UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

MARCELA LEHOTSKÁ

III. ročník – prezenční studium

Obor: Učitelství pro 2. stupeň ZŠ

Matematika – Hudební kultura

ALGEBRAICKÉ STRUKTURY V ÚLOHÁCH

Bakalářská práce

Vedoucí práce: Mgr. Eva Bártková, Ph.D.

OLOMOUC 2011

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a použila jen uvedených pramenů a literatury.

V Olomouci dne 4. dubna 2011

…………………………….

Děkuji Mgr. Evě Bártkové, Ph.D. za odborné vedení bakalářské práce a poskytování cenných rad při konzultacích.

Obsah

Úvod

Tato bakalářská práce je určena všem zájemcům o matematiku, kteří si chtějí prohloubit své studium a rozšířit znalosti v tématu algebraické struktury. Také proto je rozdělena na dva větší celky: teoretické ukotvení pojmů a sbírku příkladů.

První celek – teoretický, začíná definicí kartézského součinu, který je potřeba při definování relace a ta potom při definování zobrazení. Až po těchto základních pojmech v práci přecházím k definování algebraických struktur a to zase postupně až po definování tělesa, jako největší možnou algebraickou strukturu této práce. Celá oblast teoretických pojmů je pro lepší pochopení ilustrována obrázky a příklady.

Cílem mé práce je vypracovat sbírku příkladů, která doplní učivo mého tématu. Zároveň je mým cílem prohloubit si svoje znalosti, dozvědět se něco nového a vyzkoušet si nějaké příklady sama vymyslet.

Jádrem bakalářské práce je sbírka příkladů. Tato sbírka je rozdělena do dvou částí: první je zaměřená na příklady s matematickou tematikou a ve druhé najdeme příklady, jejichž tématem není jen matematika. Samozřejmě i druhá část se stále zabývá algebraickými strukturami, ale příklady hledá jinde, než v oblasti matematiky, např. v hudbě a biologii. Chtěla bych čtenáři práce ukázat, že matematika není jen v geometrii, algebře nebo matematické analýze, ale všude kolem nás.

Teorie

Základní pojmy

Abychom mohli pokročit k definicím algebraických struktur, musíme nejprve definovat kartézský součin, jeho pomocí můžeme přejít k relacím a díky nim definovat zobrazení. Algebraické struktury proto řadím až do druhé kapitoly.

Definice

„**Kartézským součinem** A × B dvou množin A, B rozumíme množinu, jejímiž prvky jsou všechny uspořádané dvojice $[x, y]$, kde $x \in$ A a $y \in$ B.“

(Beran, Grupy a Svazy, str. 16)

Tuto definici můžeme napsat také matematickým zápisem následovně:

„Kartézským součinem množin A, B rozumíme množinu

A × B = $\{[x, y]: (x \in A) \land (y \in B)\}$,

tj. množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in$ A a $y \in$ B.“

(Drábek, Základy elementární aritmetiky pro učitelství 1. stupně ZŠ, str. 56)

Poznámka:

Z této definice je zřejmé, že v kartézském součinu záleží na pořadí množin, tzn. že množina A × B není obecně shodná s množinou B × A.

Je-li např. A = $\{a,b\}$ a B = $\{x,y,z\}$. Pak je:

A × B = $\{[a,x], [a,y], [a,z], [b,x], [b,y], [b,z]\}$

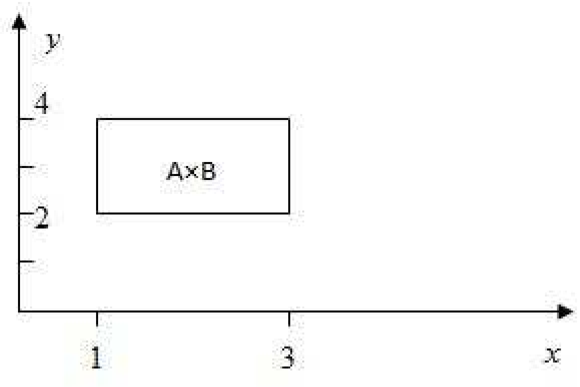
B × A = $\{[x,a], [x,b], [y,a], [y,b], [z,a], [z,b]\}$

a tedy A × B ≠ B × A .

Příklad:

Je-li A = $\{x \in$ <1,3>$\}$, B = $\{y \in$ <2,4>$\}$, pak A × B je množina všech uspořádaných dvojic $[x,y]$, kde $1 \le x \le 3$ a $2 \le y \le 4$.

Můžeme si příklad představit i na obrázku souřadného systému os xy. Kde zakreslíme interval <1,3> na osu x a interval <2,4> na osu y. Kartézský součin obou množin nám znázorňuje obdélník A × B. (obr. 1.1)



Definice

„Nechť A, B jsou libovolné množiny. Pak libovolná podmnožina ρ kartézského součinu A × B se nazývá **relace mezi množinami** A a B. Je-li $[x,y] \in \rho$, pak říkáme, že prvek x je v relaci ρ s prvkem y. Naopak, jestliže $[x,y] \notin \rho$, pak říkáme, že prvek x není v relaci ρ s prvkem y." *(Horák, Algebra a teoretická aritmetika, str. 19)*

Poznámka:

Z definice plyne, že záleží na pořadí x a y. Tedy, že nemůžeme zaměňovat pořadí množin A a B. Dále je zřejmé, že relace mezi množinami je opět množina.

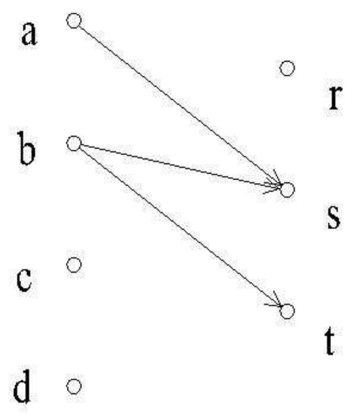
Poznámka:

Pro názornost můžeme zakreslit relace mezi množinami graficky. Postupovat budeme následovně: prvky jednotlivých množin budeme zakreslovat jako body do sloupce a relace budeme znázorňovat šipkami. Tedy je-li prvek $x \in$ A, $y \in$ B, spojíme je orientovanou šipkou, je-li $[x,y] \in \rho$.

Příklad:

Nechť A = $\{a,b,c,d\}$, B = $\{r,s,t\}$. Pak relace $\rho = \{[a,s], [b,s], [b,t]\}$ je relace mezi množinami.

Graficky:



Definice

„Nechť M je neprázdná množina. Pak libovolná podmnožina ρ kartézského součinu M × M se nazývá **relace na množině** M. Množinu M spolu s relací ρ označujeme symbolem (M,ρ) a budeme říkat, že (M,ρ) je množina s relací.

Pro $x,y \in$ M budeme místo $[x,y] \in \rho$ psát xρy, resp. místo $[x,y] \notin \rho$ budeme psát $x\bar{\rho}y$."

(Horák, Algebra a teoretická aritmetika, str. 23)

Poznámka:

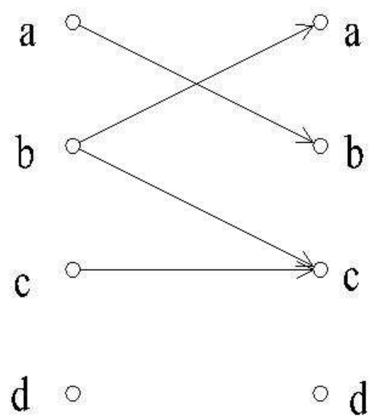
Relaci na množině můžeme schematicky znázornit čtyřmi způsoby:

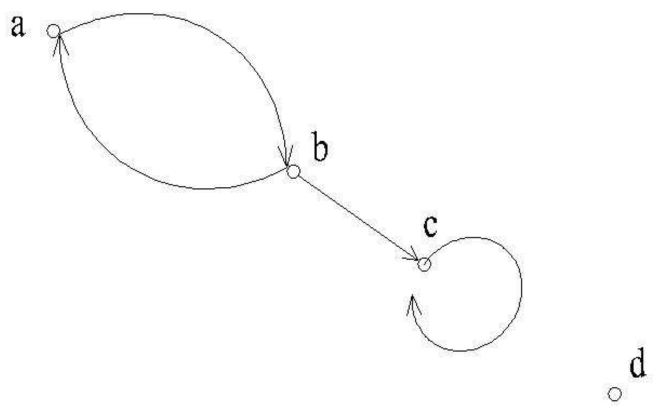
- pomocí šipek, stejně, jako při relaci mezi množinami
- pomocí tabulky: do záhlaví řádku a sloupců napíšeme prvky množiny M. Dále přiřadíme prvkům symbol 1, jestliže prvky jsou spolu v relaci a symbol 0, jestliže prvky spolu v relaci nejsou
- pomocí uzlového grafu: oproti zakreslování relace mezi množinami tady nemusíme psát prvky jako body pod sebe, abychom naznačili, že patří do jedné množiny, ale můžeme je psát libovolně (protože všechny jsou ze stejné množiny). Šipku mezi jednotlivé body píšeme tehdy, jsou-li vzájemně v relaci, jestliže prvek je v relaci sám se sebou, šipka začíná i končí v jednom bodě. Tato šipka se nazývá smyčka
- pomocí kartézského grafu.

Příklad:

Nechť M = {*a*,*b*,*c*,*d*} a nechť například ρ = {[*a*,*b*], [*b*,*a*], [*b*,*c*], [*c*,*c*]}. Potom ρ je relace na množině.

Graficky:

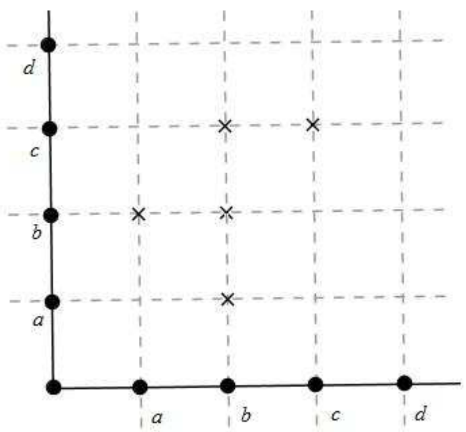




Tabulkou:

	a	*b*	*c*	*d*
a	0	1	0	0
b	1	0	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	0

Pomocí kartézského grafu:



Definice

„Nechť ρ je relace. **Relací inverzní** k relaci ρ, označíme ji symbolem ρ^{-1}, nazveme relaci

$$\rho^{-1} = \{[x,y];\ [y,x] \in \rho\}$$

takže platí:

$(\forall x)(\forall y)\ x\rho^{-1}y \Leftrightarrow x\rho y$."

(Blažek, Algebra a teoretická aritmetika, str. 37)

Definice

„Nechť (M,ρ) je množina s relací. Řekneme, že relace ρ je

a) **reflexivní**, jestliže: $x \in$ M libovolný $\Rightarrow x\rho x$
b) **symetrická**, jestliže $x, y \in$ M $\wedge\ x\rho y \Rightarrow y\rho x$
c) **tranzitivní**, jestliže $x, y, z \in$ M $\wedge\ x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$
d) **antisymetrická**, jestliže $x, y \in$ M $\wedge\ x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y$
e) **souvislá**, jestliže $x, y \in$ M $\wedge\ x \neq y \Rightarrow x\rho y \vee y\rho x$."

(Horák, Algebra a teoretická aritmetika, str. 24)

Definice

„Nechť *A, B* jsou dané množiny. Řekneme, že je dáno **zobrazení** f **množiny A do množiny B**, je-li dán předpis, podle kterého je každému prvku $x \in$ A jednoznačně přiřazen určitý prvek $y \in$ B. Tento prvek pak značíme $f\ (x)$ a nazýváme jej obrazem prvku x. Prvek x se nazývá vzor prvku $f\ (x)$."

(*Rektorys, Přehled užité matematiky I., str. 45)*

Pro toto zobrazení zavedeme značení f: A → B

Poznámka

Tuto definici můžeme zapsat pomocí také matematickým zápisem následovně:

„Relace ρ z množiny A do množiny B se nazývá relace zobrazení z A do B, právě když

$(\forall x \in A)(\forall y, y' \in B)\big(([x,y] \in \rho \wedge [x,y'] \in \rho) \Rightarrow y = y'\big)$."

(Drábek, Základy elementární aritmetiky pro učitelství 1. stupně ZŠ, str. 73)

Definice

„Nechť f: A $\to$ B je zobrazení. Pak zobrazení f se nazývá

- **injektivní (nebo též prosté) zobrazení**, jestliže každý prvek z množiny B má při zobrazení f nejvýše jeden vzor v A.
- **subjektivní zobrazení (nebo též zobrazení na)**, jestliže každý prvek z množiny B má při zobrazení f alespoň jeden vzor v A.
- **bijektivní zobrazení**, jestliže každý prvek z množiny B má při zobrazení f právě jeden vzor v A.“

(Horák, Algebra a teoretická aritmetika, str. 29)

Poznámka:

Vlastnosti injektivnost, surjektivnost a bijekce zobrazení f: A $\to$ B můžeme ukazovat na obrázku, kde prvky z množiny A zakreslíme jako prvky do sloupce na levé straně a prvky z množiny B zakreslíme jako body do sloupce na pravé straně.

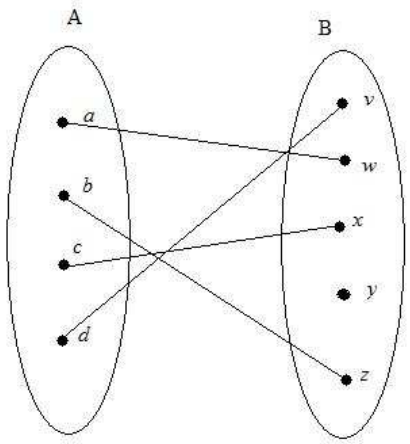
Toto grafické zobrazování je výhodné jen pro množiny s malým počtem prvků nebo je-li u množin patrné, jak se budou chovat při výčtu několika prvních prvků.

Příklad:

Definujme zobrazení f: A $\to$ B takto:

1. A = $\{a, b, c, d\}$, B = $\{v,w,x,y,z\}$ a položíme: $f(a) = w$, $f(b) = z$, $f(c) = x$, $f(d) = v$.

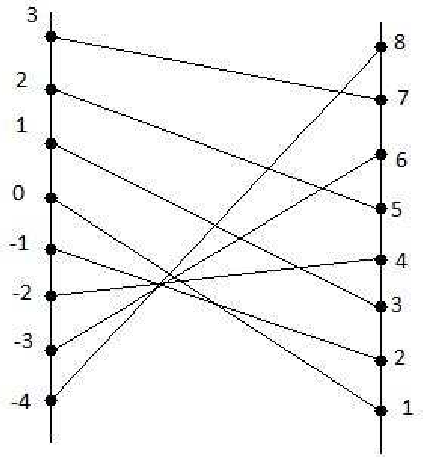
   Graficky:



Z obrázku je vidět, že každý prvek z množiny B má nejvýše jeden vzor v A. Tedy zobrazení je injektivní.

2. A = ℤ, B = ℕ. Položíme: $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & pro\ x \geq 0 \\ -2x & pro\ x < 0 \end{cases}$

Graficky:



Z obrázku je patrné, že každá prvek z množiny B má právě jeden vzor v A. Tedy zobrazení je bijektivní.

Definice

„Nechť f je prosté zobrazení množiny A na množinu B. Zobrazení f^{-1}, které každému prvku $y \in$ B přiřazuje ten prvek $f^{-1}(y) = x$, $x \in$ A, pro nějž $f(x) = y$, se nazývá **inverzní zobrazení** k f."

(Rektorys, Přehled užité matematiky I., str. 46)

Algebraické struktury

Definice

„Nechť G je libovolná neprázdná množina. Binární operací $*$ v množině G rozumíme zobrazení z množiny kartézského součinu G × G do množiny G. Jestliže v binární operaci $*$ vzoru $[x,y] \in G \times G$ je přiřazen obraz $z \in G$, píšeme $x * y = z$.“

(*Drábek, Základy elementární matematiky pro učitelství 1. stupně, str. 96*)

Definice

„Binární operace $*$ v množině G, která má vlastnost, že je definována pro každou uspořádanou dvojici $[x,y] \in G \times G$, se nazývá operace neomezeně definovaná v G nebo krátce operace definovaná na G.

Symbolicky zapsáno platí $(\forall\, x, y \in G)\ (\exists\, z \in G)\ [x * y = z]$.“

(*Drábek, Základy elementární matematiky pro učitelství 1. stupně, str. 97*)

Definice

„Uspořádaná dvojice (G, $*$), kde M je neprázdná množina, v které je definována binární operace $*$, se nazývá algebraická struktura s jednou operací.“

„Algebraická struktura (G, $*$) se nazývá grupoid, právě když operace $*$ je definovaná na M.“

(*Drábek, Základy elementární matematiky pro učitelství 1. stupně, str. 103*)

Jestliže má množina G konečný počet prvků, můžeme ji zapsat pomocí tabulky, kde do záhlaví sloupců píšeme první prvek a do záhlaví řádků prvek druhý. Výsledek potom zapíšeme do příslušné buňky. Postup zapisování je ukázán na příkladu:

Mějme množinu $G = \{x,y,z\}$ s operací $*$, přitom operaci můžeme zadat pomocí tabulky:

	x	y	z
x	z	x	z
y	x	z	y
z	y	z	x

Z tabulky je zřejmé, že (G, $*$) je grupoid. Pro prvky platí např. $z * x = y$, $x * z = z$,…

Definice

„Nechť $\mathbb{Z}_m = \{C_0, C_1, \dots, C_{m-1}\}$ je množina všech **zbytkových tříd** modulo m. Na množině $\mathbb{Z}_m$ definujeme operaci sčítání zbytkových tříd modulu *m* takto: pro $C_i, C_j \in \mathbb{Z}_m$ položíme:

$C_i \oplus C_j = C_r$, kde *r* je zbytek po dělení čísla $(i + j)$ číslem *m*."

(Horák, Algebra a teoretická aritmetika, str. 53)

Definice

„Na množině $\mathbb{Z}_m$ všech zbytkových tříd podle modulo *m* definujeme operaci násobení zbytkových tříd podle modulo *m* takto: $C_i, C_j \in \mathbb{Z}_m$ položíme:

$C_i \otimes C_j = C_s$, kde *s* je zbytek po dělení čísla $i \cdot j$ číslem *m*."

(Horák, Algebra a teoretická aritmetika, str. 62).

Definice

„Struktura (G,∗) se nazývá **asociativní**, právě když $(\forall x)$ $(\forall y)$ $(\forall z)$ platí:

$(x * y) * z = x * (y * z)$."

(Blažek, Algebra a teoretická aritmetika, str. 65)

Asociativní struktura se nazývá **pologrupa**.

Definice

„Struktura (G,∗) se nazývá **komutativní**, právě když $(\forall x)$ $(\forall y)$ platí:

$x * y = y * x$."

(Blažek, Algebra a teoretická aritmetika, str. 65)

Komutativní struktura se nazývá **komutativní grupoid**.

Příklad

Je grupoid $(2^A, -)$ asociativní a komutativní?

Rozdělíme si tento grupoid pro dva případy $A = \emptyset, A \neq \emptyset$ a ověříme jeho vlastnosti tabulkou.

1. $A = \emptyset$. Tedy $2^A = \emptyset$.

$-$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$

Z tabulky plyne, že grupoid je asociativní i komutativní

2. $A \neq \emptyset$. Tedy A = $\{a, b, \dots\}$, $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \dots\}$

$-$	$\emptyset$	$\{a\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$

$\{a\}-(\emptyset - \{a\}) = \{a\}-\emptyset = \{a\}$

$(\{a\}-\emptyset) -\{a\} = \{a\} -\{a\} = \emptyset$

Z tabulky plyne, že grupoid není ani asociativní, ani komutativní.

Grupoid $(2^A, -)$ je komutativní a asociativní pouze, když $A = \emptyset$, jinak asociativní a komutativní není.

Definice

„Nechť (G, ∗) je grupoid. Prvek $e \in$ G se nazývá **neutrální prvek** grupoidu (G, ∗), jestliže platí:

$a * e = a \ \wedge \ e * a = a, \forall \ a \in$ G.“

(Horák, Algebra a teoretická aritmetika, str. 48)

Věta

„V grupoidu existuje nejvýše jeden neutrální prvek.“

(Horák, Základy matematiky, str. 49)

Důkaz:

Důkaz provedeme sporem. Nechť *e, e´* jsou neutrální prvky v (G,∗).

Pak $e * e´ = e´$ (podle definice) a zároveň platí $e * e´ = e$. Dále porovnáme stejné levé strany rovnic a dostáváme $e´ = e$. Což je spor.

Definice

„Nechť prvek $e \in$ G je neutrálním prvkem operace ∗ na množině G. Prvek *x* nazýváme **inverzním prvkem** k prvku *a* (*a, x* $\in$ G), jestliže

$a * x = e = x * a$.“

(Katriňák, Algebra a teoretická aritmetika I)

Věta

„Nechť je na množině G dána Asociativní operace $*$ a nechť $e \in$ G je neutrálním prvkem této operace. Potom k prvku $x \in$ G existuje v množině G nejvýše jeden inverzní prvek.“

(Katriňák, Algebra a teoretická aritmetika I)

Důkaz:

Nechť je (G, $*$) pologrupa s neutrálním prvkem *e*. Nechť $a \in$ G. Pak:

$$x * a = e \ \wedge \ a * x = e \qquad \wedge \qquad y * a = e \ \wedge \ a * y = e.$$

Dále dokazujeme, že $x = y$.

$x = x * e = x * (a * y) = (x * a) * y = e * y = y.$

Definice

„**Pologrupa** G = (G, $*$) se nazývá grupa, obsahuje-li neutrální prvek a existuje-li v ní ke každému prvku prvek inverzní.“

(Emanovský, Algebraické struktury ve vysokoškolské přípravě učitelů matematiky, str. 15)

Definice

„Grupa G se nazývá **Abelova** (komutativní), platí-li pro každé dva její prvky $ab = ba$.“

(Rektorys, Přehled užité matematiky I., str. 46)

Definice

„**Polookruhem** nazýváme algebraickou strukturu $R = (R,+, *)$ se dvěma operacemi „+“ a „$*$“ takovou, že $(R,+)$ je komutativní pologrupa, $(R, *)$ je pologrupa a operace „$*$“ je distributivní vzhledem k operaci „+“, tj.: $(\forall\, a)$ $(\forall\, b)$ $(\forall\, c) \in$ R platí:

$$c * (a + \mathrm{b}) = (c * a) + (c * b) \qquad (a + b) * c = (a * c) + (b * c)$$

Je-li $(R, *)$ navíc komutativní, říkáme, že $(R,+, *)$ je **komutativní polookruh**.“

(Emanovský, Algebraické struktury ve vysokoškolské přípravě učitelů matematiky, str. 15).

Definice

„Polookruh $R = (R,+, *)$ nazveme **okruhem**, je-li $(R,+)$ komutativní grupou.“

(Emanovský, Algebraické struktury ve vysokoškolské přípravě učitelů matematiky, str. 16)

Definice

„Nechť (R,+, $*$) je okruh, nechť pro nějaké $a,b \in R$ platí:

$$a \neq 0 \quad \wedge \quad b \neq 0 \quad \wedge \quad a \cdot b = 0.$$

Potom se prvky a,b nazývají **dělitelé nuly** v okruhu (R,+, $*$).“

(Horák, Algebra a teoretické aritmetika, str. 65)

Definice

„Tělesem nazýváme okruh T s jednotkovým prvkem $e \neq 0$, v němž ke každému prvku $a \in$ T, $a \neq 0$, existuje prvek $x \in$ T takový, že $ax = xa = e$ (x je tzv. inverzní prvek k prvku a).“

(Rektorys, Přehled užité matematiky I., str. 47)

Sbírka příkladů 1. část

1. Zákrytové pohyby osmistěnu

Zadání

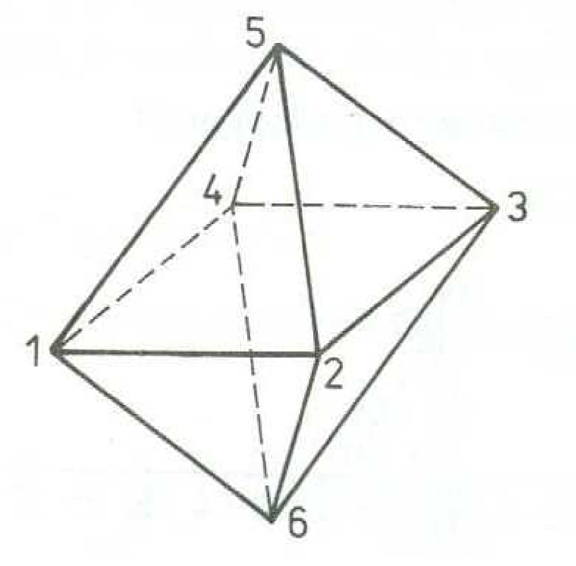
Mějme dán pravidelný osmistěn, jehož vrcholy označíme čísly 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Operace ♣ je zákrytovým pohybem daného osmistěnu. Tímto pohybem rozumíme takové přemístění osmistěnu, při němž tento osmistěn jako celek splyne s původní polohou. Přitom ovšem jednotlivé vrcholy, hrany i stěny uvažovaného osmistěnu mohou změnit své místo, ale pouze tak, že každý vrchol přejde opět v některý vrchol, a tedy i hrana v hranu a stěna ve stěnu.

Zákrytové pohyby osmistěnu budeme popisovat pomocí permutací, které udávají přemístění vrcholů. Tedy permutace

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 \end{pmatrix}$$

Můžeme hovořit o struktuře zákrytových pohybů, jelikož je jasné, že provedení dvou zákrytových pohybů po sobě dá opět zákrytový pohyb.



Nyní si uvedeme všechny zákrytové pohyby pravidelného osmistěnu:

Identické zobrazení:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Otočení kolem osy procházející vrcholy 56 o +90:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Otočení kolem osy procházející vrcholy 56 o +180:

$$C = B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Otočení kolem osy procházející vrcholy 56 o +270:

$$D = B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Otočení kolem osy procházející vrcholy 13 o +90:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Otočení kolem osy procházející vrcholy 13 o +180:

$$F = E^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Otočení kolem osy procházející vrcholy 13 o +270:

$$G = E^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Otočení kolem osy procházející vrcholy 24 o +90:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Otočení kolem osy procházející vrcholy 24 o +180:

$$I = H^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Otočení kolem osy procházející vrcholy 24 o +270:

$$J = H^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Otočení kolem osy procházející $S_{12}S_{34}$ o +180:

$$K = BE^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Otočení kolem osy procházející $S_{23}S_{14}$ o +180:

$$L = BH^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Otočení kolem osy procházející $S_{25}S_{46}$ o +180:

$$M = EH^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Otočení kolem osy procházející $S_{15}S_{36}$ o +180:

$$N = HB^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Otočení kolem osy procházející $S_{45}S_{26}$ o +180:

$$O = EB^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Otočení kolem osy procházející $S_{35}S_{16}$ o +180:

$$P = HE^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Otočení kolem osy procházející $S_{146}S_{235}$ o +120:

$$Q = BH = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Otočení kolem osy procházející $S_{146}S_{235}$ o +240:

$$R = (BH)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Otočení kolem osy procházející $S_{145}S_{236}$ o +120:

$$S = EB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Otočení kolem osy procházející $S_{145}S_{236}$ o +240:

$$T = (EB)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Otočení kolem osy procházející $S_{126}S_{345}$ o +120:

$$U = HE = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Otočení kolem osy procházející $S_{126}S_{345}$ o +240:

$$V = (HE)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Otočení kolem osy procházející $S_{125}S_{346}$ o +120:

$$X = (BE)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Otočení kolem osy procházející $S_{125}S_{346}$ o +240:

$$W = BE = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 6 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Máme tedy množinu, kterou nazveme OS, OS = {A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X}.

O jakou strukturu (OS, ♣) se jedná?

Řešení

Sestavování tabulky by bylo příliš složité vzhledem k počtu prvků. Pro sestavení tabulky by bylo vhodnější použít program Microsoft Excel, nebo jemu podobný.

Abychom zjistili, o jakou algebraickou strukturu se jedná, budeme postupně dokazovat jednotlivé vlastnosti

1. Asociativnost, musí platit $(\forall\, x)$ $(\forall\, y)$ $(\forall\, z)$: $(x$ ♣ $y)$ ♣ $z = x$ ♣ $(y$♣ $z)$.

   (D ♣ Q) ♣ W = P ♣ W = L   D ♣ (Q ♣ W) = D ♣ I = L

   (N ♣ H) ♣ S = C ♣ S = X   N ♣ (H ♣ S) = N ♣ G = X

   (B ♣ M) ♣ T = V ♣ T = Q   B ♣ (M ♣ T) = B ♣ P = Q

   Mohli bychom pokračovat dále výčtem všech prvků, ale už teď jde vidět, že struktura je asociativní.

2. Existence neutrálního prvku, tj. musíme najít prvek e, pro který bude platit:

   $a \cdot e = a \qquad \wedge \qquad e \cdot a = a, \ \forall\, a \in$ OS.

   Prvek e je identita I, jelikož platí např.:

   J ♣ I = J   ∧   I ♣ J = J

3. Existence inverzních prvků, tj. musí platit $(\forall\, x)$: a ♣ $x = e = x$ ♣ a

   Tato vlastnost je viditelná z tabulky. Tedy platí např.:

   J ♣ H = I = H ♣ J

4. Komutativnost, tj. musí platit $(\forall x)$ $(\forall y)$: $x \clubsuit y = y \clubsuit x$

   Tato vlastnost neplatí, protože např.:

   $F \clubsuit R = V \quad \wedge \quad R \clubsuit F = T$

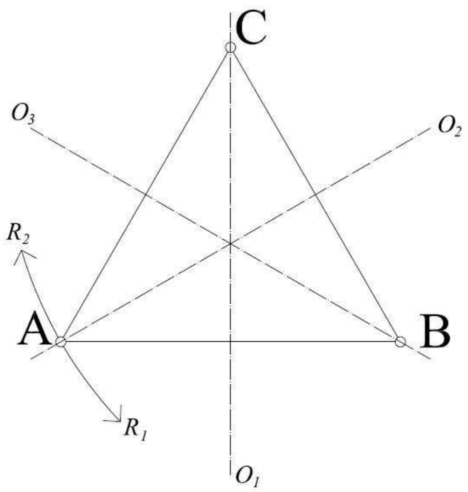
Vyšetřením všech vlastností jsme zjistili, že se jedná o grupu.

2. Trojúhelník

Zadání

Je dán rovnostranný trojúhelník, jehož vrcholy označíme písmeny A, B, C. Označme množinu T všech shodných zobrazení, jimiž se trojúhelník ABC reprodukuje, neboli při nichž obrazem daného trojúhelníku je týž trojúhelník.

Jednotlivé prvky budeme zapisovat do kulatých závorek tak, že na první řádek si napíšeme vrcholy trojúhelníku a pod ně do druhého řádku budeme zapisovat reprodukci trojúhelníku.



Množinu T tvoří tato shodná zobrazení:

Identické zobrazení I

$I = \binom{ABC}{ABC}$,

Tři osové souměrnosti O_1, O_2, O_3:

$O_1 = \binom{ABC}{ACB}$, $O_2 = \binom{ABC}{CBA}$, $O_3 = \binom{ABC}{BAC}$,

Dvě otáčení (rotace) R_1, R_2:

$R_1 = \binom{ABC}{BCA}$, $R_2 = \binom{ABC}{CAB}$.

Je tedy T = {I, O_1, O_2, O_3, R_1, R_2}. V množině definujme operaci ∗, operace ∗ označuje otočení trojúhelníku.

O jakou strukturu (T,∗) se jedná?

Řešení

Pro přehlednost řešení příkladu si nejprve sestavíme tabulku.

$*$	I	O_1	O_2	O_3	R_1	R_2
I	I	O_1	O_2	O_3	R_1	R_2
O_1	O_1	I	R_2	R_1	O_3	O_2
O_2	O_2	R_1	I	R_2	O_1	O_3
O_3	O_3	R_2	R_1	I	O_2	O_1
R_1	R_1	O_2	O_3	O_1	R_2	I
R_2	R_2	O_3	O_1	O_2	I	R_1

Nyní zjistíme, o jakou algebraickou strukturu se jedná. Budeme postupně dokazovat jednotlivé vlastnosti.

1. Asociativnost, musí platit $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ (x * y) * z = x * (y * z)$.

   $(O_1 * O_3) * R_2 = R_1 * R_2 = I \quad \wedge \quad O_1 * (O_3 * R_2) = O_1 * O_1 = I$

   $(R_1 * R_2) * O_2 = I * O_2 = O_2 \quad \wedge \quad R_1 * (R_2 * O_2) = R_1 * O_1 = O_2$

   $(O_1 * O_3) * O_2 = R_1 * O_2 = O_3 \wedge \quad O_1 * (O_3 * O_2) = O_1 * R_1 = O_3$

   Mohli bychom pokračovat dále vyčtením všech prvků, ale už teď jde vidět, že struktura je asociativní.

2. Existence neutrálního prvku, tj. musíme najít prvek e, pro který bude platit:

   $a * e = a \quad \wedge \quad e * a = a, \ \forall\, a \in$ T.

   Prvek e je identita I jelikož platí např.:

   $R_1 * I = R_1 \quad \wedge \quad I * R_1 = R_1$

3. Existence inverzních prvků, tj. musí platit $(\forall x)\ a * x = e = x * a$

   Tato vlastnost je viditelná z tabulky. Tedy platí např.:

   $R_1 * R_2 = I = R_2 * R_1$

4. Komutativnost, tj. musí platit $(\forall x)\ (\forall y)\ x * y = y * x$

   Tato vlastnost neplatí, protože například

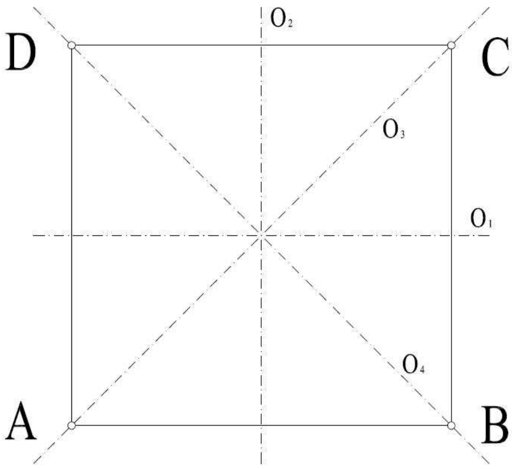
   $O_1 * O_2 = R_2$ a zároveň $O_2 * O_1 = R_1$

Vyšetřením všech vlastností jsme zjistili, že se jedná o grupu.

3. Čtverec

Je dán čtverec, jehož vrcholy označíme písmeny A, B, C, D. Označme množinu Č všech shodných zobrazení, jimiž se čtverec ABCD reprodukuje, neboli při nichž obrazem daného čtverci je týž čtverec.

Jednotlivé prvky budeme zapisovat stejným způsobem, jako u předchozího příkladu Trojúhelník.



Množinu Č tvoří tato shodná zobrazení:

Identické zobrazení I:

$I = \binom{ABCD}{ABCD}$,

Čtyři osové souměrnosti O_1, O_2, O_3, O_4:

$O_1 = \binom{ABCD}{DCBA}$, $O_2 = \binom{ABCD}{BADC}$, $O_3 = \binom{ABCD}{ADCB}$, $O_4 = \binom{ABCD}{CBAD}$,

Tři otáčení (rotace) R_1, R_2, R_3:

$R_1 = \binom{ABCD}{DABC}$, $R_2 = \binom{ABCD}{CDAB}$, $R_3 = \binom{ABCD}{BCDA}$.

Je tedy Č = {I, $O_1, O_2, O_3, O_4, R_1, R_2, R_3$}. V množině definujme operaci •, operace • označuje otočení čtverce.

O jakou strukturu (Č,•) se jedná?

Řešení

Pro přehlednost řešení příkladu si nejprve sestavíme tabulku.

•	I	O_1	O_2	O_3	O_4	R_1	R_2	R_3
I	I	O_1	O_2	O_3	O_4	R_1	R_2	R_3
O_1	O_1	I	R_2	R_3	R_1	O_4	O_2	O_3
O_2	O_2	R_2	I	R_1	R_3	O_3	O_1	O_4
O_3	O_3	R_1	R_3	I	R_2	O_1	O_4	O_2
O_4	O_4	R_3	R_1	R_2	I	O_2	O_3	O_1
R_1	R_1	O_3	O_4	O_2	O_1	R_2	R_3	I
R_2	R_2	O_2	O_1	O_4	O_3	R_3	I	R_1
R_3	R_3	O_4	O_3	O_1	O_2	I	R_1	R_2

Nyní zjistíme, o jakou algebraickou strukturu se jedná. Budeme postupně dokazovat jednotlivé vlastnosti

1. Asociativnost, musí platit (∀ *x*) (∀ *y*) (∀ *z*) (*a* • *b*) • *c* = *a* • (*b* • *c*)

   $(O_1 \bullet R_1) \bullet R_2 = O_4 \bullet R_2 = O_3 \quad \wedge \quad O_1 \bullet (R_1 \bullet R_2) = O_1 \bullet R_3 = O_3$

   $(R_1 \bullet R_2) \bullet O_2 = I \bullet O_2 = O_2 \quad \wedge \quad R_1 \bullet (R_2 \bullet O_2) = R_1 \bullet O_1 = O_2$

   $(O_1 \bullet O_3) \bullet O_2 = R_1 \bullet O_2 = O_3 \quad \wedge \quad O_1 \bullet (O_3 \bullet O_2) = O_1 \bullet R_1 = O_3$

   Mohli bychom pokračovat dále vyčtením všech prvků, ale už teď jde vidět, že struktura je asociativní.

2. Existence neutrálního prvku, tj. musíme najít prvek e, pro který bude platit:

   $a \bullet e = a \quad \wedge \quad e \bullet a = a, \ \forall\, a \in$ Č.

   Prvek e je identita I jelikož platí např.:

   $R_1 \bullet I = R_1 \quad \wedge \quad I \bullet R_1 = R_1$

3. Existence inverzních prvků, tj. musí platit ($\forall\, x$): $a \bullet x = e = x \bullet a$

   Tato vlastnost je viditelná z tabulky. Tedy platí např.:

   $R_1 \bullet R_3 = I = R_3 \bullet R_1$

4. Komutativnost, tj. musí platit ($\forall$x) ($\forall$y) $x \bullet y = y \bullet x$

   Tato vlastnost neplatí, protože například

   $O_1 \bullet O_2 = R_2 \quad \wedge \quad O_2 \bullet O_1 = R_1$

Vyšetřením všech vlastností jsme zjistili, že se jedná o grupu.

4. Sčítání zbytkových tříd

Mějme množinu zbytkových tříd modulo $m = 7$. Tuto množinu označme

$\mathbb{Z}_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$.

Na této množině definujme operaci sčítání $\oplus$ podle definice uvedené v teoretické části. Tedy např.:

$\bar{1} \oplus \bar{6} = \bar{0}$.

O jakou strukturu $(\mathbb{Z}_7, \oplus)$ se jedná?

Řešení:

Pro přehlednost řešení příkladu si nejprve sestavíme tabulku.

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$

Nyní zjistíme, o jakou algebraickou strukturu se jedná. Budeme postupně dokazovat jednotlivé vlastnosti

1. Asociativnost, musí platit $(\forall\, x)\ (\forall\, y)\ (\forall\, z)\ (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

   $(\bar{1} \oplus \bar{6}) \oplus \bar{4} = \bar{0} \oplus \bar{4} = \bar{4}$ $\qquad$ $\bar{1} \oplus (\bar{6} \oplus \bar{4}) = \bar{1} \oplus \bar{3} = \bar{4}$

   $(\bar{3} \oplus \bar{5}) \oplus \bar{2} = \bar{1} \oplus \bar{2} = \bar{3}$ $\qquad$ $\bar{3} \oplus (\bar{5} \oplus \bar{2}) = \bar{3} \oplus \bar{0} = \bar{3}$

   $(\bar{4} \oplus \bar{2}) \oplus \bar{6} = \bar{6} \oplus \bar{6} = \bar{5}$ $\qquad$ $\bar{4} \oplus (\bar{2} \oplus \bar{6}) = \bar{4} \oplus \bar{1} = \bar{5}$

   Mohli bychom pokračovat dále vyčtením všech prvků, ale už teď jde vidět, že struktura je asociativní.

2. Existence neutrálního prvku, tj. musíme najít prvek *e*, pro který bude platit:

   $a \oplus e = a \quad \wedge \quad e \oplus a = a,\ \forall\, a, e \in \mathbb{Z}_7.$

   Prvek *e* je identita $\bar{0}$ jelikož platí např.:

   $\bar{3} \oplus \bar{0} = \bar{3} \quad \wedge \quad \bar{0} \oplus \bar{3} = \bar{3}$

3. Existence inverzních prvků, tj. musí platit $(\forall\, x)\ a \oplus x = e = x \oplus a$

   Tato vlastnost je viditelná z tabulky. Tedy platí např.:

   $\bar{4} \oplus \bar{3} = \bar{0} = \bar{3} \oplus \bar{4}$

4. Komutativnost, tj. musí platit $(\forall x)\ (\forall y)\ x \oplus y = y \oplus x$

   Tato vlastnost je viditelná z tabulky. Tedy platí např.: $\bar{5} \oplus \bar{6} = \bar{6} \oplus \bar{5} = \bar{4}$

Vyšetřením všech vlastností jsme zjistili, že se jedná o abelovskou grupu.

5. Násobení zbytkových tříd

Zadání

Mějme množinu zbytkových tříd modulo m = 7. Tuto množinu označme

$\mathbb{Z}_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$.

Na této množině definujme operaci násobení ⊗ podle definice uvedené v teoretické části. Tedy např.: $\bar{1} \otimes \bar{6} = \bar{6}$.

Vyšetřete o jakou strukturu $(\mathbb{Z}_7, \otimes)$ se jedná. Poté vyšetřete o jakou strukturu $(\mathbb{Z}_7, \oplus, \otimes)$ se jedná.

Řešení:

Pro přehlednost řešení příkladu si nejprve sestavíme tabulku.

$\otimes$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Jelikož příklad je velmi podobný, jako předchozí, nebudeme vyšetřovat jednotlivé vlastnosti. Je zřejmé, že se opět jedná o abelovskou grupu, kde neutrálním prvkem je tentokrát $\bar{1}$. Dále v této grupě existuje agresivní prvek $\bar{0}$. Tedy při hledání inverzních prvků je prvek $\bar{0}$ vyloučen.

Přistoupíme k další části příkladu.

Abychom mohli určit, o jakou strukturu se jedná, musíme dokázat následující vlastnosti:

1. Distributivnost tj. pro naše dvě množiny $(\mathbb{Z}_7, \otimes)$, $(\mathbb{Z}_7, \oplus)$ musí platit:
   $c \otimes (a \oplus b) = (c \otimes a) \oplus (c \otimes b)$ $\quad (a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$

   $\bar{6} \otimes (\bar{2} \oplus \bar{3}) = \bar{6} \otimes \bar{5} = \bar{2}$ $\qquad (\bar{6} \otimes \bar{2}) \oplus (\bar{6} \otimes \bar{3}) = \bar{5} \oplus \bar{4} = \bar{2}$
   $(\bar{2} \oplus \bar{3}) \otimes \bar{6} = \bar{5} \otimes \bar{6} = \bar{2}\, (\bar{2} \otimes \bar{6}) \oplus (\bar{3} \otimes \bar{6}) = \bar{5} \oplus \bar{4} = \bar{2}$

2. Neexistence dělitelů nuly, tj. musí platit: $a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow a \otimes b = 0$. I tato vlastnost je splněna, jelikož platí např.: $\bar{4} \otimes \bar{5} = \bar{6}$.

Vyšetřením těchto vlastností zjistíme, že se jedná o komutativní těleso.

Sbírka příkladů 2. část

Druhá část sbírky příkladů se zabývá příklady, které nejsou přímo matematické. Hledala jsem příklady, kterými chci přiblížit matematiku. Vybrala jsem pět příkladů, jejichž téma zasahuje do běžného života.

1. Skládání povelů

Zadání

Je dána množina, která se skládá ze čtyř povelů: „vpravo bok“, „vlevo bok“, „čelem vzad“ a „stát“. Celou tuto množinu označme P, P = {p, l, č, s}. Symbolem · označme operaci skládání pohybů, kde např.: p · p = č, l · č = p, z · z = s.

O jako algebraickou strukturu (P,·) se jedná?

Řešení

Celou množinu spolu s operací zaznačme do tabulky:

·	*p*	*l*	*č*	*s*
p	č	s	l	p
l	s	č	p	l
č	l	p	s	č
s	p	l	č	s

Nyní zjistíme, o jakou algebraickou strukturu se jedná. Budeme postupně dokazovat jednotlivé vlastnosti.

1. Asociativnost, musí platit $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)$: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

$$(p \cdot l) \cdot č = s \cdot č = č \quad \wedge \quad p \cdot (l \cdot č) = p \cdot p = č$$
$$(l \cdot č) \cdot s = p \cdot s = p \quad \wedge \quad l \cdot (č \cdot s) = l \cdot č = p$$
$$(č \cdot s) \cdot p = č \cdot p = l \quad \wedge \quad č \cdot (s \cdot p) = č \cdot p = l$$
$$(s \cdot p) \cdot l = p \cdot l = s \quad \wedge \quad s \cdot (p \cdot l) = s \cdot s = s$$

Mohli bychom pokračovat dále vyčtením všech prvků, ale už teď je viditelné, že struktura je asociativní.

2. Existence neutrálního prvku, tj. musíme najít prvek e, pro který bude platit:

   $a \cdot e = a \quad \wedge \quad e \cdot a = a, \ \forall\, a \in$ P.

   Prvek e je náš pohyb „stát“, jelikož platí např.:

   p · s = p $\quad \wedge \quad$ s · p = p

   Tuto vlastnost můžeme poznat již z tabulky, jelikož sloupec i řádek u neutrálního prvku kopíruje zadanou tabulku.

3. Existence inverzních prvků, tj. musí platit ($\forall\, x$): $a \cdot x = e = x \cdot a$

   Inverzní prvky budeme hledat ke každému prvku z naší množiny P zvlášť.

   Pro prvek p je inverzním prvkem prvek l, jelikož platí:

   p · l = s = l · p

   Pro prvek l je inverzním prvkem p, jelikož platí:

   l · p = s = p · l

   Pro prvek č je inverzním prvkem samotný prvek č, jelikož platí:

   č · č = s

   Pro prvek s je inverzním prvkem též samotný prvek s, jelikož platí:

   s · s = s

4. Komutativnost, tj. musí platit (∀x) (∀y) $x \cdot y = y \cdot x$

   Tato vlastnost je zřejmá již z tabulky. Tedy platí např.:

   p · s = s · p

Vyšetřením všech vlastností jsme zjistili, že se jedná o Abelovu grupu.

2. **Mendelovy zákony dědičnosti u hrachu**

Mendel se zabývat zákony dědičnosti a zkoumal je formou pokusu. Křížil jednotlivé druhy semen a hledal v tom zákonitosti.

Schématicky lze Mendelovu teorii shrnout následujícím obrázkem.

(*Orel, Gregor Mendel, zakladatem genetiky, str. 50*)

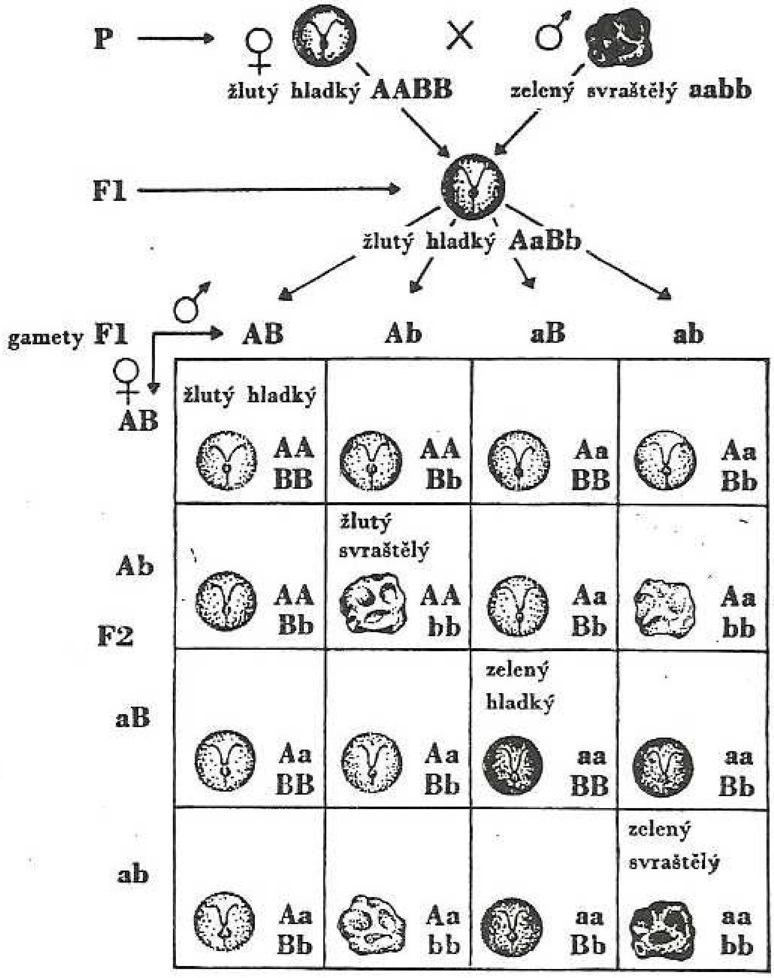
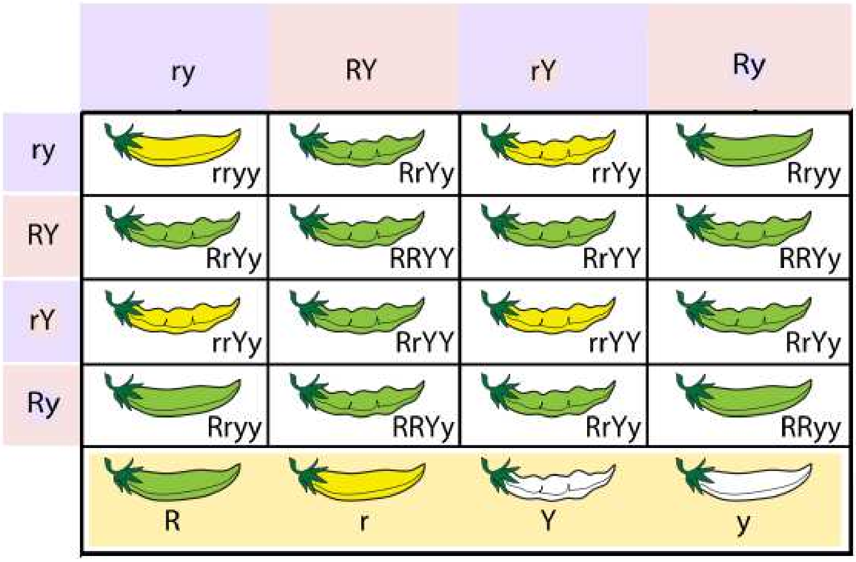


Schéma dědičnosti barvy a tvaru semene hrachu (*A* — element pro žlutou barvu semene, *a* — element pro zelenou barvu, *B* — element pro kulatý tvar semene, *b* — element pro svraštělý tvar semene)



Barevnější obrátek nám zachycuje ten samý pokus.

Zadání

Je dána množina, která se skládá ze čtyř kombinací vlastností hrachu: žlutý, zelený, kulatý a hranatý. Celou tuto množinu označme H, H = {ry, rY, Ry, RY}. Operací · na množině H zvolme křížení hrachů s danými vlastnostmi.

O jakou algebraickou strukturu se jedná?

Řešení

Celou množinu spolu s operací zaznačme do tabulky:

·	ry	rY	Ry	RY
ry	ry	rY	Ry	RY
rY	rY	rY	RY	RY
Ry	Ry	RY	Ry	RY

Z tabulky nahradíme jednotlivé kombinace jen jedním písmenem:

ry = v RY = u rY = w Ry = z

Dostáváme tabulku:

$\cdot$	v	u	w	z
v	v	u	w	z
u	u	u	u	u
w	w	u	w	u
z	z	u	u	z

Nyní zjistíme, o jakou algebraickou strukturu se jedná. Budeme postupně dokazovat jednotlivé vlastnosti.

1. Asociativnost, musí platit $(\forall\, x)\ (\forall\, y)\ (\forall\, z)$: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

   (v · z) · w = z · w = y　　　v · (z · w) = v · y = y

   (y · w) · z = y · z = y　　　y · (w · z) = y · y = y

   (w · z) · y = y · y = y　　　w · (z · y) = w · y = y

   Je zřejmé, že tato vlastnost platí pro všechny ostatní kombinace prvků

2. Komutativnost, tj. musí platit (∀x) (∀y) $x \cdot y = y \cdot x$

   Tato vlastnost je patrná z tabulky. Tedy např.:

   w · u = u　　∧　　u · w = u

3. Existence neutrálního prvku, tj. musíme najít prvek e, pro který bude platit:

   $a \cdot e = a \quad \wedge \quad e \cdot a = a,\ \forall\, a \in$ H.

   Prvek e je náš prvek v, jelikož platí např.:

   w · v = w　　∧　　v · w = w

4. Existence inverzních prvků, tj. musí platit $(\forall\, x)$: $a \cdot x = e = x \cdot a$

   Takovýto prvek v naší množině H neexistuje. Jelikož nenajdeme dva různé prvky, které by se rovnaly prvku v.

Vyšetřením všech vlastností jsme zjistili, že se jedná o pologrupu s jedničkou, kterou je prvek v, tedy semena se žlutou barvou a kulatým tvarem semenem.

3. Kvart-kvintový kruh. Stupnice dur s křížky

Abychom se mohli tímto příkladem zabývat, musíme si nejprve ujasnit základní hudební pojmy.

Pojmy

„**Tón** vzniká při pravidelném chvění a je zvukem určité výše.“

(Pícha, Všeobecná hudební nauka)

„Tóny můžeme řadit podle výšky na půltóny a celé tóny. Symbol # daný tón zvýší o půltónu a symbol ♭ sníží daný tón o půltónu.“

(Zenkl, ABC hudební nauky)

„Interval znamená v hudbě výškovou vzdálenost mezi dvěma tóny.“

(Zenkl, ABC hudební nauky, str. 78)

„Enharmonické tóny mají stejný zvuk, ale různá jména – stejně znějí, ale různě se píší.“

(Pícha, Všeobecná hudební nauka)

„**Stupnice** je řada tónů zpravidla stupmo po sobě jdoucích v rozsahu oktávy, upravené podle určitých pravidel.“

(Pícha, Všeobecná hudební nauka, str. 121)

„Výchozí tón stupnice je základním tónem stupnice, která se podle něj též jmenuje (např. stupnice G dur začíná tónem g).“

(Zenkl, ABC hudební nauky, str. 55)

„Stupnice, v nichž se vedle sebe vyskytují celé tóny i půltóny se nazývají diatonické.“

(Zenkl, ABC hudební nauky, str. 55)

„Základní diatonická tónová řada od tónu c je zároveň durovou stupnicí, je tedy stupnice C dur.“

(Zenkl, ABC hudební nauky, str. 56)

„Stupnice řadíme za sebou tak, aby postupně přibývalo po jednom # nebo po jednom ♭.

O stupnicích s křížky platí toto pravidlo: další durovou stupnici s křížky stavíme vždy na pátém stupni stupnice předešlé a zvyšujeme sedmý stupeň.“

(Zenkl, ABC hudební nauky, str. 57)

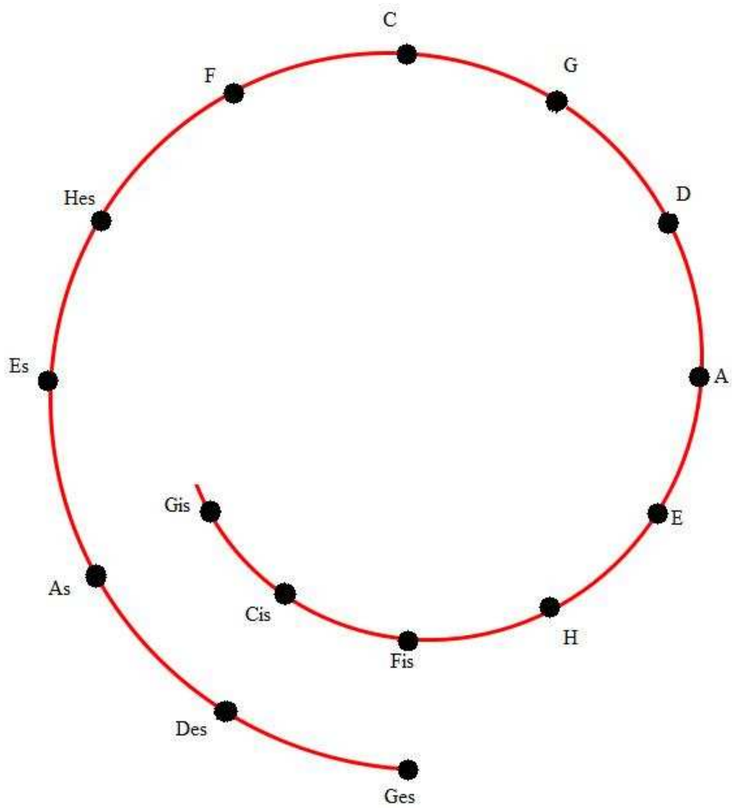
„Durové stupnice s bé stavíme vždy na čtvrtém stupni stupnice předešlé a snižujeme vždy čtvrtý stupeň.“

(Zenkl, ABC hudební nauky, str. 59)

„Zaznamenávání těchto pravidel můžeme znázornit graficky např. na kvart – kvintovém kruhu“

(Zenkl, ABC hudební nauky)

Pro názornost je kvart-kvintový kruh zobrazen na obrázku. Na spirále jsou zapsané jednotlivé stupnice. Na vrcholku je zapsané C, což je stupnice C dur, které nemá v předznamenání křížky ani béčka. Dále od C doprava pokračují stupnice s křížky, které jsou posunuté od základní C dur o interval kvinty a doleva jsou napsány stupnice s bé, které jsou posunuté o interval kvarty. Na kruhu si můžeme všimnout naznačení enharmonické záměny, která je zakreslená dole překrýváním. Tedy např. Fis = Ges.



Zadání

Je dána množina K-D, jejímiž prvky jsou stupnice dur s křížky. K-D = {C, G, D, A, E, H, Fis, Cis, As, Es, Hes}. Dále je dána operace # , # je operace skládání kvint. Což v hudbě znamená posunutí základního tónu stupnice o příslušný počet kvint.

O jakou algebraickou strukturu se jedná?

Řešení

#	C	G	D	A	E	H	Fis	Cis	As	Es	Hes	F
C	C	G	D	A	E	H	Fis	Cis	As	Es	Hes	F
G	G	D	A	E	H	Fis	Cis	As	Es	Hes	F	C
D	D	A	E	H	Fis	Cis	As	Es	Hes	F	C	G
A	A	E	H	Fis	Cis	As	Es	Hes	F	C	G	D
E	E	H	Fis	Cis	As	Es	Hes	F	C	G	D	A
H	H	Fis	Cis	As	Es	Hes	F	C	G	D	A	E
Fis	Fis	Cis	As	Es	Hes	F	C	G	D	A	E	H
Cis	Cis	As	Es	Hes	F	C	G	D	A	E	H	Fis
As	As	Es	Hes	F	C	G	D	A	E	H	Fis	Cis
Es	Es	Hes	F	C	G	D	A	E	H	Fis	Cis	As
Hes	Hes	F	C	G	D	A	E	H	Fis	Cis	As	Es
F	F	C	G	D	A	E	H	Fis	Cis	As	Es	Hes

Nyní zjistíme, o jakou algebraickou strukturu se jedná. Budeme postupně dokazovat jednotlivé vlastnosti.

1. Asociativnost, musí platit $(\forall\, x)\ (\forall\, y)\ (\forall\, z)$: $(x \# y) \# z = x \# (y \# z)$.

(C # D) # H = D # H = Cis   C # (D # H) = C # Cis = Cis

(A # Fis) # Hes = Es # Hes = Cis   A # (Fis # Hes) = A # E = Cis

(As # Es) # E = H # E = Es   As # (Es # E) = As # G = Es

Je zřejmé, že analogicky bychom dokázali asociativnost i pro ostatní prvky.

2. Existence neutrálního prvku, tj. musíme najít prvek e, pro který bude platit:

   $a \# e = a \quad \wedge \quad e \# a = a, \forall a \in$ K-D.

   Prvek e je náš prvek C jelikož platí např.:

   H # C = H $\wedge$ C # H = H

3. Existence inverzních prvků, tj. musí platit ($\forall x$): $a \# x = e = x \# a$

   Tedy např.:

   Hes # D = C = D # Hes

   H # Cis = C = Cis # H

   Je zřejmé, že analogicky bychom dokázali existenci inverzního prvku i pro ostatní prvky.

4. Komutativnost, tj. musí platit ($\forall$x) ($\forall$y) $x \# y = y \# x$

   Tato vlastnost je patrná z tabulky. Tedy např.:

   A # Hes = G $\wedge$ Hes # A = G

Vyšetřením všech vlastností jsme zjistili, že se jedná o abelovskou grupu.

4. Kvart-kvintový kruh. Stupnice moll s béčky

Podobně, jako jsme vyšetřovali stupnici dur, budeme se zabývat i stupnicí moll.

Zadání

Je dána množina K-M, jejímiž prvky jsou stupnice moll s béčky. K-M = {a, d, g, c, f, hes, es, as, des, ges, h, e}. Dále je dána operace ♭, ♭ je operace skládání kvart. Což v hudbě znamená posunutí základního tónu stupnice o příslušný počet kvart.

O jakou algebraickou strukturu se jedná?

Řešení

Tuto množinu spolu s operací zaznačme do tabulky:

	a	d	g	c	f	hes	es	as	des	ges	h	e
a	a	d	g	c	f	hes	es	as	des	ges	h	e
d	d	g	c	f	hes	es	as	des	ges	h	e	a
g	g	c	f	hes	es	as	des	ges	h	e	a	d
c	c	f	hes	es	as	des	ges	h	e	a	d	g
f	f	hes	es	as	des	ges	h	e	a	d	g	c
hes	hes	es	as	des	ges	h	e	a	d	g	c	f
es	es	as	des	ges	h	e	a	d	g	c	f	hes
as	as	des	ges	h	e	a	d	g	c	f	hes	es
des	des	ges	h	e	a	d	g	c	f	hes	es	as
ges	ges	h	e	a	d	g	c	f	hes	es	as	des
h	h	e	a	d	g	c	f	hes	es	as	des	ges
e	e	a	d	g	c	f	hes	es	as	des	ges	h

Dále budeme postupovat analogicky, jako u předchozího příkladu, tedy zjistíme, o jakou algebraickou strukturu se jedná. Budeme postupně dokazovat jednotlivé vlastnosti.

1. Asociativnost, musí platit $(\forall\, x)\ (\forall\, y)\ (\forall\, z)$: $(x \flat y) \flat z = x \flat (y \flat z)$.

   $(\mathrm{d} \flat \mathrm{hes}) \flat \mathrm{h} = \mathrm{es} \flat \mathrm{h} = \mathrm{f}$ $\qquad$ $\mathrm{d} \flat (\mathrm{hes} \flat \mathrm{h}) = \mathrm{d} \flat \mathrm{c} = \mathrm{f}$

   $(\mathrm{e} \flat \mathrm{c}) \flat \mathrm{as} = \mathrm{g} \flat \mathrm{as} = \mathrm{ges}$ $\qquad$ $\mathrm{e} \flat (\mathrm{c} \flat \mathrm{as}) = \mathrm{e} \flat \mathrm{h} = \mathrm{ges}$

   $(\mathrm{des} \flat \mathrm{f}) \flat \mathrm{g} = \mathrm{a} \flat \mathrm{g} = \mathrm{g}$ $\qquad$ $\mathrm{des} \flat (\mathrm{f} \flat \mathrm{g}) = \mathrm{des} \flat \mathrm{es} = \mathrm{g}$

   Je zřejmé, že analogicky bychom dokázali asociativnost i pro ostatní prvky.

2. Existence neutrálního prvku, tj. musíme najít prvek e, pro který bude platit:

   $a \flat e = a \qquad \wedge \qquad e \flat a = a,\ \forall\, a \in \mathrm{G}.$

   Prvek e je náš prvek a, jelikož platí např.

   $\mathrm{g} \flat \mathrm{a} = \mathrm{g} \qquad \wedge \qquad \mathrm{a} \flat \mathrm{g} = \mathrm{g}$

3. Existence inverzních prvků, tj. musí platit ($\forall$ x): $a \flat x = e = x \flat a$

   Je zřejmé, že analogicky bychom dokázali existenci inverzního prvku i pro ostatní prvky.

   c $\flat$ ges = a = ges $\flat$ c

   e $\flat$ d = a = d $\flat$ e

4. Komutativnost, tj. musí platit ($\forall$x) ($\forall$y) $x \flat y = y \flat x$

   Tato vlastnost je patrná z tabulky.

   es $\flat$ as = d $\quad\quad \wedge \quad\quad$ as $\flat$ es = d

Vyšetřením všech vlastností jsme zjistili, že se jedná o abelovskou grupu.

5. Kvart-kvintový kruh, stupnice dur s křížky i béčky.

Zadání

Vyšetřete, jakou algebraickou strukturou je durový kvart-kvintový kruh, jestliže použijeme křížky i béčka.

Řešení

Budeme postupovat podobně, jako u předchozích příkladů. Mějme množinu, která je složená ze stupnic s křížky i s béčky, přičemž povolíme enharmonickou záměnu, tuto množinu označme K, K = {C, G, D, A, E, H, Fis, Cis, As, Es, Hes, F}.

Jako operace budeme využívat skládání kvart a kvint.

Nyní si sestrojíme dvě tabulky, jednu pro operaci # (skládání kvint) a druhou pro operaci ♭ (skládání kvart).

#	C	G	D	A	E	H	Fis	Cis	As	Es	Hes	F
C	C	G	D	A	E	H	Fis	Cis	As	Es	Hes	F
G	G	D	A	E	H	Fis	Cis	As	Es	Hes	F	C
D	D	A	E	H	Fis	Cis	As	Es	Hes	F	C	G
A	A	E	H	Fis	Cis	As	Es	Hes	F	C	G	D
E	E	H	Fis	Cis	As	Es	Hes	F	C	G	D	A
H	H	Fis	Cis	As	Es	Hes	F	C	G	D	A	E
Fis	Fis	Cis	As	Es	Hes	F	C	G	D	A	E	H
Cis	Cis	As	Es	Hes	F	C	G	D	A	E	H	Fis
As	As	Es	Hes	F	C	G	D	A	E	H	Fis	Cis
Es	Es	Hes	F	C	G	D	A	E	H	Fis	Cis	As
Hes	Hes	F	C	G	D	A	E	H	Fis	Cis	As	Es
F	F	C	G	D	A	E	H	Fis	Cis	As	Es	Hes

♭	C	F	Hes	Es	As	Cis	Fis	H	E	A	D	G
C	C	F	Hes	Es	As	Cis	Fis	H	E	A	D	G
F	F	Hes	Es	As	Cis	Fis	H	E	A	D	G	C
Hes	Hes	Es	As	Cis	Fis	H	E	A	D	G	C	F
Es	Es	As	Cis	Fis	H	E	A	D	G	C	F	Hes
As	As	Cis	Fis	H	E	A	D	G	C	F	Hes	Es
Cis	Cis	Fis	H	E	A	D	G	C	F	Hes	Es	As
Fis	Fis	H	E	A	D	G	C	F	Hes	Es	As	Cis
H	H	E	A	D	G	C	F	Hes	Es	As	Cis	Fis
E	E	A	D	G	C	F	Hes	Es	As	Cis	Fis	H
A	A	D	G	C	F	Hes	Es	As	Cis	Fis	H	E
D	D	G	C	F	Hes	Es	As	Cis	Fis	H	E	A
G	G	C	F	Hes	Es	As	Cis	Fis	H	E	A	

Víme, že stupnice s křížky je abelovská grupa, lze tedy jednoduše odhadnout (taky vzhledem k předešlému příkladu), že i stupnice s béčky bude abelovská grupa. Vyšetříme proto jen distributivnost a neexistenci dělitelů nuly

1. Distributivnost. Pro (K, #, ♭) musí platit:

   c ♭ (a # b) = (a ♭ b) # (a ♭ c)   (a # b) ♭ c = (a ♭ c) # (b ♭ c)

Distributivnost pro (K, #, ♭) neplatí. Nejedná se tedy ani o okruh. Je tedy zřejmé, že nemusíme dále nic vyšetřovat. Lze si všimnout hned v zadání příkladu, že tato struktura nemůže být okruhem, jelikož pro struktury se dvěma operacemi hledáme takové operace, které nejsou např. inverzní apod. Proto podobně není okruhem struktura (ℤ, +, −), kde + (resp. −) jsou operace sčítání (resp. odčítání).

Závěr

Při psaní práce jsem si kladla za cíl vypracovat sbírku. Tento cíl jsem se pokusila naplnit ilustrací pojmů, aby se nejednalo jen o sepsání jednotlivých definic, ale aby si tyto pojmy dokázal čtenář konkrétně představit.

Dále jsem se snažila ve sbírce příkladů ilustrovat řešení nejen na tabulkách, ze které se jednotlivé vlastnosti lépe chápou a dokazují, ale také na obrázcích, kde si může čtenář promítnout příklad a představit si, jak konkrétně vypadá. Myslím si, že tato ilustrace je potřeba hlavně v příkladech, které nemají výhradně matematické zadání, tedy uvedené v druhé části sbírky. Bez konkrétních obrázků, které znázorňují např. jak vypadá fazole zelená a hranatá, by celý příklad pozbyl smyslu, protože by byl těžko představitelný. Lépe totiž chápeme obrázek, než tabulku.

Myslím si, že právě touto ilustrací je má bakalářská práce přínosná a může ukázat, že matematika není mrtvá nebo je vědou sama pro sebe, ale je pravým opakem – živá všude kolem nás, jen ji objevit.

Použitá literatura

BLAŽEK J., CALDA E., KOMAN M., KUSSOVÁ B., *Algebra a teoretické aritmetika 1*. Praha: Státní nakladatelství 1983

DRÁBEK D., KRIŽALKOVIČ K., LIŠKA J., VIKTORA V., *Základy elementární aritmetiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*, Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985

EMANOVSKÝ P., *Algebraické struktury ve vysokoškolské přípravě učitelů matematiky,* Olomouc: Polygrafické středisko VUP Olomouc, 2000, ISBN 80-244-0066-9

HORÁK P., *Algebra a teoretická aritmetika I.* Brno: Univerzita J. E. Purkyně, 1985

KATRIŇÁK T., GAVALEC M., GEDEONOVÁ E., SMÍTAL J., *Algebra* a *teoretická aritmetika 1*. Bratislava : Alfa, 1985

OREL V., *Gregor Mendel, zakladatel genetiky*. Brno : Blok, 1965

PÍCHA F., *Všeobecná hudební nauka*. Praha: Státní hudební nakladatelství, 1961

REKTORYS K. a spol., *Přehled užité matematiky I*. Praha : Státní nakladatelství technické literatury, 1968

ZENKL L., *ABC Hudební nauky*. Praha : Bärenreiter Editio Supraphon, 2003
ISBN 8086385213

http://www.wikiskripta.eu/index.php/Mendelovy_z%C3%A1kony_d%C4%9Bdi%C4%8Dnosti

Anotace

Jméno a příjmení:	Marcela Lehotská
Katedra/Ústav:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. Eva Bártková, Ph.D.
Rok obhajoby:	2010

Název práce:	Algebraické struktury v úlohách
Název v angličtině:	The algebraic structures in tasks
Anotace práce:	Bakalářská práce se zabývá algebraickými strukturami. Výstupem praktické části práce je vytvořená sbírka řešených úloh, na kterých je daná problematika názorně demonstrována.
Klíčová slova:	Binární operace, vlastnosti binárních operací, algebraické struktury
Anotace v angličtině:	This bachelor thesis deals with algebraic structures. The outcome of the practical part is a handbook comprising a set of exercises with solutions which illustrate the given subject matter.
Klíčová slova v angličtině:	binary operation, binary operation features, algebraic structures
Přílohy vázané v práci:	Žádné
Rozsah práce:	46 stran
Jazyk práce:	Český jazyk