0,25	0,39	-0,06	0,53	0,85
KB	0,37	0,42	0,55	1,00	0,41	0,28	0,11	0,28	0,39	-0,01	0,39	0,75
NWR	0,44	0,37	0,51	0,41	1,00	0,23	0,08	0,30	0,45	-0,11	0,32	0,64
O2	0,17	0,31	0,19	0,28	0,23	1,00	0,02	0,17	0,19	-0,05	0,14	0,43
ORCO	0,14	0,06	0,13	0,11	0,08	0,02	1,00	0,01	0,06	0,00	0,09	0,12
PEGAS	0,23	0,24	0,25	0,28	0,30	0,17	0,01	1,00	0,31	-0,04	0,18	0,37
UNIPETROL	0,31	0,32	0,39	0,39	0,45	0,19	0,06	0,31	1,00	-0,04	0,23	0,52
VGP	-0,02	0,06	-0,06	-0,01	-0,11	-0,05	0,00	-0,04	-0,04	1,00	0,02	-0,04
VIG	0,34	0,28	0,53	0,39	0,32	0,14	0,09	0,18	0,23	0,02	1,00	0,55
PX-TR	0,56	0,65	0,85	0,75	0,64	0,43	0,12	0,37	0,52	-0,04	0,55	1,00

Tab. 27 Kovarianční matice anualizovaná

	CETV	ČEZ	ERSTE	KB	NWR	O2	ORCO	PEGAS	UNIPETROL	VGP	VIG	PX-TR
CETV	96,2276	13,1596	35,9122	20,5291	33,4837	5,6268	13,4149	8,5407	12,8594	-0,0844	18,0400	19,4883
ČEZ	13,1596	14,2119	11,4468	8,8129	10,6987	3,9566	2,2886	3,3128	5,0712	0,0921	5,7050	8,7662
ERSTE	35,9122	11,4468	59,6187	23,9371	30,4573	5,0412	9,3778	7,0930	12,6467	-0,2027	21,9030	23,3622
KB	20,5291	8,8129	23,9371	31,6726	17,8485	5,2637	6,0368	5,8509	9,0968	-0,0225	11,8481	15,0979
NWR	33,4837	10,6987	30,4573	17,8485	60,3080	5,9680	6,0558	8,6378	14,7507	-0,3521	13,3381	17,7920
O2	5,6268	3,9566	5,0412	5,2637	5,9680	11,4969	0,7026	2,1516	2,6590	-0,0670	2,5797	5,1859
ORCO	13,4149	2,2886	9,3778	6,0368	6,0558	0,7026	91,7516	0,3820	2,3357	-0,0147	4,4703	4,0624
PEGAS	8,5407	3,3128	7,0930	5,8509	8,6378	2,1516	0,3820	13,7773	4,8003	-0,0575	3,5342	4,8931
UNIPETROL	12,8594	5,0712	12,6467	9,0968	14,7507	2,6590	2,3357	4,8003	17,5425	-0,0653	5,2257	7,8331
VGP	-0,0844	0,0921	-0,2027	-0,0225	-0,3521	-0,0670	-0,0147	-0,0575	-0,0653	0,1696	0,0463	-0,0556
VIG	18,0400	5,7050	21,9030	11,8481	13,3381	2,5797	4,4703	3,5342	5,2257	0,0463	28,7647	10,5317
PX-TR	19,4883	8,7662	23,3622	15,0979	17,7920	5,1859	4,0624	4,8931	7,8331	-0,0556	10,5317	12,7259

B Kovarianční matice Black-Littermanova modelu

Tab. 28 Kovarianční matice Black-Littermanova modelu pro nízkou důvěru v expertovy názory

	ERSTE	KB	PEGAS	UNIPETROL	VIG
ERSTE	59,6304	23,9372	7,0951	12,6582	21,9072
KB	23,9372	31,6728	5,8510	9,0969	11,8482
PEGAS	7,0951	5,8510	13,7810	4,8024	3,5415
UNIPETROL	12,6582	9,0969	4,8024	17,5541	5,2298
VIG	21,9072	11,8482	3,5415	5,2298	28,7793

Tab. 29 Kovarianční matice Black-Littermanova modelu pro vysokou důvěru v expertovy názory

	ERSTE	KB	PEGAS	UNIPETROL	VIG
ERSTE	59,6303	23,9371	7,0951	12,6582	21,9071
KB	23,9371	31,6726	5,8509	9,0968	11,8481
PEGAS	7,0951	5,8509	13,7809	4,8024	3,5415
UNIPETROL	12,6582	9,0968	4,8024	17,5540	5,2298
VIG	21,9071	11,8481	3,5415	5,2298	28,7792

C Kovarianční matice ze simulace Monte Carlo

Tab. 30 Anualizované kovarianční matice nasimulovaných výnosností

	ERSTE	KB	PEGAS	UNIPETROL	VIG	PX-TR
ERSTE	23,0251	4,6456	0,0616	0,8796	6,2566	6,4161
KB	4,6456	13,7410	0,5331	0,6030	1,7423	4,6228
PEGAS	0,0616	0,5331	4,2309	0,4736	0,0153	0,4022
UNIPETROL	0,8796	0,6030	0,4736	9,3128	0,4643	0,7930
VIG	6,2566	1,7423	0,0153	0,4643	11,0142	4,0171
PX-TR	6,4161	4,6228	0,4022	0,7930	4,0171	4,5632