UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Fuzzy vážený průměr a jeho vlastnosti

Vedoucí bakalářské práce:
RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.
Rok odevzdání: 2015

Vypracoval:
Vladislav Hetlfleiš
MATEKO, III. ročník

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Vladislav Hetfleiš

Název práce: Fuzzy vážený průměr a jeho vlastnosti

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2015

Abstrakt: Vážený průměr je jedním z průměrujících agregačních operátorů, pro než jsou typické určité matematické vlastnosti jako idempotentnost, lineární invariantnost, monotónnost aj. Fuzzy vážený průměr představuje logické rozšíření ostrého váženého průměru do prostředí fuzzy množin. V práci je studováno možné rozšíření některých vlastností pro případ fuzzy vstupů a následné ověření, že fuzzy vážený průměr zachovává jednotlivé vlastnosti své ostré předlohy.

Klíčová slova: agregační operátor, fuzzy číslo, fuzzy množina, fuzzy vážený průměr, vážený průměr

Počet stran: 45

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Vladislav Hetfleiš

Title: Fuzzy weighted average operator and its properties

Type of thesis: Bachelor's

Department:
Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Ondřej Pavlačka, Ph.D.

The year of presentation: 2015

Abstract: The weighted average is one of the averaging aggregation operators for which there are typical certain mathematical properties such as idempotence, stability for a linear function, monotonicity etc. The fuzzy weighted average is a logical extension of the crisp weighted average into the environment of the fuzzy sets. The thesis examines a possible extension of certain properties in case of fuzzy inputs and the subsequent verification that the fuzzy weighted average retains individual properties of its crisp originals.

Key words: aggregation operator, fuzzy number, fuzzy set, fuzzy weighted average, weighted average

Number of pages: 45

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořil tuto bakalářskou práci samostatně za vedení RNDr. Ondřeje Pavlačky, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 10. dubna 2015

Poděkování

Především bych rád poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce RNDr. Ondřeji Pavlačkovi, Ph.D. za nekonečnou trpělivost a čas, který mi věnoval při konzultacích.

Dále bych chtěl poděkovat své babičce za to, že mi vždy dodala optimismu, když jsem ho měl pomálu.

A poděkování patří ještě mým přátelům, kteří si vždy ochotně vyslechli o potížích, které při psaní práce nastaly, ačkoliv matematiku nemají v krvi.

Obsah

Úvod **7**

1 Základní pojmy **8**
1.1 Množina, fuzzy množina 8
1.2 Základní charakteristiky fuzzy množin 9
1.3 Fuzzy číslo 10
1.4 Výpočty s fuzzy čísly 12

2 Vážený průměr jako agregační operátor **16**
2.1 Vážený průměr 17
2.1.1 Vlastnosti váženého průměru jako agregačního operátoru . 19

3 Fuzzy vážený průměr **24**
3.1 Definice fuzzy váženého průměru 24
3.2 Fuzzifikace agregačního operátoru váženého průměru 25
3.3 Průměrující operátor 33
3.4 Idempotentnost 36
3.5 Monotónnost 38
3.6 Lineární invariantnost 40

Závěr **44**

Literatura **45**

Úvod

S váženým průměrem se snad každý z nás setkal už na základní škole, kde jsme zjišťovali průměrováním získaných známek, co nás asi čeká na vysvědčení. Vážený průměr má však v reálném životě daleko širší použití. Např. spousta metod vícekriteriálního rozhodování je založena právě na tomto operátoru, konkrétně přiřazení vah jednotlivým kritériím hraje důležitou roli při výběru nejlepší varianty, jelikož celkové hodnocení varianty se počítá jako vážený průměr dílčích hodnocení.

Fuzzy vážený průměr pak představuje logické rozšíření váženého průměru do prostředí fuzzy množin, a tedy nám umožňuje modelovat situace, které jsou zatíženy jistou mírou neurčitosti. Cílem této práce je studovat některé z vlastností agregačních operátorů, konkrétně ostrého váženého průměru, navrhnout jejich rozšíření do prostředí fuzzy množin a ověřit, že dané vlastnosti své ostré předlohy zachovává i fuzzy vážený průměr.

V první kapitole se seznámíme se základnímí pojmy teorie fuzzy množin a ukážeme, jaký je rozdíl mezi tzv. ostrou a fuzzy množinou. Definujeme si základní charakteristiky fuzzy množin a zavedeme si pojem fuzzy číslo jako speciální případ fuzzy množiny. Uvedeme si základní aritmetické operace využívané při počítání s fuzzy čísly a následně na příkladu ukážeme, že u zavedených operací bude třeba postupovat obezřetněji, pokud při výpočtu uvažujeme nějakou relaci. Dále se pak čtenář seznámí s definicí agregačního operátoru, ukážeme si jeho jednotlivé druhy a zavedeme vlastnosti, které budou stěžejní pro poslední část této práce.

V hlavní části práce si pak zvlášť definujeme fuzzy vážený průměr s obecnými fuzzy váhami a fuzzy vážený průměr s normovanými fuzzy váhami. Pokusíme se zavést oba typy fuzzy váženého průměru, obdobně jako jejich ostré předlohy, jako posloupnost zobrazení asociovanou s posloupností fuzzy vah. Nakonec fuzzifikujeme jednotlivé vlastnosti agregačních operátorů z druhé kapitoly a dokážeme, že tyto zobecněné vlastnosti oba typy fuzzy váženého průměru splňují.

1 Základní pojmy

V této kapitole se seznámíme se základními pojmy teorie fuzzy množin, jejich charakteristikami a zavedeme si pojem fuzzy číslo. Naučíme se libovolné fuzzy číslo zapsat pomocí dvojice „speciálních“ funkcí a následně si představíme, jak s fuzzy čísly počítat.

Kapitola 1 byla zpracována pomocí [2], [3], [4], [6] , [7] a [8].

1.1 Množina, fuzzy množina

Z hlediska teorie množin je libovolná množina A chápána jako soubor objektů nějakého univerza U, kde o každém prvku z U můžeme říci, zda do dané množiny A patří nebo nikoliv.

Definice 1.1. *Charakteristickou funkcí množiny A nazveme zobrazení $\chi_A : U \to \{0, 1\}$, pro které platí:*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ pro } x \in A \\ 0 \text{ pro } x \notin A. \end{cases} \tag{1}$$

Poznámka 1.1. *V teorii fuzzy množin bývá zvykem takové množiny označovat jako tzv. množiny ostré.*

V teorii fuzzy množin můžeme tuto myšlenku rozšířit. Každému objektu $x \in A$ přiřazujeme hodnotu, která říká, do jaké míry do dané fuzzy množiny patří.

Definice 1.2. *Nechť je dána množina U, tzv. univerzum. Pak fuzzy množina A na univerzu U je definována zobrazením*

$$\mu_A : U \to \langle 0, 1\rangle.$$

Funkci μ_A nazýváme funkcí příslušnosti fuzzy množiny A.

Pro každý prvek $x \in U$ hodnota $\mu_A(x) \in \langle 0, 1\rangle$ říká, do jaké míry je x prvkem fuzzy množiny A.

Poznámka 1.2. *Symbolem $F(U)$ označíme všechny fuzzy množiny na U a zápis $A \in F(U)$ znamená, že fuzzy množina A je definována na univerzu U.*

Poznámka 1.3. *Pro zjednodušní bude v dalším textu stupeň příslušnosti prvku x k fuzzy množině A označen $A(x)$ namísto $\mu_A(x)$, kde $x \in U$.*

1.2 Základní charakteristiky fuzzy množin

V této podkapitole jsou uvedeny pojmy, pomocí kterých lze blíže popsat libovolnou fuzzy množinu.

Definice 1.3. *Nechť je dána fuzzy množina A na univerzu U a reálné číslo $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$. Pak α-řezem fuzzy množiny A nazýváme (ostrou) množinu*

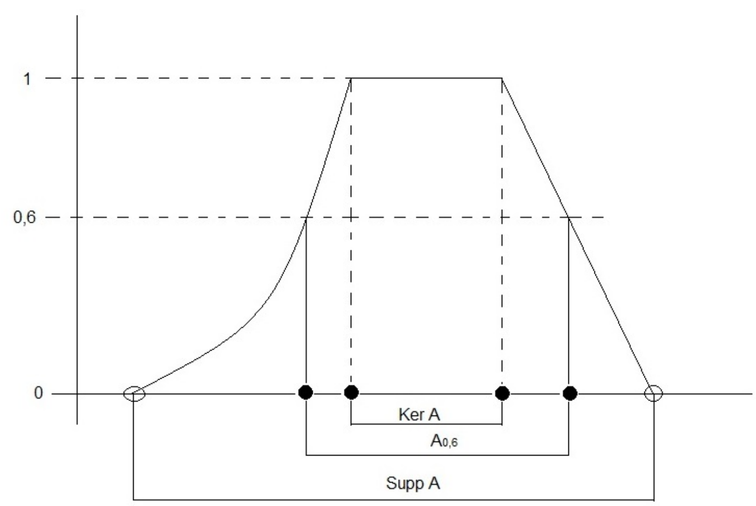
$$A_\alpha = \{x \in U | A(x) \geq \alpha\}.$$

Definice 1.4. *Jádrem fuzzy množiny A na univerzu U rozumíme (ostrou) množinu*

$$Ker\ A = \{x \in U | A(x) = 1\}.$$

Definice 1.5. *Nosičem fuzzy množiny A na univerzu U nazýváme (ostrou) množinu*

$$Supp\ A = \{x \in U | A(x) > 0\}.$$



Obrázek 1: Základní charakteristiky fuzzy množiny.

1.3 Fuzzy číslo

Fuzzy čísla jsou speciálním případem fuzzy množin. Aby se daná fuzzy množina mohla nazývat fuzzy číslem, musí splňovat následující tři podmínky.

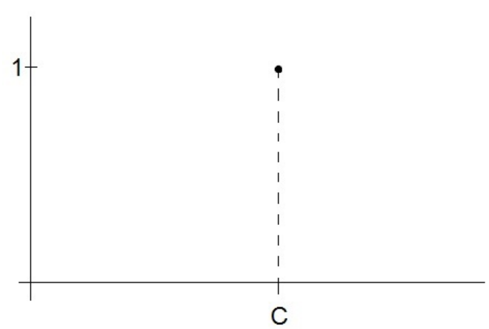
Definice 1.6. *Fuzzy množina C definovaná na množině reálných čísel $\mathbb{R}$ se nazývá fuzzy číslem, jestliže splňuje:*

1) $Ker\ C \neq \emptyset$,

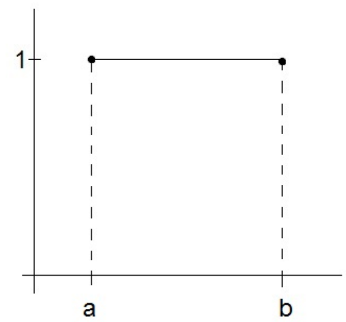
2) A_α jsou uzavřené intervaly pro všechny $\alpha \in (0, 1\rangle$,

3) $Supp\ C$ je omezená množina.

Poznámka 1.4. *Libovolné reálné číslo c a uzavřený interval $\langle a, b\rangle$ lze považovat za speciální případy fuzzy čísel, jelikož lze najít funkci příslušnosti ve smyslu definice 1.2. V případě uvažování nějakého reálného čísla c jsou všechny α-řezy odpovídajícího fuzzy čísla jednoprvkové množiny $\{c\}$. Funkci příslušnosti fuzzy čísla odpovídající číslu $c \in \mathbb{R}$ zobrazuje obrázek 2. Obdobně je tomu i u uzavřených intervalů $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$. Jeho funkce příslušnosti splývá s charakteristickou funkcí tohoto intervalu, což lze vidět na obrázku 3.*



Obrázek 2: Funkce příslušnosti fuzzy čísla znázorňujícího reálné číslo c.



Obrázek 3: Funkce příslušnosti fuzzy čísla znázorňujícího uzavřený interval $\langle a, b\rangle$.

Poznámka 1.5. *Tvrzení, že fuzzy číslo C je definované na intervalu $\langle a, b\rangle$, říká, že Supp C je podmnožina $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$.*

Definice 1.7. *Nechť je dáno fuzzy číslo C. Označme $\langle c^1, c^4\rangle = Cl(Supp\ C)$, kde $Cl(Supp\ C)$ označuje uzávěr Supp C a dále $\langle c^2, c^3\rangle = Ker\ C$. Reálná čísla c^1, c^2, c^3, c^4, pro která platí: $c^1 \leq c^2 \leq c^3 \leq c^4$, se nazývají význačné body fuzzy čísla C.*

Poznámka 1.6. *V [5] je dokázáno následující:*

Fuzzy číslo C lze popsat dvojicí funkcí $\underline{c} : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$, $\overline{c} : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$, definovaných tak, že platí $C_\alpha = \langle \underline{c}(\alpha), \overline{c}(\alpha)\rangle$ pro každé $\alpha \in (0, 1\rangle$ a $Cl(Supp\ C) = \langle \underline{c}(0), \overline{c}(0)\rangle$. Navíc pro funkce $\underline{c}, \overline{c}$ platí

$$\underline{c}(\alpha) \leq \underline{c}(\beta) \leq \overline{c}(\beta) \leq \overline{c}(\alpha) \text{ pro } 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1.$$

Pro funkci příslušnosti fuzzy čísla C pak platí:

$$C(x) = \begin{cases} \max\{\alpha | x \in \langle \underline{c}(\alpha), \overline{c}(\alpha)\rangle\} & \text{pro } x \in \langle \underline{c}(0), \overline{c}(0)\rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{2}$$

Fuzzy číslo C budeme pomocí dvojice funkcí $\underline{c}, \overline{c}$ zapisovat následovně: $C = \{\langle \underline{c}(\alpha), \overline{c}(\alpha)\rangle,\ \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$.

V případě použití význačních bodů není zřejmý konkrétní tvar fuzzy čísla. Proto je vhodnější využívat dvojice funkcí $\underline{c}, \overline{c}$, které jednoznačně pomocí α-řezů charakterizují libovolné fuzzy číslo.

V dalším textu se pracuje s pojmy nezáporné a nenulové fuzzy číslo. Tyto pojmy jsou vysvětleny v následujících definicích.

Definice 1.8. *O fuzzy číslu C řekneme, že je nezáporné, jestliže*

$$Supp\ C \subset \langle 0, \infty).$$

Definice 1.9. *O fuzzy číslu C řekneme, že je nenulové, jestliže*

$$0 \notin Cl(Supp\ C).$$

Na konci této kapitoly bychom se ještě seznámili s možností, jak porovnávat dvě fuzzy čísla pomocí jejich α-řezů.

Definice 1.10. *Mějmě fuzzy čísla $B = \{\langle \underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha)\rangle,\ \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$ a $C = \{\langle \underline{c}(\alpha), \overline{c}(\alpha)\rangle,\ \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$. O fuzzy čísle B řekneme, že je menší nebo rovno než fuzzy číslo C, značíme $B \leq C$, pokud pro každé $\alpha \in (0, 1\rangle$ platí*

$$\underline{b}(\alpha) \leq \underline{c}(\alpha) \wedge \overline{b}(\alpha) \leq \overline{c}(\alpha).$$

1.4 Výpočty s fuzzy čísly

Lotfali Askar Zadeh, americký profesor původem z Ázerbajdžánu, publikoval v roce 1965 práci o množinách s neurčitou hranicí, tzv. *fuzzy množinách* [9]. Položil tak základy teorie fuzzy množin. S těmito množinami, speciálně s fuzzy čísly, bylo třeba nějak počítat. Proto v roce 1975 definoval Zadeh tzv. *princip rozšíření* (viz [10]), který je základem pro veškeré operace s fuzzy množinami.

Definice 1.11 (Princip rozšíření)**.** *Fuzzifikací zobrazní $f : U \to V$ rozumíme zobrazení*

$$f_F : F(U) \to F(V),$$

které každé fuzzy množině $A \in F(U)$ přiřazuje fuzzy množinu $f_F(A) \in F(V)$ s funkcí příslušnosti definovanou pro každé $y \in V$ vztahem

$$f_F(A)(y) = \begin{cases} sup\{A(x) | f(x) = y, x \in U\}, & když\ \{x | f(x) = y\} \neq \emptyset, \\ 0 & jinak. \end{cases} \quad (3)$$

Výše uvedená definice říká, že se jednotlivé body zobrazují s původními stupni příslušnosti. Jestliže existuje v univerzu U více vzorů, pak je danému bodu přiřazeno supremum z jejich stupňů příslušnosti.

Základní aritmetické operace s fuzzy čísly se provádí pomocí upravené intervalové aritmetiky, která vychází z výše uvedeného principu rozšíření.

Definice 1.12. *Nechť jsou dána dvě fuzzy čísla* $B = \{\langle \underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0,1\rangle\}$, $C = \{\langle \underline{c}(\alpha), \overline{c}(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0,1\rangle\}$. *Pak, za předpokladu, že C je nenulové fuzzy číslo, jsou aritmetické operace definovány následujích způsobem:*

1) *Sčítání:* $B + C = \{\langle \underline{b}(\alpha) + \underline{c}(\alpha), \overline{b}(\alpha) + \overline{c}(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0,1\rangle\}$,

2) *Odčítání:* $B - C = \{\langle \underline{b}(\alpha) - \overline{c}(\alpha), \overline{b}(\alpha) - \underline{c}(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0,1\rangle\}$,

3) *Násobení:* $B \cdot C = \{\langle \min\{\underline{b}(\alpha)\cdot\underline{c}(\alpha), \underline{b}(\alpha)\cdot\overline{c}(\alpha), \overline{b}(\alpha)\cdot\underline{c}(\alpha), \overline{b}(\alpha)\cdot\overline{c}(\alpha)\},$
$\max\{\underline{b}(\alpha)\cdot\underline{c}(\alpha), \underline{b}(\alpha)\cdot\overline{c}(\alpha), \overline{b}(\alpha)\cdot\underline{c}(\alpha), \overline{b}(\alpha)\cdot\overline{c}(\alpha)\}\rangle, \alpha \in \langle 0,1\rangle\}$,

4) *Dělení:* $B/C = \{\langle \min\{\frac{\underline{b}(\alpha)}{\underline{c}(\alpha)}, \frac{\underline{b}(\alpha)}{\overline{c}(\alpha)}, \frac{\overline{b}(\alpha)}{\underline{c}(\alpha)}, \frac{\overline{b}(\alpha)}{\overline{c}(\alpha)}\}, \max\{\frac{\underline{b}(\alpha)}{\underline{c}(\alpha)}, \frac{\underline{b}(\alpha)}{\overline{c}(\alpha)}, \frac{\overline{b}(\alpha)}{\underline{c}(\alpha)}, \frac{\overline{b}(\alpha)}{\overline{c}(\alpha)}\}\rangle,$
$\alpha \in \langle 0,1\rangle\}$.

Ve výše uvedených operacích uvažujeme libovolnou kombinaci proměnných, tedy neuvažujeme žádný vztah mezi nimi. V praxi však můžeme být omezeni nějakou podmínkou. Lze tedy uvažovat libovolnou relaci L takovou, že $L \subseteq \mathbb{R}\text{x}\mathbb{R}$. Takováto podmínka nám pak může změnit výsledek. Následujícím zápisem je možno zapsat libovolnou z výše uvedených operací dvou fuzzy čísel B a C pomocí α-řezů, když se neuvažuje žádná podmínka ($\star$ označuje $+, -, \cdot, /$),

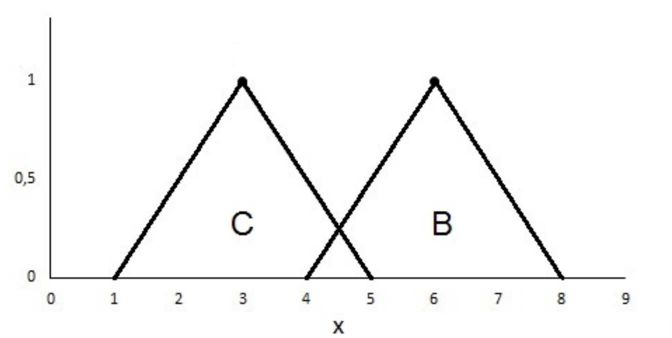
$$(B \star C)_\alpha = \{b \star c | b \in B_\alpha, c \in C_\alpha\}.$$

Jestliže uvažujeme nějakou relaci L, $L \subseteq \mathbb{R}\text{x}\mathbb{R}$, pak mluvíme o tzv. fuzzy aritmetice s podmínkou. Tato skutečnost se nutně musí projevit i ve výše uvedeném zápise operace, a to následovně:

$$(B \star C)_\alpha = \{b \star c | b \in B_\alpha, c \in C_\alpha, (b,c) \in L\}.$$

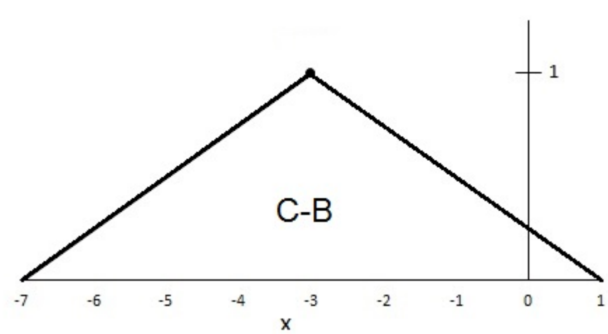
Fakt, že nelze takovouto relaci L zanedbat, ilustuje následující příklad.

Příklad 1.1. Uvažujme fuzzy čísla B a C, kde $B = \{\langle 2\alpha + 4, 8 - 2\alpha \rangle, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}$ a $C = \{\langle 2\alpha + 1, 5 - 2\alpha \rangle, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}$, jejichž funkce příslušnosti jsou zobrazeny na obrázku 4. Dále, nechť je dána relace L taková, že $L = \{(c, b) | c \leq b\}$. Úkolem je určit rozdíl fuzzy čísel C a B při uvažování dané relace a bez ní. Výsledné fuzzy číslo budeme značit takto: $C - B = \{\underline{c - b}(\alpha), \overline{c - b}(\alpha), \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}$.



Obrázek 4: Fuzzy čísla B a C.

Jestliže opomineme relaci L, pak lze rozdíl zapsat takto: $(C - B)_\alpha = \{c - b | b \in B_\alpha, c \in C_\alpha\}$. Výsledné fuzzy číslo $C - B = \{\langle 4\alpha - 7, 1 - 4\alpha \rangle, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}$ je zobrazeno na obrázku 5.



Obrázek 5: Rozdíl fuzzy čísel B a C bez uvažování relace.

V případě, že uvažujeme relaci L, tedy $(C - B)_\alpha = \{c - b | b \in B_\alpha, c \in$

$C_\alpha, (c,b) \in L\}$, pak pro výsledné fuzzy číslo bude platit:

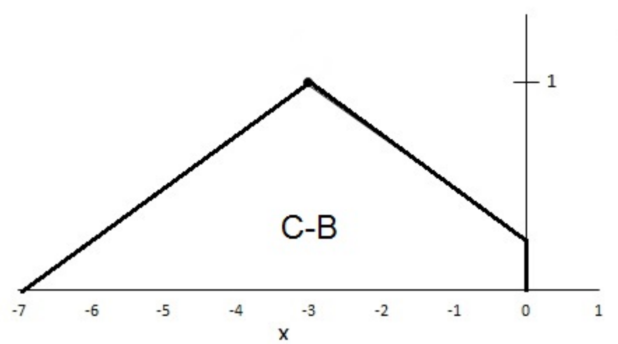
1)

$$\underline{(c-b)}(\alpha) = \{4\alpha - 7, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$$

2)

$$\overline{(c-b)}(\alpha) = \begin{cases} 1 - 4\alpha & \text{pro } \alpha \in \langle \frac{1}{4}, 1\rangle \\ 0 & \text{pro } \alpha \in \langle 0, \frac{1}{4}). \end{cases} \tag{4}$$

Změnu můžeme vidět na první pohled na obrázku 6.



Obrázek 6: Rozdíl fuzzy čísel B a C při uvažování relace.

2 Vážený průměr jako agregační operátor

Kapitola 2 byla zpracována s využitím [1].

Náledující text se zabývá definicí agregačního operátoru. Zavedeme vážený průměr jako jeden z agregačních operátorů, následně zmíníme vybrané vlastnosti agregačních operátorů a ukážeme, jestli vážený průměr má dané vlastnosti, či nikoli.

V případě počítání s reálnými čísly rozumíme pod pojmem agregační operátor posloupnost agregačních zobrazení, které každé n-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$ a $n \in \mathbb{N}$, přiřadí reálné číslo $y \in \mathbb{R}$. Abychom takovou posloupnost mohli nazvývat agregačním operátorem, musí být splněny tři podmínky, které uvádí definice 2.1.

Definice 2.1. *Agregační operátor A na intervalu I, kde $I \subseteq (-\infty, \infty)$, je posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ agregačních zobrazení*

$$A_n : I^n \to I,$$

která splňuje následující podmínky:

1) $A_1(x) = x$ *pro každé* $x \in I$*;*

2) *Jestliže* $x_i \leq y_i$*, pro* $i = 1, 2, \ldots, n$ *a* $n = 2, 3, \ldots,$ *pak*

$$A_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq A_n(y_1, y_2, \ldots, y_n);$$

3) *pro* $x^- = \inf I$ *a* $x^+ = \sup I$ *platí*

$$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(x^-,\ldots,x^-)} A_n(x_1, \ldots, x_n) = x^-$$

$$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(x^+,\ldots,x^+)} A_n(x_1, \ldots, x_n) = x^+.$$

První podmínka říká, že pokud do agregace vstupuje libovolné číslo $x \in I$, pak výsledkem agregace je to samé číslo x. A_1 se nazývá operátorem identity. Druhá podmínka říká, že A_n je pro všechny $n = 2, 3, \ldots$ neklesající funkce. Poslední podmínka udává výsledek agregace pro okrajové hodnoty $x_n \in I$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Z hlediska výsledku agregace vůči vstupním hodnotám lze agregační operátory členit na konjunktní, disjunktní, průměrující a smíšené. Vážený průměr je jedním z průměrujících agregačních operátorů, proto si je zavedeme jako první. Jsou typické tím, že výsledek agregace leží mezi nejmenší a největší agregovanou hodnotou, tedy pro každou n-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I^n$ platí:

$$\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \leq A_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Konjunktní operátory jsou takové, že pro všechna $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I^n$ platí:

$$A_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

nebo-li výsledek agregace je menší nebo roven než nejmenší z agregovaných hodnot. Disjunktní operátory jsou opakem konjunktních, tedy pro každou n-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I^n$ platí:

$$A_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Smíšené operátory jsou takové, které nemají ani jednu z výše uvedených vlastností.

2.1 Vážený průměr

S pojmem vážený průměr se můžeme setkat např. při agregaci dílčích hodnocení do celkového v modelech vícekriteriálního hodnocení nebo při počítání číselných charakteristik statistického souboru dat. Jedná se o zobecnění aritmetického průměru

$$\overline{x}^{AR} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

kde jednotlivým hodnotám přiřazujeme při výpočtu váhy. Vážený průměr je definován následovně:

$$\overline{x}^W = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i},$$

kde x_i nám značí i-tou váženou hodnotu a w_i je váha přiřazená i-té hodnotě, taková, že $w_i \in \mathbb{R}_0^+, i = 1, 2, \ldots, n$. Množinu všech n-rozměrných vektorů vah budeme značit S_n^W, tj.

$$S_n^W = \{(w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n | w_i \in \langle 0, \infty), i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^n w_i \neq 0\}.$$

Vzorec pro výpočet váženého průměru lze upravit v případě, že se počítá s tzv. normovanými váhami. Pro normované váhy $v_i \in \langle 0, 1 \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$, platí $\sum_{i=1}^n v_i = 1$ a výpočet váženého průměru lze provádět podle zjednodušeného vzorce:

$$\overline{x}^N = \sum_{i=1}^n v_i x_i.$$

Množinu všech n-rozměrných vektorů normovaných vah budeme značit S_n^N, tj.

$$S_n^N = \{(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n | v_i \in \langle 0, 1 \rangle, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^n v_i = 1\}.$$

Nyní zavedeme vážený průměr jako agreagační operátor.

Definice 2.2. *Mějme posloupnost vektorů normovaných vah* $V = \{\mathbf{v}_n\}_{n=1}^\infty$*, kde*

$$\mathbf{v}_n = (v_1^n, v_2^n, \ldots, v_n^n) \in S_n^N, n = 1, 2, \ldots$$

Agregační operátor A_V *na* $\mathbb{R}$ *nazveme vážený průměr asociovaný s* V *a definujeme ho jako posloupnost* $A_V = \{A_{Vn}\}_{n=1}^\infty$*, kde pro všechna* $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ *platí*

$$A_{Vn}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n v_i^n x_i.$$

V případě, že bychom neuvažovali normované váhy, pak je třeba upravit definici 2.2.

Definice 2.3. *Mějme posloupnost vektorů vah* $W = \{\mathbf{w}_n\}_{n=1}^{\infty}$, *kde*

$$\mathbf{w}_n = (w_1^n, w_2^n, \ldots, w_n^n) \in S_n^W, n = 1, 2, \ldots$$

Agregační operátor A_W *na* $\mathbb{R}$ *nazveme vážený průměr asociovaný s* W *a definujeme ho jako posloupnost* $A_W = \{A_{Wn}\}_{n=1}^{\infty}$, *kde pro každé* $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ *platí*

$$A_{Wn}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i^n x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i^n}.$$

Jak bylo uvedeno výše, aritmetický průměr je speciálním případem váženého průměru. Jednotlivé váhy jsou si rovny a mají hodnotu $\frac{1}{n}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Jestliže pozměníme definici 2.2, pak lze zapsat aritmetický průměr jako agregační operátor následovně.

Definice 2.4. *Mějme číselnou posloupnost* $P = \{\mathbf{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$, *kde* $\mathbf{p}_n = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$. *Agregační operátor* A_P *na* $\mathbb{R}$ *nazveme aritmetický průměr asociovaný s* P *a definujeme ho jako posloupnost* $A_P = \{A_{Pn}\}_{n=1}^{\infty}$, *kde pro všechna* $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ *platí*

$$A_{Pn}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i.$$

Vážený průměr je jedním z průměrujících agregačních operátorů. Následující text se zabývá tím, které z níže uvedených vlastností agregačních operátorů jsou vlastní i váženému průměru. Také bude ukázáno, že nelze obecně říci, že všechny agregační operátory, které lze zařadit do skupiny průměrujících, mají stejné vlastnosti.

2.1.1 Vlastnosti váženého průměru jako agregačního operátoru

Definice 2.5. *Řekneme, že agregační operátor* $A = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *na* I *je idempotentní, pokud pro všechny* $x \in I$ *a každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí:*

$$A_n(x, x, \ldots, x) = x.$$

Tato vlastnost nám říká, že pokud do agregace vstupuje n-krát ta samá hodnota, potom výsledná hodnota bude totožná s původními, které jsme agregovali.

Věta 2.1. *Pro každou posloupnost $V = \{\mathbf{v}_n\}_{n=1}^{\infty}$, resp. $W = \{\mathbf{w}_n\}_{n=1}^{\infty}$, je vážený průměr asociovaný s V, resp. W, idempotentní.*

Důkaz: Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť jsou dány normované váhy $v_i \in \langle 0, 1 \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$, a n-tice $(x, x, \ldots, x) \in I^n$. Pak idempotentnost lze dokázat následovně.

$$A_{V_n}(x, x, \ldots, x) = x \cdot \sum_{i=1}^{n} v_i = x \cdot 1 = x.$$

Jestliže uvažujeme nenormované váhy $w_i \in \mathbb{R}_0^+$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pak

$$A_{W_n}(x, x, \ldots, x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{x \cdot \sum_{i=1}^{n} w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = x.$$

$\square$

Definice 2.6. *Řekneme, že agregační operátor $A = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ na I je symetrický, pokud pro každý vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I^n$ a pro všechny permutace $\sigma\{1, 2, \ldots, n\}$, platí:*

$$A_n(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = A_n(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Symetrii můžeme jinými slovy nazvat komutativitou. Definice 2.6 tedy říká, že výsledek agregace není závislý na pořadí agregovaných hodnot.

Jak je tomu u váženého průměru? Nechť je dán vektor vah $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$, kde $w_i \in \mathbb{R}_0^+, i = 1, 2, \ldots, n$, a vektor hodnot $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subset I^n$. Vážený průměr se chová jako symetrický operátor ve dvou případech. Jednak, pokud jednotlivé váhy $w_i \in \mathbb{R}_0^+, i = 1, 2, \ldots, n$, jsou fixovány na konkrétní hodnoty $x_i \in I, i = 1, 2, \ldots, n$. V tomto případě symetrie vyplývá z komutativity součtu v čitateli. Druhou možností je uvažovat takové váhy $w_i \in \mathbb{R}_0^+$, kde $i = 1, 2, \ldots, n$, že $w_i = w_j$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Váhy lze z každého členu v čitateli vytknout, hodnoty $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subset I^n$ jsou pak nezávislé na váhách a lze je sečíst v libovolném pořadí, což opět vychází z komutativity sčítání. V takovém případě dostaneme aritmetický průměr. Následující příklad ukazuje, že pokud upustíme od výše zmíněných předpokladů, pak vážený průměr nelze považovat za symetrický operátor.

Příklad 2.1. Nechť je dán vektor vah $(2, 4)$ a dva vektory hodnot $(1, 7)$ a $(7, 1)$. Ačkoliv jsou v obou vektorech hodnot hodnoty stejné, vážený průměr poskytne dva různé výsledky.

1)

$$A_{W2}(1,7) = \frac{\sum_{i=1}^{2} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{2} w_i} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 7}{2+4} = 5$$

2)

$$A_{W2}(7,1) = \frac{\sum_{i=1}^{2} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{2} w_i} = \frac{2 \cdot 7 + 4 \cdot 1}{2+4} = 3$$

Vážený průměr tedy není obecně symetrickým operátorem.

Poznámka 2.1. *Příkladem agregačního operátoru založeného na váženém průměru, kde jsou váhy fixované na konkrétní hodnoty, je OWA - ordered weighted average. Princip OWA spočívá v tom, že si nejdříve uspořádáme jednotlivé hodnoty podle velikosti a váhy jsou pak přiřazeny jednotlivých hodnotám dle jejich nového uspořádání. OWA operátor byl zavedený v [8].*

Definice 2.7. *Agregační operátor $A = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ na I se nazývá ryze monotónní, jestliže jsou jednotlivé agregační zobrazení A_n ryze monotónní.*

Ryzí monotónnost chápeme tak, že pokud zvýšíme, respektive snížíme, libovolnou hodnotu v agregaci, pak výsledná hodnota agregace bude vyšší, respektive nižší.

Věta 2.2. *Pro každou posloupnost $V = \{\mathbf{v}_n\}_{n=1}^{\infty}$, resp. $W = \{\mathbf{w}_n\}_{n=1}^{\infty}$, je vážený průměr asociovaný s V, resp. W, ryze monotónní.*

Důkaz: Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť jsou dány normované váhy $v_i \in \langle 0, 1\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$, n-tice $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ a $(y_1, y_2, \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n$. Nechť platí $x_i < y_i$ pro nějaké $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a pro $j \neq i$ platí $x_j = y_j$. Potom

$$x_i < y_i$$

$$v_i x_i < v_i y_i$$

$$v_i x_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} v_j x_j < v_i y_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} v_j y_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_j < \sum_{j=1}^{n} v_j y_j$$

$$A_{Vn}(x_1, x_2, \ldots, x_n) < A_{Vn}(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Jestliže uvažujeme nenormované váhy $w_i \in \mathbb{R}_0^+, i = 1, 2, \ldots, n$, pak

$$x_i < y_i$$

$$w_i x_i < w_i y_i$$

$$w_i x_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} w_j x_j < w_i y_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} w_j y_j$$

$$\frac{w_i x_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} w_j x_j}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} w_j} < \frac{w_i y_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} w_j y_j}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} w_j}$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} w_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} w_j} < \frac{\sum_{j=1}^{n} w_j y_j}{\sum_{j=1}^{n} w_j}$$

$$A_{Wn}(x_1, x_2, \ldots, x_n) < A_{Wn}(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

□

Definice 2.8. *Agregační operátor $A = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ na I nazveme lineárně invariantní, jestliže pro libovolné $r, t \in \mathbb{R}$ a každé $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I^n, n \in \mathbb{N}$ platí:*

$$A_n(r \cdot x_1 + t, r \cdot x_2 + t, \ldots, r \cdot x_n + t) = r \cdot A_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + t.$$

Tuto vlastnost lze chápat jako stabilitu agregačního operátoru vůči lineárním změnám v argumentech, které vstupují do agregace.

Věta 2.3. *Pro každou posloupnost $V = \{\mathbf{v}_n\}_{n=1}^{\infty}$, resp. $W = \{\mathbf{w}_n\}_{n=1}^{\infty}$, je vážený průměr asociovaný s V, resp. W, lineárně invariantní.*

Důkaz: Nechť $n \in \mathbb{N}$. Uvažujme normované váhy $v_i \in \langle 0, 1\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$, nenormované váhy $w_i \in S_n^W$, $i = 1, 2, \ldots, n$, a libovolná čísla $r, t \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$A_{V_n}(rx_1 + t, rx_2 + t, \ldots, rx_n + t) = \sum_{i=1}^{n} v_i(rx_i + t) = \sum_{i=1}^{n} v_i(rx_i) + \sum_{i=1}^{n} v_i t =$$

$$= r\sum_{i=1}^{n} v_i x_i + t\sum_{i=1}^{n} v_i = rA_{V_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + t.$$

V případě, že uvažujeme nenormované váhy, pak

$$A_{W_n}(rx_1+t, rx_2+t, \ldots, rx_n+t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i(rx_i + t)}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i r x_i + \sum_{i=1}^{n} w_i t}{\sum_{i=1}^{n} w_i} =$$

$$= r\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} + t\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = rA_{W_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + t.$$

Vážený průměr je tedy lineárně invariantní. □

Fuzzy vážený průměr představuje logické rozšíření ostrého váženého průměru do prostředí fuzzy množin. Další text se zabývá tím, jak je fuzzy vážený průměr definován a jestli, popřípadě jakým způsobem, si zachovává výše zmíněné vlastnosti vlastní váženému průměru.

3 Fuzzy vážený průměr

V této kapitole si definujeme dva typy fuzzy váženého průměru, zavedeme je jako posloupnosti zobrazení, obdobně jako v ostrém případě, a dokážeme platnost zobecněných podmínek, pomocí kterých se definuje agregační operátor. Dále budeme v jednotlivých podkapitolách zkoumat možné zobecnění vlastností ostrého váženého průměru, zformulujeme věty o platnosti daných vlastností pro fuzzy vážený průměr a následně je dokážeme.

3.1 Definice fuzzy váženého průměru

Tato podkapitola byla zpracována s využitím [4].

Definice 3.1. *Nechť jsou dána nezáporná fuzzy čísla $W_1, W_2, \ldots, W_n$. Dále nechť existují $w > 0$ a $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že $W_i(w) = 1$. Pak fuzzy vážený průměr fuzzy čísel $X_1, X_2, \ldots, X_n$ s fuzzy váhami $W_1, W_2, \ldots, W_n$ je fuzzy číslo $X^W = \{\langle \underline{x}^W(\alpha), \overline{x}^W(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$ takové, že*

$$\underline{x}^W(\alpha) = \min\left\{\frac{\sum_{i=1}^n w_i \underline{x}_i(\alpha)}{\sum_{i=1}^n w_i} | w_i \in W_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^n w_i \neq 0\right\},$$

$$\overline{x}^W(\alpha) = \max\left\{\frac{\sum_{i=1}^n w_i \overline{x}_i(\alpha)}{\sum_{i=1}^n w_i} | w_i \in W_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^n w_i \neq 0\right\}.$$

Poznámka 3.1. *Nechť $n \in N$. Množinu všech n-tic fuzzy vah, tj. množinu všech n-tic fuzzy čísel $W_1, W_2, \ldots, W_n, i = 1, 2, \ldots, n$, pro něž platí podmínky uvedené v definici 3.1, budeme značit S_n^{WF}.*

Definování fuzzy váženého průměru obecně není z hlediska vah takový problém. Postačí nám, aby fuzzy váhy byly nezáporná fuzzy čísla. Existuje však speciální případ (v reálných číslech obdoba počítání s normovanými váhami), kde jsou kladeny specifické požadavky na fuzzy váhy, uvažují se tzv. normované fuzzy váhy.

Definice 3.2. *Fuzzy čísla* $V_1, V_2, \ldots, V_n$ *definovaná na* $\langle 0, 1\rangle$ *se nazývají normované fuzzy váhy, jestliže pro každé* $\alpha \in (0, 1\rangle$ *a každé* $i = 1, 2, \ldots, n$ *platí: Pro libovolné* $v_i \in V_{i\alpha}$ *existují* $v_j \in V_{j\alpha}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $j \neq i$, *taková, že* $v_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} v_j = 1$.

Poznámka 3.2. *Nechť* $n \in N$. *Množinu všech* n*-tic normovaných fuzzy vah, tj. množinu všech* n*-tic fuzzy čísel* $V_1, V_2, \ldots, V_n, i = 1, 2, \ldots, n$, *pro něž platí podmínky uvedené v definici 3.2, budeme značit* S_n^{NF}.

Jestliže se uvažují normované fuzzy váhy, pak se výpočet fuzzy váženého průměru neprovádí pomocí definice 3.1, ale následujícím způsobem.

Definice 3.3. *Nechť jsou dány normované fuzzy váhy* $V_1, V_2, \ldots, V_n$. *Pak fuzzy vážený průměr fuzzy čísel* $X_1, \ldots, X_n$ *s normovanými fuzzy váhami* $V_1, V_2, \ldots, V_n$ *je fuzzy číslo* $X^N = \{\langle \underline{x}^N(\alpha), \overline{x}^N(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$ *takové, že*

$$\underline{x}^N(\alpha) = \min\left\{\sum_{i=1}^{n} v_i \underline{x}_i(\alpha) | v_i \in V_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} v_i = 1\right\},$$

$$\overline{x}^N(\alpha) = \max\left\{\sum_{i=1}^{n} v_i \overline{x}_i(\alpha) | v_i \in V_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} v_i = 1\right\}.$$

3.2 Fuzzifikace agregačního operátoru váženého průměru

Jak bylo ukázáno v kapitole 2, vážený průměr je jedním z agregačních operátorů. V této podkapitole fuzzifikujeme podmínky uvedené v definici 2.1 a ověříme, že je fuzzy vážený průměr splňuje.

Nejprve zavedeme fuzzy vážený průměr jako posloupnost zobrazení, obdobně jak tomu bylo u váženého průměru. I zde je nutné rozlišovat, zda-li uvažujeme normované fuzzy váhy či nikoliv.

Definice 3.4. *Mějme posloupnost normovaných fuzzy vah* $V_F = \{\mathbf{v}_{Fn}\}_{n=1}^{\infty}$, *kde*

$$\mathbf{v}_{Fn} = (V_1^n, V_2^n, \ldots, V_n^n) \in S_n^{NF}, n = 1, 2, \ldots$$

Potom fuzzy váženým průměrem definovaným na $\mathbb{R}$ asociovaným s V_F nazveme posloupnost $X_{V_F} = \{X_{V_F n}\}_{n=1}^{\infty}$, kde pro každou n-tici fuzzy čísel $X_1, X_2, \ldots, X_n$, kde $X_i = \{\langle \underline{x}_i(\alpha), \overline{x}_i(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$, pro $i = 1, 2, \ldots, n$, platí

$$X_{V_F n}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \{\langle \underline{x}_{V_F n}(\alpha), \overline{x}_{V_F n}(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$$

a

$$\underline{x}_{V_F n}(\alpha) = \min\left\{\sum_{i=1}^{n} v_i \underline{x}_i(\alpha) | v_i \in V_{i\alpha}^n, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} v_i = 1\right\},$$

$$\overline{x}_{V_F n}(\alpha) = \max\left\{\sum_{i=1}^{n} v_i \overline{x}_i(\alpha) | v_i \in V_{i\alpha}^n, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} v_i = 1\right\}.$$

Pro nenormované fuzzy váhy upravíme definici 3.4.

Definice 3.5. *Mějme posloupnost fuzzy vah $W_F = \{\mathbf{w}_{Fn}\}_{n=1}^{\infty}$, kde*

$$\mathbf{w}_{Fn} = (W_1^n, W_2^n, \ldots, W_n^n) \in S_n^{WF}, n = 1, 2, \ldots$$

Potom fuzzy váženým průměrem definovaným na $\mathbb{R}$ asociovaným s W_F nazveme posloupnost $X_{W_F} = \{X_{W_F n}\}_{n=1}^{\infty}$, kde pro každou n-tici fuzzy čísel $X_1, X_2, \ldots, X_n$, kde $X_i = \{\langle \underline{x}_i(\alpha), \overline{x}_i(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$, pro $i = 1, 2, \ldots, n$, platí

$$X_{W_F n}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \{\langle \underline{x}_{W_F n}(\alpha), \overline{x}_{W_F n}(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$$

a

$$\underline{x}_{W_F n}(\alpha) = \min\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \underline{x}_i(\alpha)}{\sum_{i=1}^{n} w_i} | w_i \in W_{i\alpha}^n, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} w_i \neq 0\right\},$$

$$\overline{x}_{W_F n}(\alpha) = \max\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \overline{x}_i(\alpha)}{\sum_{i=1}^{n} w_i} | w_i \in W_{i\alpha}^n, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} w_i \neq 0\right\}.$$

V následujím textu fuzzifikujeme vlastnosti $1, 2$ a 3, uvedené v definici 2.1 a ukážeme si, že je splňuje i fuzzy vážený průměr. Připomeňme si, jak vypadá první podmínka.

$$A_1(x) = x \text{ pro každé } x \in I.$$

První podmínka nám říká, jak se chová agregační operátor A pro $n = 1$ a vyplývá z ní, že A_1 je operátorem identity. V případě fuzzy vstupů požadujeme, aby pro fuzzy číslo X_1, které vstupuje do agregace, platilo, že výsledkem agregace je to samé fuzzy číslo X_1.

Věta 3.1. *Nechť je $V_F = \{\mathbf{v}_{Fn}\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost vektorů normovaných fuzzy vah a nechť $X_{V_F} = \{X_{V_F n}\}_{n=1}^{\infty}$ je fuzzy vážený průměr asociovaný s V_F. Pak pro každé fuzzy číslo $X = \{\langle \underline{x}(\alpha), \overline{x}(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$ platí*

$$X_{V_F 1}(X) = X.$$

Důkaz: Nechť $X_{V_F 1} = \{\langle \underline{x}_{V_F 1}(\alpha), \overline{x}_{V_F 1}(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$. Je tedy třeba dokázat, že $\underline{x}_{V_F 1}(\alpha) = \underline{x}(\alpha)$ a $\overline{x}_{V_F 1}(\alpha) = \overline{x}(\alpha)$, pro $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Pro každou posloupnost V_F platí $\mathbf{v_{F1}} = (1)$, čili $V_1^1 = 1$.

1)

$$\underline{x}_{V_F 1}(\alpha) = \min\left\{v_1 \underline{x}(\alpha) | v_1 \in V_{1\alpha}, v_i = 1\right\} = \underline{x}(\alpha)$$

2)

$$\overline{x}_{V_F 1}(\alpha) = \max\left\{v_i \overline{x}(\alpha) | v_1 \in V_{1\alpha}, v_i = 1\right\} = \overline{x}(\alpha)$$

□

Jestliže neuvažujeme normované fuzzy váhy, musíme upravit větu 3.1.

Věta 3.2. *Nechť je $W_F = \{\mathbf{w}_{Fn}\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost vektorů fuzzy vah a nechť $X_{W_F} = \{X_{W_F n}\}_{n=1}^{\infty}$ je fuzzy vážený průměr asociovaný s W_F. Pak pro každé fuzzy číslo $X = \{\langle \underline{x}(\alpha), \overline{x}(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$ platí*

$$X_{W_F 1}(X) = X.$$

Důkaz: Důkaz provedeme obdobně jako u fuzzy váženého průměru s normovanými fuzzy váhami. Nechť $X_{W_F 1} = \{\langle \underline{x}_{W_F 1}(\alpha), \overline{x}_{W_F 1}(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$.

1)

$$\underline{x}_{W_F 1}(\alpha) = \min\left\{\frac{w_1 \underline{x}(\alpha)}{w_1} | w_1 \in W_{1\alpha}, w_i \neq 0\right\} = \underline{x}(\alpha)$$

2)

$$\overline{x}_{W_F1}(\alpha) = \max\left\{\frac{w_1\overline{x}(\alpha)}{w_1}|w_1 \in W_{1\alpha}, w_i \neq 0\right\} = \overline{x}(\alpha)$$

$\square$

Je dokázáno, že dvojice funkcí $\underline{x}_{V_F1}, \overline{x}_{V_F1}$, resp. $\underline{x}_{W_F1}, \overline{x}_{W_F1}$, fuzzy váženého průměru se rovnají dvojici funkcí $\underline{x}, \overline{x}$ pro libovolné fuzzy číslo z intervalu, kde je X_{V_F1}, resp. X_{W_F1}, definován, tedy X_{V_F1}, resp. X_{W_F1}, a X jsou totožná fuzzy čísla.

Druhá podmínka říká, že výsledek agregace prvků $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I^n$ je menší, popřípadě roven, agregaci prvků $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in I^n$, jestliže $x_i \leq y_i$, pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Formální zápis vypadá následovně: Jestliže $x_i \leq y_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$ a $n = 2, 3, \ldots$, pak

$$A_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq A_n(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Při počítání s fuzzy čísly nelze obvykle jednoznačně rozhodnout, zda je fuzzy číslo menší nebo větší než fuzzy číslo druhé, a proto využijeme definici 1.10. Aby bylo možné zobecnit druhou podmínku pro fuzzy čísla, je třeba, aby bylo splněno několik předpokladů.

Věta 3.3. *Mějme posloupnost vektorů normovaných fuzzy vah $\{\mathbf{v}_{Fn}\}_{n=1}^{\infty}$. Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí následující:*

1) *Mějme fuzzy čísla $X_1, X_2, \ldots, X_n$ a $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$,*

$X_i = \{\langle \underline{x}_i(\alpha), \overline{x}_i(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$ *a* $Y_i = \{\langle \underline{y}_i(\alpha), \overline{y}_i(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$,

$i = 1, 2, \ldots, n$, *pro něž platí* $\underline{x}_i(\alpha) \leq \underline{y}_i(\alpha)$ *a* $\overline{x}_i(\alpha) \leq \overline{y}_i(\alpha)$ *pro* $i = 1, 2, \ldots, n$ *a každé* $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$.

2) *Označme*

$$X^N = X_{V_{Fn}}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \{\langle \underline{x}^N(\alpha), \overline{x}^N(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$$

a

$$Y^N = X_{V_{Fn}}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \{\langle \underline{y}^N(\alpha), \overline{y}^N(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}.$$

Potom pro X^N a Y^N platí $\underline{x}^N(\alpha) \leq \underline{y}^N(\alpha)$ a zároveň $\overline{x}^N(\alpha) \leq \overline{y}^N(\alpha)$, pro každé $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$.

Důkaz: Oba vztahy z věty 3.3 si dokážeme zvlášť. Uvažujme libovolné $n \in \mathbb{N}$ a vektor normovaných fuzzy vah $(V_1, V_2, \ldots, V_n) = \mathbf{v}_{Fn}$.

1) Nechť $v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*$, kde $v_i^* \in V_{i\alpha}$, pro $i = 1, 2, \ldots, n$, a $\sum_{i=1}^n v_i^* = 1$, jsou takové normované váhy, pro které platí

$$\underline{y}^N(\alpha) = \min\left\{\sum_{i=1}^n v_i \underline{y}_i(\alpha) | v_i \in V_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^n v_i = 1\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^n v_i^* \underline{y}_i(\alpha).$$

Označme

$$x^{N*}(\alpha) = \sum_{i=1}^n w_i^* \underline{x}_i(\alpha).$$

Platí

$$x^{N*}(\alpha) \leq \sum_{i=1}^n v_i^* \underline{y}_i(\alpha) = \underline{y}^N(\alpha)$$

a zřejmě

$$\underline{x}^N(\alpha) = \min\left\{\sum_{i=1}^n w_i \underline{x}_i(\alpha) | v_i \in V_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^n v_i = 1\right\} \leq x^{N*}(\alpha).$$

Z výše uvedených rovnic je zřejmé, že $\underline{x}^N(\alpha) \leq \underline{y}^N(\alpha)$ pro každé $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$.

2) Nechť $v_1^{**}, v_2^{**}, \ldots, v_n^{**}$, kde $v_i^{**} \in V_{i\alpha}$, pro $i = 1, 2, \ldots, n$, a $\sum_{i=1}^n v_i^{**} = 1$, jsou takové normované váhy, pro které platí

$$\overline{y}^N(\alpha) = \max\left\{\sum_{i=1}^n v_i \overline{y}_i(\alpha) | v_i \in V_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^n v_i = 1\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i^{**} \overline{y}_i(\alpha).$$

Označme

$$x^{N**}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} v_i^{**} \overline{x}_i(\alpha).$$

Platí

$$x^{N**}(\alpha) \leq \sum_{i=1}^{n} v_i^{**} \overline{y}_i(\alpha) = \overline{y}^N(\alpha)$$

a zřejmě

$$\overline{x}^N(\alpha) = \max \left\{ \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{y}_i | v_i \in V_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} v_i = 1 \right\} \leq x^{N**}(\alpha).$$

Z rovnic v tomto bodu vyplývá, že $\overline{x}^N(\alpha) \leq \overline{y}^N(\alpha)$ pro každé $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$.

□

Normovaný fuzzy vážený průměr splňuje zobecněnou podmínku 2 z definice 2.1. Nyní si to samé ukažme pro případ, kdy neuvažujeme normované fuzzy váhy.

Věta 3.4. *Mějme vektor fuzzy vah $\{\mathbf{w}_{Fn}\}_{n=1}^{\infty}$. Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí následující:*

1) *Mějme fuzzy čísla $X_1, X_2, \ldots, X_n$ a $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$,*

$X_i = \{\langle \underline{x}_i(\alpha), \overline{x}_i(\alpha) \rangle, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}$ *a* $Y_i = \{\langle \underline{y}_i(\alpha), \overline{y}_i(\alpha) \rangle, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}$,

$i = 1, 2, \ldots, n$, *pro něž platí* $\underline{x}_i(\alpha) \leq \underline{y}_i(\alpha)$ *a* $\overline{x}_i(\alpha) \leq \overline{y}_i(\alpha)$ *pro* $i = 1, 2, \ldots, n$ *a každé* $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$.

2) *Označme*

$$X^W = X_{W_{F}n}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \{\langle \underline{x}^W(\alpha), \overline{x}^W(\alpha) \rangle, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}$$

a

$$Y^W = X_{W_{F}n}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \{\langle \underline{y}^W(\alpha), \overline{y}^W(\alpha) \rangle, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}.$$

Potom pro X^W a Y^W platí $\underline{x}^W(\alpha) \leq \underline{y}^W(\alpha)$ a zároveň $\overline{x}^W(\alpha) \leq \overline{y}^W(\alpha)$, pro každé $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$.

Důkaz: Nechť $w_1^*, w_2^*, \ldots, w_n^*$, kde $w_i^* \in W_{i\alpha}$, pro $i = 1, 2, \ldots, n$, a $\sum_{i=1}^n w_i^* \neq 0$, jsou takové váhy, pro které platí

$$\underline{y}^W(\alpha) = \min\left\{\frac{\sum_{i=1}^n w_i \underline{y}_i(\alpha)}{\sum_{i=1}^n w_i} | w_i \in W_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^n w_i \neq 0\right\} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n w_i^* \overline{y}_i(\alpha)}{\sum_{i=1}^n w_i^*}.$$

Označme

$$x^{W*}(\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i^* x_i}{\sum_{i=1}^n w_i^*}.$$

Platí

$$x^{W*}(\alpha) \leq \frac{\sum_{i=1}^n w_i^* \underline{y}_i(\alpha)}{\sum_{i=1}^n w_i^*} = \underline{y}^W(\alpha)$$

a zřejmě

$$\underline{x}^W(\alpha) = \min\left\{\frac{\sum_{i=1}^n w_i \underline{x}_i(\alpha)}{\sum_{i=1}^n w_i} | w_i \in W_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^n w_i \neq 0\right\} \leq x^{W*}(\alpha).$$

Z výše uvedených rovnic je zřejmé, že $\underline{x}^W(\alpha) \leq \underline{y}^W(\alpha)$ pro každé $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Důkaz pro $\overline{x}^W(\alpha)$ a $\overline{y}^W(\alpha)$ by se provedl analogicky. □

Fuzzy vážený průměr s nenormovanými fuzzy váhami tedy také splňuje zobecněnou podmínku 2 z definice 1.6.

Třetí podmínka vypadá následovně: Pro $x^- = \inf I$ a $x^+ = \sup I$ platí

$$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(x^-,\ldots,x^-)} A_n(x_1, \ldots, x_n) = x^-$$

$$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(x^+,\ldots,x^+)} A_n(x_1, \ldots, x_n) = x^+.$$

V našem případě uvažujeme $I = \mathbb{R}$.

Věta 3.5. *Nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí následující: Mějme taková fuzzy čísla $X_1, X_2, \ldots, X_n$, že $X_i = \{\langle \underline{x}_i(\alpha), \overline{x}_i(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0,1\rangle\}$, pro $i = 1,2,\ldots,n$. Nechť je $V_F = \{\mathbf{v}_{Fn}\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost vektorů normovaných fuzzy vah. Pak pro fuzzy vážený průměr $X_{V_F} = \{X_{V_Fn}\}_{n=1}^{\infty}$ asociovaný s V_F platí*

$$\lim_{(\overline{x}_1(0),\ldots,\overline{x}_n(0))\to(-\infty,\ldots,-\infty)} X_{V_Fn}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = -\infty,$$

$$\lim_{(\underline{x}_1(0),\ldots,\underline{x}_n(0))\to(\infty,\ldots,\infty)} X_{V_Fn}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \infty.$$

Důkaz:

$$\lim_{(\overline{x}_1(0),\ldots,\overline{x}_n(0))\to(-\infty,\ldots,-\infty)} \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{x}_i(0) = -\infty$$

$$\lim_{(\underline{x}_1(0),\ldots,\underline{x}_n(0))\to(\infty,\ldots,\infty)} \sum_{i=1}^{n} v_i \underline{x}_i(0) = \infty$$

□

Třetí podmínka tedy platí, pokud hodnoty $\overline{x}_i(0)$, pro $i = 1,2,\ldots,n$, budou divergovat k $-\infty$. Tato vlastnost nám postačí, jelikož hodnoty funkcí $\overline{x}_i(\alpha)$, pro $i = 1,2,\ldots,n$ a každé $\alpha \in \langle 0,1\rangle$, vstupujicích do agregace jsou největší možné. Analogicky je tomu u hodnot $\underline{x}_i(0)$, $i = 1,2,\ldots,n$, tedy požadujeme, aby divergovaly k ∞.

Nyní zformulujeme větu popisující zobecněnou 3. vlastnost definice 2.1 pro nenormované fuzzy váhy.

Věta 3.6. *Nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí následující: Mějme taková fuzzy čísla $X_1, X_2, \ldots, X_n$, že $X_i = \{\langle \underline{x}_i(\alpha), \overline{x}_i(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0,1\rangle\}$, pro $i = 1,2,\ldots,n$. Nechť je $W_F = \{\mathbf{w}_{Fn}\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost vektorů fuzzy vah. Pak pro fuzzy vážený průměr $X_{W_F} = \{X_{W_Fn}\}_{n=1}^{\infty}$ asociovaný s W_F platí*

$$\lim_{(\overline{x}_1(0),\ldots,\overline{x}_n(0))\to(-\infty,\ldots,-\infty)} X_{W_Fn}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = -\infty,$$

$$\lim_{(\underline{x}_1(0),\ldots,\underline{x}_n(0))\to(\infty,\ldots,\infty)} X_{W_Fn}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \infty.$$

Důkaz: Provedeme obdobně jako u předchozí věty.

$$\lim_{(\overline{x}_1(0),\dots,\overline{x}_n(0))\to(-\infty,\dots,-\infty)} \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \overline{x}_i(0)}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = -\infty$$

$$\lim_{(\underline{x}_1(0),\dots,\underline{x}_n(0))\to(\infty,\dots,\infty)} \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \underline{x}_i(0)}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \infty$$

$\square$

Poznámka 3.3. *Jestliže bychom uvažovali, že fuzzy vážený průměr je definován na nějakém uzavřeném intervalu* $I = \langle a, b\rangle$, *kde* $a, b \in \mathbb{R}$, *pak by výše uvedené limity konvergovaly k* a, *resp.* b.

Ověřili jsme, že zobecněné předpoklady $1, 2$ a 3 uvedené v definici 2.1 fuzzy vážený průměr splňuje. Další text se zabývá tím, jestli má fuzzy vážený průměr obdobné vlastnosti jako vážený průměr.

3.3 Průměrující operátor

Jak bylo uvedeno výše, vážený průměr je jedním z průměrujících agregačních operátorů. Tato vlastnost říká, že máme-li reálná čísla $x_1, \dots, x_n$, pak výsledek agregace těchto čísel je takové reálné číslo x, které je menší nebo rovno největšímu z čísel $x_1, \dots, x_n$ a zároveň je větší nebo rovno nejmenšímu z těchto čísel. Jestliže $n \in \mathbb{N}$, pak pro $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ platí

$$\min\{x_1, \dots, x_n\} \le A_n\{x_1, \dots, x_n\} \le \max\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Ukažme si, jak lze fuzzifikovat tuto vlastnost a to konkrétně na fuzzy váženém průměru. Uvažujme $n \in \mathbb{N}$ a fuzzy čísla $X_1, X_2, \dots, X_n$, kde $X_i = \{\langle \underline{x}_i(\alpha), \overline{x}_i(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$, pro $i = 1, 2, \dots, n$. Dále uvažujme fuzzy číslo $MIN = \{\langle \underline{min}(\alpha), \overline{min}(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$, pro něž platí

$$\underline{min}(\alpha) = \min\{\underline{x}_1(\alpha), \dots, \underline{x}_n(\alpha)\}$$

$$\overline{min}(\alpha) = \min\{\overline{x}_1(\alpha), \dots, \overline{x}_n(\alpha)\}.$$

Dále mějme fuzzy číslo $MAX = \{\langle \underline{max}(\alpha), \overline{max}(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0,1\rangle\}$, kde

$$\underline{max}(\alpha) = \max\{\underline{x}_1(\alpha), \ldots, \underline{x}_n(\alpha)\}$$
$$\overline{max}(\alpha) = \max\{\overline{x}_1(\alpha), \ldots, \overline{x}_n(\alpha)\}.$$

Ještě uvažujme fuzzy vážený průměr $X_{V_F} = \{X_{V_F n}\}_{n=1}^{\infty}$ asociovaný s V_F, tedy

$$X^N = X_{V_F n}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \{\langle \underline{x}^N(\alpha), \overline{x}^N(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0,1\rangle\}.$$

Jak již víme, $\underline{x}^N(\alpha)$ zjistíme pomocí vzorce

$$\underline{x}^N(\alpha) = \min\left\{\sum_{i=1}^{n} v_i \underline{x}_i(\alpha) | v_i \in V_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} v_i = 1\right\}.$$

Jak lze vidět, pro pevně stanovené $\alpha \in \langle 0,1\rangle$ se $\underline{x}^N(\alpha)$ počítá ostrým váženým průměrem $\sum_{i=1}^{n} v_i \underline{x}_i(\alpha)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, jelikož v_i i $\underline{x}_i(\alpha)$ jsou reálná čísla. Vzhledem k tomu, že vážený průměr je průměrujícím operátorem, pak platí

$$\underline{min}(\alpha) \leq \underline{x}^N(\alpha) \leq \underline{max}(\alpha) \text{ pro každé } \alpha \in \langle 0,1\rangle.$$

Pro $\overline{x}^N(\alpha)$ dojdeme analogickou úvahou jako výše k tomu, že

$$\overline{min}(\alpha) \leq \overline{x}^N(\alpha) \leq \overline{max}(\alpha) \text{ pro každé } \alpha \in \langle 0,1\rangle.$$

Fuzzy vážený průměr X^N lze tedy považovat za průměrující operátor. Zapíšeme to následovně:

$$MIN \leq X^N \leq MAX.$$

Ke stejnému závěru lze dojít i v případě, že neuvažujeme normované fuzzy váhy. Mějme fuzzy vážený průměr $X_{W_F} = \{X_{W_F n}\}_{n=1}^{\infty}$ asociovaný s W_F, čili

$$X^W = X_{W_F n}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \{\langle \underline{x}^W(\alpha), \overline{x}^W(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0,1\rangle\}.$$

Pro funkci $\underline{x}^W(\alpha)$ platí

$$\underline{x}^W(\alpha) = \min\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \underline{x}_i(\alpha)}{\sum_{i=1}^{n} w_i} | w_i \in W_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} w_i \neq 0\right\}.$$

I zde se pro každou konkrétní hodnotu $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ počítá $\underline{x}^W(\alpha)$ ostrým váženým průměrem, a to ze stejných důvodů jako u $\underline{x}^N(\alpha)$. Můžeme tedy říci, že

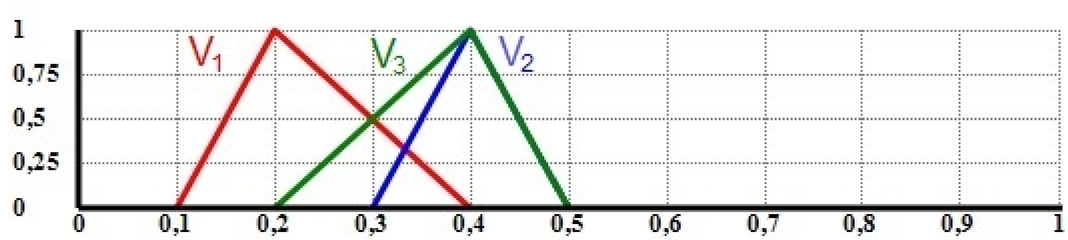
$$\underline{min}(\alpha) \leq \underline{x}^W(\alpha) \leq \underline{max}(\alpha) \quad \text{pro každé } \alpha \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Pro $\overline{x}^W(\alpha)$ platí analogické tvrzení jako pro $\overline{x}^N(\alpha)$. Z výše uvedeného vyplývá, že pro X^W platí

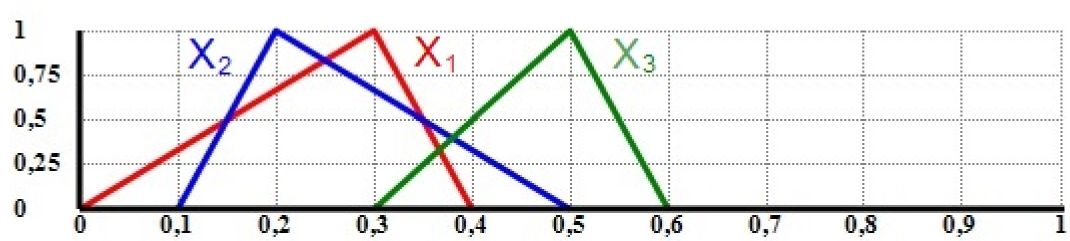
$$MIN \leq X^W \leq MAX,$$

tedy splňuje fuzzifikovanou vlastnost průměrujícího operátoru.

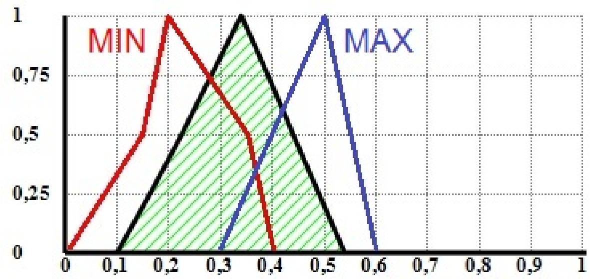
Pro lepší pochopení přidáme grafické znázornění této vlastnosti. Následující tři obrázky interpretují normované fuzzy váhy, fuzzy čísla X_1, X_2, X_3 vstupující do fuzzy váženého průměru a samotný fuzzy vážený průměr společně s fuzzy čísly MIN a MAX.



Obrázek 7: Normované fuzzy váhy.



Obrázek 8: Fuzzy čísla X_1, X_2, X_3.



Obrázek 9: Výsledný fuzzy vážený průměr a fuzzy čísla MIN a MAX.

3.4 Idempotentnost

Další vlastností agregačních operátorů je idempotentnost. Ta nám říká, že pokud agregujeme n stejných reálných hodnot $x \in \mathbb{R}$, pak výstupem agregace je právě dané číslo $x \in \mathbb{R}$. Jestliže uvažujeme agregační operátor $A = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, pak pro každé $n = 1, 2, \ldots$ platí

$$A_n(x, x, \ldots, x) = x.$$

Věta 3.7. *Nechť je $V_F = \{\mathbf{v}_{Fn}\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost vektorů normovaných fuzzy vah a nechť $X_{V_F} = \{X_{V_Fn}\}_{n=1}^{\infty}$ je fuzzy vážený průměr asociovaný s V_F. Pak pro libovolné fuzzy číslo $X = \{\langle \underline{x}(\alpha), \overline{x}(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$ platí*

$$X_{V_Fn}(X, \ldots, X) = X \quad \textit{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz: Nechť $n \in \mathbb{N}$ a

$$X^N = X_{V_Fn}(X, X, \ldots, X) = \{\langle \underline{x}^N(\alpha), \overline{x}^N(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}.$$

$$\underline{x}^N(\alpha) = \min\left\{\sum_{i=1}^{n} v_i \underline{x}(\alpha) | v_i \in V_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} v_i = 1\right\} =$$

$$= \min\left\{\underline{x}(\alpha)\sum_{i=1}^{n} v_i | v_i \in V_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} v_i = 1\right\} = \underline{x}(\alpha)$$

Výše uvedené úpravy bylo možné provést, jelikož $\underline{x}(\alpha)$ vyskytující se v $\sum$ není závislá na i, tedy je možné vytknout před $\sum$. Stejné vlastnosti využijeme i pro $\overline{x}(\alpha)$.

$$\overline{x}^N(\alpha) = \max\left\{\sum_{i=1}^{n} v_i\overline{x}(\alpha)|v_i \in V_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} v_i = 1\right\} =$$

$$= \max\left\{\overline{x}(\alpha)\sum_{i=1}^{n} v_i|v_i \in V_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} v_i = 1\right\} = \overline{x}(\alpha).$$

□

Nyní zformulujme tvrzení pro fuzzy vážený průměr s nenormovanými fuzzy váhami.

Věta 3.8. *Nechť je $W_F = \{\mathbf{w}_{Fn}\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost vektorů fuzzy vah a nechť $X_{W_F} = \{X_{W_F n}\}_{n=1}^{\infty}$ je fuzzy vážený průměr asociovaný s W_F. Pak pro libovolné fuzzy číslo $X = \{\langle\underline{x}(\alpha), \overline{x}(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$ platí*

$$X_{W_F n}(X, \ldots, X) = X \quad \textit{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz: Nechť $n \in \mathbb{N}$ a

$$X^W = X_{W_F n}(X, X, \ldots, X) = \{\langle\underline{x}^W(\alpha), \overline{x}^W(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}.$$

$$\underline{x}^W(\alpha) = \min\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i\underline{x}(\alpha)}{\sum_{i=1}^{n} w_i}|w_i \in W_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} w_i \neq 0\right\} =$$

$$= \min\left\{\underline{x}(\alpha)\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}|w_i \in W_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} w_i \neq 0\right\} = \underline{x}(\alpha)$$

Obdobně pak pro $\overline{x}^W(\alpha)$. □

V tétu podkapitole bylo ukázáno, jak lze idempotentnost fuzzifikovat a že oba typy fuzzy váženého průměru ji splňují.

3.5 Monotónnost

Vážený průměr je ryze monotónní agregační operátor, což znamená, že při zvýšení hodnot libovolného počtu vstupů, se hodnota agregace zvýší oproti agregaci s původními hodnotami a naopak, při zmenšení hodnot vstupů je výsledná hodnota menší. Uvažujme vektory $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Jestliže pro jedno $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí $x_i < y_i$ a pro $x_j = y_j$, $j \neq i$, pak monotónnost definujeme pro každé $n \in \mathbb{N}$ takto:

$$A_n(x_1, x_2, \dots, x_n) < A_n(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Věta 3.9. *Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí následující: Mějme fuzzy čísla $X_1, \dots, X_n$ a $Y_1, \dots, Y_n$ taková, že $X_i = \{\langle \underline{x}_i(\alpha), \overline{x}_i(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$ a $Y_i = \{\langle \underline{y}_i(\alpha), \overline{y}_i(\alpha)\rangle$, $\alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$, pro $i = 1, \dots, n$. Nechť pro jedno $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí $\underline{x}_i(\alpha) < \underline{y}_i(\alpha)$ a $\overline{x}_i(\alpha) < \overline{y}_i(\alpha)$ a pro $j \neq i$ platí $\underline{x}_j(\alpha) = \underline{y}_j(\alpha)$ a $\overline{x}_j(\alpha) = \overline{y}_j(\alpha)$, pro každé $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Nechť je $V_F = \{\mathbf{v}_{Fn}\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost normovaných fuzzy vah. Pro fuzzy vážený průměr $X_{V_F} = \{X_{V_F n}\}_{n=1}^{\infty}$ asociovaný s V_F platí*

$$\underline{x}^N(\alpha) < \underline{y}^N(\alpha) \wedge \overline{x}^N(\alpha) < \underline{y}^N(\alpha) \qquad \textit{pro každé } \alpha \in \langle 0, 1\rangle,$$

kde

$$X_{V_F n}(X_1, X_2, \dots, X_n) = \{\langle \underline{x}^N(\alpha), \overline{x}^N(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$$

a

$$X_{V_F n}(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \{\langle \underline{y}^N(\alpha), \overline{y}^N(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}.$$

Důkaz: Nechť $n \in \mathbb{N}$.

$$\underline{x}^N(\alpha) = \min\left\{\sum_{i=1}^{n} v_i \underline{x}_i(\alpha) | v_i \in V_{i\alpha}, i = 1, 2, \dots, n, \sum_{i=1}^{n} v_i = 1\right\} =$$

$$= \min\left\{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} v_j \underline{x}_j(\alpha) + v_i \underline{x}_i(\alpha) | v_i \in V_{i\alpha}, i = 1, 2, \dots, n, \sum_{i=1}^{n} v_i = 1\right\} <$$

$$< \min \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} v_j \underline{y}_j(\alpha) + v_i \underline{y}_i(\alpha) | v_i \in V_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} v_i = 1 \right\} =$$

$$= \underline{y}^N(\alpha)$$

Pro funkce $\overline{x}^N(\alpha)$ a $\overline{y}^N(\alpha)$ dokážeme obdobně.

$$\overline{x}^N(\alpha) = \max \left\{ \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{x}_i(\alpha) | v_i \in V_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} v_i = 1 \right\} =$$

$$= \max \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} v_j \overline{x}_j(\alpha) + v_i \overline{x}_i(\alpha) | v_i \in V_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} v_i = 1 \right\} <$$

$$< \max \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} v_j \overline{y}_j(\alpha) + v_i \overline{y}_i(\alpha) | v_i \in V_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} v_i = 1 \right\} =$$

$$= \overline{y}^N(\alpha)$$

□

Pro fuzzy vážený průměr s nenormovanými fuzzy váhami upravíme znění věty 3.9.

Věta 3.10. *Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí následující: Mějme fuzzy čísla $X_1, \ldots, X_n$ a $Y_1, \ldots, Y_n$ taková, že $X_i = \{\langle \underline{x}_i(\alpha), \overline{x}_i(\alpha) \rangle, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}$ a $Y_i = \{\langle \underline{y}_i(\alpha), \overline{y}_i(\alpha) \rangle,$ $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}$, pro $i = 1, \ldots, n$. Nechť pro jedno $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí $\underline{x}_i(\alpha) < \underline{y}_i(\alpha)$ a $\overline{x}_i(\alpha) < \overline{y}_i(\alpha)$ a pro $j \neq i$ platí $\underline{x}_j(\alpha) = \underline{y}_j(\alpha)$ a $\overline{x}_j(\alpha) = \overline{y}_j(\alpha)$, pro každé $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$. Nechť je $W_F = \{\mathbf{w}_{Fn}\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost fuzzy vah. Pro fuzzy vážený průměr $X_{W_F} = \{X_{W_F n}\}_{n=1}^{\infty}$ asociovaný s W_F platí*

$$\underline{x}^W(\alpha) < \underline{y}^W(\alpha) \wedge \overline{x}^W(\alpha) < \underline{y}^W(\alpha) \quad \textit{pro každé } \alpha \in \langle 0, 1 \rangle,$$

kde

$$X_{W_F n}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \{\langle \underline{x}^W(\alpha), \overline{x}^W(\alpha) \rangle, \alpha \in \langle 0, 1 \rangle\}$$

a

$$X_{W_F n}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \{\langle \underline{y}^W(\alpha), \overline{y}^W(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}.$$

Důkaz: Nechť $n \in \mathbb{N}$.

$$\underline{x}^W(\alpha) = \min\left\{\frac{\sum_{i=1}^n w_i \underline{x}_i(\alpha)}{\sum_{i=1}^n w_i} | w_i \in W_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^n w_i^* \neq 0\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n w_j \underline{x}_j(\alpha) + w_i \underline{x}_i(\alpha)}{\sum_{i=1}^n w_i} | w_i \in W_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^n w_i^* \neq 0\right\} <$$

$$< \min\left\{\frac{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n w_j \underline{y}_j(\alpha) + w_i \underline{y}_i(\alpha)}{\sum_{i=1}^n w_i} | w_i \in W_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^n w_i^* \neq 0\right\} =$$

$$= \underline{y}^W(\alpha)$$

Obdobně bychom dokázali pro $\overline{x}^W(\alpha)$ a $\overline{y}^W(\alpha)$. □

Oba typy fuzzy váženého průměru tedy zobecněnou ryzí monotónnost splňují.

Poznámka 3.4. *Obdobné věty jako věty 3.9 a 3.10 by platily i v případě, že fuzzy čísla*

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \quad a \quad Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$$

mají vlastnosti uvedené ve zmíněných větách, ale pro $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *by platilo*

$$\underline{x}_i(\alpha) < \underline{y}_i(\alpha) \wedge \overline{x}_i(\alpha) = \overline{y}_i(\alpha), \text{ resp. } \underline{x}_i(\alpha) = \underline{y}_i(\alpha) \wedge \overline{x}_i(\alpha) < \overline{y}_i(\alpha),$$

pro každé $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$.

3.6 Lineární invariantnost

Jednou z mnoha dalších vlastností agregačních operátorů je lineární invariantnost, která udává, kterak se změní výsledek agregace, jesliže zvolíme jako vstup lineární transformaci původních hodnot. Při vytváření je však kladen požadavek, aby byla lineární transformace u každé z hodnot stejná. Formálně lze lineární invariantnost v případě, že počítáme s reálnými čísly x_i, pro $i = 1, 2, \ldots, n$, kde $n \in \mathbb{N}$, zapsat takto:

$$A_n(rx_1 + t, rx_2 + t, \ldots, rx_n + t) = rA_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + t.$$

Věta 3.11. *Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí následující: Mějme libovolná fuzzy čísla $X_1, \ldots, X_n$, pro která platí $X_i = \{\langle \underline{x}_i(\alpha), \overline{x}_i(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$, pro $i = 1, 2, \ldots, n$, a libovolná čísla $r, t \in \mathbb{R}$. Nechť je $V_F = \{\mathbf{v}_{Fn}\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost vektorů normovaných fuzzy vah. Pro fuzzy vážený průměr $X_{V_F} = \{X_{V_F n}\}_{n=1}^{\infty}$ asociovaný s V_F platí*

$$X_{V_F n}(rX_1 + t, rX_2 + t, \ldots, rX_n + t) = rX_{V_F n}(X_1, X_2, \ldots, X_n) + t.$$

Důkaz: Nechť $n \in \mathbb{N}$, $r, t \in \mathbb{R}$ a

$$X^N = X_{V_F n}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \{\langle \underline{x}^N(\alpha), \overline{x}^N(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}.$$

$$\underline{x}^N(\alpha) = \min\left\{\sum_{i=1}^{n} v_i(r\underline{x}_i(\alpha) + t) | v_i \in V_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} v_i = 1\right\} =$$

$$= \min\left\{r\sum_{i=1}^{n} v_i\underline{x}_i(\alpha) + \sum_{i=1}^{n} v_i t | v_i \in V_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} v_i = 1\right\} =$$

$$= r\min\left\{\sum_{i=1}^{n} v_i\underline{x}_i(\alpha) | v_i \in V_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} v_i = 1\right\} + t =$$

$$= r\underline{x}^N(\alpha) + t.$$

Obdobně dokážeme i pro funkci $\overline{x}^N(\alpha)$:

$$\overline{x}^N(\alpha) = \max\left\{\sum_{i=1}^{n} v_i(r\overline{x}_i(\alpha) + t) | v_i \in V_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} v_i = 1\right\} =$$

$$= \max\left\{r\sum_{i=1}^{n} v_i\overline{x}_i(\alpha) + \sum_{i=1}^{n} v_i t | v_i \in V_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} v_i = 1\right\} =$$

$$= r \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{x}_i(\alpha) | v_i \in V_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} v_i = 1 \right\} + t =$$

$$= r\overline{x}^N(\alpha) + t.$$

□

Můžeme říci, že normovaný fuzzy vážený průměr splňuje zobecněnou lineární invariantnost. Podívejme se, jak tomu bude, pokud neuvažujeme normované fuzzy váhy.

Věta 3.12. *Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí následující: Mějme libovolná fuzzy čísla $X_1, \ldots, X_n$, pro která platí $X_i = \{\langle \underline{x}_i(\alpha), \overline{x}_i(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$, pro $i = 1, 2, \ldots, n$, na $\mathbb{R}$ a libovolná čísla $r, t \in \mathbb{R}$. Nechť je $W_F = \{\mathbf{w}_{Fn}\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost vektorů fuzzy vah. Pro fuzzy vážený průměr $X_{W_F} = \{X_{W_F n}\}_{n=1}^{\infty}$ asociovaný s W_F platí*

$$X_{W_F n}(rX_1 + t, rX_2 + t, \ldots, rX_n + t) = rX_{W_F n}(X_1, X_2, \ldots, X_n) + t.$$

Důkaz: Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $r, t \in \mathbb{R}$ a

$$X^W = X_{W_F n}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \{\langle \underline{x}^W(\alpha), \overline{x}^W(\alpha)\rangle, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}.$$

$$\underline{x}^W(\alpha) = \min\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i(r\underline{x}_i(\alpha) + t)}{\sum_{i=1}^{n} w_i} | w_i \in W_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} w_i \neq 0 \right\} =$$

$$= \min\left\{ r\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \underline{x}_i(\alpha)}{\sum_{i=1}^{n} w_i} + \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i t}{\sum_{i=1}^{n} w_i} | w_i \in W_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} w_i \neq 0 \right\} =$$

$$= r \min\left\{ \sum_{i=1}^{n} v_i \underline{x}_i(\alpha) | w_i \in W_{i\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} w_i^* \neq 0 \right\} + t =$$

$$= r\underline{x}^W(\alpha) + t.$$

Pro $\overline{x}^W(\alpha)$ bychom dokázali obdobně. □

Jak můžeme vidět, nezáleží na tom, jestli uvažujeme normované fuzzy váhy či nikoli. Oba typy fuzzy váženého průměru zobecněnou lineární invariantnost splňují.

Závěrem můžeme říci, že fuzzy vážený průměr výše zmíněné zobecněné vlastnosti splňuje. Navíc jsme dokázali, že dané vlastnosti nezávisí na tom, jestli uvažujeme normované fuzzy váhy nebo pouze obecné fuzzy váhy.

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo rozšířit některé z vlastností agregačních operátorů do prostředí fuzzy množin a zjistit, zda-li si fuzzy vážený průměr zachovává alespoň některé z vlastností své ostré předlohy.

V první kapitole jsme si zavedli pojmy nezbytně nutné pro základní orientaci v teorii fuzzy množin a dalším textu. Dále byl zaveden pojem agregační operátor a ukázali jsme, že vážený průměr patří do této skupiny. Popsali jsme některé z matematických vlastností těchto operátorů a formulovali tvrzení, že zmíněné vlastnosti má i vážený průměr. Jednotlivá tvrzení byla následně dokázána.

V hlavní části této práce jsme nejprve definovali dva typy fuzzy váženého průměru a následně jsme zavedli fuzzy vážený průměr jako posloupnost zobrazení, obdobně jako v ostrém případě. Bylo třeba ověřit, že fuzzy vážený průměr splňuje tři podmínky, které jsou uvedeny v definici agregačního operátoru, respektive jejich zobecnění do prostředí fuzzy množin. Ukázali jsme, že tyto fuzzifikované podmínky jsou splněny. Následně jsme zobecnili jednotlivé vlastnosti uvedené ve druhé kapitole a zkoumali, jestli platí pro fuzzy vážený průměr. Ověřili jsme, že tento operátor lze považovat za idempotentní, lineárně invariatní, monotónní a průměrující.

Vzhledem k rozsahu práce jsem se zaměřil jen na některé vlastnosti, které vážený průměr má.

Toto téma jsem si vybral, jelikož jsem ve druhém ročníku prošel základním kurzem teorie fuzzy množin a zaujalo mě, že lze počítat s vágními pojmy a i přes to se dobrat jasně interpretovatelému výsledku. Ačkoliv je tato práce čistě teoretická, získal jsem do této problematiky jistý vhled a navíc jsem se seznámil s novými pojmy jako agregační operátor aj.

Psaní práce mě velice bavilo, jelikož se týká fuzzy množin. Především jsem však mohl přijít s něčím novým, čím se ještě přede mnou nikdo nezabýval, což bylo také občas kamenem úrazu vzhledem k tvorbě důkazů.

Literatura

[1] Detyniecki, M., Fundamentals on Aggregation Operators [online], dostupné z http://www.spatial.maine.edu/~worboys/Sie565/papers/aggregation%20operators.pdf [citováno 7.11.2014]

[2] Klir, G. J., Pan, Yi. Constrained fuzzy arithmetic: basic questions and some answers. Soft Computing, 1998, 2.2: 100-108.

[3] Navara, M., Olšák, P., Základy fuzzy množin, 1. vydání. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2002.

[4] Pavlačka, O., Talašová, J., Application of the Fuzzy Weighted Average of Fuzzy Numbers in Decision Making Models. New Dimensions in Fuzzy Logic and Related Technologies. Vol II. (Eds.: Štěpnička, M., Novák, V., Bodenhofer, U.) Proceedings of the 5th EUSFLAT Conference, Ostrava, Czech Republic, September 11–14, 2007. Ostravská univerzita, Ostrava, 2007, 455–462.

[5] Pavlačka, O., Talašová, J., Fuzzy vectors as a toll for modeling uncertain muntidimensional quantities. Fuzzy Sets and Systems 161 (2010) 1585-1603

[6] Talašová, J., Fuzzy metody vícekriteriálního hodnocení a rozhodování, 1. vydání. Univerzita Palackého v Olomouci, 2003.

[7] Wikipedia: the free encyclopedia. [online]. 2001- [cit. 2015-04-14]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Lotfi_A._ Zadeh

[8] Yager, R. R., On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making, IEEE transactions on Systems, Man and Cybernetics 18, 183-190, 1988.

[9] Zadeh, L. A., Fuzzy Sets. Information and Control, vol. 8, pp. 338-353, 1965.

[10] Zadeh, L. A., The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—II. Information sciences, 1975, 8.4: 301-357.