Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Katedra Matematiky

Grupa Rubikovy kostky

Bakalářská práce

Autor práce: JAKUB JELEN
Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce: doc. DrSc. ANTON GALAEV,

Hradec Králové 2023

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně a s použitím uvedené literatury

....
Jakub Jelen
18. dubna 2023

Poděkování
Děkuji svému vedoucímu práce za velmi rychlou pomoc při mých problémech a za to, že na mě celou dobu pozorně dohlížel.

Anotace

Bakalářská práce se zaměřuje na demonstraci pojmů z teorie grup na Rubikově kostce. V práci je samotná grupa Rubikovy kostky zavedena, včetně popsání otáčení Rubikovou kostkou. Řeší se, kolik možných rozložení tohoto hlavolamu existuje, pokud umožníme rozložení na díly a zpět. Zkoumáme, jakou část těchto rozložení se dá složit a jak je odlišíme. Pomocí nalezených vlastností této grupy se pak hledá algoritmus, který vede ke složení Rubikovy kostky.

Klíčová slova: Rubikova kostka, grupa Rubikovy kostky, akce grupy, orbita grupy

Anotation

Title: Rubik's cube group

The Bachelor Thesis focuses on the demonstration of concepts from group theory on a Rubik's cube. The thesis introduces the Rubik's cube group itself, including a description of rotations of the Rubik's cube. It discusses how many possible configurations of this puzzle exist, if we allow for decomposition into pieces and back. It then examines what fraction of these configurations are solvable, using the properties found for this group. An algorithm that leads to the composition of the Rubik's cube is found.

Keywords: Rubik's cube, Rubik's cube group, group action, group orbit

Obsah

Seznam obrázků

Seznam tabulek

1 Úvod

Pro svou bakalářskou práci jsem si vybral téma "Grupa Rubikovy kostky". Jako nadšený řešitel tohoto hlavolamu jsem se naučil několik sekvencí algoritmů, které vedou k řešení Rubikovy kostky, nicméně všechny jsem se mechanicky učil bez toho, abych rozuměl významu jednotlivých kroků. Proto jsem se rozhodl podívat se na Rubikovu kostku z pohledu teorie grup a využít mé poznatky k pochopení naučených algoritmů, jejich optimalizací a v ideálním případě i vymyšlením vlastního algoritmu, pomocí kterého Rubikovu kostku vyřeším. Dále budu zkoumat, kolik různých rozložení Rubikovy kostky může existovat, zda je možné hlavolam vždy složit, případně jak blízko se lze k vyřešení dostat. Dalším cílem práce je představit Rubikovu kostku jako didaktickou pomůcku vhodnou k reálné demonstraci jinak poměrně abstraktních pojmů z algebry.

Při psaní této práce předpokládáme, že čtenář zná základní pojmy z Algebry jako matice, grupa, permutace, a jiné. Vycházíme zejména z J. Chena [1], který nám slouží jako kostra našeho bádání. V první kapitole si nejprve zavedeme a ukážeme na příkladech další pojmy z algebry, jako například akce grupy na množině, které budeme v práci využívat. Poté se již vrhneme na samotnou Rubikovu kostku, ve které si označíme jednotlivé strany, pozice a dílčí kostky. Tato označení pak shrneme do jednoho pojmu jako konfiguraci Rubikovy kostky. Dále si zavedeme grupu Rubikovy kostky, šest základních pohybů a jejich kombinace. Spočítáme počet všech možných konfigurací Rubikovy kostky a určíme, zda lze všechny tyto konfigurace složit, popřípadě jak je odlišíme od těch, co nelze do složené konfigurace převést. V předposlední kapitole pak nalezneme pomocí permutací jednotlivých pohybů algoritmus pro složení Rubikovy kostky. Závěrem nalezneme množinu konfigurací, které jsou blízké složené konfiguraci a zároveň libovolnou konfiguraci dokážeme převést do jedné z nich.

O Rubikovu kostku se vědci zajímají poměrně dlouho. Pomocí počítače dokázali určit, že každou konfiguraci lze složit do dvaceti tahů. Náš algoritmus pravděpodobně nebude ani zdaleka tak efektivní, nicméně měl by být poměrně jednoduchý a opřený o algebraické výpočty.

2 Akce grupy na množině

Akce grupy na množině nám mohou posloužit ke studování Rubikovy kostky. Nejprve si ovšem musíme zavést několik základních pojmů souvisejících s akcí grupy na množině a které budeme využívat.

Definice 2.1 *Nechť G je grupa a X neprázdná množina. Pak zobrazení $\cdot : G \times X \to X$ nazýváme levou akcí (působením) grupy G na množině X, pokud platí:*

1. $\forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X : g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$,
2. $\forall x \in X : 1 \cdot x = x$, *kde* 1 *je neutrální prvek* G.

Zobrazení $\circ : G \times X \to X$ nazýváme pravou akcí grupy G na množině X, pokud platí:

1. $\forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X : g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$,
2. $\forall x \in X : 1 \cdot x = x$, *kde* 1 *je neutrální prvek.*

Definice 2.2 *Levou akcí grupy na sebe rozumíme zobrazení $L : G \times G \to G$ dané předpisem $\forall g_1 g_2 \in G, L(g_1, g_2) = g_1 g_2$. Pravou akcí grupy na sebe rozumíme zobrazení $R : G \times G \to G$ s předpisem $\forall g_1, g_2 \in G, R(g_1, g_2) = g_2 g_1$.*

Pro účely této práce budeme pracovat pouze s levými akcemi grupy na množině, pro pravé akce grupy na množině jsou postupy a výsledky analogické.

Definice 2.3 *Jádrem akce grupy G na množině X rozumíme množinu*

$$J = \{g \in G : \forall x \in X, g \cdot x = x\}.$$

Pokud J je jednoprvková množině, pak říkáme, že akce je efektivní. Je-li $x \in X$ pevně zvolený prvek, pak množinu $\{g \in G, g \cdot x = x\}$ nazýváme stabilizátor prvku x a značíme G_x.

Platí, že jádro akce je průnikem všech stabilizátorů.

Definice 2.4 *Orbitou prvku $x \in X$ rozumíme množinu $O_x = \{g \cdot x, g \in G\}$. Množinu všech orbit značíme X/G, nazýváme ji také jako faktorová množina.*

Definice 2.5 *Říkáme, že grupa G má tranzitivní akci na X, pokud pro každé $x, y \in X$ existuje $g \in G$ takové, že $g \cdot x = y$, tj. pokud akce G na X má pouze jednu orbitu.*

Věta 2.1 *Grupa G působí na sebe tranzitivně.*

Důkaz: Nechť $g, h \in G$. Potom uvažujme prvek $hg^{-1} \in G$ a platí

$$(hg^{-1})g = h(g^{-1}g) = h.$$

$\square$

Pro libovolnou grupu G uvažujme její podgrupu H. Potom existuje přirozená akce grupy H na množině G a množina orbit této akce je právě množina levých tříd G/H.

Věta 2.2 *Nechť akce grupy G na množinu X je tranzitivní. Pro libovolný, pevně zvolený prvek $x \in X$ pak platí $X = G/G_x$.*

Důkaz: Naším cílem je sestrojit bijekci $X \to G/G_x$. Dokažme nejprve následující tvrzení: nechť $g, h \in G$. Jestliže $gG_x = hG_x$, pak $gx = hx$. Uvažujme, že $gG_x = hG_x$. Proto $g \in gG_x$ a tedy $g \in hG_x$. Pak $g = ha$ pro nějaké $a \in G_x$. Potom

$$gx = (ha)x = h(ax) = hx.$$

Můžeme definovat zobrazení $f : G/G_x \to X$ předpisem $f(gG_x) = gx$. Ukažme, že zobrazení je bijekcí:

- f je injekcí: Nechť pro $g, h \in G$ platí $f(gG_x) = g(hG_x)$. Tedy platí, že $gx = hx$. Potom $h^{-1}gx = x$ a $h^{-1}g \in G_x$. Pak $hG_x = h(h^{-1}gG_x) = gG_x$ a $hG_x = gG_x$. Zobrazení f je tedy injekcí.

- f je surjekce: prvky X jsou tvaru gx, $g \in G$. Zřejmě platí $f(gG_x) = gx$ a f je surjekcí.

Je-li f injekcí a surjekcí, pak je i bijekcí a větu jsme dokázali. □

Přímým důsledkem této věty je následující tvrzení: Působí-li G na množině X, pak platí $O_x = G/G_x$.

Pro ujasnění pojmů si uveďme několik příkladů z praxe:

1. Zvolme $X = \mathbb{R}^2$ dvourozměrný prostor a grupu $G = S^1$ jako grupu všech rotací o úhly $\phi \in [0, 2\pi)$ se středem v počátku souřadnic. Akcí grupy S^1 na množině $\mathbb{R}^2$ pak rozumíme zobrazení $S^1 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které nám každý bod roviny otočí o určitý úhel se středem v počátku souřadnic. Stabilizátorem počátku souřadnic $x_0 = 0$ je celá grupa rotací $G_0 = S^1$, stabilizátorem libovolného jiného bodu $x \neq 0$ je pouze identita, tj. $G_x = \{0\}$. Množinou všech orbit $\mathbb{R}^2/S^1$ je počátek souřadnic a množina všech kružnic se středem v počátku souřadnic a libovolným poloměrem. S^1 dále nemá tranzitivní akci, pro každé dva body $x, y \in \mathbb{R}^2$ s různou vzdáleností od počátku neexistuje otočení $g \in S^1$ takové, že $g \cdot x = y$.

2. Nechť $X = \mathbb{R}^2$ je rovina a grupa $G = \mathbb{R}^2$ grupa všech volných vektorů v rovině. Akcí grupy $\mathbb{R}^2$ na množině $\mathbb{R}^2$ rozumíme zobrazení, které nám posouvá prvky $x \in \mathbb{R}^2$ o vektory $g \in \mathbb{R}^2$. Jádrem akce grupy $\mathbb{R}^2$ na $\mathbb{R}^2$ bude jednoprvková množina obsahující nulový vektor. Stabilizátorem libovolného prvku $x \in \mathbb{R}^2$ bude opět jednoprvková množina s nulovým vektorem. Pro každé dva prvky $x, y \in \mathbb{R}^2$ existuje vektor $g \in \mathbb{R}^2$ takový, že $g \cdot x = y$, $\mathbb{R}^2$ má tedy jednu orbitu a je tranzitivní akcí. Pro každý prvek $x \in \mathbb{R}^2$ existuje právě jeden prvek $g \in \mathbb{R}^2$, pro který $g \cdot 0 = x$. Můžeme tedy ztotožnit množinu bodů roviny s množinou všech volných vektorů v rovině.

3. Zvolme $X = \mathbb{R}^2$ a G grupu izometrií, které zachovávají orientaci. Ta je generována množinami všech posunutí a rotací, tj. $G = \langle \mathbb{R}^2, S^1 \rangle$. S grupou rotací se středem v počátku S^1 můžeme ztotožnit grupu G_x všech rotací se středem v x, tj. $G_x \cong S^1$. Stabilizátorem každého prvku $x \in \mathbb{R}^2$ je množina všech rotací se středem v bodě x. Jádrem akce je průnik všech stabilizátorů, což je pouze identita. Akce grupy G je tranzitivní, množina orbit obsahuje pouze jeden prvek. Tedy platí $\mathbb{R}^2 = G/S^1$.

4. Nechť $X = \mathbb{R}$ jsou všechna reálná čísla a nechť $G = (\mathbb{Z}, +)$. Akcí grupy $\mathbb{Z}$ na množině R rozumíme zobrazení $\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \forall g \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R} : g \cdot x = x + g$. Jádro akce grupy $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{R}$ obsahuje pouze nulu, $\forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = x$. Stabilizátorem libovolného reálného čísla je opět jednoprvková množina obsahující nulu. Orbitou prvku $x \in \mathbb{R}$ bude množina $O_x = \{..., x-2, x-1, x, x+1, x+2, ...\}$. Libovolné dva prvky z $[0, 2\pi)$

patří do různých orbit a zároveň každá orbita má neprázdný průnik s $[0, 2\pi)$, množinu všech orbit můžeme tedy uvažovat jako interval $G/X = [0, 2\pi)$. $\mathbb{Z}$ tedy nemá na $\mathbb{R}$ tranzitivní akci.

5. Uvažujme vektorový prostor V. Dále nechť X je množina všech nedegenerovaných, symetrických bilineárních forem b a $G = \mathrm{GL}(V) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; f je izomorfismus$\}$. Akcí grupy G na X pak rozumíme zobrazení

$$f \cdot b : (f \cdot b)(V_1, V_2) = b(fV_1, fV_2), V_1, V_2 \in V.$$

Zvolme bázi $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorového prostoru V. Potom můžeme bilineární formu b vyjádřit jako matici B, pro kterou $B_{ij} = b(e_i, e_j)$. Dále můžeme nalézt matici fB akce grupy fb, $fB = ABA^T$, kde A je maticí f. Prvky fB jsou pak tvaru $(fB)_{ij} = (fb)(e_i, e_j) = b(fe_i, fe_j)$. Získali jsme vyjádření matice fB v bázi $fe_1, ...fe_n$, označme prvky této báze jako $f_1, ..., f_n$. fb má tedy v bázi $e_1, ..., e_n$ stejnou matici fB jako má b matici B v bázi $f_1, ..., f_n$. Tedy existují $p, q \in \mathbb{N}$ a f_i, pro která v bázi $f_1, ..., f_n$ je $b(f_i, f_j) = \epsilon_i \delta_{ij}$, kde $\epsilon_i = 1$ pro $1 \leq i \leq p$ a $\epsilon_i = -1$ pro $p + 1 \leq i \leq p + q$. Signaturou matice B je pak uspořádaná dvojice (p, q). Bilineární formy b_1, b_2 leží ve stejné orbitě právě tehdy, když mají stejné signatury. Signatury mohou být následující:

$$(n, 0), (n - 1, 1), ..., (1, n - 1), 0, n).$$

Získáváme $n + 1$ různých možných tvarů signatur, množina X/G tedy obsahuje $n + 1$ orbit. Akce G na množině forem signatury (p, q) je tranzitivní. Tedy pokud zvolíme libovolnou pevnou bázi $d_1, ..., d_n$, v každé orbitě existuje bilineární forma b, jejíž matice je tvaru $b(d_i, d_j) = \epsilon_i \delta_{ij}$, kde $\epsilon_i = 1$ pro $1 \leq i \leq p$ a $\epsilon_i = -1$ pro $p+1 \leq i \leq p+q$. Tato matice je pak kanonickým prvkem dané orbity. Stabilizátorem kanonického prvku $B_0 = E_n$ je množina $G_{b_0} = \{f \in \mathrm{GL}(V) : f \cdot b_0 = b_0\}$. $\mathrm{O}(V, b_0) = \mathrm{O}(n)$ je ortogonální grupou. Orbita $\mathrm{O}_{b_0} = \mathrm{GL}(n, V) \cdot b_0$ je pak množina všech pozitivně definovaných symetrických bilineárních forem. Tedy $\mathrm{O}_{b_0} = \mathrm{GL}(n, V) / \mathrm{O}(n)$.

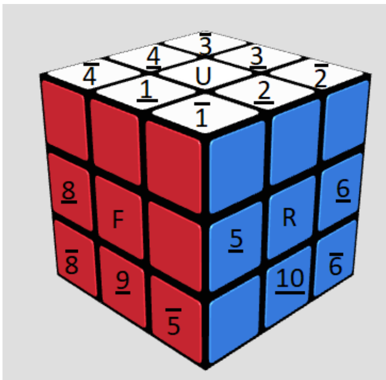
3 Konfigurace Rubikovy kostky

3.1 Zavedení označení Rubikovy kostky

Abychom mohli s Rubikovou kostkou pracovat, musíme si nejprve zavést její konfiguraci. Díky tomu pak budeme schopni jednoznačně určit, v jakém stavu se Rubikova kostka nachází a jak se změní její pozice při jednotlivých pohybech, což nám pak pomůže nejen nalézt algoritmy pro její složení, ale také počet všech možných konfigurací.

Rubikova kostka se skládá z 26 viditelných částí. Ač části Rubikovy kostky nejsou krychlemi, v této práci je za krychle budeme považovat a nazývat dílčími kostkami. Tyto dílčí kostky lze rozdělit na šest středových, nacházejících se ve středech jednotlivých stěn, u kterých je viditelná právě jedna obarvená stěna. Dále pak z dvanácti hranových, umístěných ve středech jednotlivých hran, s dvěma viditelnými, různě barevnými stěnami. Poslední skupinu tvoří osm rohových kostek, které mají tři viditelné stěny obarvené třemi různými barvami.

Pojmenujeme-li si jednotlivé stěny kostky podle jejich umístění vůči středu kostky jako u (up - horní), d (down - spodní), l (left - levá), r (right - pravá), f (front - přední), b (back - zadní), dokážeme pak dílčí kostky pojmenovat podle stěn, ve kterých se nachází.



Obrázek 1: Rubikova kostka s označenými stranami a s očíslovanými hranovými a rohovými kostkami.

3.2 Středové kostky

Středové kostky se nachází v jedné stěně, proto jsou označeny jedním písmenem stěny, ve které se nachází. Množinu středových kostek označíme jako $\mathbb{S} = \{u, f, l, r, f, b\}$, viz obrázek 1. Tyto kostky nám pomáhají pojmenovávat ostatní kostky a orientovat se v pozicích, které jednotlivé kostky zaujaly po otáčení kostkou. Při libovolném pohybu se jejich poloha nemění, nemají tedy pro nás výraznější význam.

3.3 Hranové kostky

Hranových kostek je celkem dvanáct, očíslujeme je čísly $\underline{1} - \underline{12}$, viz obrázek 1. Dále pojmenujeme jednotlivé hranové kostky dvěma písmeny podle stěn, ve kterých se nachází. Například kostka označená číslem $\underline{1}$ bude pojmenována jako uf, jelikož se nachází v přední a horní stěně zároveň. Umístění jednotlivých hranových kostek budeme zaznamenávat jako permutaci množiny $\{\underline{1}, ..., \underline{12}\}$, kterou označíme jako τ. Například pro složenou konfiguraci bude $\tau = e$, po otočení horní stěny o 90° ve směru hodinových ručiček bude

$$\tau = U = (uf, ul, ub, ur) = (\underline{1}, \underline{4}, \underline{3}, \underline{2}).$$

U hranových kostek musíme rozlišovat i jejich natočení, tj. spin kostky. Rubikova kostka má jinou konfiguraci, pokud jsou dílčí hranové kostky na svých místech, ale nesedí barevně. Proto u hranových kostek zavedeme dvě množiny H a H', přičemž pokud bude konfigurace kostky z H, budeme uvažovat spin 0, pokud z H', uvažujeme spin 1. Prvky množiny H můžeme zvolit i jinak, u spinu nám jde zejména o to, kdy se mění z jedné pozice do druhé, tj. kdy se kostka otočí o 180°. Množiny H a H' tedy obsahují následující prvky:

$$H = \{uf, ul, ub, ur, df, dl, db, dr, fl, fr, bl, br\},$$
$$H' = \{fu, lu, bu, ru, fd, ld, bd, rd, lf, rf, lb, rb\}.$$

Spin jednotlivých hranových kostek budeme zaznamenávat do uspořádané dvanáctice y. Pro složenou konfiguraci bude $y = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

3.4 Rohové kostky

Rohových kostek je osm, označme je čísly $\overline{1} - \overline{8}$, viz obrázek 1. Jednotlivé rohové kostky pak budeme označovat třemi písmeny, jelikož zasahují do tří stěn. Například kostka s číslem $\overline{1}$ bude pojmenována jako urf, jelikož se nachází v horní, pravé a přední stěně. Umístění jednotlivých rohových kostek budeme zaznamenávat do permutace množiny $\{\overline{1}, ..., \overline{8}\}$, kterou budeme značit σ. Například pro složenou konfiguraci bude $\sigma = e$, po otočení horní stěny o 90° ve směru hodinových ručiček bude

$$\sigma = U = (urf, ufl, ulb, ubr) = (\overline{1}, \overline{4}, \overline{3}, \overline{2}).$$

Stejně jako u hranových kostek, i u těch rohových musíme zavést jejich spin. Rohové kostky mají celkem tři možnosti spinu - například kostku urf můžeme zapsat také jako fur nebo rfu. Prvky původní grupy zvolíme tak, aby začínali písmeny z horní/spodní stěny, tj. u nebo d, ale opět nám jde o relativní otočení způsobené daným pohybem, tj. jestli kostka spin zachová nebo se otočí o 120°, resp. o 240°. V případě posunu o 120° zvýšíme spin o jedna, v případě posunu o 240° spin zvýšíme o dva a zapíšeme jako zbytek po dělení třemi. U rohových kostek zavedeme 3 množiny R, R' a R" jako

$$R = \{urf, ufl, ulb, ubr, dfr, dlf, dbl, drb\},$$
$$R' = \{fur, luf, bul, rub, rdf, fdl, ldb, bdr\},$$
$$R'' = \{rfu, flu, lbu, bru, frd, lfd, bld, rbd\}.$$

Spin zaznamenáváme do uspořádané osmice x. Pro složenou konfiguraci bude $x = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Máme-li popsané uspořádání a spiny hran a rohů, zavedeme konfiguraci Rubikovy kostky jako uspořádanou čtveřici (σ, τ, x, y).

4 Zavedení grupy Rubikovy kostky

Dílčí kostky Rubikovy kostky jsou obarveny na celkem 54 stranách. Označme obarvené strany středových kostek podle stěny, ve které se nachází, písmeny u, d, b, f, l, r. Tyto kostky nemění vzájemnou polohu, nemusíme tedy uvažovat jejich prohazování. Zbývající strany očíslujeme prvky z množiny $C = \{1, 2, ..., 48\}$, viz obrázek 2. Každá konfigurace Rubikovy kostky pak bude prvkem symetrické grupy $(S_{48}, *)$. Stejným způsobem označíme i pozice v prostoru v rámci Rubikovy kostky, ty se bez ohledu na rozložení Rubikovy kostky nemění. Pomocí těchto pozic budeme definovat jednotlivé pohyby Rubikovy kostky.

			33	34	35						
			40	b	36						
			39	38	37						
09	10	11	01	02	03	17	18	19	25	26	27
16	l	12	08	u	04	24	r	20	32	d	28
15	14	13	07	06	05	23	22	21	31	30	29
			41	42	43						
			48	f	44						
			47	46	45						

Obrázek 2: Síť Rubikovy kostky.

Definice 4.1 *Základní pohyby Rubikovy kostky jsou takové permutace množiny C, kterých dosáhneme otočením jedné strany Rubikovy kostky o 90° ve směru hodinových ručiček:*

$$U = (1,3,5,7)(2,4,6,8)(11,41,23,37)(12,42,24,38)(13,43,17,39),$$

$$D = (25,27,29,31)(26,28,30,32)(19,45,15,33)(20,46,16,34)(21,47,9,35),$$

$$L = (9,11,13,15)(10,12,14,16)(1,41,29,33)(8,48,28,40)(7,47,27,39),$$

$$R = (17,19,21,23)(18,20,22,24)(3,35,31,43)(4,36,32,44)(5,37,25,45),$$

$$F = (41,43,45,47)(42,44,46,48)(5,21,29,13)(6,22,30,14)(7,23,31,15),$$

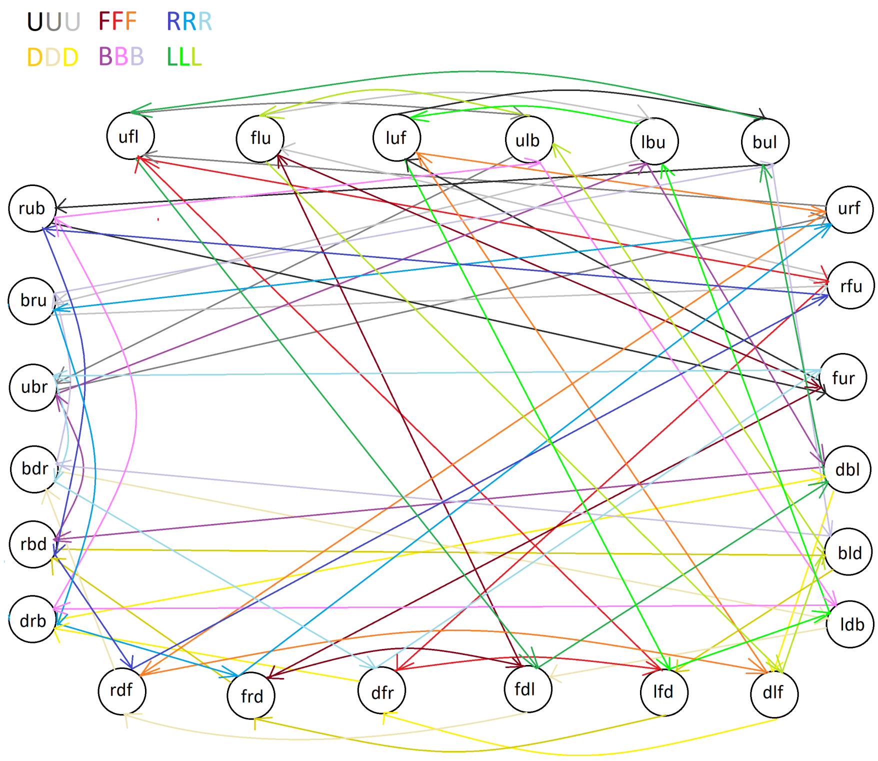
$$B = (33,35,37,39)(34,36,38,40)(1,9.25,17)(2,10,26,18)(3,11,27,19).$$

Pohyby inverzními k základním pohybům rozumíme permutace množiny C, které dosáhneme otočením dané strany Rubikovy kostky o 90°proti směru hodinových ručiček.

Obrázek 3 a obrázek 4 nám znázorňují, jak jednotlivé základní pohyby působí na rohové, resp. hranové kostky. Jednotlivé kostky zde jsou označeny stejným způsobem, jako v kapitole 3.

Definice 4.2 *Pohybem M Rubikovy kostky rozumíme sekvenci základních pohybů.*

Složené pohyby budeme zapisovat pomocí jejich pořadí, v jakém jsou prováděny, případně jako složení jednotlivých pohybů, které vykonáváme zprava doleva. Pro příklad si uveďme složený pohyb $M = URD = D \cdot R \cdot U$, který vykonáme postupným provedením pohybů U, R a D v tomto pořadí. Pomocí základních pohybů pak definujeme samotnou grupu Rubikovy kostky.



Obrázek 3: Změna postavení rohových kostek po provedení základních pohybů

Definice 4.3 *Grupa Rubikovy kostky G je podgrupa $(S_{48}, *)$ generovaná množinou základních pohybů*

$$S = \{U, D, R, L, F, B\},$$

tj. $G = \langle S \rangle$. Prvky G nazýváme povolené konfigurace Rubikovy kostky.

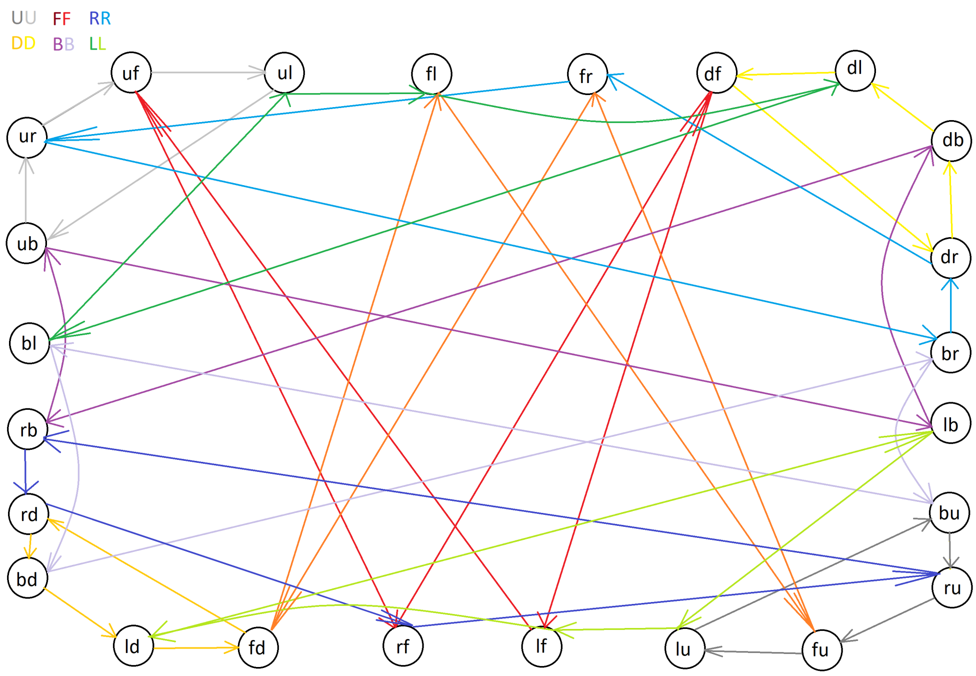
Definice 4.4 *Neutrální prvek e grupy G nazýváme složenou konfigurací.*

Složenou konfiguraci lze vidět na obrázku 5. Konfiguraci jednotlivé kostky můžeme vyjádřit i pohybem provedeným na základní konfiguraci. Pohyb bychom mohli uvažovat jako vektor ve vektorovém prostoru, oproti tomu konfigurace představuje v daném prostoru statický bod. Stejně jako například v $\mathbb{R}^2$ můžeme sčítat vektory, zde lze obdobným způsobem skládat jednotlivé pohyby. Na jednotlivé konfigurace pak můžeme tyto pohyby aplikovat podobně, jako aplikujeme vektory na body prostoru $\mathbb{R}^2$.

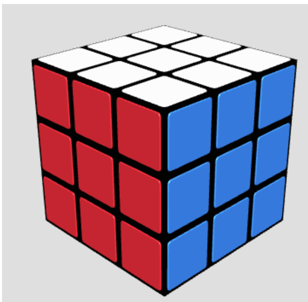
Pokud bychom Rubikovu kostku rozložili na jednotlivé díly a následně náhodně složili zpět, nemusíme získat povolenou konfiguraci (např. $g \in S_{48}, g = (1, 11, 39)$ není povolenou konfigurací, vycházíme ze závěrů v kapitole o povolených konfiguracích). Zavedeme si tedy grupu, která nám bude zahrnovat i tyto případy:

Definice 4.5 *Zobecněná grupa Rubikovy kostky X je taková podgrupa S_{48}, jejímiž prvky jsou všechny prvky S_{48}, které je možné získat rozložením Rubikovy kostky na díly a jejím zpětným sestavením. Prvky X nazýváme zobecněné konfigurace Rubikovy kostky.*

Prvky X nám umožňují libovolné permutace rohových, resp. hranových kostek a libovolnou změnu jejich spinů, nezávisle na ostatních kostkách. Grupa G je zřejmě podgrupou X.



Obrázek 4: Změna postavení hranových kostek po provedení základních pohybů



Obrázek 5: Složená konfigurace Rubikovy kostky

Definice 4.6 *Vandalským prvkem zobecněné grupy Rubikovy kostky X rozumíme prvek množiny $X \setminus G$. Množinu $X \setminus G$ nazýváme vandalskou množinou grupy X.*

V následující sekci se podíváme na to, které prvky grupy X jsou prvky podgrupy G a které jsou prvky vandalskými.

5 Povolené konfigurace

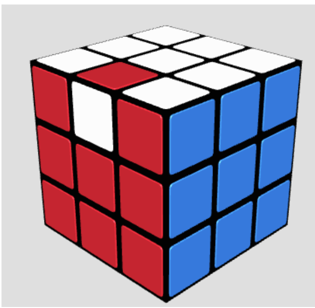
5.1 Všechny konfigurace Rubikovy kostky

Nyní se zaměříme na to, kolika různých konfigurací může Rubikova kostka dosáhnout a které konfigurace (σ, τ, x, y) jsou povolenými konfiguracemi, tj. jestli existuje pohyb $M \in G$, kterým z původní konfigurace dosáhneme základní konfigurace (e,e,0,0).

Rubikova kostka se skládá z 6 středových, 12 hranových a 8 rohových kostek. Provedením libovolného pohybu $M \in G$ se nám nemůžou hranové kostky stát rohovými a naopak. Zároveň M nemění pozici středových kostek, mění pouze umístění a spiny hranových a středových kostek. Hranové kostky mohou být v libovolném pořadí rozmístěny na hranové pozice $\underline{1} - \underline{12}$, tj. existuje 12! možností jejich rozmístění. Dále každá z nich může mít spin 0 nebo 1, tedy 2^{12} možných rozmístění zohledňujících spin. Rohové kostky mají, obdobně jako u kostek hranových, 8! různých rozmístění (8 kostek obsazuje 8 pozic) a 3^8 možných kombinací jejich spinů (každá rohový kostka může mít spin 0,1 nebo 2). Celkem tedy existuje $12! \cdot 2^{12} \cdot 8! \cdot 3^8$ zobecněných konfigurací Rubikovy kostky, tj.

$$|X| = 12! \cdot 2^{12} \cdot 8! \cdot 3^8 \doteq 5,19 \cdot 10^{20}.$$

Ač všechny tyto konfigurace mohou existovat, ne všech můžeme dosáhnout pomocí pohybů kostky $M \in G$. Například konfigurace na obrázku 6, která má všechny kostky správně umístěny a od základní konfigurace se liší spinem jedné hranové kostky, tj. $y = (1, 0, 0, ..., 0)$, nelze dosáhnout, museli bychom Rubikovu kostku rozebrat na díly a znovu vhodně seskládat.



Obrázek 6: Nepovolená konfigurace Rubikovy kostky

5.2 Popis povolených konfigurací

Definice 5.1 *Povolenou konfigurací rozumíme takovou konfiguraci (σ, τ, x, y), pro kterou existuje pohyb $M \in G$ uvádějící Rubikovu kostku do základní konfigurace (e,e,0,0).*

Počet povolených konfigurací Rubikovy kostky získáme pomocí následující věty:

Věta 5.1 *Konfigurace je povolená právě tehdy, když $\sum y_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$, $\sum x_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ a $\operatorname{sgn} \sigma = \operatorname{sgn} \tau$.*

Důkaz: Nejprve se podívejme na to, jak nám jednotlivé pohyby mění spin jednotlivých kostek: Každý pohyb nám mění spin rohových kostek jedním ze dvou způsobů, viz tabulka 1. U pohybů U a D spin zachová, u zbylých pak změní spin dvou kostek o 1 (natočí je o 120°)

Pohyb	x'	y'
e	(0,0,0,0,0,0,0,0)	(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
U	(0,0,0,0,0,0,0,0)	(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
D	(0,0,0,0,0,0,0,0)	(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
B	(0,1,2,0,0,0,2.1)	(0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,1)
F	(2,0,0,1,2,1,0,0)	(1,0,0,0,1,0,0,0,1,1,0,0)
R	(0,0,1,2,1,0,0,2)	(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
L	(1,2,0,0,0,2,1,0)	(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)

Tabulka 1: Změny spinů po provedení základních pohybů

spin1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-2	-2	-2
spin2	+1	+1	+1	-2	-2	-2	-2	-2	-2
spin3	+2	+2	-1	+2	+2	-1	+2	+2	-1
spin4	+2	-1	-1	+2	-1	-1	+2	-1	-1
x_i'	x_i+6	x_i+3	x_i	x_i+3	x_i	x_i-3	x_i	x_i-3	x_i-6

Tabulka 2: Možné změny součtu spinů rohových kostek po provedení základního pohybu

a spin dvou kostek o 2 (natočí je o 240°). U kostek hranových je situace ještě jednodušší, každý pohyb nám spin může zachovat nebo nám zvýší spin čtyř kostek o 1. Uvažujme součet spinů hranových kostek $\sum y_i$. Každý pohyb nám spin hranových kostek zachová, případně přičte ke čtyřem složkám $y1 \bmod 2$, tj. spin o 1 zvýší (spin 0 se změní na 1) nebo o 1 sníží (spin 1 se změní na 0). Mohou tedy nastat tyto případy:

- spin čtyř kostek se zvýší o 1: $\sum y_i' = \sum y_i + 4$.
- spin tří kostek se zvýší o 1, spin jedné kostky se o 1 sníží: $\sum y_i' = \sum y_i + 2$.
- spin dvou kostek se zvýší o 1, spin dvou kostek se sníží o 1: $\sum y_i' = \sum y_i$.
- spin jedné kostky se o 1 zvýší, spin tří kostek se o 1 sníží: $\sum y_i' = \sum y_i - 2$.
- čtyř kostek se sníží o 1: $\sum y_i' = \sum y_i - 4$.

Ve všech případech $\sum y_i, \equiv \sum y_i' (\bmod 2)$. V základní konfiguraci je $\sum y_i \equiv 0 (\bmod 2)$, pro všechny povolené konfigurace bude tedy $\sum y_i \equiv 0 (\bmod 2)$.

U rohových kostek je situace trochu obtížnější. Pohyb nám spin opět může zachovat, nebo zvýšit spin dvou kostek o 1 a dalších dvou kostek o $2 \bmod 3$. Zvýšení spinu o $1 \bmod 3$ nám tedy součet $\sum x_i$ zvýší o 1, nebo sníží o 2. Zvýšení spinu o $2 \bmod 3$ nám $\sum x_i$ zvýší o 2, nebo sníží o 1. Zde může nastat případů více, nalezneme je popsané v tabulce 2. Ve všech případech $\sum x_i, \equiv \sum x_i' (\bmod 3)$. V základní konfiguraci je $\sum x_i \equiv 0 (\bmod 3)$, všechny povolené konfigurace tedy musí splňovat podmínku $\sum x_i \equiv 0 (\bmod 3)$.

Zbývá nám ukázat platnost poslední části tvrzení. Uvažujme konfigurace (σ, τ, x, y) a $(\sigma', \tau', x', y') = (\sigma, \tau, x, y) \cdot M$, kde M je pohyb. Označme $\operatorname{sgn} \sigma_n$, $\operatorname{sgn} \tau_n$ znaménka permutací σ a τ po provedení pohybu M o n základních pohybech. Pro každý základní pohyb jsou σ_1 i τ_1 čtyřcykly, platí tedy

$$\operatorname{sgn} \sigma_1 = \operatorname{sgn} \tau_1 = -1.$$

Pro pohyb M pak platí

$$\operatorname{sgn}\sigma_n = \operatorname{sgn}\tau_n = (-1)^n, \quad (\operatorname{sgn}\sigma_n)(\operatorname{sgn}\tau_n) = (-1)^{2n} = 1.$$

Tedy

$$(\operatorname{sgn}\sigma')(\operatorname{sgn}\tau') = (\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau)\cdot 1 = (\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau).$$

Pro základní konfiguraci platí $(\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau) = (\operatorname{sgn} e)(\operatorname{sgn} e) = 1$, pro každou povolenou konfiguraci (σ, τ, x, y) platí $(\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau) = 1$ a tudíž $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\tau$. □

Pomocí této věty jsme ukázali, že pouze $\frac{1}{12}$ ze všech zobecněných konfigurací Rubikovy kostky jsou povolenými konfiguracemi. Tedy $|X| = 12|G|$ a

$$|G| = 12! \cdot 2^{12} \cdot 8! \cdot 3^8/12 = 11! \cdot 2^{12} \cdot 8! \cdot 3^8$$

6 Řešení Rubikovy kostky

Při řešení Rubikovy kostky musíme dospět z původní, povolené konfigurace kostky (σ, τ, x, y) do základní konfigurace $(e, e, 0, 0)$. K tomu se nám bude hodit následující věta:

Věta 6.1 *Každou permutaci na n prvcích lze rozložit na transpozice typu* $(1, i)$ *pro* $i \in \{2, ..., n\}$.

Důkaz: Důkaz je zde jednoduchý, každou permutaci $\Pi = (r_1, r_2, ..., r_n)$ lze zřejmě rozložit jako $\Pi = (r_1 r_2)(r_1 r_3)...(r_1 r_n)$. □

Tato věta nám pomůže dostat konfigurace rozložení kostky do základního tvaru. Pokud nalezneme pohyby, které nám prohodí umístění, respektive spin několika konkrétních kostek, dokážeme pak vhodnou kombinací těchto pohybů dosáhnout základní konfigurace $(e, e, 0, 0)$.

6.1 Rohové kostky

Hranové kostky můžeme přemísťovat bez pohybu rohových kostek (například pohyb RD^{-1} nám otočí všechny rohové kostky ve stejném směru, jejich vzájemná poloha se zachová, tj. je to stejný pohyb, jako otočit prostřední vrstvu mezi R a D ve směru opačném), ale při přemísťování rohových kostek vždy měníme uspořádání kostek hranových. Proto je vhodné nejprve uspořádat kostku do konfigurace $(e, \tau, 0, y)$, tj. rohové kostky budou na vhodných místech a budou správně orientovány.

6.1.1 Umístění rohových kostek

Před tím, než budeme řešit orientaci jednotlivých rohových kostek je vhodné si je umístit na správnou pozici, tj zajistit, aby $\sigma = e$. Abychom tohoto dosáhli, je potřeba nalézt vhodný algoritmus, který nám umožní prohodit umístění dvou libovolných rohových kostek. Pokud tento algoritmus budeme mít k dispozici, můžeme pak díky větě 6.1 vhodnou kombinací těchto prohození dosáhnout konfigurace, kde $\sigma = e$. Uvažujme pohyb kostky

$$[DR] = DRD^{-1}R^{-1} = R^{-1} \cdot D^{-1} \cdot R \cdot D.$$

Postupnou aplikací pohybů na jednotlivé rohové kostky složené konfigurace získáváme

$$R^{-1} \cdot D^{-1} \cdot R \cdot D(ufl) = R^{-1} \cdot D^{-1} \cdot R(ufl) = R^{-1} \cdot D^{-1}(ufl) = R^{-1}(ufl) = ufl,$$

$$R^{-1} \cdot D^{-1} \cdot R \cdot D(urf) = R^{-1} \cdot D^{-1} \cdot R(urf) = R^{-1} \cdot D^{-1}(bru) = R^{-1}(bru) = urf,$$

$$R^{-1} \cdot D^{-1} \cdot R \cdot D(ubr) = R^{-1} \cdot D^{-1} \cdot R(ubr) = R^{-1} \cdot D^{-1}(bdr) = R^{-1}(rdf) = rbd,$$

$$R^{-1} \cdot D^{-1} \cdot R \cdot D(ulb) = R^{-1} \cdot D^{-1} \cdot R(ulb) = R^{-1} \cdot D^{-1}(ulb) = R^{-1}(ulb) = ulb,$$

$$R^{-1} \cdot D^{-1} \cdot R \cdot D(dbl) = R^{-1} \cdot D^{-1} \cdot R(dlf) = R^{-1} \cdot D^{-1}(dlf) = R^{-1}(dbl) = dbl,$$

$$R^{-1} \cdot D^{-1} \cdot R \cdot D(dlf) = R^{-1} \cdot D^{-1} \cdot R(dfr) = R^{-1} \cdot D^{-1}(fur) = R^{-1}(fur) = dfr,$$

$$R^{-1} \cdot D^{-1} \cdot R \cdot D(dfr) = R^{-1} \cdot D^{-1} \cdot R(drb) = R^{-1} \cdot D^{-1}(frd) = R^{-1}(lfd) = lfd,$$

$$R^{-1} \cdot D^{-1} \cdot R \cdot D(drb) = R^{-1} \cdot D^{-1} \cdot R(dbl) = R^{-1} \cdot D^{-1}(dbl) = R^{-1}(drb) = bru.$$

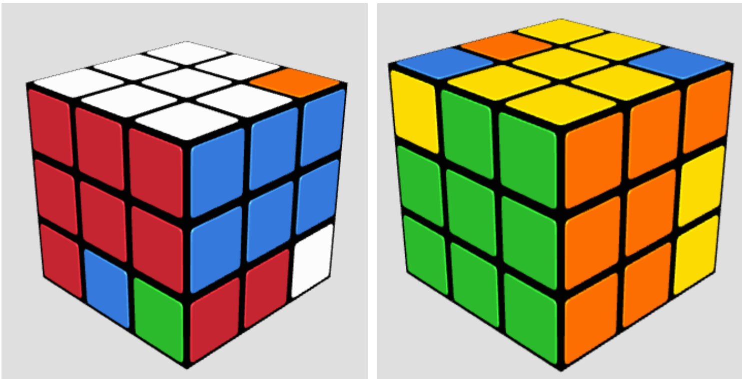
Permutace rohových kostek jsou pak následující (pro přehlednost nezapisujeme permutace hranových kostek, v tuto chvíli pro nás nejsou důležité):

$$[DR] = (ubr, rbd, rub, drb, bru, bdr)(dlf, dfr, fdl, frd, lfd, rdf).$$

Pohyb $[DR]$ můžeme pozorovat na obrázku 7, σ nám změní následovně:

$$\sigma([DR]) = (5, 6)(4, 8).$$

Dále využijeme pohyb L, pro který $\sigma(L) = (6, 7, 3, 2)$. Budeme hledat takovou kombinaci



Obrázek 7: Rubikova kostka po provedení pohybu [DR].

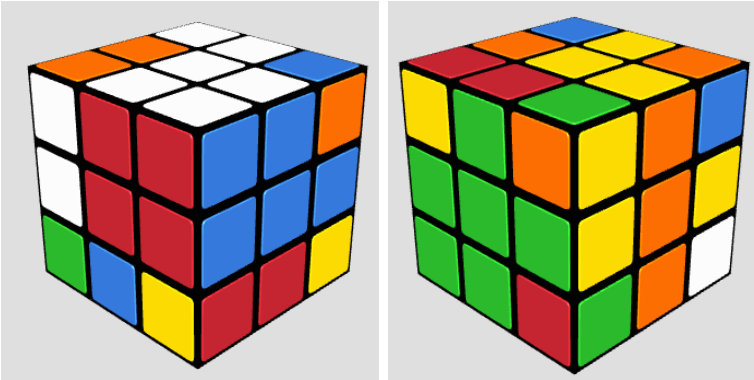
pohybů $[DR]$ a L, které nám změní pozici pouze dvou rohových kostek. Jelikož $[DR]$ prohazuje dvě dvojice rohových kostek a s pohybem L sdílí pouze změnu na pozici 6, je potřeba vykonat sudý počet pohybů $[DR]$, aby rohové kostky na pozicích 4 a 8 nebyly prohozené. Pohyb $[DR]$ využijeme k tomu, abychom mohli přehazovat uspořádání kostek ve stěně l tak, že budeme vhodně prohazovat kostky ze stěny l s kostkou na pozici 5. Nesmíme zapomenout v posledním kroku vrátit kostku 5 na své místo před začátkem pohybu. Definujme tedy pohyb δ následovně:

$$\delta = L \cdot [DR] \cdot L^2 \cdot [DR] \cdot L \cdot [DR] \cdot L \cdot [DR].$$

Tento pohyb nám prohodí kostky na pozicích 3 a 4 a zachová pozici všech ostatních rohových kostek, tedy $\sigma(\delta) = (3, 7)$, viz. obrázek 8. Pohyb δ nám prohodí dvě libovolné sousední kostky. Pokud chceme prohodit dvě nesousední kostky ležící v jedné stěně (například kostky na pozicích 4 a 7), musíme vykonat pohyb $A\delta A^{-1}, A \in S$ (pro kostky 4 a 7 jde o pohyb $U^{-1}\delta U$). V případě, že spolu kostky stěnu nesdílí (například kostky na pozicích 1 a 7), vykonáme pohyb $A^2\delta A^{-2}$ (u kostek 1 a 7 jde o pohyb $U^2\delta U^{-2}$). Zvolením jedné kostky, přes kterou budeme ostatní těmito pohyby prohazovat, umístíme všech sedmi kostek na své místo. Podle věty 5.1 pak i poslední kostka musí být na svém místě.

6.1.2 Spin rohových kostek

Po umístění rohových kostek na správné místo jim ještě musíme udělit správný spin. Abychom tak mohli učinit, potřebujeme nalézt algoritmus, který nám mění spin právě dvou kostek. Pokud toto dokážeme, zvládneme vhodnou sekvencí těchto natočení dosáhnout základního spinu.



Obrázek 8: Rubikova kostka po provedení pohybu δ.

Znovu uvažujme pohyb kostky $[DR]$:

$$[DR] = (ubr, rbd, rub, drb, bru, bdr)(dlf, dfr, fdl, frd, lfd, rdf).$$

Při pohybu $[DR]$ se prohazují dvojice kostek ubr a rbd, resp. dlf a dfr. Proto, pokud pohyb $[DR]$ zopakujeme, všechny rohové kostky se vrátí na své původní místo, ale změní se jejich spin:

$$\begin{aligned}
[DR]^2 &= [DR] \cdot [DR] = (ubr, rub, bru)(rbd, drb, bdr)(dlf, fdl, lfd)(dfr, frd, rdf),\\
[DR]^4 &= (ubr, bru, rub)(rbd, bdr, drb)(dlf, lfd, fdl)(dfr, rdf, frd),\\
[DR]^6 &= e.
\end{aligned}$$

Pro $[DR]^2$ pak dostáváme

$$x([DR]^2) = (0, 0, 0, 2, 1, 1, 0, 2),$$

tzn. kostky dfr a dlf se natočí o 120° a kostky urf, drb o 240°. Dále uvažujme pohyb $D = (dlf, dfr, drb, dbl)$. Tento pohyb nám nemění spin kostek, proto ho využijeme pro posun rohových kostek tak, abychom správným kostkám udělili vhodný spin.

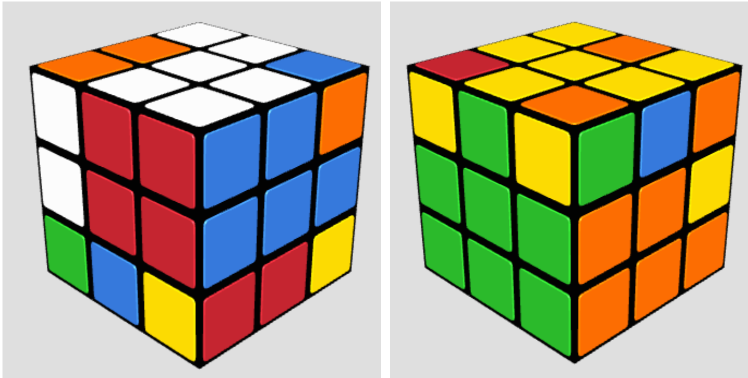
Definujme pohyb

$$\phi = [DR]^2 D [DR]^2 D [DR]^2 D^2 = D^2 \cdot [DR]^2 \cdot D \cdot [DR]^2 \cdot D \cdot [DR]^2.$$

Tento pohyb nám zachovává polohu jednotlivých kostek: $[DR]^2$ nám pozici kostek nemění, pohyb D vykonáme celkem čtyřikrát, $D^4 = e$. dále tento pohyb zachová všechny orientace rohových kostek, kostku dfl otočí o 120°, kostku dlb o 240°, viz obrázek 9. Tedy

$$x(\phi) = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 0).$$

Tento pohyb mění orientaci dvou sousedních kostek. Pokud je potřeba změnit orientaci u jinak postavených kostek, stačí před pohybem ϕ vykonat vhodný základní pohyb, aby se dané kostky staly sousedními. Pokud budou kostky v rámci jedné stěny, ale diagonálně (například dlf a dbl), změnu spinu vykonáme pohybem $A\phi A^{-1}, A \in S$ (u dlf a dbl jde o pohyb $B^{-1}\phi B$). V případě, že spolu kostky nesdílí stěnu (například dfl a urb, změnu spinu vykonáme pohybem $A^2\phi A^{-2}$ (u dfl a urb jde o pohyb $B^{-2}\phi B^2$). Zvolením jedné kostky, na které budeme provádět každý pohyb, vždy s jinou kostkou, dokážeme dosáhnout správného spinu u všech sedmi zbylých kostek. Podle věty 5.1 pak musí mít i poslední kostka správný spin.



Obrázek 9: Rubikova kostka po provedení pohybu ϕ.

6.2 Hranové kostky

Vypořádali jsme se s umístěním a spinem rohových kostek, u hranových musíme postupovat opatrněji. Pohyby, které nám sice pomůžou s umístěním hranových kostek, ale rozhodí nám konfiguraci kostek rohových napáchají vice škody než užitku.

Budeme uvažovat dva pohyby. Prvním pohybem je

$$U = (urf, ufl, ulb, ubr)(ub, ur, uf, ul),$$

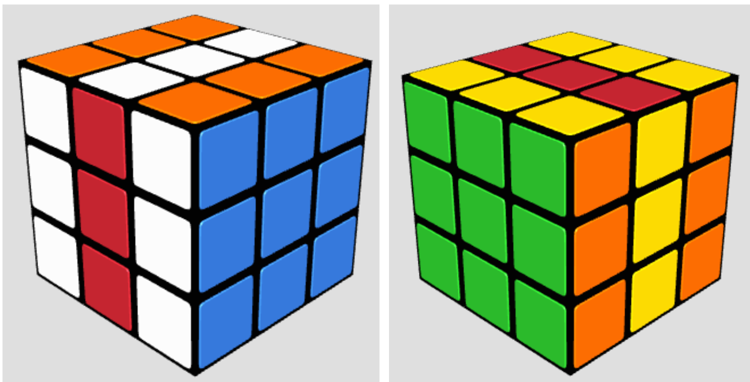
který již dobře známe. Dále si zavedeme pohyb

$$M_r = LR^{-1} = R^{-1} \cdot L = (urf, frd, drb, bru)(ur, fr, dr, br)(ufl, fld, dlb, blu)(ul, fl, dl, bl).$$

V tomto případě bude snazší uvažovat pohyb M_r jako otočení prostřední vrstvy Rubikovy kostky o 90°, viz obrázek 10. Pokud ukotvíme stěny L a R na místě a povolíme změnu polohy středů, bude vyjádření pohybu M_r mnohem jednodušší:

$$M_r = (u, b, d, f)(ub, bd, df, fu).$$

Oba pohyby jsou pro nás nebezpečné v tom, že kromě hranových kostek mění i konfiguraci



Obrázek 10: Rubikova kostka po provedení pohybu Mr.

kostek rohových a středových. Délky permutací rohových i středových kostek u obou těchto pohybů jsou rovny 4, bude tedy potřeba použít jejich čtvrté mocniny, případně pohyby k nim inverzní, aby konfigurace rohových a středových kostek zůstala zachována.

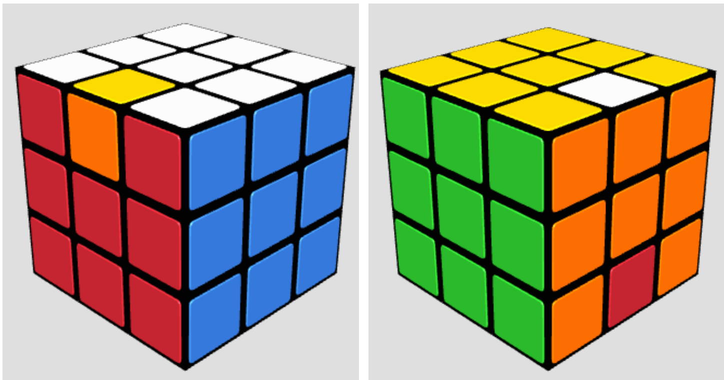
6.2.1 Umístění hranových kostek

Uvažujme některé kombinace pohybů M_r a U:

$$\begin{aligned}
M_r U^2 &= (b,d,f,u)(urf,ulb)(ufl,ubr)(fu,uf)(ul,ur)(ub,bd,df,bu,db,fd),\\
M_r^{-1} = RL^{-1} &= (b,u,f,d)(ub,fu,fd,db),\\
M_r^{-1}U^2 &= (b,u,f,d)(urf,ulb)(ubr,ufl)(ub,bu)(ul,ur)(fu,fd,db,uf,df,bd).
\end{aligned}$$

Nabízí se složit pohyby M_rU^2 a $M_r^{-1}U^2$, uvažujme tedy pohyb

$$\xi = M_rU^2M_r^{-1}U^2 = LR^{-1}U^2L^{-1}RU^2 = (ub,fu,df)(bu,uf,fd).$$



Obrázek 11: Rubikova kostka po provedení pohybu ξ.

Pohyb ξ nám zachovává konfiguraci hranových i středových kostek, ale mění umístění tří kostek ub, fu a df, viz obrázek 11. Zbývá ověřit, jestli tento pohyb lze využít univerzálně, tj. zda lze libovolnou trojici hranových kostek dostat na pozice ub, fu a df.

- Pokud jsou všechny kostky v rámci jedné prostřední vrstvy, stačí použít pohyb ξ.
- Všechny kostky se nachází v jedné stěně (například uf, df a lf). Pro prohození takto zvolených kostek potřebujeme pohyb $A^2B\xi B^{-1}A^2; A,B \in S$.
  (pro uf, df, lf jde o pohyb $L^2B^{-1}\xi BL^2$).
- První a druhá, resp. první a třetí hranová kostka v rámci jedné stěny, ale druhá a třetí v různých stěnách (například uf, lf a ub). Zde nám poslouží pohyb $ABA^{-1}\xi AB^{-1}A^{-1}; A,B \in S$ (pro uf, lf a ub jde o pohyb $UFU^{-1}\xi UF^{-1}U^{-1}$).
- První a druhá sousedící v jedné stěně, třetí s nimi nesdílí žádnou stěnu (například df, lf a bu). V tomto případě zvolíme stejný pohyb jako v předchozím případě, tj. $ABA^{-1}\xi AB^{-1}A^{-1}; A,B \in S$ (pro df, lf a bu jde o pohyb $DFD^{-1}\xi DF^{-1}D^{-1}$).
- První a druhá hranová kostka umístěna naproti sobě v jedné stěně, třetí s nimi nesdílí žádnou stěnu (například rf, lf a bu). Zde je algoritmus jednodušší, stačí použít pohyb $A\xi A{-}1; A \in S$ (pro rf, lf a bu jde o pohyb $F\xi F^{-1}$).
- Žádné dvě hranové kostky spolu nesdílí stěnu (například rf, bu a dl). Zde využijeme pohybu $AB\xi B^{-1}A^{-1}; A,B \in S$ (pro rf, bu a dl jde o pohyb $F^{-1}D\xi D^{-1}F$).

Ukázali jsme tedy, že tento pohyb lze použít pro změnu umístění libovolných tří hranových kostek. Zvolením dvou těchto kostek dokážeme zbylých deset správně umístit. Podle věty 5.1 i zbylé dvě budou na správném místě. Tímto způsobem dokážeme nalézt takové složení výše uvedených pohybů, aby po vykonání složeného pohybu byla $\tau = e$.

6.2.2 Spin hranových kostek

Zbývá nám vyřešit spin hranových kostek, naším cílem tedy bude dostat se z konfigurace (1,1,0,y) do konfigurace základní, tj. (1,1,0,0). Stejně jako u předchozích problémů, i zde je potřeba nalézt algoritmus, který nám změní pouze spin dvou kostek a zbytek zachová. Uvažujme znovu složení pohybů M_r a U a to následující:

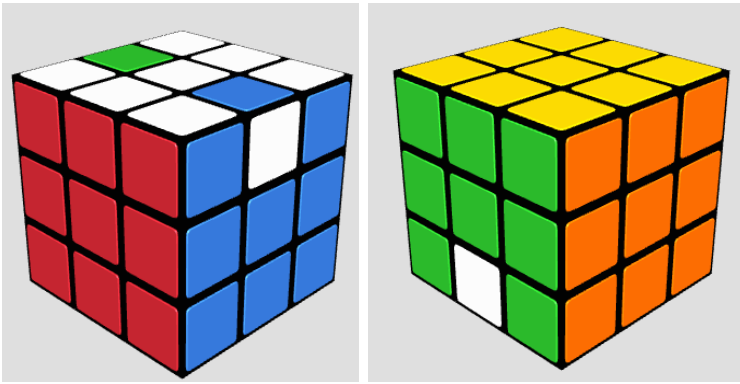
$$M_rU = (b, d, f, u)(urf, ufl, ulb, ubr)(ub, bd, dl, lu, bu, db, fd, ul)(fu, ur, uf, ru),$$
$$M_rU^{-1} = (b, d, f, u)(urf, ubr, ulb, ufl)(ub, bd, df, ru, bu, db, fd, ur)(ul, lu, fu, ul).$$

Tyto pohyby mají v sobě cykly délky 4 a jeden cyklus délky 8, nabízí se zkoumat pohyby

$$(M_rU)^4 = (ub, bu)(bd, db)(df, fd)(ul, lu),$$
$$(M_rU^{-1})^4 = (ub, bu)(bd, db)(df, fd)(ur, ru).$$

Jejich složením pak dostaneme

$$\chi = (M_rU)^4(M_rU^{-1})^4 = (ul, lu)(ur, ru)$$



Obrázek 12: Rubikova kostka po provedení pohybu χ.

Pohyb χ nám tedy prohodí spin dvou protilehlých hranových kostek, viz obrázek 12. Ukažme opět, že tento pohyb poslouží k prohození spinu dvou kostek bez ohledu na jejich umístění:

- Pokud jsou hranové kostky naproti sobě v jedné stěně (například ru a lu), stačí nám samotný pohyb χ.
- Hranové kostky v jedné stěně, které spolu sousedí (například ru a fu). Pak využijeme pohyb $AB\chi B^{-1}A^{-1}$; $A, B \in S$ (pro rf, bu a dl jde o pohyb $F^{-1}L^{-1}\chi LF$).
- Hranové kostky spolu nesdílí žádnou stěnu, jejich spojnice prochází středem kostky (například ru a dl). Zde poslouží pohyb $A^2\chi A^2$; $A \in S$ (pro ru a dl použijeme $L^2\chi L^2$).

- Hranové kostky spolu nesdílí žádnou stěnu, jejich spojnice neprochází středem kostky (například ru a fl). V tomto případě stačí použít pohyb $A\chi A^{-1}$ (pro ru a fl to je pohyb $L^{-1}\chi L$).

Pohyb χ tedy lze využít na změnu spinu libovolných dvou hranových kostek. Opět prohazováním s pevně zvolenou hranovou kostkou dokážeme zajistit správnou orientaci jedenácti hranových kostek. Podle věty 5.1 je správně orientována i poslední hranová kostka. Provedením těchto pohybů jsme pak schopni dosáhnout základní konfigurace Rubikovy kostky.

7 Popis nepovolených konfigurací

Uvažujme situaci, kdy jsme získali Rubikovu kostku náhodně rozebranou na díly a složenou zpět. Pokusme se takovou kostku pomocí našeho algoritmu převést do základní konfigurace a podívejme se, jaké problémy mohou nastat v jednotlivých krocích.

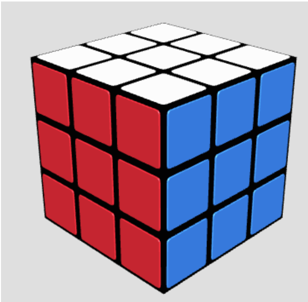
Rohové kostky půjdou vždy umístit na své místo, pomocí algoritmu dokážeme správně umístit sedm kostek. Poslední rohová kostka může být pouze na jedné, správné pozici. Dokážeme tedy libovolnou konfiguraci $(\sigma, \tau, x, y) \in X$ převést na konfiguraci (e, τ', x', y').

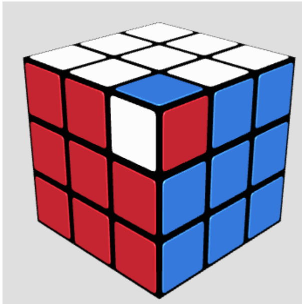
Při řešení orientací rohových kostek máme k dispozici pohyb, s jehož pomocí měníme spin dvou kostek - ke spinu první přičítáme 1 *mod* 3, ke spinu druhé 2 *mod* 3. Dokážeme tedy bez problémů změnit spin sedmi kostek na 0, osmá kostka pak může mít tři různé spiny. konfiguraci $(e, \tau', x', y') \in X$ dokážeme převést na konfiguraci (e, τ'', x_0, y''), kde $x_0 \in \{0; (1,0,0,0,0,0,0,0); (2,0,0,0,0,0,0,0)\}$. Pokud $x_0 \neq 0$, neexistuje pohyb převádějící kostku do složené konfigurace a původní konfigurace je nepovolená.

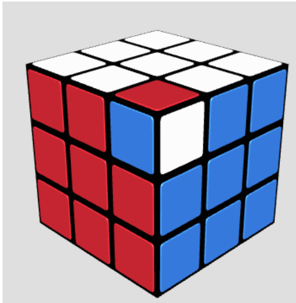
Při správném umísťování hranových kostek provádíme pohyb, který nám prohazuje tři hranové kostky. S jeho pomocí dokážeme bez problémů umístit deset z dvanácti kostek na správné místo, tj. převést konfiguraci $(e, \tau'', x_0, y'') \in X$ na konfiguraci (e, τ_0, x_0, y'''). Pro τ_0 pak nastávají dva případy. První možností je $\tau_0 = e$, pokud jsou i zbývající dvě hranové kostky správně umístěné . V opačném případě jsou poslední dvě hranové kostky prohozené. Tedy $\tau_0 \in \{e, (1,2)\}$.

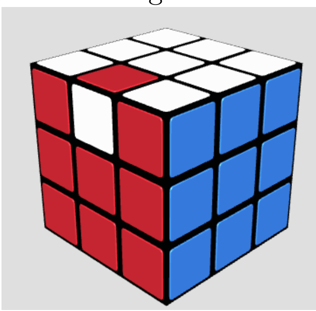
V posledním kroku měníme spiny dvou hranových kostek. Podobně jako u rohových kostek dokážeme zajistit správný spin jedenácti hranových kostek. Poslední hranová kostka pak může mít spin 0, v tom případě je natočená správně, nebo je otočená o 180° a má spin 1. Tímto pohybem tedy dokážeme konfiguraci (e, τ_0, x_0, y''') upravit na konfiguraci $e, \tau_0, x_0, y_0)$, kde $y_0 \in \{0, (1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)\}$. Pokud $y_0 = 0$, získali jsme složenou konfiguraci a původní konfigurace $(\sigma, \tau, x, y) \in G$ je tedy povolená. Pokud $y_0 = (1,0,0,0,...)$, původní konfigurace $(\sigma, \tau, x, y) \notin G$ je nepovolená.

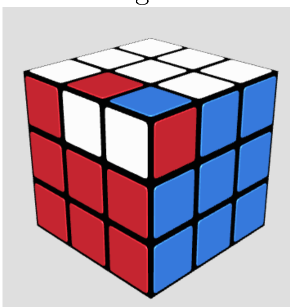
Konfigurace (e, τ_0, x_0, y_0) získaná provedením všech kroků pro složení kostky může mít dvanáct různých tvarů a každá patří do různé orbity. Tyto konfigurace se svým tvarem nevíce blíží složené konfiguraci, budeme je uvažovat jako základní konfigurace v odpovídajících orbitách. Jejich výčet lze nalézt v tabulce 3, na obrázku 13 pak můžeme vidět jejich skutečné podoby na zobecněné Rubikově kostce. Vidíme, že akce grupy G na X má celkem dvanáct orbit, tedy pravděpodobnost, že ji lze složit do základní konfigurace je 1:12. Ovšem i nepovolené konfigurace ležící ve zbývajících jedenácti orbitách dokážeme pomocí pohybů převést do odpovídající základní konfigurace. Případ akce grupy povolených konfigurací G na množině všech konfigurací X je analogický s příkladem 5 v kapitole 2, ve kterém jsme uvažovali akci grupy lineárních izomorfismů na množinu všech nedegenerovaných, symetrických bilineárních forem.

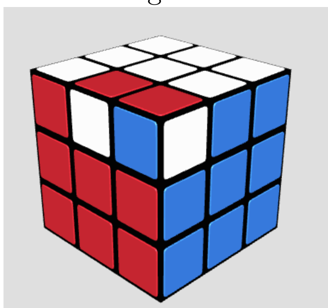

Konfigurace 0

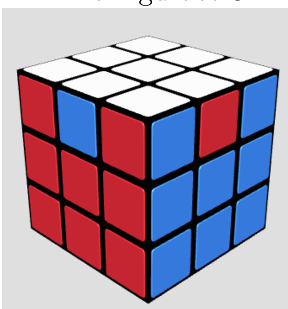

Konfigurace 1

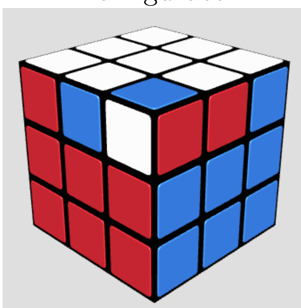

Konfigurace 2

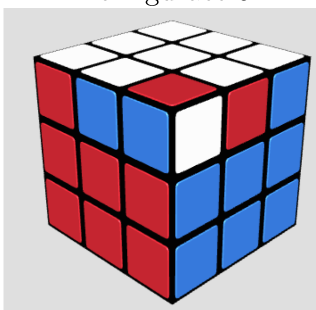

Konfigurace 3

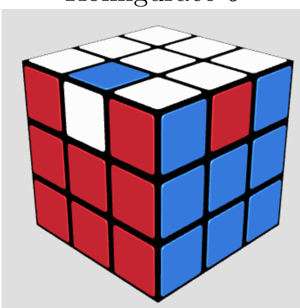

Konfigurace 4

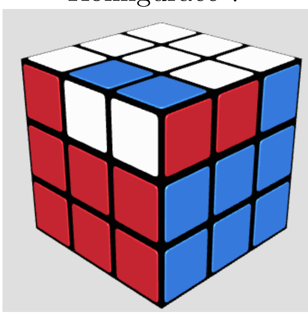

Konfigurace 5

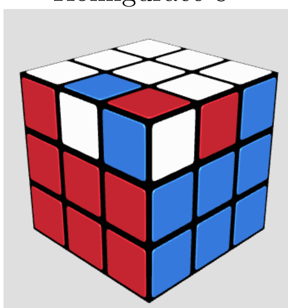

Konfigurace 6


Konfigurace 7


Konfigurace 8


Konfigurace 9


Konfigurace 10


Konfigurace 11

Obrázek 13: Základní konfigurace jednotlivých orbit zobrazené na Rubikově kostce.

Index konfigurace	τ_0	x_0	y_0	Konfigurace
0	e	0	0	$(e, e, 0, 0)$
1	e	(1,0,0,...)	0	$(e, e, (1, 0, 0, ...), 0)$
2	e	(2,0,0,...)	0	$(e, e, (2, 0, 0, ...), 0)$
3	e	0	(1,0,0,...)	$(e, e, 0, (1, 0, 0, ...))$
4	e	(1,0,0,...)	(1,0,0,...)	$(e, e, (1, 0, 0, ...), (1, 0, 0, ...))$
5	e	(2,0,0,...)	(1,0,0,...)	$(e, e, (2, 0, 0, ...), (1, 0, 0, ...))$
6	(1,2)	0	0	$(e, (1, 2), 0, 0)$
7	(1,2)	(1,0,0,...)	0	$(e, (1, 2), (1, 0, 0, ...), 0)$
8	(1,2))	(2,0,0,...)	0	$(e, (1, 2), (2, 0, 0, ...), 0)$
9	(1,2)	0	(1,0,0,...)	$(e, (1, 2), 0, (1, 0, 0, ...))$
10	(1,2)	(1,0,0,...)	(1,0,0,...)	$(e, (1, 2), (1, 0, 0, ...), (1, 0, 0, ...))$
11	(1,2)	(2,0,0,...)	(1,0,0,...)	$(e, (1, 2), (2, 0, 0, ...), (1, 0, 0, ...))$

Tabulka 3: Základní konfigurace jednotlivých orbit

8 Závěr

V této práci se nám podařilo splnit všechny naše cíle. Zadefinovali jsme si označení jednotlivých pozic a dílčích kostek Rubikovy kostky a zavedli si grupu a zobecněnou grupu Rubikovy kostky. Zkoumáním základních pohybů a jejich kombinací jsme dokázali nalézt algoritmus, který vede k složení tohoto hlavolamu. Tento postup je poměrně dlouhý, je při něm ale dobře vidět, jaké vlastnosti má grupa Rubikovy kostky. Navíc vzhledem k tomu, že nám stačí naučit se čtyři jednoduché algoritmy, není náročný na zapamatování. Dále jsme ukázali, že pokud Rubikovu kostku rozložíme na díly a složíme zpět, nemusíme dostat vždy takové rozložení, které lze převést do složené Rubikovy kostky. Takových špatných rozložení je dokonce mnohem více než těch, které lze složit. Ukázali jsme také, že na Rubikově kostce lze poměrně elegantně demonstrovat jak velmi základní algebraické pojmy, tak i pojmy o něco obtížnější, jako je například akce grupy na množině. Rubikovu kostku tedy je možné velmi dobře využít pro didaktické účely v hodinách algebry.

Tato bakalářská práce by se dala rozšířit o další algebraické pojmy, které by se na Rubikově kostce mohly zkoumat. Tyto pojmy by nám pravděpodobně pomohly najít efektivnější řešení tohoto hlavolamu, případně by se mohly ukázat jeho další zajímavé vlastnosti.

Literatura

[1] J. Chen: *Group Theory and the Rubik's Cube.* [online] Dostupné z: `people.math.harvard.edu~jjchen/docs/Group%20Theory%20and%20the%20Rubik%27s%20Cube.pdf`

[2] R. Wong: *The Group Structure of the Rubik's Cube.* [online] Dostupné z: `www.math.ucla.edu~richardwong/expository/Rubiks_Cube_Group.pdf`

[3] J. Rosický: *Algebra.* 4. vydání. BRNO: Masarykova univerzita, 2007. ISBN 978-80-210-2964-4