UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Uspořádané grupy

Vypracoval:	Petr Bařina
Studijní program:	B1701 Fyzika
Studijní obor:	Fyzika-Matematika
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí práce:	Doc. RNDr. Jan Kühr, Ph.D.

2013

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením doc. RNDr. Jana Kühra, Ph.D., výhradně za použití citované literatury.

V Olomouci dne 25. dubna 2013

Poděkování

Děkuji vedoucímu mé bakalářské práce doc. RNDr. Janu Kührovi, Ph.D., za ochotu, trpělivost a cenné rady, které mi poskytl. Dále děkuji své rodině, která mě podporovala po celou dobu studia.

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Petr Bařina
Název práce	Uspořádané grupy
Typ práce	Bakalářská
Pracoviště	Katedra algebry a geometrie
Vedoucí práce	Doc. RNDr. Jan Kühr, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2013
Abstrakt	Práce shrnuje základní vlastnosti a zabývá se důležitými příklady uspořádaných grup.
Klíčová slova	uspořádaná grupa, uspořádání, ℓ-grupa
Počet stran	29
Počet příloh	0
Jazyk	český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Petr Bařina
Title	Partially Ordered groups
Type of thesis	Bachelor
Department	Department of Algebra and Geometry
Supervisor	Doc. RNDr. Jan Kühr, Ph.D.
The year of presentation	2013
Abstract	The thesis summarizes basic properties and collects important examples of partially ordered groups.
Keywords	partially ordered group, partial order, ℓ-group
Number of pages	29
Number of appendices	0
Language	czech

Obsah

Úvod

Uspořádaná grupa je struktura, která je současně grupou i uspořádanou množinou a navíc platí monotónost sčítání vzhledem k uspořádání. Motivací pro studium těchto struktur je především jejich další využití v různých uspořádaných topologických prostorech. Existuje mnoho nejrůznějších konstrukcí uspořádaných grup. V této práci se zabývám především uspořádanými grupami, které jsou uspořádány lineárně nebo jsou vzhledem k uspořádání svazem.

Práce je rozdělena na několik částí. V první kapitole se zavádí pojem uspořádané grupy a charakterizuje se kladný kužel. Dále se zabývá nejdůležitějšími vlastnostmi kladného kužele.

Druhá kapitola je v podstatě sbírka řešených příkladů zahrnující nejrůznější konstrukce uspořádaných grup. Asi nejdůležitějším příkladem je příklad 8, který se zabývá automorfismy řetězce T.

Třetí a čtvrtá kapitola se zabývají základními vlastnostmi uspořádaných grup a zavádí pojem absolutní hodnoty a ortogonálních prvků, které pak dále zkoumá.

Poslední kapitola nastiňuje problém archimedovských linárně uspořádaných grup a obsahuje důkaz Hölderovy věty. Tato důležitá věta říká, že každá archimedovská lineárně uspořádaná grupa je izomorfní s podgrupou reálných čísel.

1 Uspořádané grupy

Definice 1. *Uspořádaná grupa* je struktura $\mathcal{G} = (G; \cdot, \leq)$, kde $(G; \cdot)$ je grupa a $\leq$ uspořádání takové, že pro každé $f, g, h \in G$ platí $f \leq g \Rightarrow fh \leq gh \;\&\; hf \leq hg$. Je-li $(G; \leq)$ řetězec, $\mathcal{G}$ se nazývá *lineárně uspořádaná grupa*. Je-li $(G; \leq)$ svaz, $\mathcal{G}$ se nazývá *svazově uspořádaná grupa* (krátce *ℓ-grupa*).

Z definice snadno plyne, že v ℓ-grupách je násobení distributivní přes svazové operace, tj. platí $x(u \vee v)y = xuy \vee xvy$ a duálně $x(u \wedge v)y = xuy \wedge xvy$. Opravdu, evidentně $x(y \vee z) \geq xy, xz$. Když $u \geq xy, xz$, pak $x^{-1}u \geq y, z$, tj. $x^{-1}u \geq y \vee z$, odkud $u \geq x(y \vee z)$. Tedy $x(y \vee z) = xy \vee xz$. Podobně se dokáže distributivita z prava. Důkaz pro $\wedge$ je duální.

V následujícím textu budeme většinou značit uspořádanou grupu $(G; \cdot, \leq)$ i grupu $(G; \cdot)$ písmenem G. Jednotku grupy G budeme obvykle značit 1.

Prvek $g \in G$ se nazývá *kladným prvkem*, jestliže $1 \leq g$. Množina všech kladných prvků se nazývá *kladný kužel* a značí se G^+. Podobně $g \in G$ se nazývá *záporný prvek*, když $g \leq 1$. Množina všech záporných prvků se nazývá *záporný kužel* a značí se G^-.

Kladný kužel G^+ charakterizuje uspořádání $\leq$, protože pro každé $f, g \in G$ evidentně platí $f \leq g \Leftrightarrow f^{-1}g \in G^+ \Leftrightarrow gf^{-1} \in G^+$.

Navíc v ℓ-grupě můžeme každý prvek $g \in G$ zapsat ve tvaru $g = ab^{-1}$ pro některé $a, b \in G^+$. Skutečně, položíme-li $a = g \vee 1$ a $b = g^{-1} \vee 1$, potom $gb = g(g^{-1} \vee 1) = 1 \vee g = a$, tj. $g = ab^{-1}$.

Věta 2. *Grupu G lze uspořádat, právě když existuje podmnožina $P \subseteq G$ taková, že platí:*

1. *$P \cap P^{-1} = \{1\}$, kde $P^{-1} = \{g^{-1} \mid g \in P\}$,*
2. *$P \cdot P = P$,*
3. *$xPx^{-1} = P$ pro každé $x \in G$.*

Uspořádání je lineární, právě když $P \cup P^{-1} = G$.

Důkaz. Nechť $\leq$ je kompatibilní uspořádání na G a nechť $P = G^+$ je kladný kužel určený tímto uspořádáním. Když $x \in P \cap P^{-1}$, pak platí $x \geq 1$ a současně $x = y^{-1}$ pro některé $y \geq 1$. Tedy $1 \geq y^{-1} = x$, a proto $x = 1$ a první tvrzení platí. Zvolme nyní

$x, y \in P$. Platí $x \geq 1$ a $y \geq 1$, a tedy i $xy \geq 1$. Důsledkem je, že $P \supseteq P \cdot P$. Třetí tvrzení dokážeme tak, že zvolíme $y \in P$; pak pro každé $x \in G$ platí $xyx^{-1} \geq x1x^{-1} = 1$, a tak $xyx^{-1} \in P$. Proto $xPx^{-1} \subseteq P$. Toto platí pro všechna x, tedy když x nahradíme x^{-1}, získáme $x^{-1}Px \subseteq P$, což nám dává opačnou inkluzi $P \subseteq xPx^{-1}$.

Předpokládejme, že P je podmnožina G, která splňuje dané tři podmínky. Definujme relaci $\leq$ na G takto: $x \leq y \Leftrightarrow yx^{-1} \in P$. Je jasně vidět, že $\leq$ je reflexivní. Když $x \leq y$ a $y \leq x$, pak $yx^{-1} \in P$ a také $(yx^{-1})^{-1} = xy^{-1} \in P$ (tj. $yx^{-1} \in P^{-1}$). Z první podmínky dostáváme $yx^{-1} = 1$, tedy $y = x$ a relace $\leq$ je antisymetrická. Dokážeme ještě tranzitivitu. Zvolme $x \leq y$ a $y \leq z$. Pak $yx^{-1} \in P$ a $zy^{-1} \in P$. Pak $zy^{-1}yx^{-1} = zx^{-1} \in P$, tedy $x \leq z$. Tedy relace $\leq$ je uspořádáním na G. Abychom ověřili kompatibilitu, vezměme $x \leq y$. Pak $yx^{-1} \in P$ a podle třetí podmínky pro všechna $a, b \in G$ platí

$$ayb(axb)^{-1} = aybb^{-1}x^{-1}a^{-1} = ayx^{-1}a^{-1} \in P,$$

tedy $axb \leq ayb$. Z toho plyne, že $\leq$ je kompatibilní s násobením. Konečně všimněme si, že $1 \leq y$, právě když $y \in P$, tedy P je kladným kuželem vzhledem k uspořádání, které je určeno množinou P.

Předpokládejme nyní, že $P \cup P^{-1} = G$. Potom pro všechna $x, y \in G$ platí $xy^{-1} \in P$ nebo $xy^{-1} \in P^{-1}$, tedy $xy^{-1} \geq 1$ nebo $xy^{-1} \leq 1$. V prvním případě máme $x \geq y$ a ve druhém $x \leq y$. Proto G je lineárně uspořádaná. Naopak, pokud G je lineárně uspořádaná, pro všechna $x \in G$ platí $x \geq 1$ nebo $x \leq 1$. Proto $x \in P$ nebo $x \in P^{-1}$, a tedy $G = P \cup P^{-1}$. □

Následující věta dává odpověď na otázku, které monoidy jsou kladným kuželem některé uspořádané grupy:

Věta 3. *Monoid $(P; \cdot)$ je kladným kuželem některé uspořádané grupy, právě když*

1. *v P lze krátit,*
2. *$\forall a, b \in P : ab = 1 \Rightarrow a = b = 1$,*
3. *$\forall a \in P : aP = Pa$.*

Důkaz. Důkaz věty 3 lze najít například v [2]. Uveďme aspoň nástin důkazu: Podle pomínek (1) a (3) pro každé $x, y \in P$ existuje jediný prvek $x_y \in P$ takový, že $xy = yx_y$. Definujeme-li na $P \times P$ násobení předpisem $(a, b) \cdot (c, d) = (ac_b, db)$, pak $(P \times P; \cdot)$ je pologrupa. Dál na $P \times P$ zavedeme ekvivalenci $\sim$ takto: $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad_b = cb$. Pak $\sim$ je kongruence na $(P \times P; \cdot)$ a faktorová pologrupa $(P \times P; \cdot)/\sim$ je grupa, do níž se původní pologrupa $(P; \cdot)$ vnoří zobrazením $x \mapsto [(x,0)]_\sim$. Množina $\{[(x,0)]_\sim \mid x \in P^2\}$, tj. kopie P pak splňuje podmínky $(1), (2)$ a (3) z věty 3, a je tedy kladným kuželem jistého uspořádání na grupě $(P \times P; \cdot)/\sim$. $\square$

Poznámka 1. Jestliže P splňuje tyto podmínky, potom na P existuje přirozené uspořádání, které je definováno takto: $a \leq b \Leftrightarrow b = ax$ pro některé $x \in P \Leftrightarrow b = ya$ pro některé $y \in P$. Navíc když chápeme P jako kladný kužel G, potom toto uspořádání splývá s uspořádáním indukovaným G.

Důkaz. Nejprve si všimněme, že podle podmínky 3 máme $b = ax$ pro některé $x \in P$, právě když $b = ya$ pro některé $y \in P$. Reflexivita $\leq$ je zřejmá. Když $a \leq b$ & $b \leq a$, pak $b = ax$ a $a = by$ pro některé $x, y \in P$, tedy $a = by = axy$. Z podmínek 1 a 2 dostáváme $x = y = 1$, tj. $a = b$. Tedy $\leq$ je antisymetrická. Tranzitivita je evidentní: když $a \leq b$ & $b \leq c$, pak $c = axy$, tj. $a \leq c$. Nyní předpokládejme, že P je kladný kužel uspořádané grupy G. Nechť $a, b \in P$ a $a \leq b$ v G. V tom případě ale můžeme psát $b = a(a^{-1}b)$, kde $a^{-1}b \in P$. Naopak, když $a \leq b$ v P, tj. $b = ax$ pro některé $x \in P$, pak $a^{-1}b = x \in P$, a tedy $a \leq b$ v G. Tedy obě uspořádání na P splývají. $\square$

2 Příklady uspořádaných grup

Příklad 1. Přirozená čísla, celá čísla, racionální čísla a reálná čísla vzhledem k obvyklému sčítání a uspořádání jsou lineárně uspořádané grupy.

Příklad 2. Nechť G je libovolná grupa. G se nazývá triviálně uspořádaná, jestliže platí $f \leq g \Leftrightarrow f = g$, tj. $(G; \leq)$ je antiřetězec. Vzhledem k $\leq$ je G uspořádaná grupa.

Poznámka 2. Každou grupu lze uspořádat triviálně. Netriviální netriviálně uspořádaná grupa je ovšem vždy nekonečná.

Důkaz. Nechť G je netriviální a netriviálně uspořádaná, tj. existují $a, b \in G$ tak, že $a < b$. Pak $x = a^{-1}b > 1$ a $x^n > 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, protože $1 < x \leq x^2 \ldots$. Kdyby $x^k = x^l$ pro některé $k, l \in \mathbb{N}$, $k > l$, pak by platilo $x^{k-l} = 1$, přičemž $k - l \in \mathbb{N}$, což není možné.

$\square$

Příklad 3. Komplexní čísla s upořádáním $a + bi \leq x + yi \Leftrightarrow a \leq x \;\&\; b \leq y$ tvoří ℓ-grupu.

Důkaz. Komplexní čísla se sčítáním tvoří komutativní grupu. Zjistíme, zda $\leq$ je uspořádání. Reflexivita je zřejmá. Ověříme asymetrii. Nechť $a + bi, x + yi \in \mathbb{C}$ takové, že $a + bi \leq x + yi \;\&\; x + yi \leq a + bi$. Pak $a = x \;\&\; b = y$, tedy $a + bi = x + yi$. Ověříme tranzitivitu. Nechť $a+bi, c+di, e+fi \in \mathbb{C}$ takové, že $a+bi \leq c+di \;\&\; c+di \leq e+fi$. Pak $a \leq e \;\&\; b \leq f$, tedy $a+bi \leq e+fi$. Tedy $\leq$ je uspořádání. Nyní ověříme, jestli se jedná o uspořádanou grupu vzhledem k tomuto uspořádání. Nechť $a + bi, x + yi, c + di \in \mathbb{C}$ a platí $a + bi \leq x + yi$. Pak $a \leq x \;\&\; b \leq y$ implikuje $a + c \leq x + c \;\&\; b + d \leq y + d$, tedy $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \leq (x + c) + (y + d)i = (x + yi) + (c + di)$. Komplexní čísla s tímto uspořádáním tvoří tedy uspořádanou grupu, která však není uspořádána lineárně, protože v ní existují nesrovnatelné prvky (například $2 + 3i$ a $3+2i$). Zbývá ověřit, že uspořádaná množina $(\mathbb{C}; \leq)$ je svazem. Vezměme dvě libovolná čísla $a + bi$, $c + di \in \mathbb{C}$. Evidentně platí $(a + bi) \wedge (c + di) = (a \wedge c) + (b \wedge d)i$ a $(a+bi) \vee (c+di) = (a \vee c) + (b \vee d)i$, tedy uspořádaná množina je svazem a $(\mathbb{C}; +, \leq)$ ℓ-grupa. Popíšeme si kladný kužel $(\mathbb{C}; +, \leq)$. Prvek $a+bi$ je kladný, právě když $0 \leq a+bi$, tj. $a \geq 0 \;\&\; b \geq 0$. $\square$

Příklad 4. Komplexní čísla s uspořádáním $a + bi \leq x + yi \Leftrightarrow a < x$ nebo $(a = x \;\&\; b \leq y)$ tvoří lineárně uspořádanou grupu.

Důkaz. Opět musíme nejprve ověřit, že $\leq$ je uspořádání. Důkaz je velmi podobný předešlému příkladu. Reflexivita je zřejmá. Antisymetrie: nechť $a+bi, x+yi \in \mathbb{C}$ taková, že $a+bi \leq x+yi$ & $x+yi \leq a+bi$. Pak $[a < x$ nebo $(a = x$ & $b \leq y)]$ & $[x < a$ nebo $(a = x$ & $b \leq y)]$. Vzhledem k tomu, že nemůže platit současně $a < x$ a $a > x$, musí být $a = x$. Dále pak současně platí $b \leq y$ a $b \geq y$, tedy $b = y$. Celkově dostáváme $a+bi = x+yi$. Ověříme tranzitivitu. Nechť $a+bi, c+di, e+fi \in \mathbb{C}$. Když $a+bi \leq c+di$ & $c+di \leq e+fi$, tj. $[a < c$ nebo $(a = c$ & $b \leq y)]$ & $[c < e$ nebo $(c = e$ & $d \leq f)]$, pak $a < e$ nebo $(a = e$ & $b \leq f)$, tedy $a+bi \leq e+fi$. Dokážeme monotónost sčítání. Nechť $a+bi, x+yi, c+di \in \mathbb{C}$ a platí $a+bi \leq x+yi$. Když $a < x$, pak $a+c < x+c$ a tedy $(a+bi)+(c+di) \leq (x+yi)+(c+di)$. Když $a = x$ a $b \leq y$, pak $a+c = x+c$ a $b+d \leq y+d$, tedy $(a+bi)+(c+di) \leq (x+yi)+(c+di)$. Jedná se o uspořádanou grupu. Z definice uspořádání $\leq$ je vidět, že je to lineární uspořádání, tedy $(\mathbb{C}; +, \leq)$ je lineárně uspořádaná grupa. Popíšeme kladný kužel. Prvek $a+bi$ je kladný, právě když $0 \leq a+bi$, tj $a > 0$ nebo $(a = 0$ & $b \geq 0)$. □

Příklad 5. Komplexní čísla s uspořádáním $a+bi \leq x+yi \Leftrightarrow (a = x$ & $b = y)$ nebo $(a < x$ & $b < y)$ tvoří uspořádanou grupu, která však není ℓ-grupa.

Důkaz. Důkaz je podobný jako v předešlých případech. Reflexivita je jasná. Asymetrie je také jasně vidět. Ověříme tranzitivitu. Nechť $a+bi, c+di, e+fi \in \mathbb{C}$. Když $(a = c$ & $b = d)$ & $(c = e$ & $d = f)$, je vidět $a+bi \leq e+fi$. Podobně pro $(a = c$ & $b = d)$ & $(c < e$ & $d < f)$ a $(a < c$ & $b < d)$ & $(c < e$ & $d < f)$. Ověříme monotónost sčítání. Nechť $a+bi, x+yi, c+di \in \mathbb{C}$. Z $a+bi \leq x+yi$ plyne $a+c = x+c$ a $b+d = y+d$, a tedy $(a+bi)+(c+di) \leq (x+yi)+(c+di)$. Ve druhém případě z $a+c < x+c$ a $b+d < y+d$ také vyplývá $(a+bi)+(c+di) \leq (x+yi)+(c+di)$. Tedy $(\mathbb{C}; +, \leq)$ je uspořádanou grupou. Zbývá dokázat, že existují dvojice prvků, které nemají infimum nebo supremum. Vezměme si například prvky $1+2i$ a $2+i$. Vidíme, že $\sup\{1+2i, 2+i\}$ neexistuje, protože společné horní závory jsou prvky $x+yi$ takové, že $x > 2$ & $y > 2$. Zbývá ještě popsat kladný kužel. Prvek $x+yi$ je kladný, když $0 \leq x+yi$, tj. $x = y = 0$ nebo $(x > 0$ & $y > 0)$. □

Příklad 6. Nechť $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a > 0 \right\}$. Pak G je uspořádaná grupa vzhledem k násobení matic a uspořádání: $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a < x$ nebo $(a = x$ & $b \leq y)$.

Důkaz. Tento příklad je podobný příkladu 4. Tato struktura je grupa. Reflexivita je zřejmá.

Nyní předpokládejme, že $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ a platí

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \& \ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z první podmínky plyne $a < c$ nebo $(a = c \ \& \ b \leq d)$, ze druhé $c < a$ nebo $(c = a \ \& \ b \leq d)$. Je vidět, že musí platit $a = c$ a $b = d$, tedy $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ověříme tranzitivitu. Nechť $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \& \ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pak $[a < c$ nebo $(a = c \ \& \ b \leq d)] \ \& \ [c < e$ nebo $(c = e \ \& \ d \leq f)]$, tedy

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dokážeme monotónost násobení matic. Nechť $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ a $c, d \in \mathbb{Q}$ a platí $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} x & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pak $a < x$ nebo $a = x \ \& \ b \leq y$.

1. Nechť $a < x$. Pak $ac < xc$ a tedy

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} xc & xd + y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Nechť $a = x \ \& \ b \leq y$. Pak platí $[ac = xc \ \& \ (ad + b \leq ad + y)]$ a $[ac = xc \ \& \ (ad + b \leq xd + y)]$. To implikuje

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} xc & xd + y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podobně by se dokázalo, že násobení je monotóní zleva. Uspořádání je evidentně lineární. Kladný kužel je množina kladných prvků $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Prvek $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je kladný, právě když $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, tj. $a > 1$ nebo $(a = 1 \;\&\; b \geq 0)$.

□

Příklad 7. Nechť V je racionální vektorový prostor s bází $\{\vec{b_i} \mid i \in I\}$. Nechť $\vec{v}, \vec{w} \in V$ a dále platí, že $\vec{v} = \sum_{i \in I_0} q_i \vec{b_i}$ a $\vec{w} = \sum_{i \in I_0} r_i \vec{b_i}$, kde I_0 je konečná podmnožina I a $q_i, r_i \in \mathbb{Q}$. Definujme $\vec{v} \leq \vec{w}$, právě když $q_i \leq r_i$ (jako racionální čísla) pro všechna $i \in I_0$. Pak V je ℓ-grupa.

Důkaz. Reflexivita je zřejmá. Provedeme důkaz antisymetrie. Zvolme $\vec{u} = \sum_{i \in I_0} r_i \vec{b_i}$, $\vec{v} = \sum_{i \in I_0} q_i \vec{b_i} \in V$, tak že $\vec{u} \leq \vec{v} \;\&\; \vec{v} \leq \vec{u}$. Pak $r_i \leq g_i \;\&\; g_i \leq r_i$ pro každé $i \in I$, tedy $\vec{u} = \vec{v}$. Pro dokázání tranzitivity předpokládejme $\vec{a} = \sum_{i \in I_0} p_i \vec{b_i}$, $\vec{b} = \sum_{i \in I_0} r_i \vec{b_i}$, $\vec{c} = \sum_{i \in I_0} s_i \vec{b_i} \in V$ takové, že $\vec{a} \leq \vec{b} \;\&\; \vec{b} \leq \vec{c}$. Pak $p_i \leq r_i \;\&\; r_i \leq s_i$, tedy $\vec{a} \leq \vec{c}$.

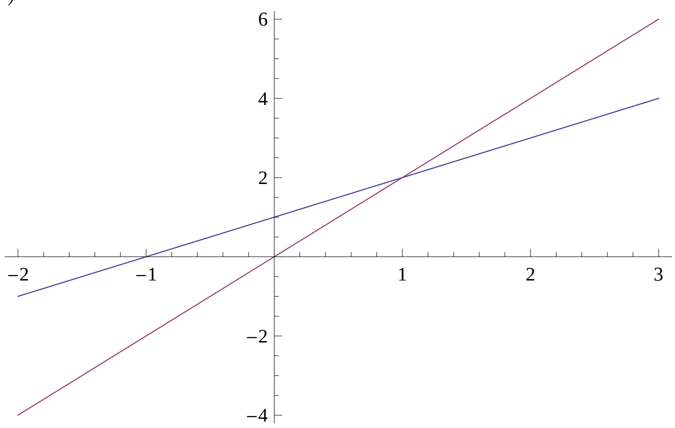
Ještě dokážeme monotónost sčítání. Nechť vektor $\vec{u} = \sum_{i \in I_0} q_i \vec{b_i}$, $\vec{v} = \sum_{i \in I_0} r_i \vec{b_i}$, $\vec{w} = \sum_{i \in I_0} s_i \vec{b_i} \in V$ a platí $\vec{u} \leq \vec{u}$. Pak pro každé $i \in I_0$, $q_i \leq r_i \Rightarrow q_i + s_i \leq r_i + s_i$, tedy $\vec{u} + \vec{w} \leq \vec{v} + \vec{w}$. Je dokázáno, že V je uspořádaná grupa. Ještě popíšeme supremum a infimum každých dvou vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Evidentně platí $\vec{u} \vee \vec{v} = \sum_{i \in I_0} (r_i \vee q_i) \vec{b_i}$, podobně $\vec{u} \wedge \vec{v} = \sum_{i \in I_0} (r_i \wedge q_i) \vec{b_i}$. Kladný kužel: vektor $\vec{u}$ je kladný, právě když $\vec{0} \leq \vec{u}$, tj. $0 \leq r_i$ pro všechna $i \in I_0$. Jedná se o ℓ-grupu. □

Příklad 8. Nechť T je lineárně uspořádaná množina. Označme $A(T)$ množinu všech permutací f na T, které splňují podmínku: pro každé s, $t \in T: \; s \leq t \Leftrightarrow f(s) \leq f(t)$. Takové permutace se nazývají automorfismy řetězce T, odtud označení $A(T)$. Potom $A(T)$ je ℓ-grupa vzhledem ke skládání zobrazení a uspořádání po bodech: $f \leq g \Leftrightarrow f(t) \leq g(t)$ pro každé $t \in T$. Tato grupa se nazývá ℓ-grupa automorfismů řetězce T.

Důkaz. Zvolme $f, g \in A(T)$. Pak pro každé $s, t \in T$ platí $s \leq t \Leftrightarrow f(s) \leq f(t)$ $\Leftrightarrow g(f(s)) \leq g(f(t)) \Leftrightarrow (f \cdot g)(s) \leq (f \cdot g)(t)$, tj. $f \cdot g \in A(T)$. Tedy $A(T)$ je vzhledem ke skládání zobrazení grupa. Ověříme, zda takto definované $\leq$ je uspořádání. Relace $\leq$ je reflexivní. Důkaz antisymetrie je také zřejmý. Nechť $f, g \in A(T)$. Když $f \leq g$ a $g \leq f$, pak platí $f(s) \leq g(s)$ a současně $g(s) \leq f(s)$ pro všechna $s \in T$. To je ale splněno pouze pro $f(s) = g(s)$. Musí tedy být $f = g$. Zvolme nyní $f, g, h \in A(T)$ taková, že

$f \leq g$ a $g \leq h$. Pak pro každé $s \in T$ platí $f(s) \leq g(s)$ & $g(s) \leq h(s) \Rightarrow f(s) \leq h(s)$. Tedy $f \leq h$.

Relace uspořádání je definována korektně. Dokážeme, že se jedná o uspořádanou grupu. Nechť f, g, $h \in A(T)$ a $f \leq g$. Pak pro každé $t \in T$ platí $f(t) \leq g(t) \Rightarrow h(f(t)) \leq h(g(t))$, tj. $(f \cdot h)(t) \leq (g \cdot h)(t)$. Analogicky, $f \leq g$ implikuje $f(h(t)) \leq g(h(t))$, tj. $(h \cdot f)(t) \leq (h \cdot g)(t)$. Tato grupa není řetězcem, protože v ní existují nesrovnatelné prvky, například v $A(\mathbb{R})$ funkce f a g definované takto $f(x) = x + 1$ a $f(x) = 2x$.



Existuje však $f \vee g$ každých dvou zobrazení f, $g \in A(T)$, kde $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Ověříme, že $f \vee g$ je automorfismem. Předpokládejme, že $\max\{f(x), g(x)\} = \max\{f(y), g(y)\}$ pro některé $x, y \in T$. Rozlišíme jednotlivé případy. Když $f(x) = f(y)$ nebo $g(x) = g(y)$, pak $x = y$. Když $f(x) = g(y)$, pak $x = y$, protože kdyby $x < y$, pak $f(y) > f(x) = g(y)$, což je spor. Podobně pro $f(y) = g(x)$. Tedy $f \vee g$ je injektivní. Surjekce je zřejmá. Ještě dokážeme, že $x \leq y \Leftrightarrow (f \vee g)(x) \leq (f \vee g)(y)$. Můžeme opět rozlišit jednotlivé případy. Když $f(x) \leq f(y)$ nebo $g(x) \leq g(y)$, pak $x \leq y$. Když $f(x) \leq g(y)$, pak $x \leq y$, protože když $x > y$, tak $f(x) \leq g(y) < g(x)$, což je spor s tím, že $max\{f(x), g(x)\} = f(x)$.

Kladný kužel je množina všech $f \in A(T)$, pro které platí: $id \leq f$, kde $t = id(t) \leq f(t)$ pro všechna $t \in T$. □

Poznámka 3. Tento příklad souvisí s Hollandovou větou. Tato věta říká, že každou ℓ-grupu je možné vnořit do ℓ-grupy automorfismů některého řetězce T. Důkaz je možné najít například v [3].

Příklad 9. Nechť $C[0, 1]$ je množina všech reálných spojitých funkcí na intervalu [0,1]. Spolu s operací sčítání tvoří komutativní grupu. Na ní je uspořádání definováno následovně $f \leq g \Leftrightarrow$ pro každé $x \in I$ $f(x) \leq g(x)$.

Důkaz. Důkaz je podobný předešlým příkladům. Jedná se opět o uspořádání po bodech. Je zřejmé, že C je grupa. Důkaz uspořádání je také jasný. Relace je reflexivní a antisymetrická, protože pro $f, g \in C$ evidentně z $f \leq g$ a $f \geq g$ plyne $f(x) \leq g(x)$ a $f(x) \geq g(x)$ pro všechna $x \in I$, tedy $f = g$. Zvolne nyní $f, g, h \in C$. Když $f \leq g$ & $g \leq h \Rightarrow f(x) \leq g(x)$ & $g(x) \leq h(x)$, tedy $f \leq h$ pro všechna $x \in I$. Infimum je množina všech $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, kde $x \in I$. Podobně supremum je množina všech $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Kladný kužel: prvek f je kladný, právě když $n \leq f$, kde $0 = n(x) \leq f(x)$ pro všechna $x \in I$. Jedná se také o ℓ-grupu.

□

Definice 4. Kartézský součin $G = \prod_{i \in I} G_i$ je množina všech zobrazení $g : I \to \bigcup_{i \in I} G_i$ takových, že $g(i) \in G_i$ pro každé $i \in I$. Definujeme-li $f \cdot g$ předpisem $(f \cdot g)(i) = f(i) \cdot g(i)$, pak G je grupa, tzv. *direktní součin grup* G_i. *Direktní součet* $\sum_{i \in I} G_i$ je pak definován takto: označíme-li $supp(g) = \{i \in I \mid g(i) \neq 0\}$ (tzv. *nosič funkce* g), pak $\sum_{i \in I} G_i = \{g \in \prod_{i \in I} G_i \mid supp(g) \text{ je konečný}\}$.

Příklad 10. Nechť G_i $(i \in I)$ jsou uspořádané grupy. Direktní součin je definován jako direktní součin grup $G = \prod_{i \in I} G_i$ uspořádaný po složkách, tj pro $f, g \in G$, $f \leq g \Leftrightarrow$ pro každé $i \in I : f(i) \leq g(i)$. Pak $\sum_{i \in I} G_i$ je podgrupa $\prod_{i \in I} G_i$. Uspořádání zůstává stejné.

Důkaz. Stejně jako v předchozích příkladech snadno ověří, že $G = \prod_{i \in I} G_i$ je uspořádaná grupa, protože uspořádání je definováno po bodech. Protože $\sum_{i \in I} G_i$ je podgrupa $G = \prod_{i \in I} G_i$, je to vzhledem ke stejnému uspořádání také uspořádaná grupa.

□

Připomeneme krátce pojem *dobře uspořádané množiny*. Řekneme, že uspořádaná množina $(G; \leq)$ je dobře uspořádaná, jestliže každá její neprázdná podmnožina má nejmenší prvek. Je zřejmé, že každá dobře uspořádaná množina je uspořádaná lineárně.

Příklad 11. Nechť I je dobře uspořádaná množina. Nechť G_i $(i \in I)$ jsou uspořádané grupy. Direktní součin grup $\prod_{i \in I} G_i$ lze uspořádat *lexikograficky*: $f \leq g \Leftrightarrow f(i) = g(i)$ nebo $f(i) < g(i)$, kde $i \in I$ je nejmenší takové, že $f(i) \neq g(i)$.

Důkaz. Jedná se o zobecnění příkladů 4 a 6. □

Příklad 12. Nechť $W = \mathbb{Z}\mathrm{Wr}\mathbb{Z}$ je množina dvojic (β, a), kde $a \in \mathbb{Z}$ a $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Definujme $(\beta_1, a_1)+(\beta_2, a_2) = (\gamma, a_1 + a_2)$, kde $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ je dáno předpisem $\gamma(x) = \beta_1(x) + \beta_2(x + a_1)$. Pak W je grupa. Uspořádání je dáno kladným kuželem: $(\beta, a) \in W^+ \Leftrightarrow a > 0$ nebo $(a = 0\ \&\ \beta(x) \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{Z})$. Tato konstrukce se nazývá *věncový součin.*

Důkaz. Nejprve ověříme, že tato struktura je grupou. Zjistíme, zda je sčítání asociativní. Nechť (β_1, a_1), (β_2, a_2), $(\beta_3, a_3) \in W$. Pak

$$((\beta_1,a_1) + (\beta_2,a_2)) + (\beta_3, a_3) = (\gamma_1, a_1 + a_2) + (\beta_3, a_3) = (\delta, a_1 + a_2 + a_3),$$

kde $\gamma_1(x) = \beta_1(x)+\beta_2(x+a_1)$ a $\delta(x) = \gamma_1(x)+\beta_3(x+a_1+a_2) = \beta_1(x)+\beta_2(x+a_1)+\beta_3(x + a_1 + a_2)$. Podobně

$$(\beta_1,a_1) + ((\beta_2,a_2) + (\beta_3, a_3)) = (\beta_1,a_1) + (\gamma_2, a_2 + a_3) = (\delta, a_1 + a_2 + a_3),$$

kde $\gamma_2(x) = \beta_2(x) + \beta_3(x + a_2)$ a $\delta(x) = \beta_1(x) + \gamma_2(x + a_1) = \beta_1(x) + \beta_2(x + a_1) + \beta_3(x + a_1 + a_2)$.

Dostáváme, že $(W; +)$ je pologrupa. Najdeme nulový prvek. Vzhledem k tomu, že druhou složkou prvků z W je celé číslo a sčítá se obvyklým způsobem, musí být nulový prvek ve tvaru $(\nu, 0)$. Musí platit $(\beta_1, a_1) + (\nu, 0) = (\beta_1, a_1)$, kde $\beta_1(x) = \beta_1(x) + \nu(x + a_1)$. Z toho je vidět, že pro zobrazení ν musí platit $\nu(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{Z}$. Nyní najdeme ke každému prvku opačný prvek. Musí platit $(\beta_1, a_1) + (\beta_1, a_1)^* = (\nu, 0)$. Je zřejmé, že druhou složkou bude číslo $-a_1$. Pak $\nu(x) = \beta_1(x) + \beta_1^*(x + a_1) = 0$, tedy $\beta_1^*(x) = -\beta_1(x - a_1)$. Opačným prvkem k (β_1, a_1) je dvojice $(\beta_1^*, -a_1)$, kde $\beta_1^*(x) = -\beta_1(x - a_1)$.

Uspořádání je dáno kladným kuželem, což můžeme ekvivalentně přepsat ve tvaru $(\beta, a) \leq (\gamma, b) \Leftrightarrow a < b$ nebo $(a = b\ \&\ \beta(x) \leq \gamma(x)$ pro každé $x \in \mathbb{Z})$. Ověříme, že $\leq$ je uspořádání. Reflexivita je jasná. Dokážeme asymetrii. Nechť (α, a), $(\beta, b) \in W$. Pak $(\alpha, a) \leq (\beta, b)\ \&\ (\beta, b) \leq (\alpha, a)$ implikuje $(a < b$ nebo $a = b\ \&\ \alpha(x) \leq \beta(x)$ pro každé $x \in \mathbb{Z})\ \&\ (b < a$ nebo $b = a\ \&\ \beta(x) \leq \alpha(x)$ pro každé $x \in \mathbb{Z})$, tedy $a = b\ \&\ \alpha(x) = \beta(x)$ pro každé $x \in \mathbb{Z}$. Nyní vezměme (α, a), (β, b), $(\gamma, c) \in W$. Když $(\alpha, a) \leq (\beta, b)\ \&\ (\beta, b) \leq (\gamma, c)$, pak $(a < b$ nebo $a = b\ \&\ \alpha(x) \leq \beta(x)$ pro každé $x \in \mathbb{Z})\ \&\ (b < c$ nebo $\beta(x) \leq \gamma(x)$ pro každé $\in \mathbb{Z})$. Z toho vyplývá $a < c$ nebo $\alpha(x) \leq \gamma(x)$ pro každé $x \in \mathbb{Z}$.

Nyní dokážeme monotónost sčítání. Nechť (α, a), (β, b), $(\gamma, c) \in \mathbb{Z}\mathrm{Wr}\mathbb{Z}$. Dále nechť platí $(\alpha, a) \leq (\beta, b)$.

Když $a < b$, pak $a+c < b+c$ a tedy $(\delta_1, a+c) \leq (\delta_2, b+c)$, kde $\delta_1(x) = \alpha(x)+\gamma(x+a)$ a $\delta_2(x) = \beta(x) + \gamma(x + b)$. Z toho dostáváme $(\alpha, a) + (\gamma, c) \leq (\beta, b) + (\gamma, c)$.

Když $a = b$, pak $\alpha(x) \leq \beta(x)$. Přičtením c k oběma stranám rovnice a $\gamma(x + a)$ k nerovnici, získáme $a + c = b + c$ a $\alpha(x) + \gamma(x + a) \leq \beta(x) + \gamma(x + b)$. To ale znamená $(\alpha, a) + (\gamma, c) \leq (\beta, b) + (\gamma, c)$.

Jedná se o uspořádanou grupu. Tato grupa není však uspořádána lineárně. Příkladem dvou nesrovnatelných prvků jsou (α, a), $(\beta, b) \in W$, kde $\alpha(x) = x + 1$, $\beta(x) = 2x$ pro všechna $x \in \mathbb{Z}$. Jedná se o ℓ-grupu. □

Příklad 13. Nechť Γ je *kořenový systém*, tj. uspořádaná množina, kde pro každé $\alpha \in \Gamma$, $\{\beta \in \Gamma \mid \alpha \leq \beta\}$ je řetězec. Nechť $G_\alpha (\alpha \in \Gamma)$ jsou lineárně uspořádané grupy. Nechť $V(\Gamma, G_\alpha)$ je množina takových $g \in \prod_{\alpha\in\Gamma} G_\alpha$, že $supp(g)$ je $\emptyset$ nebo má maximální prvek. Pak $V(\Gamma, G_\alpha)$ je podgrupa $\prod_{\alpha\in\Gamma} G_\alpha$. Uspořádání je definováno takto: g je kladný prvek $\Leftrightarrow$ $g(\alpha)$ je kladný prvek G_α pro každé $\alpha \in \Gamma$, které je maximální prvek $supp(g)$. Tato ℓ-grupa se nazývá Hahnova ℓ-grupa.

Důkaz. Ověříme, že $V(\Gamma, G_\alpha)$ je podgrupa kartézského součinu $\prod_{\alpha\in\Gamma} G_\alpha$. Nechť $a, b \in V(\Gamma, G_\alpha)$. Můžeme předpokládat, že $supp(a) \neq \emptyset \neq supp(b)$. Platí $supp(a - b) \subseteq supp(a) \cup supp(b)$, proto $supp(a - b)$ má maximální prvek, pokud $supp(a - b) \neq \emptyset$.

Uspořádání si přepíšeme do tvaru $f \leq g \Leftrightarrow f = g$ nebo $f \neq g$, tj. $supp(g - f) \neq \emptyset$ & $f(\alpha) < g(\alpha)$ pro každé α, které je maximální v $supp(g - f)$. Je vidět, že se jedná o relaci uspořádání. Přičtením libovolného prvku z $V(\Gamma, G_\alpha)$ se uspořádání nezmění, protože se sčítá po bodech. Tedy $V(\Gamma, G_\alpha)$ je uspořádaná grupa. Zřejmě platí $f \vee g = \{f(\alpha) \vee g(\alpha) \mid \alpha \in \Gamma\}$ a $f \wedge g = \{f(\alpha) \wedge g(\alpha) \mid \alpha \in \Gamma\}$. Celkově dostáváme, že $V(\Gamma, G_\alpha)$ je ℓ-grupa.

□

3 Základní vlastnosti

Definice 5. Řekneme, že grupa je *bez torze*, jestliže $g^n \neq 1$ pro každé $g \in G \backslash \{1\}$ a $n \in \mathbb{N}$, tj. 1 je jediný prvek konečného řádu.

Věta 6. *Každá lineárně uspořádaná grupa je bez torze.*

Důkaz. Nechť G je lineárně uspořádaná grupa a $g \in G$. Jestliže $g \neq 1$, pak $g > 1$ nebo $g^{-1} > 1$. Když $g > 1$, pak $g^n > 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, proto platí $g^n \neq 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Podobně ve druhém případě. $\square$

Připomeňme, že když G je uspořádaná grupa, pak G^+ je podle věty 3 normální podmnožina G, tj. $xG^+ = G^+x$ pro všechna $x \in G$. Podgrupu grupy G generovanou G^+ budeme značit $\langle G^+ \rangle$. Každé $g \in \langle G^+ \rangle$ pak můžeme psát ve tvaru $g = fh^{-1}$ pro některé $f, h \in G^+$.

Definice 7. Uspořádaná grupa se nazývá *usměrněná*, právě když každé dva prvky mají horní a dolní závoru.

Věta 8. *Uspořádaná grupa G je usměrněná, právě když $\langle G^+ \rangle = G$.*

Důkaz. Předpokládejme, že G je usměrněná. Nechť $g \in G$. Potom existuje $h \in G$ takové, že $h \geq g, 1$. Pak $h, hg^{-1} \in G^+$ a $g = (hg^{-1})^{-1}h$. Proto $\langle G^+ \rangle = G$. Naopak, když $\langle G^+ \rangle = G$ a $g \in G$, pak existují $f, h \in G^+$ takové, že $g = fh^{-1}$. Pak $f = gh \geq g$ a $f \geq 1$, tedy f je horní závora pro g a 1. Nyní nechť $a, b \in G$. Ukázali jsme, že existuje horní závora pro 1 a ab^{-1}, označme ji c. Pak cb je horní závora pro a i b. Podobně každé dva prvky z G mají dolní závoru. $\square$

Věta 9. *Nechť G je uspořádaná grupa a $g, h \in G$.*

1. *Když $g \vee h$ existuje v G, pak existuje také $g^{-1} \wedge h^{-1}$ a platí $g^{-1} \wedge h^{-1} = (g \vee h)^{-1}$.*

2. *Když $g \wedge h$ existuje v G, pak existuje také $g^{-1} \vee h^{-1}$ a platí $g^{-1} \vee h^{-1} = (g \wedge h)^{-1}$.*

Důkaz. Protože $g \vee h \geq g$, platí $(g \vee h)^{-1} \leq g^{-1}$. Podobně $(g \vee h)^{-1} \leq h^{-1}$. Když $f \leq g^{-1}, h^{-1}$, pak $f^{-1} \geq g, h$. Proto $f^{-1} \geq g \vee h$ a $f \leq (g \vee h)^{-1}$. Důsledkem je, že $g^{-1} \wedge h^{-1}$ existuje a je rovno $(g \vee h)^{-1}$. Důkaz duálního tvrzení je podobný. $\square$

Věta 10. *Nechť G je uspořádaná grupa a dále nechť $g, h \in G$ komutují.*

1. *Když* $g \vee h$ *existuje, pak existuje také* $g^n \vee g^{n-1}h \vee \cdots \vee gh^{n-1} \vee h^n = (g \vee h)^n$.

2. *Když* $g \wedge h$ *existuje, pak existuje také* $g^n \wedge g^{n-1}h \wedge \cdots \wedge gh^{n-1} \wedge h^n = (g \wedge h)^n$.

Důkaz. Provádí se indukcí. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že $g^n \vee g^{n-1}h \vee \cdots \vee gh^{n-1} \vee h^n = (g \vee h)^n$. Pak $(g \vee h)(g^n \vee g^{n-1}h \vee \cdots \vee gh^{n-1} \vee h^n) = g^{n+1} \vee g^n h \vee \cdots \vee gh^n \vee hg^n \vee \cdots \vee gh^n \vee h^{n+1} = g^{n+1} \vee g^n h \vee \cdots \vee gh^n \vee h^{n+1} = (g \vee h)^{n+1}$. Podobně pro $\wedge$. □

Lemma 11. *Nechť* G *je svazově uspořádaná grupa a* $x, y, z \in G^+$. *Pak*

$$x \wedge yz \leq (x \wedge y)(x \wedge z).$$

Důkaz. Zřejmě platí $(x \wedge y)(x \wedge z) = x^2 \wedge xz \wedge yx \wedge yz$. Protože $x^2 \wedge xz \wedge yx \geq x$, platí $(x \wedge y)(x \wedge z) \geq x \wedge yz$. □

Věta 12. *Nechť* G *je svazově uspořádaná grupa a* $g, h \in G$. *Když* $g \wedge h = 1$, *pak* g *a* h *komutují a* $g \vee h = gh$. *Navíc platí* $g \wedge hf = g \wedge f$ *pro všechna* $f \in G^+$.

Důkaz. Nechť G je ℓ-grupa a $f, g \in G$. Když $g \wedge h = 1$, pak $gh = g(g \wedge h)^{-1}h = g(g^{-1} \vee h^{-1})h = h \vee g$. Podobně by se dokázalo $gh = g \vee h$. Zvolme nyní $f \in G^+$. Pak $f \leq hf$ implikuje $g \wedge f \leq g \wedge hf \leq (g \wedge h)(g \wedge f) = g \wedge f$. □

Věta 13 (Rieszova interpolační vlastnost). *Nechť* G *je* ℓ*-grupa a nechť* $f, g_1, \ldots, g_n \in G^+$. *Jestliže* $f \leq g_1 \ldots g_n$, *pak existují* $f_1, \ldots, f_n \in G^+$ *tak, že* $f = f_1 \ldots f_n$ *a* $f_i \leq g_i$ *pro každé* $i = 1, \ldots, n$.

Důkaz. Provádí se indukcí. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme platnost pro $n > 1$. Když $1 \leq f \leq g_1 \ldots g_{n+1}$, pak $1 \leq fg_{n+1}^{-1} \vee 1 \leq g_1 \ldots g_n$. Pak $fg_{n+1}^{-1} \vee 1 = f_1 \ldots f_n$ pro některé $f_j \in G^+$takové, že $f_j \leq g_j$ $(1 \leq j \leq n)$. Ale $f(f \wedge g_{n+1})^{-1} = 1 \vee fg_{n+1}^{-1}$, takže platí $f = f_1 \ldots f_n(f \wedge g_{n+1})$. □

Jednoduché kritérium, aby uspořádaná grupa byla svazově uspořádanou grupou, říká následující věta.

Věta 14. *Uspořádaná grupa* G *je svazově uspořádaná, právě když* $x \vee 1$ *existuje pro každé* $x \in G$.

Důkaz. Nechť $a, b \in G$ a položme $x = (ab^{-1} \vee 1)b$, kde $ab^{-1} \vee 1$ existuje podle předpokladu. Je vidět, že $x \geq ab^{-1}b = a$ a $x \geq 1 \cdot b = b$, tedy x je horní závora $\{a, b\}$. Nyní vezměme $y \in G$ takové, že $y \geq a$ a $y \geq b$. Pak $yb^{-1} \geq ab^{-1}$ a $yb^{-1} \geq 1$, z čehož dostáváme $yb^{-1} \geq ab^{-1} \vee 1$, a proto $y \geq (ab^{-1} \vee 1)b$. Proto $a \vee b$ existuje v G a je rovno $(ab^{-1} \vee 1)b$. Důkaz existence $a \wedge b$ je podobný, proto G je ℓ-grupa. $\square$

Věta 15. *Nechť G je svazově uspořádaná grupa. Když $g^n \geq 1$ pro některé $n \in \mathbb{N}$, pak $g \geq 1$.*

Důkaz. Když G je svazově uspořádaná grupa a $g \in G$, pak $(g \wedge 1)^n = g^n \wedge g^{n-1} \wedge \cdots \wedge g \wedge 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Proto když $g^n \geq 1$, pak $(g \wedge 1)^n = g^{n-1} \wedge \cdots \wedge g \wedge 1 = (g \wedge 1)^{n-1}$. Proto $g \wedge 1 = 1$, tedy $g \geq 1$. $\square$

Důsledek 16. *Každá svazově uspořádaná grupa je bez torze.*

Věta 17. *Když G je lineárně uspořádaná grupa, pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $g, h \in G$ platí $g^n = h^n \Rightarrow g = h$.*

Důkaz. Vezměme $a, b \in G$ takové, že $a < b$. Ukážeme, že $a^m < b^m$ pro každé $m \in \mathbb{N}$. Pro $m = 1$ tvrzení platí. Předpokládejme, že $a^m < b^m$. Pak $a^{m+1} = a^m \cdot a < b^m \cdot a < b^m \cdot b = b^{m+1}$. Proto v každé lineárně uspořádané grupě $g^n = h^n$ implikuje $g = h$. $\square$

Věta 18. *Nechť G je ℓ-grupa. Prvky $g, h \in G$ jsou konjugované, když $g^n = h^n$ pro některé $n \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Nechť $g^n = h^n$. Položme $f = g^{n-1} \vee g^{n-2}h \vee \cdots \vee gh^{n-2} \vee h^{n-1}$. Pak $gf = g^n \vee g^{n-1}h \vee \cdots \vee g^2h^{n-2} \vee gh^{n-1} = g^{n-1}h \vee \cdots \vee gh^{n-1} \vee h^n = fh$, tedy $f^{-1}gf = h$. $\square$

Připomeňme, že svaz L se nazývá distributivní, když $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ pro každé $x, y, z \in L$. Je známo, že L je distributivní, právě když splňuje podmínku

$$(x \vee z = y \vee z \quad \& \quad x \wedge z = y \wedge z) \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Této charakterizace využijeme v důkazu následující věty.

Věta 19. *Nechť G je svazově uspořádaná grupa. Pak G je distributivní svaz.*

Důkaz. Nechť G je ℓ-grupa a $a, b, c \in G$ takové, že $a \wedge b = a \wedge c$ a $a \vee b = a \vee c$. Potom

$$b = (a \wedge b)a^{-1}a(a \wedge b)^{-1}b = (a \wedge b)a^{-1}a(a^{-1} \vee b^{-1})b = (a \wedge b)a^{-1}(b \vee a) =$$
$$= (a \wedge c)a^{-1}(c \vee a) = (a \wedge c)a^{-1}a(a^{-1} \vee c^{-1})c = c.$$

□

Věta 20. *Nechť G je svazově uspořádaná grupa a $f, g_i \in G$ $(i \in I)$. Když $\bigvee\{g_i \mid i \in I\}$ existuje v G, pak existuje také $\bigwedge\{g_i^{-1} \mid i \in I\}$, $\bigvee\{fg_i \mid i \in I\}$, $\bigvee\{g_i f \mid i \in I\}$ a $\bigvee\{f \wedge g_i \mid i \in I\}$. Navíc platí:*

1. $\bigwedge\{g_i^{-1} \mid i \in I\} = (\bigvee\{g_i \mid i \in I\})^{-1}$,
2. $\bigvee\{fg_i \mid i \in I\} = f(\bigvee\{g_i \mid i \in I\})$,
3. $\bigvee\{g_i f \mid i \in I\} = (\bigvee\{g_i \mid i \in I\})f$,
4. $\bigvee\{f \wedge g_i \mid i \in I\} = f \wedge \bigvee\{g_i \mid i \in I\}$.

Důkaz. Označme $g = \bigvee\{g_i \mid i \in I\}$. Pak platí $g^{-1} \leq g_i^{-1}$ a $fg \geq fg_i$ pro všechna $i \in I$.

1. Když $h \leq g_i^{-1}$ pro všechna $i \in I$, pak $h^{-1} \geq g_i$ pro všechna $i \in I$. Proto $h^{-1} \geq g$, tedy $h \leq g^{-1}$, tedy $g^{-1} = \bigwedge\{g_i^{-1} \mid i \in I\}$.
2. Když $h \geq fg_i$ pro všechna $i \in I$, pak $f^{-1}h \geq g_i$ pro všechna $i \in I$. Proto $f^{-1}h \geq g$, odkud $h \geq fg$. Tedy fg je supremum $\{fg_i \mid i \in I\}$.
3. Analogicky se ukáže, že gf je $sup\{g_i f \mid i \in I\}$.
4. Platí $f \wedge g \geq f \wedge g_i$ pro každé $i \in I$. Nechť $x \geq f \wedge g_i$ pro každé $i \in I$. Pak $g_i^{-1}x \geq g_i^{-1}(f \wedge g_i) = g_i^{-1}f \wedge 1 \geq g^{-1}f \wedge 1 = g^{-1}(f \wedge g)$, tj. $x \geq g_i g^{-1}(f \wedge g)$ pro každé $i \in I$. Ale $f \wedge g = gg^{-1}(f \wedge g) = \bigvee\{g_i \mid i \in I\}g^{-1}(f \wedge g) = \bigvee\{g_i g^{-1}(f \wedge g) \mid i \in I\}$. Proto $x \geq f \wedge g$, a tedy $f \wedge g = \bigvee\{f \wedge g_i \mid i \in I\}$.

□

Poznámka 4. Platí i duální tvrzení, tj. když $\bigwedge\{g_i \mid i \in I\}$ existuje, potom

1. $\bigvee\{g_i^{-1} \mid i \in I\} = (\bigwedge\{g_i \mid i \in I\})^{-1}$,
2. $\bigwedge\{fg_i \mid i \in I\} = f(\bigwedge\{g_i \mid i \in I\})$,
3. $\bigwedge\{g_i f \mid i \in I\} = (\bigwedge\{g_i \mid i \in I\})f$,
4. $\bigwedge\{f \vee g_i \mid i \in I\} = f \vee \bigwedge\{g_i \mid i \in I\}$.

4 Absolutní hodnota a ortogonální prvky

Definice 21. Nechť G je svazově uspořádaná grupa. Pro každé $x \in G$ definujeme *kladnou část* x takto: $x^+ = x \vee 1$. Podobně se definuje *záporná část* $x^- = x \wedge 1$.

Věta 22. *Nechť G je svazově uspořádaná grupa. Pak pro všechna $x, y \in G$ platí:*

1. $(x^+)^{-1} = (x^{-1})^-$ *a* $(x^-)^{-1} = (x^{-1})^+$,
2. $x \vee y = (yx^{-1})^+ x$ *a* $x \wedge y = x(x^{-1}y)^-$,
3. $x = x^+x^- = x^-x^+$,
4. $x \leq y$, *právě když* $x^+ \leq y^+$ *a* $x^- \leq y^-$.

Důkaz. 1. Plyne přímo z definice.

2. $x \vee y = (yx^{-1} \vee 1)x = (yx^{-1})^+x$ a $x \wedge y = x(x^{-1}y \wedge 1) = x(x^{-1}y)^-$.
3. $x(x^-)^{-1} = x(x^{-1} \vee 1) = 1 \vee x = x^+$, a tedy $x = x^+x^-$. Podobně $(x^-)^{-1}x = (x^{-1} \vee 1)x = 1 \vee x = x^+$, tedy $x = x^-x^+$.
4. Pokud $x \leq y$, je zřejmé, že $x^+ \leq y^+$ a $x^- \leq y^-$. Opačné tvrzení plyne z (3).

$\square$

Definice 23. Nechť G je svazově uspořádaná grupa. Pak pro každé $x \in G$ definujeme *absolutní hodnotu* x jako $|x| = x \vee x^{-1}$.

Příklad 14. V lineárně uspořádané grupě $(\mathbb{Z}; +, \leq)$ platí $x^+ = \max\{x, 0\}$, $x^- = \min\{x, 0\}$ a $|x| = \max\{x, -x\}$.

Věta 24. *Nechť G je svazově uspořádaná grupa. Pak pro všechna $x, y, z \in G$ platí*

1. $|x| = |x^{-1}|$,
2. $|x| \in G^+$,
3. $|x| = 1 \Leftrightarrow x = 1$,
4. $|x| \leq |y| \Leftrightarrow |y|^{-1} \leq x \leq |y|$,
5. $|xy^{-1}| = (x \vee y)(x \wedge y)^{-1} = |yx^{-1}|$,

6. $|x| = x^+(x^-)^{-1}$,

7. $x^+ \wedge (x^{-1})^+ = 1$,

8. $|x \vee y| \leq |x| \vee |y| \leq |x||y|$,

9. $|xy| \leq |x||y||x|$.

Důkaz. 1. Plyne přímo z definice.

2. $1 = (x \vee x^{-1})(x \vee x^{-1})^{-1} = (x \vee x^{-1})(x^{-1} \wedge x) \leq (x \vee x^{-1})^2 = |x|^2$. Z věty 15 vyplývá $|x| \geq 1$, tedy $|x| \in G^+$.

3. Když $1 = |x| = x \vee x^{-1}$, pak $x \leq 1$ a $x^{-1} \leq 1$, tedy $1 \leq x$. Proto $x = 1$.

4. Je vidět, že $|x|^{-1} = x \wedge x^{-1} \leq x \leq x \vee x^{-1} = |x|$. Proto když $|x| \leq |y|$, pak $|y|^{-1} \leq |x|^{-1}$, a tedy $|y|^{-1} \leq x \leq |y|$. Naopak když $|y|^{-1} \leq x \leq |y|$, pak také $|y|^{-1} \leq x^{-1} \leq |y|$, a proto $|x| = x \vee x^{-1} \leq |y|$.

5. Máme $|xy^{-1}| = xy^{-1} \vee (xy^{-1})^{-1} = xy^{-1} \vee yx^{-1} = xy^{-1} \vee yx^{-1} \vee 1 =$

   $= (xy^{-1} \vee 1)(yx^{-1} \vee 1) = (x \vee y)y^{-1}y(x^{-1} \vee y^{-1}) = (x \vee y)(x \wedge y)^{-1}$.

6. Platí $x^+(x^-)^{-1} = (x \vee 1)(x \wedge 1)^{-1} = (x \vee 1)(x^{-1} \vee 1) = 1 \vee x \vee x^{-1} = 1 \vee |x| = |x|$.

7. $(x \vee 1) \wedge (x^{-1} \vee 1) = (x \wedge x^{-1}) \vee 1 = (x^{-1} \vee x)^{-1} \vee 1 = 1$.

8. $|x \vee y| = x \vee y \vee (x \vee y)^{-1} \leq x \vee y \vee x^{-1} = |x| \vee y \leq |x| \vee |y|$. Navíc $|x| \leq |x||y|$ a $|y| \leq |x||y|$, tedy $|x| \vee |y| \leq |x||y|$.

9. $xy \leq |x||y| \leq |x||y||x|$ a $x^{-1}y^{-1} \leq |y||x| \leq |x||y||x|$. Proto $|x||y| \leq |x||y||x|$.

□

Důsledek 25. *V každé svazově uspořádané grupě platí $g_1 = 1, \ldots, g_n = 1$ právě když $|g_1| \vee \cdots \vee |g_n| = 1$.*

Věta 26. *Svazově uspořádaná grupa G je komutativní, právě když $|xy| \leq |x||y|$ pro každé $x, y \in G$.*

Důkaz. Nechť G je komutativní ℓ-grupa. Pro každé $x, y \in G$ platí $xy \leq |x||y|$ a $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \leq |y^{-1}||x^{-1}| = |y||x|$. Z $|x||y| = |y||x|$ dostaneme $xy \vee (xy)^{-1} \leq |x||y|$, tedy $|xy| \leq |x||y|$.

Naopak nechť $x, y \in G^+$. Pak $xy \in G^+$ a podle předpokladu $xy = |xy| = |(xy)^{-1}| = |y^{-1}x^{-1}| \leq |y^{-1}||x^{-1}| = |y||x| = yx$. Podobně $yx \leq xy$. Proto x a y komutují, tedy G^+ je komutativní. Nyní zvolme $x, y \in G$. Pak y^+ komutuje s $(x^{-1})^+$ i s $[(x^{-1})^+]^{-1} = x^-$. Podobně $(x^{-1})^+ = (x^-)^{-1}$ komutuje s $(y^{-1})^+ = (y^-)^{-1}$, tedy x^- komutuje s y^-. Proto platí $xy = x^+x^-y^+y^- = y^+y^-x^+x^- = yx$. □

Definice 27. Nechť G je svazově uspořádaná grupa. Pak $x, y \in G$ se nazývají *ortogonální*, pokud $|x| \wedge |y| = 1$.

Poznámka 5. Když jsou $x, y \in G^+$ ortogonální, pak podle věty 12 komutují.

Věta 28. *Nechť G je uspořádaná grupa a prvky $x, y, z \in G^+$. Když x a y jsou ortogonální a x a z jsou ortogonální, pak jsou ortogonální také x a yz .*

Důkaz. Je zřejmé, že $yz \in G^+$. Dále platí $x \wedge y = 1$ a $x \wedge z = 1$. Z věty 12 vyplývá $x \wedge yz = 1$. □

Důsledek 29. *Pokud $x, y \in G^+$ jsou ortogonální, pak jsou ortogonální také x^m, y^n pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $x \wedge y = 1$. Stačí dokázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x \wedge y^n = 1$. Pro $n = 1$ tvrzení platí. Když $x \wedge y^n = 1$, pak podle věty 28 $x \wedge y^{n+1} = 1$. Odtud ihned plyne, že $x^m \wedge y^n = 1$ pro každé $m \in \mathbb{N}$. □

Věta 30. *Nechť G je svazově uspořádaná grupa a $x, y \in G^+$ jsou ortogonální. Pak $(xy^{-1})^+ = x$ a $(xy^{-1})^- = y^{-1}$.*

Důkaz. Máme $(xy^{-1})^+ = xy^{-1} \vee 1 = x(y^{-1} \vee x^{-1}) = x(y \wedge x)^{-1} = x \cdot 1 = x$ a podobně $(xy^{-1})^- = xy^{-1} \wedge 1 = (x \wedge y)y^{-1} = 1 \cdot y^{-1} = y^{-1}$. □

Věta 31. *Nechť G je svazově uspořádaná grupa. Pro všechna $x \in G$ a pro $n \in \mathbb{N}$ platí $(x^+)^n = (x^n)^+$ a $(x^-)^n = (x^n)^-$.*

Důkaz. $(x^+)^n$ a $(x^-)^{-n}$ jsou ortogonální, a proto $[(x^+)^n(x^-)^n]^+ = (x^+)^n$. Ale protože x^+ a x^- jsou ortogonální, platí $(x^+)^n(x^-)^n = (x^+x^-)^n = x^n$. Proto $(x^n)^+ = (x^+)^n$. Podobně $(x^n)^- = (x^-)^n$. □

Důsledek 32. *Nechť G je ℓ-grupa a $x \in G$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $|x^n| = |x|^n$.*

Důkaz. Nechť $x \in G$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $|x^n| = (x^n)^+((x^n)^-)^{-1} = (x^+)^n((x^-)^n)^{-1} =$

$$= ((x^+(x^-)^{-1})^n = |x|^n.$$ □

Věta 33. *Nechť G je svazově uspořádaná grupa a $x, y \in G$ komutují. Pak pro všechna kladná celá čísla n platí $(x \vee y)^n = x^n \vee y^n$ a $(x \wedge y)^n = x^n \wedge y^n$.*

Důkaz. Pokud x a y komutují, pak komutují také $xy^{-1} \vee 1$ a y. Pak

$$(x \vee y)^n = (xy^{-1} \vee 1)^n y^n = [(xy^{-1})^+]^n y^n = [(xy^{-1})^n]^+ y^n = [(xy^{-1})^n \vee 1]y^n =$$
$$= [x^n y^{-n} \vee 1]y^n = x^n \vee y^n.$$

Podobně se dokáže $(x \wedge y)^n = x^n \wedge y^n$.

□

Věta 34. *Nechť G je svazově uspořádaná grupa a nechť $x_1, \dots, x_n \in G^+$ jsou po dvou ortogonální. Pak $x_1 \vee \dots \vee x_n = x_1 \dots x_n$.*

Důkaz. Věta 28 říká, že když $x_1 \wedge x_2 = 1$ a $x_1 \wedge x_3 = 1$, pak $x_1 \wedge x_2 x_3 = 1$. Předpokládejme nyní, že $x_1 \wedge x_2 \dots x_{n-1} = 1$ a $x_1 \wedge x_n = 1$. Pak platí $x_1 \wedge x_2 \dots x_n = 1$, tedy x_1 a $x_2 \dots x_n$ jsou ortogonální. Protože x_1, x_n jsou ortogonální, podle věty 12 platí $x_1 \vee x_n = x_1 x_n$. Předpokládejme, že platí $x_1 \vee x_2 \dots x_{n-1} = x_1 \dots x_{n-1}$. Pak $x_1 \dots x_n = (x_1 \vee x_2 \dots x_{n-1})x_n = x_1 x_n \vee x_2 \dots x_n = x_1 \vee x_n \vee x_2 \dots x_{n-1} \vee x_n = x_1 \vee x_2 \dots x_n$. Nyní předpokládejme, že pro $n \geq 2$ platí $x_1 \vee \dots \vee x_{n-1} = x_1 \dots x_{n-1}$. Pak platí $x_1 \vee \dots \vee x_{n-1} \vee x_n = x_1 \dots x_{n-1} \vee x_n = x_1 \dots x_n$. □

5 Archimedovské lineárně uspořádané grupy

Definice 35. Nechť G je uspořádaná grupa a $a, b \in G^+$. Jestliže $a^n \leq b$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak píšeme $a \ll b$. Řekneme, že G je *archimedovská*, když $a \not\ll b$ pro každé $a, b \in G^+ \setminus \{1\}$. Tedy kdyby pro některé $a, b \in G^+$ platilo $a \ll b$, pak by $a = 1$.

Je-li G lineárně uspořádaná archimedovská grupa, $a, b \in G^+$ a $a \leq b$, pak musí existovat $n \in \mathbb{N}$ takové, že $a^n \leq b < a^{n+1}$.

Věta 36. *Každá lineárně uspořádaná archimedovská grupa je komutativní.*

Důkaz. Nechť G je lineárně uspořádaná archimedovská grupa. Rozlišíme dva případy.

1. $G^+ \setminus \{1\}$ má nejmenší prvek. Pak pro každé $g \in G^+$ existuje takové $n \in \mathbb{N}$, pro které $a^n \leq g < a^{n+1}$. Z toho $1 \leq ga^{-n} < a$, tedy $ga^{-n} = 1$, tj. $g = a^n$. Vidíme, že G je cyklická grupa, tedy abelovská.

2. Předpokládejme, že $G^+ \setminus \{1\}$ nemá nejmenší prvek. Pak pro každé $a > 1$ existuje $c > 1$ tak, že $c^2 < a$. Opravdu, nechť $1 < b < a$ tak, že $b^2 \not< a$. Pak $b^{-1} < b^{-1}ab^{-1} < 1$, protože kdyby $a = b^2$, můžeme místo b vzít c takové, že $b > c > 1$, a v tom případě by platilo $a = b^2 > c^2$. Proto $1 < (ab^{-1})^2 < a$. Předpokládejme, že $f, g \in G^+$ nekomutují. Můžeme předpokládat, že $a = f^{-1}g^{-1}fg > 1$. Zvolme c takové, že $1 < c < c^2 < a, f, g$. Protože G je archimedovská, existují $m, n \in \mathbb{N}$ taková, že $c^m \leq f < c^{m+1}$ a $c^n \leq g < c^{n+1}$. Nyní $a = f^{-1}g^{-1}fg < c^{-m}c^{-n}c^{m+1}c^{n+1} = c^2$. To je spor s předpokladem, že $c^2 < a$.

□

Věta 37 (Hölderova)**.** *Každá archimedovská uspořádaná grupa je izomorfní s některou podgrupou* $(\mathbb{R}; +)$.

Důkaz. Nechť G je archimedovská lineárně uspořádaná grupa. Zvolme $c \in G^+ \setminus \{1\}$. Pro každé $g \in G^+$, označme $Q(g) = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}_0,\ n \neq 0,\ c^m \leq g^n\}$. Tato množina je neprázdná, protože $0 \in Q(g)$. Dále platí $Q(g) \neq \mathbb{Q}^+$ a z $\frac{r}{s} < \frac{m}{n} \in Q(g)$ plyne $\frac{r}{s} \in Q(g)$ (protože z $c^{nr} < c^{ms} \leq g^{ns}$ vyplývá $c^r \leq g^s$). Množina $Q(g)$ je tedy Dedekindovým řezem.

Definujme $\phi : G^+ \to \mathbb{R}$ takto: $\phi(g) = \sup Q(g)$. Dokážeme, že ϕ je homomorfismus grup. Nechť $\frac{m}{n} \in Q(f)$ a $\frac{r}{s} \in Q(g)$. Pak $c^m \leq f^n$ a $c^r \leq g^s$. Můžeme předpokládat, že $s = n$. Pak $c^{m+r} \leq f^n g^n = (fg)^n$, tj. $\frac{m+r}{n} \in Q(fg)$. Proto $Q(fg) \supseteq Q(f) + Q(g)$.

Podobně když $\frac{u}{n} \notin Q(f)$ a $\frac{v}{n} \notin Q(g)$, tj. $\frac{u}{n} > \frac{m}{n}$ pro každé $\frac{m}{n} \in Q(f)$ a $\frac{v}{n} > \frac{m}{n}$ pro každé $\frac{m}{n} \in Q(g)$, pak $c^u > f^n$ a $c^v > g^n$. Odtud $c^{u+v} > f^n g^n = (fg)^n$, tedy $\frac{u+v}{n} \notin Q(fg)$. To ale znamená $\frac{u+v}{n} \in Q(fg) \Rightarrow \frac{u+v}{n} \in Q(f) + Q(g)$, tedy $Q(fg) \subseteq Q(f) + Q(g)$. Proto $Q(fg) = Q(f) + Q(g)$ a odtud $\phi(fg) = \phi(f) + \phi(g)$.

Je vidět, že ϕ zachovává uspořádání. Nechť $f \leq g$ a $Q(f) = \{\frac{m}{n} \mid c^m \leq f^n\}, Q(g) = \{\frac{p}{n} \mid c^p \leq g^n\}$. Pak $c^m \leq f^n \leq g^n$. Odtud plyne $\sup Q(f) \leq \sup Q(g)$. Navíc když $g > 1$, pak $c < g^n$ pro některé $n \in \mathbb{N}$, tedy $\frac{1}{n} \in Q(g) \setminus Q(1)$, tj. jádro obsahuje pouze jednotku. Tedy ϕ je injektivní. Důsledkem je, že G je izomorfní s podgrupou $(\mathbb{R}; +)$. $\square$

Literatura

[1] A. M. W. Glass: *Partially Ordered Groups* , World Scientific, Singapore, 1999

[2] T. Blyth: *Lattices and Ordered Algebraic Structures*, Springer, London, 2005

[3] M. Anderson and T. Feil: *Lattice Ordered Groups: an introduction*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1988

[4] M. R. Darnel: *The Theory of Lattice-Ordered Groups*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 187, Marcel Dekker, 1995

[5] L. Fuchs: *Partially Ordered Algebraic Systems*, Pergamon Press, 1963

[6] V. M. Kopytov and A. I. Kokorin: *Fully Ordered Groups*, Halsted Press (John Wiley & Sons), 1974

[7] L. Beran: *Grupy a svazy*, SNTL, Praha, 1974