VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY
INSTITUTE OF MATHEMATICS

VÝVOJ A HISTORIE TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI
DEVELOPMENT AND HISTORY OF PROBABILITY THEORY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE Jitka Michalová
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE doc. RNDr. Libor Žák, Ph.D.
SUPERVISOR

BRNO 2020

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Studentka:	**Jitka Michalová**
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	**doc. RNDr. Libor Žák, Ph.D.**
Akademický rok:	2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Vývoj a historie teorie pravděpodobnosti

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Cílem práce je popsat historii pravděpodobnosti se zaměřením na klasickou pravděpodobnost a její modifikace. Práce by měla obsahovat příklady a jejich způsob řešení v dané době.

Cíle bakalářské práce:

Popis vývoje pravděpodobnosti.
Ukázka řešení konkrétních pravděpodobnostních úloh v dané době a nyní.
Podrobnější popis úlohy o vyplacení výhry při předčasně ukončené hře.

Seznam doporučené literatury:

DAVID, F. N. Games, Gods and Gambling, A history of probability and statistical ideas. Dover Publ., Inc., Mineola, New York, 1998.

SAXL, I. Pravděpodobnost ve středověku, STAKAN 2003.

MAREŠ, M. Příběhy matematiky, Pistorius & Olšanská, 2011.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc. ředitel ústavu	doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D. děkan fakulty

Abstrakt
Tato bakalářská práce se věnuje historii a vývoji pravděpodobnosti a její teorie před zavedením Kolmogorovy axiomatické definice ve 20. století. Zabývá se úlohou o rozdělení sázky a jejími řešiteli: Luca Pacioli, Niccola Fontana Tartaglia, Blaise Pascal a Pierre de Fermat. Soustředí se na spisy De Ratiociniis in Ludo Aleae Christiaana Huygense a Ars Conjectandi Jacoba Bernoulliho. Dále se zabývá různými definicemi pravděpodobnosti: klasickou (Laplacovou), statistickou, geometrickou a Kolmogorovou axiomatickou. Také pokrývá podmíněnou pravděpodobnost a Bayesovu větu.

Summary
This bachelor thesis deals with the history and development of probability and its theory before the introduction of Kolmogorov's axiomatic definition in the 20th century. It follows the Problem of points and its solvers: Luca Pacioli, Niccola Fontana Tartaglia, Blaise Pascal and Pierre de Fermat. It focuses on the works De Ratiociniis in Ludo Aleae by Christiaan Huygens and Ars Conjectandi by Jacob Bernoulli. It also deals with various definitions of probability: classical (Laplac), statistical, geometric and Kolmogorov's axiomatic definition. It also covers conditional probability and Bayes's Theorem.

Klíčová slova
Ars Conjectandi, Blaise Pascal, De Ratiociniis in Ludo Aleae, historie pravděpodobnosti, klasická definice pravděpodobnosti, Pierre de Fermat, pravděpodobnost, úloha o rozdělená sázky

Keywords
Ars Conjectandi, Blaise Pascal, De Ratiociniis in Ludo Aleae, history of probability, classical definition of probability, Pierre de Fermat, probability, problem of points

MICHALOVÁ, J. *Vývoj a historie teorie pravděpodobnosti.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2020. 30 s. Vedoucí doc. RNDr. Libor Žák, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Vývoj a historie teorie pravděpodobnosti vypracovala pod vedením doc. RNDr. Libora Žáka, Ph.D. samostatně a za použití zdrojů uvedených v seznamu literatury.

Jitka Michalová

Tímto bych chtěla poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce doc. RNDr. Liboru Žákovi, Ph.D za ochotu, čas a trpělivost, které mi při psaní této práce věnoval. Také bych chtěla poděkovat mé rodině a přátelům za jejich podporu během studia.

Jitka Michalová

Obsah

1 Úvod

Teorie pravděpodobnosti je v dnešní době spolu se statistikou hojně využívána při zpracovávání nasbíraných dat. Od pojišťovnictví přes veřejné průzkumy a statistiky až po lékařské testy, pravděpodobnost je součástí každodenního života. Slova „pravděpodobně“ a „je to jisté“ používáme všichni. Jak často se ale zamyslíme nad tím, jak a kdy vznikla?

O tomto tématu samozřejmě existuje spousta knih. Většinou se ale řadí na do dvou skupin. První z nich jsou matematické texty popisující suchá fakta, která laikovi mnohdy přijdou nepochopitelná a nezapamatovatelná. Pokud se tyto knihy zmiňují o životech matematiků, bývají to většinou okrajové zmínky. Druhou skupinou jsou pak knihy, které byly napsané s úmyslem čtenáře zaujmout a vtáhnout do děje. Jsou plné zajímavých příběhů a anekdot a matematika je v nich vysvětlena pouze zběžně, pokud vůbec.

Cílem této práce bylo popsat historický vývoj pravděpodobnosti před zavedením Kolmogorovy axiomatické výstavby ve 20. století a přiblížit okolnosti, které vedly ke vzniku teorií a postupů, které jsou dnes používány. Jsou v ní uvedeny základní definice z oblasti pravděpodobnosti spolu s historickými fakty ze života matematiků, které vedly k jejich vzniku. Jelikož je statistika častěji v centru pozornosti, díky svému hojnému využití při analýze dat, v této práci je zmíněna pouze okrajově.

Struktura práce je následující. Události a definice byly, pokud to bylo možné, řazeny chronologicky podle svého vzniku a podle návaznosti na již pokrytá témata. Nejdřív se práce věnuje náhodě a pohledům na ni v různých obdobích a částech světa. Dále se zaměří na úlohu o rozdělení sázky, její vznik, řešitele a jejich postupy a řešení. Následně projdeme první spisy napsané o pravděpodobnostním počtu *De Ratiociniis in Ludo Aleae* Christiaana Huygense a *Ars Conjectandi* Jacoba Bernoulliho a matematiky, kteří na ně navázali. Část této práce je také věnovaná statistickému a geometrickému pohledu na pravděpodobnosti a jejich vzniku. Jedna z kapitol se věnuje také podmíněné pravděpodobnosti a Bayesově větě. V poslední části je pak Kolmogorově axiomatické definici pravděpodobnosti, která je používána do dnes.

Historické údaje o osobách a událostech byly čerpány hlavně ze zdrojů [1], [2], [6] a [9]. Informace o úloze o rozdělení sázky jsou pak z [3], [4] a [10]. Pokud není v textu uvedeno jinak, definice a věty byly převzaty z [5].

2 Než se pravděpodobnost stala pravděpodobností

Pravděpodobnost sama o sobě je v porovnání s jinými oblastmi matematiky poměrně mladá disciplína. Dalo by se přitom říct, že její počátky sahají daleko do starověku. I. Saxl ([9], str. 87) říká, že je „spíše hledáme než nalézáme v hrách“. Mezi matematiky i archeology existuje několik teorií. Ty jsou založené na překvapivě vysokém počtu kůstek kopytnatců (astragalus, obrázek 2.1) nalezených v pozůstatcích lidských sídlišť starších více než 40 000 let. Jelikož se svým tvarem podobají novodobým kostkám, dalo by se říct, že kostky jsou nejstarší z her, které by v dnešní době bylo možné nazvat hazardní. Nic ale není tak jednoznačné. F.N. David ve své knize [2] poukazuje na to, že teorií, proč bylo astragalů nalezeno tolik je hned několik. Mohly být třeba používány jako hračky pro děti nebo jako ranný předchůdce počitadla. Na rozdíl od většiny kostí neobsahují morek, a proto nedocházelo k jejich zužitkování.

2.1 Hra v kostky

Jak přesně si s hlezenními kůstkami hráli pravěcí lidé můžeme pouze spekulovat. Chceme-li mluvit o použití kostek, které je nám v dnešní době povědomé, je nutné na důkaz nějaký čas počkat. Důkaz, že kostky byly používány jako nástroj k posouvání figurek v deskových hrách můžeme najít v Egyptě na nástěnných malbách z období první dynastie (3500 let př. Kr.). Pro hry Senet a Psi a šakali archeologové objevili dochované herní soupravy. Tyto hry by se dali nazvat předchůdci novodobé hry vrhcáby. K určení počtu kroků, o které figurky posunout, sloužily kromě kostek také „tyčinky s jednou označenou stranou“ ([9], str. 88).

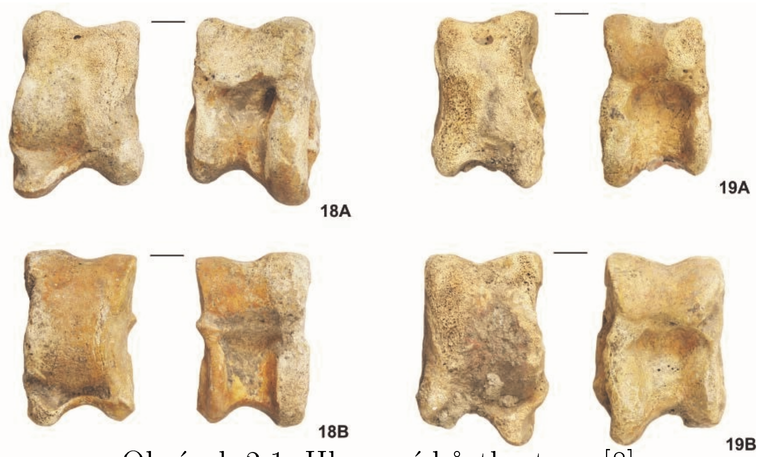
Zmínku o hře v kostky najdeme i v Homérově *Iliadě*, kde sloužili k zabavení vojáků nudících se před Trojou. Soutěživý Patroklos jako chlapec údajně málem svého soupeře v kostkách zabil. Je nutné podotknout, že se nejednalo o hru s cílem získat hod o vyšší hodnotě než soupeř, ale o chytání hozených kostek na hřbet jedné ruky. O kom v *Iliadě* už zmínku nenajdeme je Palomédés, který byl Řeky považována za vynálezce nejen kostek, ale i majáku, měr a vah, stavění stanů a skoro celé alfabety.

V době vzniku Římské říše byla hra o peníze (podle dnešní definice hazard) rozšířena mezi všemi vrstvami obyvatelstva. O tomto rozšíření se můžeme přesvědčit z nástěnných mozaik hráčů, nalezených na stěnách domů v Pompejích (obrázek 2.2). Dobrým zdrojem informací nejen o hře v kostky, ale i o přístupu lidí k nim je také římský historik Gaius Suetonius Tranquillus (69–140). Ve svých svazcích *Životopisy dvanácti císařů* píše, že Božský Augustus (63 př.n.l.–14 n.l.) hrál kostky pro rozptýlení po celý rok, nikoliv pouze v období Saturnálií nebo jiných svátků. Božský Claudius (10 př.n.l.–54 n.l.) měl zase upravený vůz i hrací desku tak, aby se dalo hrát za jízdy. Je tedy vidět, že občané Říma hazardu holdovali směle a bez ostychu.

Hra v kostky byla také silně rozšířená ve starověké Indii. Na rozdíl od hlezenních kůstek se hrálo s oříšky vibhidaka, plody vrcholáku myrobalánového. Písemné zmínky o hazardních hrách v Indii najdeme například v eposu *Mahábhárata*, kde se dějová linie odvíjí od prohry ve hře v kostky, a ve vedlejším příběhu o králi Nálovi. Somadévův *Oceán příběhů* je důkazem jak oblíbenosti hry v kostky, tak i rozšíření veřejných heren. Nikde se ale nemluví o relativní četnosti vrhů čísel nebo jejich kombinací, přestože je herní um považován za početní znalost. Stejně tak není nikde zmínka o tom, že by u krychlové kostky předpokládali stejnou četnost jednotlivých vrhů.

Stejně jako se vyvíjela civilizace, měnila se i podoba kostek a hlezenních kůstek. Každá strana hlezenních kůstek měla svou bodovou hodnotu 1, 3, 4 a 6 (další dvě strany jsou zaoblené a kůstky se na nich nezastaví). Jedničce s nejnižší hodnotou (a nejnižší pravděpodobností) se říkalo „pes“. Nejvyšší hodnotu při hodu čtyřmi kostkami pak měla kombinace 1, 3, 4, 6 tzv. Venuše nebo Venušin Vrh. Objevily se i zbroušené hlezenní kůstky, ty se ale rychle obehrály a ztrácely svou živostnost. V Římě i v Egyptě byly nalezeny krychlové kostky kamenné, v Indii pak keramické.

Nalezené kostky neměly jednotnou podobu, kolem roku 1400 př.n.l. se však ustálila dnešní podoba, tj. součet 7 na protějších stranách. Lidé ovšem nezůstávali pouze u šestistěnů. Mezi nalezené kostky patří i pravidelné čtrnáctistěny, osmnáctistěny, devatenáctistěny či dvacetistěn. V Egyptě byly nalezeny i kostky, jejichž strany byly zdobeny reliéfy bohů. Dá se tedy předpokládat, že tyto kostky sloužily při náboženských rituálech nebo k věštění, a tedy pomáhaly rozluštit vůli bohů, o kterých se lidé domnívali, že řídí jejich kroky a osud.



Obrázek 2.1: Hlezenní kůstky turu [8].


Obrázek 2.2: Freska ze zdi v Pompejích [9].

2.2 Církevní a státní zákazy

Přestože se hra v kostky v Evropě udržela ve vysoké oblibě od dob Římské říše až do období renesance, kdy byla částečně nahrazena kartami, potýkala se s častou kritikou ze strany nejen církve, ale překvapivě i ze strany státu. Například v Bibli samotné, možná nejznámější knize té doby, se kritiky hráčů a jejich sklonů k hazardu nedočkáme. Hazardní hry v ní byly totiž výslovně zakázány s odůvodněním, že náhoda neexistovala a všechno, co se dělo na zemi řídil Bůh.

Římská republika omezila hazardní hry pouze na období Saturnálií, tj. okolo Vánoc, kdy se dávaly dárky a otroci nepracovali. Opakované vydávání těchto zákonů ale naznačuje, že se občané jejich dodržováním moc netrápili. V průběhu let pronáší duchovní několik slavných kázání směrovaných proti hře v kostky a hazardu vůbec. Mezi odpůrce hazardu ze stran státu můžeme zařadit např. francouzského krále Ludvíka IX., který nezakázal svým úředníkům pouze hru v kostky, ale i šachy, dámu, návštěvu hostinců a smilstvo. Navíc se v celém jeho království kostky nesměly ani vyrábět. Trevírský koncil i koncil ve Worcesteru, ne však jako jediní, zakázaly hraní kostek dokonce i duchovním.

Zajímavé ale je, že všechny tyto zákazy platili pouze, pokud se hrálo o peníze. V besedě Króna se svým knězem, kterou napsal Lúkian ze Samosaty (120–180 n.l.), je jako jeden ze zákonů uvedeno „Všichni ať hrají o ořechy; bude-li někdo hrát o peníze, ať je druhý den bez jídla“ ([9], str. 90). Jejich důvodem nebylo pokoušení náhody ani jiné důvody náboženského charakteru, nýbrž snaha potlačit jevy s hazardem spojené. Mezi ně patří například hádky, krádeže, souboje nebo vraždy právě pro peníze. Že byla hra v kostky častým a mnohdy vítaným rozptýlením, můžeme potvrdit v Canterburských povídkách Geoffreyho Chaucera nebo v Pastonských dopisech (korespondenci norfolkské rodiny z období 1420–1503).

Uvědomujíce si zbytečnost odepírání lidem způsobů, jakými se zabavit, vymyslel kolem roku 960 n.l. biskup Vimbold z Cambrai hru určenou přímo duchovním. Mohli tak „vyhrát“ ctnost, kterou pak museli praktikovat 24 hodin. Přesná pravidla pro hraní kostek měli při hledání rozptýlení i účastníci Třetí křížové výpravy. Vojáci, kteří měli postavení nižší než rytíř, měli hru o peníze zakázanou. Duchovní a rytíři pak nesměli během 24 hodin prohrát více než 20 šilinků.

Ne všechny zákazy byly zavedeny za účelem udržení pokoje, čemuž dosvědčí série zákonů sepsaná Eduardem III. (1312–1377) a Jindřichem VIII. (1491–1547), jež zakazovaly hry jako kuželky, biliár nebo kostky. Pozornost měla potom směřovat k „mužným“ sportům bojového charakteru, jako lukostřelba, které král preferoval. Je ale těžké posoudit, jak účinné tyto zákazy byly.

2.3 Počátky kombinatoriky

Přestože pravděpodobnost, jak ji známe my, se začala vyvíjet v 15. a 16. století, její základní kameny, výpočty kombinatoriky, byly položeny již několik století před Kristem. Indické sútry (krátká pravidla nebo teologické poznatky určené k rychlému zapamatování) jsou jejich nejstaršími dochovanými prameny, které se považují za spolehlivé.

Objevují se v nich počty kombinací i permutací k prvků z n pro $k = 1, 2, 3$. Používají se například k řešení úloh typu „jaké skupiny můžeme vytvořit ze zvoleného počtu mužů a žen“. Je zde také přesně popsána tvorba meruprastary (Pascalova trojúhelníku). Kombinační čísla byla tedy natolik známá, že už v 10. století uměli vypočítat jejich součet.

Indie ovšem nebyla jediná oblast, ve které lidé pracovali s kombinačními čísly. V čínské knize *Jaspisové zrcadlo čtyř prvků* z roku 1303 n.l. můžeme najít Pascalův trojúhelník kombinačních čísel do $n = 8$ cca o 350 let dříve, než jej zformuloval sám Pascal. I arabští matematici 12. a 13. století znali a používali většinu kombinatorických pravidel.

Co se Evropy týče, první podrobnou zmínku o systematickém kombinatorickém výpočtu nalezneme u již zmiňovaného Wibolda z Cambrai a jeho hry se třemi kostkami. Wibold vypočítal a očísloval všech 56 kombinací s opakováním, které mohou nastat, a každé přiřadil ctnost. Mnich poté musel tuto ctnost dodržovat po zbytek dne.

Pro nás je to základní ukázka kombinace s opakováním $C'_3(6) = \binom{8}{3} = 56$. Wibold a matematici řešící stejný problém ale nejspíš ke správnému počtu kombinací došli jejich vypsáním a sečtením. Jako příklad můžeme uvézt báseň O stařence („*De Vetula*“ Richarda de Fournival (1190–1260)), kde je rozepsán výpočet všech možností tří hodů kostkou (popř. hodu třemi kostkami). Je zde uvedená i tabulka četností[1] jednotlivých trojic dávajících stejné součty, kterou je vidět na obrázku 2.3 Přesto nikdo nepodnikl onen další krok nutný k výpočtu pravděpodobnosti výskytu jednotlivých součtů.

3	18	Punctatura	1	Cadentia	1
4	17	Punctatura	1	Cadentiæ	3
5	16	Punctaturæ	2	Cadentiæ	6
6	15	Punctaturæ	3	Cadentiæ	10
7	14	Punctaturæ	4	Cadentiæ	15
8	13	Punctaturæ	5	Cadentiæ	21
9	12	Punctaturæ	6	Cadentiæ	25
10	11	Punctaturæ	6	Cadentiæ	27

Obrázek 2.3: Tabulka četností součtů pro hod třemi kostkami z básně *O stařence* [2].

Není se ovšem čemu divit. Šíření vědomostí nebylo ve středověku nic jednoduchého. Knihy byly drahé a nedostupné a většina lidí negramotná. Vzdělaní lidé se tedy shromažďovali buď pod záštitou vlivných mecenášů nebo v klášterech. Proto musel ještě Galileo Galilei ve svém traktátu *Sopra le Scoperte dei Dadi* (1613–1623) na žádost neznámého hráče vysvětlovat výpočet četnosti hodů třemi kostkami. Hráč se ptal, jak je možné, že číslo 10 padá častěji než číslo 9, přestože mají stejný počet skupin, které v součtu dávají žádané číslo. Galileo vysvětluje, že součet 10 se vyskytuje častěji. Existuje totiž více permutací, ve kterých se vyskytuje. Tabulka na obrázku 2.3 ukazuje pravděpodobnost desítky je $27/216 = 0,125$ a devítky je $25/216 = 0,1157$ ([9], str. 98). Jak poukazuje I. Saxl ([9], str. 99) „Hráčská praxe tazatele musela být značná, když si tak malého rozdílu všiml.“

[1]Punctaturae značí 56 konfigurací a Cadentiae pak 216 možností hodu.

Zůstává ale otázkou, odkud se o postupu řešení dozvěděl Galileo. Historikům se nepodařilo najít žádný spis z této doby, který by se této problematice věnoval, ani jinou zmínku o tom, jak se tyto vědomosti šířily. Je sice možné, že řešení vymyslel Galileo sám, F.N. David ([2], str. 62) to ale považuje za nepravděpodobné, vzhledem k tomu, jak málo ho tato problematika zajímala.

Kombinatorické metody tedy již byly pochopeny a vymyšleny. Lidé už věděli, že počet způsobů, kterými lze hodu dosáhnout udává, jestli je hod snadný nebo složitý. Je ovšem nutné si uvědomit, že tyto postupy nebyly ani zdaleka veřejně rozšířeny a přístupné.

2.4 Tóra a Talmud

Talmud je nejen soubor židovských náboženských předpisů, ale obsahuje i výklad a diskuse týkající se písma svatého spolu s celým trestním a občanským právem. Přestože zde nenajdeme matematické vzorce, v celém textu se prolíná myšlenka, že se dá náhoda použít jako nestranný soudce ve všech oblastech života. Mezi obzvlášť oblíbené patřilo losování z urny. Používalo se nalezení práva v soudních sporech, v náboženských obřadech, k vyjádření Boží vůle nebo k dělení majetku a dědictví. Poslední případ má precedent v knize Jozue, kde se takto dělila území mezi izraelské kmeny.

Talmud obsahuje také vzorová řešení některých situací, které by rabíni mohli řešit. Tohle konkrétní je převzato z článku I. Saxla ([9], str. 101): „Ve městě je devět řeznictví s košer masem, jedno s masem nečistým. Na ulici je nalezen kus masa neznámého původu. Lze je považovat za košer podle „zákona většiny“, neboť je košer s pravděpodobností 9:1 (pravidlo říká, že oddělení je oddělení z většiny). Jiná situace však vznikne, když si někdo donese maso domů a nepamatuje se, zda je koupil v košer řeznictví pro sebe nebo v nečistém pro svého psa. Pravděpodobnost je pak 1:1, a maso je nutno považovat za nečisté.“ Vidíme jasný důkaz toho, že Židé porovnávali šanci události podle počtu případů, ve kterých se mohla stát. Ve srovnání s evropskými matematiky je to výrazný rozdíl, vezmeme-li v potaz, že babylonský talmud (mladší ze dvou verzí) byl dokončen v 6. století našeho letopočtu.

3 Úloha o rozdělení sázky

V 17. století existovaly dva ustálené druhy problémů, které bychom dnes řešili pomocí pravděpodobnosti. Prvním z nich byly klasické kombinatorické úlohy, tázající se „kolika způsoby může padnout jistý počet ok při házení dvěma, třemi a více kostkami?“ ([3], str. 9). Takovéto úlohy řeší studenti dodnes. Druhý typ problémů stojí za znovuobjevením zájmu o náhodu a s ní spjatou pravděpodobnost. Jedná se o modifikaci problému dnes známého jako úloha o rozdělení sázky, kterou najdeme už v italských rukopisech 15. století.

Úloha 3.1. (přesné znění je převzato z [3], str. 9). „Dva hráči hrají sérii her o nějakou částku C; tuto částku získá ten hráč, který jako první vyhraje k her (...). Pravděpodobnost výhry v každé jednotlivé hře je pro oba hráče stejná (oba hráči jsou „stejně dobří“). Série her je předčasně ukončena ve chvíli, kdy jednomu hráči chybí do výhry m her, druhému hráči chybí do výhry n her. Jak má být spravedlivě rozdělena částka C mezi hráče?“ Prvního hráče označíme A, druhého B.

Za autora této úlohy byl všeobecně považován františkánský mnich italského původu, Luca Pacioli (1447–1517). Objevila se totiž i s řešením v jeho široce známé, rozsáhle encyklopedii matematiky *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita.* Pomocí pozdějších objevů a následovného zkoumání ovšem historikové zjistili, že třebaže byl Pacioli za svého života dobrým učitelem, nebyl tak výborným matematikem, jak značí jeho věhlas. Velká část jeho prací byla totiž hrubě opsána z prací starších matematiků nebo Pacioliho méně známých současníků, mnohdy i s chybami.

Za zmínku stojí, že navzdory (nebo možná právě kvůli) svému nestoudnému plagiátorství, použil Pacioli svých dobrých vztahů s papežem a na několik svých děl získal, alespoň na čas, něco, co bychom v dnešní době nazvali autorským právem. Spor o morálnost jeho činů nechme stranou. Nepopiratelným faktem je, že díky jeho spisům došlo k propagaci mnoha děl a myšlenek, která by jinak byla zapomenuta i spolu se svými autory.

Navzdory chronologickému řazení této práce si ještě před uvedením jakýchkoliv snah o řešení, představíme několik pojmů potřebných k zavedení pojmu klasická pravděpodobnost v dnešním podání. Jak uvádí Marcinčín ([5], str. 5), pozdější úspěšní řešitelé tuto definici intuitivně tušili, ale první, kdo ji zformuloval byl francouzský matematik Pierre-Simon Laplace (1749–1827). Zveřejnil ji ve své práci *Essai philosophique sur les probabilités*, vydané v roce 1814.

Náhodný pokus značíme každou událost ovlivněnou náhodou. V návaznosti na hlavní téma této kapitoly můžeme uvést třeba hod kostkou nebo tahání losů. **Množinu všech možných výsledků** (někdy se jim říká také elementární jevy) náhodného pokusu značíme symbolem Ω. Použijeme-li analogii hodu kostkou, dostáváme $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. **Náhodným jevem** se pak rozumí libovolná množina elementárních jevů (možných výsledků). Za **jev jistý** považujeme celou množinu Ω, naopak prázdné množině elementárních jevů říkáme **jev nemožný**.

Vezmeme-li dva jevy A a B, které nemohou nastat zároveň (platí $A \cap B = \emptyset$), mluvíme o jevech, které se navzájem vylučují. U hodu jednou kostkou můžeme vzít A=padne číslo 1 a B= padne číslo 6.

Definice 3.1 (Klasická Laplaceova definice pravděpodobnosti)**.**
Mějme náhodný pokus splňující následující podmínky:

1. Možných výsledků (elementárních jevů) je konečný počet. Jejich množinu budeme značit Ω.
2. Všechny výsledky jsou stejně možné.
3. Výsledky se navzájem vylučují.

Pak pravděpodobností jevu A nazveme číslo

$$P(A) = \frac{\textit{počet příznivých výsledků}}{\textit{počet možných výsledků}}.$$

Z toho tedy plyne, že házíme-li dokonalou kostkou (tzn. kostkou, která nebyla upravená, aby některá ze stran padala častěji než ostatní), pravděpodobnost jednotlivých hodů je 1/6. Když předpokládáme stejnou pravděpodobnost každému výsledku, mluvíme o **rovnoměrném rozdělení**.

První zájemci o teorii pravděpodobnosti ale místo dnešního vyjádření ve zlomku využívali tzv. poměru šancí. Tyto dva tvary jsou spolu však úzce spjaty: máme-li pravděpodobnost p/q, poměr šancí vyjádříme jako $p : (q-p)$ a naopak z poměru šancí $a : b$ snadno dostaneme hodnotu pravděpodobnosti $a/(a+b)$.

Dále ještě uvedeme definici doplňkového jevu. Pascal jej zavedl a použil k řešení některých kombinatorických příkladů se kterými ho seznámil rytíř de Mére. O Pascalovi a rytíři de Mére bude řeč později.

Definice 3.2 (Doplňkový jev)**.**
Pro daný náhodný jev A nazveme jev $B = A^C = \Omega \setminus A$ (nenastává jev A) doplňkovým jevem.

Věta 3.1 (Pravděpodobnost doplňku náhodného jevu)**.**
Mějme náhodný jev A. Potom pravděpodobnost jeho doplňku je

$$P(A^C) = 1 - P(A).$$

3.1 Prvotní snahy o řešení

Jelikož zobecňování úloh a jejích řešení se dostalo do popředí až v 19. století, první matematici, kteří se snažili nalézt řešení, počítali zvlášť jednotlivé případy. V Pacioliho spise je tedy uveden příklad s konkrétními hodnotami v zadání.

Úloha 3.2. Dva hráči hrají na šest vítězných her ($k = 6$). Hráč A vyhrál 5 her ($m = 1$) a hráč B vyhrál 3 hry ($n = 3$). Předpokládáme, že oba hráči jsou stejně dobří. Za tohoto stavu se rozhodli ukončit hru a sázku si spravedlivě rozdělit. V jakém poměru mezi sebe oba hráči sázku C rozdělí?

Pacioli navrhoval rozdělit sázku v poměru vyhraných her, tedy 5 : 3. Toto řešení je ovšem nesprávné, na což v roce 1556 poukázal Ital Niccolo Fontana (1499–1557), přezdívaný Tartaglia. Argumentuje tím, že přerušíme-li hru za stavu 1 : 0, hráč A by dostal celou sázku, přestože šance na výhru jsou v oné chvíli podobné. Sám navrhl řešení založené na rozdílu počtu vyhraných her v poměru $(k + (a - b))\colon (k - (a - b))$ (viz [9], str. 104). Za použití tohoto řešení tedy získáváme poměr 8 : 4, po úpravě 2 : 1. I tento výsledek je ale špatný a některé zdroje[1] uvádí, že ani samotný autor si nebyl jistý přesností tohoto řešení.

Ke stejně špatnému výsledku se dostal Girolamo Cardano (1501–1576), přestože správně předpokládal, že „vyhraná sázka má být úměrná počtu způsobů, kterými lze vyhrát“ ([9], str. 104). Nejspíš už tedy tušil myšlenku, která umožní úspěšné řešení, tj. že na rozdělení sázky nemají vliv již odehrané hry, nýbrž záleží pouze na hrách, které by se teprve hrály. Tím tedy formuloval tzv. princip úměrnosti, který k řešení použili Pascal a Fermat. Dnes bychom ho formulovali jako o/l, kde o je počet příznivých výsledků a l je počet výsledků možných. Zde můžeme vidět již zmíněné intuitivní tušení definice klasické pravděpodobnosti, nikoliv ale snahu ji přesněji definovat.

Cardano zapsal své rozdělení (viz [1], str. 642) jako $[1+2+3++(k-b)] : [1+2+3++(k-a)]$, čímž získáme poměr 6 : 1. Cardano také jako jeden z prvních, klade důraz na to, aby měly všechny uvažované výsledky stejnou pravděpodobnost. V praxi to znamená, že je nutné do řešení započítat také všechny možné permutace.

Mezi další řešitele úlohy o rozdělení sázky se řadí také Giovanni Fracesco Peverone (1509–1559). Ten dospěl ke stejnému (a stejně chybnému) dělení sázky 2 : 12 (tj. 6 : 1). Jeho postup se však od toho Cardanova podstatně liší. Je založen na výpočtu částek, které odpovídají jednotlivým hrám, pokud by si hráči chtěli částky vyplácet průběžně.

Úloha 3.3. Hraje se na deset vítězných her. Hráč A vyhrál 7 her a B vyhrál 9. Kolik ze 14 mincí by si měl každý hráči vzít?

Při řešení úlohy $C = 14$, $k = 10$, $m = 3$ a $n = 1$, počítal sázku jednotlivých her, které by bylo nutné dohrát. Tvrdil, že chybí-li oběma hráčům jedna hra, sázka je 2 mince. Chybí-li hráči A dvě hry proti jedné hře hráče B, sázka je 6 mincí, protože by ve dvou po sobě jdoucích hrách mohl vyhrát 4 mince, ale také 2 mince prohrát a riziko se tedy dvojnásobí. Chybí-li hráči A k vítězství tři hry sázku tvoří 12 mincí, protože obtížnost a riziko se opět zdvojnásobí.

Britský matematik Maurice George Kendall ([2], str. 64) podotýká, že jelikož se Peverone neřídil vlastními pravidly (nebo přesně nechápal, teorii s jejíž pomocí se snažil příklad řešit), sečetl pro tři hry pouze sázky $4 + 8 = 12$ namísto správného řešení $2 + 4 + 8 = 14$. Idea jeho postupu byla přitom přesná.

3.2 Správná řešení a jejich autoři

Na přelomu 16. a 17. století se o úloze rozdělení sázky dozvěděli i francouzští matematikové a snaha o její řešení se přesunula tam. Prvními úspěšnými a široce známými řešiteli úlohy o rozdělení sázky jsou Blaise Pascal (1623–1662) a Pierre de Fermat (1601–1665). Pascala na tento problém (a několik dalších) v roce 1653 upozornil Antoine Gombaud de Méré, rytíř na dvoře Ludvíka XIV., mimo jiné to byl také vášnivý hazardní hráč. Pascala tento problém zaujal a jal se ho řešit. Z této doby (r. 1654) se dochovala část korespondence mezi ním a Fermatem, kde řešili některé speciální případy úlohy 3.1 (včetně Pacioliho). Vycházeli přitom z Cardanova předpokladu úměrnosti (výsledek závisí pouze na počtu her, které se ještě nedohrály).

Podle K. Mačáka ([3], str. 13) řešil Pascal v dopise z 29. VII. 1654 nejprve úlohu $C = 64$, $m = 1$, $n = 2$. Uvažoval, že první hráč získá polovinu banku, ať vyhraje nebo

[1] viz [1], [9]

prohraje první hru. Prohraje-li však první hru, bude oběma hráčům chybět po jedné hře, a tudíž budou mít stejné šance na výhru. Druhou polovinu banku si tedy hráči rozdělí na polovinu. Získáváme tak poměr 3 : 1 a pravděpodobnost, že vyhraje hráč A je rovna 3/4. Hráči A tedy náleží 48 mincí a hráči B 16.

Pomocí tohoto výsledku pak Pascal řeší úlohu $C = 64$, $m = 1$, $n = 3$. K výsledku se tedy dopracoval rekurzivní metodou. Jestliže hráč A vyhraje první hru (po přerušení), získává celou sázku. Prohraje-li, náleží mu 48 mincí (jak jsme vyřešili v případě o odstavec výše) a zbylých 16 mincí si hráči rozdělí na polovinu. Bank tedy rozdělíme na 56 : 8, tj. v poměru 7 : 1.

To ovšem není jediný způsob, kterým se Pascal dopracoval výsledku. 24. VIII. 1654 posílá Pascal Fermatovi dopis [3], ve kterém úlohu řeší pomocí vypsání všech stejně možných a stejně pravděpodobných pokračování hry. Pro náš příklad $m = 1$, $n = 3$ by vypadal výpis her takto (stejně jako ve [3] písmeno značí hráče, který danou hru vyhrál):

AAA AAB ABA BAA BBA BAB ABB BBB

Hry jsou vypsány ve trojici, abychom zachovali myšlenku, že všechny možnosti mají stejnou šanci (tj. jsou stejně pravděpodobné), přestože některé kombinace nejsou realisticky možné. Je viděl, že ze všech osmi výsledků existuje jediný, ve kterém získá hráč B celou sázku. Pomocí doplňkového jevu pak dopočítáme, že hráč A vyhraje v dalších sedmi případech. Opět dostáváme správný poměr 7 : 1. Je ovšem nutné podotknout, že Pascal považoval tento způsob řešení pro velké úlohy jako příliš pracný a náročný.

Pravděpodobností se zabýval dále a ten samý rok sepsal spis *Traité du triangle arithmétique*, ve kterém můžeme najít jeho úvahy nad řešením úloh a také obecné řešení. Shrnutí poznatků tohoto spisu přejímáme z [3], str. 12:

„I. Do dokončení celé série chybí nejvýše $m + n - 1$ her.

II. První hráč vyhraje celou sázku, jestliže druhý hráč vyhraje nejvýše $n - 1$ her.

III. Druhý hráč vyhraje celou sázku, jestliže první hráč vyhraje nejvýše $m - 1$ her.

IV. Z celkového počtu $m + n - 1$ her lze vyhrát (tj. vybrat) k her celkem $\binom{m+n-1}{k}$ způsoby.

V. Poměr šancí obou hráčů na výhru celé sázky tedy je

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{m+n-1}{i} : \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m+n-1}{j}$$

a ve stejném poměru musí být rozdělena i částka C mezi oba hráče.“

Použijeme-li tento vzorec k řešení úlohy 3.2 získáváme poměr

$$\left[\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2}\right] : \binom{3}{0} = 7 : 1$$

ve kterém pak opět rozdělíme sázku C.

V roce 1985 ale Laura Toti Rigatelli vyvrátila Pascalovo a Fermatovo prvenství. V Biblioteca Nazionale de Florence našla rukopis *Codice Magliabechiano CL.XI.120* neznámého autora, který byl datován kolem přelomu 14. a 15. století[2]. Francouzský matematik Norbert Meusnier autora nazval Ohri[3]. V tomto rukopisu našla řešení úlohy $k = 3$, $m = 1$, $n = 3$ shodné s tím Pascalovým a Fermatovým.

[2]M. Hykšová [1] uvádí, že je spis z konce 14. století a I. Saxl [10], že byl datován kolem roku 1420

[3]Object historique relativement incertain = Relativně nejistý historický objekt

Úloha 3.4. (převzato z [10], str. 6) „Dva muži hrají šachy a každý vsadí jeden dukát na toho, kdo první vyhraje tři hry. První muž pak vyhraje dvě hry za sebou. Ptám se: když hra nebude pokračovat dál, jakou část dukátu druhého muže ten první vyhrál?“

Řešení bylo stejně jako u Peveroneho založeno na myšlence průběžného placení jednotlivých her. Hned na začátku je nutné si uvědomit, že během každé hry získají hráči jinou částku. Na to mimo jiné upozorňuje ve svých rozborech i Pascal. Předvedeme řešení pro tento konkrétní případ. Před začátkem hry je situace obou hráčů totožná a sázka bude rozdělena v poměru 1 : 1. Po prvním kole se poměr změní na

$$\left[\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}\right]:\left[\binom{4}{0}+\binom{4}{0}\right]=11:5$$

což znamená, že v první hře získal vítězný hráč od svého soupeře 3/8 dukátu. Ve druhé hře by obecně mohl první hráč vyhrát, ale také prohrát a poměr by se vrátil na 1 : 1. Z toho plyne, že prohra (i výhra) ve druhé hře stojí stejnou částku, jako ve hře první, tj. 3/8 dukátu. Dostali jsme se na zadanou úlohu $m = 1$, $n = 3$ a z předchozích řešení víme, že bank rozdělíme v poměru 7 : 1. Stačí už jen sečíst výhry, které získal první hráč ve dvou již odehraných kolech $\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$. Odpověď na úlohu 3.4 tedy zní: První muž získal 3/4 dukátu druhého muže.

3.3 Úloha o rozdělení sázky řešená dnes

3.3.1 Vypsání řešení

Existují dva způsoby, kterými lze vypsat všechna řešení úlohy 3.2. První případ, kdy jsou všechny kombinace stejně pravděpodobné, předvedl Pascal ve své korespondenci s Fermatem. V druhém případě vypíšeme pouze výsledky her, které se skutečně mohly odehrát a určíme pravděpodobnosti každé z nich. K tomu je nejprve nutné zavést několik pojmů, které výpočet umožní.

Definice 3.3 (Nezávislé jevy)**.**
Jevy A, B se nazývají **nezávislé**, jestliže $P(A\cap B)=P(A)P(B)$. Nechť $C=\{B_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ je nějaká množina jevů. Jevy této množiny se nazývají **nezávislé**, jestliže pro každé n přirozené a každou podmnožinu $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}\subseteq\Lambda$ platí

$$P(\bigcap_{i=1}^{n}B_{\lambda_i}=P(B_{\lambda_1})P(B_{\lambda_2})\cdots P(B_{\lambda_N}).$$

Pro případy, kdy se pravděpodobnost jednotlivých elementárních jevů liší je nutné zavést rozšířenou definici Laplaceovy pravděpodobnosti.

Definice 3.4 (Rozšířená Laplaceova definice pravděpodobnosti)**.**
Uvažujeme náhodný pokus, nechť Ω je množina možných výsledků. Pokud
1. možných výsledků je nejvýše spočetně, tj. Ω je buďto konečná, nebo spočetně nekonečná,
2. pro každý možný výsledek je $P(\omega)\geq 0$ a platí

$$\sum_{\omega\in\Omega}P(\omega)=1,$$

3. žádné dva elementární jevy nenastávají zároveň

a platí

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega),$$

pak řekneme, že P(A) je **pravděpodobnost jevu** A.

Jako poslední zbývá upřesnit, jak pracovat s několika náhodnými jevy[4].

Věta 3.2 (Pravděpodobnost sjednocení dvou jevů)**.**
Mějme jevy A a B, které se navzájem vylučují. Potom pravděpodobnost jejích sjednocení je součet jejich pravděpodobností, tedy

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Vypíšeme tabulku možností, které mohou nastat:

A	$p_1 = \frac{1}{2}$	BA	$p_2 = \frac{1}{4}$
BBA	$p_3 = \frac{1}{8}$	BBA	$p_2 = \frac{1}{8}$

Abychom získali pravděpodobnost, se kterou hráč A vyhraje celý bank, stačí už pouze pomocí věty 3.2 sečíst pravděpodobnosti všech příznivých sérií, tj. $p_1 + p_2 + p_3 = \frac{7}{8}$. Stejně jako v Pascalově podání existuje pouze jediná série her, ve které sázku získá hráč B. Bank tedy rozdělíme v poměru 7 : 1.

K obecnému řešení úlohy 3.1 se dostaneme následující myšlenkou: Aby hráč A získal celou sázku, musí vyhrát m her, které mu chybí a hráč B může vyhrát maximálně i her, přičemž pro platí $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Pořadí těchto her může být jakékoliv, ale poslední hru musí vyhrát hráč A. Pravděpodobnost, že vyhraje hráč A je vždy $\frac{1}{2}$. Počet kombinací her $m+i-1$ zjistíme pomocí $\binom{m+i-1}{m-1}$. Obecné řešení je tedy postaveno na větě 3.2 o sčítání pravděpodobností. Vzorec pro jeho výpočet tedy vypadá

$$\binom{m-1}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{m} + \binom{m}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} + \binom{m+1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+2} + \cdots + \binom{m+n-2}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+n-1} =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{m+i-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+i} = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{m+i-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+i}.$$

Pravděpodobnost, že vyhraje hráč B dopočítáme pomocí doplňkového jevu.

3.3.2 Pascalův trojúhelník

Další způsob řešení je s pomocí Pascalova trojúhelníku. Ten vytvoříme tím, že si na vrchol stránky napíšeme číslo jedna (generátor). Každý další řádek je o jedno číslo delší. Čísla samotná získáme tak, že sečteme dvě čísla, která jsou přímo nad pozicí čísla hledaného. V dnešní době zapisujeme tento pravoúhlý trojúhelník s vodorovnou přeponou. Pascal samotný popisoval trojúhelník s jednou přeponou vertikální a druhou horizontální. Také uváděl, že se dá použít jakýkoliv generátor (počáteční prvek), trojúhelník tedy nebyl určen

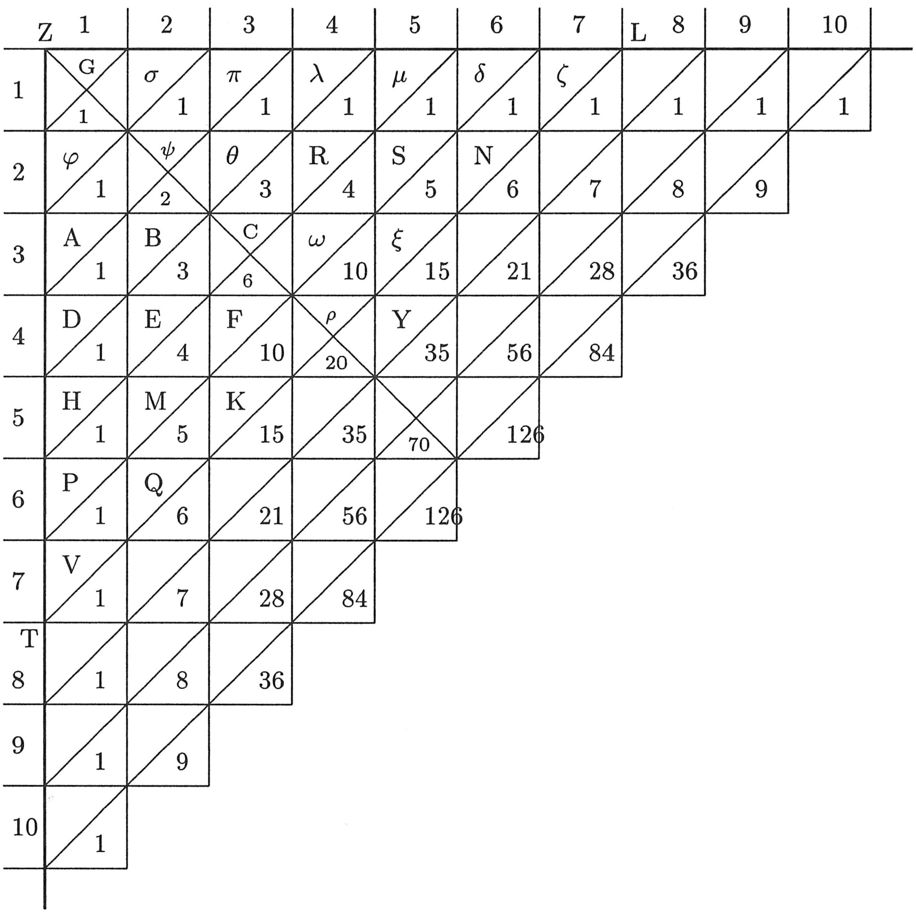
[4] Tato věta platí i pro libovolné množství jevů. Důkazy obou těchto vět viz [5], str. 13.

jednoznačně. Dnes můžeme pomocí jednoduchého vytýkání potvrdit, že volba generátoru na správnost výsledku nemá vliv.

K dokončení hry chybí hráčům odehrát maximálně $m+n-1$ her. V Pascalově trojúhelníku tedy najdeme řádek s $m+n$ prvky. Součet prvních m prvků nám dá počet možností, které jsou příznivé pro hráče A. Součtem prvních (nebo posledních) n prvků získáme počet jevů, které přejí hráči B.

Abychom získali obecné řešení a nemuseli pro každý případ sestavovat Pascalův trojúhelník, potřebujeme si Pascalův trojúhelník zapsat pomocí kombinačních čísel. Opět sečteme prvních n kombinačních čísel a tím získáme počet příznivých výsledků. Ten vydělíme počtem všech možných výsledků. To ale neznamená, že musíme sčítat celou kombinační řadu. Místo toho použijeme vzorec 2^{m+n-1}. Obecné řešení je tedy postaveno na definici 3.1 klasické pravděpodobnosti a získáváme je ve tvaru

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{m+n}{i} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{m+n-1}$$



Obrázek 3.1: Pascalův nákres binomického trojúhelníku [3].

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Obrázek 3.2: Dnešní podoba Pascalova trojúhelníku [10].

4 První spisy pojednávající o pravděpodobnosti

4.1 De Ratiociniis in Ludo Aleae

Christiaan Huygens (1629–1695) byl Nizozemský fyzik, matematik a astronom, mezi jehož úspěchy patří například i sestrojení prvních kyvadlových hodin. O Huygensově životě a úspěších bychom mohli říci mnoho. Pro mapování vývoje počtu pravděpodobnosti nás zajímá, že v r. 1655 přijel do Paříže, aby získal svůj doktorát práv. Zajímal se ale i o matematiku a přírodní vědy, a při této cestě se setkal s francouzskými matematiky od kterých se dozvěděl o problémech, které řešili Pascala a Fermat. Ona problematika ho natolik zaujala, že po návratu domů sám začal holandsky psát pojednání *De Ratiociniis in Ludo Aleae*[1]. To vyšlo v r. 1657 přeloženo do latiny jako příloha spisu Huygensova učitele[2].

Podstatnou změnou bylo, že na rozdíl od Pacioliho, který svou encyklopedii psal i jako učebnici, francouzští matematikové většinou sdíleli s širokou veřejností pouze své výsledky, nikoliv postupy a návody řešení. Huygens tedy musel na teorii pravděpodobnosti a řešení přijít sám a s francouzskými matematiky v dopisech pouze porovnával výsledky.

Huygensův spis je celkem krátký a tematicky je rozdělen do tří částí. V první části dochází Huygens od formulace očekávané částky k předpokládané výhře. Dnes bychom řekli, že z výpočtu aritmetického průměru odvodil vzorec pro výpočet střední hodnoty diskrétní náhodné veličiny[3]. Pro přiblížení uvedeme dnešní definice těchto pojmů.

Definice 4.1 (Náhodná veličina).
Náhodnou veličinou budeme nazývat funkci X, která jednotlivým výsledkům náhodného pokusu přiřadí nějaké reálné číslo.

Jako náhodnou veličinu můžeme brát například výsledek hodu mincí, počet stromů rostoucích pod oknem nebo třeba délku života, o které budeme mluvit v další kapitole.

Huygens stále ještě předpokládá, že elementárních jevů existuje pouze konečný počet. Při hodu kostkou může padnout šest čísel, mince má dvě strany apod. Takovou náhodnou veličinu pak nazýváme diskrétní.

Definice 4.2 (Diskrétní náhodné veličiny).
Diskrétní náhodná veličina má nejvýše spočetně stavů, tedy nabývá nejvýše spočetně hodnot z nějaké množiny I.

Mějme náhodný pokus s množinou stavů Ω a diskrétní náhodnou veličinu X, $X(\omega) = i$ pro $\omega \in \Omega$ a $i \in I$. Pro jednotlivé pravděpodobnosti $P(X = i) = P(\omega \in \Omega\colon X(\omega) = i)$ budeme používat zkrácený zápis $P(X = i) = p(i)$ pro $i \in I$.

Huygens ve svém spisu formuluje a dokazuje následující myšlenku

Propositio I. (Tvrzení 1., přejato z Mačákova překladu [3]) „Jestliže očekávám částku a nebo b, které získám stejně snadno, pak má mé očekávání hodnotu

[1] Překlad s komentáři naleznete v [3], str. 41–65

[2] Francius (někdy Frans) van Schooten (1615–1660): *Exercitationum mathematicarum libri quinque*, vydán r. 1657

[3] Definice náhodné veličiny je uvedena pouze velmi zjednodušeně. Současná verze (zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$) je založena na teorii množin, která byla do počtu pravděpodobnosti zavedena až ve 20. století.

$$\frac{a+b}{2}.\text{“}$$

Tento proces pak opakuje i pro tři částky a, b, c. Co nás z hlediska vývoje pravděpodobnosti zajímá nejvíce je tvrzení třetí, výpočet předpokládané výhry.

Propositio III. (Tvrzení III.) „Je-li počet případů, v nichž obdržím částku a, roven p, a počet případů, v nichž obdržím částku b, roven q, a předpokládám-li, že všechny případy se mohou vyskytnout stejně snadno, pak mé očekávání bude mít hodnotu

$$\frac{pa+qb}{p+q}.\text{“}$$

Tomuto pojmu dnes říkáme střední hodnota náhodné veličiny, přestože její definice je poněkud zobecněna. Dá se také chápat jako průměrná hodnota výsledků náhodného pokusu při vysokém počtu opakování.

Definice 4.3 (Střední hodnota pro diskrétní náhodné veličiny)**.**

Střední hodnotou diskrétní náhodné veličiny X s oborem hodnot I rozumíme číslo

$$EX = \sum_{i\in I} iP(X=i) = \sum_{i\in I} ip(i)$$

Huygensovo tvrzení sice předpokládá, že všechny jevy mají stejnou pravděpodobnost. Dá se ovšem použít i v případě, kdy tomu tak není. K tomu nás vede i rozdělení vzniklé pozorováním opakovaného hodu mincí. Alternativní rozdělení náhodné veličiny používáme ve chvíli, kdy se zabýváme pouze dvěma výsledky náhodného pokusu. Jak nám připomíná podobnost s výpočtem váženého průměru, jevy nemusí mít stejnou pravděpodobnost. Toto zjištění pak vedlo ke vzniku rozšířené Laplaceovy definice pravděpodobnosti (definice 3.4).

Jelikož v této práci budeme uvádět i jiná rozdělení náhodné veličiny, bylo by vhodné si pro úplnost říct, co to rozdělení vůbec je.

Definice 4.4 (Rozdělení náhodné veličiny)**.**

Pro náhodnou veličinu X definujeme následující **indukovanou pravděpodobnost (rozložení náhodné veličiny)** na podmnožinách reálných čísel:

$$P_X(A) = P(\omega\colon X(\omega)\in A) = P(X^{-1}(A)), A \subset \mathbb{R}.$$

Pravděpodobnost množiny A je tedy původní pravděpodobností jejího vzoru.

Distribuční funkcí náhodné veličiny X pak myslíme funkci

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]).$$

V druhé části spisu se Huygens snaží vymyslet obecný postup řešení úlohy o rozložení sázky. Tomuto tématu se věnovala Kapitola 3, proto ho tu pouze ve zkratce shrneme. Stejně jako Pascal začíná řešením hry $m = 1$, $n = 2$ a k řešení dalších případů používá rekurzivní metodu. Při výpočtech nehledá kombinatorická řešení, ale používá tvrzení zavedena v první části jeho spisu.

Třetí část pak obsahuje úlohy s kostkami typu „kolikrát musím hodit jednou (dvěma) kostkami, aby padla alespoň jedna šestka (alespoň dvě šestky)“, které řešili už Pascal s Fermatem. K nim se vrátíme později. Na závěr vložil Huygens pět úloh, o jejichž řešení se měl případně pokusit čtenář. U tří z nich uvedl i řešení.

4.2 Ars Conjectandi

Jak už to bývá, ani v této oblasti matematiky nemůže chybět přítomnost rodiny Bernoulliů. Jejich nejspíš nejdůležitějším přínosem je rozsáhlý spis Jacoba Bernoulliho (1654–1705), *Ars Conjectandi*, který jako první obsahuje pojem „pravděpodobnost“. V roce 1713 jej vydal Jacobův synovec Niclaus. Spis je rozdělený do čtyř částí, přičemž poslední zůstala nedokončená.

V první části spisu najdeme celý text Huygensova *De Ratiociniis in Ludo Aleae* s Bernoulliho rozsáhlými poznámkami, komentáři a doplňky. Uvedeme si několik úloh z třetí části Huygensova spisu a porovnáme jejich řešení.

Úloha 4.1. (Propositio X.) Kolikrát musíme hodit jednou kostkou, aby nám padla alespoň jedna šestka?

Huygens si vsazenou částku označil a (my ji budeme značit c), a úlohu řešil tím, že postupně počítal poměry šancí pro jeden až šest hodů. Šance, že šestka padne v prvním hodu získáme snadno $1 : 5$. U dvou hodů uvažoval, že padne-li šestka v prvním hodu, dostane celou částku c. Padne-li naopak v prvním hodu jiné číslo, druhý hod má podle předchozího výpočtu hodnotu $\frac{1}{6}c$. Existuje tedy jeden případ, kdy získá částku c a pět případů, kdy získá $\frac{1}{6}c$. Pak použil Propositio III. a získal

$$\frac{1 \cdot c + 5 \cdot \frac{1}{6}c}{1+6} = \frac{11}{36}.$$

Takto pokračoval až k šesti hodům. Stejnou řadu výpočtů provedl i pro součet 12 při hodu dvěma kostkami.

Úloha 4.2. (Propositio XII.) Kolika kostkami musím hodit, aby byla pravděpodobnost, že padnou dvě šestky větší než 1/2?

Huygens hned na začátku podotýká, že bychom mohli uvažovat i několik hodů jednou kostkou. Nejdřív počítá pravděpodobnost při dvou hodech a získává $\frac{1}{36}$. Potom pokračuje výpočtem pro tři hody a stejným postupem jako v úloze 4.1 se dostává k pravděpodobnosti $\frac{16}{216} = \frac{2}{27}$. Těmito výpočty nakonec dojde k závěru, že je potřeba hodit desetkrát (nebo deseti kostkami) a by byla pravděpodobnost vyšší než jedna polovina.

Tento postup přišel Bernoullimu pro zdlouhavý a náročný. Hledal proto obecnější způsob, jak dojít k řešení. Zavedl tak binomický zákon rozdělení pravděpodobnosti. Předpokládáme jev A (padne šestka) se stále stejnou pravděpodobností $p = \frac{1}{6}$ a n nezávislých pokusů (kolikrát musíme hodit kostkou). Doplňkovou pravděpodobnost označíme $q = 1 - p$. Pomocí vzorce

$$p(k) = p(k, n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

binomické rozdělení popisuje, s jakou pravděpodobností nastane jev A právě k-krát.

Bernoulli pak řeší Huygensovu úlohu pomocí doplňkové pravděpodobnosti (padne maximálně jedna šestka) rovnicí

$$\begin{aligned} p(0)+p(1) &< \tfrac{1}{2} \\ \binom{n}{0}\left(\tfrac{1}{6}\right)^0\left(\tfrac{5}{6}\right)^n+\binom{n}{1}\left(\tfrac{1}{6}\right)^1\left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1} &< \tfrac{1}{2} \\ \left(\tfrac{5}{6}\right)^n\left(1+\tfrac{n}{5}\right) &< \tfrac{1}{2} \\ 10+2n &> 5\left(\tfrac{6}{5}\right)^n. \end{aligned}$$

Tuto nerovnici pak Bernoulli řešil graficky i postupným dosazováním.

Druhá část spisu *Ars Conjectandi* se dá chápat jako učebnice kombinatoriky, čímž Bernoulli podle K. Mačáka ([3], str. 19) završil období jejího rozvoje. Třetí část má pak formát sbírky příkladů na procvičení. To usuzujeme z poznámek, kterými autor upozorňuje na některé často dělané chyby v logickém uvažování, které by znemožnili dosáhnout správného řešení (např. všechny jevy musí mít stejnou pravděpodobnost). K. Mačák také poukazuje na fakt, že Bernoulli v tomto spise mezi svými předchůdci uvádí např. van Schootena nebo Leibnize, v jehož práci se aritmetický trojúhelník objevuje nezávisle na Pascalovi. Pascala ale nikoliv. Předpokládá se tedy, že o Pascalovu práci o aritmetickém trojúhelníku nevěděl.

Nejdůležitější je ale poslední čtvrtá část, ve které Bernoulli zveřejnil svou formulaci a důkaz zákona velkých čísel. Překlad odvození, formulace a důkazu Bernoulliho věty najdeme v [3] na str. 83-91. My zde uvedeme pouze znění této věty. Bernoulli o ní mluvil jako o Zlaté větě. Označení Zákon velkých čísel vymyslel až Denis Poisson.

Věta 4.1 (Bernoulliho Zákon velkých čísel, K. Mačák [3], str. 89).

Nechť je tedy počet případů příznivých ku počtu případů nepříznivých v poměru $\frac{s}{r}$, tedy ku počtu všech případů v poměru $\frac{s}{r+s}$, čili $\frac{s}{t}$, kterýžto poměr ohraničují meze $\frac{s+1}{t}$ & $\frac{s-1}{t}$. Má být dokázáno, že je možné učinit tolik pokusů, aby vyšlo libovolněkrát pravděpodobněji (kupříkladu c-krát, kde c je dáno), že počet příznivých pozorování padne mezi tyto hranice než mimo ně, tj. počet pozorování příznivých ku počtu všech pozorování nebude v poměru ani větším než $\frac{s+1}{t}$, ani menším než $\frac{s-1}{t}$.

K. Mačák ([3], str. 90) tuto větu převádí do dnešní podoby takto

Věta 4.2 (Zákon velkých čísel).

Nechť M je počet výskytů jevu A v sérii n nezávislých pokusů, z nichž v každém může jev A nastat s pravděpodobností $p = \frac{s}{t}$. Pak pro jakékoliv $c >0$ lze najít N_c takové, že pro všechna $n > N_c$ platí

$$P\left(\frac{s-1}{t} \leq \frac{M}{n} \leq \frac{s+1}{t}\right) > c\left[P\left(\frac{M}{n} < \frac{s-1}{t}\right) + P\left(\frac{M}{n} > \frac{s+1}{t}\right)\right].$$

Toto tvrzení je pak možné převést do tvaru

$$P\left(\left|\frac{M}{n} - p\right| \leq \frac{1}{t}\right) > \frac{c}{c+1}.$$

Jedná se o verzi slabého[4] zákona velkých čísel (pravděpodobnost konverguje). Bernoulliho zákon aplikovaný na hod kostkou tedy říká, že s rostoucím počtem pokusů n, se poměr k/n, kde k je počet hodů, při kterých padlo námi zvolené číslo, blíží reálné pravděpodobnosti 1/6.

[4]Existuje i Silný zákon velkých čísel (konverguje skoro jistě), který formuloval Kolmogorov

Podle K. Mačáka ([3], str. 91) chtěl ale Bernoulli pokračovat dál, až k tomu, čemu dnes říkáme matematická statistika. Ve čtvrté části spisu můžeme totiž najít následující příklad: „V urně je umístěno 3000 bílých a 2000 černých kamenů. Experimentátor tyto údaje nezná a chce tento poměr stanovit na základě pokusu. Postupně bude po jednom vytahovat z urny kameny a sledovat, jak často vytáhne bílý a jak často černý. Každý vytažený kámen vrátí do urny dřív, než vytáhne další.“

5 Jiné pohledy na pravděpodobnost

5.1 Statistická definice

Teď se vrátíme v čase o kousek zpátky. Zatímco se v Evropě zájem o pravděpodobnost přesouvá z Itálie do Francie a dál, v Anglii vládla měřitelná fakta. Rozsáhlá sčítání obyvatel a majetku zavedl už Vilém Dobyvatel v 11. století. V první polovině 15. století se k nim přidaly ještě tzv. soupisy mrtvých. Každá farnost si měla podle zákona vést pečlivé záznamy o všech křtech, svatbách a pohřbech. Ty postupem času získávaly renomé až vycházely soupisy nejen roční, ale i týdenní. Ukázka roční soupis narození a úmrtí obyvatel za rok 1665 viz [2], str. 101.

Věk	0	6	16	26	36	46	56	66	76	86
Počet žijících	100	64	40	25	16	10	6	3	1	0

Tabulka 5.1: Grauntovy odhady počtu žijících lidí [5]

První, kdo začal pracovat se všemi těmito údaji, byl anglický statistik John Graunt (1620–1674). Jeho kniha *Natural and Political Observations on the Bills of Mortality*[1], vydaná v roce 1662, vzbudila velký zájem i mnoho kontroverzí. Zabýval se v ní vymíráním populace podle věkových skupin a obsahovala tabulky úmrtnosti, ve kterých byly vypsané Grauntovy odhady. Na to, abychom získali správné výsledky nebyly údaje ani zdaleka přesné. Pro vzbuzení zájmu o toto téma mezi dalšími ale bohatě stačily. Vznikl tak nový pohled na pravděpodobnost.

Definice 5.1 (Statistická definice pravděpodobnosti)**.**
Mějme náhodný pokus, který můžeme opakovat za stejných podmínek stále dokola. Relativní četností jevu A nazveme poměr úspěšných výsledků pokusu v daném počtu opakování, tedy

$$p_n(A) = \frac{m}{n},$$

kde n je počet opakování pokusu a m počet příznivých výsledků.

Pravděpodobností jevu A pak nazveme limitu těchto relativních četností, tedy

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} p_n(A).$$

M. Marcinčín ([5], str. 30) o limitě v tomto vzorci uvádí „Již v sedmnáctém století však matematici tušili, že čím početnější data z minulosti mají, tím přesnější budou jimi odvozené pravděpodobnosti.“ Tyto dva pohledy na pravděpodobnost (klasický a statistický) existovali odděleně a propojil je až Bernoulliho zákon velkých čísel.

Demografické tabulky Johna Graunta studoval také bratr Christiaana Huygense, Lodewijk Huygens (1631–1699). Podle nich pak rozvíjel další vlastnosti náhodné veličiny. Ta v té době ještě nebyla definovaná a pouze se tušila její existence. Jeho přínosem jsou například medián nebo jeho vlastní charakteristika náhodné veličiny.

L. Huygens podle Marcinčína ([5], str. 36) předpokládal, že pokud jsou úmrtí přes jednotlivé intervaly rozložena rovnoměrně, celý tento interval se dá nahradit jeho středem.

[1] Přírodovědná a politická pozorování učiněná nad přehledy úmrtnosti [6]

Hodnotě, kterou vypočítal dnes říkáme střední délka života. Své výsledky zapisoval do tabulek, ze kterých pak čerpali další statistici. Při zmenšování intervalů pro tyto výpočty si také uvědomil, že náhodná veličina nemusí být pouze diskrétní, a tak ve své práci jako první proložil data získaná z Grauntových tabulek spojitou funkcí.

Definice 5.2 (Hustota).

Distribuční funkce F se nazývá absolutně spojitá, existuje-li nezáporná borelovsky měřitelná funkce f taková, že

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Funkce f se nazývá **hustota pravděpodobnosti**.

Definice 5.3 (Spojitá náhodná veličina).

Má-li náhodná veličina X absolutně spojitou distribuční funkci, říkáme, že má absolutně spojité rozdělení nebo že X je **absolutně spojitá náhodná veličina**.

Spojitá veličina ale nesplňuje podmínky klasické, ani statistické pravděpodobnosti. Přesto na ni následně navázal Bayes a dále se zabýval spojitým rozdělením. O něm ale bude řeč až později.

Pro úplnost doplníme ještě definici střední hodnoty spojité veličiny.

Definice 5.4 (Střední hodnota pro spojité náhodné veličiny).

Střední hodnotou spojité náhodné veličiny X s hustotou f_X rozumíme číslo

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx.$$

5.2 Geometrická definice

Existuje ještě třetí způsob, jak definovat pravděpodobnost, a to pomocí geometrie. Jednotlivé jevy pak představíme jako geometrické obrazce a jejich rozměrům pak říkáme pravděpodobnost. Zde je definice pro rovinný obrazec, ta se ale dá snadno upravit pro libovolný počet rozměrů.

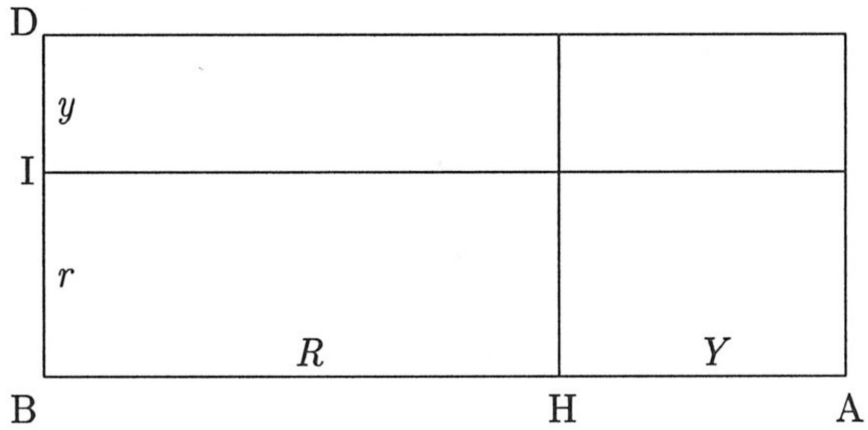
Definice 5.5 (Geometrická definice pravděpodobnosti).

Mějme rovinný obrazec s obsahem S, který představuje celý pravděpodobnostní prostor. Pravděpodobnost, že nastane jev reprezentovaný částí obrazce s obsahem T pak určíme jako T/S.

Podle K. Mačáka ([3], str. 20) jako první použil tuto definici známý anglický astronom Edmund Halley (1656–1742) ve svém článku *An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, drawn from curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw*[2]*; with an Attempt to ascertain the Price of Annuities upon Lives.* Zabýval se v něm problémem doživotních důchodů, a právě kvůli nim zkoumal i tabulky úmrtnosti.

[2]Dnes polská Vratislav

Úloha 5.1 (Překlad úlohy přebrán z [3], str. 20)**.** „Z úmrtnostních tabulek je známo, kolik lidí z 1000 narozených se dožije věku 1, 2, 3, ... let. Uvažujeme dva lidi, jednoho ve věku v_1, druhého ve věku v_2, $v_1 < v_2$, a ptejme se, jaká je pravděpodobnost, že za k let budou žít oba (resp. bude žít jen mladší, bude žít jen starší, nebude žít ani jeden). Z úmrtnostních tabulek víme, že ve věku v_1 žije N lidí, ve věku v_1+k žije R lidí; označíme $Y = N - R$. Pro v_2 mají analogický význam čísla n, r, y. Vynásobením rovnic $N = R+Y$, $n = r+y$ dostaneme rovnici $Nn = Rr+Yr+Ry+Yy$, kde každý sčítanec je roven počtu všech možných dvojic s některou shora uvedenou vlastností (např. Yr je počet všech dvojic, v nichž starší přežije mladšího). Dělíme-li tuto rovnici číslem Nn, dostaneme hledané pravděpodobnosti. Halley tyto úvahy ilustruje obrázkem 5.1, kde $|BA| = N$, $|BD| = n$, $|BH| = R$, $|BI| = r$, $|HA| = Y$, $|ID| = y$; poměr obsahů příslušných „malých“ pravoúhelníků k obsahu celého obdélníku udává hledané pravděpodobnosti.“



Obrázek 5.1: Halleyův nákres geometrické pravděpodobnosti [3].

Příklad, který dnes používáme nejčastěji je střelba na terč.

6 Objevy osmnáctého a devatenáctého století

6.1 Abraham de Moivre

O životě Abrahama de Moivreho (1667–1754) by se toho dalo říct opravdu mnoho. Narodil se ve Francii do protestantské rodiny a v jedenácti letech začal studovat na vysoké škole. V roce 1685 byl ve Francii ale zrušen edikt nantský a de Moivre byl na dva roky uvězněn. Po tom, co byl propuštěn okamžitě opustil Francii a nikdy se nevrátil. V Anglii se pak pokoušel uživit vyučováním matematiky. Hnán snahou zaopatřit se získal členství v britské Royal Society[1] a vydal několik matematických děl.

Nejrozsáhlejším z nich byla jeho kniha *Doctrine of Chances* poprvé vydaná r. 1718. Byla psaná formátem učebnice, tj. nejprve byly vysvětleny základy, na kterých se následně stavělo doplněno příklady, a v průběhu let měla i druhé (1738) a třetí (1756) upravené vydání. De Moivre tak pokračoval v práci Christiaana Huygense a Jacoba Bernoulliho a na jejichž myšlenky aplikoval nové postupy a teorie, které v té době vznikaly. Zavedl například součet dvou pravděpodobností, které se navzájem nevylučují.

Věta 6.1 (Princip inkluze a exkluze pro dva jevy)**.**
Mějme libovolné náhodné jevy A a B. Potom platí

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Důkaz viz [5], str. 64.

Při zkoumání binomického rozdělení náhodné veličiny objevil de Moivre rozdělení normální. K němu došel tak, že u binomického rozdělená určil konstantní hodnotu relativní četnosti $x = r/N$, kde N je počet pokusů. Funkci $f(x)$ definujeme jako limitu pravděpodobností $p(r, N, p)$, pro $N \to \infty$.

Na tomto rozložení jsou založena další rozdělení a řada testů (např. Studentův t-test). De Moivre dále jako první uvádí charakteristiku rozptylu náhodné veličiny.

Definice 6.1 (Rozptyl spojité náhodné veličiny)**.**
Spojitá náhodná veličina X s hustotou f_X má rozptyl

$$varX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - (EX)^2.$$

Ten udává druhou mocninu vzdálenosti jednotlivých pozorování od střední hodnoty EX (definice 4.3). Na tomto de Moivreho poznatku je pak založena Laplaceova centrální limitní věta.

6.2 Pierre-Simon Laplace

Pierre-Simon Laplace (1749–1827) francouzský matematik, který se za svůj život přispěl novými poznatky do mnoha vědních oblastí, od astronomie až po první náznaky metody

[1] M. Mareš ([6], str. 188) ji překládá jako Královská společnost

nejmenších čtverců. Ani jeho přínos do teorie pravděpodobnosti se nedá zanedbat. Po téměř tří stech letech zkoumání jako první zformuloval klasickou definici pravděpodobnosti a její rozšířenou verzi (definice 3.1 a 3.4).

Jeho největším přínosem do oblasti pravděpodobnosti a statistiky byla ale centrální limitní věta. Ta podle M. Marcinčína ([5], str. 62) říká, že při dostatečně velkém počtu opakování, se „rozložení průměrů výsledků blíží normálnímu rozdělení“. Laplace ji formuloval v práci z roku 1810.

Věta 6.2 (Laplaceova Centrální limitní věta)**.**
Mějme nezávislé stejně rozdělené diskrétní veličiny X_i, které mohou nabývat hodnost $-m,-m+1,\dots,m-1,m$ s pravděpodobností $p(-m),\dots,p(m)$, $\sum_{i=-m}^{m} p(i) = 1$ a se střední hodnotou μ_X. Potom rozložení průměru $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ se blíží normálnímu rozdělení se střední hodnotou μ_X a rozptylem rovným σ^2/n, kde σ^2 je rozptyl náhodných veličin X_i.

Laplace svou větu dokazuje pomocí metody vytvořujících funkcí náhodné veličiny, kterou sám vynalezl. Mezi matematiky, kteří tuto větu upravovali a vylepšovali její důkaz patří Siméon Denis Poisson nebo Augustin Louis Cauchy. M. Marcinčín ([5], str. 62) říká, že i přes to měla formulace centrální limitní věty stále své nedostatky. Hlavně nebyly stanoveny podmínky, za kterých konvergence k normálnímu rozdělení platila.

Dalšími vlnou matematiků, kteří se pokoušejí o odstranění nedostatků centrální limitní věty byli Andrei Markov (1854–1922), Aleksandr Michajlovič Ljapunov (1857–1918) a Pafnutij Lvovič Čebyšev[2] (1821–1894). Ti nakonec formulují důkaz a zavádí dostačující podmínky pro konvergenci. Následovné zobecňování pak přebrali další[3].

[2]Spolu s Viktorem Jakovlevičem Bunjakovskim (1804–1889) v 19. století patřili k Petrohradské matematické škole.

[3]Další informace např. viz M. Marcinčín (2004) *Tři důkazy centrální limitní věty.*

7 Thomas Bayes

Thomas Bayes (1702–1761) se narodil do anglické puritánské rodiny v době, která měla k náboženské snášenlivosti opravdu hodně daleko. Přes to se rozhodl stát se duchovním, a tak na univerzitě v Edinburghu vystudoval teologii a logiku, které úspěšně dokončil. Nebylo ale volné místo, na které by mohl nastoupit, a tak se zapsal k dalšímu studiu, tentokrát matematiky. Ta se mu zalíbila natolik, že ve svém volném čase psal matematické práce i po tom, co mu byla přiřazena jeho vlastní fara nedaleko Londýna.

Za svého života vydal pouze dvě kázání a dopis adresovaný Georgi Berkleymu, ve kterém obhajuje základy diferenciálního počtu, a především Newtonovy fluxe (dnes diference a diferenciály). Ten ale stačil na to, aby byl zvolen členem Royal Society. Podle M. Mareše ([6], str. 187) „Měl [Bayes] výhodu v důkladném logickém a filozofickém vzdělání a díky tomu si uměl klást nezvyklé otázky a dívat se na problémy z nečekaných stran.“ Bayesovy práce pak po jeho smrti vydal Bayesův přítel Richard Price.

Tři roky po Bayesově smrti zveřejnil Price ve sborníku Royal Society *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances*, ve které navrhl myšlenku, že pokud o pozorované náhodné veličině nic nevíme, všechny zaznamenané výsledky jsou stejně pravděpodobné.

Podle M. Mareše ([6], str. 187) prý Bayese „lákala (...) podivná jistota v nejistých jevech“. Možná proto se zabýval hlavně studiem podmíněné pravděpodobnosti.

Definice 7.1 (Podmíněná pravděpodobnost)**.**

Uvažujme dva náhodné jevy A a B, kde pravděpodobnost $P(B)$ není nulová. Potom podmíněnou pravděpodobností jevu A za podmínky B myslíme číslo

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Požijeme-li analogii s úmrtnostními tabulkami, podmíněná pravděpodobnost nám tedy určí, s jakou pravděpodobností přežije člověk dalších deset let za předpokladu, že už se dožil 36 let. Dodnes se používá v různých odvětvích vědy, zejména pak v pojišťovnictví. Náznaky tohoto přístupu můžeme najít i v díle Christiaana Huygense.

Bayes ale otázku obrátil a zeptal se, jak bychom vypočítali pravděpodobnosti vstupních podmínek, známe-li dostatečně výsledky náhodných jevů. Tato věta dodnes nese jeho název. Jelikož ji ale Bayes nikdy formálně nevydal, částečně se za jejího objevitele považuje také Laplace, který ji formuloval nezávisle na Bayesovi.

Věta 7.1 (Bayesova věta)**.**

Nechť A a B jsou náhodné jevy s pravděpodobnostmi $P(A) > 0$ a $P(B) > 0$. Potom

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ a tedy } P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Pokud jsou tedy B_0, B_1,... navzájem se vylučující náhodné jevy s kladnou pravděpodobností a alespoň jeden z nich nastane s pravděpodobností 1, potom

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A|B_0)P(B_0) + P(A|B_1)P(B_1) + \cdots}.$$

Ve své době se setkala s celou řadou zastánců i odpůrců. Během Druhé světové války ho například Alan Turing použil k sestrojení dešifrovacího stroje Bomba. Do dnes má celou řadu využití v programování umělé inteligence a učících se strojů, v počítačové diagnostice nebo při vyhodnocování lékařských testů na nejrůznější nemoci. Podrobněji si o ní a jejích dalších praktických využitích můžeme přečíst v [7].

8 Andrej Kolmogorov a axiomatická výstavba

V 19. letí se mezi matematiky šířila snaha o zobecňování a celkové propojení s jinými oblastmi matematiky pomocí axiomatické výstavby. Tomu Laplaceovy definice nevyhovovaly. Řešily sice situaci, kdy si pravděpodobnosti různých jevů nebyly rovny, nedokázaly si ale poradit s již používanou spojitou náhodnou funkcí. Vyřešením tohoto problému si Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903–1987) potvrdil své místo mezi jmény Pascal, Fermat, Bernoulli, Huygens, Bayes a Laplace. Patřil tak k nejuznávanějším evropským matematikům 20. století.

Kolmogorovým učitelem byl Nikolaj Nikolajevič Luzin (1883–1950). Ten byl krátce po revoluci a občanské válce výraznou osobností na moskevské matematické scéně. Jelikož před První světovou válkou studoval v Německu vyznal se také v „moderních" matematických trendech. Podle M. Mareše ([6], str. 251) „[se Luzin zabýval] hlavně deskriptivní teorií množin a bodovou topologií".

Nejspíš právě Luzin inspiroval Kolmogorova k tomu, aby teorii pravděpodobnosti posunul ještě víc k abstrakci, tím že svou axiomatickou výstavbu založil na teorii množin. M. Marcinčín ([5], str.73) říká, že „Definice posouvá i významy některých pojmů jako náhodný jev. Jde ale pouze o teoretický posun, který v jednoduchých aplikacích nemá vliv(...)". Na závěr této práce si tuto definici uvedeme.

Definice 8.1 (Kolmogorova Pravděpodobnost, upraveno).

Máme náhodný pokus s množinou možných výsledků Ω a systém jejích podmnožin $\mathcal{A}$ splňující

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. Pro každé $A \in \mathcal{A}$ je $A^C \in \mathcal{A}$, tj. $\mathcal{A}$ je uzavřená na doplňky.
3. Pokud $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{A}$, je také $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, tedy $\mathcal{A}$ je uzavřená na spočetná sjednocení.

Zobrazení P, které každému prvku $\mathcal{A}$ přiřadí reálné číslo tak, že

1. pro každé $A \in \mathcal{A}$ je $P(A) \geq 0$,
2. $P(\Omega) = 1$,
3. pro $A_1, A_2, A_3... \in \mathcal{A}$ takové, že $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro každé $i \neq j$, je $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$,

nazveme **pravděpodobnost**, **pravděpodobnostní míra** na Ω.

Systém množin splňující výše uvedené podmínky se nazývá σ-**algebra**, trojici $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ budeme říkat **pravděpodobnostní prostor**, prvky $A \in \mathcal{A}$ nazveme **náhodné jevy**. Prvkům $\omega \in \Omega$ se často v této teorii říká **elementární jevy**.

Tuto definici používáme dodnes. Kolmogorov ji v roce 1933 vydal ve své knize *Základy teorie pravděpodobnosti.* Tím zařadil teorii pravděpodobnosti do velkého jednolitého celku, kterým je matematika.

9 Závěr

Cílem práce bylo popsat, kdy a jak se vyvíjela teorie pravděpodobnosti.

K tomu bylo nejprve nutné ujasnit, co přesně k jejímu vzniku vedlo. Ve druhé kapitole je proto sledován pojem náhoda a vývoj kombinatorického počtu, který se v základních výpočtech používal. Součástí toho byl také vznik hazardních her a jejich vliv na společnost. Následoval popis úlohy o rozdělení sázky, která vzbudila zájem o pravděpodobnostní počet. Pozornost byla také věnována prvním spisům, které se pravděpodobností zabývaly a jejich přínosu pro další řešitele. Druhá část práce popisovala vznik statistické a geometrické definici pravděpodobnosti a práci s nasbíranými informacemi, důvodu, kvůli kterému vznikaly. Třetí část práce byla věnována myšlenkám, které do pravděpodobnosti vnesli Abrahám de Moivre, Pierre-Simon Laplace a Thomas Bayes. Nakonec bylo pro úplnost uvedeno znění Kolmogorovy definice pravděpodobnosti.

Dalším cílem této práce bylo více přiblížit úlohu o rozdělení sázky. Tomu se blíže věnuje kapitola třetí. Popisuje vznik úlohy, seznam řešitelů a postupy, které k řešení použili v dané době. Jednalo se převážně o vypsání všech možných kombinací se stejnou pravděpodobností, nebo výpočet váhy (ceny), kterou mají jednotlivé hry. Nakonec byly uvedeny jednotlivé způsoby řešení, které se používají dnes. Byly řešeny konkrétní příklady a odvozena jednotlivá obecná řešení.

Na tuto práci by se dalo navázat několika způsoby. Šlo by například o rozbory prací zde zmíněných: Huygensovo *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, Bernoulliho *Ars Conjectandi*, de Moivreho *Doctrine of Chances* nebo Kolmogorovy *Základy teorie pravděpodobnosti*. Dále by mohlo jít o popis metod, které se v počtu pravděpodobnosti používají v dnešní době.

Literatura

[1] BEČVÁŘOVÁ, Martina, Jindřich BEČVÁŘ, Magdalena HYKŠOVÁ, Oldřich HYKŠ, Martin MELCER, Martina ŠTĚPÁNOVÁ, Miroslava OTAVOVÁ a Irena SÝKOROVÁ. *Matematika ve středověké Evropě: Pozdní středověk a renesance.* Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2018. Dějiny matematiky. ISBN 978-80-01-06403-0.

[2] DAVID, Florence Nightingale. *Games, Gods and Gambling: The origins and history of probability and statistical ideas from the earliest times to the Newtonian era.* New York: Hafner Publishing Company, 1962.

[3] MAČÁK, Karel. *Počátky počtu pravděpodobnosti.* Praha: Prometheus, 1997. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-089-6.

[4] MAČÁK, Karel. *Poznámky k formování teorie pravděpodobnosti v XVII. a XVIII. století.* In: Historie matematiky II: Seminář pro vyučující na středních školách. Praha: Prometheus, 1997, s. 29-68. ISBN 80-7196-046-2.

[5] MARCINČÍN, Martin. *Počátky teorie pravděpodobnosti.* Praha, 2016. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze. Vedoucí práce RNDr. Jakub Staněk, Ph.D.

[6] MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky: stručná historie královny věd.* 2., rev. vyd. Příbram: Pistorius & Olšanská, 2011. ISBN 978-80-87053-64-5.

[7] MCGRAYNE, Sharon. *The Theory that Would Not Die.* New Haven: Yale University Press, 2012. ISBN 978-0-300-18822-6.

[8] NÝVLTOVÁ FIŠÁKOVÁ, Miriam. *Hrátky s kostmi. Astragali jako doklady her v mladším pravěku.* Studia archaeologica Brunensia [online]. 2014, **19**(1), 113 - 122 [cit. 2020-05-30]. ISSN 2336-4505. Dostupné z: `https://digilib.phil.muni.cz/bitstream/handle/11222.digilib/129974/1_StudiaArcheologicaBrunensia_19-2014-1_7.pdf?sequence=1`

[9] SAXL, Ivan. Pravděpodobnost ve starověku a středověku. In: *Výuka statistiky v České Republice II.*. Praha: Česká statistická společnost, 2004, s. 87-96. ISBN 80-239-4086-4.

[10] SAXL, Ivan. Pravděpodobnost ve středověku. *Informační bulletin České statistické společnosti* [online]. 2009, **20**(2), 1-9 [cit. 2020-05-21]. ISSN 1804-8617. Dostupné z: `https://www.statspol.cz/oldstat/bulletiny/ib-2009-2.pdf`

[11] SAXL, Ivan a Lucia, ILUCOVÁ. Abraham de Moivre. In: BEČVÁŘOVÁ, Martina a Jindřich BEČVÁŘ. *Matematika v proměnách věků V.* Praha: matfyzpress, 2007, s. 7-55. ISBN 978-80-7378-017-3.