



# Vibroizolační systém s gyroskopickým stabilizátorem

## Disertační práce

*Studijní program:* P2301 – Strojní inženýrství  
*Studijní obor:* 3901V003 – Aplikovaná mechanika  
*Autor práce:* **Ing. Jan Škoda**  
*Vedoucí práce:* prof. RNDr. Jan Šklíba, CSc.





## Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou disertační práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé disertační práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li disertační práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Disertační práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé disertační práce a konzultantem.

Současně čestně prohlašuji, že tištěná verze práce se shoduje s elektronickou verzí, vloženou do IS STAG.

Datum:

Podpis:



# Anotace

Cílem práce bylo analyzovat navržené řešení zlepšení vibroizolace kývání okolo podélné a příčné osy ležícího pacienta v průběhu transportu sanitním vozem pomocí dvojosého gyroskopického stabilizátoru. Je předložen přehled problematiky gyroskopické stabilizace a matematického modelování gyroskopických stabilizátorů. Dále je analyzována možnost náhrady kompenzačního momentového pohonu gyroskopického stabilizátoru řízením pneumatických pružin. V závěru práce je rovněž řešena problematika samobuzeného kmitání dvojosého gyroskopického stabilizátoru.

## **Klíčová slova:**

Gyroskopická stabilizace, silový gyroskop, vibroizolace, řízená pneumatická pružina, samobuzené kmitání

# Annotation

The aim of this thesis was to analyze proposed improvement of vibration-isolation of rotations about longitudinal and transversal axes of the lying human patient during the transportation by an ambulance car by the use of the two-axis gyroscopic stabilizer. There is introduced an overview of the gyroscopic stabilization and mathematical modeling of gyroscopic stabilizers. Also the possibility of gyroscopic system compensation torque drive replacement by an active control of air springs is analyzed. Problems of self-oscillations of the two-axis gyroscopic stabilizer are dealt at the end.

## **Keywords:**

Gyroscopic stabilization, control moment gyroscope, vibration-isolation, controlled air spring, self-oscillations



## Poděkování

Děkuji zejména svému školiteli prof. RNDr. Janu Šklíbovi, CSc. za odborné vedení práce, podnětné konzultace a velmi cennou pomoc při rešerši ruskojazyčné literatury. Dále chci poděkovat Ing. Michalu Sivčákovi, Ph.D. za spolupráci při publikování výsledků na konferencích a v odborných časopisech.

# Obsah

Přehled značení.....	10
Úvod .....	12
<b>1 Obecné vlastnosti gyroskopických systémů .....</b>	<b>13</b>
1.1 Historie poznatků, definice gyroskopických systémů .....	14
1.2 Klasifikace sil a momentů.....	14
1.2.1 Gyroskopické síly .....	16
<b>2 Gyroskop v kardanově závěsu .....</b>	<b>17</b>
2.1 Astatický nekorigovaný gyroskop .....	17
2.2 Astatický gyroskop v kardanově závěsu s korekcí .....	19
2.2.1 Poruchové momenty .....	20
2.3 Gyroskopický amortizátor torzních kmitů.....	21
2.4 Jednoosé stabilizátory .....	21
2.5 Gyroskopický tandem.....	22
2.6 Dvojosé gyroskopické stabilizátory .....	23
2.7 Gyroskopické řízení orientace vesmírného objektu .....	24
<b>3 Způsoby odvození pohybových rovnic .....</b>	<b>25</b>
3.1 Druhá věta impulsová .....	25
3.2 Lagrangeovy rovnice 2. druhu a smíšeného typu .....	27
3.3 Routhovy rovnice .....	29
3.3.1 Gyroskopické síly závislé na parametru.....	30
3.4 Úplný a zkrácený systém pohybových rovnic .....	32
<b>4 Gyroskopická stabilizace a její způsoby.....</b>	<b>34</b>
4.1 Indikační a silové systémy .....	34
4.2 Dvojosé gyroskopické stabilizátory .....	35
4.3 Kompenzační systém stabilizátoru .....	35
4.3.1 Čidla poruchových momentů .....	36
4.3.2 Regulace kompenzačního systému.....	36
4.3.3 Kompenzační motory na osách kardanových rámu .....	37
4.3.4 Možnost náhrady kompenzačního motoru řízenou vzduchovou pružinou..	37
4.4 Korekční systém gyroskopického stabilizátoru.....	38
4.4.1 Čidla absolutní polohy .....	38
4.4.2 Čidla relativní polohy .....	40
4.4.3 Momentové motory na osách precesních rámečků.....	40
4.5 Slabé a silné nelinearity v gyroskopickém systému.....	40



<b>5</b>	<b>Vibroizolační systém s gyroskopickým stabilizátorem .....</b>	<b>41</b>
5.1	Odvození pohybových rovnic .....	42
5.1.1	Kinematika .....	43
5.1.2	Kinetická a potenciální energie.....	47
5.1.3	Pohybové rovnice .....	49
5.1.4	Momenty pneumatických pružin a tlumičů .....	50
5.1.5	Momenty korekčních a odlehčovacích zpětných vazeb.....	55
5.1.6	Linearizace odvozených pohybových rovnic.....	56
5.1.7	Hmotnostní parametry .....	57
5.2	Vlastní čísla .....	58
5.3	Stabilita systému .....	60
5.3.1	Oblast stability pro parametry radiálních korekcí .....	61
5.4	Nastavení korekčního a kompenzačního systému .....	63
5.4.1	Nastavení kompenzace a korekce horního rámu .....	64
5.4.2	Nastavení kompenzace a korekce spodního rámu .....	67
5.5	Náhrada kompenzačního motoru řízením pružin.....	72
5.5.1	Model řídicího ventilu.....	72
5.5.2	Matematický model pneumatické pružiny .....	75
5.5.3	Ověření funkce navržené náhrady kompenzačního motoru .....	76
5.5.4	Náhrada kompenzačního motoru – shrnutí.....	79
5.6	Přenos systému s dvojosým stabilizátorem .....	79
5.7	Experimentální model jednoosého gyroskopického stabilizátoru .....	84
5.8	Samobuzené kmitání dvojosého gyroskopického stabilizátoru způsobené stejnosměrným otáčením základny.....	85
5.8.1	Náhrada analytického vyjádření necoulombovského tření metodou harmonické linearizace.....	89
5.8.2	Amplitudy samobuzených kmitů .....	91
5.8.3	Rovnovážná poloha systému.....	92
5.8.4	Simulace pohybu systému se suchým třením v ose kardanova závěsu .....	92
	<b>Závěr .....</b>	<b>95</b>
	<b>Reference .....</b>	<b>97</b>
	<b>Vlastní publikace autora.....</b>	<b>99</b>
	<b>Seznam příloh.....</b>	<b>101</b>

## Přehled značení

V této práci užíváme pro označení vektorů minusky tučné antikvy (např.  $\mathbf{r}_{T_4}^3$ ), horním indexem pak značíme kartézský souřadnicový systém, v němž je vektor vyjádřen. V obrázcích budeme vektory coby jejich geometrickou interpretaci označovat kurzívou s šipkou nad písmenem (např.  $\vec{r}_{T_4}$ ). V obou případech je dolní index vyhrazen pro další označení vektoru. Matice budeme značit verzálkami tučné antikvy, přičemž dvojice číslic v horním indexu bude u transformačních matic označovat souřadnicové systémy, mezi nimiž transformace probíhá a to zprava do leva (např. matice  $\mathbf{T}^{23}$  transformuje souřadnice ze systému 3 do systému 2). Horní index u matice setrvačnosti pak označuje souřadnicový systém, v němž je matice setrvačnosti vyjádřena.

Pro označení časových derivací veličin budeme užívat symbolu s tečkou nad znakem, případně dvěma tečkami pro druhé derivace. Ostatní derivace budeme zapisovat nezkráceně.

<b>A</b>	symetrická matice hmotnosti
<b>B</b>	symetrická matice disipativních sil
<i>b</i>	tlumení (translační [N s m <sup>-1</sup> ]; rotační [N m s rad <sup>-1</sup> ])
<b>C</b>	symetrická matice konzervativních sil
<i>C</i> [m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup> Pa <sup>-1</sup> ]	pneumatická konduktivita (objem plynu uvažován při podmínkách ANR – atmosférický tlak, teplota 20°C, vlhkost 65%)
<b>E</b>	vektor sil nezávislých na zobecněných souřadnicích (kinematické buzení, tíhové síly)
<i>f</i> [Hz]	frekvence
<i>F</i> [N]	síla
<b>G</b>	antisymetrická matice gyroskopických sil
<i>G</i> [kg s <sup>-1</sup> ]	hmotnostní průtok
<i>g</i> [m s <sup>-2</sup> ]	tíhové zrychlení
<i>H</i> [kg m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup> ]	velký parametr – impulsmoment rotoru gyroskopu
<i>J</i> [kg m <sup>2</sup> ]	moment setrvačnosti
<i>k</i>	lineární koeficient radiální korekce
<b>K</b>	kinematický moment; matice radiálních korekcí
<i>l</i> [m]	délka
<i>m</i> [kg]	hmotnost
<i>M</i> [N m]	moment síly
<b>P</b>	antisymetrická matice radiálních korekcí
<i>R<sub>p</sub></i> [J K <sup>-1</sup> kg <sup>-1</sup> ]	specifická plynová konstanta
<i>p</i> [Pa]	tlak; přetlak
<i>p<sub>a</sub></i> [Pa]	atmosférický tlak

$q_i$	zobecněná souřadnice
$\mathbf{q}$	vektor zobecněných souřadnic
$Q$	zobecněná síla
$\mathbf{Q}$	vektor zobecněných sil
$\mathbf{r}^i$	polohový vektor vyjádřený v souřadnicovém systému $i$
$\vec{r}$	polohový vektor – označení geometrické reprezentace
$S_{ef}$ [m <sup>2</sup> ]	efektivní plocha pneumatické pružiny
$t$ [s]	čas
$\mathbf{T}^{ij}$	transformační matice ze souřadnicového systému $j$ do systému $i$
$T$ [J]	kinetická energie
$T$	označení těžiště; termodynamická teplota [K]; doba kmitu [s]
$\mathbf{u}^i$	vektor unášivé rychlosti vyjádřený v souřadnicovém systému $i$
$\mathbf{v}_{Tj}^i$	vektor relativní rychlosti těžiště tělesa $j$ v souřadnicovém systému $i$
$V$ [J]	potenciální energie
$V$ [m <sup>3</sup> ]	objem
$\alpha, \beta$ [rad]	úhel rotačního kinematického buzení základny
$\gamma, \Gamma$ [rad]	úhel vlastní rotace gyroskopu
$\varepsilon, E$ [rad]	precesní úhel gyroskopu
$\zeta$ [m]	vertikální translační buzení základny
$\vartheta$ [rad]	úhel ramena paralelogramu vůči spodní základně
$\lambda$ [rad s <sup>-1</sup> ]	vlastní číslo
$\mu$ [-]	první převodová funkce
$\rho_a$ [kg m <sup>-3</sup> ]	hustota vzduchu za podmínek ANR – $\rho_a = 1,185 \text{ kg m}^{-3}$
$\varphi$ [rad]	úhel natočení prvního rámu kardanova závěsu vůči rovině horní základny paralelogramu
$\psi$ [rad]	úhel natočení druhého rámu kardanova závěsu vůči rovině prvního rámu
$\boldsymbol{\omega}^i$ [rad s <sup>-1</sup> ]	vektor úhlové rychlosti vyjádřený v souřadnicovém systému $i$
$\omega$ [rad s <sup>-1</sup> ]	úhlová rychlost; úhlová frekvence

## Úvod

Téma této disertační práce bylo motivováno snahou o zlepšení vibroizolace ležícího pacienta při převozu sanitním vozem. V rámci výzkumného záměru MŠMT *Optimalizace vlastností strojů v interakci s pracovními procesy a člověkem* byl na Technické univerzitě v Liberci navržen odpružený závěs sanitního lehátka se třemi stupni volnosti, který měl umožňovat vibroizolaci ležícího pacienta při kombinaci svislé translace a dvou rotací okolo podélné a příčné osy. Kvalita vibroizolace byla poznamenána problémy s dosažením dostatečně nízkých vlastních frekvencí zejména kardanova závěsu zajišťujícího odpružení rotací. Vlastní frekvence podvozku resp. nástavby běžného sanitního vozu se pohybují v intervalech 1,5–2 Hz resp. 9–11 Hz, tedy pro dosažení dobré vibroizolace je nezbytné, aby se vlastní frekvence vibroizolačního systému nacházely mimo pásmo 1–11 Hz. Proto v roce 2007 navrhl profesor Šklíba se svým týmem rozšíření vibroizolačního systému o dvojosý gyroskopický stabilizátor se silovými gyroskopy. Je totiž známo, že při vhodné velikosti momentu hybnosti gyroskopů dojde k rozdělení vlastních frekvencí gyroskopického systému na precesní a nutační, přičemž nutační mají vysokou frekvenci a precesní mají frekvenci nízkou, případně může kmitání úplně vymizet a precesní pohyb se stává aperiodickým.

V první kapitole uvádíme přehled obecných vlastností gyroskopických systémů definice gyroskopických systémů a gyroskopických sil. Ve druhé kapitole přinášíme rešerši využití gyroskopických systémů. Třetí kapitola obsahuje přehled přístupů k sestavování pohybových rovnic gyroskopických systémů a ve čtvrté kapitole shrnujeme prostředky a součásti gyroskopických systémů.

Pátá kapitola pak obsahuje samotné řešení problematiky výše zmíněného vibroizolačního systému s dvojosým gyroskopickým stabilizátorem. Pokusíme se analyzovat vlastnosti odpruženého závěsu sanitního lehátka rozšířeného o dvojosý gyroskopický stabilizátor, pokusíme se definovat podmínky, za jakých by měl systém pracovat, a naznačíme možné postupy nalezení vhodných parametrů systému pro dosažení požadovaného chování. V závěru kapitoly provedeme analýzu možnosti samobuzeného kmitání dvojosého gyroskopického stabilizátoru vlivem necoulombovského suchého tření v osách kardanova závěsu.

# 1 Obecné vlastnosti gyroskopických systémů

Při řešení problému rotace tuhého tělesa kolem pevného bodu je možno říci, že vyšetřování tohoto problému se dělí na dva základní směry. První, klasický směr je soustředěn na otázku získání prvních integrálů pohybových rovnic tuhého tělesa kolem pevného bodu, případně jeho geometrické interpretace. Představiteli tohoto klasického směru byl L. Euler, J. Lagrange, L. Poinsot a S. Kovalevská. S rozvojem gyroskopické techniky, zhruba od začátku 20. století, se směr teoretického výzkumu změnil. Klasické úlohy řešené zmíněnými klasiky odešly do pozadí a ustoupily otázkám, které bylo nutno řešit v rámci rychle se rozvíjející techniky gyroskopických přístrojů. Zvláštní význam měl pak výzkum konkrétních, někdy velmi složitých, gyroskopických zařízení a jejich pracovním režimům na pohyblivém základě, vliv tření atd. hlavními představiteli tohoto směru byli L. Foucault, A. N. Krylov, N. Schuller a B. Bulgakov.

Ve své přírodní filozofii [1] W. Thomson a P. Tait nastínili ještě třetí směr, vyplývající z následného poznání: Pohybové rovnice mechanického systému s gyroskopy obsahují lineární členy s antisymetrickou maticí koeficientů. Její členy je možno označit buď jako síly (nazývají se obvykle gyroskopickými silami), nebo jednoduše jako gyroskopické členy. Jejich práce při libovolném skutečném přemístění je nulová. Tuto vlastnost je možno přijmout jako obecnou definici gyroskopických sil. Obecná teorie systémů s gyroskopickými silami dává jednak možnost nových pohledů na konkrétní gyroskopické systémy, jednak možnost zkoumat je nejen izolovaně, ale v obecných vzájemných souvislostech. V aplikované teorii gyroskopů je mnoho problémů, jejichž řešení je třeba hledat v rámci této obecné teorie. Jmenujme několik:

- a) Pohyb gyroskopického systému je popsán nelineárními diferenciálními rovnicemi 2. řádu. V některých případech je možné tento systém zjednodušit a nahradit jej stejným počtem rovnic prvního řádu – tzv. technickými rovnicemi. V řadě případů dává tento zkrácený systém dobré přiblížení původních rovnic, ale v některých případech vede k falešným výsledkům.
- b) Je známo, že rychle rotující volný gyroskop mající tři stupně volnosti zachovává svůj směr v inerciálním systému. Je také známo, že když takový gyroskop umístíme do kardanova závěsu, pak jeho poloha, v níž osa gyroskopu je totožná s osou vnějšího rámečku, je nestabilní (např. tzv. gimbal lock při misích Apollo). Je nutno ukázat na příznak, který určuje nestabilitu.

- c) Konkrétní systémy, jejichž pohyb je nutno vyšetřovat v současné technické praxi nejsou, jak se ukazuje, konzervativní. Současný záměr rozšířit obecné metody Thompsona a Taita i na nekonzervativní systémy a stanovit pro ně příznaky stability se jeví jako přirozený. Stejně tak se jedná o vyšetřování možnosti přechodu k zjednodušeným (technickým) rovnicím.

## 1.1 Historie poznatků, definice gyroskopických systémů

Vyšetřování vlivu silové struktury na stabilitu pohybu se ve skutečnosti začalo již ke konci 18. století v pracích Lagrange (1788 věta o stabilitě rovnováhy konzervativních systémů). Zhruba o 100 let později Rayleigh zavedl disipativní funkci a od té chvíle se začaly podrobně zkoumat vlivy disipativních sil na stabilitu a kmitání konzervativního systému. Konzervativní a disipativní síly ve všech reálných mechanických, elektromechanických a dalších systémech vznikají přirozeným způsobem (potenciální síly – síly tíhové, direkční síly pružin; disipativní síly – vznikají při pohybu tělesa v odporujícím prostředí a v elektrických obvodech při ohmickém odporu apod.).

Další krok ve vyšetřování vlivu struktury sil na pohyb systému udělali v roce 1879 W. Thomson a P. Tait. Podali obecnou definici gyroskopických sil a dokázali čtyři věty o stabilitě pohybu. V teorii kmitání se začaly vyšetřovat zrychlující síly (tzv. síly záporného tření – viz [2 p. str. 187]). Tyto síly působí ve směru pohybu a závisejí na rychlosti. Na konci 20. let minulého století se začaly vyšetřovat nekonzervativní polohové síly (tzv. cirkulační síly, síly radiálních korekcí), jejichž struktura se odlišuje od dosud známých sil a jejich význam v řadě technických aplikací se vyjasnil v plné míře teprve v druhé polovině 20. století. Vyšetřování vlivu struktury sil na charakter pohybu nezjednodušuje vždy numerickou stránku řešení, ale velmi často se podaří, v krajním případě kvalitativně, ocenit vliv sil rozličné struktury na stabilitu pohybu ještě před numerickým řešením.

## 1.2 Klasifikace sil a momentů

Podle Merkina [2] můžeme klasifikovat síly působící na mechanický systém následujícím způsobem. Pokud autonomní systém diferenciálních rovnic zapíšeme v maticovém tvaru

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_1\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_1\mathbf{q} = \mathbf{Q}^{(2)} \quad (1.1)$$

a  $\mathbf{q}$  je sloupcový vektor s členy  $q_1 \dots q_s$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_1$  a  $\mathbf{C}_1$  jsou zadané čtvercové matice dimenze  $s$  s konstantními koeficienty;  $\mathbf{Q}^{(2)}$  je vektor, jehož členy obsahují souřadnice  $q_k$  a jejich rychlosti  $\dot{q}_k$  ve stupních vyšších než prvních; matice  $\mathbf{A}$  je symetrická.

Matice  $\mathbf{B}_1$  a  $\mathbf{C}_1$  transformujeme na matice  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{C}$  a  $\mathbf{P}$  následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \mathbf{B}^T &= \frac{1}{2}(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1^T), & \mathbf{C} = \mathbf{C}^T &= \frac{1}{2}(\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_1^T), \\ \mathbf{G} = -\mathbf{G}^T &= \frac{1}{2}(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_1^T), & \mathbf{P} = -\mathbf{P}^T &= \frac{1}{2}(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_1^T). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Potom síly  $\mathbf{K} = -\mathbf{C}\mathbf{q}$  se symetrickou maticí  $\mathbf{C}$  nazýváme *potenciální*, nebo též *konzervativní*. Je-li  $\mathbf{B}$  maticí nezáporné kvadratické formy, nazýváme síly  $\mathbf{D} = -\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}$  *di-*

*sipativními* (*dissipative force due to positive resistance*), disipaci pak Merkin nazývá úplnou, je-li  $\mathbf{B}$  maticí pozitivně definitní kvadratické formy, jinak je disipace neúplná. Dále jestliže kvadratická forma matice  $\mathbf{B}$  nabývá záporných hodnot, říkáme, že  $\mathbf{D} = -\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}$  jsou síly *zrychlující* (*forces due to negative resistance*). Síly  $\mathbf{\Gamma} = -\mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}$ , které jsou lineárními funkcemi rychlostí  $\dot{q}_k$  s antisymetrickou maticí, nazýváme *gyroskopické* – viz kap. 1.2.1. A nakonec síly  $\mathbf{R} = -\mathbf{P}\mathbf{q}$ , jejichž složky jsou lineárními funkcemi antisymetrické matice, nazýváme silami *radiálních korekcí*. V literatuře též *nekonzervativní poziční*, nebo jen *nekonzervativní* (Merkin), případně síly *circulační* (H. Ziegler), nebo také *pseudogyroskopické síly* (P. W. Likins a E. E. Zajak).

Je zavedeným pravidlem u gyroskopických systémů psát členy matice gyroskopických sil násobené velkým parametrem  $H$  (bude později vysvětleno, takto označujeme moment hybnosti gyroskopu – tedy impulsmoment, což je zavedený název, který je téměř přesně roven součinu axiálního momentu setrvačnosti a úhlové rychlosti vlastní rotace gyroskopu). Vzhledem k tomu představují gyroskopické síly – tj. v pohybových rovnicích gyroskopické členy – dominantní veličinu, můžeme tedy rovnici přepsat takto (1.1) takto

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{B} + H\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \mathbf{P})\mathbf{q} = \mathbf{Q}^{(2)}. \quad (1.3)$$

Disipativní síly budeme klasifikovat tak, že jestliže stopa matice  $\mathbf{B}$

$$\text{tr}(\mathbf{B}_0) = \sum_{k=1}^s b_k = \sum_{k=1}^s b_{kk} = \text{tr}(\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B}_1) \quad (1.4)$$

je kladná, říkáme, že disipativní síly dominují nad zrychlujícími a obráceně.

Systém diferenciálních rovnic (1.1) můžeme s užitím vztahů z předchozích odstavců zapsat též ve tvaru

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}) = \text{grad}\Pi + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Gamma}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{P}\mathbf{q} + \mathbf{Q}^{(2)}, \quad (1.5)$$

kde

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{C}\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{2}\sum_k \sum_j c_{kj}q_kq_j, \quad (1.6)$$

je potenciální energie systému. Nakonec ještě připomeňme, že je-li funkce

$$F = \frac{1}{2}\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\sum_k \sum_j b_{kj}\dot{q}_k\dot{q}_j \quad (1.7)$$

funkcí nezápornou, pak  $F$  nazýváme disipativní, nebo též Raileighovou disipativní funkcí.

### 1.2.1 Gyroskopické síly

Obecná definice Thomsona a Taita [1]:

*„Síly nazýváme gyroskopickými, jestliže jejich výsledná práce na libovolném reálném nekonečně malém přemístění je nulová.“*

Poznamenejme, že gyroskopické síly mohou být jak reálnými silami působícími v systému tak prostě některými členy pohybových rovnic, jež jsou vyšetřovány jako síly (např. Coriolisovy síly). Jestliže použijeme tuto definici na soustavu určenou  $m$  obecnými souřadnicemi  $q_1 - q_m$ , obdržíme rovnice ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T_2}{\partial q_k} = Q_k + \Gamma_k, \quad (1.8)$$

kde  $T_2$  je pozitivně definitní kvadratická forma rychlostí  $\dot{q}_k$  ( $k = 1, \dots, s \leq k$ ). Je patrné, že kvadratická forma  $T_2$  představuje kinetickou energii a funkce  $Q_k$  a  $\Gamma_k$  jsou zobecněné síly. Síly  $\Gamma_k$  nazýváme gyroskopické, jestliže pro ně platí

$$\Gamma_1 dq_1 + \Gamma_2 dq_2 + \dots + \Gamma_s dq_s = 0, \quad (1.9)$$

$$\Gamma_1 \dot{q}_1 + \Gamma_2 \dot{q}_2 + \dots + \Gamma_s \dot{q}_s = 0. \quad (1.10)$$

Nechť síly  $\Gamma_k$  jsou lineárními funkcemi rychlostí  $\dot{q}_j$ :

$$\Gamma_k = g_{k1} \dot{q}_1 + g_{k2} \dot{q}_2 + \dots + g_{ks} \dot{q}_s = \sum_{j=1}^s g_{kj} \dot{q}_j, \quad (1.11)$$

dosadíme-li (1.11) do (1.10) obdržíme:

$$\sum_{k=1}^s \Gamma_k \dot{q}_k = \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s g_{kj} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s (g_{kj} + g_{jk}) \dot{q}_j \dot{q}_k = 0. \quad (1.12)$$

z toho vyplývá, že matice koeficientů  $\mathbf{G}_{kj}$  je antisymetrická a její determinant je

$$G = \begin{vmatrix} 0 & g_{12} & \dots & g_{1s} \\ g_{21} & 0 & \dots & g_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{s1} & g_{s2} & \dots & 0 \end{vmatrix}, \quad (g_{kj} = -g_{jk}).$$

Připomeňme, že antisymetrický determinant lichého řádu je identicky nulový a sudého řádu je roven kvadrátu jisté racionální funkce, platí např.:

$$G_2 = \begin{vmatrix} 0 & g_{12} \\ g_{21} & 0 \end{vmatrix} = g_{12}^2,$$

$$G_4 = \begin{vmatrix} 0 & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & 0 & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & 0 & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & 0 \end{vmatrix} = (g_{12}g_{34} - g_{13}g_{24} + g_{14}g_{23})^2.$$

A můžeme vhodným výběrem koeficientů docílit toho, aby byl nenulový – to má, jak uvidíme v příštích kapitolách, zásadní význam.



## 2 Gyroskop v kardanově závěsu

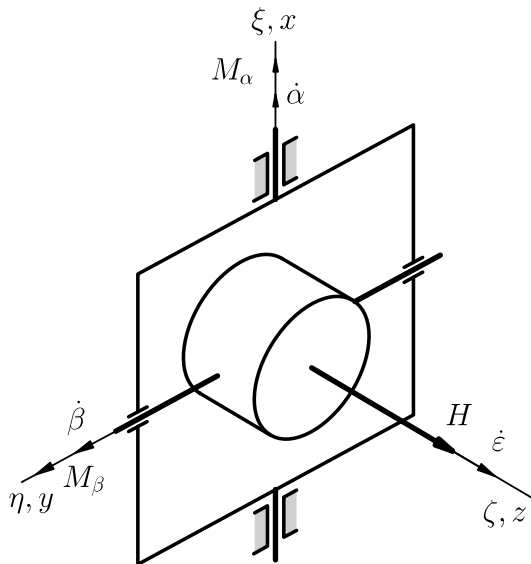
Gyroskopický stabilizátor řeší úlohu orientace stabilizované základny (platformy) vzhledem k zadanému směru v prostoru. Zvláštnost řízení tohoto stabilizátoru spočívá především v základních vlastnostech gyroskopu – to jest jeho reakci na vnější silové momenty. Gyroskopy se dvěma stupni volnosti (tzv. gyroelementy resp. gyromoduly – čeština nemá ustálený název) zabezpečují jak v inerciálním prostoru orientaci platformy, tak i průběžnou orientaci v případě jejího řízeného natáčení.

Přitom je nutno rozlišovat dva pracovní režimy gyroskopického stabilizátoru – režim korekce, který spočívá v zavedení vhodného momentu na osu precesního rámečku gyroskopu, čímž je korigována poloha stabilizované osy, a režim kompenzace (odlehčení), který na základě výchylky precesního rámečku od střední polohy (obvykle kolmé k ose vnějšího rámu) kompenzuje vnější poruchové momenty v ose vnějšího rámu.

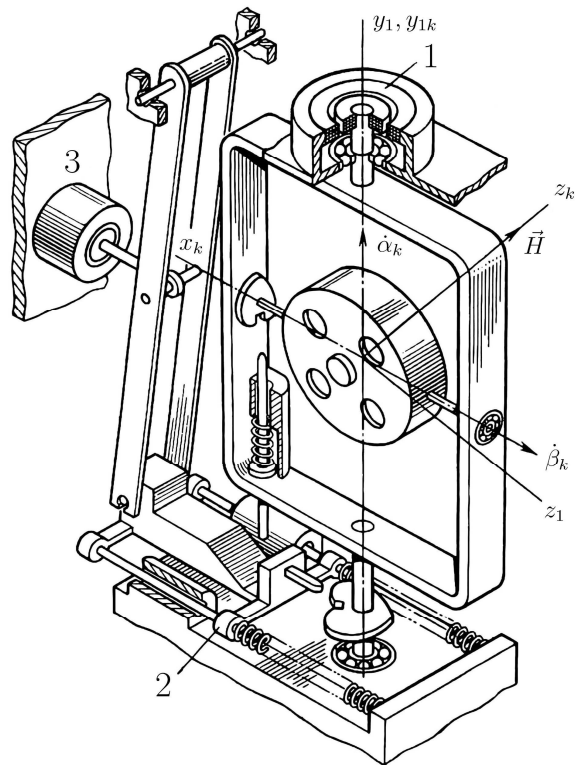
### 2.1 Astatický nekorigovaný gyroskop

Je to plně staticky vyvážený gyroskop v kardanově závěsu s dynamicky vyváženým rotorem, na který nepůsobí korekční momenty. Principiálně tedy zůstává osa gyroskopu pevná v inerciálním prostoru a může tedy sloužit jako báze pro určení úhlové polohy letícího objektu – letadla, řízené střely. Takový gyroskop je schopný určit dvě úhlové souřadnice a pro určení všech tří úhlových souřadnic potřebujeme minimálně dva takové gyroskopy. Používá se tedy tento gyroskop pro orientaci letícího objektu s krátkodobým působením, vedle toho též jako čidlo vnějšího momentu pro gyroskopický stabilizátor. Pracovní rozsah úhlů  $\alpha$ ,  $\beta$  (viz obr. 1) závisí na druhu použití. Pokud je například aplikován v gyroskopickém stabilizátoru a obě jeho souřadnice  $\alpha$ ,  $\beta$  jsou korekčním, nebo odlehčovacím systémem přiváděny k nulovým hodnotám, je pracovní rozsah několik stupňů. Obecně je ovšem pracovní rozsah dán kinematikou polohy základny gyroskopu. Vždy je nutné dbát na to, aby úhel vnitřního rámečku nepřevyšoval  $80^\circ$  (při  $90^\circ$  ztrácí gyroskop jeden stupeň volnosti, což znamená jeho nefunkčnost – tzv. „gimbal lock“), na druhé straně úhel vnějšího rámu není omezen. Při použití komutátorů pro přívod proudu je rozsah neomezen, při použití ohebných vodičů je  $\pm 80^\circ$ . Na zadaném rozsahu úhlů závisí v podstatě ložiska přístroje a schéma a konstrukce aretačního zařízení, které je nezbytné pro rozběh a start přístroje viz

obr. 2. Pro snímání hodnot úhlů  $\alpha$ ,  $\beta$  se nyní místo potenciometrů používají snímače bezkontaktní.



Obr. 1: Gyroskop se třemi stupni volnosti.



Obr. 2: Ukazatel kurzu (zdroj [3]): 1 – snímač kurzu; 2 – aretační mechanismus; 3 – aktuátor aretačního mechanismu.

Chyby astatického gyroskopu se třemi stupni volnosti z metodického hlediska dělíme na geometrické, kinematické a instrumentální:

### **Geometrické (kardanové) deviace**

Poloha objektu je určena úhly  $\alpha$ ,  $\beta$  vnějšího a vnitřního rámu. Směry os, kolem kterých se odečítají úhly  $\alpha$ ,  $\beta$  v obecném případě nesouhlasí s osami, kolem kterých odečítáme polohu objektu ve zvoleném souřadnicovém systému. Tento nesouhlas se jeví jako příčina kardanových deviací, jejichž hodnota se určuje pomocí vztahů sférické trigonometrie, nebo použitím maticového počtu.

### **Kinematické deviace**

Sem náleží tzv. rychlostní deviace, které vznikají v důsledku pohybu vztažného souřadnicového systému v inerciálním prostoru. Nejčastěji se jedná o zemský souřadnicový systém (obvykle v bodě startu – vertikála; poledník; rovnoběžka). Deviaci určují v prvním přiblížení složky zemské rotace, v druhém přiblížení respektujeme ještě pohyb objektu vůči tomuto systému.

### **Instrumentální chyby**

V důsledku nedokonalosti dílů přístroje působí na gyroskopy poruchové momenty tření, statické nevyváženosti, rozdílná tuhost konstrukce. Působením těchto momentů

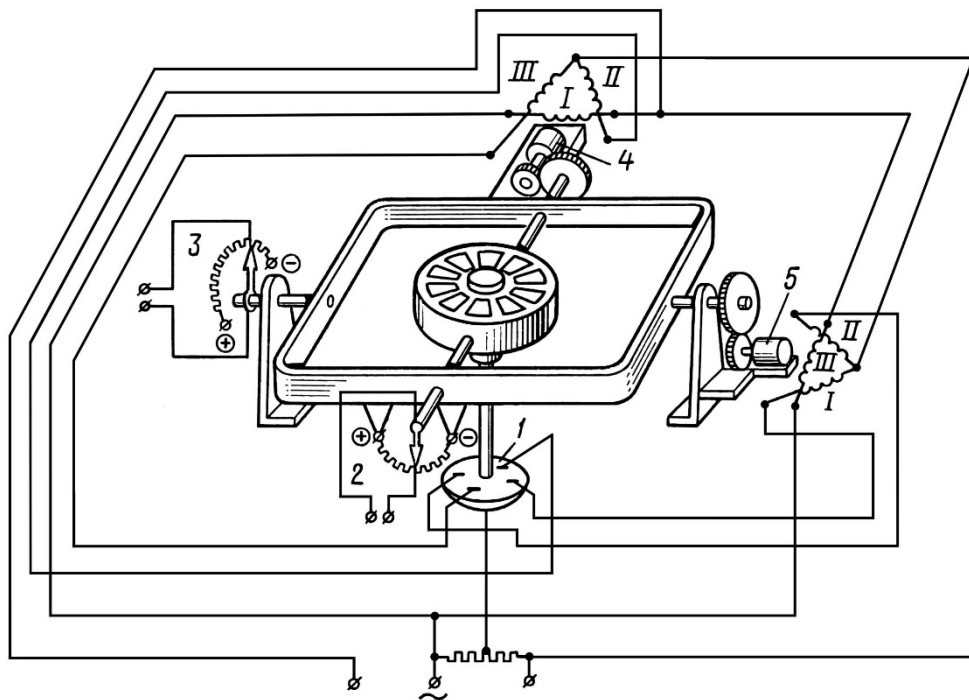
osa rotoru precesuje v inerciálním prostoru a odchyluje se od základního zadaného směru. Velikosti indikovaných odchylek se určují pomocí kinematické věty o nekomutativnosti konečných rotací.

## 2.2 Astatický gyroskop v kardanově závěsu s korekcí

### *Gyroskopická vertikála – tzv. umělý horizont*

Je základním přístrojem při pilotáži letadla. Osa gyroskopu je udržována ve vertikální poloze (rovnoběžná se  $z$ -ovou souřadnicí zemského souřadnicového systému).

Poloha vnitřního a vnějšího kardanova rámu se koriguje podle úhlových údajů dvousměrné libely umístěné na vnitřním rámu. Deviace gyroskopické vertikály se určují precesí gyroskopu a závisejí na přesnosti polohového snímače (libely).



Obr. 3: Schéma gyroskopické vertikály (zdroj [3]): 1 – dvousměrná libela; 2, 3 – snímače natočení; 4, 5 – asynchronní korekční motory

Deviace gyroskopické vertikály se obvykle dělí na rychlostní (při horizontálním letu po loxodromě s konstantní úhlovou rychlostí) a balistické (při zrychleném letu a letu v zatáčce). Jiné, podrobnější, dělení rozlišuje deviace vzniklé při letu po loxodromě a ortodromě. Při ustáleném letu po loxodromě je úhlová rychlost otáčení letadla okolo osy kolmé na obě osy kardanova závěsu gyroskopu:

$$\omega_{\zeta} = \frac{V}{R} \operatorname{tg} \varphi \sin \psi \quad (2.1)$$

kde  $\psi$  je kurzový úhel, tedy úhel mezi vektorem rychlosti a poledníkem  $\varphi$  je zeměpisná šířka vztažného místa,  $V$  je rychlost letu,  $R$  je poloměr Země. Způsobené odchylky jsou dány vztahem

$$\alpha_l = -\frac{1}{g} \left( \frac{V^2}{R} \operatorname{tg} \varphi \sin \psi + 2VU \sin \varphi \right), \beta_l = 0, \quad (2.2)$$

kde  $U$  je úhlová rychlost otáčení Země,  $\varphi$  je zeměpisná šířka vztažného místa a  $g$  je zemské tíhové zrychlení. Při ustáleném letu po ortodromě pak platí

$$\alpha_{or} = -\frac{1}{g} 2VU \sin \varphi. \quad (2.3)$$

### **Směrový setrvačník**

Je původně astatický gyroskop se třemi stupni volnosti v kardanově rámu se svislou osou vnějšího rámu. Těžiště vnitřního rámu je záměrně posunuto tak, aby kompenzovalo otáčení Země. Směrový setrvačník je určen pro kurzovou navigaci (lety malých letadel po loxodromách).

### **Gyromagnetický kompas**

Gyromagnetický kompas je tvořen gyroskopem se třemi stupni volnosti v kardanově závěsu se svislou osou vnějšího rámu. Momentový motor na ose vnějšího rámu udržuje vnitřní rám ve vodorovné poloze. Na vnitřním rámu je umístěn magnetický snímač. Zároveň je na ose vnitřního rámu momentový motor pro případnou opravu polohy vnějšího rámu. Tento přístroj slouží pro kurzovou orientaci při letu po loxodromě (loxodroma – křivka na zemském povrchu s konstantním úhlem kurzu vůči míjícím poledníkům). Obvykle byl využíván při letech na kratší vzdálenosti. Později byl jako kurzový systém nejvíce používán ukazatel směru ortodromy (ortodroma – geodetická křivka, která je nejkratší spojnici dvou bodů na zemském povrchu).

## **2.2.1 Poruchové momenty**

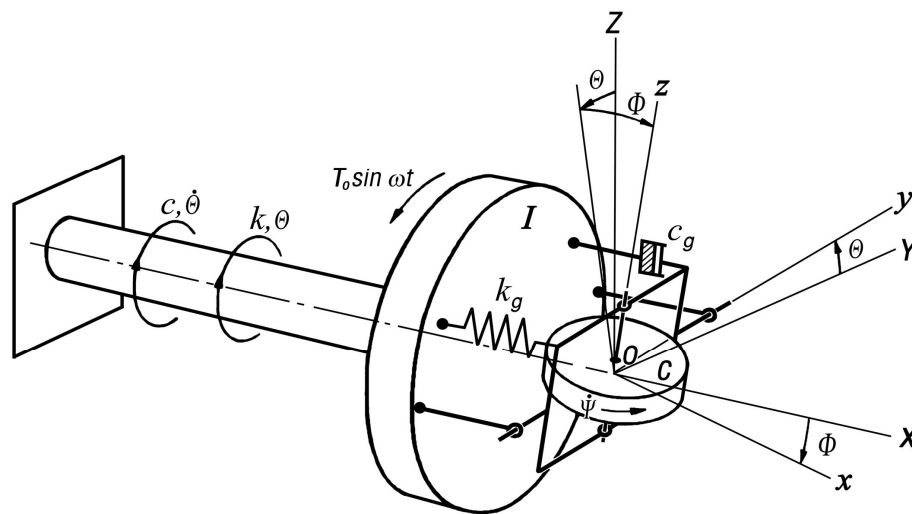
Veličiny poruchových momentů se obvykle charakterizují odpovídajícími složkami úhlové precesní rychlosti – *driftu*, tj. poměru vyšetřovaného momentu k impulsmomentu  $H$ . Pro astatický gyroskop, stejně jako i pro jiná gyroskopická čidla, se rozlišuje pro každou osu kardanova závěsu závislost precesní úhlové rychlosti na přetížení:

$$\begin{aligned} \omega_\alpha &= -M_\beta / H = \omega_{\alpha 0} + \omega_{\alpha 1x}^0 n_{x2} + \omega_{\alpha 1z}^0 n_{z2} + \omega_{\alpha 2}^0 n_{x2} n_{z2}, \\ \omega_\beta &= -M_\alpha / H = \omega_{\beta 0} + \omega_{\beta 1z}^0 n_{z1} + \omega_{\beta 1y}^0 n_{y1} + \omega_{\beta 2}^0 n_{z1} n_{y1} + \omega_{\beta l}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

kde  $\omega_{\alpha 0}$ ,  $\omega_{\beta 0}$  jsou složky úhlové rychlosti driftu nezávislé na přetížení,  $\omega_{\alpha 1x}^0, \dots$  jsou poměrné hodnoty úhlové rychlosti úměrné první mocnině přetížení a  $\omega_{\alpha 2}^0, \dots$  jsou poměrné hodnoty úhlové rychlosti úměrné druhé mocnině přetížení,  $\omega_{\beta l}$  je rychlost driftu podmíněná osovou a radiální vůlí ložisek osy vnitřního kardanova rámu. První členy ve vztazích (2.4) jsou určeny působením momentů tření na přívodech elektrického proudu ke gyroskopům a snímačům (stírací kartáče + kroužky), reaktivních momentů v úhlových snímačích, zbytkových momentů v momentových motorech a poruchových momentů od vnějších elektrických a magnetických polí.

## 2.3 Gyroskopický amortizátor torzních kmitů

Z provedené rešerše je možné se zmínit ještě o gyroskopických amortizátorech vynucených i samobuzených kmitů torzních systémů. V [4] je uveden takový amortizátor, znázorněný na obr. 4, což je v podstatě gyroskop se dvěma stupni volnosti orientovaný tak, že v základní poloze je rovina precesního rámečku gyroskopu kolmá na osu torzního systému. Takové uspořádání, navržené a analyzované před více než 50-ti lety dává v současné době podnět k rozšíření a transformaci tohoto systému na mechatronický: Ocelová pružina by mohla být nahrazena řízenými pružinami např. v diferenčním uspořádání a hydraulický tlumič by mohl být nahrazen řízeným magnetoreologickým. Snímáním výchylky torzního kotouče a precesního úhlu gyroskopu s použitím vhodného řídicího algoritmu by pak bylo možné udržovat systém v optimálním naladění i při větších změnách budící frekvence.



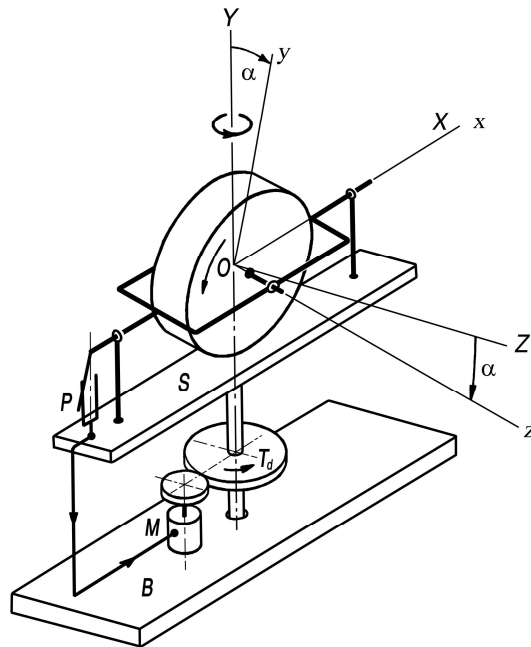
Obr. 4: Gyroskopický hltič torzních kmitů (zdroj [4 p. 185])

## 2.4 Jednoosé stabilizátory

Tyto stabilizátory zabezpečují zadanou orientaci platformy vzhledem k jedné ose. Našly uplatnění především v letecké a raketové technice. Principiálně je jednoosý gyroskopický stabilizátor vlastně gyroskop se třemi stupni volnosti v kardanově závěsu. Jeho vnitřní rámeček tedy označujeme jako precesní a slouží k indikaci nerovnováhy poruchových, stabilizačních a gyroskopických momentů v ose vnějšího rámu, a je tedy vlastně výše zmíněným gyromodulem. Ve zvláštních případech například u kurzového stabilizátoru je osa gyroskopu udržována ve vodorovné poloze. Podle toho jaká je zátěž stabilizovaného vnějšího rámu, je patřičně dimenzován stabilizační motor a příslušný reduktor – viz obr. 5.

Zmíňme také stabilizátory kývání plavidel (v angličtině *ship anti-rolling gyro*). Jedná se o gyroskop umístěný v podpalubí se svislou osou rotace, jehož precesní osa je kolmá k podélné ose plavidla. Systém může být jak aktivní, tak pasivní. Působením momentu proti precesnímu pohybu gyroskopu lze dosáhnout snížení kývání plavidla okolo podélné osy.

Na podobném principu může fungovat také stabilizace jednostopého vozidla (americká firma Lit Motors corp. a její kapotovaný motocykl C-1 – [5]), nebo například tzv. jednokolejná železnice. V obou případech se jedná o gyroskopickou stabilizaci nestabilního potenciálního systému. Analýzu podobného systému najdeme například v publikaci [6].



Obr. 5: Jednoosý stabilizátor – ukazatel kurzu (zdroj [4 p. 397]).

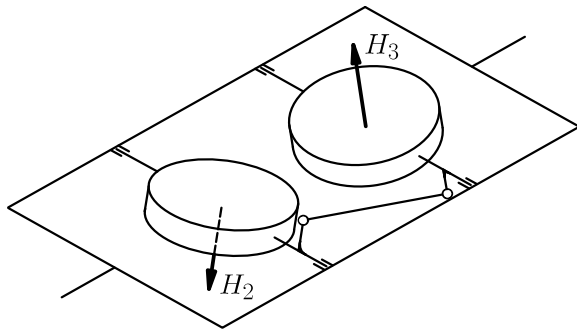
## 2.5 Gyroskopický tandem

Zvláštním případem jednoosého gyroskopického stabilizátoru je tzv. gyrorám – viz obr. 6 (název je doslovným překladem ruského, viz např. [7; 3], a v češtině není používán). Je to dvojice astatických gyroskopů s opačným impulsmomentem, jejichž precesní rámečky jsou spojeny antiparalelogramem, nebo ozubeným převodem. Zásadní předností je zdvojnásobení hodnoty impulsmomentu a jeho užití tam, kde z nejrůznějších důvodů nedokážeme dosáhnout. Další předností tohoto uspořádání je řešení obvyklého požadavku, aby úhly odklonu gyroskopu od střední polohy byly malé. U gyroskopického tandemu není nutné zabezpečovat tento požadavek zvyšováním „síly“ odlehčovacího motoru při otáčení vnějšího rámu kolem osy vnitřního, kdy se oba gyroskopické momenty vzájemně kompenzují, a odlehčovací motor není nutné zapínat. Vynikající předností gyroskopického tandemu je, že je inertní vůči otáčení základny kolem osy kolmé na vnější rám i při vychýlení gyroskopu ze střední polohy. Na rozdíl od výše uvedené terminologie zavádíme pro jiné konstrukční uspořádání užívané u dvojosé případně tříosé stabilizované platformy název gyroskopický tandem.

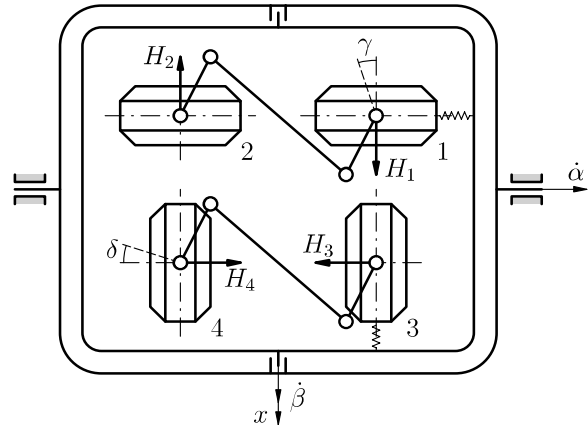
Podstatným nedostatkem jak gyroskopického tandemu, tak i gyroskopického stabilizátoru se spřaženými gyroskopy pomocí mechanického zařízení je však zvětšení momentu tření v precesních osách v důsledku aplikace kinematické dvojice, která váže pohyb obou precesních rámečků např. zubovým segmentem nebo antiparalelogra-

mem. Známa zařízení určená pro snížení momentu tření v osách kardanova závěsu jako například plovákový nebo vzdušný závěs, případně rotující ložiska nesnižují moment tření v zubových převodech nebo antiparalelogramu. Momenty tření stejně jako další momenty působící v precesních osách gyroskopů zapříčiňují precesi kolem osy vnějšího rámu.

Použití dvougyroskopových jednoosých stabilizátorů není časté pro značné deviace. Naproti tomu gyroskopický tandem viz obr. 7 má běžné použití ve víceosých stabilizátorech. V [7; 8] jsou analyzovány deviace způsobené rozdílností impulsmomentu gyroskopického tandemu.



Obr. 6: Gyroskopický tandem – jednoosý stabilizátor; vazba antiparalelogramem.



Obr. 7: Dvojosý gyroskopický stabilizátor s dvojicí gyroskopických tandemů (zdroj [7]).

## 2.6 Dvojosé gyroskopické stabilizátory

Jednoosý silový stabilizátor má vzhledem k objektu, na kterém je ustaven jeden stupeň volnosti – otáčení kolem osy vnějšího rámu kardanova závěsu. Ložiska této osy jsou ustavena na objektu, a tedy při otáčení objektu kolem jeho těžiště se osa vnějšího rámu gyroskopického stabilizátoru otáčí v prostoru, při tom v důsledku efektu nekomutativnosti konečných rotací vzniká vlastní precesní rychlost gyroskopu (tzv. kardanova chyba). Mnohem komplikovanější je dvojosý gyroskopický stabilizátor, který má dvě stabilizované osy. Můžeme říci, že v dvojosém gyroskopickém stabilizátoru jsou dva jednoosé stabilizátory sjednoceny do jednoho systému. Platforma dvojosého stabilizátoru má dva stupně volnosti vzhledem k objektu a otáčení platformy kolem osy kolmé k stabilizované rovině se realizuje spolu s objektem. Otáčení objektu kolem této osy vyvolává poruchové působení na stabilizovanou základnu a vyvolává vlastní precesní rychlost a následně její úchylku od zadané roviny stabilizace.

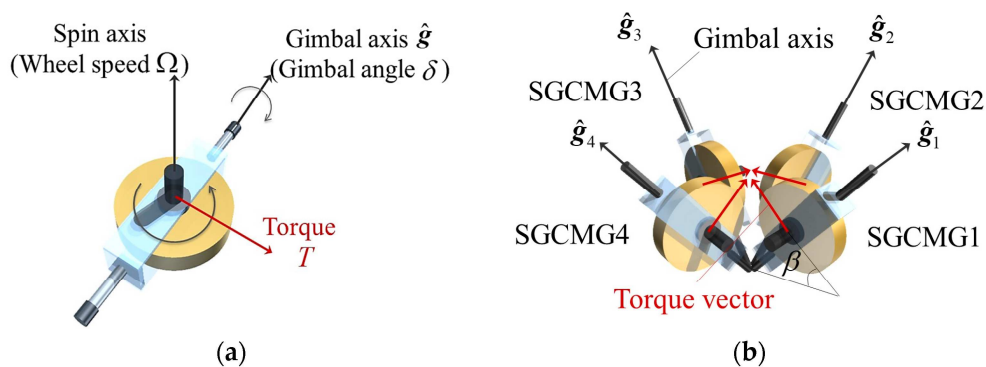
V letecké a raketové technice se dvojosé stabilizátory používají například pro stabilizaci radiolokační antény, pro zaměřovací zařízení, pro stabilizaci kamer letového snímání a pro autopiloty. Jejich přednost spočívá v tom, že gyroskopy umístěné na platformě se při libovolných obrazech letounu otáčejí kolem svých precesních os jen o malé úhly. Při tom se rozšiřují možnosti aplikace konstrukčních úprav pro snížení momentů tření.

Na gyroskopický stabilizátor ustavený na pohybujícím se objektu působí následující poruchové momenty: momenty tření v osách kardanova závěsu, setrvačné momenty odlehčovacích motorů, setrvačné momenty rámu kardanova závěsu, setrvačné momenty podmíněné zrychleným (nestacionárním) pohybem objektu.

## 2.7 Gyroskopické řízení orientace vesmírného objektu

Nakonec zmiňme využití silových gyroskopů k řízení orientace a stabilizaci kosmických těles. Vedle reakčního systému, využívajícího systému malých trysek, lze pro řízení orientace kosmického tělesa využívat tzv. *control moment gyro* (neboli CMG), kterými lze tělesem otáčet v prostoru pomocí gyroskopického momentu (viz obr. 8a). Výhodou takového systému je oproti reakčnímu systému nulová spotřeba pohonných látek, pro pohon gyroskopů a momentových motorů v jejich precesních osách je využívána elektrická energie z fotovoltaických panelů. Další výhodou je, že CMG je pro řízení orientace výrazně přesnější, než reakční systém. Systémy využívající CMG byly a jsou používány na řadě zejména satelitů s předpokládanou dlouhou životností (např. rentgenový teleskop Chandra, Hubbleův vesmírný teleskop) a vesmírných stanicích, jako byl např. americký Skylab, sovětské vesmírné stanice Slajut, nebo MIR, nebo současná Mezinárodní vesmírná stanice ISS.

Systém CMG se obvykle skládá z několika gyroskopů se třemi stupni volnosti, jejichž precesní osy bývají orientovány ve vhodných konfiguracích (např. viz obr. 8b), tak aby byly vzájemně kompenzovány reakční momenty pohonu rotorů. Pro řízení orientace byla vyvinuta řada algoritmů, které umožňují se vyhnout nestabilním konfiguracím a předcházet singularitám, případně umožňují vesmírný objekt orientovat s omezeným počtem gyroskopů při selhání některých z nich. Takové situace nastaly například během životnosti Hubbleova vesmírného teleskopu (při servisní misi k HST v roce 1997 byl jeden z gyroskopů systému CMG také vyměněn).



Obr. 8: Princip funkce CMG (a); jedna z variant konfigurace systému čtyř CMG (b) (zdroj [9]).

Pro zajímavost uvedme, že například systém CMG Mezinárodní vesmírné stanice se skládá ze 4 gyroskopů, rotor každého z nich má hmotnost 100 kg a otáčí se rychlostí  $6600 \text{ min}^{-1}$ , impulsmoment je pak  $4742,5 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$  (pro srovnání, my jsme uvažovali s impulsmomentem  $7\text{--}30 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ ). Tento systém pak umožňuje řízení orientace a kompenzaci vnějších momentů vesmírné stanice o odhadované hmotnosti 450 t!



## 3 Způsoby odvození pohybových rovnic

Gyroskopický stabilizátor představuje soustavu vázaných tuhých těles a elektromechanických, resp. elektrohydraulických, resp. elektropneumatických ústrojí. Při sestavení pohybových rovnic gyroskopického stabilizátoru se provede dekompozice systému na jednotlivé subsystémy, bloky a ústrojí, pro něž se sestaví rovnice s využitím zákonů mechaniky, případně dalších fyzikálních zákonů. V obecném případě je možné si představit rovnice gyroskopického stabilizátoru z vázaných rovnic mechanické části, rovnic korekčního systému a rovnic kompenzačního (tj. odlehčovacího) systému.

Rovnice mechanické části gyroskopického stabilizátoru se zapisují obvykle s využitím druhé Lagrangeovy metody, nebo na základě věty o časové změně momentu hybnosti. V případě relativně jednoduchých mechanických částí gyroskopického stabilizátoru je efektivní metoda kinetostatiky, jež je založena na d'Alembertově principu. V soulase s tím do rovnic nevstupují reakce vazeb, protože tento princip tvrdí, že při pohybu systému reakce vazeb vytvářejí soustavu sil, jež se pomocí vazeb vyrovnává. Efektivnost této metody je dána snahou sestavit rovnice rychle a efektivně, přičemž se pro věruje fyzikální obsah všech členů v rovnici.

### 3.1 Druhá věta impulsová

Jedním ze způsobů je použití výše zmíněné II. impulsové věty pro jednotlivé členy systému a také pro celý systém.

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \left( \frac{d\mathbf{K}}{dt} \right)_E + \boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{K} = \mathbf{M}, \quad (3.1)$$

respektive v systému tělesa

$$\left. \begin{aligned} \frac{dK_{E1}}{dt} + K_{E3}\omega_{E2} - K_{E2}\omega_{E3} &= M_{E1} \\ \frac{dK_{E2}}{dt} + K_{E1}\omega_{E3} - K_{E3}\omega_{E1} &= M_{E2} \\ \frac{dK_{E3}}{dt} + K_{E2}\omega_{E1} - K_{E1}\omega_{E2} &= M_{E3} \end{aligned} \right\}, \quad (3.2)$$

kde  $K_{Ei}$ ,  $\omega_{Ei}$  a  $M_{Ei}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) jsou průměty příslušných vektorů na osy souřadnicového systému spojeného s tělesem E, vektor kinetického momentu  $\mathbf{K} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_E$ , kde  $\mathbf{I}$  je matice setrvačnosti tělesa.

Při sestavení rovnic je nezbytné určit momenty vnějších sil. Tyto momenty, ať aplikované na celý systém, nebo na jeho jednotlivé členy, zahrnují momenty tření v osách závěsu, momenty kompenzačních a korekčních ústrojí, tah přívodů proudu, momenty setrvačných sil unášivého pohybu atd. Kromě toho, k vnějším silám je třeba připojit i reakce vazeb v kloubech závěsu, působící v uvažované části GS ze základu nebo od sousedních členů.

Jestliže osa kloubu je totožná s jednou osou zvoleného souřadného systému a je možné předpokládat, že momenty tření v kloubu nezávisí na normálových reakcích jeho osy, pak do pravé části příslušné rovnice systému (3.2) nevstoupí momenty neznámých sil normálových reakcí. Pokud osy kloubu nesouhlasí ani s jednou z os zvoleného souřadného systému, je možné rovnice zapsat vzhledem k ose kloubu  $\nu$ , čímž normálovou reakci eliminujeme [10]. V takovém případě bude

$$\begin{aligned} \left( \frac{dK_x}{dt} + K_z\omega_y - K_y\omega_z \right) \cos(\widehat{x\nu}) + \left( \frac{dK_y}{dt} + K_x\omega_z - K_z\omega_x \right) \cos(\widehat{y\nu}) + \\ + \left( \frac{dK_z}{dt} + K_y\omega_x - K_x\omega_y \right) \cos(\widehat{z\nu}) = M_\nu; \quad (3.3) \\ M_\nu = M_x \cos(\widehat{x\nu}) + M_y \cos(\widehat{y\nu}) + M_z \cos(\widehat{z\nu}). \end{aligned}$$

Tak je možné ukázat následující proceduru sestavení pohybových rovnic vázaných tuhých těles. Zvolí se osy procházející klouby, vzhledem ke kterým se sestavují pohybové rovnice; vyberou se členy (tělesa), jež se pohybují vůči každé ze zvolených os, pro každý člen se ve vázaných osách sestaví rovnice (3.3); pomocí směrových kosinů se tyto rovnice projektují do vybrané osy uvažovaného systému.

Poznamenejme, že v aplikované teorii gyroskopických systémů se v řadě případů omezujeme sestavením Eulerových rovnic pro platformu v kardanově závěsu, za předpokladu, že jako vnější momenty jsou k platformě připojeny také momenty gyroskopické reakce a dalších vazeb vznikající při pohybu gyroskopických snímačů (citlivých prvků). Rovnice pohybu gyroskopu v tomto případě se zapisují nezávisle s respektováním absolutní úhlové rychlosti pohybu platformy.

Při odvození rovnic pro gyroskop v kardanově závěsu můžeme využít ztotožnění ekvatoriální osy gyroskopu a vnitřního (resp. precesního) rámečku. Další postup spočívá v tom, že na osu otáčení vnitřního rámečku zavedeme příslušné korekční momenty a u zbývajících dvou rovnic pro osy k ní kolmé využijeme pro určení vazbových reakcí s vnějším rámem průmětů příslušných složek momentu vnějších sil. Metoda tedy spočívá v postupné eliminaci vnitřních sil a k sestavení systému vlastních pohybových rovnic. Na druhé straně umožňují tyto vektorové pohybové rovnice pro druhou impulzovou větu identifikovat fyzikální charakter jednotlivých členů a odlišit tak momenty odstředivých sil od momentů Coriolisových sil. Složky momentů do os kolmých v ose vnitřního (precesního) rámečku pak projektujeme na osu vnějšího rámu.

Výše zmíněná dekompozice mechanické části systému je vhodná při užití aparátu přenosových funkcí a dovoluje ve složitých případech názorněji objasnit zvláštnosti

mechanických vazeb v gyroskopickém stabilizátoru při rozličné orientaci os gyroskopických citlivých prvků (to jest snímačů silového momentu). Tento přístup se užívá při zápisu pohybových rovnic a při analýze vazeb ve složitých gyroskopických systémech.

### 3.2 Lagrangeovy rovnice 2. druhu a smíšeného typu

Prostý a efektivní způsob sestavení rovnic složitých systémů je založen na zápisu rovnic v obecných silách, určovaných přes energie systému. Pohybové rovnice v tomto případě mají tvar Lagrangeových rovnic druhého druhu:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (3.4)$$

kde  $T$  je kinetická energie soustavy;  $V$  potenciální energie konzervativních sil;  $Q_i$  zobecněné síly odpovídající obecným souřadnicím  $q_i$ ;  $N$  počet stupňů volnosti.

Poznamenáme zvláštnosti Lagrangeových rovnic druhého druhu:

- 1) počet rovnic je roven počtu stupňů volnosti,
- 2) složky obecných sil v pohybových rovnicích jsou vyjádřeny prostřednictvím kinetické a potenciální energie, Rayleighovy funkce tlumení a funkcemi času,
- 3) rovnice vazeb systému nevstupují do sestavení rovnic pohybu.

Pro složité gyroskopické systémy se procedura zjednodušuje, jestliže používáme nikoliv obecné rychlosti, ale jejich lineární formy – kvazirychlosti. Ve speciálním případě je příkladem kvazirychlostí jsou průměty  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  vektoru úhlové rychlosti tuhého tělesa na kartézský systém s ním spojený, jejichž vyjádření můžeme obdržet z kinematických Eulerových rovnic. Pohybové rovnice v kvazisouřadnicích (podmíněných souřadnicích odpovídajícím kvazirychlostem) se odlišují od Lagrangeových rovnic v obvyklých obecných souřadnicích přítomností gyroskopických členů v pravých stranách rovnic [11].

Předností druhé Lagrangeovy metody (rovnice 2. druhu) je její obecnost a jednoznačnost sestavení rovnic, jež se snadno prověřují. Tyto přednosti se obzvlášť ukazují při sestavování rovnic gyroskopického systému na otáčející se základně. Přitom se automaticky dostanou vztahy, které nemůžeme jednoduše získat při použití jiných metod. Při zápisu Lagrangeových rovnic 2. druhu je zanedbání malých členů možné uskutečnit až v konečné fázi sestavení rovnic, což při přibližných řešeních úlohy komplikuje transformace. Vedle toho při standardní proceduře řešení se neobjasňuje vzájemné silové působení jednotlivých členů gyroskopického systému.

Variantou Lagrangeových rovnic 2. druhu jsou Lagrangeovy rovnice smíšeného typu, nebo též Lagrangeovy rovnice s multiplikátory. Jejich užitím lze sestavit pohybové rovnice s počtem souřadnic větším než počet stupňů volnosti systému. Podle [12] zavádíme tyto rovnice následovně.

Máme-li systém s  $n$  stupni volnosti a  $n + k$  souřadnicemi, z nichž je  $k$  souřadnic vázáno holonomními vazbami

$$f_s(q_1, \dots, q_n, \dots, q_{n+k}, t) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, k), \quad (3.5)$$

píšeme pak Lagrangeovy rovnice smíšeného typu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{s=1}^k \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n + k), \quad (3.6)$$

Soustava rovnic pak obsahuje  $n + k$  rovnic typu (3.6) a  $k$  rovnic vazby (3.5), ze kterých lze určit  $n$  nezávislých souřadnic  $q_i(t)$ ,  $k$  multiplikátorů  $\lambda_s$  a  $k$  závislých souřadnic  $q_i(t)$ , přičemž multiplikátory  $\lambda_s$  vyjadřují zobecněné vazbové síly ve vazbách  $f_s$ . Prostřednictvím Lagrangeových multiplikátorů tedy zavádíme do Lagrangeových rovnic 2. druhu vazbové síly a můžeme je i vypočítat. Poznamenejme, že podobným způsobem lze do rovnic přidávat i neholonomní vazby lineární v rychlostech.

V obecném případě jsou dynamické modely gyroskopického systému nelineární a mají časově proměnné koeficienty. Rovnice prvního přiblížení – linearizované rovnice – obsahují pouze lineární členy; rovnice druhého přiblížení obsahují i kvadráty obecných souřadnic a rychlostí. Rovnice prvního přiblížení se jeví jako adekvátní matematickému modelu při analýze stability, dynamické přesnosti a stanovení disperze odezvy na stochastické buzení. Rovnice druhého přiblížení umožňují vyjádřit například systematické odchylky gyroskopického systému, řešení stability v kritických případech a podobně.

Při sestavení dynamických linearizovaných rovnic gyroskopického systému je možné užít metodu přenosových funkcí a strukturních transformací teorie automatického řízení, při odpovídající dekompozici gyroskopického systému.

Při sestavování rovnic prostorového gyroskopického systému je možné uvažovat, že jsou charakterizovány několika obecnými souřadnicemi mechanické části systému, tedy že mají několik vzájemně vázaných vstupů a výstupů. Je možné současně uvažovat všechny vstupy a výstupy, když pro matematický zápis použijeme vektorovématicové rovnice a odpovídající přenosové funkce. Tato forma modelu je dostatečně kompaktní a umožňuje užít ty samé představy jako při sestavení rovnic jednoosého gyroskopického stabilizátoru. Zápis rovnic ve vektor-maticové formě umožňuje rovněž efektivněji užít počítače, s využitím možnosti vyjádřit operace s vektorovými a maticovými veličinami.

Jednou z možností zjednodušení pohybových rovnic gyroskopického stabilizátoru je rozdělení precesních a nutačních pohybů při odlišném řešení úlohy zabezpečení stability nutačních kmitů (rychlá složka) a nutné kvality precesního pohybu (pomalá složka). Přípustnost zkrácení rovnic cestou zanedbání setrvačných členů je svázána s postačujícími podmínkami přechodu ke zkráceným rovnicím a je formulována v pracích [11] a [13].

Při použití řady filtračních metod a úprav jsou výchozí lineární matematické modely představovány ve formě stavových rovnic. Pojem stav systému zahrnuje určitou minimální množinu parametrů (v gyroskopickém stabilizátoru jsou to parametry orientace a jejich derivace), která vyjadřuje „historii“ systému a obsahuje informaci

nutnou pro předpověď chování systému v blízké budoucnosti. Úloha orientace gyroskopického stabilizátoru se tím pádem může označovat jako úloha převedení systému z jednoho zadaného stavu do druhého v konečném časovém intervalu. Pro gyroskopický stabilizátor mohou být maticové stavové rovnice převedeny do tvaru

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{w} + \mathbf{B}\mathbf{u}; \\ \mathbf{y} &= \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{w},\end{aligned}\tag{3.7}$$

kde  $\mathbf{x}$  je stavový vektor;  $\mathbf{w}$  vektor vstupních signálů;  $\mathbf{y}$  vektor výstupních signálů;  $\mathbf{u}$  vektor korekce;  $\mathbf{A}$  matice stavu,  $\mathbf{H}$  matice pozorování,  $\mathbf{G}$  matice poruch,  $\mathbf{C}$  matice vstupních účinků,  $\mathbf{B}$  matice korekce (mohou být určeny pro konkrétní gyroskopický stabilizátor přímo ze skalárních výchozích rovnic pohybu systému transformovaných do normálního tvaru).

### 3.3 Routhovy rovnice

Existuje široká třída systémů, jejichž kinetická energie závisí explicitně na prvních derivacích souřadnic, nikoliv na souřadnicích samotných a obecné síly, které těmto souřadnicím odpovídají, jsou nulové. Takové souřadnice nazýváme cyklické, na rozdíl od těch, které tuto vlastnost nemají (nazýváme poziční, nebo necyklické).

Nechť  $p_1 \dots p_n$  jsou cyklické a  $q_1 \dots q_s$  jsou necyklické souřadnice, kinetická energie nezávisí explicitně na  $p_k$  ( $k = 1 \dots n$ ), a proto platí postupně

$$\frac{\partial T}{\partial p_k} = 0 \quad (k = 1 \dots n),\tag{3.8}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k} \right) = 0 \quad (k = 1 \dots n),\tag{3.9}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k} = c_k = konst. \quad (k = 1 \dots n).\tag{3.10}$$

Pokud se dále omezíme na skleronomní homonomní vazby, přeskupíme ve výrazu pro kinetickou energii zvlášť členy s necyklickými rychlostmi, zvlášť členy s cyklickými rychlostmi, potom kinetické energii dáváme tvar

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^s b_{kj} \dot{q}_j \dot{p}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{kj} \dot{p}_k \dot{p}_j,\tag{3.11}$$

kde  $a_{kj}$ ,  $b_{kj}$  a  $c_{kj}$  závisí na  $q_1 \dots q_s$ .

Jelikož v (3.10) je  $\dot{p}_k$  určitě v lineární formě, můžeme jej snadno určit a zpět dosadit do výrazu pro kinetickou energii. Dospíváme tak k výrazu

$$T^*(q_1 \dots q_s, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_s, c_1 \dots c_n) = T(q_1 \dots q_s, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_s, \dot{p}_1 \dots \dot{p}_n)\tag{3.12}$$

a k takzvané změněné kinetické energii, neboli Routhově funkci

$$R = T^* - \sum_{r=1}^n c_r \dot{p}_r,\tag{3.13}$$

kde  $c_1, \dots, c_n$  jsou integrační konstanty prvních integrálů (3.10). Obdržíme tak Routhovy rovnice (Lagrangeovy rovnice pro necyklické souřadnice)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1 \dots s). \quad (3.14)$$

Přeskupením členů v Routhově funkci dostáváme

$$R = R_2 + R_1 - R_0, \quad (3.15)$$

kde je

$$R_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s \left( a_{kj} - \frac{1}{C} \sum_{h=1}^n \sum_{m=1}^n C_{mh} b_{hj} b_{mk} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j, \quad (3.16)$$

$$R_0 = \frac{1}{2C} \sum_{h=1}^n \sum_{m=1}^n C_{mh} c_m c_h, \quad (3.17)$$

$$R_1 = \sum_{k=1}^s a_k \dot{q}_k, \quad (3.18)$$

$$a_k = \frac{1}{C} \sum_{r=1}^n \sum_{m=1}^n c_r C_{mr} b_{mk} \quad (k = 1 \dots s). \quad (3.19)$$

Síly

$$\Gamma_k = - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial R_1}{\partial q_k} \quad (3.20)$$

jsou gyroskopické. A vzhledem k platnosti (1.11) platí v konečném tvaru

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial R_2}{\partial q_k} = Q_k - \frac{\partial R_0}{\partial q_k} + \sum_{j=1}^s g_{jk} \dot{q}_j \quad (k = 1 \dots s). \quad (3.21)$$

Tuto rovnici můžeme interpretovat následujícím způsobem. Skutečný pohyb systému s cyklickými souřadnicemi probíhá tak, jako by měl systém kinetickou energii  $R_2$  a vedle původních obecných sil působily ještě gyroskopické síly  $\Gamma_k$  a konzervativní síly s potenciální energií  $R_0$ . Tento závěr je obsažen v následující větě Thomsona a Taita:

*„V gyroskopickém systému nevázaném a nepodléhajícím působení sil vliv cyklických souřadnic na poziční je takový, jako by na něj působily konzervativní síly, jejichž potenciální energie je rovna kinetické energii cyklických pohybů.“*

Na základě této věty můžeme každou potenciální energii považovat za kinetickou energii některých skrytých pohybů (tato teorie byla rozpracována H. Herzem).

### 3.3.1 Gyroskopické síly závislé na parametru

Při vyšetřování problému vlivu gyroskopických sil na pohyb systému je vhodné předpokládat, že gyroskopické síly jsou závislé na nějakém parametru  $H$ . To je nutné udělat z celé řady příčin, které jsou jak analytického, tak čistě fyzikálního charakteru. Příčiny analytického charakteru jsou zřejmé, zavedením tohoto parametru můžeme vyšetřovat závislost řešení pohybových rovnic na parametru a určit řadu vlastností systému jako funkce  $H$ . Kromě toho při velkých hodnotách  $H$  je možné postavit otázku záměny pohybových rovnic zjednodušenými – technickými rovnicemi, a tím ulehčit úlohu jejich integrace.

Příčiny fyzikálního charakteru spočívají v podstatě v následujícím. Nejvíce se význam gyroskopických sil projevuje v systémech obsahujících gyroskopy. Při sestavování rovnic pohybu takových systémů se přirozeným způsobem zavádí parametr, který má jednoduchý fyzikální význam, při velké rychlosti vlastní rotace gyroskopu je roven přibližně impulsmomentu (tj. momentu hybnosti) gyroskopu  $H = J \cdot \omega$  ( $\omega$  je součet složky úhlové rychlosti precese a vlastní úhlové rychlosti gyroskopu,  $J$  je axiální moment setrvačnosti gyroskopu). Současně s tím při velké rychlosti vlastní rotace získává gyroskop řadu vynikajících vlastností, které se však při nízkých rychlostech vlastní rotace vytrácejí. Vzhledem k tomu pohybové rovnice píšeme v následujícím tvaru

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T_2}{\partial q_k} = Q_k + H \sum_{j=1}^s g_{jk} \dot{q}_j \quad (k = 1 \dots s; \quad g_{kj} = -g_{jk}). \quad (3.22)$$

Dále budeme nazývat v tomto systému  $q_1 \dots q_s$  souřadnicemi necyklickými (skutečnými, určujícími, pozičními). Ukážeme dále, že gyroskopické členy pohybových rovnic systému s gyroskopy obsahují parametr, který má velkou hodnotu ve všech systémech s gyroskopy, jejichž rychlosti vlastní rotace značně převyšují rychlosti pozičních souřadnic. Přesněji řečeno počáteční podmínky pohybu

$$\left. \begin{aligned} \varphi_k &= \varphi_{k0}, \quad \dot{\varphi}_k = \dot{\varphi}_{k0} \quad (k = 1 \dots r) \\ q_j &= q_{j0}, \quad \dot{q}_j = \dot{q}_{j0} \quad (j = 1 \dots s) \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

vyhovují nerovnostem

$$\left| \frac{\dot{q}_{j0}}{\dot{\varphi}_{k0}} \right| \leq \delta \ll 1. \quad (3.24)$$

Kinetickou energii celého systému rozdělíme na dvě části, v první shromáždíme ty členy kinetické energie, které odpovídají rotacím gyroskopů kolem osy symetrie. Proto promítneme na osu  $k$ -tého gyroskopu všechny úhlové rychlosti, které tato osa má a výslednou sumu projekcí na původní úhlovou rychlost označíme

$$r_k = \dot{\varphi}_k + \sum_{j=1}^s a_j^{(k)} \dot{q}_j, \quad (3.25)$$

kde  $a_j^{(k)}$  je kosinus úhlu mezi vektorem úhlové rychlosti  $\dot{q}_j$  a osou  $k$ -tého gyroskopu. A je-li  $J_k$  osový moment setrvačnosti  $k$ -tého gyroskopu, pak jeho kinetická energie bude

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^r J_k \left( \dot{\varphi}_k + \sum_{j=1}^s a_j^{(k)} \dot{q}_j \right)^2.$$

Budeme, jak je obvyklé, předpokládat, že součet vnějších momentů všech sil k ose každého gyroskopu je roven nule. Tento předpoklad zdůvodňujeme následovně: po ustálení otáček gyroskopu dojde k vyrovnání momentu pasivních odporů v ložiskách rotoru a hnacího momentu výsledný moment je tedy identicky roven nule. Souřadnice  $\dot{\varphi}_k$  jsou tedy cyklické a bude jim odpovídat  $r$  prvních integrálů.

$$J_k \left( \dot{\varphi}_k + \sum_{j=1}^s a_j^{(k)} \dot{q}_j \right) = H_k \quad (k = 1, \dots, r), \quad (3.26)$$

příčemž integrační konstanta  $H_k$  je průmětem vektoru momentu hybnosti  $k$ -tého gyroskopu na jeho rotační osu. Odtud plyne vztah

$$\dot{\varphi}_k = \frac{H_k}{J_k} - \sum_{j=1}^s a_j^{(k)} \dot{q}_j \quad (3.27)$$

a můžeme sestavit postupně funkce

$$\begin{aligned} T^* &= T_2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \frac{H_k^2}{J_k}, \\ R_0 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \frac{H_k^2}{J_k}, \\ R &= T_2 + \sum_{k=1}^r H_k \sum_{j=1}^s a_j^{(k)} \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \frac{H_k^2}{J_k}, \\ R_1 &= \sum_{k=1}^r H_k \sum_{j=1}^s a_j^{(k)} \dot{q}_j, \\ H &= \min |H_k|, \end{aligned}$$

pohybové rovnice pak píšeme ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T_2}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial R_1}{\partial q_k} = Q_k. \quad (3.28)$$

### 3.4 Úplný a zkrácený systém pohybových rovnic

Merkin v [11 str. 236] zavedl zjednodušené, tzv. precesní rovnice gyroskopického systému následujícím způsobem. Jsou-li sestaveny pohybové rovnice ve tvaru (1.3)

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{B} + H\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \mathbf{P})\mathbf{q} = \mathbf{Q}^{(2)}.$$

Precesní rovnice pak zapisuje ve tvaru

$$(\mathbf{B} + H\mathbf{G})\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{C} + \mathbf{P})\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (3.29)$$

Charakteristická rovnice systému (1.3) je

$$\Delta(\lambda) = \det(\mathbf{A}\lambda^2 + (\mathbf{B} + H\mathbf{G})\lambda + \mathbf{C} + \mathbf{P}) = 0. \quad (3.30)$$

Merkin dále uvažuje další dvě charakteristické rovnice

$$\Delta^{(p)}(\lambda) = \det((\mathbf{B} + H\mathbf{G})\lambda + \mathbf{C} + \mathbf{P}) = 0, \quad (3.31)$$

$$\Delta^{(n)}(\lambda) = \det(\mathbf{A}\lambda + (\mathbf{B} + H\mathbf{G})) = 0. \quad (3.32)$$

Rovnici (3.31) nazývá charakteristickou rovnicí *precesního systému* a rovnicí (3.32) pak charakteristickou rovnicí *nutačního systému* – tedy charakteristickou rovnicí systému, na který přestaly působit konzervativní síly a síly radiálních korekcí (síly – viz kap. 1.2). Dále Merkin odvodil a dokázal následující věty (postačující podmínky gyroskopické stabilizace):

#### **Věta 1:**

Splňují-li rovnice (3.31) a (3.32) Hurwitzovu podmínku stability a  $\det(\mathbf{G}) \neq 0$ , pak při dostatečně velké hodnotě impulsmomentu  $H$  se kořeny charakteristické rovnice (3.30) rozdělují do dvou skupin a přibližně mohou být určeny z rovnic (3.31) a (3.32).



**Věta 2:**

Jsou-li splněny podmínky věty 1, pak při dostatečně velké hodnotě parametru  $H$  bude pohyb systému asymptoticky stabilní nezávisle na nelineárních členech  $\mathbf{Q}^{(2)}$  alespoň druhého stupně.

**Věta 3:**

Jestliže rovnice porušeného pohybu lineárního autonomního systému

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{B} + H\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \mathbf{P})\mathbf{q} = 0 \quad (3.33)$$

splňují podmínky:  $\det(\mathbf{G}) \neq 0$ , rovnice (3.31) a (3.32) splňují Hurwitzovy podmínky a  $H$  je dostatečně velký, pak řešení precesního systému (3.29) lze považovat za přijatelné.

Poznamenejme, že užití tzv. precesních rovnic v dnešní době nemá velké opodstatnění, protože již není takový problém vyšetřovat systémy vyšších řádů. Důležitý je důsledek věty 1, při dostatečně velkém  $H$  má gyroskopický systém dvě skupiny kořenů charakteristického polynomu – nutační (řádu  $H^1$ ) a precesní (řádu  $H^{-1}$ ).

## 4 Gyroskopická stabilizace a její způsoby

V této kapitole předkládáme stručný přehled základních principů gyroskopické stabilizace. Krátce zmíníme základní rozdělení gyroskopických stabilizátorů a popíšeme jednotlivé součásti gyroskopického stabilizátoru. V závěru kapitoly klasifikujeme zdroje a typy nelinearit v gyroskopickém systému.

### 4.1 Indikační a silové systémy

Základním rozdílem mezi indikačními a silovými gyroskopickými systémy je fakt, že zatímco silový gyroskop působí prostřednictvím gyroskopického momentu přímo na stabilizovaný objekt, indikační gyroskopický systém na stabilizovaný objekt působí prostřednictvím jiného silového členu, který je řízen na základě rozdílu orientace gyroskopického systému a stabilizovaného objektu. Jinými slovy, indikační gyroskopický systém stabilizuje gyroskopickými silami jen svou vlastní polohu a udržuje tak svou orientaci v inerciálním souřadnicovém systému, může tedy sloužit například k určování orientace stabilizovaného objektu vůči tomuto inerciálnímu systému.

Silový gyroskopický stabilizátor je určen ke stabilizaci polohy nějakého objektu, přičemž je jeho kompenzační systém stále v pracovní činnosti, stabilizátor je přitom přímo, mechanicky spojen se stabilizovaným objektem. Chyby zachování počátečního směru zadaného v prostoru jsou u dvouosého stabilizátoru ve značné míře určeny precesními chybami tzv. gyromodulů (gyroskop se dvěma stupni volnosti – gyroskop v precesním rámečku, terminologie viz např. Pelpor [3])

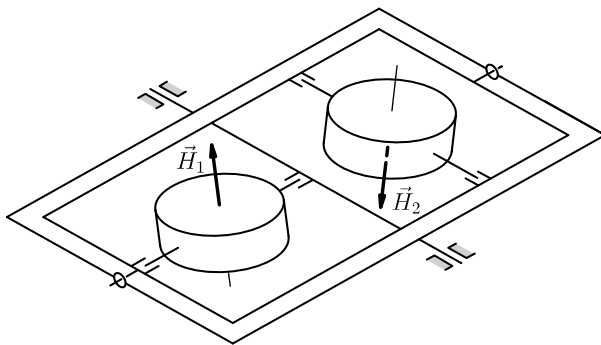
Značný díl přístrojových chyb gyromodulu je tvořen momenty pasivních odporů v osách závěsu gyromodulu. U gyromodulů precizních silových stabilizátorů se k zmenšení jejich velikosti používají třířadá ložiska s rotujícím vnitřním kroužkem, který je otáčen zvláštním motorem, přičemž na protilehlých ložiskách je použit opačný směr otáčení, který se v pravidelných intervalech v řádu minut reverzuje. Je-li úhlová rychlost otáčení značně větší než původní vlastní úhlová rychlost, jsou pasivní odpory kompenzovány. Princip rotujících ložisek se používá i v případě ložisek rámu kardanova závěsu.

## 4.2 Dvojosé gyroskopické stabilizátory

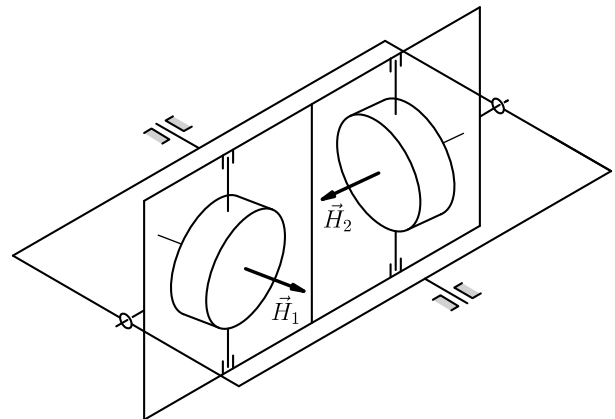
Schéma dvojosého stabilizátoru představuje sjednocení dvojosého kardanova závěsu a dvou oddělených gyroskopů se dvěma stupni volnosti (viz obr. 9 a obr. 10). Takové řešení dovoluje stabilizovat platformu kolem dvou os kardanova závěsu a zabezpečuje přitom prostorovou orientaci třetí geometrické osy kolmé k měřícím osám obou gyroskopů, které fungují jako čidla poruchových momentů v osách kardanova závěsu. Takový stabilizátor má dva kanály stabilizace, přičemž každý kanál se skládá z gyroskopického čidla, zesilovače, výkonového členu a stabilizačního – odlehčovacího motoru. Gyroskopické stabilizátory rozdělujeme:

- podle principu jejich funkce (silové, indikační),
- podle úpravy orientace (korigované, nekorigované),
- podle počtu gyroskopů,
- podle orientace precesních os gyroskopů (svislé, vodorovné) – obr. 9 a obr. 10.

Dvojosé stabilizátory se používají v případě, kdy je nutné stabilizovat rovinu nějakého zařízení buď v inerciálním, nebo neinerciálním souřadnicovém systému. Široké uplatnění našly silové dvojosé stabilizátory způsobilé udržovat tuto rovinu při dostatečně velkém zatížení s dostatečnou přesností (např. centrální gyroskopické vertikály pro autopiloty letadel, navigační systémy raket, stabilizace dělových hlavních atd.).



Obr. 9: Dvojosý gyrostabilizátor se svislými osami rotorů gyroskopů.



Obr. 10: Dvojosý gyrostabilizátor s vodorovnými osami rotorů gyroskopů.

## 4.3 Kompenzační systém stabilizátoru

Kompenzační systém gyroskopického stabilizátoru je realizován úhlovým snímačem natočení precesního rámečku gyroskopu a momentovým motorem v ose příslušného rámu kardanova závěsu. Při vychýlení precesního rámečku je regulačním systémem kompenzačního systému řízen momentový motor na rámu kardanova závěsu. Moment takto vyvozený v ose stabilizovaného rámu kompenzuje poruchový moment v ose stabilizovaného rámu indikovaný výchylkou precesního rámečku a odlehčuje tak gyroskopický moment. Kompenzační systém je tak nezbytnou součástí gyroskopického stabilizátoru, bez kompenzace by poruchový moment na ose stabilizovaného rámu

způsobil precesi gyroskopu (tj. stále rostoucí úhlovou výchylku precesního rámečku), která by v okamžiku dosažení hodnoty  $\pi / 2$  vedla ke ztrátě stabilizační funkce.

### 4.3.1 Čidla poruchových momentů

Při obecném pohybu (tj. se zrychlením a vibracemi) gyroskopické platformy umístěné na vozidle (letadle, kosmické lodi), při otáčení a úhlovém kývání jsou generovány momenty kolem os kardanova závěsu. Tyto momenty způsobují vynucený pohyb gyroskopického stabilizátoru a následně deviace stabilizátoru. Při vysokých hodnotách těchto poruchových momentů může dojít i ke ztrátě funkce stabilizátoru. Poznání poruchových momentů je nutné jak pro určení deviací stabilizátoru, tak i v procesu návrhu a výběru jeho parametrů (speciálně tedy i parametry odlehčovacího systému). Pro splnění těchto cílů je nutné poznání jak velikosti, tak charakteru jednotlivých složek poruchových momentů. Podle charakteru změny mohou být poruchové momenty rozděleny na konstantní, nebo pomalu se měnící (např. nepřesné vyvážení kardanova závěsu), momenty, které jsou určené lineárními zrychleními těžiště, momenty sil tření, které vznikají při kývání. Konstantní, nebo pomalu měnící se momenty v silovém stabilizátoru se kompenzují momenty generované odlehčovacím systémem. Proměnné poruchové momenty, zvláště rychle se měnící, se vyvažují jak odlehčovacemi momenty, tak i gyroskopickými momenty a při vysokých frekvencích i setrvačnými momenty členů platformy. Tímto způsobem charakter změny poruchových momentů a jejich velikost ovlivňují výběr pohonu odlehčovacího systému, tak i užitého čidla (gyroskopu).

Momenty pasivních odporů působící v osách kardanova závěsu mají následující zdroje ve:

- a) tření v přívodech elektrického proudu (kartáče + kolektory),
- b) úhlových snímačích kontaktního typu,
- c) tření v osách kardanova závěsu,
- d) tření v odlehčovacích motorech, které jsou přes reduktor převedeny k osám kardanova závěsu.

Momenty tření kontaktních snímačů a proudových přívodů představují při jejich velkém počtu (i několik desítek) nezanedbatelnou veličinu. Uveďme dále, že pro většinu konstrukcí gyroskopických stabilizátorů jsou pro uložení os kardanova závěsu použita jedno, nebo dvouřadá kuličková ložiska. Moment tření kuličkového ložiska má následující složky: moment tření otáčení kuliček s vnějšími a vnitřními kroužky; moment tření klouzání kuliček vzhledem k vnějšímu a vnitřnímu kroužku; moment tření klouzání kuliček vzhledem k separátoru; moment vyvolaný odporem maziva.

### 4.3.2 Regulace kompenzačního systému

Při pojezdu terénem musíme počítat s případy, kdy podvozek vozidla bude skloněn až už v podélném, nebo příčném směru od vodorovné roviny s výchylkou přesahující  $10^\circ$ . Pro naši koncepci odlehčovacího systému (využití pneumatických pružin) to znamená ovšem vznik nežádoucího direkčního momentu, který bude registrován příslušnou vý-

chylkou precesního rámečku, jež může přesáhnout kritickou hodnotu. Jde o to, aby výše zmíněný směrný moment byl kompenzován nejrychlejším možným způsobem. K cíli vede následující úvaha:

- 1) Umíme nastavit rovnovážnou polohu systému (s vodorovnou rovinou vnitřního rámu) nejen při vodorovné poloze základny, ale i při sklonění ve dvou směrech o libovolné úhly  $\alpha$ ,  $\beta$ .
- 2) V každé poloze základny dané úhly ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) lze v každé poloze rámu nastavit tlaky v pružinách tak, aby vnitřní rám byl vodorovný. Tj.:  $\beta + \varphi = 0$ ,  $\alpha + \psi = 0$ . Je to výsledek řešení silové a momentové rovnováhy.
- 3) Je při tom třeba odlišit výchylku kardanova rámu od vodorovné polohy zapříčiněnou setrvačným zrychlením, přičemž registrujeme nenulovou hodnotu relativního úhlu  $\varphi$ ,  $\psi$ , od odchylky způsobené skloněním základny.
- 4) S využitím vhodného řídicího algoritmu lze požadovaný tlak v pneumatických pružinách určit a stanovit optimální směr kompenzace.
- 5) Přitom předpokládáme, že skloněné vozidlo se pohybuje přímočaře a rovnoměrně.
- 6) Je-li pohyb zrychlený, existují dvě možnosti:
  - a) zachovat skutečnou vertikálu
  - b) zachovat zdánlivou (výslednici působících zrychlení) vertikálu

V případě a) je třeba příslušnou korekci vypnout. V případě b) je naopak potřeba co nejrychleji ztotožnit normálu vnitřního rámu se zdánlivou vertikálou – tento příklad nejlépe odpovídá stavbě lidského těla a ergonomickým zásadám.

### 4.3.3 Kompenzační motory na osách kardanových rámu

Jak jsme uvedli výše, momentový motor kompenzačního systému gyroskopického stabilizátoru musí být schopen kompenzovat poruchové momenty v ose stabilizovaného rámu. Tento předpoklad určuje výběr momentového motoru co do velikosti momentu, který musí být tento motor schopen vyvinout. Kromě rozměrových omezení daných zástavbou motoru do tělesa stabilizovaného rámu lze zmínit neméně důležitý požadavek, a to minimální redukovaný moment setrvačnosti. Z tohoto pohledu se jeví jako nevhodné motory vybavené redukční převodovkou, některé motory jsou dokonce vybaveny samosvornou převodovkou, což jejich užití zcela vylučuje.

V indikačních gyroskopických systémech se obvykle využívají jako kompenzační motory bezkartáčové motory s vyniklými póly rotoru (salient-pole reluctance motor), případně bezkartáčové motory s permanentními magnety (permanent-magnet-field electric-current torquer). V případě prvního zmíněného typu je moment přímo úměrný druhé mocnině proudu, u druhého typu je pak moment přímo úměrný proudu – viz [14].

### 4.3.4 Možnost náhrady kompenzačního motoru řízenou vzduchovou pružinou

Požadavek maximálního momentu, který musí být kompenzační motor schopen vyvodit, znamená v případě silového gyroskopického stabilizátoru nutnost použití silněj-

ších motorů. To, kromě komplikací se zástavbou, znamená také nutnost použití výkonného zdroje pro napájení takového momentového motoru. To nás vedlo k úvaze o možnosti náhrady elektrického momentového motoru řízením pneumatických pružin. Pro nastavení výchozí polohy stabilizovaného objektu jsme užili řízených pneumatických pružin. Nyní se naskytla možnost využít řízení pružin i v dynamickém stavu, jako náhrady kompenzačního motoru. Toto řešení jsme teoreticky i simulačně analyzovali a experimentálně úspěšně ověřili. V našem návrhu jsme se tak zbavili jednoho principiálního nedostatku původního řešení – enormního zvýšení redukovaného momentu setrvačnosti.

### 4.4 Korekční systém gyroskopického stabilizátoru

Korekční systém dvojosého gyroskopického stabilizátoru je realizován úhlovým snímačem absolutní a akcelerometrem polohy na vnitřním rámu kardanova závěsu a momentovým motorem na ose precesního rámečku. Při vychýlení polohového čidla z rovnovážné střední polohy je regulátorem korekčního systému ovládán moment generovaný korekčním motorem v ose příslušného precesního rámečku. Korekční motor se tímto dostane do rovnováhy s vytvořeným gyroskopickým momentem, který příslušný rám kardanova závěsu natočí do rovnovážné polohy.

Protože snímač korekčního systému podléhá setrvačným silám a ukazuje tedy ne skutečnou, ale zdánlivou vertikálu, je nutné tuto skutečnost respektovat a na základě údaje akcelerometru korekční systém deaktivovat po dobu příslušného manévru, při němž dochází ke zrychlenému translačnímu pohybu stabilizátoru (akcelerace, brzdění, zatáčení). Je možné ovšem gyroskopický stabilizátor narovnávat do směru zdánlivé vertikály. V tomto případě při vychýlení akcelerometru korekční motor nevypínáme, ale naopak korekci podstatně zesílíme.

#### 4.4.1 Čidla absolutní polohy

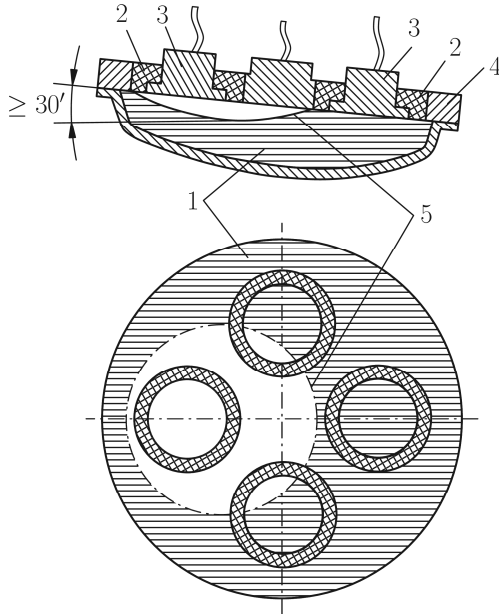
Jako snímač absolutní polohy v inerciálním souřadnicovém systému může sloužit další gyroskop – indikační. Dnes se běžně používají miniaturní rezonanční gyroskopy, které existují v podobě o něco většího elektronického čipu, které patří do skupiny snímačů MEMS (micro electro-mechanical system). Tzv. IMU (inertial measurement unit), což je kombinace tříosého akcelerometru a tříosého rezonančního gyroskopu, se běžně montuje do mobilních telefonů, profesionální snímač pak může mít rozměry o málo větší než krychle o hraně 20 mm (např. [15]).

Zvláštní skupinou čidel absolutní polohy jsou snímače zdánlivé vertikály. Jedná se o snímače indikující směr výslednice zrychlení. Tento úkol mohou plnit například víceosé akcelerometry, snímače na principu kapalínové libely, nebo kyvadla.

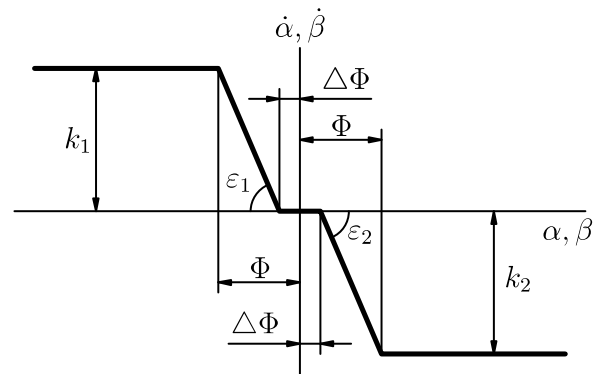
#### *Kapalinová libela, kyvadlo*

Z pohledu matematického modelování se jedná o velmi podobné systémy. Kapalina v nádobě se chová podobně jako kyvadlo, při vychýlení výslednice zrychlení se v nádobce s kapalinou přesune plynová bublinka do rovnovážné polohy podobně jako závaží kyvadla. Oba principy mají poměrně malé vlastní frekvence v řádu jedno-

tek Hz. V případě využití takového snímače zdánlivé vertikály se uplatňuje jeho filtrační vlastnost (dolnofrekvenční propust), kdy pro nízké frekvence je indikována zdánlivá vertikála správně a pro nadrezonanční kmitočty je indikovaná výchylka menší, což může být pro funkci stabilizátoru přínosné. Nízkofrekvenční výchylky jsou tak kompenzovány silou gyroskopického momentu, zatímco vysokofrekvenční výchylky zdánlivé vertikály jsou pouze odpruženy pružinami stabilizovaného rámu kardanova závěsu.



Obr. 11: Elektronická dvousměrná libela:  
1 – vodivá tekutina; 2 – izolace; 3 – kontakty;  
4 – měděný kroužek; 5 – bublina. (zdroj [3])



Obr. 12: Charakteristika dvousměrné libely;  
 $\Phi = 0,4 \div 2^\circ$  (zdroj [3])

Dvousměrnou libelu lze modelovat jako dvousměrné fyzikální kyvadlo:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_k + 2b\dot{\alpha}_k + k^2\alpha_k &= -\frac{1}{g}k^2(V\omega_c + 2VU \sin \varphi), \\ \ddot{\beta}_k + 2n\dot{\beta}_k + k^2\beta_k &= \frac{1}{g}k^2\dot{V}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

kde  $\alpha_k, \beta_k$  jsou okamžité odchylky kyvadla od směru skutečné vertikály kolem os  $\eta$  a  $\xi$ ,  $k = \sqrt{mlg/J}$  je tuhost kyvadla,  $b = N/(2J)$  je tlumení kyvadla a  $J$  je moment setrvačnosti kyvadla. Při ustáleném letu rovnovážná poloha tohoto kyvadla souhlasí se směrem zdánlivé vertikály.

### Víceosý akcelerometr jako čidlo zdánlivé vertikály

Víceosým akcelerometrem lze snímat hodnoty složek zrychlení v souřadnicovém systému akcelerometru a na jejich základě lze vypočítat směr výslednice zrychlení. K tomuto účelu jsou vhodné piezorezistivní, kapacitní, nebo MEMS akcelerometry, které na rozdíl od piezoelektrických měří i statické zrychlení. Základním principem je snímání deformace elementu, na kterém je přimontována seismická hmota. Seismické hmoty jsou velmi malé, tedy nízké hmotnosti v řádu gramů, zatímco tuhost deformačního elementu je velmi vysoká, tedy vlastní frekvence takovéto soustavy je velmi vysoká. Proto v případě, že je indikace vysokofrekvenčních změn zdánlivé vertikály nežádoucí, je nutné použít filtraci dolnofrekvenční propustí.

#### 4.4.2 Čidla relativní polohy

Snímače relativní polohy jsou v případě gyroskopických stabilizátorů snímače natočení, jejichž účelem je snímat vzájemné natočení rámu kardanova závěsu. Existuje široké spektrum takových snímačů, od potenciometrických, přes magnetické na principu Hallovy sondy, nebo elektrické například na principu krokového motoru, dále pak existují různé optické snímače. Není cílem této práce dát vyčerpávající přehled typů a jejich použití. Omezme se pouze na základní rozdělení, tedy na tzv. kontaktní a bezkontaktní metody měření vzájemné rotace dvou těles.

V případě indikačních gyroskopických systémů je žádoucí natočení rámu kardanova závěsu, nebo precesní osy gyroskopu realizovat bezkontaktními metodami, neboť kontaktní metody přinášejí poruchové momenty, které jsou v případě indikačních systémů nežádoucí. Naproti tomu v případě silových stabilizátorů lze poruchové momenty způsobené kontaktními snímači relativní polohy zanedbat.

#### 4.4.3 Momentové motory na osách precesních rámečků

Momentové motory korekčního systému mají v zásadě za úkol korigovat odchylky příslušného kardanova rámu do správné polohy. Vzhledem ke snahám o minimalizaci zmíněných pasivních odporů jsou požadované momenty nízké, zároveň je však nutné, by samotná integrace momentového motoru do precesního rámečku nezpůsobila zvýšení pasivních odporů. Z tohoto pohledu se ukazují být elektrické bezkartáčové motory zmíněné v odstavci 4.3.3 zcela vyhovující.

### 4.5 Slabé a silné nelinearity v gyroskopickém systému

Zavedeným zvykem je označovat nelinearity za slabé, když mají hladký průběh závislosti na vstupní proměnné, tj. alespoň spojitou první derivaci. To znamená, že v pracovním bodě je možné rozvést do Taylorovy řady a vzhledem k její rychlé konvergenci je pak možné z členů vyššího stupně než prvního vytknout malý parametr. Pak je možné pro analytické řešení využít známých metod (malého parametru, postupných aproximací, pomalu měnících se amplitud, linearizovaného tlumení a tuhosti). V gyroskopických systémech půjde především o průběh viskózního tlumení, síly pneumatických pružin, hydraulického tlumiče apod.

Silné nelinearity lze charakterizovat tím, že nemají spojitý, nebo hladký průběh v pracovním pásmu vstupní proměnné (většinou je to skok konečné velikosti). Jsou to například:

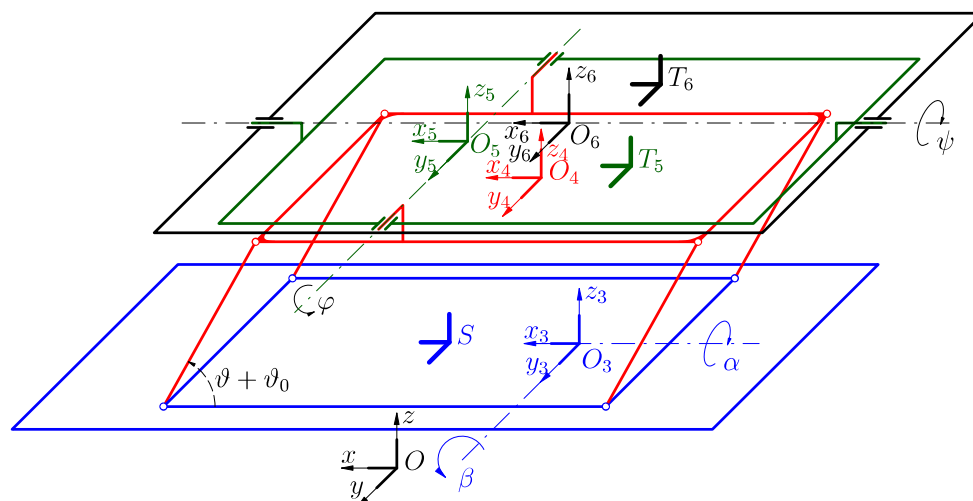
1. síly suchého tření (skok konečné délky při změně znaménka rychlosti a jiné),
2. analogický průběh má korekční momentový motor s reléovou charakteristikou,
3. zubová vůle (u odlehčovacího systému vůle v zubech převodové skříně),
4. pásmo necitlivosti (např. některé snímače sklonu),
5. možné průběhy, jak korekčního, tak kompenzačního momentu, jehož průběh je závislý nejen na vstupní veličině, ale též na smyslu rychlosti její změny.

Různé charakteristiky nelineárních sil lze nalézt například v [16; 17].



## 5 Vibroizolační systém s gyroskopickým stabilizátorem

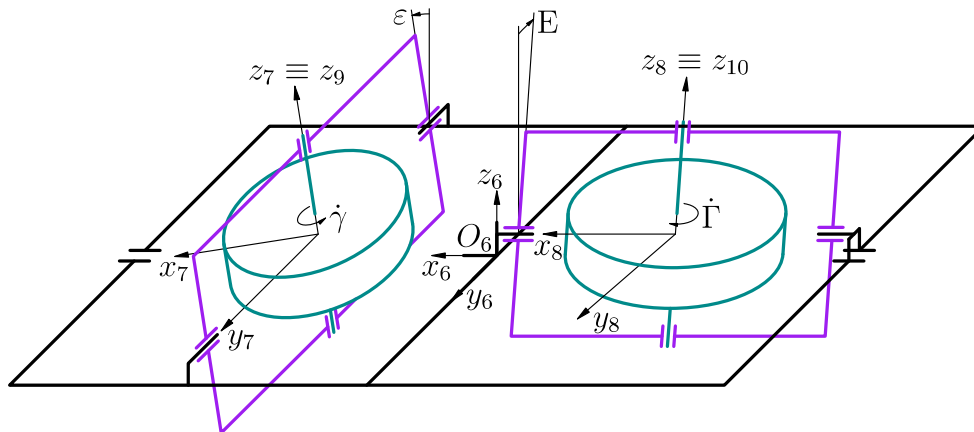
Analýza vibroizolačního systému s gyroskopickým stabilizátorem byla od začátku motivována snahou o zlepšení vibroizolace ležícího pacienta v průběhu transportu sanitním vozem. Možnosti snížení vlastních frekvencí vibroizolační platformy pod úroveň pásma prvních vlastních frekvencí podvozku sanitního vozu, které se pohybuje v oblasti nad 1,5–2 Hz, jako například zkrácení ramen působení pneumatických pružin v kardanově závěsu, nebo přidání rozměrných přídavných objemů k pneumatickým pružinám byly zavrženy jako neefektivní, nebo obtížně realizovatelné. Jako poslední možnost navrhl profesor Šklíba v roce 2007 (viz [18] a [19]) zlepšení vibroizolace pacienta ležícího na platformě se třemi stupni volnosti (svislá translace a dvě rotace okolo vodorovných na sebe kolmých os – viz obr. 13) pomocí dvojosého gyroskopického stabilizátoru se silovými gyroskopy – viz obr. 14.



Obr. 13: Kinematické schéma závěsu sanitního lehátka se třemi stupni volnosti.

Navrhované řešení umožňuje při „dostatečně velkém impulsmomentu“ gyroskopů odladění vlastních frekvencí kardanova závěsu nad pásmo druhé vlastní frekvence podvozku sanitního vozu, které se obvykle pohybuje v oblasti 9–11 Hz. Přidání gyroskopických sil gyroskopů s „dostatečně velkým impulsmomentem“  $H$  způsobí rozdělení vlastních frekvencí do dvou skupin; precesní (pomalý pohyb precesních rámečků

gyroskopů frekvence v řádu  $H^{-1}$ ); nutační (vysoké frekvence stabilizovaných rámu kardanova závěsu v řádu  $H^1$ ). Vhodné zvětšení impulsmomentu gyroskopu způsobí to, že se precesní i nutační vlastní frekvence přeladí zcela mimo pásmo obou budících frekvencí. Ve zvláštním případě můžeme dokonce docílit toho, že komplexní kořeny odpovídající precesnímu pohybu přejdou do reálných čísel a precesní pohyb se tak stane aperiodickým. Tím by byla zajištěna podmínka dobré vibroizolace požadující aby vlastní frekvence vibroizolačního systému byly mimo oblast budících frekvencí.



Obr. 14: Dvojosý gyroskopický stabilizátor.

## 5.1 Odvození pohybových rovnic

K sestavení pohybových rovnic využijeme Lagrangeovy metody a prvních integrálů pohybových rovnic odpovídající cyklickým souřadnicím. Pro jejich sestavení je tedy nutné popsat kinematiku mechanického systému (polohy a rotace členů systému a jejich rychlosti) a následně určit kinetickou a potenciální energii v závislosti na zvolených zobecněných souřadnicích. Další síly působící v mechanickém systému (jako síly radiálních korekcí, hydraulických tlumičů, pružin, případně pasivní odpory) budeme později aplikovat jako zobecněné síly na pravé strany příslušných rovnic.

Pohybové rovnice vibroizolačního systému sanitního lehátka (bez gyroskopického stabilizátoru) již byly odvozeny v pracích [20] a [21]. Vzhledem k tomu, že v této práci pokračujeme rozšířením původního systému o gyroskopický stabilizátor, budeme při odvozování rovnic vycházet ze shodných předpokladů a budeme postupovat podobným způsobem. Program pro sestavení rovnic v prostředí software Maple sestavený v předchozích pracích ([20; 21]) jsme vhodně rozšířili o členy subsystému gyroskopického stabilizátoru.

V následujícím nebudeme zbytečně rozepisovat odvozované vztahy, vzhledem k šesti následným rotacím by byly příliš rozsáhlé pro publikaci. Níže uvedené vztahy jsou ovšem plně postačující pro zpracování počítačem, například v software Maple, který efektivně a bezchybně provede naznačené maticové operace, stejně jako úpravy goniometrických vztahů atd.

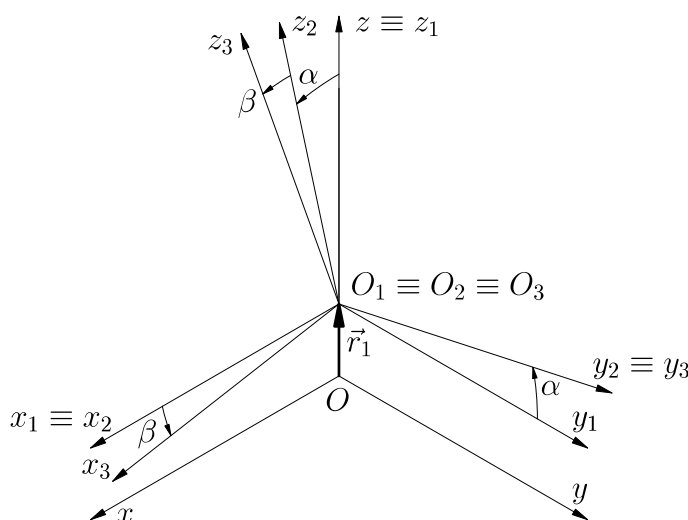
### 5.1.1 Kinematika

Lehátko s pacientem je umístěno na kardanově závěsu, který umožňuje náklon okolo podélné a příčné osy, ten je umístěn na horní základně paralelogramu, který tvoří vodící mechanismus pro svislou translaci. Tato koncepce vychází z jistého zjednodušujícího předpokladu o kinematickém buzení systému od podvozku sanitního vozu: omezujeme se, na vertikální translaci a kývání okolo příčné a podélné osy vozidla. Na horním rámu kardanova závěsu je potom umístěn dvojosý gyroskopický stabilizátor, který se skládá ze dvou gyroskopů se svislou osou rotace. Oba gyroskopy jsou shodné a uložené ve shodných precesních rámečcích. Precesní rámečky mají vodorovné osy rotace, vzájemně na sebe kolmé (podélná, příčná).

Jako konfigurační prostor systému, i s ohledem na sestavování funkcí dalších působících sil, volíme relativní úhly (viz obr. 13 a obr. 14) mezi jednotlivými členy systému:

- $\vartheta$  – natočení ramen paralelogramu vůči spodní základně paralelogramu 4,
- $\varphi$  – natočení prvního rámu kardanova závěsu 5 vůči horní základně paralelogramu 4,
- $\psi$  – natočení druhého rámu kardanova závěsu 6 vůči prvnímu rámu 5,
- $\varepsilon$  – natočení precesního rámečku 7 vůči druhému rámu kardanova závěsu 6,
- $E$  – natočení precesního rámečku 8 vůči druhému rámu kardanova závěsu 6,
- $\gamma$  – vlastní rotace gyroskopu 9 okolo osy  $z_7$  precesního rámečku 7,
- $\Gamma$  – vlastní rotace gyroskopu 10 okolo osy  $z_8$  precesního rámečku 8.

Pro odvození Lagrangeových rovnic druhého druhu budeme potřebovat sestavit funkce kinetické a potenciální energie systému v závislosti na zvolených zobecněných souřadnicích. Pro sestavení funkce potenciální energie potřebujeme určit polohové vektory těžišť členů systému vůči souřadnicovému systému  $O_{xyz}$ . Pro sestavení funkce kinetické energie potřebujeme v souladu s Königovou větou určit unášivé rychlosti vhodného bodu rozkladu jednotlivých členů systému vůči  $O_{xyz}$ , dále vektory úhlových rychlostí rotace okolo bodu rozkladu ve vhodném souřadnicovém systému a není-li bod rozkladu totožný s těžištěm, pak také vektory relativních rychlostí pohybu těžiště vůči bodu rozkladu.



Obr. 15: Souřadnicové systémy spojené se spodní základnou paralelogramu

Poznamenejme, že budeme používat označení vektorů tučnou antikvou (stojatě), horním indexem pak budeme označovat souřadnicový systém, v němž je vektor vyjádřen. V obrázcích potom budeme vektory coby jejich geometrickou interpretaci značit kurzívou s šipkou nad písmenem. Matice budeme označovat obvykle tučnou antikvou verzálkami, přičemž dvojice číslic v horním indexu bude u transformačních matic značit souřadnicové systémy, mezi nimiž matice transformuje a to zprava do leva, tedy matice  $\mathbf{T}^{23}$  je transformační maticí ze systému 3 do systému 2. Matice setrvačnosti pak budeme zapisovat jako matice tučnými stojatými verzálkami s horním indexem označujícím souřadnicový systém, v němž je matice setrvačnosti vyjádřena.

Ve shodě s předpokladem o omezení kinematického vysloveným výše bude obecná poloha ložné plochy sanitního automobilu v souřadnicovém systému spojeném se zemí  $O_{xyz}$  popsána vektorem  $\mathbf{r}_1^0 = [0, 0, \zeta(t)]^T$  (poloha systému  $O_{1x_1y_1z_1}$  vůči  $O_{xyz}$ ) a dvěma úhly  $\alpha(t)$  resp.  $\beta(t)$  vyjadřujícími pootočení systému  $O_{2x_2y_2z_2}$  okolo osy  $x_2 \equiv x_1$  systému  $O_{1x_1y_1z_1}$  resp. pootočení  $O_{3x_3y_3z_3}$  okolo osy  $y_3 \equiv x_2$  systému  $O_{2x_2y_2z_2}$  - viz Obr. 15. Poznamenejme, že zavedením časově proměnných složek  $x$  a  $y$  vektoru  $\mathbf{r}_1^0$  lze do rovnic snadno přidat i buzení v horizontálním směru. Pootočením  $\alpha(t)$  a  $\beta(t)$  náleží transformační matice

$$\mathbf{T}^{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{23} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Polohový vektor geometrického středu spodní základny paralelogramu v  $O_{xyz}$  je

$$\mathbf{r}_S^0 = \mathbf{T}^{12}\mathbf{T}^{23}\mathbf{r}_S^3 + \mathbf{r}_1^0, \quad (5.2)$$

kde  $\mathbf{r}_S^3 = [x_{S3}, y_{S3}, z_{S3}]^T$ .

Polohu spodního čepu  $k$ -tého ramene v  $O_{3x_3y_3z_3}$  označme  $\mathbf{r}_{Ck}^3$ , vůči bodu  $O$  v systému  $O_{xyz}$  bude platit

$$\mathbf{r}_{Ck}^0 = \mathbf{T}^{12}\mathbf{T}^{23}\mathbf{r}_{Ck}^3 + \mathbf{r}_1^0 \quad (k = 1 \dots 4) \quad (5.3)$$

a pro polohový vektor těžiště  $k$ -tého ramene v  $O_{3x_3y_3z_3}$  za předpokladu, že těžiště leží v polovině délky ramene, platí

$$\mathbf{r}_{RTk}^3 = \mathbf{r}_{Ck}^3 + \frac{1}{2}[R \cos(\vartheta + \vartheta_0), 0, R \sin(\vartheta + \vartheta_0)]^T \quad (k = 1 \dots 4), \quad (5.4)$$

kde  $R$  je délka ramene. Což vůči souřadnicovém systému  $O$  vyjádřeno v  $O_{xyz}$  pak

$$\mathbf{r}_{RTk}^0 = \mathbf{T}^{12}\mathbf{T}^{23}\mathbf{r}_{RTk}^3 + \mathbf{r}_1^0 \quad (k = 1 \dots 4). \quad (5.5)$$

Poloha bodu  $O_4$ , který je středem horní základny paralelogramu, vůči bodu  $S$  bude

$$\mathbf{r}_{O4}^3 = [R \cos(\vartheta + \vartheta_0), 0, R \sin(\vartheta + \vartheta_0)]^T = \mathbf{r}_{T4}^3. \quad (5.6)$$

Předpokládejme dále, že osy rámu kardanova závěsu jsou obecně mimoběžné a polohy těžišť jsou obecné. Poloha bodu  $O_5$ , který leží na ose rotace prvního rámu kardanova závěsu, je

$$\mathbf{r}_{O5}^3 = \mathbf{r}_{O4}^3 + \mathbf{r}_{O5}^4, \quad (5.7)$$

kde  $\mathbf{r}_{O5}^4 = [x_5, y_5, z_5]^T$ . Poloha těžiště prvního rámu je potom

$$\mathbf{r}_{T5}^3 = \mathbf{T}^{35}\mathbf{r}_{T5}^5 + \mathbf{r}_{O5}^3, \quad (5.8)$$

kde  $\mathbf{r}_{T5}^5 = [x_{T5}, y_{T5}, z_{T5}]^T$ . Poloha bodu  $O_6$ , který leží na ose rotace druhého rámu kardanova závěsu je

$$\mathbf{r}_{O6}^3 = \mathbf{T}^{35} \mathbf{r}_{O6}^5 + \mathbf{r}_{O5}^3, \quad (5.9)$$

kde  $\mathbf{r}_{O6}^5 = [x_6, y_6, z_6]^T$ . Poloha těžiště druhého rámu je potom

$$\mathbf{r}_{T6}^3 = \mathbf{T}^{35} \mathbf{T}^{56} \mathbf{r}_{T6}^6 + \mathbf{r}_{O6}^3, \quad (5.10)$$

kde  $\mathbf{r}_{T6}^6 = [x_{T6}, y_{T6}, z_{T6}]^T$ . Přičemž matice ve vztazích (5.8) až (5.10) jsou

$$\mathbf{T}^{35} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{56} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

V dalším předpokládáme, že precesní rámečky jsou vyvážené a těžiště leží na osách jejich rotace. Stejně tak rotory gyroskopů, těžiště leží na ose rotace rotoru gyroskopu v průsečíku s jeho precesní osou. Polohové vektory těžišť precesních rámečků jsou

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{T7}^3 &= \mathbf{T}^{35} (\mathbf{T}^{56} \mathbf{r}_{T7}^6 + \mathbf{r}_{O6}^5) + \mathbf{r}_{O5}^3, \\ \mathbf{r}_{T8}^3 &= \mathbf{T}^{35} (\mathbf{T}^{56} \mathbf{r}_{T8}^6 + \mathbf{r}_{O6}^5) + \mathbf{r}_{O5}^3, \end{aligned} \quad (5.12)$$

kde  $\mathbf{r}_{T7}^6 = [x_7, y_7, z_7]^T$  a  $\mathbf{r}_{T8}^6 = [x_8, y_8, z_8]^T$ . Vzhledem k výše uvedenému pro polohové vektory těžišť gyroskopů

$$\mathbf{r}_{T9}^3 = \mathbf{r}_{T7}^3, \quad \mathbf{r}_{T10}^3 = \mathbf{r}_{T8}^3. \quad (5.13)$$

Polohové vektory vůči bodu  $O$  vyjádřené v systému  $O_{xyz}$  pak jsou

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{O_i}^0 &= \mathbf{T}^{12} \mathbf{T}^{23} \mathbf{r}_{O_i}^3 + \mathbf{r}_1^0 \quad (i = 4 \dots 6), \\ \mathbf{r}_{T_i}^0 &= \mathbf{T}^{12} \mathbf{T}^{23} \mathbf{r}_{T_i}^3 + \mathbf{r}_1^0 \quad (i = 4 \dots 10). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Dále pak časovými derivacemi příslušných vektorů získáme vektory unášivých rychlostí. Pro unášivou rychlost spodních čepů ramen paralelogramu vůči bodu  $O$  v systému  $O_{xyz}$  dostaneme

$$\mathbf{u}_{Ck}^0 = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{Ck}^0 \quad (k = 1 \dots 4) \quad (5.15)$$

a unášivá rychlost těžišť ramen vůči bodu  $O$  v systému  $O_{xyz}$  je

$$\mathbf{u}_{RTk}^0 = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{RTk}^0 \quad (k = 1 \dots 4). \quad (5.16)$$

Unášivé rychlosti horní základny ( $i = 4$ ), prvního ( $i = 5$ ) a druhého ( $i = 6$ ) rámu kardanova závěsu vůči bodu  $O$  v systému  $O_{xyz}$  jsou

$$\mathbf{u}_{O_i}^0 = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{O_i}^0 \quad (i = 4 \dots 6), \quad (5.17)$$

a konečně unášivé rychlosti těžišť

$$\mathbf{u}_{T_i}^0 = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{T_i}^0 \quad (i = 4 \dots 10), \quad (5.18)$$

kde index  $i = 7$  přísluší prvnímu precesnímu rámečku (příčná precesní osa),  $i = 8$  druhému precesnímu rámečku (podélná precesní osa),  $i = 9$  prvnímu gyroskopu (příčná precesní osa) a konečně  $i = 10$  druhému gyroskopu (podélná precesní osa).

Relativní rychlosti těžišť vůči bodům rozkladu je potřeba určit pouze pro oba rámy kardanova závěsu. V ostatních případech budeme bod rozkladu totožný s těžištěm. Relativní rychlost těžiště prvního rámu kardanova závěsu vůči bodu  $O_5$  v systému  $O_{4x_4y_4z_4}$  je dána

$$\mathbf{v}_{TO5}^4 = \boldsymbol{\omega}_5^4 \times \mathbf{r}_{T5}^5, \quad (5.19)$$

kde  $\boldsymbol{\omega}_5^4 = [0, \dot{\varphi}, 0]^T$  je vektor úhlové rychlosti rotace prvního rámu. Vyjádřeno v systému  $O_{xyz}$  pak

$$\mathbf{v}_{TO5}^0 = \mathbf{T}^{12} \mathbf{T}^{23} \mathbf{v}_{TO5}^4. \quad (5.20)$$

Relativní rychlost druhého rámu vůči bodu  $O_6$  v systému  $O_{5x_5y_5z_5}$  je

$$\mathbf{v}_{TO6}^5 = \boldsymbol{\omega}_6^5 \times \mathbf{r}_{T5}^6, \quad (5.21)$$

kde  $\boldsymbol{\omega}_6^5 = [\dot{\psi}, 0, 0]^T$ . Vyjádřeno v systému  $O_{xyz}$  platí

$$\mathbf{v}_{TO6}^0 = \mathbf{T}^{12} \mathbf{T}^{23} \mathbf{T}^{35} \mathbf{v}_{TO6}^5. \quad (5.22)$$

Nakonec sestavme vektory úhlových rychlostí. Vyjádříme je vždy v souřadnicovém systému spojeném s příslušným tělesem. Úhlová rychlost spodní a horní základny paralelogramu bude

$$\boldsymbol{\omega}_S^3 = \mathbf{T}^{32} \boldsymbol{\omega}_\alpha^2 + \boldsymbol{\omega}_\beta^3, \quad (5.23)$$

kde  $\boldsymbol{\omega}_\alpha^2 = [\dot{\alpha}, 0, 0]^T$  a  $\boldsymbol{\omega}_\beta^3 = [0, \dot{\beta}, 0]^T$  jsou vektory úhlových rychlostí kinematického buzení a  $\mathbf{T}^{32} = (\mathbf{T}^{23})^{-1} = (\mathbf{T}^{23})^T$  je transformační maticí ze systému  $O_{2x_2y_2z_2}$  do  $O_{3x_3y_3z_3}$ . Úhlová rychlost horní základny paralelogramu je shodná s úhlovou rychlostí spodní základny, tedy

$$\boldsymbol{\omega}_4^3 = \boldsymbol{\omega}_S^3. \quad (5.24)$$

Pro vektor úhlové rychlosti ramen paralelogramu platí

$$\boldsymbol{\omega}_R^\vartheta = \mathbf{T}^{\vartheta 3} \boldsymbol{\omega}_S^3 + \boldsymbol{\omega}_\vartheta^\vartheta, \quad (5.25)$$

kde  $\boldsymbol{\omega}_\vartheta^\vartheta = [0, \dot{\vartheta}, 0]$  a

$$\mathbf{T}^{\vartheta 3} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix}.$$

Úhlové rychlosti rámu kardanova závěsu jsou postupně

$$\boldsymbol{\omega}_5^5 = \mathbf{T}^{53} \boldsymbol{\omega}_S^3 + \boldsymbol{\omega}_\varphi^5, \quad (5.26)$$

$$\boldsymbol{\omega}_6^6 = \mathbf{T}^{65} \boldsymbol{\omega}_5^5 + \boldsymbol{\omega}_\psi^6, \quad (5.27)$$

kde  $\boldsymbol{\omega}_\varphi^5 = [0, \dot{\varphi}, 0]^T$  a  $\boldsymbol{\omega}_\psi^6 = [\dot{\psi}, 0, 0]^T$ , matice analogicky jako v (5.23). Pro úhlové rychlosti precesních rámečků platí

$$\boldsymbol{\omega}_7^7 = \mathbf{T}^{76} \boldsymbol{\omega}_6^6 + \boldsymbol{\omega}_\varepsilon^7, \quad (5.28)$$

$$\boldsymbol{\omega}_8^8 = \mathbf{T}^{86} \boldsymbol{\omega}_6^6 + \boldsymbol{\omega}_E^8, \quad (5.29)$$

kde  $\boldsymbol{\omega}_\varepsilon^7 = [0, \dot{\varepsilon}, 0]^T$ ,  $\boldsymbol{\omega}_E^8 = [\dot{E}, 0, 0]^T$  a matice

$$\mathbf{T}^{76} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & 0 & -\sin \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{86} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos E & \sin E \\ 0 & -\sin E & \cos E \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

Nakonec úhlové rychlosti vlastní rotace gyroskopů postačuje sestavit v souřadnicových systémech precesních rámečků (gyroskopy předpokládáme osově symetrické vůči ose vlastní rotace, platí

$$\boldsymbol{\omega}_9^7 = \boldsymbol{\omega}_7^7 + \boldsymbol{\omega}_\gamma^7, \quad (5.31)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{10}^8 = \boldsymbol{\omega}_8^8 + \boldsymbol{\omega}_\Gamma^8, \quad (5.32)$$

kde  $\boldsymbol{\omega}_\gamma^7 = [0, 0, \dot{\gamma}]^T$  a  $\boldsymbol{\omega}_\Gamma^8 = [0, 0, \dot{\Gamma}]^T$  jsou vektory úhlové rychlosti vlastní rotace gyroskopů. Poznamenejme, že  $\boldsymbol{\omega}_9^7$  a  $\boldsymbol{\omega}_{10}^8$  jsou funkcemi pouze  $\dot{\gamma}$  a  $\dot{\Gamma}$ , nikoliv  $\gamma$  a  $\Gamma$ .

### 5.1.2 Kinetická a potenciální energie

Kinetickou energii celého systému určíme jako součet kinetických energií všech těles. Dle Königovy věty platí

$$T_i = T_{i1} + T_{i2} + T_{i3} \quad (i = 3 \dots 10), \quad (5.33)$$

kde  $i = 3$  platí pro ramena paralelogramu, indexy  $i = 4 \dots 10$  již byly popsány výše. Dále  $T_{i1}$  je kinetická energie posuvného pohybu tělesa v bodu rozkladu.  $T_{i2}$  je skalární součin rychlosti bodu rozkladu a relativní rychlosti těžiště vůči bodu rozkladu, násobený hmotností tělesa, přičemž obě rychlosti musí být vyjádřeny ve stejném souřadnicovém systému. Je-li bod, ve kterém provádíme rozklad totožný s těžištěm, je  $T_{i2} = 0$ . Nakonec  $T_{i3}$  je kinetická energie rotace tělesa okolo bodu ve kterém provádíme základní rozklad.

Celkovou kinetickou energii mechanického systému potom můžeme vyjádřit jako

$$T = \sum_{i=3}^{10} \sum_{j=1}^3 T_{ij}. \quad (5.34)$$

#### *Kinetická energie ramen paralelogramu*

Rozklad jsme provedli vzhledem k těžišti  $k$ -tého ramene, pro kinetickou energii ramen tedy postupně platí

$$\begin{aligned} T_{31} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 m_R (\mathbf{u}_{RT1}^0)^2, \\ T_{32} &= 0, \\ T_{33} &= \frac{1}{2} 4 \left( \boldsymbol{\omega}_R^\vartheta \right)^T \mathbf{I}_R \boldsymbol{\omega}_R^\vartheta, \end{aligned} \quad (5.35)$$

kde  $\mathbf{I}_R$  je matice setrvačnosti ramene v souřadnicovém systému umístěném v těžišti ramene s osami pootočenými o úhel  $\vartheta + \vartheta_0$  okolo osy  $y_3$ .

#### *Kinetická energie horní základny paralelogramu*

Rozklad jsme provedli v těžišti horní základny, takže platí

$$\begin{aligned} T_{41} &= \frac{1}{2} m_4 (\mathbf{u}_{O4}^0)^2, \\ T_{42} &= 0, \\ T_{43} &= \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{\omega}_4^3 \right)^T \mathbf{I}_{T4}^3 \boldsymbol{\omega}_4^3, \end{aligned} \quad (5.36)$$

kde  $\mathbf{I}_{T4}^3$  je matice setrvačnosti horní základny vzhledem k těžišti vyjádřená v souřadnicovém systému  $O_{4x_4y_4z_4}$ .

### ***Kinetická energie prvního rámu kardanova závěsu***

Základní rozklad jsme v tomto případě provedli k bodu  $O_5$ , který není totožný s těžištěm, tedy

$$\begin{aligned} T_{51} &= \frac{1}{2} m_5 (\mathbf{u}_{O_5}^0)^2, \\ T_{52} &= m_5 \mathbf{u}_{O_5}^0 \cdot \mathbf{v}_{TO_5}^0, \\ T_{53} &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_5^5)^T \mathbf{I}_5^5 \boldsymbol{\omega}_5^5, \end{aligned} \quad (5.37)$$

kde  $\mathbf{I}_5^5$  je matice setrvačnosti prvního rámu vzhledem bodu  $O_5$  souřadnicovém systému  $O_{5x_5y_5z_5}$ .

### ***Kinetická energie druhého rámu***

$$\begin{aligned} T_{61} &= \frac{1}{2} m_6 (\mathbf{u}_{O_6}^0)^2, \\ T_{62} &= m_6 \mathbf{u}_{O_6}^0 \cdot \mathbf{v}_{TO_6}^0, \\ T_{63} &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_6^6)^T \mathbf{I}_6^6 \boldsymbol{\omega}_6^6, \end{aligned} \quad (5.38)$$

kde  $\mathbf{I}_6^6$  je matice setrvačnosti druhého rámu v systému  $O_{6x_6y_6z_6}$ .

### ***Kinetická energie precesních rámečků***

Základní rozklad jsme provedli vzhledem k těžištěm obou precesních rámečků, proto

$$\begin{aligned} T_{71} &= \frac{1}{2} m_7 (\mathbf{u}_{T_7}^0)^2, \\ T_{72} &= 0, \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} T_{73} &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_7^7)^T \mathbf{I}_7^7 \boldsymbol{\omega}_7^7, \\ T_{81} &= \frac{1}{2} m_8 (\mathbf{u}_{T_8}^0)^2, \\ T_{82} &= 0, \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$T_{83} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_8^8)^T \mathbf{I}_8^8 \boldsymbol{\omega}_8^8,$$

kde matice setrvačnosti  $\mathbf{I}_7^7$  a  $\mathbf{I}_8^8$  jsou maticemi setrvačnosti vzhledem k těžištěm precesních rámečků v příslušných souřadnicových systémech.

### ***Kinetická energie gyroskopů***

Platí

$$\begin{aligned} T_{91} &= \frac{1}{2} m_g (\mathbf{u}_{T_9}^0)^2, \\ T_{92} &= 0, \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} T_{93} &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_9^7)^T \mathbf{I}_g^7 \boldsymbol{\omega}_9^7, \\ T_{101} &= \frac{1}{2} m_g (\mathbf{u}_{T_{10}}^0)^2, \\ T_{102} &= 0, \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$T_{103} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_{10}^8)^T \mathbf{I}_g^8 \boldsymbol{\omega}_{10}^8,$$

kde vzhledem k symetrii rotoru gyroskopu platí  $\mathbf{I}_g^8 = \mathbf{I}_g^7 = \mathbf{I}_g^{10} = \mathbf{I}_g^9$ , a dále díky nutnosti dobrého dynamického vyvážení rychle rotující hmoty gyroskopu musí být



$$\mathbf{I}_g^9 = \begin{bmatrix} J_e & 0 & 0 \\ 0 & J_e & 0 \\ 0 & 0 & J_{9z} \end{bmatrix} = \mathbf{I}_g^{10} = \begin{bmatrix} J_e & 0 & 0 \\ 0 & J_e & 0 \\ 0 & 0 & J_{10z} \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

Vzhledem k tomu, že  $\boldsymbol{\omega}_9^7$  a  $\boldsymbol{\omega}_{10}^8$  nejsou funkcemi  $\gamma$  a  $\Gamma$ , ale jen  $\dot{\gamma}$  a  $\dot{\Gamma}$ , ani kinetická energie není funkcí  $\gamma$  a  $\Gamma$ .

### Potenciální energie tíhových sil

Vertikální souřadnice těžišť určujeme v „absolutním“ souřadnicovém systému, v našem případě tedy  $O_{xyz}$ . Polohové vektory těžišť jsou učeny vztahem (5.14). Potenciální energie tíhových sil jednotlivých těles systému pak tedy budou

$$V_i = m_i g (\mathbf{e}_z^0)^T \cdot \mathbf{r}_{Ti}^0 \quad (i = 4 \dots 10), \quad (5.44)$$

kde  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  je hodnota tíhového zrychlení a  $\mathbf{e}_z^0$  je jednotkový vektor ve směru osy  $z$  v souřadnicovém systému  $O_{xyz}$ .

Potenciální energie ramen paralelogramu potom bude

$$V_R = \sum_{k=1}^4 m_R g (\mathbf{e}_z^0)^T \cdot \mathbf{r}_{RTk}^0. \quad (5.45)$$

Nakonec je tedy celková potenciální energie tíhových sil

$$V = V_R + \sum_{i=4}^{10} V_i. \quad (5.46)$$

Ve vztazích (5.1) až (5.14) nefigurují úhly vlastní rotace gyroskopů  $\gamma$  a  $\Gamma$ , a tedy potenciální energie tíhových sil  $V$  není funkcí těchto zobecněných souřadnic.

### 5.1.3 Pohybové rovnice

Užitím odvozených funkcí kinetické a potenciální energie mechanického systému sestavme Lagrangeovy rovnice druhého druhu ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1 \dots 7), \quad (5.47)$$

kde  $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_7]^T = [\vartheta, \varphi, \psi, \varepsilon, E, \gamma, \Gamma]^T$  a  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_7]^T = [\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\varepsilon}, \dot{E}, \dot{\gamma}, \dot{\Gamma}]^T$  jsou zobecněné souřadnice a  $Q_i$  představují zobecněné síly (síly pružin, tlumičů, pasivních odporů, pohonů, ...), v našem případě, kdy všechny souřadnice konfiguračního prostoru jsou úhlové, se jedná o momenty.

Kinetická a potenciální energie v rovnicích (5.47) nejsou funkcemi úhlů vlastní rotace gyroskopů  $\gamma$  a  $\Gamma$  – tyto zobecněné souřadnice jsou tedy souřadnicemi cyklickými. Poslední dvě rovnice systému (5.47) můžeme tedy napsat ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_i \quad (i = 6, 7). \quad (5.48)$$

Uvažujeme-li, že na pravých stranách rovnic (5.48) jsou pouze hnací momenty pohonu gyroskopů a momenty pasivních odporů v ložiskách rotorů gyroskopů, které se v ustáleném stavu vzájemně kompenzují, bude pravá strana těchto rovnic identicky rovna nule, a tedy rovnice (5.48) mají první integrály

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = H_i \quad (i = 6, 7), \quad (5.49)$$

které s pomocí počítače a software Maple užitím výše uvedených vztahů snadno roze-  
píšeme, přičemž předpokládáme  $J_{9z} = J_{10z}$ ,

$$\begin{aligned} H_6 = J_{9z} \left[ \dot{\gamma} + \sin \varepsilon \left( \dot{\psi} + \dot{\alpha} \cos \varphi \cos \beta - \dot{\alpha} \sin \varphi \sin \beta \right) + \right. \\ \left. + \cos \varepsilon \left( \dot{\alpha} \sin \varphi \cos \psi \cos \beta - (\dot{\beta} + \dot{\varphi}) \sin \psi + \right. \right. \\ \left. \left. + \dot{\alpha} \cos \varphi \cos \psi \sin \beta \right) \right], \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} H_7 = J_{9z} \left[ \dot{\Gamma} - \sin \varepsilon \left( \dot{\alpha} \sin \varphi \sin \psi \cos \beta + \dot{\alpha} \cos \varphi \sin \psi \sin \beta + \right. \right. \\ \left. \left. + \dot{\beta} \cos \psi + \dot{\varphi} \cos \psi \right) + \cos \varepsilon \left( \dot{\alpha} \sin \varphi \cos \psi \cos \beta + \right. \right. \\ \left. \left. + \dot{\alpha} \cos \varphi \cos \psi \sin \beta - (\dot{\beta} + \dot{\varphi}) \sin \psi \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Vzhledem k tomu, že pro správnou funkci dvojosého gyroskopického stabilizátoru  
musí platit (jak jsme ukázali v [19])

$$\dot{\Gamma} = -\dot{\gamma} \gg \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \quad (5.52)$$

můžeme ve vztazích (5.50) a (5.51) zanedbat členy s  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$ , tedy

$$H_6 = -H_7 = H = J_{9z} \dot{\gamma}, \quad (5.53)$$

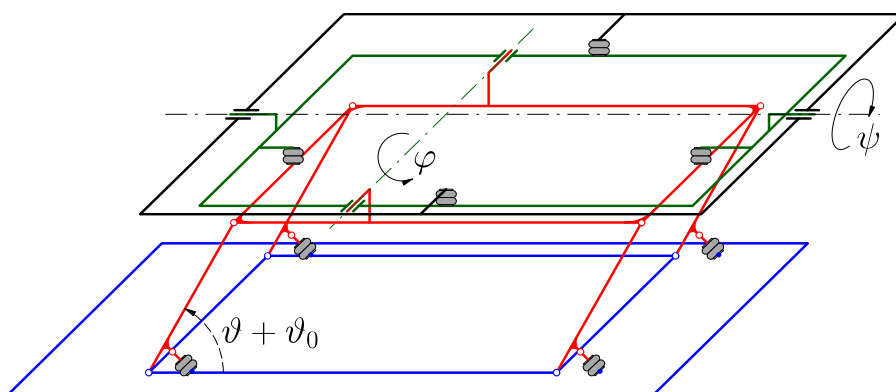
kde  $H$  je tzv. velký parametr, v tomto případě jde o impulsmoment gyroskopu – nej-  
důležitější parametr gyroskopického stabilizátoru. Užitím substituce (5.53) potom  
rovnice (5.47) můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1 \dots 5), \quad (5.54)$$

kde  $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_5]^T = [\vartheta, \varphi, \psi, \varepsilon, \mathbf{E}]^T$ ,  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_5]^T = [\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\varepsilon}, \dot{\mathbf{E}}]^T$  a kinetická energie  
systému (5.54) je potom ve tvaru  $T = T(\vartheta, \varphi, \psi, \varepsilon, \mathbf{E}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\varepsilon}, \dot{\mathbf{E}}, H)$ .

#### 5.1.4 Momenty pneumatických pružin a tlumičů

Návrh mechanického systému závěsu sanitního lehátka (viz [20; 21]) předpokládal  
využití pneumatických pružin pro zajištění jeho odpružení a zároveň za účelem mož-  
nosti ustavení výchozí výšky a vodorovné polohy ložné plochy i při obecné hmotnosti  
a poloze těžiště pacienta. V původním návrhu byla uvažována čtveřice pneumatic-  
kých pružin umístěných mezi spodní základnu paralelogramu a ramena paralelogramu  
a dvě dvojice pneumatických pružin mezi horní základnou paralelogramu a prvním  
ránem kardanova závěsu a mezi prvním a druhým ránem kardanova závěsu. Pružiny  
odpružení druhého (horního) rámu kardanova závěsu návrh uvažoval umístit syme-  
tricky okolo osy na šířku prvního rámu. Pružiny odpružení prvního rámu bylo uvažo-  
váno umístit nesymetricky vůči příčné ose rotace prvního rámu, která je od geome-  
trické osy posunuta směrem k hlavě pacienta, a to tak, že pružina umístěná směrem  
k hlavě pacienta by měla kratší rameno, než pružina umístěná směrem k nohám paci-  
enta. Schéma umístění pneumatických pružin viz obr. 16. Ve všech případech se mělo  
jednat o shodné pneumatické pružiny DUNLOP 2¾" × 2. Při odvozování vztahů pro  
momenty pneumatických pružin se proto omezíme na použití vlnovcových pružin.



Obr. 16: Umístění pneumatických pružin v odpruženém podstavci sanitního lehátka.

V popsané konfiguraci a se zátěží 80 kg měl systém vlastní frekvence 1,78 Hz pro paralelogram, 4,58 Hz pro první rám a 3,82 Hz pro druhý (horní rám) – viz [20 str. 89]. Později byly prováděny experimenty s užitím jedné větší pružiny umístěné mezi spodní a horní základnu paralelogramu doplněné o přídatný objem. Tyto pokusy sledovaly možnost snížení vlastní frekvence paralelogramu pod 1,5 Hz, tedy mimo pásmo první vlastní frekvence podvozku sanitního vozu.

Původní návrh vibroizolačního systému rovněž předpokládal využití hydraulických tlumičů. Tlumiče měly být umístěny na všech třech stupních volnosti vždy v blízkosti pneumatických pružin, tedy čtyři tlumiče na ramenech paralelogramu a po dvou tlumičích na obou rámech kardanova závěsu.

### **Momenty pneumatických pružin**

Pneumatické pružiny, tak jak byla realizována jejich montáž v reálném modelu systému zavěšení sanitního lehátka, jsou obecně mimoosově zatěžovány, přičemž vzhledem k využití kloubu v případě montáže horního čela pružiny lze předpokládat malou složku ohybového momentu. Virtuální práce mimoosově zatížené pneumatické pružiny (viz [20 str. 82]) je

$$\delta W = \mathbf{F}_n \cdot \delta \mathbf{s}_n + \mathbf{F}_t \cdot \delta \mathbf{s}_t + \mathbf{M}_o \cdot \delta \varphi_o, \quad (5.55)$$

kde  $\mathbf{F}_n$  resp.  $\mathbf{F}_t$  jsou složky výsledné síly ve směru normály, resp. roviny horního čela,  $\delta \mathbf{s}_n$  resp.  $\delta \mathbf{s}_t$  jsou virtuální posuvy v těchto směrech,  $\mathbf{M}_o$  je ohybový moment a  $\delta \varphi_o$  je vektor virtuálních pootočení horního čela. Při malých sklonech čel a malém vyosení je první člen ve vztahu (5.55) dominantní. S přihlédnutím ke zvolenému způsobu montáže a faktu, že očekáváme malé úhly výchylek rámců kardanova závěsu a ramen paralelogramu, lze zbylé členy je proto možné zanedbat.

Síla vyvozená vlnovcovou pružinou je

$$F(p, l) = p S_{ef}(l), \quad (5.56)$$

kde  $p$  je okamžitý přetlak v pružině a  $S_{ef}(l)$  je tzv. efektivní plocha pneumatické pružiny, která je v případě vlnovcové pružiny závislá pouze na okamžité délce  $l$  pružiny. Předpokládáme, že pružiny jsou uzavřené, počáteční tlak bude nastaven tak aby byly vyváženy momenty tíhových sil. Dále pak předpokládejme, že změny tlaku vzduchu uzavřeného v pružinách sledují izotermický děj (ve skutečnosti se jedná o nevratný polytropický děj, který je blízký izotermickému). Pak tedy platí

$$p \cdot V(l) = p_0 \cdot V(l_0) = konst., \quad (5.57)$$

kde  $p_0$  je počáteční přetlak vzduchu v pružině,  $V(l)$  je objem pružiny a  $l_0$  je délka pneumatické pružiny při základní konfiguraci mechanického systému (tj.  $\vartheta = 0$ ,  $\varphi = 0$  a  $\psi = 0$ ). Za předpokladu izotermického děje pak sílu vyvozenou pružinou můžeme určit jako

$$F(p_0, l) = p_0 \frac{V(l_0)}{V(l)} S_{ef}(l), \quad (5.58)$$

za účelem linearizace můžeme tento vztah rozvinout v Taylorovu řadu a zanedbat členy řádu vyššího než prvního

$$F(p_0, l) = p_0 S_{ef}(l_0) + l \cdot p_0 \cdot \left[ \frac{d}{dl} \left( \frac{V(l_0)}{V(l)} S_{ef}(l) \right) \right]_{l=l_0}, \quad (5.59)$$

je-li  $l(q)$  funkcí nějaké úhlové souřadnice, která nabývá malých hodnot, předpokládejme, že  $l \cong \Delta l + l_0 = l_0 + \mu q$ . Označme

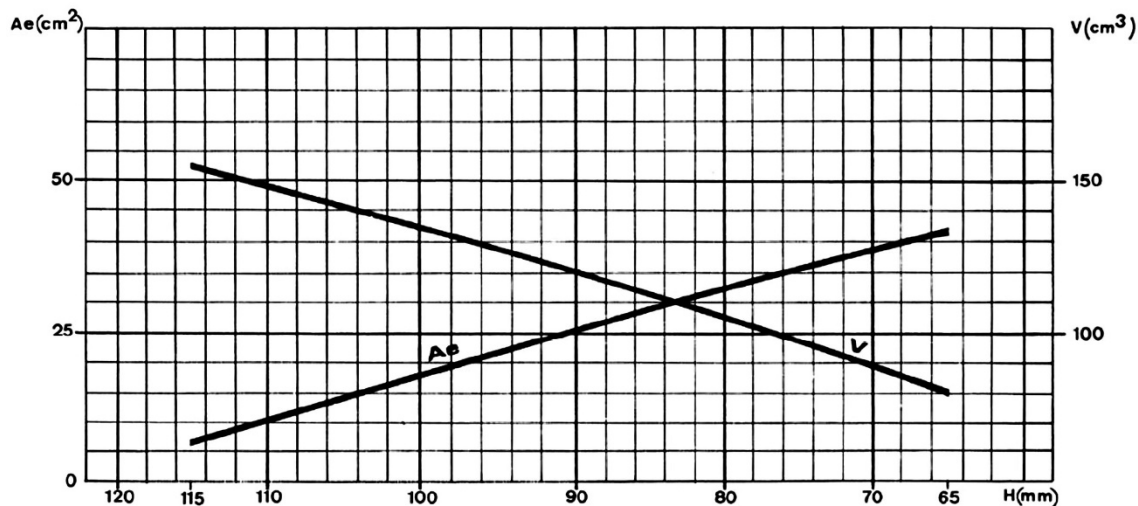
$$S_0 = S_{ef}(l_0) + l_0 \left[ \frac{d}{dl} \left( \frac{V(l_0)}{V(l)} S_{ef}(l) \right) \right]_{l=l_0}, \quad (5.60)$$

$$S_1 = \left[ \frac{d}{dl} \left( \frac{V(l_0)}{V(l)} S_{ef}(l) \right) \right]_{l=l_0},$$

pak vztah (5.59) bude

$$F(p_0, l) = p_0 S_0 + p_0 S_1 \Delta l. \quad (5.61)$$

Poznamenejme, že závislosti  $S_{ef}(l)$  a  $V(l)$  lze pro danou pneumatickou pružinu určit měřením a v případě některých výrobců je lze získat z datového listu dané pneumatické pružiny. To je i případ zvoleného typu DUNLOP 2 $\frac{3}{4}$ " $\times$ 2 – viz obr. 17.



Obr. 17: Závislosti efektivní plochy (výrobcem značena  $A_e$ ) a objemu na zdvihu pružiny DUNLOP 2 $\frac{3}{4}$ " $\times$ 2 (zdroj [22]).

Moment vyvozený pneumatickou pružinou určíme na základě rovnosti virtuální práce

$$\delta W = F(p_0, l) \delta l = M(p_0, q) \delta q, \quad (5.62)$$

pak tedy moment musí být

$$M(p_0, q) = F(p_0, l) \frac{\partial l}{\partial q}, \quad (5.63)$$

kde  $\mu_p = \partial l / \partial q$  je první převodová funkce, kterou určíme ze zdvihové závislosti  $l(q)$ , kde  $q$  je úhel natočení ramene/rámu.

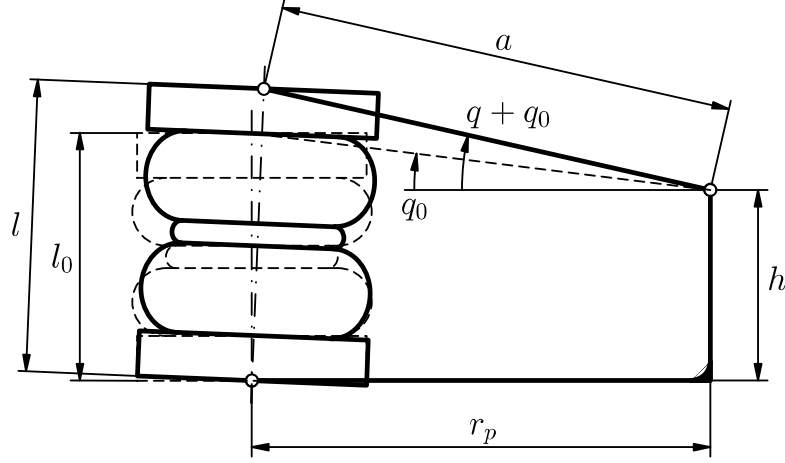
Pro zdvihovou závislost  $l(q)$  obecně uložené pneumatické pružiny (viz obr. 18) platí

$$l^2 = r_p^2 + h^2 + a^2 + 2ah \sin(q + q_0) - 2r_p a \cos(q + q_0), \quad (5.64)$$

a tedy první převodová funkce je

$$\mu_p(r_p, h, a, q) = \frac{\partial l}{\partial q} = \frac{ha \cos(q + q_0) + r_p a \sin(q + q_0)}{\sqrt{r_p^2 + h^2 + a^2 + 2ah \sin(q + q_0) - 2r_p a \cos(q + q_0)}}. \quad (5.65)$$

Pro pružiny paralelogramu platí  $q = \vartheta$ ,  $q_0 = \vartheta_0$  a  $a = r_{p\vartheta} / \cos(\vartheta_0)$ , pro pružiny kardanova závěsu pak  $q = \varphi, \psi$ ,  $q_0 = 0$  a  $a = r_p$ .



Obr. 18: Schéma obecného uložení pneumatické pružiny.

Moment pneumatických pružin paralelogramu pak bude

$$M_{p\vartheta} = 4 \cdot \mu_{p\vartheta} \cdot F(p_{04}, l_i(\vartheta)) \cong 4p_{04}S_0\mu_{p\vartheta} + 4p_{04}S_1\mu_{p\vartheta}^2\vartheta, \quad (5.66)$$

moment v ose prvního rámu kardanova závěsu

$$M_{p\varphi} = \sum_{i=1}^2 \mu_{p\varphi i} \cdot F(p_{05i}, l_i(\varphi)) \cong \sum_{i=1}^2 p_{05i}S_0\mu_{p\varphi i} + p_{05i}S_1\mu_{p\varphi i}^2\varphi \quad (5.67)$$

a druhého rámu

$$M_{p\psi} = \sum_{i=1}^2 \mu_{p\psi i} \cdot F(p_{06i}, l_i(\psi)) \cong \sum_{i=1}^2 p_{06i}S_0\mu_{p\psi i} + p_{06i}S_1\mu_{p\psi i}^2\psi. \quad (5.68)$$

Momenty v nelineárním tvaru můžeme přidat k pohybovým rovnicím (5.54), nebo momenty linearizované přidat k rovnicím (5.84). Uvažujeme-li malé úhly  $\vartheta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ , můžeme v linearizovaném tvaru považovat převodové funkce  $\mu_p$  za konstantní a momenty jsou pak v maticovém tvaru

$$\mathbf{M}_p = \mathbf{C}_p \mathbf{q} + \mathbf{E}_p, \quad (5.69)$$

$$\mathbf{C}_p = \begin{bmatrix} 4p_{04} S_1 \mu_{p\vartheta}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^2 p_{05i} S_1 \mu_{p\varphi i}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^2 p_{06i} S_1 \mu_{p\psi i}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_p = \begin{bmatrix} 4p_{04} S_0 \mu_{p\vartheta} \\ \sum_{i=1}^2 p_{05i} S_0 \mu_{p\varphi i} \\ \sum_{i=1}^2 p_{06i} S_0 \mu_{p\psi i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

### Počáteční tlaky v pneumatických pružinách

Počáteční tlaky v pružinách je třeba nastavit tak, aby byly vyváženy momenty tíhových sil (5.89) při  $\vartheta = 0$ ,  $\varphi = 0$  a  $\psi = 0$ , v rovnovážné poloze také platí  $\dot{q}_i, \ddot{q}_i = 0$ . Pro dosažení rovnovážné polohy musí platit

$$\mathbf{E}_p + \mathbf{E}(\alpha, \beta, \zeta = 0) = 0, \quad (5.71)$$

což dává tři složkové rovnice pro určení pěti tlaků  $p_{04}$ ,  $p_{051}$ ,  $p_{052}$ ,  $p_{061}$ ,  $p_{062}$ , musíme tedy přidat další dvě vhodné rovnice pro  $p_{051}$ ,  $p_{052}$ ,  $p_{061}$ ,  $p_{062}$ . Jako jedna z možností se nabízí silami pružin kardanových rámců kompenzovat tíhové síly v ložiskách kardanových rámců, tedy

$$\begin{aligned} -(m_5 + m_6 + 2m_p + 2m_g)g + S_0(p_{051} + p_{052}) &= 0, \\ -(m_6 + 2m_p + 2m_g)g + S_0(p_{061} + p_{062}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Řešením soustavy rovnic (5.71) společně s (5.72) určíme počáteční tlaky v pružinách.

### Momenty sil tlumičů

Je-li  $F_t(\dot{l})$  síla vyvozená tlumičem v závislosti na rychlosti pístu, pak analogicky k (5.62) z rovnosti virtuálních prací pro moment vyvozený tlumičem platí

$$M_t(q, \dot{q}) = F_t(\dot{l}(q, \dot{q})) \mu_t. \quad (5.73)$$

Předpokládejme shodný způsob montáže tlumičů jako v případě pneumatických pružin. Vztahy (5.73) jsou obecně nelineární, statickou rychlostní charakteristiku můžeme vhodným způsobem linearizovat (Maclaurinova řada je-li  $F_t(\dot{l})$  hladká v nule, případně ekvivalentní linearizace, nebo harmonická linearizace – viz [23 str. 335]). V případě užití Maclaurinovy řady:

$$F_t = \sum_{j=1}^m b_j \mu_t^j \dot{q}^j, \quad (5.74)$$

kde při  $m = 1$  jde o lineární funkci a momenty tlumičů budou

$$M_t = b_1 \mu_t^2 \dot{q}. \quad (5.75)$$

Momenty tlumičů lze pak maticově vyjádřit

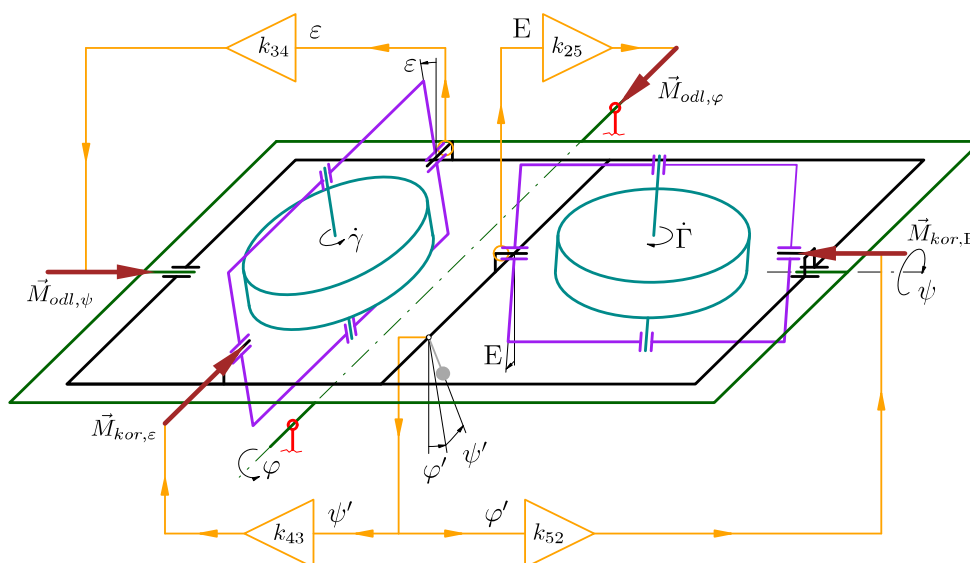
$$\mathbf{M}_t = \mathbf{B}\mathbf{q}, \quad (5.76)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4b_{\vartheta 1}\mu_{t\vartheta}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^2 b_{\varphi 1}\mu_{t\varphi i}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^2 b_{\psi 1}\mu_{t\psi i}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.77)$$

kde vzhledem k předpokládanému umístění tlumičů na stejných ramenech jako pružiny budou převodové funkce  $\mu_t = \mu_p$ .

### 5.1.5 Momenty korekčních a odlehčovacích zpětných vazeb

Korekční zpětná vazba snímá úhlovou výchylku příslušného rámu kardanova závěsu a proporcionálně k této výchylce vyvozuje moment v ose příslušného precesního rámečku. Odlehčovací (kompenzační) zpětná vazba snímá úhlovou výchylku precesního rámečku a proporcionálně vyvozuje moment v ose příslušného rámu kardanova závěsu, tím kompenzuje poruchový moment v ose kardanova rámu a omezuje výchylku precesního rámečku.



Obr. 19: Schéma zpětných vazeb dvojosého gyroskopického stabilizátoru.

Jak je patrné z obr. 19, momenty korekčních zpětných vazeb mají funkcemi absolutní výchylky příslušného stabilizovaného rámu ( $\varphi'$ ,  $\psi'$ ). V případě linearizovaného systému s předpokládanými malými výchylkami můžeme uvažovat

$$\varphi' = \varphi + \beta, \quad \psi' = \psi + \alpha. \quad (5.78)$$

Momenty korekčních a odlehčovacích zpětných vazeb vyjádříme v maticovém tvaru

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{E}_{kor}, \quad (5.79)$$

kde

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{25} \\ 0 & 0 & 0 & k_{34} & 0 \\ 0 & 0 & k_{43} & 0 & 0 \\ 0 & k_{52} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{kor} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_{43} \cdot \alpha \\ k_{52} \cdot \beta \end{bmatrix}. \quad (5.80)$$

Poznamenejme, že matici radiálních korekcí neoznačujeme ve shodě s Merkinem [2 p. 161], neboť předpokládáme rozdílné hodnoty proporcionálních zesílení zpětných vazeb korekčního a odlehčovacího systému. Taková matice ovšem může být rozložena na symetrickou a antisymetrickou část, antisymetrická pak odpovídá matici radiálních korekcí dle Merkina.

### 5.1.6 Linearizace odvozených pohybových rovnic

Linearizaci levých stran pohybových rovnic (5.54) provedeme stejně jako v [21] ve dvou krocích. V prvním kroku provedeme tzv. goniometrickou linearizaci, za předpokladu malých úhlů výchylek zobecněných souřadnic platí

$$\sin q_i \cong q_i [\text{rad}], \quad \cos q_i \cong 1 \quad (5.81)$$

a ve druhém kroku rozvineme pohybové rovnice v Taylorovu řadu do prvního stupně. Označme levé strany rovnic (5.54)

$$L_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (i = 1 \dots 5), \quad (5.82)$$

pak aplikujeme goniometrickou linearizaci (5.81) substitucí

$$L_{1i} = L_i(\sin q_i = q_i, \cos q_i = 1) \quad (i = 1 \dots 5). \quad (5.83)$$

Linearizované levé strany rovnic (5.54) pak píšeme v maticovém tvaru

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_1\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_1\mathbf{q} + \mathbf{E} = 0 \quad (5.84)$$

a za předpokladu, že ve výchozí konfiguraci je mechanický systém při

$$q_i(t=0) = 0, \dot{q}_i(t=0) = 0, \ddot{q}_i(t=0) = 0 \quad (i = 1 \dots 5), \quad (5.85)$$

můžeme matice systému (5.84) určit

$$\mathbf{A} = \left[ A_{ij} = \frac{\partial L_{1i}}{\partial \ddot{q}_j} \right]_{\substack{q_i=0 \\ \dot{q}_i=0 \\ \ddot{q}_i=0}} \quad (i, j = 1 \dots 5), \quad (5.86)$$

$$\mathbf{B}_1 = \left[ B_{ij} = \frac{\partial L_{1i}}{\partial \dot{q}_j} \right]_{\substack{q_i=0 \\ \dot{q}_i=0 \\ \ddot{q}_i=0}} \quad (i, j = 1 \dots 5), \quad (5.87)$$

$$\mathbf{C}_1 = \left[ C_{ij} = \frac{\partial L_{1i}}{\partial q_j} \right]_{\substack{q_i=0 \\ \dot{q}_i=0 \\ \ddot{q}_i=0}} \quad (i, j = 1 \dots 5), \quad (5.88)$$

$$\mathbf{E} = [E_i = L_{1i}(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i = 0)] \quad (i = 1 \dots 5). \quad (5.89)$$

Vzhledem k absenci tlumení a pružin v systému (5.54), obsahuje matice  $\mathbf{B}_1$  pouze gyroskopické členy, můžeme ji tedy v souladu s Merkinovou klasifikací sil (viz [2 p.



161]) označit jako  $\mathbf{G}$ . Matice  $\mathbf{C}_1$  obsahuje účinky tíhových sil závislých na konfiguraci mechanického systému a členy parametrického buzení a vektor  $\mathbf{E}$  obsahuje tíhové síly nezávislé na konfiguraci systému a síly kinematického buzení  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\zeta(t)$ .

Následně přidáme momenty pneumatických pružin (5.69), tlumičů (5.76) a zpětných vazeb (5.79), linearizované pohybové rovnice pak píšeme ve tvaru

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{G} + \mathbf{B})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_p + \mathbf{K})\mathbf{q} + \mathbf{E} + \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_{kor} = 0. \quad (5.90)$$

V případě autonomního systému (tj.  $\alpha(t) = 0$ ,  $\beta(t) = 0$ ,  $\zeta(t) = 0$ ), budou matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & a_{35} \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & a_{55} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H \\ 0 & 0 & 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & -H & 0 & 0 \\ 0 & -H & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.91)$$

matice  $\mathbf{C}_1$  pak obsahuje na diagonále prvních tří řádků záporné členy.

### 5.1.7 Hmotnostní parametry

Hmotnostní parametry mechanického systému závěsu lehátka s lehátkem a pacientem přebíráme z práce J. Prokopa [20], který určil hmotnostní parametry ležícího pacienta včetně transportního lehátka s ohledem na obecné umístění těžiště pacienta vůči těžišti horního rámu kardanova závěsu a obecné natočení těla pacienta vzhledem ke kolmici k rovině horního rámu. Doplnili jsme pouze polohy a hmotnostní parametry gyroskopů a precesních rámečků.

Tab. 1: Hmotnostní parametry jednotlivých členů mechanického systému

člen systému	$m$ [kg]	$J_x$ [kg m <sup>2</sup> ]	$J_y$ [kg m <sup>2</sup> ]	$J_z$ [kg m <sup>2</sup> ]
horní základna paralelogramu $i = 4$	14,178	0,824	2,94	3,754
ramena paralelogramu (index $R$ )	1,34	0,025	0,016	0,009
první rám kardanova závěsu $i = 5$	14,34	3,05	11,37	14,34
druhý rám kardanova závěsu včetně lehátka a pacienta $i = 6$	107,87	4,491	29,255	28,522
precesní rámeček $i = 7$	0,8	$81,5 \cdot 10^{-4}$	$32,2 \cdot 10^{-4}$	$50 \cdot 10^{-4}$
precesní rámeček $i = 8$	0,8	$32,2 \cdot 10^{-4}$	$81,5 \cdot 10^{-4}$	$50 \cdot 10^{-4}$
gyroskop ( $J_x = J_y = J_e$ )	6,7	$55,6 \cdot 10^{-4}$	$55,6 \cdot 10^{-4}$	$84 \cdot 10^{-4}$

Vzhledem k obecné poloze pacienta na lehátku, má těleso druhého rámu kardanova závěsu včetně lehátka a pacienta také nenulové deviační momenty, matice setrvačnosti členu 6 v souřadnicovém systému  $O_{6x_6y_6z_6}$  (v kg m<sup>2</sup>) je tedy

$$\mathbf{I}_6^6 = \begin{bmatrix} 4,49 & -0,2 & -0,25 \\ -0,2 & 29,26 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & 28,52 \end{bmatrix}. \quad (5.92)$$

## 5.2 Vlastní čísla

Vlastní čísla linearizovaného autonomního ( $\alpha(t) = 0$ ,  $\beta(t) = 0$ ,  $\zeta(t) = 0$ ) systému

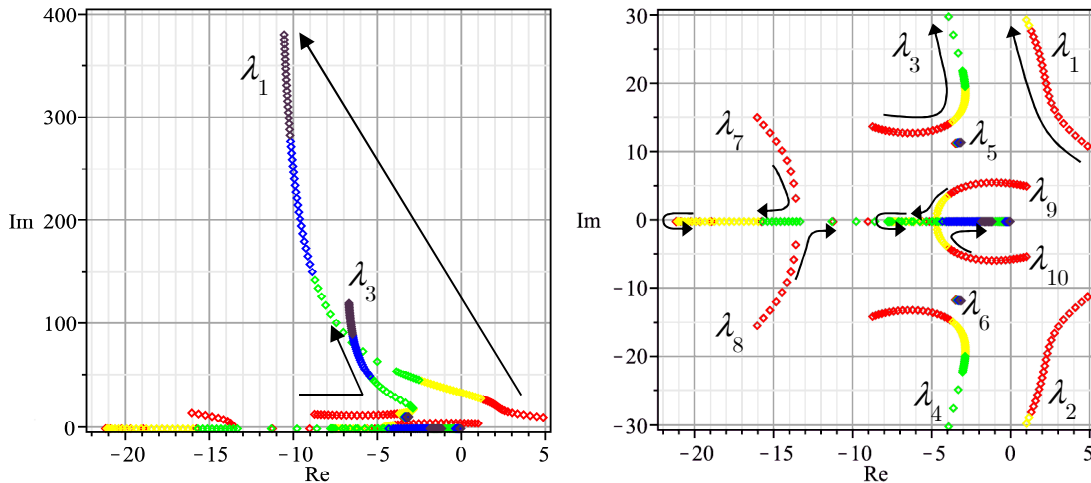
$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{G} + \mathbf{B})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_p + \mathbf{K})\mathbf{q} = 0, \quad (5.93)$$

kde oproti (5.90) chybí vektory  $\mathbf{E}$  (členy kinematického buzení vymizí) a  $\mathbf{E}_p$  (momenty tíhových sil z vektoru  $\mathbf{E}$  jsou vyváženy silami pneumatických pružin), určíme jako kořeny charakteristického polynomu

$$\det(\mathbf{A}\lambda^2 + (\mathbf{G} + \mathbf{B})\lambda + \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_p + \mathbf{K}) = 0, \quad (5.94)$$

který je 10. stupně.

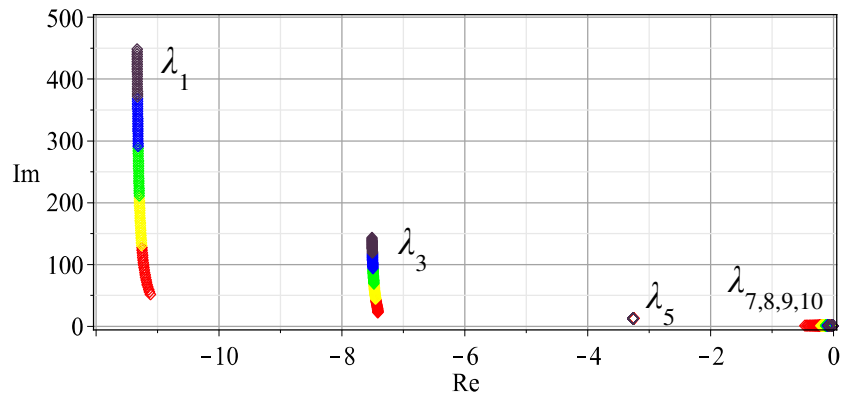
Zobrazme kořeny v komplexní rovině v závislosti na velikosti impulsmomentu gyroskopů  $H$ , pro konstantní otáčky gyroskopů  $\dot{\gamma} = -\dot{\Gamma} = 8 \cdot 10^4 \text{ min}^{-1}$  násobíme matice setrvačnosti gyroskopů  $\mathbf{I}_g^9$  a  $\mathbf{I}_g^{10}$  parametrem  $\mu$  z intervalu  $\mu \in (0, 1)$ . Kořeny jsou alespoň pro malé  $\mu$  po dvojicích komplexně sdružené. Od jisté hodnoty parametru  $\mu$  lze pozorovat, že kořeny  $\lambda_{7,8}$  se stávají reálnými a při dalším zvětšení momentu setrvačnosti gyroskopu se po reálné ose blíží k nule. Podobně se chovají kořeny  $\lambda_{9,10}$  s tím rozdílem, že přechod ve dvojici reálných kořenů nastává při vyšší hodnotě  $\mu$ . Imaginární část kořenů  $\lambda_{1,2}$  a  $\lambda_{3,4}$  s rostoucím impulsmomentem gyroskopů roste, zatímco jejich reálné části, alespoň od určité hodnoty impulsmomentu, jsou záporné – systém je tedy od určité hodnoty impulsmomentu asymptoticky stabilní. Poslední dvojice komplexně sdružených kořenů  $\lambda_{5,6}$  je téměř nezávislá na velikosti impulsmomentu  $H$  – jedná se tedy o kořeny příslušné pohybu paralelogramu.



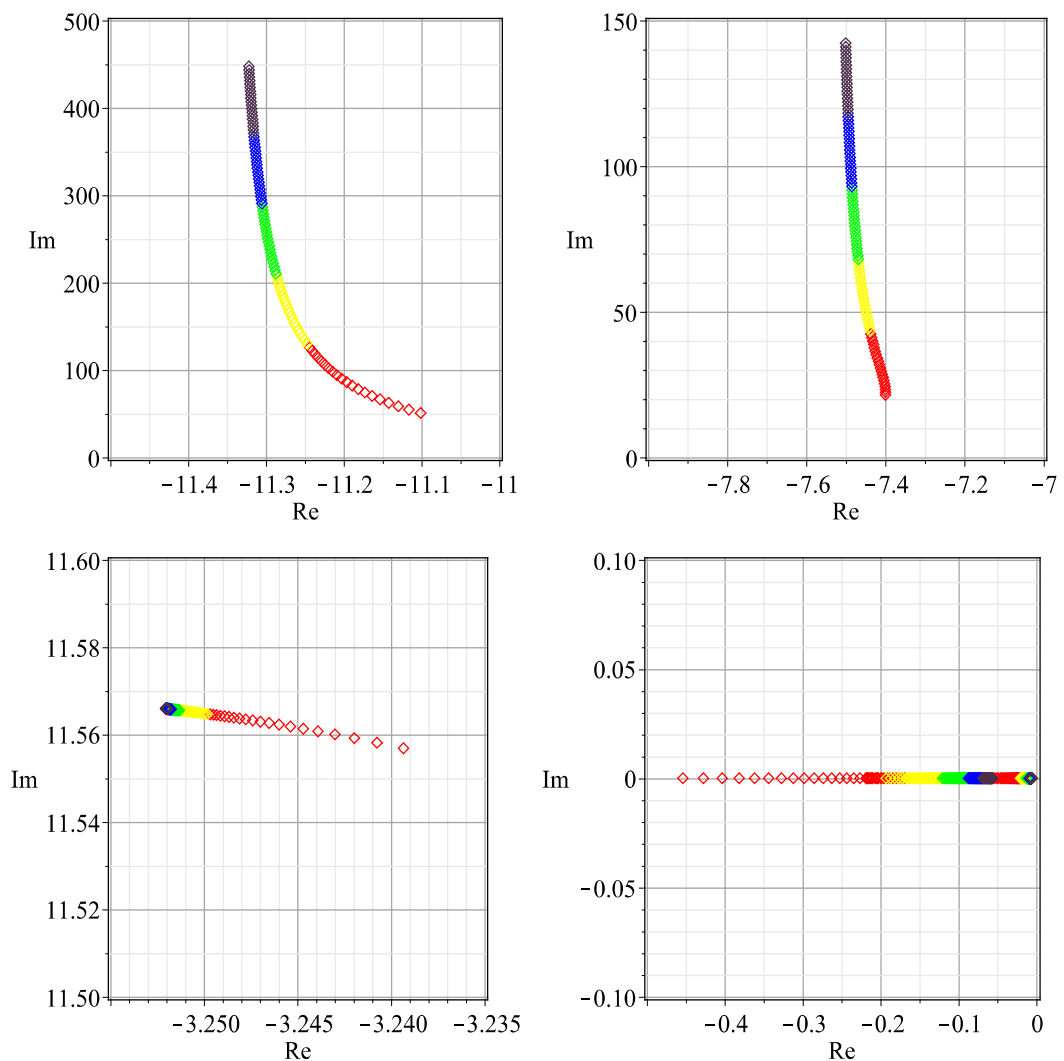
Obr. 20: Demonstrace změny vlastních čísel v závislosti na parametru  $\mu$  (hodnoty se lineárně mění od červené –  $\mu = 0$  k černé –  $\mu = 1$ )

Stabilita systému je závislá na hodnotách členů matice radiálních korekcí  $\mathbf{K}$  a na tlumení v systému. Později ukážeme, že malé tlumení v osách precesních rámečků má rovněž pozitivní vliv na stabilitu systému.

Z obr. 20 je patrné, ve shodě s Merkinem (viz [11 str. 236]), rozdělení kořenů do dvou skupin. Kořeny  $\lambda_{7,8}$  a  $\lambda_{9,10}$  nazýváme *precesními*. Jejich hodnoty určují, že precesní pohyb pro dostatečně vysoké hodnoty impulsmomentu gyroskopů bude aperioidický a pomalý. Kořeny  $\lambda_{1,2}$  a  $\lambda_{3,4}$  nazýváme *nutačními*.



Obr. 21: Demonstrace změny vlastních čísel v závislosti na rychlosti rotace gyroskopů; otáčky rotorů  $10^4 - 10^5 \text{ min}^{-1}$  (lineárně od červené k černé)



Obr. 22: Demonstrace změny vlastních čísel v závislosti na rychlosti rotace gyroskopů – zleva shora  $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5, \lambda_{7,8,9,10}$ ; otáčky rotorů  $10^4-10^5 \text{ min}^{-1}$  (lineárně od červené k černé)

Podobně můžeme demonstrovat závislost vlastních čísel na otáčkách gyroskopů při konstantních setrvačných parametrech rotorů – viz obr. 22. Je patrné, že vlastní

frekvence paralelogramu je jen velmi málo závislá na otáčkách gyroskopů, přičemž hodnota  $f_1 \cong 1,84 \text{ Hz}$  odpovídá hodnotám určeným výpočetně i experimentálně v předchozích pracích [20; 21]. Naproti tomu vlastní frekvence rámu kardanova závěsu se mění s rostoucími otáčkami gyroskopů velmi výrazně. Požadujeme-li aby vlastní frekvence rámu kardanova závěsu byly  $> 12 \text{ Hz}$ , tj.  $\text{Im}(\lambda_1, \lambda_3) > 76$ , lze tento požadavek splnit při rychlosti rotace gyroskopů  $\dot{\gamma} = -\dot{\Gamma} \cong 5,4 \cdot 10^4 \text{ min}^{-1}$ .

### 5.3 Stabilita systému

Merkin, který se zabýval vedle gyroskopických systémů i stabilitou pohybu, ve svých pracích [2; 11; 24] uvedl a dokázal řadu vět o stabilitě různých typů mechanických systémů. Různí další autoři se zabývali stabilitou gyroskopických systémů, ale obvykle se jedná o systémy například bez tlumení [25], nebo jinak nevystihující náš případ (např. gyroskopická stabilizace nestabilního systému).

Připomeňme, že analyzovaný vibroizolační systém s gyroskopickým stabilizátorem, v souladu s klasifikací v [2] (viz kapitola 1.2), obsahuje síly disipativní (bude-li uvažovat též pasivní odpory v osách precesních rámečků, pak je tato disipace úplná), gyroskopické, konzervativní, a síly radiálních korekcí. Pro náš případ lze aplikovat nutnou podmínku stability – větu 6.16 (viz [2 p. 205]):

*„Je-li determinant  $\det(\mathbf{C} + \mathbf{P}) < 0$ , pak je systém nestabilní při libovolných gyroskopických, disipativních a zrychlujících silách, nezávisle na nelineárních členech.“*

Jde ovšem pouze o nutnou podmínku, tedy tato věta neříká za jakých okolností systém stabilní je, pouze konstatuje, kdy stabilní není. A dále si ukážeme, že tato podmínka může být splněna i v případě nestabilního systému.

Užitečnější již mohou být postačující podmínky gyroskopické stability publikované Merkinem v [11] – viz kapitola 3.4. Merkin tak zjednodušuje vyšetřování stability systému  $2n$ -tého řádu na vyšetřování stability dvou systémů  $n$ -tého řádu. V tomto případě je potřeba provést dekompozici systému (je možná, viz námi publikovaný článek [26]) na paralelogram a kardanův závěs s gyroskopickým stabilizátorem, neboť jednou z podmínek je  $\det(\mathbf{G}) \neq 0$ , a v případě systému s pěti stupni volnosti je determinant matice gyroskopických účinků lichého řádu a tedy nutně identicky rovný nule (viz kapitola 1.2.1). Dále pak tyto podmínky obsahují poněkud vágní požadavek „dostatečně velké hodnoty impulsmomentu gyroskopu“.

V každém případě lze o stabilitě linearizovaného autonomního systému (5.90) rozhodnout užitím Hurwitzova kritéria stability. Užitím tzv. hrubé síly počítače lze snadno hledat pro určité parametry oblasti stability.

Stabilita gyroskopického systému záleží zejména na velikosti impulsmomentu gyroskopů a nastavení zesílení zpětných vazeb korekčního a odlehčovacího systému (členy matice  $\mathbf{P}$ ), dále stabilitu ovlivňuje tlumení. Předpokládejme, že požadujeme vhodné tlumení systému závěsu sanitního lehátka pro případ výpadku gyroskopické stabilizace, takové bylo nastaveno v předchozích pracích [20; 21]. Hodnotu impulsmomentu gyroskopů pro správnou vibroizolaci sanitního lehátka jsme určili podle

nejnižší vlastní frekvence nutačního pohybu rámu kardanova závěsu v předchozí kapitole. Vyšetřeme nyní oblasti stability pro parametry korekčních a odlehčovacích zpětných vazeb.

### 5.3.1 Oblast stability pro parametry radiálních korekcí

Předpokládáme rozdílné nastavení zpětných vazeb odlehčovacích momentů

$$M_{odl,\varphi} = k_1 E; M_{odl,\psi} = k_1 \varepsilon \quad (5.95)$$

a korekčních momentů

$$M_{kor,E} = -k_2 \varphi; M_{kor,\varepsilon} = -k_2 \psi. \quad (5.96)$$

Znaménka v matici radiálních korekcí mají být rozložena stejně jako v antisymetrické matici gyroskopických účinků (5.91), tedy

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.97)$$

Prověřme numericky splnění Hurwitzových podmínek u charakteristického polynomu autonomního systému (5.93) v závislosti na hodnotách členů  $k_1$  a  $k_2$  matice radiálních korekcí  $\mathbf{K}$ . Na obr. 23 je zobrazena mapa stability pro kombinace hodnot parametrů  $k_1$  a  $k_2$ . Zelená oblast stability má při zvolené diskretizaci nepřesnou hranici, pokud by se později ukázalo jako účelné přiblížit se více k hranici stability, lze ji samozřejmě určit přesněji. Prozatím postačuje s jistou mírou bezpečnosti hranici určit na základě této diskretizace a i přes to, že hranice je mírně konvexní, bude patrně postačující aproximace lineární funkcí. Oblast stability systému v závislosti na  $k_1$  a  $k_2$  pak můžeme zapsat nerovnostmi

$$k_1, k_2 \in (k_1 > 0 \wedge k_2 > 0 \wedge k_2 < 742,258 - k_1) \pm 13, \quad (5.98)$$

přičemž jsme předpokládali nulové pasivní odpory v osách precesních rámečků.

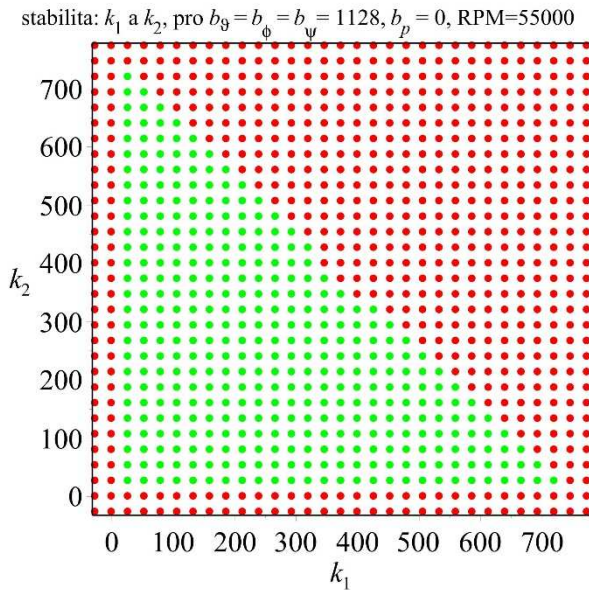
Prověřme nyní vliv malého tlumení v precesních osách gyroskopů na oblast stability parametrů radiálních korekcí  $k_1$  a  $k_2$ . V matici  $\mathbf{B}$  tedy dosud nulové prvky budou  $b_{44} = b_{55} = b_p$ . Horní hranice stability pro různé hodnoty tlumení v precesních osách gyroskopů jsou zobrazeny v obr. 24 až obr. 25. Je zřejmé, že s rostoucím tlumením v precesních osách je hranice stability pro  $k_1$  a  $k_2$  více konvexní, postupně přechází v hyperbolickou křivku – viz obr. 25. Naznačeným způsobem lze dle potřeby určovat oblast stability pro různé kombinace parametrů.

Nakonec ukažme, že systém splňující nutnou podmínku stability, nemusí být stabilní. Budou-li všechny členy systému gyroskopického stabilizátoru vyváženy a jejich těžiště budou ležet na jejich osách rotace, bude jistě matice (5.88)  $\mathbf{C}_1 = 0$ , pak je determinant

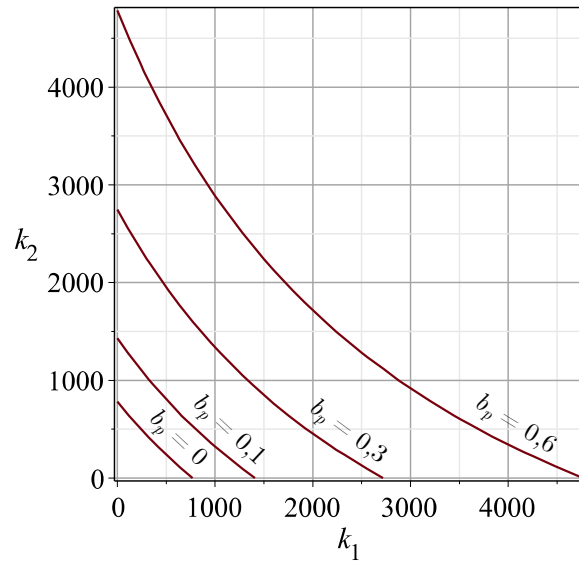
$$\det(\mathbf{C} + \mathbf{P}) = \det(\mathbf{C}_p + \mathbf{K}) = c_{p11} \cdot k_1^2 k_2^2 > 0. \quad (5.99)$$

Je zřejmé, že nutná podmínka stability je splněna bez ohledu na znaménka prvků matice  $\mathbf{K}$ . Při tom z mapy oblasti stability (viz např. obr. 23) parametrů  $k_1$  a  $k_2$  ur-

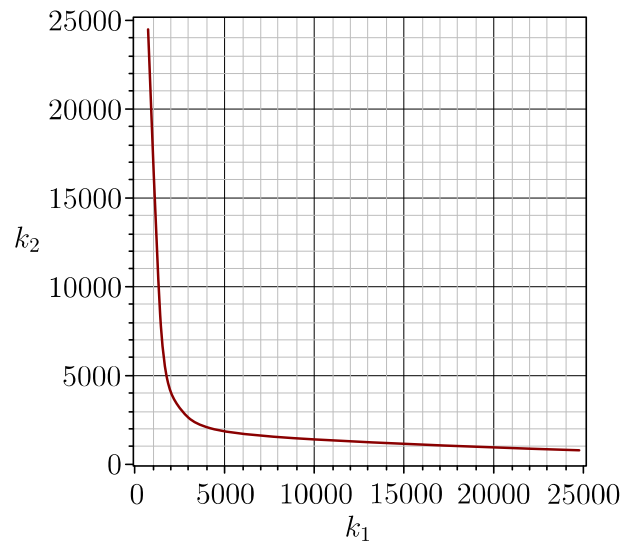
čené aplikací Hurwitzových podmínek stability je zřejmé, že systém je stabilní pouze pro jednu konkrétní kombinaci znamének prvků matice  $\mathbf{K}$ .



Obr. 23: Mapa stability pro parametry  $k_1$  a  $k_2$ ;  $b_p = 0$  – výstup přímo z Maple.



Obr. 24: Horní hranice stability pro parametry  $k_1$  a  $k_2$ , při různých hodnotách  $b_p$  [ $\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$ ].

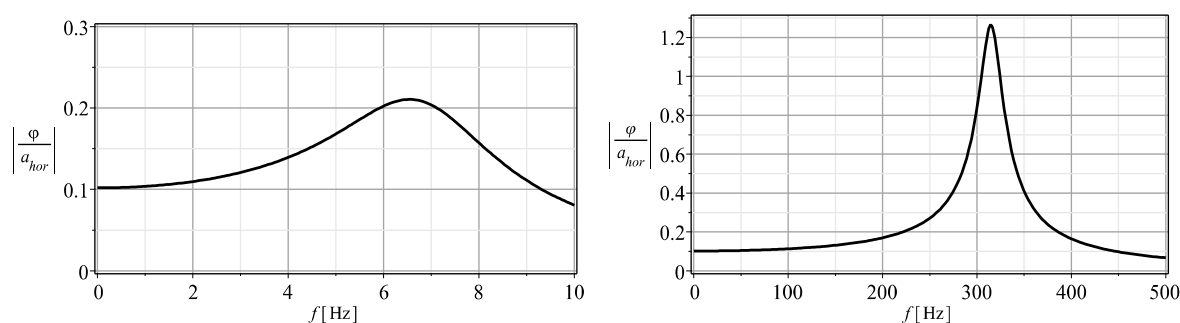


Obr. 25: Horní hranice stability pro parametry  $k_1$  a  $k_2$ , při  $b_p = 5 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$ .

## 5.4 Nastavení korekčního a kompenzačního systému

Pro správnou funkci stabilizace kardanova závěsu je nutné vhodně nastavit koeficienty  $k_1$  a  $k_2$  zpětných vazeb kompenzačního a korekčního systému. Kompenzační systém má za úkol kompenzovat poruchový moment na příslušném rámu kardanova závěsu na základě úhlové výchylky příslušného precesního rámečku, kterou je poruchový moment indikován. Naproti tomu má korekční systém za úkol na základě údaje ze snímače vertikály (zdánlivé, nebo absolutní – dle účelu stabilizátoru) korigovat natočení precesního rámečku gyroskopu tak aby byl minimalizován odklon stabilizovaného rámu od vertikály. Poruchový moment může být zapříčiněn například posunem stabilizovaného břemene na ložné ploše (horním rámu), nebo pohybuje-li se systém s horizontálním zrychlením v kombinaci s nenulovou svislou vzdáleností těžiště stabilizovaného břemene. Dále jsme se v úvahách omezili na regulaci polohy stabilizovaného rámu do směru zdánlivé vertikály, to je dáno původně zamýšleným účelem stabilizátoru pro zlepšení vibroizolace ležícího pacienta při transportu, pro kterého je prospěšné, je-li poloha lehátka stabilizována tak, aby výslednice nízkofrekvenčních zrychlení byla kolmá k rovině lehátka.

Výše uvedený popis nám poslouží jako základ postupu naladění zmíněných zpětných vazeb. Pro tyto účely a s ohledem na snížení náročnosti výpočtů, jsme sestavili nelineární matematický model jednoosého gyroskopického stabilizátoru bez vertikálního odpružení. Parametry, jako odpružení, tlumení, setrvačné parametry, atd. jsme použili shodné s původním modelem gyroskopicky stabilizovaného lehátka se třemi stupni volnosti. Snímač zdánlivé vertikály jsme modelovali jako matematické kyvadlo s frekvenčním přenosem bočního zrychlení na úhlovou výchylku kyvadla zobrazeným na obr. 26, přičemž úhlová výchylka 0,1 rad odpovídá právě amplitudě bočního zrychlení přibližně  $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , při tíhovém zrychlení  $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . V simulacích jsme použili různé modely snímače zdánlivé vertikály (příklady přenosových charakteristik úhlová výchylka kyvadla – horizontální zrychlení viz obr. 26). Pro signály s pomalými změnami horizontálního zrychlení plně vyhovoval model s vlastní frekvencí okolo 7 Hz (odpovídá kapalinovému senzoru náklonu, který byl předmětem práce [27]). Využití snímače s vysokou vlastní frekvencí jsme se spíše vyhýbali s ohledem na vyšší výpočetní náročnost tzv. stiff systémů, ale v případě rychlých změn horizontálního zrychlení to bylo nutné.



Obr. 26: Frekvenční přenosy modelů snímače zdánlivé vertikály.

### 5.4.1 Nastavení kompenzace a korekce horního rámu

Horní rám kardanova závěsu zajišťuje rotaci lehátka okolo podélné osy. Měl by tak kompenzovat odchylku zdánlivé vertikály způsobenou zrychleným pohybem v příčném směru, jakým je průjezd vozidla zatáčkou.

Silnice jsou u nás navrhovány tak aby v oblouku působilo dostředivé zrychlení přibližně do  $1,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  (oblouk s příčným sklonem 6%; návrhová rychlost 120 km/h; rádius oblouku 850 m – dostředivé zrychlení  $1,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ), obvykle je však uvažována hodnota menší cca  $0,85 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , přičemž přechodová křivka má být navrhována tak, aby nárůst dostředivého zrychlení byl v rozmezí  $0,3\text{--}0,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-3}$  (viz [28]).

Nastavme systém tak, aby při zrychleném pohybu v příčném směru se zrychlením  $1,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , byl stabilní a měl schopnost dosáhnout polohy stabilizovaného rámu takové, aby jeho rovina byla kolmá k výslednici zrychlení (dostředivé + tíhové). To vyžaduje naklonění horního rámu kardanova závěsu o úhel  $8,7^\circ$  ( $0,152 \text{ rad}$ ), přičemž mechanismus, tak jak byl popsán v pracích [20; 21], umožňuje maximální naklonění horního rámu o  $6,8^\circ$  (odpovídá kompenzaci dostředivého zrychlení  $1,17 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ). Předpokládejme však, že vhodnými konstrukčními úpravami by bylo možné rozsah náklonu horního rámu zvýšit, proto uvažujme profil dostředivého zrychlení takový, že v přechodové křivce je nárůst dostředivého zrychlení  $0,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-3}$ , potom následuje konstantní poloměr oblouku při dostředivém zrychlení  $1,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  a následně opět přechodová křivka s poklesem dostředivého zrychlení  $0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-3}$  – viz obr. 27 vlevo. Jde v podstatě o optimalizační úlohu dvou parametrů, v tomto případě  $k_1$  a  $k_2$ . Kritérium můžeme definovat jako

$$\text{crit} = \sum_{i=0}^n (u_\psi(\Delta t \cdot i) - \psi(\Delta t \cdot i))^2 + P, \quad (5.100)$$

kde  $\psi(t)$  je odezva natočení stabilizovaného horního rámu kardanova závěsu,  $u_\psi(t)$  je žádaný časový průběh natočení horního rámu (viz obr. 27 vpravo),  $\Delta t$  je zvolený diskrétní časový krok a  $P$  je penalizační funkce

$$P = \begin{cases} 0 & \max(\text{abs}(\varepsilon)) < \varepsilon_{\max}, \\ 1000 & \max(\text{abs}(\varepsilon)) \geq \varepsilon_{\max}, \end{cases} \quad (5.101)$$

zvyšující hodnotu kritériální funkce v případě, že maximální úhlová výchylka přesného rámečku gyroskopu přesáhne danou mez  $\varepsilon_{\max}$  (v našem případě jsme volili  $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_{\max} = 0,5 \text{ rad} \cong 28,65^\circ$ ). Žádaný časový průběh úhlové výchylky stabilizovaného rámu sleduje výchylku výslednice zrychlení (zdánlivé vertikály), tedy

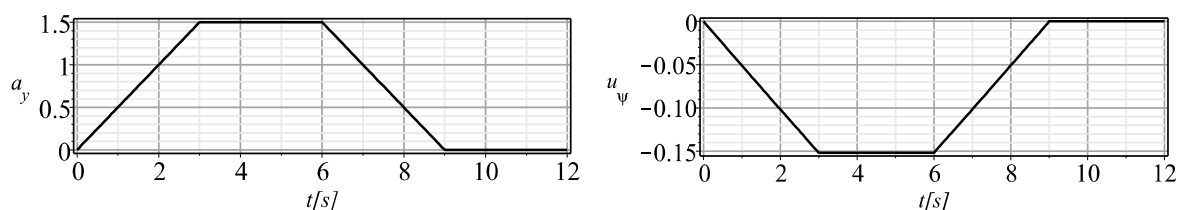
$$u_\psi(t) = -\text{arctg}(a_y(t) / g), \quad (5.102)$$

kde  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  je tíhové zrychlení.

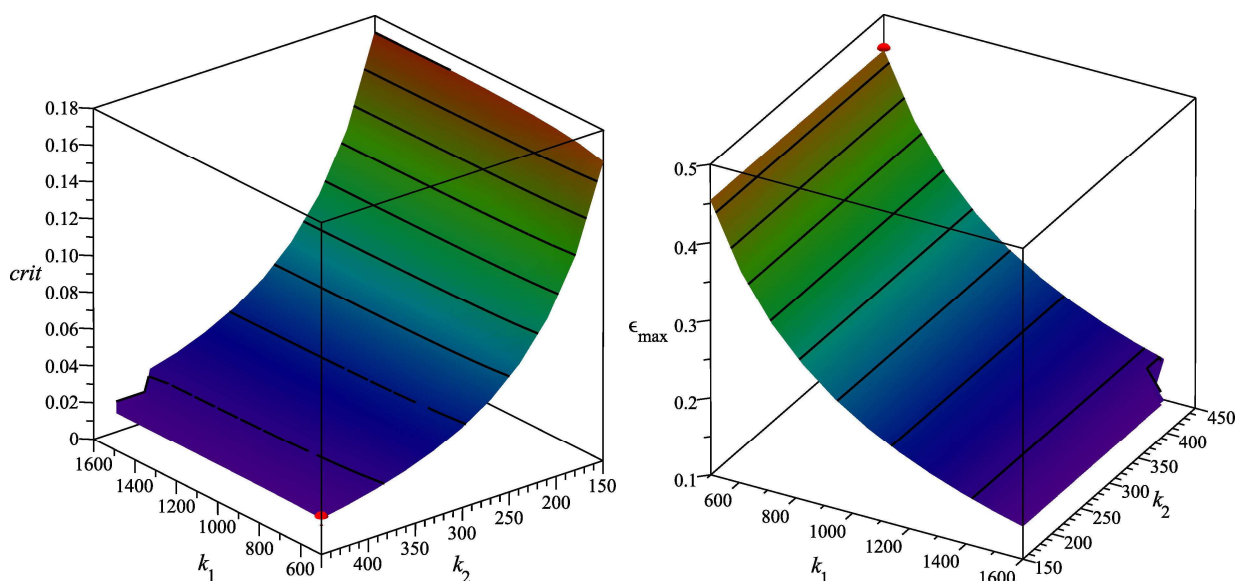
Matematický model jednoosého gyroskopického stabilizátoru, který používáme k optimalizaci parametrů korekčního a kompenzačního systému, nemá analytické řešení, musíme tedy k výpočtům odezev využít numerické řešení. Kritériální funkci tudíž není možné vyjádřit analyticky a musíme se spokojit s jejími hodnotami v diskrétních bodech prostoru parametrů  $k_1$  a  $k_2$ , v případě druhého rámu kardanova závěsu jde o členy  $k_{34}$  a  $k_{43}$  matice (5.80). S pomocí počítače jsme tuto optimalizační úlohu realizovali a na obr. 28 vlevo je zobrazena plocha kritériální funkce (5.100), na-



lezené minimum je označeno červeným bodem. Minima kritériální funkce ve zvolených intervalech  $k_1$  a  $k_2$  dosáhla při  $k_1 = 500$  a  $k_2 = 400$ , přičemž z obr. 28 vpravo je patrné, že při těchto hodnotách parametrů dochází k velké úhlové výchylce precesního rámečku gyroskopu (cca 0,45 rad). Z tvaru plochy kritériální funkce je zřejmé, že tato nabývá podobných hodnot i pro vyšší hodnoty koeficientu zesílení kompenzačního systému  $k_1$ , ale zároveň s tím klesá maximální výchylka precesního rámečku. Volíme tedy hodnotu  $k_1 = 1400$  (okolo  $k_1 = 1500$  se již systém blíží k nestabilní oblasti). Optimalizaci jsme prováděli pro gyroskop s otáčkami  $10^5 \text{ min}^{-1}$  (místo v kap. 5.2 uvažované hodnoty  $54 \cdot 10^3 \text{ min}^{-1}$ , která se později ukázala jako nedostatečná) a předpokládané malé tlumení v precesní ose gyroskopu  $b_p = 0,1 \text{ Nms} \cdot \text{rad}^{-1}$  – důležité hodnoty jsou shrnuty v tab. 2.

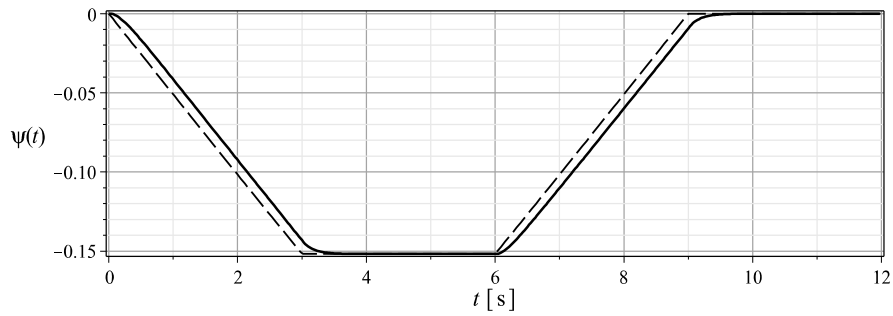


Obr. 27: Použitý profil dostředivého zrychlení (vlevo); žádaný průběh úhlové výchylky stabilizovaného rámu (vpravo).



Obr. 28: Kritériální funkce (vlevo) a maximální výchylka precesního rámečku (vpravo); gyroskop  $\text{RPM} = 10^5 \text{ min}^{-1}$ ; tlumení precesního rámečku  $b_p = 0,1$ .

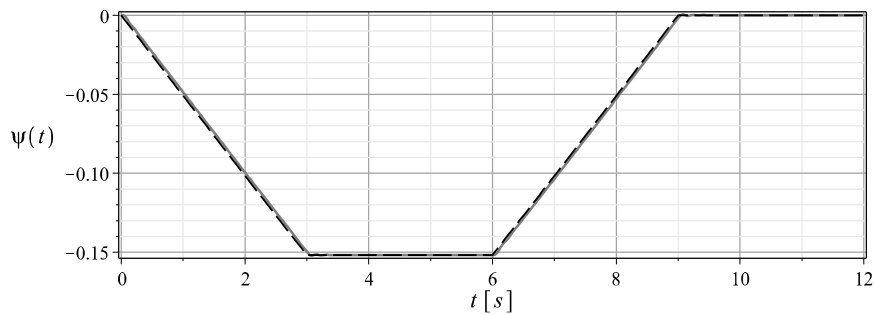
Při zmíněném nastavení systém velmi dobře kompenzuje odchylku zdánlivé vertikály. Odchylka natočení stabilizovaného rámu od cílové hodnoty je maximálně 0,009 rad, tedy přibližně  $0,5^\circ$ , což odpovídá nevykompenzovanému bočnímu zrychlení  $0,09 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , tedy méně než 1% maximálního dostředivého zrychlení. Poznamenejme nakonec, že v případě tohoto matematického modelu má koeficient  $k_2$  opačné znaménko, protože se jedná o úhlovou výchylku kyvadla (modelu čidla zdánlivé vertikály) umístěného na stabilizovaném rámu, tedy nutně kladná výchylka stabilizovaného rámu vyvolá zápornou výchylku kyvadla a opačně.



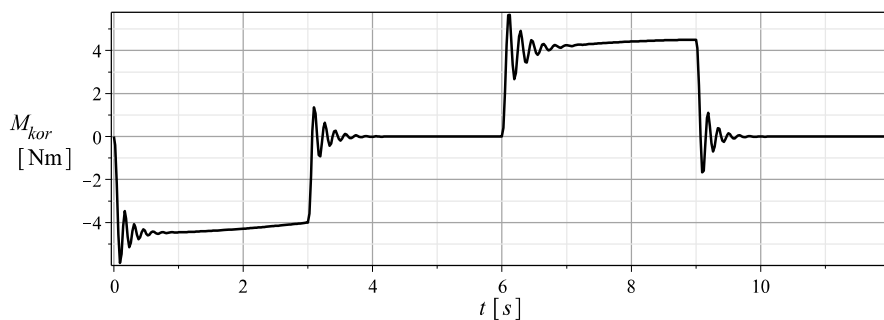
Obr. 29: Srovnání odezvy úhlové výchylky [rad] stabilizovaného horního rámu kardanova závěsu (plná) s požadovaným průběhem (čárkovaná), při  $k_1 = 1400$ ,  $k_2 = 450$

Tab. 2: Shrnutí důležitých hodnot optimalizace zpětných vazeb horního rámu.

Gyroskop	$ \omega_0^7  = 10^5 \text{ min}^{-1}$ , $J_{9z} = 56 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$
Tlumení precesního rámečku	$b_p = 0,1 \text{ Nm s} \cdot \text{rad}^{-1}$
Kompenzační systém ( $k_{34} = k_1$ )	$k_1 = 1400$
Korekční systém ( $k_{43} = -k_2$ )	$k_2 = 450$
Maximální výchylka precesního rámečku	$\max(\varepsilon) = 0,1646 \text{ rad} \cong 9,4^\circ$
Maximální kompenzační moment	$\max(M_{komp}) = 227 \text{ Nm}$
Maximální korekční moment	$\max(M_{kor}) = 4,5 \text{ Nm}$

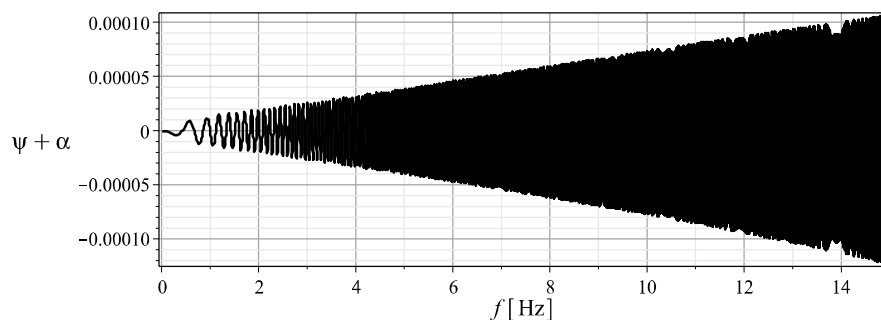


Obr. 30: Srovnání odezvy úhlové výchylky [rad] stabilizovaného horního rámu kardanova závěsu (šedá plná) s požadovaným průběhem (čárkovaná), při  $k_1 = 1600$ ,  $k_2 = 1850$ .



Obr. 31: Průběh korekčního momentu při  $k_1 = 1600$ ,  $k_2 = 1850$ .

Poznamenejme, že kriteriální funkce dále klesá s rostoucí hodnotou zesílení zpětné vazby korekčního systému  $k_2$ . Lze tak nalézt nastavení parametrů  $k_1$  a  $k_2$  takové, že odezva stabilizovaného rámu kardanova závěsu ještě lépe sleduje cílový průběh (viz obr. 30), nicméně takové nastavení vyžaduje velmi strmé změny korekčního momentu (viz obr. 31), kterých by mohlo být obtížné dosáhnout. Zároveň pozvolné změny polohy jako na obr. 29 považujeme za komfortnější z pohledu transportovaného pacienta.



Obr. 32: Odezva absolutní výchylky stabilizovaného horního rámu kardanova závěsu na kinematické buzení rotací základu okolo podélné osy sweep signálem.

S výše uvedeným nastavením zkontrolujeme odezvu systému na kinematické buzení rotací základu ve sledovaném pásmu do cca 12 Hz. V případě nelineárního systému je nejsnazší použít buzení tzv. sweep signálem (sinus s plynule se měnící frekvencí). Absolutní výchylka stabilizovaného rámu při buzení tímto sweep signálem 0 – 15 Hz s amplitudou výchylky 0,01 rad je zobrazena na obr. 32. Je zřejmé, že vibroizolace ve zmíněném pásmu je velmi dobrá, přenos je  $< 10^{-2}$ .

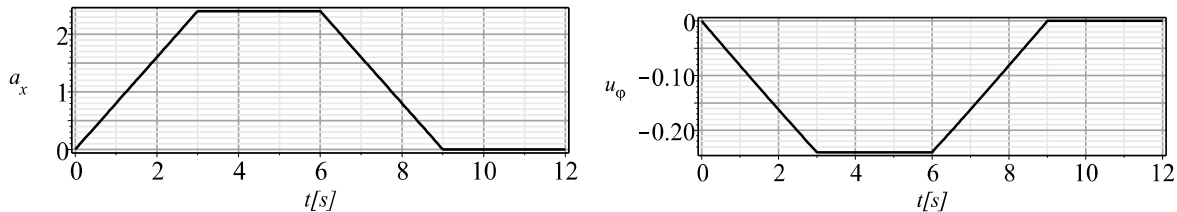
#### 5.4.2 Nastavení kompenzace a korekce spodního rámu

Spodní rám kardanova závěsu zajišťuje rotaci lehátka okolo příčné osy. Měl by tak kompenzovat odchylku zdánlivé vertikály způsobenou zrychleným pohybem v podélném směru, tedy například akcelerace, nebo brzdění.

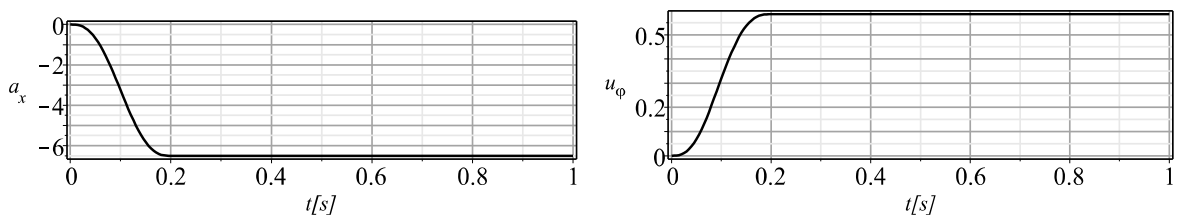
Chceme-li při nastavení parametrů kompenzačního a korekčního systému postupovat podobným způsobem, jako v případě horního rámu, je třeba také stanovit časový průběh zrychlení. Uvažujme relativně běžný vůz používaný jako sanitní v ČR – VW Transporter skříňový vůz s dlouhým rozvorem (3400 mm) a vysokou střechou, s motorem 2.0TDI 110 kW a 6-stupňovou manuální převodovkou – má podle katalogu výrobce zrychlení 0–100 km/h za 11,6 s (viz [29]), tedy průměrné zrychlení je  $2,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , přičemž největší zrychlení bude při jízdě na nejnižší rychlostní stupeň (bude jistě  $> 2,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ). Řidič sanitního vozu vezoucího pacienta se pravděpodobně bude snažit maximálně vyhýbat prudkým rozjezdům, stejně jako prudkému brzdění. Uvažujme tedy pro jednoduchost rozjezd vozidla s podobným průběhem jako v případě dostředivého zrychlení při průjezdu zatáčkou – viz obr. 33 vlevo, to odpovídá zrychlení z 0 na 52 km/h za 9 s.

Dále je třeba brát v úvahu zpoždění při brzdném manévru. Dle předpisu EHK o schvalování vozidel z hlediska brzdění (viz [30]) musí vozidlo kategorie M1 být schopno z rychlosti 100 km/h zpomalovat se středním plným zpožděním  $6,43 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ,

příčměž podle F. Vlka [31 str. 120] se doba náběhu brzdění (od nulové decelerace do maximální decelerace) pohybuje v rozmezí 0,03–0,15 s (jako praktickou hodnotu doporučuje F. Vlk používat prodlevu 0,2 s). Lze předpokládat, že řidič sanitního vozu se bude maximálně vyhýbat situacím, při nichž by musel dosahovat tak vysokých hodnot podélného zrychlení, zvolili jsme tedy jako maximální hodnotu podélného zrychlení sanitního vozu  $2,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  se spojitým a hladkým nástupem brzdného účinku v intervalu  $t \in \langle 0 ; 0,2 \rangle \text{ s}$ .



Obr. 33: Použitý profil podélného zrychlení (vlevo); žádaný průběh úhlové výchylky stabilizovaného prvního rámu (vpravo).

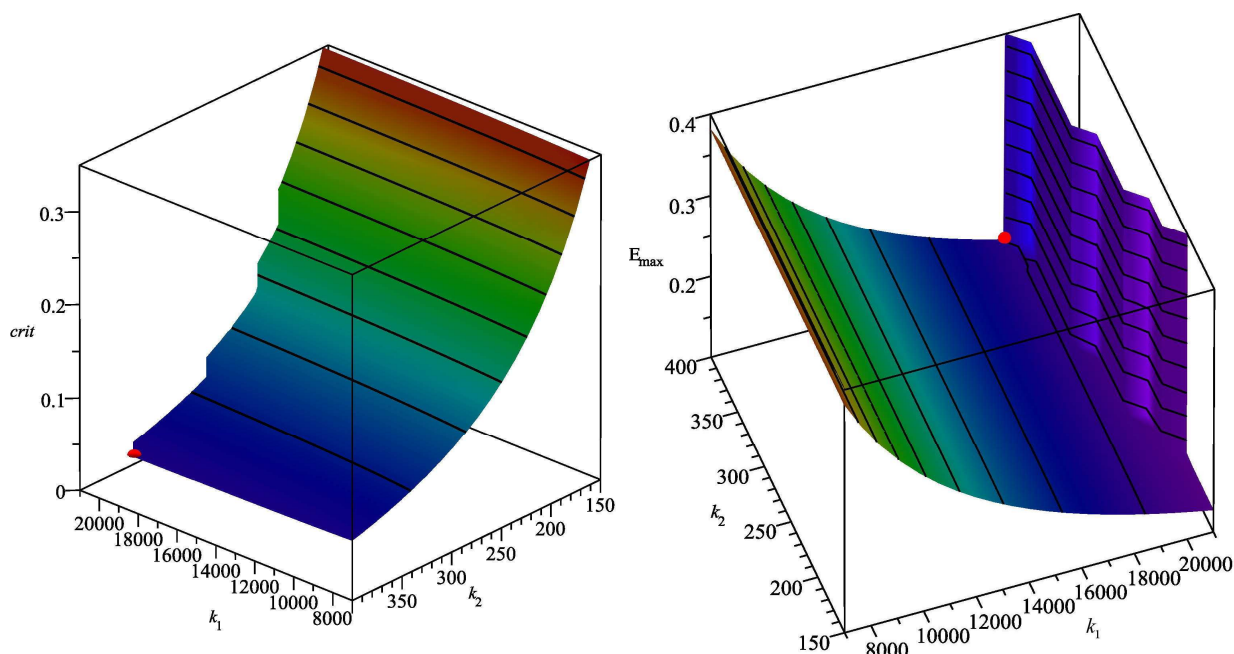


Obr. 34: Použitý profil podélného zrychlení při brzdění (vlevo); žádaný průběh úhlové výchylky stabilizovaného prvního rámu (vpravo).

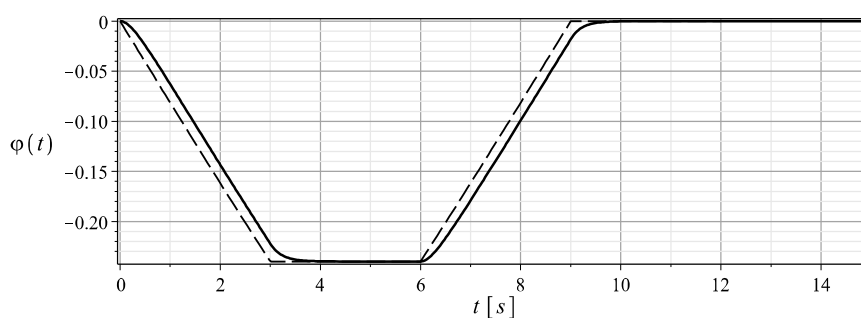
Konstrukce odpruženého závěsu sanitního lehátka, tak jak byla popsána v pracích [20; 21], umožňuje vlivem omezeného pracovního rozsahu pneumatických pružin náklon prvního rámu kardanova závěsu okolo příčné osy maximálně o  $2,36^\circ$ , což odpovídá kompenzaci výchylky zdánlivé vertikály vlivem podélného zrychlení  $0,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Opět budeme předpokládat, že je možné tuto maximální hodnotu zvýšit vhodnými konstrukčními úpravami. Nicméně při uvažovaném podélném zrychlení při akceleraci je pro kompenzaci výchylky zdánlivé vertikály potřeba úhlová výchylka prvního rámu kardanova závěsu  $13,75^\circ$ , což je více než pětkrát více než maximální výchylka ve stávající konstrukci, při maximálním zpoždění při brzdění by se pak jednalo o nutnost sklonění roviny lehátka okolo příčné osy o více než  $33^\circ$ . Dále poznamenejme, že neuvažujeme podélný sklon vozidla při zmíněných manévrech, který by zapříčinil nutnost dalšího zvýšení rozsahu pohybu prvního rámu. Je tedy třeba brát v úvahu také možnost, že při manévrech s velkým podélným zrychlením bude pohyb systému omezen dorazy.

### Akcelerace

Zaměříme se nejdříve na kompenzaci vychýlení zdánlivé vertikály vlivem podélného zrychlení při akceleraci vozidla. Použitím shodného algoritmu jako v kapitole 5.4.1 jsme nenalezli kombinaci parametrů  $k_1$  a  $k_2$ , resp. v případě prvního rámu kardanova závěsu jde o členy  $k_{25}$  a  $k_{52}$  matice (5.80), která splňuje podmínku maximální výchylky precesního rámečku  $E < E_{\max}$ , kompenzační moment nemůže být dostatečně silný pro dostatečně rychlou kompenzaci poruchového momentu na stabilizovaném druhém rámu, protože taková hodnota se nachází mimo oblast stability pro parametry  $k_1$  a  $k_2$ . Řešení se nachází ve faktu, že zvýšení tlumení precesního rámečku způsobuje dramatické zvětšení oblasti stability – viz kapitola 5.3.1.



Obr. 35: Kriteriaální funkce (vlevo) a maximální výchylka precesního rámečku (vpravo); gyroskop  $RPM = 10^5 \text{ min}^{-1}$ ; tlumení precesního rámečku  $b_p = 5$ .



Obr. 36: Srovnání odezvy úhlové výchylky [rad] stabilizovaného spodního rámu kardanova závěsu (plná) s požadovaným průběhem (čárkovaná).

Při zvětšeném tlumení precesního rámečku na  $b_p = 5 \text{ Nm s} \cdot \text{rad}^{-1}$  jsme našli optimální nastavení kompenzačního a korekčního systému prvního rámu kardanova závěsu pro daný časový průběh podélného zrychlení – důležité hodnoty jsou shrnuty v tab. 3. Plocha kriteriaální funkce pro hodnoty  $k_1$  a  $k_2$  je na obr. 35. Časový průběh výchylky stabilizovaného prvního rámu ve srovnání s požadovanou hodnotou je zob-

razen na obr. 36. Maximální odchylka natočení prvního rámu od požadované polohy je přibližně 0,015 rad, tedy cca 0,86°, což odpovídá nevykompenzovanému podélnému zrychlení 0,15 m·s<sup>-2</sup>.

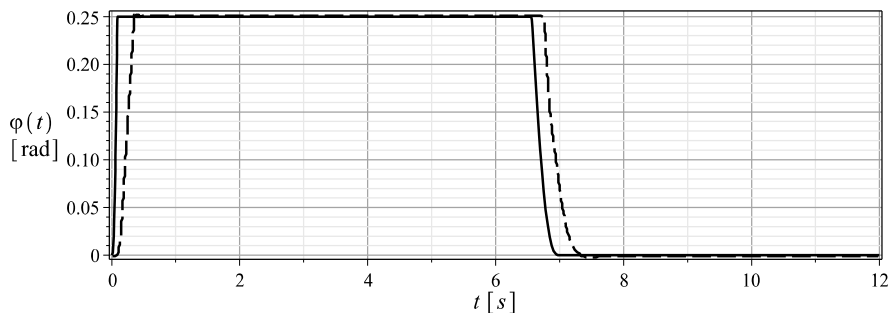
Tab. 3: Shrnutí důležitých hodnot optimalizace zpětných vazeb prvního rámu.

Gyroskop	$ \boldsymbol{\omega}_{10}^8  = 10^5 \text{ min}^{-1}$ , $J_{10z} = 56 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$
Tlumení precesního rámečku	$b_p = 5 \text{ Nm s} \cdot \text{rad}^{-1}$
Kompenzační systém ( $k_{25} = k_1$ )	$k_1 = 18,2 \cdot 10^3$
Korekční systém ( $k_{52} = -k_2$ )	$k_2 = 400$
Maximální výchylka precesního rámečku	$\max(E) = 0,122 \text{ rad} \cong 7^\circ$
Maximální kompenzační moment	$\max(M_{komp}) = 2826 \text{ Nm}$
Maximální korekční moment	$\max(M_{kor}) = 15,2 \text{ Nm}$

### Brzdění

Náběh zpoždění je ve srovnání s dosud uvažovanými průběhy zrychlení velmi strmý, a jak jsme již uvedli, je třeba také počítat s možností omezení pohybu kardanova závěsu dorazy. Namodelovali jsme tedy situaci, kdy je maximální úhlová výchylka prvního rámu závěsu lehátka omezena pružným dorazem na  $\pm 0,25 \text{ rad}$  ( $\pm 14,3^\circ$ ), tedy odpovídající kompenzaci podélného zrychlení 2,5 m·s<sup>-2</sup>. Zároveň jsme omezili pohyb precesního rámečku gyroskopu na  $\pm 0,5 \text{ rad}$  ( $\pm 28,65^\circ$ ). Jednoosý stabilizátor s nastavením korekčního a kompenzačního systému dle tab. 3 jsme pak vystavili podélné deceleraci, kterou vyžaduje předpis EHK (6,43 m·s<sup>-2</sup>), s hladkým nárůstem v čase 0,2 s, konstantní decelerací po několik sekund a následným plynulým poklesem podélného zpoždění během 1 s.

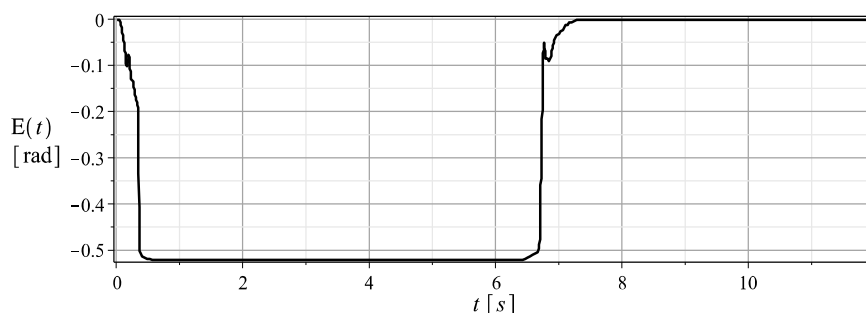
Lze konstatovat, z obr. 37 až obr. 39 je to patrné, že systém má schopnost při zvoleném nastavení korekce a kompenzace dosáhnout maximální výchylky jak stabilizovaného rámu, tak precesního rámečku gyroskopu. Zároveň však systém umožňuje po ukončení brzděného manévru návrat do výchozí polohy.



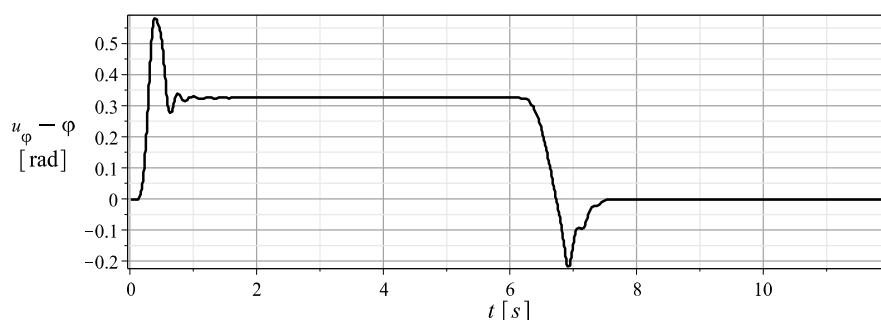
Obr. 37: Úhlová výchylka stabilizovaného rámu (plná); srovnání s průběhem směru zdánlivé vertikály (čárkovaná; maximální výchylka je omezena na  $\pm 0,25 \text{ rad}$  stejně jako pohyb rámu).

Nakonec s uvedeným nastavením korekčního a kompenzačního systému (tab. 3) ukažme vibroizolační vlastnosti prvního rámu kardanova závěsu ve sledovaném pás-

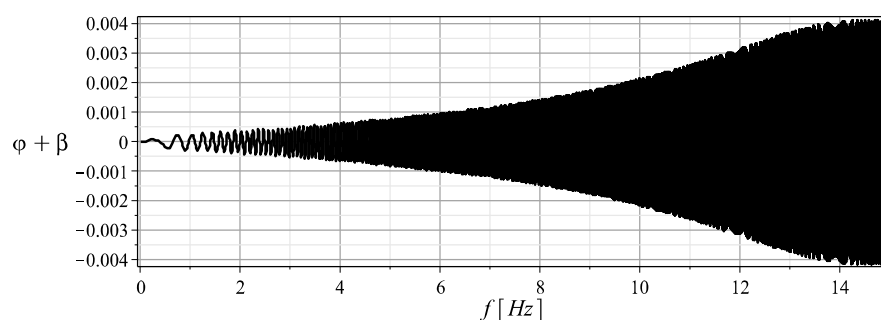
mu do 12 Hz, stejně jako v případě horního rámu. Budíme tedy systém kinematicky rotací okolo příčné osy sweep signálem 0–15 Hz s amplitudou výchylky 0,01 rad. Dle změny amplitudy odezvy, tedy úhlové výchylky v inerciálním systému, prvního rámu kardanova závěsu (viz obr. 40) můžeme konstatovat, že přenos v pásmu  $< 6$  Hz je  $< 0,1$  a v pásmu do 12 Hz pak roste až na 0,3.



Obr. 38: Úhlová výchylka precesního rámečku gyroskopu.



Obr. 39: Indikovaná odchylka kolmice k rovnici stabilizovaného rámu od směru výslednice zrychlení.



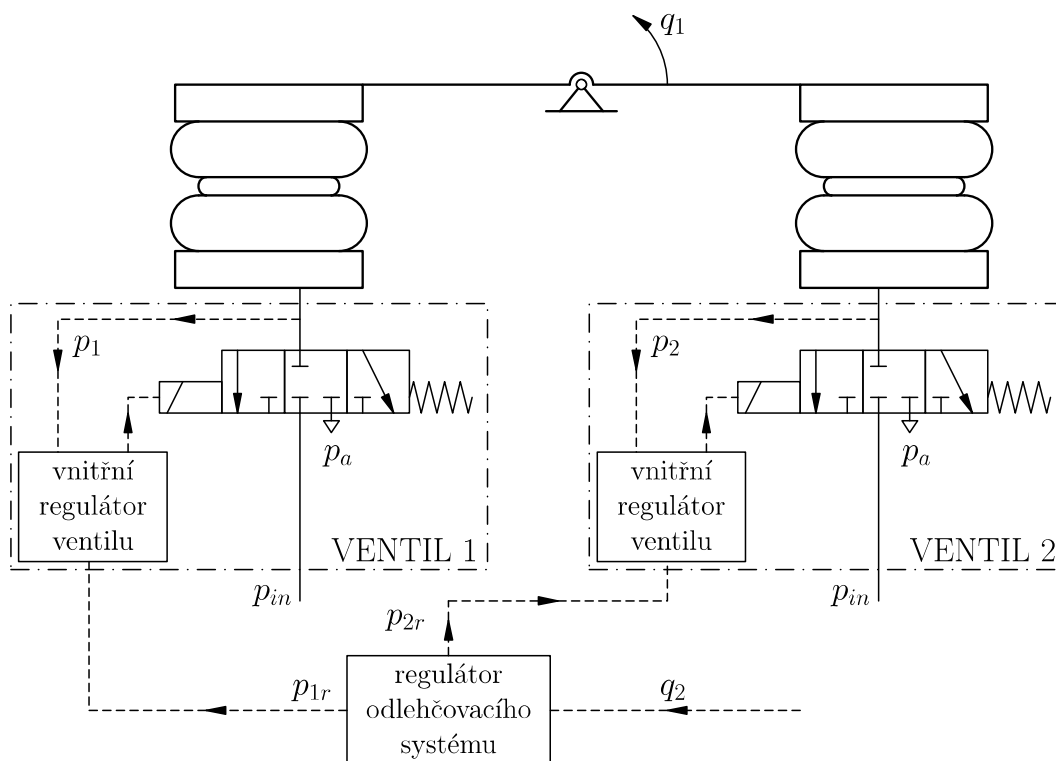
Obr. 40: Odezva absolutní výchylky stabilizovaného prvního rámu kardanova závěsu na kinematické buzení rotací základu okolo podélné osy sweep signálem.

Poznamenejme, že snížením tlumení prvního rámu  $10\times$  lze dosáhnout přenosu  $< 0,1$  v celém pásmu do 12 Hz, přičemž snížení přenosu ve zmíněném pásmu pod 0,2 lze dosáhnout snížením tlumení na polovinu. Vzhledem k faktu, že vlastní frekvence prvního rámu se vlivem nastavení korekčního a kompenzačního systému posunula na 14–15 Hz, bude mít na přenos prvního rámu pozitivní vliv také zvýšení impulsmomentu gyroskopu. To ovšem musí být provázeno zvýšením tlumení v precesní ose gyroskopu a zvětšením zesílení korekční zpětné vazby.

Dále poznamenejme, že regulační odchylky natočení stabilizovaného rámu od žádané polohy v průběhu změny zrychlení (viz obr. 29 a obr. 36) lze minimalizovat přidáním derivačních složek regulátorů korekčního a kompenzačního systému. K nalezení vhodných hodnot zesílení derivačních složek lze aplikovat stejný postup optimalizace jako v případě hodnot zesílení proporcionálních složek, který jsme popsali v této kapitole.

## 5.5 Náhrada kompenzačního motoru řízením pružin

V kapitole 4.3.4 jsme naznačili možnost využití řízených pneumatických pružin namísto momentového motoru kompenzačního systému. Na obr. 41 je vyobrazeno funkční schéma navrženého řízení. Pro řízení tlaku v pneumatických pružinách jsme využili elektro-pneumatické tlakové regulátory VY1A01 firmy SMC, tento ventil je vybaven vnitřním regulátorem, který řídí ventil tak, aby tlak  $p_i$  na výstupu z ventilu dosáhl co nejrychleji požadované hodnoty tlaku  $p_{ir}$ , která je určena regulátorem odlehčovacího systému. Regulátor odlehčovacího systému určuje požadované hodnoty tlaků  $p_{1r}$  a  $p_{2r}$  v pneumatických pružinách na základě hodnoty vstupní veličiny  $q_2$ , která je v případě gyroskopického stabilizátoru rovna úhlové výchylce příslušného precesního rámečku gyroskopu.



Obr. 41: Schéma řízení dvojčinné pneumatické pružiny.

### 5.5.1 Model řídicího ventilu

Za účelem teoretického ověření funkce navrženého řešení bylo v první řadě nutné sestavit matematický model pneumatického ventilu, včetně jeho vnitřního regulátoru.



Hmotnostní průtok vzduchu ventilem ve směru ze zdroje tlakového vzduchu do  $i$ -té pneumatické pružiny  $G_{PAi}$  je

$$G_{PAi} = \begin{cases} -p_i \cdot C \cdot \rho_a \sqrt{1 - \left( \frac{p_i/p_{in} - b_{PA}}{1 - b_{PA}} \right)^2} & p_i > p_{in}, \\ p_{in} \cdot C \cdot \rho_a \sqrt{1 - \left( \frac{p_i/p_{in} - b_{PA}}{1 - b_{PA}} \right)^2} & \frac{p_i}{p_{in}} > b_{PA}, \\ p_{in} \cdot C \cdot \rho_a & \frac{p_i}{p_{in}} \leq b_{PA}, \end{cases} \quad (5.103)$$

hmotnostní průtok vzduchu při vypouštění vzduchu z pružiny do atmosféry  $G_{ARi}$  pak

$$G_{ARi} = \begin{cases} p_a \cdot C \cdot \rho_a \sqrt{1 - \left( \frac{p_i/p_a - b_{AR}}{1 - b_{AR}} \right)^2} & p_a > p_i, \\ -p_i \cdot C \cdot \rho_a \sqrt{1 - \left( \frac{p_a/p_i - b_{AR}}{1 - b_{AR}} \right)^2} & \frac{p_a}{p_i} > b_{AR}, \\ -p_i \cdot C \cdot \rho_a & \frac{p_a}{p_i} \leq b_{AR}, \end{cases} \quad (5.104)$$

kde  $p_{in}$  je tlak vzduchu na výstupu zdroje tlakového vzduchu,  $p_i$  je tlak vzduchu v  $i$ -té pružině,  $p_a$  je atmosférický tlak,  $\rho_a$  je hustota vzduchu při atmosférickém tlaku,  $b_{AR}$  resp.  $b_{PA}$  jsou kritické tlakové poměry ve směru zdroj-pružina resp. pružina-atmosféra,  $C$  je tzv. pneumatická konduktivita ventilu, která je závislá na otevření ventilu. Ve vztazích (5.103) a (5.104) v prvním řádku respektujeme možnost, že dynamika systému způsobí zvýšení tlaku v pružině  $p_i$  nad hodnotu tlaku na výstupu zdroje tlakového vzduchu  $p_{in}$  během napouštění pružiny, nebo naopak snížení tlaku  $p_i$  pod úroveň atmosférického  $p_a$  během vypouštění vzduchu z pružiny do atmosféry. V druhém řádku se pak jedná o podkritické proudění a ve třetím řádku jde o nadkritické proudění. Poznamenejme, že jak kritické tlakové poměry, tak pneumatická konduktivita by měly být pro daný ventil určeny měřením. Dále připomeňme, že všechny tlaky v rovnicích (5.103) a (5.104) jsou tlaky absolutní.

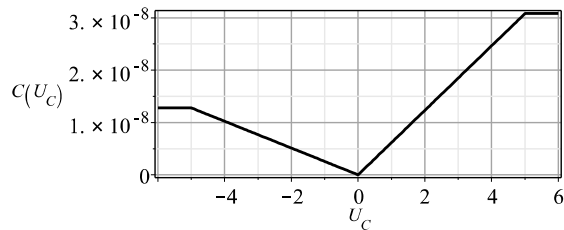
Předpokládáme, že jako vnitřní regulátor ventilu slouží PID regulátor, závislost řídicí veličiny (označme  $U_{Ci}$ ) na rozdílu aktuálního a požadovaného tlaku v  $i$ -té pružině můžeme zapsat

$$U_{Ci}(p_{ir}, p_i) = k_p (p_{ir} - p_i) + d_p (\dot{p}_{ir} - \dot{p}_i) + i_p \int_0^t (p_{ir}(\tau) - p_i(\tau)) d\tau, \quad (5.105)$$

kde  $k_p$ ,  $d_p$  resp.  $i_p$  jsou koeficienty zesílení proporcionální, derivační resp. integrační složky vnitřního regulátoru ventilu. Předpokládaná závislost pneumatické konduktivity ventilu na řídicí veličině je zobrazena v obr. 42.

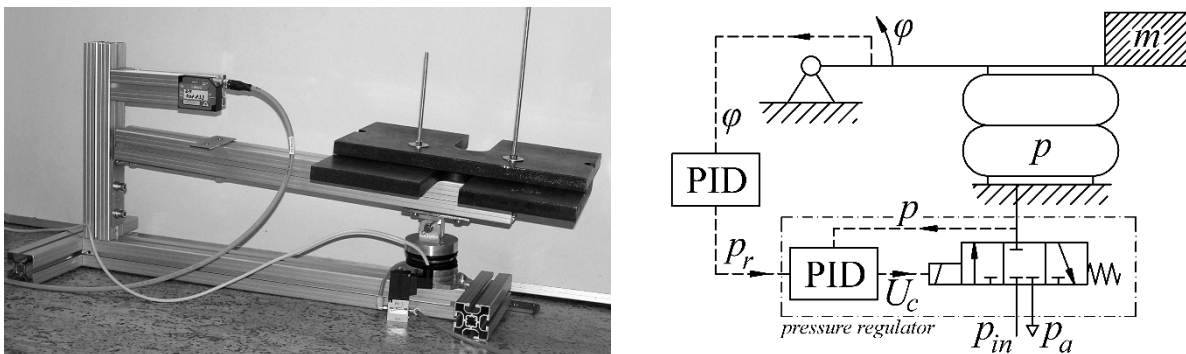
Poznamenejme, že hodnoty pneumatické konduktivity a kritických tlakových poměrů, stejně jako parametry vnitřního regulátoru ventilu nejsou obecně známy a výrobce je neposkytuje. Bylo by sice možné tyto parametry určit měřením, ale

v našem případě, kdy šlo o principiální ověření funkčnosti řešení, jsme to považovali za nadbytečné. Pro naladění zmíněných parametrů jsme použili výrobcem poskytovaných charakteristik zmíněného ventilu tj. na základě charakteristik průtoku ventilem při různých tlakových poměrech, nebo časového průběhu tlaku při vyprazdňování nádrže ventilem.

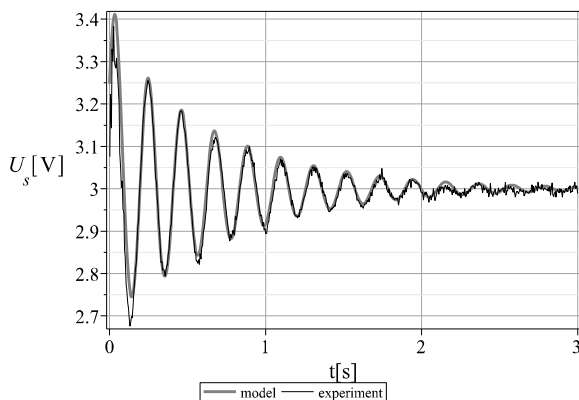


Obr. 42: Závislost pneumatické konduktivity na řídicí veličině.

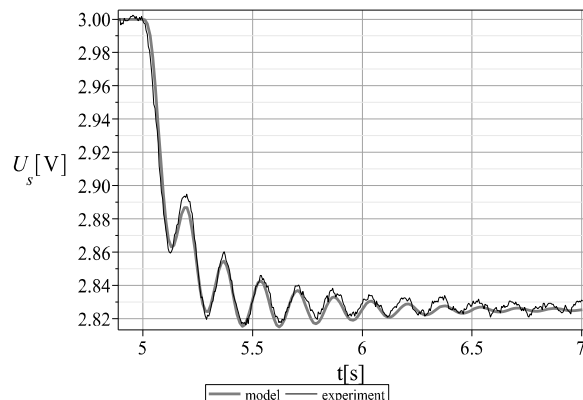
Pro určení vhodného nastavení parametrů vnitřního regulátoru jsme pak provedli experimenty s jednoduchým zařízením (viz obr. 43) – závaží přimontované na rotačně uloženém rameni, jehož natočení bylo snímáno bezkontaktním laserovým snímačem, podepřené pneumatickou pružinou (shodnou s uvažovanými pružinami v systému odpružení sanitního lehátka). Tlak v pneumatické pružině byl řízen tlakovým regulátorem. Sestavili jsme rovněž matematický model popsaného jednoduchého zařízení a následně jsme odladili nastavení parametrů modelu pro co nejlepší shodu s experimenty.



Obr. 43: Fotografie a schéma zkušebního zařízení použitého pro účely naladění parametrů modelu pneumatického ventilu.



Obr. 44: Volné kmitání systému, závaží



Obr. 45: Skoková změna polohy, závaží 10 kg

20 kg – napěťový signál ze snímače natočení ramene. – napěťový signál ze snímače natočení ramene.

Nejprve jsme ověřili samotný model pneumatické pružiny podle volného kmitání systému – viz obr. 44. Poté jsme provedli naladění parametrů talkového regulátoru podle odezvy systému na skokovou změnu tlaku v pneumatické pružině, řízené tlakovým regulátorem – viz obr. 45. Experimenty ukázaly, že pro matematický popis vnitřního regulátoru řídicího ventilu plně postačuje pouze proporcionální složka, což považujeme za pozitivní, vzhledem k užití modelu ventilu v komplexnějším matematickém modelu, tedy ve vztahu (5.105) je  $d_p = i_p = 0$ .

### 5.5.2 Matematický model pneumatické pružiny

Matematický model uzavřené pneumatické pružiny jsme již popsali v kapitole 5.1.4. V případě řízené pneumatické pružiny je ale situace jiná a je třeba uvažovat změnu množství vzduchu v pneumatické pružině. Vyjdeme-li ze stavové rovnice ideálního plynu pro izotermický děj (ve skutečnosti jde o děj polytropický, který se ale izotermickému velmi blíží), pak pro stav plynu v pružině v dynamickém stavu platí

$$\dot{p}V + p\dot{V} = \dot{m}R_pT, \quad (5.106)$$

kde  $p$  je okamžitý absolutní tlak vzduchu v pružině,  $V$  je okamžitý objem vzduchu v pneumatické pružině,  $\dot{m}$  je hmotnostní tok vzduchu z/do pružiny,  $R_p$  je specifická plynová konstanta (pro vzduch  $R_p = 287 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ) a  $T$  je termodynamická teplota. V případě vlnovcové pneumatické pružiny platí, že objem  $V$  je prakticky nezávislý na tlaku vzduchu v pružině, je tedy funkcí pouze okamžité délky pneumatické pružiny. Dále se obvykle zavádí tzv. efektivní plocha pneumatické pružiny

$$S_{ef}(l) = \frac{dV(l)}{dt}, \quad (5.107)$$

kde  $l$  je okamžitá délka pneumatické pružiny. Závislosti  $S_{ef}(l)$  a  $V(l)$  vlnovcové pneumatické pružiny lze určit měřením, nebo (v některých případech) z katalogu výrobce. Nakonec síla vyvozená pneumatickou pružinou bude

$$F(p, l) = (p - p_a)S_{ef}(l), \quad (5.108)$$

přičemž zde bereme v potaz, že tlak  $p$  v rovnici (5.106) je absolutní, ale pružina je obklopena atmosférickým tlakem.

Přidání řízených pneumatických pružin k mechanickému systému gyroskopického stabilizátoru znamená rozšířit jej o stavové rovnice pro tlak vzduchu v pružinách, tedy

$$\dot{p}_i V(q_i) + p_i S_{ef}(q_i) = R_p T \cdot G_i(U_{Ci}, p_i, p_{ir}), \quad (5.109)$$

kde  $q_i$  je úhlová výchylka příslušného rámu kardanova závěsu ( $\varphi$ , nebo  $\psi$ ),  $p_{ir}$  je požadovaný tlak v  $i$ -té pružině a

$$G_i(U_{Ci}, p_i, p_{ir}) = \begin{cases} G_{PAi} & U_{Ci} > 0, \\ G_{ARi} & U_{Ci} < 0, \end{cases} \quad (5.110)$$

je hmotnostní průtok vzduchu do ( $G_i > 0$ ), nebo z ( $G_i < 0$ )  $i$ -té pružiny.

Dále k příslušné rovnici původního systému přidáme moment vyvozený řízenými pružinami

$$M_p(q_1, p_1, p_2) = -S_{ef}(r_{p1}q_1 + l_0) \cdot (p_1 - p_a) \cdot r_{p1} + S_{ef}(r_{p2}q_1 + l_0) \cdot (p_2 - p_a) \cdot r_{p2}, \quad (5.111)$$

kde  $r_{p1}$  a  $r_{p2}$  jsou ramena pneumatických pružin, a využíváme skutečnosti, že pro malé úhlové výchylky přibližně platí  $l_i \cong q_1 r_{pi} + l_0$ .

Nakonec zbývá určit požadované tlaky v pneumatických pružinách v závislosti na koeficientu zesílení zpětné vazby odlehčovacího systému a úhlové výchylce precesního rámečku příslušného gyroskopu. Pro požadovaný moment pneumatických pružin odpružení stabilizovaného rámu kardanova závěsu platí

$$M_p(q_1, p_1 = p_{2r}, p_2 = p_{2r}) - M_p(q_1 = 0, p_1 = p_{10}, p_2 = p_{20}) = k_1 \cdot q_2, \quad (5.112)$$

kde první člen na levé straně je požadovaný moment odlehčovací zpětné vazby, druhý člen je moment potřebný pro vyvážení momentu tíhových sil stabilizovaného rámu a na pravé straně je kompenzační moment. Dále v rovnici (5.112)  $p_{10}$  a  $p_{20}$  jsou počáteční tlaky v pneumatických pružinách nutné pro počáteční vyvážení momentu tíhových sil stabilizovaného rámu. Pro jednoznačné určení požadovaných tlaků  $p_{1r}$  a  $p_{2r}$  je potřeba k rovnici (5.112) přidat ještě jednu podmínku, jako vhodná se jeví podmínka rovnováhy reakcí způsobených tíhovými silami v ložiskách stabilizovaného rámu a sil vyvozených oběma pružinami.

$$S_{ef}(q_1 \cdot r_{p1} + l_0) \cdot (p_{1r} - p_a) + S_{ef}(q_1 \cdot r_{p2} + l_0) \cdot (p_{2r} - p_a) = g \cdot m_{rám}, \quad (5.113)$$

kde  $m_{rám}$  je hmotnost rámu včetně všech dalších členů namontovaných na rám (gyroskopy, precesní rámečky, lehátko, pacient, atd.). Rovnice (5.112) a (5.113) mají pro požadované tlaky  $p_{1r}$  a  $p_{2r}$  jednoznačné analytické řešení.

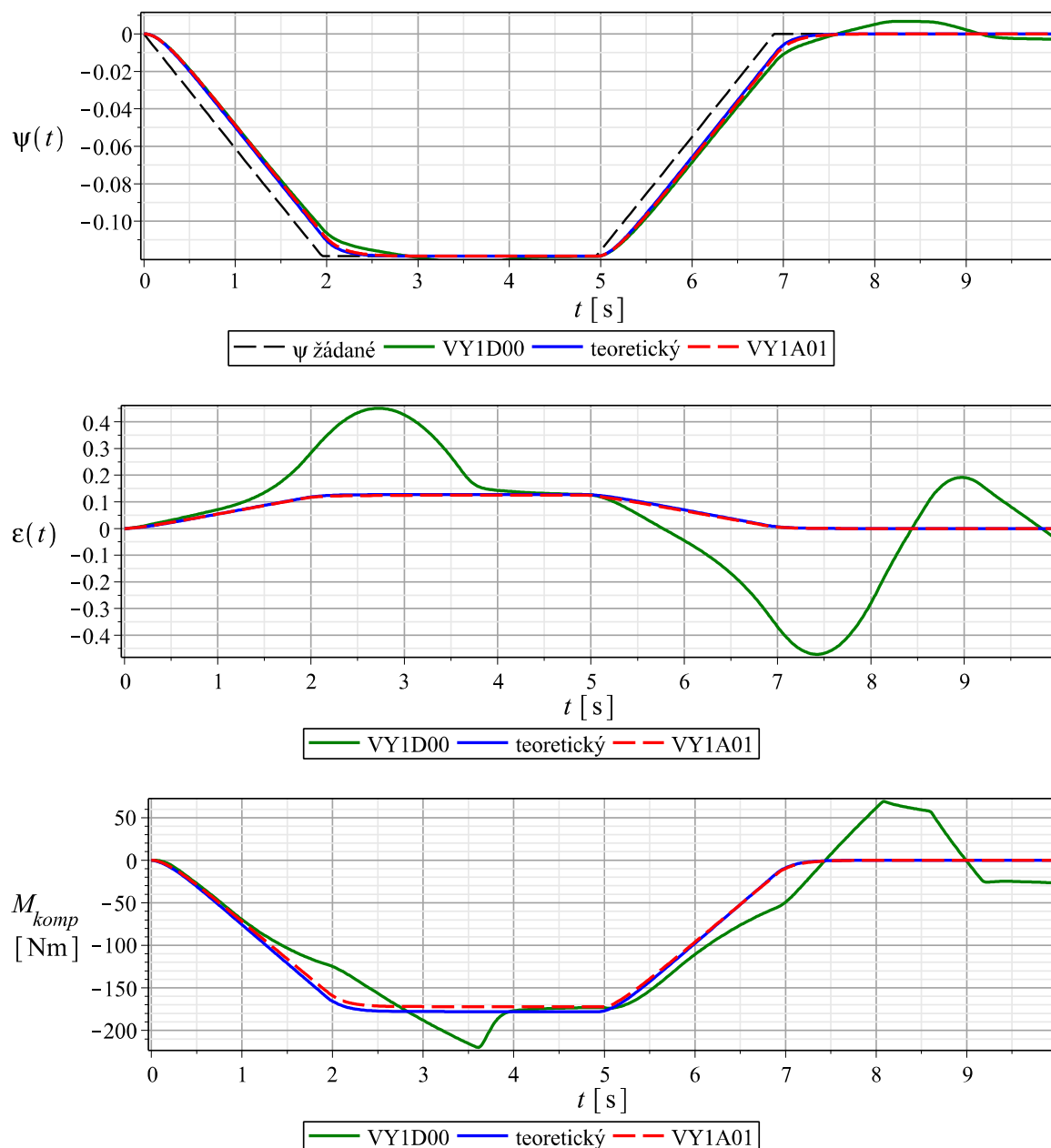
### 5.5.3 Ověření funkce navržené náhrady kompenzačního motoru

Za účelem teoretického posouzení funkčnosti navrhovaného řešení porovnejme časové odezvy původního systému, který předpokládal dokonale pružný momentový motor kompenzačního systému a systému s nově navrhovanou náhradou kompenzačního motoru. Provedeme simulace reakce systému na zrychlený pohyb v horizontální rovině, podobně jako v kap. 5.4. Vzhledem k užití modelu reálných pneumatických pružin, jejichž rozsah zdvihu určuje možný rozsah pohybu systému, omezme maximální zrychlení tak, aby náklon příslušného rámu kardanova závěsu lehátka byl v mezích omezení zdvihů použitých pneumatických pružin. Tedy v případě zrychleného pohybu v příčném směru maximálně  $1,17 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  a v podélném směru  $0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

#### *Horní rám kardanova závěsu*

Pro kompenzační systém horního rámu kardanova závěsu stabilizátoru (zajišťuje rotaci okolo podélné osy) jsme vyzkoušeli dva typy tlakových regulátorů řady VY1 výrobce SMC a to konkrétně VY1D00 a VY1A01. Průtok vzduchu prvním jmenovaným ventilem se ukázal jako nedostatečný, uvažovali jsme tedy s možností použít pro každou pružinu tři ventily paralelně. Druhý jmenovaný ventil se ukázal být vhodným. Porovnejme nyní časové průběhy pohybu stabilizovaného rámu a precesního rámečku gyroskopu pro oba uvažované ventily s chováním systému s teoretickým dokonalým

momentovým motorem. Ve všech třech případech jsme použili shodné nastavení zesílení zpětných vazeb korekčního a kompenzačního systému.

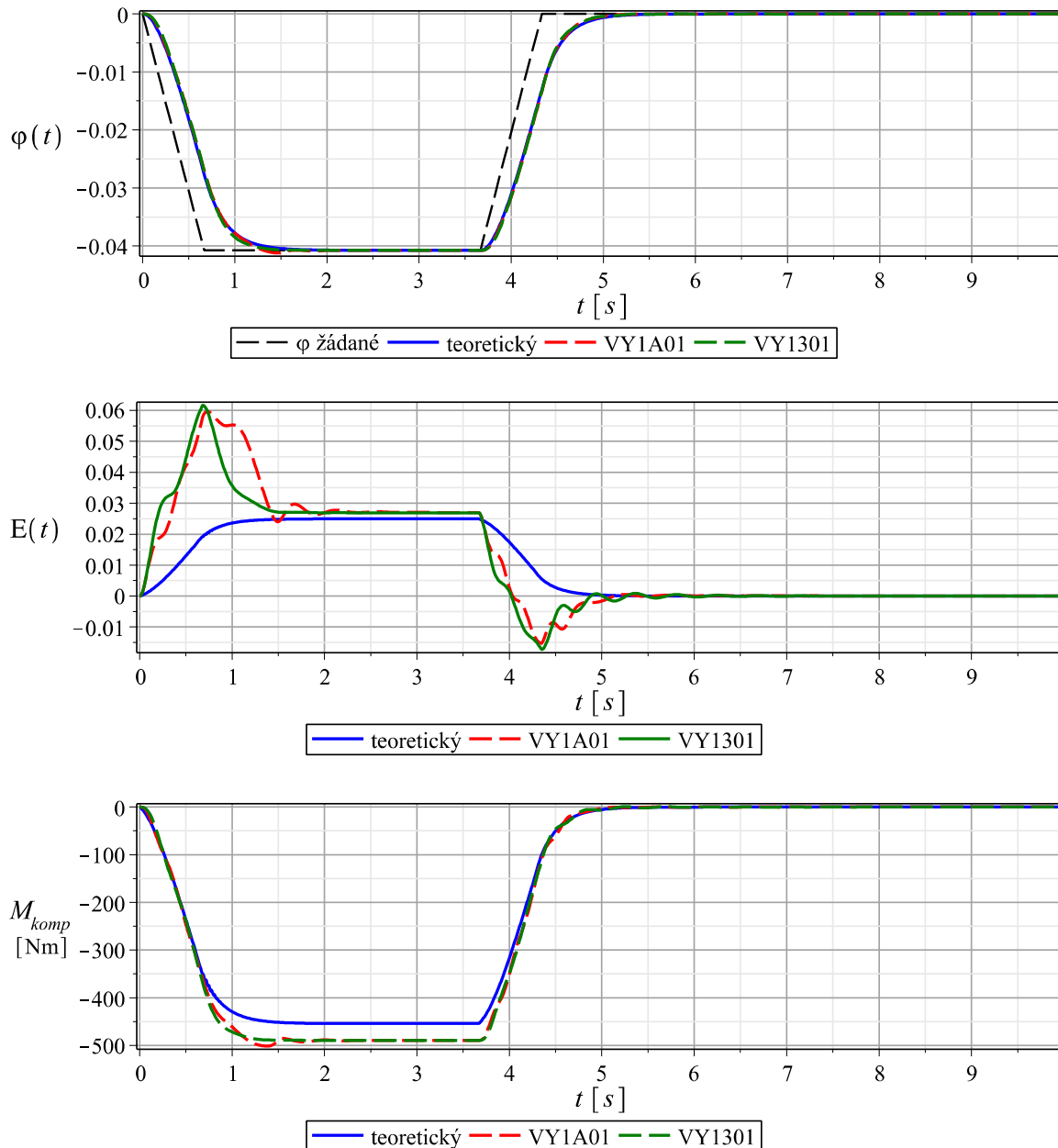


Obr. 46: Srovnání časových průběhů pohybu a kompenzačního momentu systému horního rámu kardanova závěsu (dostředivé zrychlení  $1,17 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ).

Z obr. 46 je patrné, že při použití ventilu VY1A01 reaguje kompenzační systém dostatečně rychle a časové průběhy se téměř neliší od teoretického modelu s dokonalým momentovým motorem. Naproti tomu ani ztrojený ventil VY1D00 není schopen dopravit vzduch do, nebo z pneumatické pružiny dostatečně rychle a dosažení požadované polohy stabilizovaného rámu ( $\psi$ ) je zajištěno gyroskopickým momentem, což má za následek větší výchylku precesního rámečku ( $\epsilon$ ). Možnost použití ztrojených ventilů VY1D00 byla čistě akademická, v tomto případě posloužila pro demonstraci nevhodného výběru ventilu.

**První rám kardanova závěsu**

V případě kompenzačního systému prvního rámu kardanova závěsu (zajišťuje rotaci okolo příčné osy) bylo vzhledem k řádově silnější zpětné vazbě a většímu momentu setrvačnosti zřejmé, že vybraný ventil VY1A01 by též mohl být nedostatečný, proto jsme pro simulace použili také ventil VY1301, který oproti prvně jmenovanému umožňuje až  $5\times$  větší průtok vzduchu. Porovnejme opět časové průběhy odezvy systému na podélné zrychlení  $0,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .



Obr. 47: Srovnání časových průběhů pohybu a kompenzačního momentu systému prvního rámu kardanova závěsu (podélné zrychlení  $0,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ).

Z obr. 47 je dobře patrné, že použití řízených pneumatických pružin nemá na časovou odezvu stabilizovaného prvního rámu ( $\varphi$ ) téměř žádný vliv. Větší výchylinky precesního rámečku gyroskopu ( $E$ ) ukazují na rozdíl v kompenzačním momentu. Při

blíže pohledu na časové průběhy kompenzačního momentu lze konstatovat, že moment řízených pružin má pomalejší nástup, což zvětšuje precesi gyroskopu. Řídicí systém se při použití obou variant ventilů chová téměř shodně, maxima výchylek precesního rámečku se pro obě varianty téměř neliší a jsou v přijatelných mezích. Je proto možné použít levnější ventil VY1A01.

#### 5.5.4 Náhrada kompenzačního motoru – shrnutí

V této kapitole jsme shrnuli výsledky provedených analýz možnosti využití řízení pneumatických pružin kardanova závěsu sanitního lehátka jako náhrady kompenzačního momentového motoru. Z provedených analýz vyplývá, že taková náhrada je možná a že vhodné řídicí ventily jsou dostupné. Přestože se ukázalo, že navržená náhrada má jisté nedostatky, považujeme ji dobře použitelnou. Podstatnou výhodou navrženého řešení, oproti zástavbě momentových motorů do os kardanova závěsu, sledujeme ve faktu, že nevyžaduje konstrukční úpravy a využívá stávajících zařízení odpruženého podstavce sanitního lehátka – s řízením tlaku v pneumatických pružinách jsme počítali přinejmenším pro účely dosažení výchozí rovnovážné polohy stabilizátoru.

### 5.6 Přenos systému s dvojosým stabilizátorem

Zaměříme se nyní na přenos vibrací způsobených kinematickým buzením základu vibroizolačního systému zavěšení sanitního lehátka na ložnou plochu s ležícím pacientem. V případě nelineárního systému lze využít buzení rozmítaným sinem a z časového průběhu odezvy odhadovat přenos. Vzhledem k tomu, že předpokládáme malé úhlové výchylky rámu kardanova závěsu a precesních rámečků určíme přenos pomocí lineari- zovaného modelu.

Rovnice linearizovaného modelu (5.90) použijeme ve tvaru

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{G} + \mathbf{B})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_p + \mathbf{K})\mathbf{q} = -(\mathbf{E} + \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_{kor}), \quad (5.114)$$

kde připomeňme, že matice  $\mathbf{G}$  a  $\mathbf{C}_1$  a vektor buzení  $\mathbf{E}$  jsou funkcemi kinematického buzení  $\zeta(t)$ ,  $\alpha(t)$  a  $\beta(t)$ . Budeme-li uvažovat buzení vždy jen v jednom směru, můžeme vektor  $\mathbf{E} + \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_{kor}$  na pravé straně pro jednotlivé směry buzení vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\alpha(t) &= \mathbf{E}_{2\alpha}\ddot{\alpha}(t) + \mathbf{E}_{1\alpha}\dot{\alpha}(t) + \mathbf{E}_{0\alpha}\alpha(t), \\ \mathbf{E}_\beta(t) &= \mathbf{E}_{2\beta}\ddot{\beta}(t) + \mathbf{E}_{1\beta}\dot{\beta}(t) + \mathbf{E}_{0\beta}\beta(t), \\ \mathbf{E}_\zeta(t) &= \mathbf{E}_{2\zeta}\ddot{\zeta}(t) + \mathbf{E}_{1\zeta}\dot{\zeta}(t) + \mathbf{E}_{0\zeta}\zeta(t). \end{aligned} \quad (5.115)$$

Dále pouze pro kinematické buzení rotací okolo podélné osy, ostatní směry jsou analogické. Pro buzení ve tvaru  $\alpha(t) = \alpha_0 e^{i\omega t}$  předpokládáme partikulární řešení rovnice (5.114) ve tvaru

$$\mathbf{q}(t) = \tilde{\mathbf{q}}(\omega) e^{i\omega t}, \quad (5.116)$$

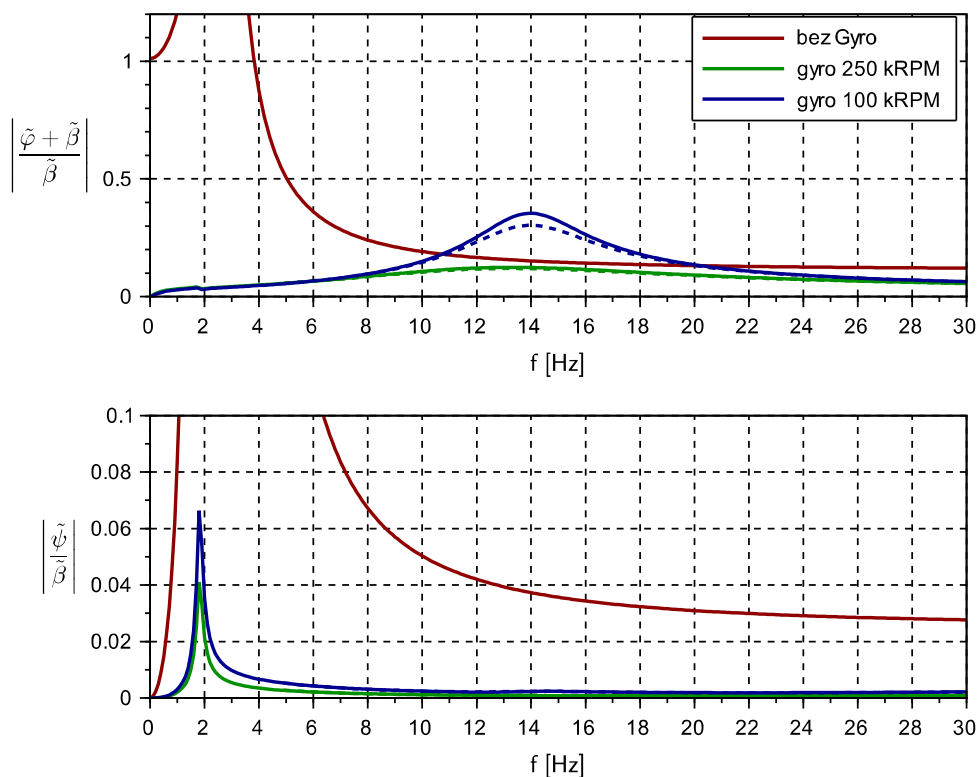
kde  $\tilde{\mathbf{q}}(\omega)$  jsou komplexní amplitudy ustálených vynucených kmitů a platí

$$\tilde{\mathbf{q}}(\omega) = \left( (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_p + \mathbf{K}) - \mathbf{A}\omega^2 + i\omega(\mathbf{G} + \mathbf{B}) \right)^{-1} \left( \mathbf{E}_{0\alpha} + i\omega\mathbf{E}_{1\alpha} + \omega^2\mathbf{E}_{2\alpha} \right). \quad (5.117)$$

Amplitudy ustálených vynucených kmitů jsou pak  $|\tilde{\mathbf{q}}(\omega)|$  a fázový posun vůči budící funkci  $\arctg(\text{Im}(q_i) / \text{Re}(q_i))$ . Přenos pak můžeme určit jako absolutní hodnotu poměru komplexní výchylky a budící funkce.

Frekvenční přenosy úhlů kardanova závěsu při kinematickém buzení rotací základu okolo příčné osy (úhel  $\beta$  na obr. 13 na straně 41), přičemž osa rotace prochází středem spodní základny, jsou zobrazeny na obr. 48. Je zřejmé, že přenos na výchylku horního rámu ( $\psi$ ) je velmi malý, přičemž je závislý na poloze těžiště soustavy horní rám-lehátko-pacient vůči ose rotace horního rámu, a je výrazně nižší než v případě systému bez gyroskopické stabilizace. Rezonanční vrcholy blízko frekvence 2 Hz souvisí s vlastní frekvencí paralelogramu.

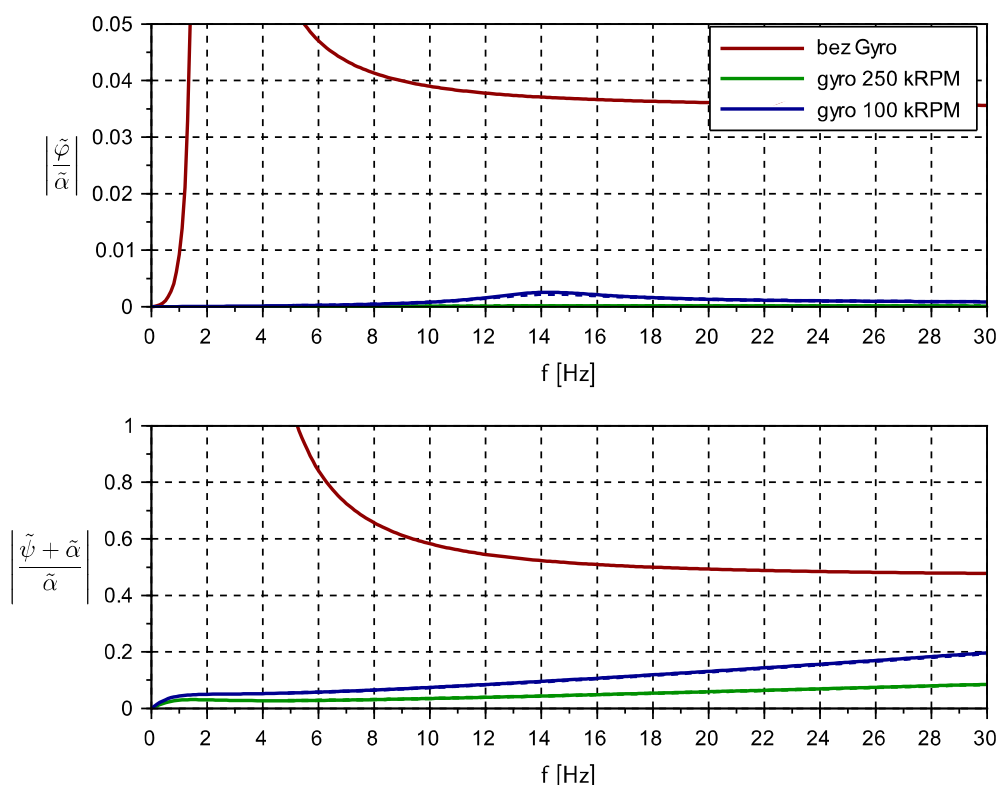
Přenos na absolutní úhlovou výchylku prvního rámu je ve sledovaném pásmu budících frekvencí podvozku sanitního vozu (1–11 Hz) pro obě konfigurace gyroskopického stabilizátoru (dvě varianty hodnoty impulsmomentu gyroskopů s příslušnými parametry korekčního a kompenzačního systému) lepší než v případě vibroizolační platformy bez gyroskopického stabilizátoru. Podstatný rozdíl je zejména v pásmu nízkých frekvencí 0–10 Hz, kdy gyroskopický systém má velmi nízký přenos a poloha stabilizovaného rámu je tak v inerciálním systému téměř neměnná. Předpokládáme-li dále deaktivaci, nebo podstatné zeslabení korekčních zpětných vazeb pro pásmo od určité frekvence, například filtrací signálu snímače zdánlivé vertikály dolnofrekvenční propustí, bude přenos na absolutní výchylku prvního rámu ještě nižší (čárkovaná čára v obr. 48).



Obr. 48: Frekvenční závislost přenosů kinematického buzení rotací základu okolo příčné osy na absolutní výchylku prvního rámu kardanova závěsu (nahore) a relativní výchylku horního rámu (dole).



V případě přenosu kinematického buzení rotací základu okolo podélné osy je situace podobná, rozdíl je ve výrazně vyšší vlastní frekvenci nutačního pohybu horního rámu s lehátkem a pacientem, takže rezonance nezasahuje do sledovaného pásma vlastních frekvencí podvozku sanitního vozu. Přenos na pohyb prvního rámu je pak ještě podstatně nižší. Jak je patrné z obr. 49, oba přenosy jsou podstatně nižší než v případě systému bez gyroskopického stabilizátoru. Je zřejmá značná výhoda gyroskopicky stabilizovaného systému, kdy oproti systému bez gyroskopické stabilizace je v pásmu nízkých frekvencí zajištěna téměř neměnná poloha stabilizovaného rámu v inerciálním systému (viz dolní část obr. 49). Dále konstatujeme, že deaktivace korekčního systému v tomto případě nepřináší žádný výrazný efekt, průběhy frekvenčních závislostí přenosů jsou v obou případech téměř totožné.

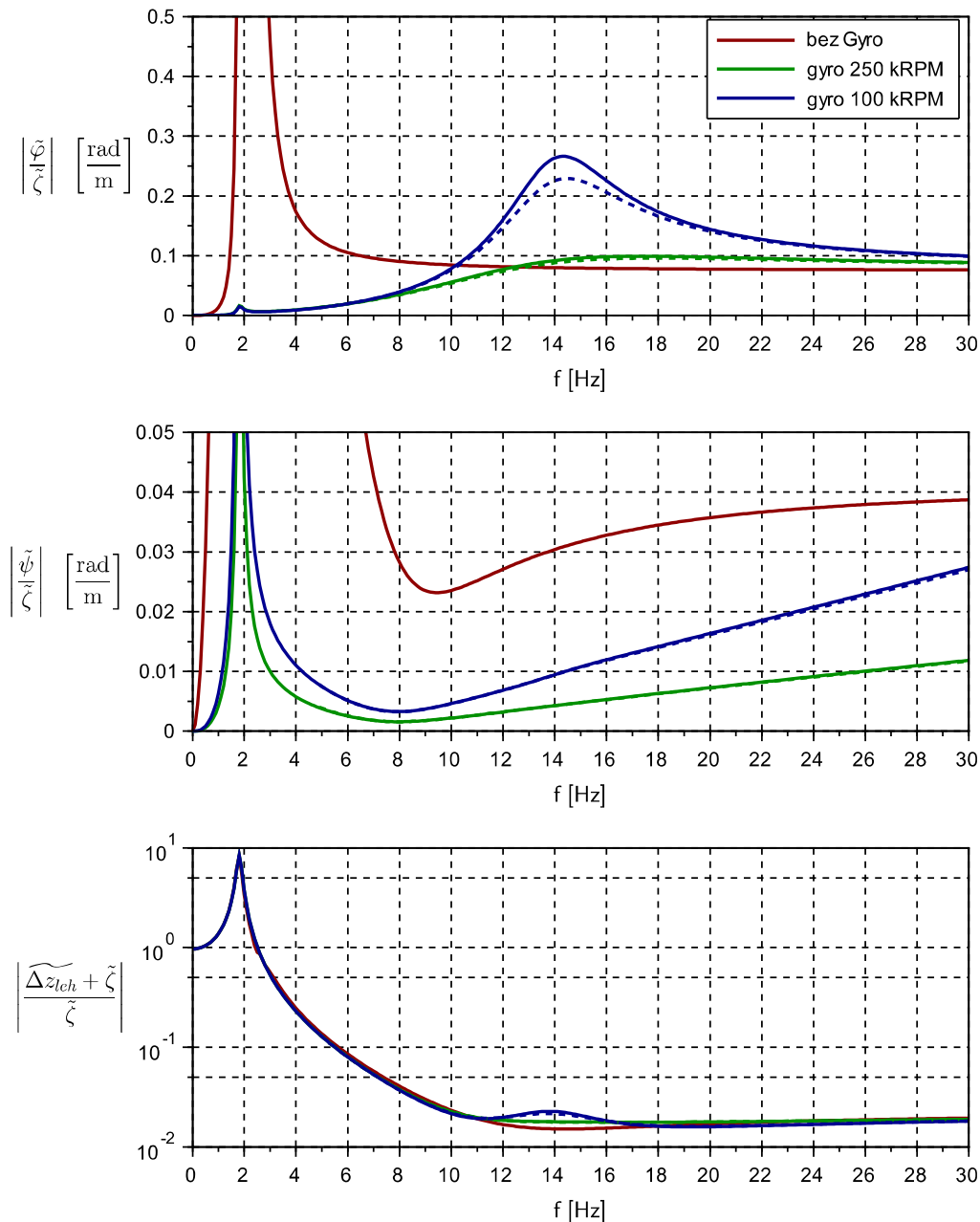


Obr. 49: Frekvenční závislost přenosů kinematického buzení rotací základu okolo podélné osy na relativní výchylku prvního rámu kardanova závěsu (nahore) a absolutní výchylku horního rámu (dole).

Nakonec uveďme srovnání systému s a bez gyroskopického stabilizátoru při kinematickém buzení základu svislou translací – viz obr. 50. Je dobře patrná slabá vazba mezi vodícím mechanismem svislého odpružení – paralelogramem a kardanovým závěsem lehátka s pacientem. Přenos buzení svislým posuvem na vertikální výchylku horní základny paralelogramu je tak minimálně ovlivněn funkcí gyroskopického stabilizátoru, což se zřetelně projevuje pouze v oblasti vlastní frekvence nutačního pohybu prvního (spodního) rámu kardanova závěsu a je způsobeno nenulovou vzdáleností těžiště soustavy rám kardanova závěsu-lehátka-pacient.

V přenosu svislé translace základu na úhlovou výchylku spodního rámu kardanova závěsu je patrné zhoršení oproti systému bez gyroskopické stabilizace v oblasti

vlastní frekvence spodního rámu – viz obr. 50 nahoře. Zároveň poznamenejme, že přenos je uveden v jednotkách [rad/m], takže při amplitudě svislého posuvu základu 100 mm bude amplituda úhlové výchylky prvního rámu kardanova závěsu systému s impulsmomentem gyroskopů odpovídajícímu rychlosti rotace  $10^5 \text{ min}^{-1}$  pouze 0,025 rad, tedy přibližně  $1,4^\circ$ , v případě impulsmomentu při  $2,5 \cdot 10^5 \text{ min}^{-1}$  pak jen přibližně  $0,6^\circ$ . Přenos svislé translace základu na úhlovou výchylku prvního rámu systému s gyroskopy o větším impulsmomentu je pak srovnatelný v oblasti nad 12 Hz se systémem bez gyroskopické stabilizace. Při tom v oblasti rezonance svislého odpružení je přenos gyroskopicky stabilizovaného systému podstatně lepší.



Obr. 50: Frekvenční závislost přenosů kinematického buzení svislou translací na výchylku prvního rámu kardanova závěsu (nahoře), výchylku horního rámu (uprostřed) a vertikální translaci lehátka (dole).

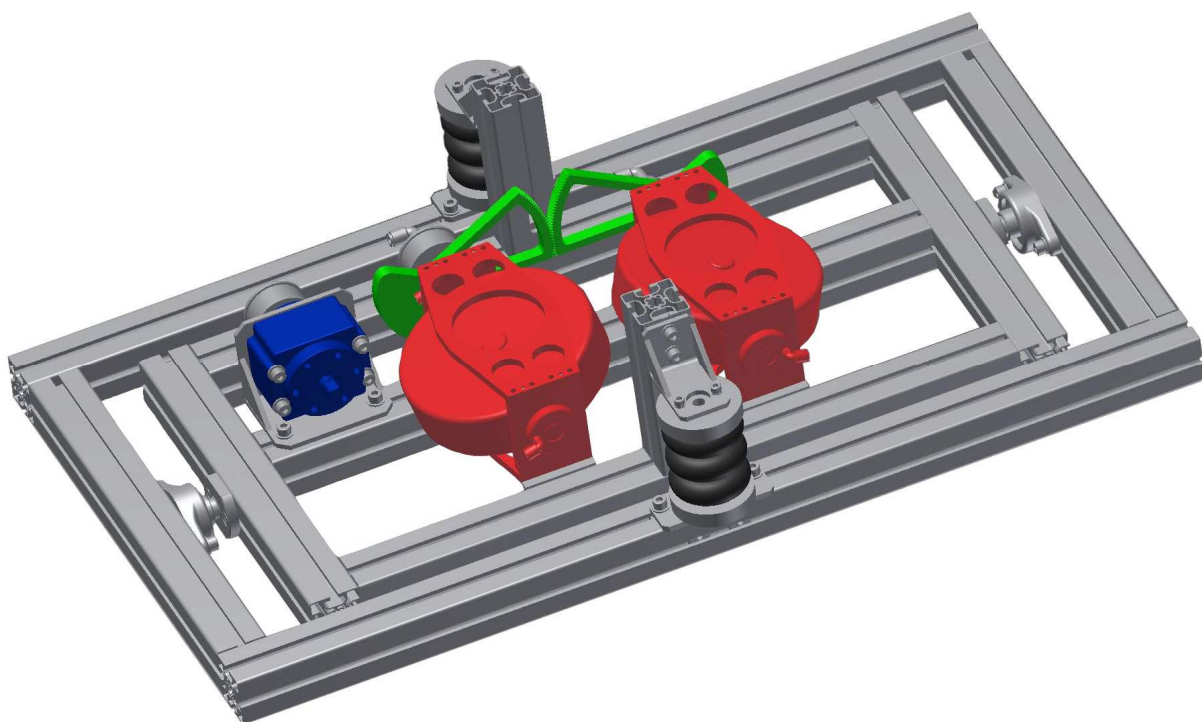
Z vyobrazených přenosů je tedy zřejmý kvalitativně lepší vibroizolační účinek gyroskopicky stabilizovaného systému a to zejména při nízkých kmitočtech. Na druhou stranu se ukázalo, že gyroskop při zvolených setrvačných parametrech musí mít pro dosažení dobré vibroizolace rychlost rotace alespoň dvakrát vyšší než původně uvažovaných  $10^5 \text{ min}^{-1}$ , přičemž taková rychlost rotace je obtížně dosažitelná. Řešením tohoto nedostatku může být zvětšení osového momentu setrvačnosti rotoru gyroskopu, nebo užití gyroskopického tandemu (viz kap. 2.5 na str. 22), případně kombinace obojího. Je tedy zřejmé, že problém dostatečné hodnoty impulsmomentu má technicky schůdné řešení.

Dále poznamenejme, že v uvažovaném systému je vlastní frekvence svislého odpružení přibližně 2 Hz, což neodpovídá požadavku polohy vlastních frekvencí mimo pásmo 1–11 Hz, který jsme uvedli v úvodu. Vzhledem k tomu, že se tento nedostatek primárně netýká gyroskopické stabilizace, neuvedli jsme v této práci jeho řešení, proto se nakonec alespoň krátce zmiňme. Snížení vlastní frekvence svislého odpružení lze v tomto případě provést například doplněním pneumatických pružin o přídatné objemy, neboť na rozdíl od pružin kardanova závěsu není velkým problémem jejich umístění v blízkosti pneumatických pružin paralelogramu. Dále je možné čtveřici pružin paralelogramu nahradit menším počtem pružin jiné velikosti, které budou mít dostatečně nízkou tuhost při postačujícím předepjetí, kterým je nutné zajistit statickou polohu systému.

Zmiňme ještě teoretickou možnost gyroskopické stabilizace vertikálního odpružení. Pokud by translační pohyb horní základny paralelogramu byl vhodným mechanismem převeden na rotaci precesní osy dalšího gyroskopu, bylo by možné dosáhnout podobných vlastností svislého odpružení jako v případě odpružení kardanova závěsu lehátka. Je však zřejmé, že samotné technické řešení by bylo komplikované, nemluvě o dosažení dostatečného impulsmomentu gyroskopu, který by patrně musel mít ještě větší hodnotu než u gyroskopů kardanova závěsu. Tím se z této teoretické možnosti gyroskopické stabilizace svislého odpružení sanitního lehátka stává spíše akademická záležitost.

## 5.7 Experimentální model jednoosého gyroskopického stabilizátoru

Gyroskopy s pneumatickým pohonem, které byly vyvinuty pro účely řešení projektu GAČR 101/09/1481 “Gyroskopická stabilizace vibroizolačního systému“, nebyly schopny s dostupným zdrojem tlakového vzduchu dosáhnout rychlosti rotace větší než přibližně  $2 \cdot 10^4 \text{ min}^{-1}$ . Jak jsme ukázali v předchozích kapitolách, je nutná rychlost rotace rotorů gyroskopů o řád vyšší. Proto jsme přistoupili ke konstrukci zmenšeného experimentálního jednoosého gyroskopického stabilizátoru se stabilizovaným rámem odpruženým řízenými pneumatickými pružinami a gyroskopickým tandemem – viz obr. 51. Jako korekční momentový motor jsme použili kyvný pneumatický motor firmy SMC řady CRB1 s řemenovým převodem na osu precesního rámečku. Jako řídicí ventily jsme použili tlakové regulátory SMC VY1A01. Pro řízení (korekční a kompenzační systém) a měření jsme použili systém PXI od National Instruments. Stabilizované břemeno jsme nahradili závažími o hmotnosti 10, nebo 20 kg, umístěnými nad osou stabilizovaného rámu. Nastavení korekčního a kompenzačního systému jsme pro hmotnostní parametry experimentálního modelu určili postupem, který jsme uvedli v kapitole 5.4.

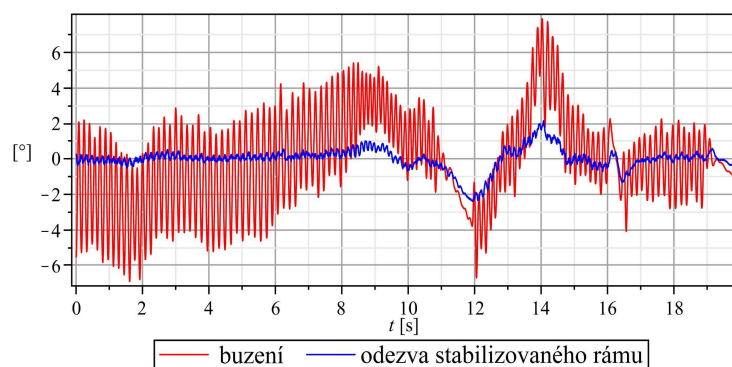


Obr. 51: Experimentální model jednoosého gyroskopického stabilizátoru (pohled zespodu).

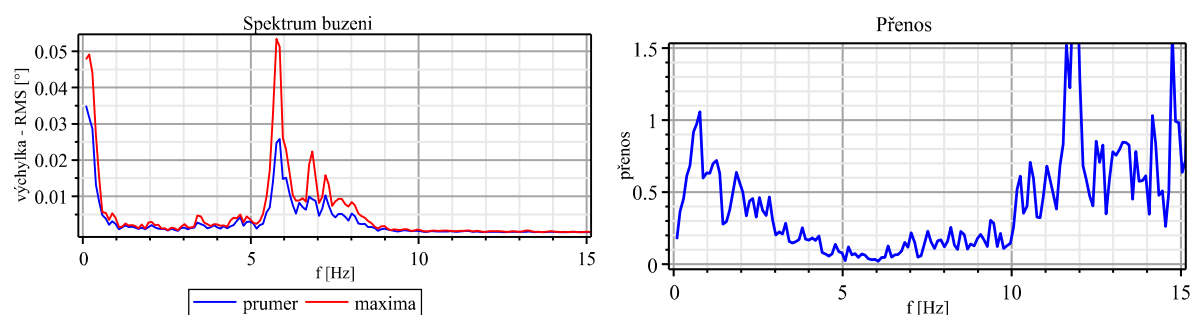
Prováděli jsme experimenty s různou stabilizovanou zátěží při kinematickém buzení rotací základu, většinou stochastickým signálem. Experimenty ukázaly poměrně dobré vibroizolační vlastnosti – viz obr. 52, přenos v pásmu 5–10 Hz byl okolo hodnoty 0,2 (viz obr. 53), při nižších frekvencích se negativně projevovaly pasivní odpory v pohonu korekčního systému (pneumatické motory mají z důvodu utěsnění lopatky

v dutině nemalé pasivní odpory). Do budoucna tedy doporučujeme uvažovat s jiným pohonem korekčního systému, například s elektrickým momentovým motorem.

Určení charakteristiky přenosu kinematického buzení rotací základu na rotaci stabilizovaného rámu je věnována také pasáž v bakalářské práci Petra Cejpy [32 stránky 48-51]. Ve zmíněné práci bylo publikováno srovnání přenosové charakteristiky systému s aktivním řízením a systému s vypnutou regulací. Přenos systému s aktivním řízením lepší než 0,2 byl dokonce v pásmu 2–18 Hz. Poznamenejme, že přenos zobrazený v obr. 53 je možné vzhledem k spektru buzení spolehlivý pouze v pásmu 5–9 Hz.



Obr. 52: Srovnání časového průběhu kinematického buzení základu stabilizátoru s odezvou stabilizovaného rámu.



Obr. 53: Spektrum buzení z obr. 52 a frekvenční přenos stabilizovaného rámu.

## 5.8 Samobuzené kmitání dvojosého gyroskopického stabilizátoru způsobené stejnosměrným otáčením základny

Při řešení samobuzeného kmitání gyroskopického stabilizátoru vycházíme z příkladu odvozeného Černikovem v [33], který provedl řešení jednoosého gyroskopického stabilizátoru (také vyvážený, ve střední poloze, s nulovým vnějším momentem v ose vnějšího a vnitřního rámu kardanova závěsu, s vypnutou korekcí i kompenzací) s výjimkou vnějšího nenulového momentu necoulombovského tření v ose vnějšího rámu. Pak je možno získat pro osu vnitřního rámu první integrál, snížit výsledný řád systému a dovést úlohu do tvaru, který je shodný s pohybovou rovnicí hmoty na pru-

žině, stojící na nekonečném běžícím pásu. Poznamenejme, že podobnou klasickou úlohu samobuzení nelineárního systému analyzoval v roce 1926 van der Pol.

Naší úlohu – „možnost vzniku samobuzených kmitů dvojsoého gyroskopického stabilizátoru“ budeme specifikovat podobně:

- 1) korekční s kompenzační systémy jsou vypnuty,
- 2) gyroskopický stabilizátor je ve střední poloze, rámy a rámečky gyroskopů jsou na sebe vzájemně kolmé a je možnost též vypnout kompenzační systém.
- 3) precesní rámečky nejsou zatíženy žádnými poruchovými momenty,
- 4) v osách kardanových rámu působí pouze momenty suchého necoulombovského tření.

Poznamenejme dále, že uvedený „syntetický“ případ prakticky nemůže nastat, neboť není racionálního důvodu vypínat korekční a odlehčovací systém. Naopak dvojsoý gyroskopický stabilizátor funguje obecně tak, že jakýkoliv poruchový moment (i suché tření) je zaregistrován příslušnou výchylkou precesního rámečku a vytvořeným odlehčovacím momentem na ose příslušného rámu je ihned kompenzován. Stejně jako v [33] je nezbytné řešit dva případy: amplituda ustálených samobuzených kmitů je takové velikosti, že přesáhne, či nepřesáhne, singulární bod necoulombovského tření.

Budeme analyzovat nejprve případ, kdy tření je pouze na ose vnějšího rámu. Následně se pokusíme řešit i případ se třením v ose vnitřního i vnějšího rámu. Strategie řešení bude následující:

- 1) Systém má 4 stupně volnosti pro 4 poziční souřadnice  $\varphi, \psi, \varepsilon, E$ , nepočítáme cyklické souřadnice (vlastní úhly gyroskopu).
- 2) Počáteční podmínky volíme následujícím způsobem: osy kardanových rámu kolmé a v jedné rovině; osy precesních rámečků vzájemně na sebe kolmé, ve stejné rovině jako rámy kardanova závěsu, kolmé k jeho osám; osy rotorů gyroskopů kolmé k rovině rámu kardanova závěsu. Úhly natočení základny stabilizátoru  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ , přičemž  $\vec{\beta}(t) \parallel \dot{\vec{\varphi}}(t)$ .
- 3) Charakteristická rovnice systému je osmého stupně a má obecně čtyři páry komplexně sdružených kořenů (speciálně 4 vlastní frekvence).
- 4) Zavádíme obvyklé označení pro impulsmoment gyroskopu  $J_G \cdot \omega_G = H$ . Podle Merkina dochází k rozdělení frekvencí: 2 frekvence jsou úměrné velkému parametru  $H^1$  – nutační frekvence; 2 frekvence jsou úměrné  $H^{-1}$  – precesní frekvence. S rostoucím  $H$  dochází k výraznému oddělení nutačních a precesních frekvencí.
- 5) Aplikujeme metodu středních hodnot, nebo harmonickou linearizaci (viz [33]) pro nutační frekvenci. Tzn., budeme linearizovat nelineární členy  $\text{sign}(\dot{\varphi})$  a  $\dot{\varphi}^3$  se zvolenou amplitudou nutační frekvence. Při tom využijeme tabulky (viz [33]) pro stanovení koeficientů u nelineárních členů na základě charakteristických bodů nelineární funkce tření.
- 6) Výsledné linearizované tlumení stanovíme pro obě varianty průběhu samobuzeného kmitu:

- a) amplituda samobuzeného kmitu nepřesáhne nulovou hodnotu vzájemné rychlosti,
- b) amplituda samobuzených kmitů je tak velká, že výsledný kmit přesáhne nulovou hodnotu.
- 7) Linearizovaný systém je tvořen čtyřmi lineárními rovnicemi druhého řádu a pro jeho řešení budeme aplikovat van der Polovu metodu pomalu měnících se amplitud, spolu se známými vztahy vyjadřujícími blízkost harmonickému průběhu.
- 8) Všechny členy systému (rámy kardanova závěsu, precesní rámečky a rotory gyroskopů) mají momenty setrvačnosti  $J_{ix} = J_{iy} = J_{iz}$ . To je nutné pro vynulování všech členů matice potenciálních sil.

Za výše uvedených předpokladů jsou linearizované pohybové rovnice

$$\begin{aligned}
 a_{11}\ddot{\varphi} + a_{13}\ddot{\varepsilon} - H\dot{\mathbf{E}} &= M_{T1}, \\
 a_{22}\ddot{\psi} - H\dot{\varepsilon} + a_{24}\ddot{\mathbf{E}} &= M_{T2} = 0, \\
 a_{31}\ddot{\varphi} + H\dot{\psi} + a_{33}\ddot{\varepsilon} &= 0, \\
 H\dot{\varphi} + a_{42}\ddot{\psi} + a_{44}\ddot{\mathbf{E}} &= -H\dot{\beta}_0,
 \end{aligned} \tag{5.118}$$

kde pro koeficienty  $a_{ij}$  za výše uvedených předpokladů platí:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= 2x_g^2(m_g + m_p) + \sum_{i=5}^8 J_{iy} + 2J_e; \\
 a_{22} &= \sum_{i=6}^8 J_{ix} + 2J_e; \\
 a_{33} &= J_{7y} + J_e; \\
 a_{44} &= J_{8x} + J_e; \\
 a_{13} &= a_{31} = J_{7y} + J_e; \\
 a_{24} &= a_{42} = J_{8x} + J_e;
 \end{aligned} \tag{5.119}$$

přičemž vzhledem k  $J_{7y} = J_{8x}$  (precesní rámečky jsou shodné a jejich osy rotace v souřadnicovém systému vnitřního rámu jsou na sebe kolmé) je jistě

$$a_{33} = a_{44} = a_{13} = a_{31} = a_{24} = a_{42} < a_{22}. \tag{5.120}$$

Druhá, třetí a čtvrtá rovnice (5.118) mají první integrály:

$$\begin{aligned}
 a_{22}\dot{\psi} - H\varepsilon + a_{24}\dot{\mathbf{E}} &= C_2, \\
 a_{31}\dot{\varphi} + H\psi + a_{33}\dot{\varepsilon} &= C_3, \\
 H\dot{\varphi} + a_{42}\dot{\psi} + a_{44}\dot{\mathbf{E}} &= -H\dot{\beta}_0.
 \end{aligned} \tag{5.121}$$

Dále budeme předpokládat, že počáteční podmínky jsme volili tak, že integrační konstanty  $C_2$  a  $C_3$  na pravých stranách jsou nulové, což zjednoduší výpočet. Z posledních dvou rovnic pak můžeme odvodit:

$$\begin{aligned}
 \dot{\varepsilon} &= b_{31}\dot{\varphi} + b_{33}\dot{\psi}, \\
 \dot{\mathbf{E}} &= b_{42}\dot{\psi} + b_{44}\dot{\varphi} + b_{44}\dot{\beta}_0
 \end{aligned} \tag{5.122}$$

a

$$\begin{aligned}
 \ddot{\varepsilon} &= b_{31}\ddot{\varphi} + b_{33}\ddot{\psi}, \\
 \ddot{\mathbf{E}} &= b_{42}\ddot{\psi} + b_{44}\ddot{\varphi} + b_{44}\dot{\beta}_0,
 \end{aligned} \tag{5.123}$$

kde jsme zavedli pomocné konstanty

$$b_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{33}}, b_{33} = -\frac{H}{a_{33}}, b_{42} = -\frac{a_{42}}{a_{44}}, b_{44} = -\frac{H}{a_{44}}. \quad (5.124)$$

Uvedené vztahy dosadíme do první a druhé rovnice systému (1), odtud dostáváme:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{\varphi} + a_{13}(b_{31}\ddot{\varphi} + b_{33}\dot{\psi}) - H(b_{42}\dot{\psi} + b_{44}\varphi + b_{44}\beta_0) &= M_{T1}, \\ a_{22}\dot{\psi} + a_{24}(b_{42}\ddot{\psi} + b_{44}\dot{\varphi}) - H(b_{31}\dot{\varphi} + b_{33}\psi + b_{44}\dot{\beta}_0) &= 0. \end{aligned} \quad (5.125)$$

Po zavedení dalších konstant  $c_{ij}$ :

$$\begin{aligned} c_{11}\ddot{\varphi} + c_{12}\dot{\psi} + c_{13}\varphi &= M_{T1} - c_{13}\beta_0, \\ c_{21}\dot{\varphi} + c_{22}\ddot{\psi} + c_{23}\psi &= -H\dot{\beta}_0, \end{aligned} \quad (5.126)$$

přičemž

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11} + a_{13}b_{31}, & c_{12} &= a_{13}b_{33} - Hb_{42}, & c_{13} &= -Hb_{44}, \\ c_{21} &= a_{24}b_{44} - Hb_{31}, & c_{22} &= a_{22} + a_{24}b_{42}, & c_{23} &= -Hb_{33}. \end{aligned} \quad (5.127)$$

A po dosazení postupně za  $b_{ij}$  z (5.124) a  $a_{ij}$  z (5.119) dostáváme

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2x_g^2(m_g + m_p) + J_{5y} + J_{6y} + J_e; \\ c_{12} &= 0; \\ c_{13} &= \frac{H^2}{J_{8x} + J_e}; \\ c_{21} &= 0; \\ c_{22} &= J_e + J_{7x} + J_{6x}; \\ c_{23} &= \frac{H^2}{J_{7y} + J_e}. \end{aligned} \quad (5.128)$$

Vlivem symetrií systému jsou tedy konstanty  $c_{12} = c_{21} = 0$ , rovnice (5.126) se tedy ještě zjednoduší

$$\begin{aligned} c_{11}\ddot{\varphi} + c_{13}\varphi &= M_{T1} - c_{13}\beta_0, \\ c_{22}\ddot{\psi} + c_{23}\psi &= -H\dot{\beta}_0. \end{aligned} \quad (5.129)$$

Charakteristická rovnice tohoto systému je

$$\det \begin{bmatrix} c_{11}\lambda^2 + c_{13} & 0 \\ 0 & c_{22}\lambda^2 + c_{23} \end{bmatrix} = 0, \quad (5.130)$$

která je čtvrtého stupně – bikvadratická a jejíž řešení je

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm i\omega_1 = \pm i\sqrt{\frac{c_{13}}{c_{11}}} = \pm i\sqrt{\frac{H^2}{(2x_g^2(m_g + m_p) + J_{5y} + J_{6y} + J_{8y} + J_e)(J_{8x} + J_e)}}, \\ \lambda_{2,3} &= \pm i\omega_2 = \pm i\sqrt{\frac{c_{23}}{c_{22}}} = \pm i\sqrt{\frac{H^2}{(J_{6x} + J_{8y} + J_e)(J_{8x} + J_e)}}. \end{aligned} \quad (5.131)$$

V následujícím rozboru budeme aplikovat na analyzovanou nelineární funkci metodu harmonické rovnováhy za účelem linearizace nelineárních členů. Pro tento účel zavedeme absolutní souřadnici pro výchylku vnějšího rámu

$$\gamma = \beta_0 + \varphi \quad (5.132)$$



kde  $\varphi$  je úhel mezi rovinou vnějšího rámu a základnou,  $\beta_0$  je úhel natočení základny vůči absolutnímu systému okolo osy rovnoběžné, nebo totožné s osou rotace vnějšího rámu v základně. Zmíněnou transformaci aplikujeme na rovnice (5.126) s výsledkem:

$$\begin{aligned} c_{11}\ddot{\gamma} + c_{13}\gamma &= c_{11}\ddot{\beta}_0 + M_{T1}(\dot{\varphi}), \\ c_{22}\ddot{\psi} + c_{23}\psi &= -H\dot{\beta}_0. \end{aligned} \quad (5.133)$$

Tím jsme obdrželi rovnice shodné s Černikovem [33]. Je tedy zřejmé, že případ dvojosého gyroskopického stabilizátoru bez korekčních, případně kompenzačních zpětných vazeb, se neliší od stabilizátoru jednoosého. Absence sil radiálních korekcí způsobuje nulovou silovou vazbu mezi pohybem precesního rámečku gyroskopu zajišťujícího stabilizaci vnějšího rámu kardanova závěsu a vnitřním rámem. Je patrné, že řešení samobuzených kmitů dvojosého stabilizátoru vede opět na známé rovnice – Černikov [33], Bronovets, Zhuravlev [34].

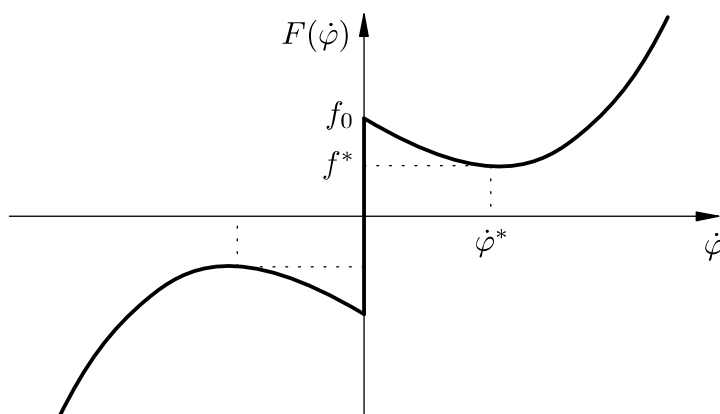
### 5.8.1 Náhrada analytického vyjádření necoulombovského tření metodou harmonické linearizace

Při parametrizování závislosti necoulombovského tření na skluzové rychlosti vycházíme z modelu (viz Černikov [33]) se zadanými třemi charakteristickými hodnotami (statické tření  $f_0$ , a minimum dynamického tření  $f^*$  a  $\dot{\varphi}^*$  – viz obr. 54). Tento silně nelineární průběh třecí síly Černikov popisuje následující funkcí:

$$M_T(\dot{\varphi}) = f_0 [\text{sign } \dot{\varphi} - d_1\dot{\varphi} + d_3\dot{\varphi}^3] \quad (5.134)$$

kde  $\dot{\varphi}$  je relativní rychlost těles, mezi kterými dochází ke tření a konstanty  $d_1$  a  $d_3$  jsou určeny na základě výše uvedených charakteristických parametrů:

$$d_1 = \frac{3 f_0 - f^*}{2 f_0 \cdot \dot{\varphi}^*}; \quad d_3 = \frac{1 f_0 - f^*}{2 f_0 \cdot (\dot{\varphi}^*)^3}. \quad (5.135)$$



Obr. 54: Charakteristika suchého necoulombovského tření (zdroj Černikov [33])

Tab. 4: Hodnoty  $d_1$  a  $d_3$  pro různé parametry charakteristiky necoulombovského tření (zdroj Černíkov [33])

$f^* = 0,6 f_0$			$f^* = 0,8 f_0$			$f^* = 0,9 f_0$		
$\dot{\varphi}^*$	$d_1$	$d_3$	$\dot{\varphi}^*$	$d_1$	$d_3$	$\dot{\varphi}^*$	$d_1$	$d_3$
$10^{-3}$	600	$2 \cdot 10^8$	$10^{-3}$	300	$10^8$	$10^{-3}$	150	$5 \cdot 10^7$
$10^{-2}$	60	$2 \cdot 10^5$	$10^{-2}$	30	$10^5$	$10^{-2}$	15	$5 \cdot 10^4$
$10^{-1}$	6,0	200	$10^{-1}$	3	$10^2$	$10^{-1}$	1,5	50
1	0,6	0,2	1	0,3	0,1	1	0,15	0,05

Pro úhlovou rychlost vzájemného pohybu rámu a podstavce platí

$$\dot{\varphi} = \dot{\gamma} - \dot{\beta}_0. \quad (5.136)$$

Absolutní výchylku systému (5.133) hledíme ve tvaru

$$\dot{\gamma} = \gamma_0 \sin \omega t, \quad \gamma_0 = a_0 \omega, \quad (5.137)$$

s amplitudou  $a_0$  a frekvencí  $\omega$ . Přičemž platí

$$\dot{\varphi} = a_0 \omega \sin \omega t - \dot{\beta}_0. \quad (5.138)$$

Nelineární funkce ve vztahu (5.134) nahradíme metodou harmonické linearizace (stejně jako Černíkov v [33])

$$\text{sign}(\dot{\gamma} - \dot{\beta}_0) = q_1(\gamma_0, \dot{\beta}_0) \cdot (\dot{\gamma} - \dot{\beta}_0), \quad (5.139)$$

$$(\dot{\gamma} - \dot{\beta}_0)^3 = q_3(\gamma_0, \dot{\beta}_0) \cdot (\dot{\gamma} - \dot{\beta}_0), \quad (5.140)$$

kde

$$q_1(\gamma_0, \dot{\beta}_0) = \frac{1}{\pi \gamma_0} \int_0^{2\pi} \text{sign}(\gamma_0 \sin \omega t - \dot{\beta}_0) \sin \omega t \, d(\omega t), \quad (5.141)$$

$$q_3(\gamma_0, \dot{\beta}_0) = \frac{1}{\pi \gamma_0} \int_0^{2\pi} (\gamma_0 \sin \omega t - \dot{\beta}_0)^3 \sin \omega t \, d(\omega t). \quad (5.142)$$

Po provedení integrace

$$q_1(\gamma_0, \dot{\beta}_0) = \frac{4}{\pi \gamma_0} \sqrt{1 - \frac{\dot{\beta}_0^2}{\gamma_0^2}}, \quad (5.143)$$

$$q_3(\gamma_0, \dot{\beta}_0) = 3 \left( \frac{\gamma_0^2}{4} + \dot{\beta}_0^2 \right). \quad (5.144)$$

Po dosazení do transformovaných (5.133) pohybových rovnic obdržíme

$$\begin{aligned} c_{11} \ddot{\gamma} + c_{13} \gamma &= c_{11} \ddot{\beta}_0 + f_0 \cdot (q_1 - d_1 + d_3 q_3) (\dot{\gamma} - \dot{\beta}_0), \\ c_{22} \ddot{\psi} + c_{23} \psi &= -H \dot{\beta}_0, \end{aligned} \quad (5.145)$$

a po přepsání obdržíme

$$\begin{aligned} c_{11} \ddot{\gamma} - f_0 (q_1 - d_1 + d_3 q_3) \dot{\gamma} + c_{13} \gamma &= c_{11} \ddot{\beta}_0 + f_0 (q_1 - d_1 + d_3 q_3) \dot{\beta}_0, \\ c_{22} \ddot{\psi} + c_{23} \psi &= -H \dot{\beta}_0. \end{aligned} \quad (5.146)$$

Princip aplikace metody harmonické linearizace spočívá v následujících krocích:

1. Frekvenci hledaných samobuzených kmitů  $\omega_0$  položíme do hodnoty jedné z jeho vlastních frekvencí  $\omega_1, \omega_2$ .

2. Amplitudu samobuzených kmitů  $\gamma_0$  stanovíme z podmínky, že výsledný linealizovaný útlum ve vztahu (5.146)  $d_\Sigma = q_1 - d_1 + d_3 q_3 = 0$ .

### 5.8.2 Amplitudy samobuzených kmitů

Nyní je potřeba rozlišit dva případy samobuzených kmitů:

- A. Samobuzené kmity nedosáhnou do singulárního bodu charakteristiky necoulombovského tření.  
 B. Samobuzené kmity přesáhnou singulární bod.

#### **Případ A:**

V tomto případě je stále

$$\text{sign}(\dot{\varphi} - \dot{\beta}_0) = 1 \quad (5.147)$$

původní nelineární charakteristika suchého tření pak obsahuje jediný nelineární člen – kubický. Potom amplitudu samobuzených kmitů určíme z požadavku

$$-d_1 + d_3 q_3(a_0, \beta_0) = 0, \quad (5.148)$$

kterou s pomocí (5.135) a (5.144) upravíme

$$\frac{3 f_0 - f^*}{2 f_0 \cdot \dot{\varphi}^*} = \frac{3 f_0 - f^*}{2 f_0 \cdot (\dot{\varphi}^*)^3} \left( \frac{a_0^2 \omega^2}{4} + \beta_0^2 \right), \quad (5.149)$$

tedy

$$a_0 = \frac{2}{\omega} \sqrt{(\dot{\varphi}^*)^2 - \beta_0^2}. \quad (5.150)$$

Aby  $a_0$  bylo reálné, musí platit

$$\dot{\beta}_0 \leq \dot{\varphi}^*, \quad (5.151)$$

neboli pro periodické řešení je nezbytné, aby úhlová rychlost základny byla menší než relativní skluzová rychlost.

#### **Případ B:**

V druhém případě vycházíme z předpokladu, že úhlová rychlost základny je tak malá, že dojde k přechodu singulárního bodu. Pokud ovšem je skluzová rychlost malá, můžeme zanedbat kubický člen charakteristiky necoulombovského tření a amplitudu samobuzených kmitů hledáme anulováním

$$q_1(a_0 \omega, \dot{\beta}_0) - d_1 = 0, \quad (5.152)$$

což vede na bikvadratickou rovnici pro  $a_0 \omega$ , jejíž řešení je

$$a_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi d_1 \omega} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\pi d_1}{2}\right)^2 \dot{\beta}_0^2}}, \quad (5.153)$$

aby tento vztah měl reálnou hodnotu, musí platit

$$|\dot{\beta}_0| < \frac{2}{\pi d_1}. \quad (5.154)$$

Závěrem uveďme, že jsme se omezili na takzvané semitriviální (tj. jednofrekvenční) řešení tedy že frekvence samobuzených kmitů je totožná, resp. velmi blízká jedné

z vlastních frekvencí  $\omega_1, \omega_2$ . Znamená to, že právě naznačený výpočet provedeme pro oba případy  $\omega = \omega_i, i = 1..2$ . Uvedme dále, že jak v prvním případě, kdy nedochází k překmitu přes singulární bod, tak i v druhém případě má charakteristická rovnice pro hledanou frekvenci vlastních kmitů rovněž dvě řešení.

### 5.8.3 Rovnovážná poloha systému

Nakonec určíme rovnovážnou polohu systému se suchým třením v ose kardanova rámu při rotaci podstavce konstantní úhlovou rychlostí  $\dot{\beta}_0$ . V rovnováze je systém, pokud  $\ddot{\gamma} = \ddot{\psi} = 0$  a  $\dot{\gamma} = \dot{\psi} = 0$ ,  $\gamma = \gamma_0 = konst.$  a tedy  $\varphi_0 = \gamma_0 - \beta_0$ . Z transformovaných pohybových rovnic (5.133) vyplývá

$$\begin{aligned} c_{13}\gamma_0 &= c_{11}\ddot{\beta}_0 + M_{T1}(\dot{\varphi}_0), \\ c_{23}\psi_0 &= -H\dot{\beta}_0, \end{aligned} \quad (5.155)$$

protože  $\dot{\beta}_0 = konst.$  platí

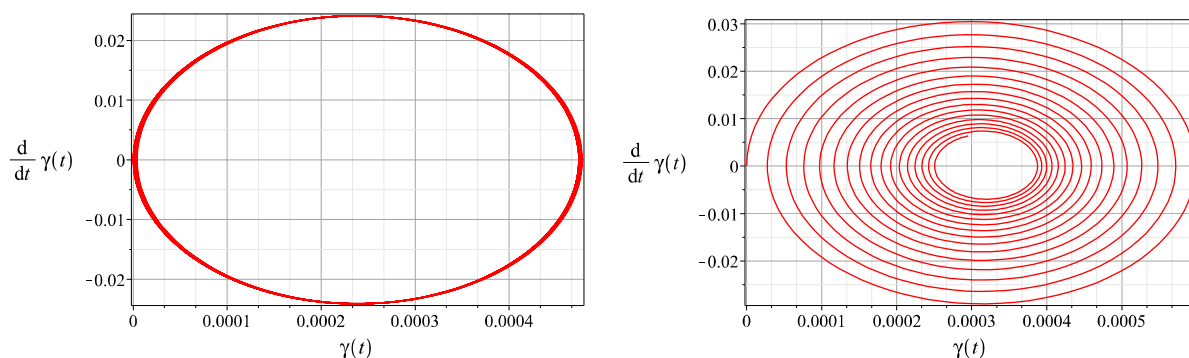
$$\gamma_0 = \frac{M_{T1}(\dot{\varphi} = \dot{\beta}_0)}{c_{13}} = \frac{(J_{8x} + J_e) \cdot M_{T1}(\dot{\beta}_0)}{H^2}. \quad (5.156)$$

### 5.8.4 Simulace pohybu systému se suchým třením v ose kardanova závěsu

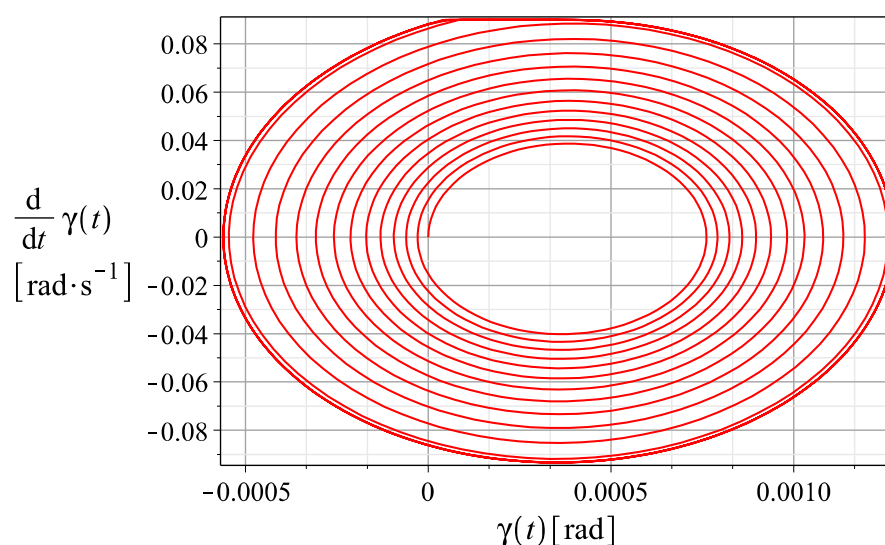
Pro numerické simulace pohybu dvojsoého gyroskopického stabilizátoru jsme použili odvozený linearizovaný model vibroizolačního systému s gyroskopickým stabilizátorem. Pro deaktivaci postačuje vynechat první řádek a sloupec všech matic linearizovaných pohybových rovnic, první řádek vektorů buzení a dále vynulovat svislé translační buzení ( $\zeta(t) = 0$ ), rovnovážnou výchylku ramen paralelogramu ( $\vartheta_0 = 0$ ) a délku ramen paralelogramu ( $R = 0$ ). Tím je systém překonfigurován na dvojsoý gyroskopický stabilizátor na pohybující se základně.

Předpokládejme nyní necoulombovské suché tření v ose prvního rámu kardanova závěsu s parametry dle tab. 4 pro  $f^* = 0,6f_0$ ,  $\dot{\varphi}^* = 1$ , přičemž  $f_0 = 90 \text{ Nm}$  (tuto poměrně velkou hodnou volíme z důvodu názornějšího zobrazení fázových portrétů). Na obr. 55 jsou zobrazeny fázové trajektorie výchylky prvního rámu kardanova závěsu při úhlové rychlosti základu právě rovné skluzové rychlosti (vlevo), kdy klesající část charakteristiky suchého tření je v rovnováze s rostoucí – kubickou částí, a při  $\dot{\beta}_0 > \dot{\varphi}^*$  (vpravo), kdy je systém asymptoticky stabilní.

Při rychlosti rotace základu  $\dot{\beta}_0 < \dot{\varphi}^*$  dochází k postupnému zvyšování amplitudy samobuzeného kmitání prvního rámu kardanova závěsu, růst je omezen limitním cyklem, při němž se skluzová rychlost přibližuje k nule – viz obr. 56. V tomto případě je energie do systému přiváděna prostřednictvím klesající části charakteristiky suchého tření, která v mechanickém systému představuje tzv. zrychlující sílu (viz kapitola 1.2 na str. 14).



Obr. 55: Fázové trajektorie výchylky prvního rámu kardanova závěsu v inerciálním systému při úhlové rychlosti základu  $\dot{\beta}_0 = \dot{\varphi}^*$  (vlevo);  $\dot{\beta}_0 > \dot{\varphi}^*$  (vpravo).

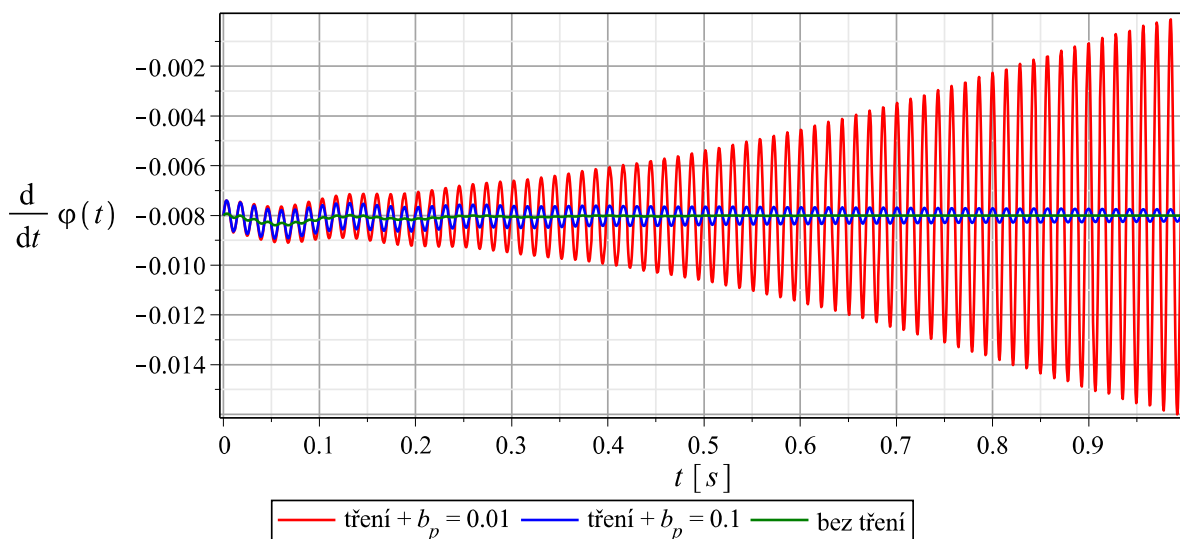


Obr. 56: Fázová trajektorie výchylky prvního rámu kardanova závěsu v inerciálním systému při úhlové rychlosti základu  $\dot{\beta}_0 < \dot{\varphi}^*$ .

Nakonec ukažme vliv necoulombovského suchého tření v jednoosém stabilizátoru s konzervativními, disipativními a silami radiálních korekcí. Uvažujme model jednoosého gyroskopického stabilizátoru s parametry horního rámu kardanova závěsu uvažovaného vibroizolačního systému sanitního lehátka. Korekční a kompenzační systémy nastavme dle kapitoly 5.4.1. Uvažujme rovněž malé tlumení v ose precesního rámečku gyroskopu. Aplikujme necoulombovské tření s charakteristikou (5.134) s parametry dle tab. 4 pro  $f^* = 0,6f_0$ ,  $\dot{\varphi}^* = 10^{-2}$ ,  $f_0 = 1,65 \text{ Nm}$  v ose stabilizovaného rámu a systém podrobme kinematickému buzení rotací základny konstantní úhlovou rychlostí  $\dot{\alpha} < \dot{\varphi}^*$ .

Na obr. 57 jsou zobrazeny časové průběhy úhlové rychlosti stabilizovaného rámu vůči základně při dvou různých hodnotách tlumení v ose precesního rámečku  $b_p$  a při absenci tření v ose stabilizovaného rámu. Úhlovou rychlost jsme zvolili tak aby se systém pohyboval v oblasti nestabilního samobuzeného kmitání. Je dobře patrné, že při malém tlumení v precesní ose gyroskopu dochází k růstu amplitud samobuzeného kmitání až k limitnímu cyklu (červená křivka v obr. 57), kdy se v maximech skluzová rychlost (relativní rychlost stabilizovaného rámu vůči základně) přibližuje k nule.

Zdůrazněme fakt, že tlumení v precesní ose bylo v tomto případě nastavené velmi nízké – v kapitole 5.4.1 jsme při nastavování korekčního a kompenzačního systému horního rámu kardanova závěsu uvažovali s hodnotou  $b_p = 0,1 \text{ Nms rad}^{-1}$  a v kapitole 5.4.2 při nastavení stabilizace spodního rámu dokonce hodnotu  $b_p = 5 \text{ Nms rad}^{-1}$ . Z obr. 57 (modrá křivka) je tedy zřejmé, že při dostatečném tlumení v ose precesního rámečku samobuzené kmity buď nenastanou, nebo dojde k jejich rychlému utlumení. Tímto lze tedy problém samobuzeného kmitání vlivem tření v osách kardanových rámu uzavřít.



Obr. 57: Samobuzené kmitání jednoosého stabilizátoru.

## Závěr

V předkládané práci, která se zabývá možností zlepšení vibroizolace ležícího pacienta při transportu sanitním vozem užitím dvojosého gyroskopického stabilizátoru, jsme v prvních čtyřech kapitolách uvedli shrnutí problematiky gyroskopické stabilizace a modelování gyroskopických systémů. Hlavní částí práce je pak analýza vibroizolačního systému se třemi stupni volnosti s dvojosým gyroskopickým stabilizátorem.

Na základě provedených analýz jsme postupně určili hodnotu impulsmomentu gyroskopů, respektive rychlost rotace uvažovaných gyroskopů, nutnou pro zajištění dobré vibroizolace sanitního lehátka s pacientem při buzení v předpokládaném pásmu budících frekvencí 1–11 Hz. V pasáži věnované nastavení parametrů kompenzačního a korekčního systému jsme kvantifikovali předpokládaná zrychlení sanitního vozidla v horizontálních směrech, při nichž by navrhovaný vibroizolační systém měl stabilizovat natočení sanitního lehátka, tak aby směr kolmice k rovině lehátka byl totožný s výslednicí zrychlení, tzv. zdánlivou vertikálou. Na základě definovaných časových průběhů zrychlení v příčném a podélném směru jsme navrhli postup optimalizace parametrů zpětných vazeb korekčního a kompenzačního systému dvojosého gyroskopického stabilizátoru pro zajištění požadovaných odezev stabilizovaného lehátka. A na přenosových frekvenčních charakteristikách vibroizolačního systému jsme ukázali podstatné zlepšení vibroizolace ve srovnání s pasivním systémem bez gyroskopické stabilizace. Zlepšení je patrné zejména v pásmu nízkých frekvencí, kdy se pozitivně projevuje schopnost aktivní stabilizace polohy lehátka s pacientem taková, že výsledné zrychlení z pohledu pacienta působí téměř kolmo k rovině lehátka.

Dále jsme navrhli a analyzovali náhradu kompenzačního momentového motoru v podobě aktivního řízení pneumatických pružin odpružení kardanova závěsu sanitního lehátka. Na základě simulací jednoosého gyroskopického stabilizátoru s modelem řízených pneumatických pružin jsme došli k závěru, že navržená náhrada kompenzačního momentového motoru je možná a funkční. Experimentální ověření na zmenšeném modelu jednoosého stabilizátoru tyto závěry potvrdilo.

V závěru práce jsme se zaměřili na možnost vzniku samobuzených kmitů dvojosého gyroskopického stabilizátoru způsobených necoulombovským suchým třením v osách kardanova závěsu, při tom jsme vycházeli z citované práce, která analyzovala možnost samobuzených oscilací jednoosého stabilizátoru. Analýzou linearizovaných

pohybových rovnic dvojosého stabilizátoru jsme možnost vzniku samobuzeného kmitání dvojosého gyroskopického stabilizátoru potvrdili. Nakonec jsme ukázali, že samobuzené kmity mohou vzniknout i v případě skutečného, nikoliv jen „syntetického“ systému (u něhož je deaktivován korekční a kompenzační systém a jsou záměrně anulovány konzervativní a disipativní síly). To, že mohou nastat i u skutečného stabilizátoru je velmi cenný poznatek. Zároveň jsme ukázali, že problém samobuzeného kmitání je ve značné míře eliminován působením viskózního tlumení v osách precesních rámečků.

Pro budoucí praktické využití popisovaného vibroizolačního systému je nezbytné vyvinout gyroskopy s vhodným pohonem dosahující požadovaného momentu hybnosti (impulsmomentu), který jsme v této práci identifikovali. Dále doporučujeme navržení konstrukce kardanova závěsu, která by umožnila větší rozsah pohybu, zejména v rotaci okolo příčné osy, za účelem rozšíření rozsahu kompenzace horizontálních zrychlení. Další oblastí, kterou je potřeba vyřešit je vývoj vhodného řídicího systému, jehož požadované vlastnosti jsme rovněž v této práci nastínili.



# Reference

- [1] **Thomson, William and Tait, Pater Guthrie.** *Treatise on Natural Philosophy, Svazek 1, Nové vydání.* Cambridge : University Press, 1888.
- [2] **Merkin, D. R.** *Introduction to the Theory of Stability.* [trans.] Andrei L. Smirnov and Fred F. Afagh. New York : Springer-Verlag, 1997. ISBN: 978-1-4612-4046-4.
- [3] **Pelpor, D. S.** *Giroskopicheskie systemy, projektirovanie giroskopicheskich sistem I. i II.* Moskva : Vyshaia skhola, 1977.
- [4] **Arnold, Ronald N. and Maudner, Leonard.** *Gyrodynamics and its Engineering Applications .* New York : Academic Press Inc., 1961.
- [5] **C-1, kapotované jednostopé vozidlo.** [online] Lit Motors : Lit Motors corp., ©2018 [cit. 10.8.2018]. Dostupné z: <http://litmotors.com/c1/>.
- [6] **Spry, Stephen C. and Girard, Anouck.** Gyroscopic Stabilization of Unstable Vehicles: configurations, dynamics and control. *International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility.* May 2008, Vol. 46, 1, pp. 247-260. ISSN 0042-3114.
- [7] **Repnikov, A. B., Sačkov, G. P. a Černomorskij, A. I.** *Giroskopicheskie Sistemy.* Moskva : Mashinostroenie, 1983. str. 319.
- [8] **Šklíba, J.** *About a Precedence of the Tandem of Opposite Running Gyroscopes.* [editor] Vladimír Fuis a Michal Pásek. Engineering Mechanics 2008. Svatka : Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Cech Academy of Sciences, 2008. Sv. 14, stránky 951-955. ISSN 1805-8256.
- [9] **Ryotaro, Ozawa and Masaki, Takahashi.** Agile Attitude Control and Singularity Avoidance/Escape by the SDRE Method Using a Biased State-Dependent Weighting Matrix. *Applied Sciences.* januray 2019, Vol. 8, 1. ISSN 2076-3417.
- [10] **Bodner, V. A. a Kozlov, M. S.** *Stabilizacia letatelnych aparatov i avtopiloty.* Moskva : Oborongis, 1961.
- [11] **Merkin, D. R.** *Giroskopicheskie systemy.* Leningrad : Mashinostroenie, 1974.
- [12] **Juliš, Karel, Brepta, Rudolf a kol.** *Mecjanika II. díl, Dynamika.* Praha : SNTL, 1987.
- [13] **Šklíba, J., Škoda, J. a Sivčák, M.** *Comparison of Attitudes to Solve a Vibration-isolation System with a Gyroscopic Stabilization.* IFToMM 2011 proceedings. Guanajuato : Curran, 2011. ISBN: 978-1-62993-077-0.
- [14] **Wrigley, W., Hollister, W. M. a Denhard, W. G.** *Gyroscopic Theory, Design, and Instrumentation.* Cambridge (Massachusetts) : The M. I. T. Press, 1969. ISBN 978-0-2622-3037-7.
- [15] **iSensor MEMS Inertial Measurement Units.** [online] : Analog Devices Inc., ©2018. Dostupné z: <https://cz.mouser.com/new/Analog-Devices/adi-isensor-mems-imu/>.
- [16] **Andronov, V. V. a Zhuravlev, V. F.** *Sukhoje Treniye v Zadachakh Mekhaniki.* Moskva - Izhevsk : Nauchno-izdatelskiy tsentr, 2010. [Rusky]. ISBN 978-5-93972-856-0.
- [17] **Lestev, A. M.** *Nelineinye giroskopicheskie systemy.* Leningrad : Izd-vo Lenin-gradskogo universiteta, 1983.
- [18] **Šklíba, J.** *About a Possibility of a Gyroscopic Stabilisation of the Vibroisolation System.* Engineering Mechanics. Svatka : Institute of Thermomechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, v.v.i., Prague, 2007. Sv. Vol. 13. ISSN 1805-8256.
- [19] **Šklíba, J. a Škoda, J.** *About the latest possibility of stiffness reduction of ambulance couch.* Journal of Vibroengineering. Klaipeda : JVE International Ltd., 2009. Sv. 11. ISSN 1392-8716.

- [20] **Prokop, Jan.** *Vibroizolační systémy s více stupni volnosti*. Liberec : Technická univerzita v Liberci, 2005. Disertační práce. Vedoucí práce Jan Šklíba.
- [21] **Sivčák, Michal.** *Dynamika vibroizolačního systému s více stupni volnosti*. Liberec : Technická univerzita v Liberci, 2009. Disertační práce. Vedoucí práce Jan Šklíba.
- [22] **Dunlop.** DUNLOP Air Bellows Catalogue. 2018.
- [23] **Brepta, R., Půst, L. a Turek, F.** *Mechanické kmitání*. Praha : Sobotáles, 1994. ISBN 80-901684-8-5.
- [24] **Merkin, D. R.** *Giroskopicheskie systemy*. Moskva : Gosudarstvenoe izdatelstvo techniko-teoreticheskoj literatury, 1956.
- [25] **Lakhadanov, V. M.** On stabilization of potential systems. *Journal of Applied Mathematics and mechanics*. 1975, Vol. 39, 1, pp. 53-58.
- [26] **Šklíba, J., Škoda, J. and Sivčák, M.** *Choice of Parameters for Gyroscopic Stabilizer of Vibration-isolation System*. Proceedings of the 3rd International conference on Dynamics, Vibration and Control 2010. Beijing : Chinese Society of Theoretical and Applied Mechanics, 2010.
- [27] **Xing, Y.** *An Electronic Spirit Level Tilt Sensor*. Faculty of Applied Sciences. Delft : TU Delft, 1989. doctoral thesis. promotor Middelhoek, S..
- [28] **Holcner, Petr.** *Pozemní komunikace I., Směrové řešení pozemních komunikací*. Brno : Vysoké učení technické v Brně, 2005. Dostupné z: <https://www.fce.vutbr.cz/pko/holcner.p/bm01/opora/m02.pdf>.
- [29] **Volkswagen.** Transporter. *Technická data platná pro modelový rok 2018*. 2018. [dostupné z] [https://www.vw-uzitkove.cz/media/Kwc\\_Basic\\_DownloadTag\\_Component/4592\\_brochures-16547-child-download-downloadTag/default/53a5e595/1513789722/transporter18-techdata.pdf](https://www.vw-uzitkove.cz/media/Kwc_Basic_DownloadTag_Component/4592_brochures-16547-child-download-downloadTag/default/53a5e595/1513789722/transporter18-techdata.pdf).
- [30] **EHK OSN.** Předpis Evropské hospodářské komise Organizace spojených národů č.13-H. *Jednotná ustanovení pro schvalování osobních automobilů z hlediska brzdění [2015/2364]*. 2015.
- [31] **Vlk, František.** *Dynamika motorových vozidel*. Brno : Nakladatelství a vydavatelství VLK, 2000. ISBN 80-238-5273-6.
- [32] **Cejpa, Petr.** *Identifikace dynamických vlastností gyroskopického stabilizátoru*. Liberec : Technická univerzita v Liberci, 2016. Bakalářská práce. Vedoucí práce Michal Sivčák.
- [33] **Černikov, S. A.** *Self-Oscillation of a Gyroscopic System with Dry Friction in Gimbal Axes During Angular Motion of the Support*. Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Instrument Engineering Moscow : Bauman University Publishing House, 2014, Sv. 95, 2, , stránky 28-39. ISSN 0236-3933.
- [34] **Bronovec, M. A. and Zhuravlev, V. F.** On self-excited vibrations in friction force measurement systems. *Mechanics of Solids*. May 2012, Vol. 47, 3, pp. 261-268. ISSN 1934-7936.
- [35] **Slavík, Jaromír, Stejskal, Vladimír a Zeman, Vladimír.** *Základy dynamiky strojů*. Praha : Vydavatelství ČVUT, 1997. ISBN 80-01-01622-6.

## Vlastní publikace autora

- [1] Šklíba, J., a další. *Radiální korekce gyroskopického stabilizátoru*. Proceedings of Interaction and Feedbacks 2009. Prague : Institute of Thermomechanics Academy of Science Czech Republic, 2009. ISBN 978-80-87012-23-9.
- [2] Šklíba, J. and Škoda, J. About the latest possibility of stiffness reduction of ambulance couch. *Journal of Vibroengineering*. September 2009, Vol. 11, 3. ISSN 1392-8716.
- [3] Sivčák, M., Denk, M. and Škoda, J. *Verification of Mathematical model of the Gyroscopic Stabilizer*. Computational Mechanics 2009 Plzeň : Západočeská univerzita v Plzni, 2009. ISBN 978-80-7043-824-4.
- [4] Sivčák, M. and Škoda, J. *Radial Correction Coefficients of Gyroscopic Stabilizer*. Engineering Mechanics 2009. Svratka : Institute of Thermomechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, 2010. Vol. 16. ISBN 978-80-87012-26-0.
- [5] Sivčák, M. and Škoda, J. Radial Correction Controllers of Gyroscopic Stabilizer. *Journal of Vibroengineering*. 2010, Vol. 12, 3. ISSN 1392-8716.
- [6] Šklíba, J. and Škoda, J. *About Dynamics Problems of the Vibroisolation System with the Gyroscopic Stabilizer*. Mechatronic Systems and Materials: Mechatronic Systems and Robotics Vilnius : Trans Tech Publications, 2010, 164, , pp. 116-120. ISBN 978-3-908451-84-6.
- [7] Šklíba, J., Škoda, J. and Sivčák, M. *Choice of Parameters for Gyroscopic Stabilizer of Vibration-isolation System*. Proceedings of the 3rd International conference on Dynamics, Vibration and Control 2010. Beijing : Chinese Society of Theoretical and Applied Mechanics, 2010.
- [8] Škoda, Jan. *Using of Chirp Signals for Resonance Determination*. Applied Mechanics 2010 Liberec : Technická univerzita v Liberci, 2010. ISBN 978-80-7372-586-0.
- [9] Šklíba, J., Sivčák, M. and Škoda, J. *Modal Analysis of Gyroscopic System with 5 Degrees of Freedom*. Computational Mechanics 2010. Plzeň : Západočeská univerzita v Plzni, 2010. ISBN 978-80-7043-919-7.
- [10] Sivčák, M. and Škoda, J. *Substitution of Gyroscopic Stabilizer Correction Motor by Active Control of Pneumatic Spring*. Vibration problems ICOVP 2011. Prague : Technical University of Liberec, 2011. ISSN 0930-8989.
- [11] Šklíba, J., Škoda, J. and Sivčák, M. *Comparison of Attitudes to Solve a Vibration-isolation System with a Gyroscopic Stabilization*. Guanajuato : Curran, 2011. ISBN 978-1-62993-077-0.
- [12] Sivčák, M. and Škoda, J. Verification of Active Controlled Air Spring Model. *Journal of Vibroengineering*. 2011, Vol. 13, 4. ISSN 1392-8716.
- [13] Šimek, J., et al. *Power Gyroscopes of Stabilizing System*. Prague : Association of Engineering Mechanics, 2011, Vol. 18, 3/4, , pp. 259-267. ISSN 1802-1484.
- [14] Šklíba, J. and Škoda, J. *Specialities of the Control of Elastic Bearing of the Gyroscopic Stabilizer*. Dynamics of Machines 2011. Prague : Institute of Thermomechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, 2011. ISBN 978-80-87012-31-4.
- [15] Škoda, Jan. *Model of Pneumatic Drive for Gyroscopic Stabilizer Compensation System*. Applied Mechanics 2011 Brno : Ústav fyziky materiálů AV ČR, 2011. ISBN 978-80-87434-03-1.
- [16] Henyš, P. and Škoda, J. *Identification of the mechanical properties of the cervical implant material*. Proceedings of the 50th Annual Conference on Experimental Stress Analysis. Prague : Czech Technical University in Prague, 2012. ISBN 978-80-01-05060-6.

- [17] **Šklíba, Sivčák and Škoda.** *Radial Compenzation of Sprunged Gyroscopic Stabilizer.* Dynamics of Machines 2012. Prague : Institute of Thermomechanics, Academy of Science of the Czech Republic, 2012. ISBN 978-80-87012-39-0.
- [18] **Škoda, J.** Effects of Friction in the System of Vibration-isolation Platform with Gyroscopic Stabilizer. *Journal of Vibroengineering.* 2012, Vol. 14, 4. ISSN 1392-8716.
- [19] **Škoda, J. and Šklíba, J.** *Problem of Hard Nonlinearities in Gyroscopic System.* Dynamics of Machines 2013. Prague : Institute of Thermomechanics, Academy of Science of the Czech Republic, 2013. ISBN 978-80-87012-44-4.
- [20] **Škoda, Jan and Šklíba, Jan.** Vibration-isolation System with Gyroscopic Stabilizer. *Journal of Vibrational Engineering & Technologies.* [ed.] J. S. Rao. 2015, Vol. 3, 2, pp. 211-221. ISSN 2321-3558.
- [21] **Škoda, J. and Šklíba, J.** *Non-linear Damping in the System of Two-axis Gyroscopic Stabilizer.* Engineering Mechanics 2018. Prague : Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Cech Academy of Sciences, 2018. ISBN 978-80-86246-88-8.
- [22] **Škoda, Jan and Šklíba, Jan.** *Viscous Friction in the Axes of Gyroscopic Stabilizer.* DYMAMESI 2018. Prague : Institute of Thermomechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, 2018. ISBN 978-80-87012-66-6.

## Seznam příloh

### **Matematický model vibroizolační platformy se třemi stupni volnosti a dvojosým gyroskopickým stabilizátorem:**

- Příloha 1: Sestavení Lagrangeových rovnic vibroizolační platformy s dvojosým gyroskopickým stabilizátorem – výpis programu v SW Maple
- Příloha 2: Funkce usnadňující operace s maticemi – výpis programu v SW Maple
- Příloha 3: Matice momentů pružin a tlumičů – výpis programu v SW Maple
- Příloha 4: Linearizace Lagrangeových rovnic – výpis programu v SW Maple
- Příloha 5: Vlastní čísla systému s dvojosým gyroskopickým stabilizátorem – výpis programu v SW Maple
- Příloha 6: Numerická simulace systému s dvojosým gyroskopickým stabilizátorem – výpis programu v SW Maple

### **Matematický model jednoosého gyroskopického stabilizátoru s odpruženým stabilizovaným rámem:**

- Příloha 7: Sestavení pohybových rovnic jednoosého stabilizátoru – výpis programu v SW Maple
- Příloha 8: Momenty pružin a tlumičů jednoosé platformy – výpis programu v SW Maple
- Příloha 9: Optimalizace korekčního a kompenzačního systému horního rámu pro boční zrychlení – výpis programu v SW Maple
- Příloha 10: Simulace systému jednoosého gyroskopického stabilizátoru s řízenou pneumatickou pružinou – výpis programu v SW Maple

# Příloha 1: Sestavení Lagrangeových rovnic vibroizolační platformy s dvojším gyroskopickým stabilizátorem

```
> restart; with(linalg): read "knihovna.txt":
```

## Specifikace buzení

```
[ Svislé translační buzení
=> r01:=vector(3, [0, 0, zeta(t)]) :
[ Matice přechodu ze systému 2 pootočeného o úhel  $\alpha$  okolo osy x1 do systému 1
=> T12:=matrix(3, 3, [1, 0, 0,
                    0, cos(alpha(t)), -sin(alpha(t)),
                    0, sin(alpha(t)), cos(alpha(t))]) :
[ Matice přechodu ze systému š pootočeného o úhel  $\beta$  okolo osy y2 do systému 2
=> T23:=matrix(3, 3, [cos(beta(t)), 0, sin(beta(t)),
                    0, 1, 0,
                    -sin(beta(t)), 0, cos(beta(t))]) :
```

## Polohové vektory

```
[ Polohový vektor gemoetrického středu spodní základny v SS0
=> r0S:= T12 &* T23 &* r3S + r01:
=> r3S:= vector(3, [xS3, yS3, zS3]) :
[ Poloha čepů ramen paralelogramu
=> r0C1:= T12 &* T23 &* r3C1 + r01:
   r0C2:= T12 &* T23 &* r3C2 + r01:
   r0C3:= T12 &* T23 &* r3C3 + r01:
   r0C4:= T12 &* T23 &* r3C4 + r01:
   r3C1:= vector(3, [x3c, y3c, 0]) :
   r3C2:= vector(3, [x3c, -y3c, 0]) :
   r3C3:= vector(3, [-x3c, -y3c, 0]) :
   r3C4:= vector(3, [-x3c, y3c, 0]) :
[ Polohové vektory těžišť ramen paralelogramu v SS3
=> r3RT1:= r3C1 + 1/2 * vector(3, [R*cos(theta(t))+theta0), 0, R*sin
   (theta(t)+theta0) ]):
   r3RT2:= r3C2 + 1/2 * vector(3, [R*cos(theta(t))+theta0), 0, R*sin
   (theta(t)+theta0) ]):
   r3RT3:= r3C3 + 1/2 * vector(3, [R*cos(theta(t))+theta0), 0, R*sin
   (theta(t)+theta0) ]):
   r3RT4:= r3C4 + 1/2 * vector(3, [R*cos(theta(t))+theta0), 0, R*sin
   (theta(t)+theta0) ]):
[ Polohové vektory těžišť ramen paralelogramu vůči bodu O v SS0
=> r0RT1:= T12 &* T23 &* r3RT1 + r01:
   r0RT2:= T12 &* T23 &* r3RT2 + r01:
   r0RT3:= T12 &* T23 &* r3RT3 + r01:
   r0RT4:= T12 &* T23 &* r3RT4 + r01:
[ Poloha středu horní základny paralelogramu (bod O4) v SS3
=> r3O4:= vector(3, [R*cos(theta(t))+theta0), 0, R*sin(theta(t)+theta0) ]
   ):
=> r3T4:=r3O4:
```

```

Poloha bodu O5 v SS3
> r3O5:= r3O4 + r4O5:
> r4O5:= vector(3, [x5, y5, z5]):
Poloha těžiště prvního rámu - člen 5
> r3T5:= T35 &* r5T5 + r3O5:
> r5T5:= vector(3, [xT5, yT5, zT5]):
Poloha těžiště druhého rámu - člen 6
> r3T6:= T35 &* T56 &* r6T6 + r3O6:
> r3O6:= T35 &* r5O6 + r3O5:
> r5O6:= vector(3, [x6, y6, z6]):
> r6T6:= vector(3, [xT6, yT6, zT6]):

```

## ▼ Transformační matice

```

Matice přechodu ze systému O5 prvního rámu do systému O3 základny paralelogramu
> T35:= matrix(3,3, [ cos(phi(t)), 0, sin(phi(t)),
                    0, 1, 0,
                    -sin(phi(t)), 0, cos(phi(t)) ]):
Matice přechodu ze systému Ož druhého rámu do systému Oř prvního rámu
> T56:= matrix(3,3, [ 1, 0, 0,
                    0, cos(psi(t)), -sin(psi(t)),
                    0, sin(psi(t)), cos(psi(t)) ]):

```

```

Polohový vektor těžišť precesních rámečků (jsou vyvážené, těžiště leží na precesní ose)
> r3T7:= T35 &* (T56 &* r6T7 + r5O6) + r3O5:
> r3T8:= T35 &* (T56 &* r6T8 + r5O6) + r3O5:
> r6T7:= vector(3, [x7, y7, z7]):
> r6T8:= vector(3, [x8, y8, z8]):

```

```

Polohové vektory těžišť rotorů gyroskopů - leží na precesní ose, jsou vyvážené
> r3T9:=r3T7:
> r3T10:=r3T8:

```

```

Polohové vektory vůči bodu O v SS0
> r0O4:= T12 &* T23 &* r3O4 +r01:
> r0O5:= T12 &* T23 &* r3O5 +r01:
> r0O6:= T12 &* T23 &* r3O6 +r01:
> r0T4:= T12 &* T23 &* r3T4 +r01:
> r0T5:= T12 &* T23 &* r3T5 +r01:
> r0T6:= T12 &* T23 &* r3T6 +r01:
> r0T7:= T12 &* T23 &* r3T7 +r01:
> r0T8:= T12 &* T23 &* r3T8 +r01:
> r0T9:= T12 &* T23 &* r3T9 +r01:
> r0T10:= T12 &* T23 &* r3T10 +r01:

```

## ▼ Unášivé rychlosti v SS0

```

Unášivé rychlosti spodních čepů ramen paralelogramu
> u0C1:= vectdiff( evalm(r0C1) ,t):
> u0C2:= vectdiff( evalm(r0C2) ,t):
> u0C3:= vectdiff( evalm(r0C3) ,t):
> u0C4:= vectdiff( evalm(r0C4) ,t):

```

```

Unášivé rychlosti těžišť ramen paralelogramu
> u0RT1:= vectdiff( evalm(r0RT1) ,t):
> u0RT2:= vectdiff( evalm(r0RT2) ,t):
> u0RT3:= vectdiff( evalm(r0RT3) ,t):
> u0RT4:= vectdiff( evalm(r0RT4) ,t):

```

Unášivé rychlosti horní základny, prvního a druhého rámu

```
> u004:= vectdiff( evalm(r004) ,t):
u005:= vectdiff( evalm(r005) ,t):
u006:= vectdiff( evalm(r006) ,t):
```

Unášivé rychlosti těžišť horní základny, prvního a druhého rámu, precesních rámečků a gyroskopů

```
> u0T4:= vectdiff( evalm(r0T4) ,t):
u0T5:= vectdiff( evalm(r0T5) ,t):
u0T6:= vectdiff( evalm(r0T6) ,t):
u0T7:= vectdiff( evalm(r0T7) ,t):
u0T8:= vectdiff( evalm(r0T8) ,t):
u0T9:= vectdiff( evalm(r0T9) ,t):
u0T10:= vectdiff( evalm(r0T10) ,t):
```

## ▼ Vektory úhlových rychlostí

Úhlová rychlost spodní a horní základny paralelogramu

```
> omega2a:=vector(3, [diff(alpha(t),t), 0, 0]):
> omega3b:=vector(3, [0, diff(beta(t),t), 0]):
> omega3S:=transpose(T23) &* omega2a + omega3b:
> omega34:=evalm(omega3S):
```

Úhlová rychlost ramen paralelogramu

```
> omegath:=vector(3, [0, diff(theta(t),t), 0]):
```

Matice přechodu ze systému ramene paralelogramu pootočeného o úhel  $\vartheta + \vartheta_0$  okolo osy  $y_3$  do systému 3

```
> Tth3:= matrix(3,3, [ cos(theta(t)+theta0), 0, -sin(theta(t)+theta0),
                      0, 1, 0,
                      sin(theta(t)+theta0), 0, cos(theta(t)+theta0) ]):
> omegathR:= evalm( Tth3 &* omega3S + omegath ):
```

Úhlové rychlosti rámů kardanova závěsu

```
> omega5phi:= vector(3, [0, diff(phi(t),t), 0]):
> omega55:= evalm(transpose(T35) &* omega3S + omega5phi):
> omega6psi:= vector(3, [diff(psi(t),t), 0, 0]):
> omega66:= evalm(transpose(T56) &* omega55 + omega6psi):
```

## ▼ Transformační matice precesních rámečků

Matice přechodu ze systému precesního rámečku 7 do systému horního rámu 6

```
> T76:= matrix(3,3, [ cos(epsilon(t)), 0, -sin(epsilon(t)),
                      0, 1, 0,
                      sin(epsilon(t)), 0, cos(epsilon(t)) ]):
```

Matice přechodu ze systému precesního rámečku 8 do systému horního rámu 6

```
> T86:= matrix(3,3, [ 1, 0, 0,
                      0, cos(Epsilon(t)), sin(Epsilon(t)),
                      0, -sin(Epsilon(t)), cos(Epsilon(t)) ]):
```

Úhlové rychlosti precesních rámečků

```
> omega7eps:=vector(3, [0, diff(epsilon(t),t), 0]):
> omega8Eps:=vector(3, [diff(Epsilon(t),t), 0, 0]):
> omega77:= evalm(T76 &* omega66 + omega7eps):
> omega88:= evalm(T86 &* omega66 + omega8Eps):
```

Úhlové rychlosti rotorů gyroskopů

```
> omega7gyro:=vector(3, [0, 0, diff(gyro(t),t)]):
> omega79:=evalm(omega77 + omega7gyro):
> omega8Gyro:=vector(3, [0, 0, diff(Gyro(t),t)]):
```



```
> omega810:=evalm(omega88 + omega8Gyro):
```

## Kinetické energie

Ramena paralelogramu

```
> T_31:=evalm(1/2 * mR * (transpose(u0RT1)*u0RT1+transpose(u0RT2)*
u0RT2+transpose(u0RT3)*u0RT3+transpose(u0RT4)*u0RT4)):
```

```
> IR:=diag(JRx, JRy, JRz):
```

```
> T_33:=evalm(1/2 * 4 * transpose(omegathR) &* IR &* omegathR):
```

```
> T[3]:=T_31+T_33:
```

Horní základna paralelogramu

```
> T_41:=evalm(1/2 * m4 * transpose(u0O4) &* u0O4):
```

```
> I3T4:=diag(J3x, J3y, J3z):
```

```
> T_43:=evalm(1/2 * transpose(omega34) &* I3T4 &* omega34):
```

```
> T[4]:=T_41 + T_43:
```

Kinetická energie spodního rámu kardanova závěsu

```
> T_51:=evalm(1/2 * m5 * transpose(u0O5) &* u0O5):
```

```
> T_52:=evalm(m5 * transpose(u0O5) &* (u0T5-u0O5)):
```

```
> I55:=matrix(3,3,[J5x,-D5xy,-D5xz, -D5xy,J5y,-D5yz, -D5xz,-D5yz,J5z])
+
m5 * matrix(3,3,[yT5^2+zT5^2,-xT5*yT5,-xT5*zT5, -xT5*yT5,xT5^2+
zT5^2,-yT5*zT5, -xT5*zT5, -yT5*zT5,xT5^2+yT5^2]):
```

```
> T_53:=evalm(1/2 * transpose(omega55) &* I55 &* omega55):
```

```
> T[5]:=T_51+T_52+T_53:
```

Kinetická energie horního rámu kardanova závěsu

```
> T_61:=evalm(1/2 * m6 * transpose(u0O6) &* u0O6):
```

```
> T_62:=evalm(m6 * transpose(u0O6) &* (u0T6-u0O6)):
```

```
> I66:=matrix(3,3,[J6x,-D6xy,-D6xz, -D6xy,J6y,-D6yz, -D6xz,-D6yz,J6z])
:
```

```
> T_63:=evalm(1/2 * transpose(omega66) &* I66 &* omega66):
```

```
> T[6]:=T_61+T_62+T_63:
```

Kinetická energie precesního rámečku 7

```
> T_71:=evalm(1/2 * m7 * transpose(u0T7) &*u0T7):
```

```
> I77:=diag(J7x, J7y, J7z):
```

```
> T_73:=evalm(1/2 * transpose(omega77) &* I77 &* omega77):
```

```
> T[7]:=T_71+T_73:
```

Kinetická energie precesního rámečku 8

```
> T_81:=evalm(1/2 * m8 * transpose(u0T8) &*u0T8):
```

```
> I88:=diag(J8x, J8y, J8z):
```

```
> T_83:=evalm(1/2 * transpose(omega88) &* I88 &* omega88):
```

```
> T[8]:=T_81+T_83:
```

Kinetická energie gyroskopu 9

```
> T_91:=evalm(1/2 * mg * transpose(u0T9) &* u0T9):
```

```
> I7g:=convert(diag(Je, Je, J9z),matrix):
```

```
> T_93:=evalm(1/2 * transpose(omega79) &* I7g &* omega79):
```

```
> T[9]:=T_91+T_93:
```

Kinetická energie gyroskopu 10

```
> T_101:=evalm(1/2 * mg * transpose(u0T10) &* u0T10):
```

```
> I8g:=diag(Je, Je, J10z):
```

```
> T_103:=evalm(1/2 * transpose(omega810) &* I8g &* omega810):
```

```
> T[10]:=T_101+T_103:
```

Celková kinetická energie systému

```
> TT:=simplify(evalm(sum(T[ii],ii=3..10))):
```

## Potenciální energie

```

> e0z:=vector(3,[0,0,1]):
> VR:=mR*g*( transpose(e0z) &* r0RT1 + transpose(e0z) &* r0RT2 +
  transpose(e0z) &* r0RT3 + transpose(e0z) &* r0RT4 ):
> V4:=g*m4*transpose(e0z) &* r0T4:
> V5:=g*m5*transpose(e0z) &* r0T5:
> V6:=g*m6*transpose(e0z) &* r0T6:
> V7:=g*m7*transpose(e0z) &* r0T7:
> V8:=g*m8*transpose(e0z) &* r0T8:
> V9:=g*mg*transpose(e0z) &* r0T9:
> V10:=g*mg*transpose(e0z) &* r0T10:
> V:=simplify(evalm(VR+V4+V5+V6+V7+V8+V9+V10)):

```

## Lagrangeovy rovnice

```

> V:=eval(subs([theta(t)=q[1], phi(t)=q[2], psi(t)=q[3], epsilon(t)=q
  [4], Epsilon(t)=q[5],
  zeta(t)=excZ, alpha(t)=excA, beta(t)=excB],V)):
> TT1:=eval(subs([diff(theta(t),t)=Dq[1], diff(phi(t),t)=Dq[2], diff
  (psi(t),t)=Dq[3],
  diff(epsilon(t),t)=Dq[4], diff(Epsilon(t),t)=Dq[5],
  diff(zeta(t),t)=dexcZ, diff(alpha(t),t)=dexcA, diff
  (beta(t),t)=dexcB,
  diff(gyro(t),t)=rotg, diff(Gyro(t),t)=rotG],TT)):
> TT:=eval(subs([theta(t)=q[1], phi(t)=q[2], psi(t)=q[3], epsilon(t)=q
  [4], Epsilon(t)=q[5],
  zeta(t)=excZ, alpha(t)=excA, beta(t)=excB],TT1)):

```

Derivace energií podle zobecněných souřadnic, rychlostí

```

> for i from 1 by 1 to 5 do
  DTDdq[i]:=simplify(eval(diff(TT,Dq[i])));

  DTDq[i]:=simplify(eval(diff(TT,q[i])));

  DVDq[i]:=simplify(eval(diff(V,q[i])));
end do:
> for i from 1 by 1 to 5 do
  DTDdq[i]:=subs([q[1]=theta(t), q[2]=phi(t), q[3]=psi(t), q[4]=
  epsilon(t), q[5]=Epsilon(t),
  excZ=zeta(t), excA=alpha(t), excB=beta(t)],DTDdq
  [i]):

  DTDdq[i]:=subs([Dq[1]=diff(theta(t),t), Dq[2]=diff(phi(t),t), Dq
  [3]=diff(psi(t),t),
  Dq[4]=diff(epsilon(t),t), Dq[5]=diff(Epsilon(t),t),
  dexcZ=diff(zeta(t),t), dexcA=diff(alpha(t),t),
  dexcB=diff(beta(t),t),
  rotg=diff(gyro(t),t), rotG=diff(Gyro(t),t)],DTDdq
  [i]):

  DTDq[i]:=subs([q[1]=theta(t), q[2]=phi(t), q[3]=psi(t), q[4]=
  epsilon(t), q[5]=Epsilon(t),
  excZ=zeta(t), excA=alpha(t), excB=beta(t)],DTDq[i]
  ):

  DTDq[i]:=subs([Dq[1]=diff(theta(t),t), Dq[2]=diff(phi(t),t), Dq[3]
  =diff(psi(t),t),
  Dq[4]=diff(epsilon(t),t), Dq[5]=diff(Epsilon(t),t),

```

```

                                dexcZ=diff(zeta(t),t), dexcA=diff(alpha(t),t),
dexcB=diff(beta(t),t),
                                rotg=diff(gyro(t),t), rotG=diff(Gyro(t),t)],DTDq[i]
):
    DVDq[i]:=subs([q[1]=theta(t), q[2]=phi(t), q[3]=psi(t), q[4]=
epsilon(t), q[5]=Epsilon(t),
                                excZ=zeta(t), excA=alpha(t), excB=beta(t)],DVDq[i]
):
end do:

```

Lagrangeovy rovnice (**RCE[i]**) a trigonometrická linearizace (**LL[i]**)

```

> for i from 1 by 1 to 5 do
    RCE[i]:=simplify(diff(DTDdq[i],t)-DTDq[i]+DVDq[i]):
    LL[i]:=expand(subs(cos(phi(t))=1,cos(psi(t))=1,cos(epsilon(t))=1,
cos(Epsilon(t))=1,sin(phi(t))=phi(t),
    sin(psi(t))=psi(t),sin(epsilon(t))=epsilon(t),sin(Epsilon(t))=
Epsilon(t),
    sin(theta(t)+theta0)=sin(theta0)+theta(t)*cos(theta0),
    cos(theta(t)+theta0)=cos(theta0)-theta(t)*sin(theta0),
    cos(alpha(t))=1,cos(beta(t))=1,sin(alpha(t))=alpha(t),
    sin(beta(t))=beta(t),RCE[i]));
end do:

```

```

[> save LL, "L_rce.txt";

```

## Příloha 2: Funkce usnadňující operace s maticemi

```
> restart;
```

**vectdiff** pouze aplikuje funkci diff na jednotlivé složky vektoru!

```
vectdiff(v, x)
```

v - vektor

x - proměnná podle které se budou derivovat složky vektoru, takto: `diff ( v[i] , x )`

výstupem je vektor

```
> vectdiff := proc( x::vector , y::symbol )
                d:=vector(linalg[vectdim](x));
                for i from 1 to linalg[vectdim](x) do
                    d[i]:=diff(x[i],y)
                end do:
                evalm(d);
    end proc;
```

Warning, `d` is implicitly declared local to procedure `vectdiff`

Warning, `i` is implicitly declared local to procedure `vectdiff`

**vectsubs** pouze aplikuje funkci subs na jednotlivé složky vektoru!

```
vectsubs(v, x)
```

v - vektor

x - co za co substituovat (např.:  $f = f(x)$  nahradí proměnnou  $f$  funkcí  $f(x)$  ve všech složkách vektoru)

chceme-li provést více substitucí najednou, zapíšeme je jako list (např.:  $\{f = f(x), g = g(x), h = h(x)\}$ )

výstupem je vektor

```
> vectsubs:=proc(x::vector,y)
                d:=vector(linalg[vectdim](x));
                for i from 1 to linalg[vectdim](x) do
                    d[i]:=subs(y,x[i])
                end do:
                evalm(d);
    end proc;
```

Warning, `d` is implicitly declared local to procedure `vectsubs`

Warning, `i` is implicitly declared local to procedure `vectsubs`

**matsubs** pouze aplikuje funkci subs na jednotlivé složky matice!

```
matsubs(A, x)
```

A - matice

x - co za co substituovat (např.:  $f = f(x)$  nahradí proměnnou  $f$  funkcí  $f(x)$  ve všech složkách vektoru)

chceme-li provést více substitucí najednou, zapíšeme je jako list (např.:  $\{f = f(x), g = g(x), h = h(x)\}$ )

výstupem je matice

```
> matsubs:=proc(x::matrix,y)
                M:=matrix(linalg[rowdim](x),linalg[coldim](x));
                for i from 1 to linalg[rowdim](x) do
                    for j from 1 to linalg[coldim](x) do
                        M[i,j]:=subs(y,x[i,j])
                    end do:
                end do;
```

```

        end do:
    evalm(M);
end proc:
Warning, `M` is implicitly declared local to procedure `matsubs`
Warning, `i` is implicitly declared local to procedure `matsubs`
Warning, `j` is implicitly declared local to procedure `matsubs`

```

**matdiff** pouze aplikuje funkci diff na jednotlivé složky matice!

matdiff(A, x)

A - matice

x - proměnná podle které se budou derivovat složky matice, takto: **diff ( A[i,j] , x )**

výstupem je matice

```

> matdiff:=proc(x::matrix,y::symbol)
    M:=matrix(linalg[rowdim](x),linalg[coldim](x));
    for i from 1 to linalg[rowdim](x) do
        for j from 1 to linalg[coldim](x) do
            M[i,j]:=diff(x[i,j],y)
        end do:
    end do:
    evalm(M);
end proc:
Warning, `M` is implicitly declared local to procedure `matdiff`
Warning, `i` is implicitly declared local to procedure `matdiff`
Warning, `j` is implicitly declared local to procedure `matdiff`

```

[> save vectdiff, vectsubs, matsubs, matdiff, "knihovna.txt":

## Příloha 3: Matice momentů pružin a tlumičů

```
> restart;
```

```
> with(linalg):
```

Moment pružin paralelogramu

```
> Mp[theta] := 4 * (p[4] * S[04] * mu[p, theta] * cos(theta0) + p[4] * S[14] * mu[p, theta]^2 * theta);
```

$$M_{p_{\theta}} := 4 p_4 S_4 \mu[p, \theta] \cos(\theta_0) + 4 p_4 S_{14} \mu[p, \theta]^2 \theta \quad (1)$$

Moment pružin prvního rámu kardanova závěsu

```
> Mp[phi] := sum(p5[j] * S[05] * mu[p, phi]^j * (-1)^(j+1) + p5[j] * S[15] * mu[p, phi]^j * phi, j=1..2);
```

$$M_{p_{\phi}} := \phi S_{15} p_5^2 \mu[p, \phi]_1^2 + \phi S_{15} p_5^2 \mu[p, \phi]_2^2 + S_5 p_5^2 \mu[p, \phi]_1 - S_5 p_5^2 \mu[p, \phi]_2 \quad (2)$$

Moment pružin druhého rámu kardanova závěsu

```
> Mp[psi] := sum(p6[j] * S[06] * mu[p, psi]^j * (-1)^(j+1) + p6[j] * S[16] * mu[p, psi]^j * psi, j=1..2);
```

$$M_{p_{\psi}} := \psi S_{16} p_6^2 \mu[p, \psi]_1^2 + \psi S_{16} p_6^2 \mu[p, \psi]_2^2 + S_6 p_6^2 \mu[p, \psi]_1 - S_6 p_6^2 \mu[p, \psi]_2 \quad (3)$$

```
> Mp := genmatrix([Mp[theta], Mp[phi], Mp[psi]], [theta, phi, psi], bp);
```

$$M_p := \begin{bmatrix} 4 \mu[p, \theta]^2 S_{14} p_4 & 0 & 0 \\ 0, S_{15} p_5^2 \mu[p, \phi]_1^2 + S_{15} p_5^2 \mu[p, \phi]_2^2 & 0 \\ 0, 0, S_{16} p_6^2 \mu[p, \psi]_1^2 + S_{16} p_6^2 \mu[p, \psi]_2^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

```
> Mp1 := blockmatrix(1, 2, [Mp, matrix(3, 2, 0)]);
```

```
Cp := blockmatrix(2, 1, [Mp1, matrix(2, 5, 0)]);
```

```
Ep := blockmatrix(2, 1, [bp, vector(2, 0)]);
```

$$C_p := \begin{bmatrix} 4 \mu[p, \theta]^2 S_{14} p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0, S_{15} p_5^2 \mu[p, \phi]_1^2 + S_{15} p_5^2 \mu[p, \phi]_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0, 0, S_{16} p_6^2 \mu[p, \psi]_1^2 + S_{16} p_6^2 \mu[p, \psi]_2^2 & 0 & 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0 \end{bmatrix}$$

$$E_p := \begin{bmatrix} -4 p_4 S_4 \mu[p, \theta] \cos(\theta_0) \\ -S_5 p_5^2 \mu[p, \phi]_1 + S_5 p_5^2 \mu[p, \phi]_2 \\ -S_6 p_6^2 \mu[p, \psi]_1 + S_6 p_6^2 \mu[p, \psi]_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Moment tlumičů paralelogramu

```
> MT[theta] := 4 * (b_theta[1] * mu[t, theta]^2 * d_theta);
```

$$M_{T_{\theta}} := 4 b_{\theta} \mu[t, \theta]^2 d_{\theta} \quad (6)$$

Moment tlumičů prvního rámu kardanova závěsu

```
> MT[phi] := sum(b_phi[1] * mu[t, phi]^i * d_phi, i=1..2);
```

$$M_{T_{\phi}} := d_{\phi} b_{\phi} \mu[t, \phi]_1^2 + d_{\phi} b_{\phi} \mu[t, \phi]_2^2 \quad (7)$$

Moment tlumičů druhého rámu kardanova závěsu

```

> MT[psi] := sum(b_psi[1]*`mu[t,psi]` [i]^2*d_psi, i=1..2);
      
$$MT_{\psi} := d_{\psi} b_{\psi_1} \mu[t, \psi]_1^2 + d_{\psi} b_{\psi_1} \mu[t, \psi]_2^2 \quad (8)$$

> B:=matrix(5,5,[
  coeff(MT[theta],d_theta,1),0,0,0,0,
  0,coeff(MT[phi],d_phi,1),0,0,0,
  0,0,coeff(MT[psi],d_psi,1),0,0,
  0,0,0,0,0,
  0,0,0,0,0
  ]);
B := [[ [4 b_theta mu[t,theta]^2, 0, 0, 0, 0],
        [0, b_phi mu[t,phi]_1^2 + b_phi mu[t,phi]_2^2, 0, 0, 0],
        [0, 0, b_psi mu[t,psi]_1^2 + b_psi mu[t,psi]_2^2, 0, 0],
        [0, 0, 0, 0, 0],
        [0, 0, 0, 0, 0]]
      
$$(9)$$

[> save Cp,Ep,B, "matice.txt";

```

# Příloha 4: Linearizace Lagrangeových rovnic

```

> restart: with(linalg): read "knihovna.txt":
> read "L_rce.txt":
> LL4:=vector(5):
> for i from 1 by 1 to 5 do
LL2[i] :=subs(
  diff(theta(t),t,t) =ddX[1],
  diff(phi(t),t,t) =ddX[2],
  diff(psi(t),t,t) =ddX[3],
  diff(epsilon(t),t,t) =ddX[4],
  diff(Epsilon(t),t,t)=ddX[5],
  LL[i]):
LL3[i] :=subs(
  diff(theta(t),t) =dX[1],
  diff(phi(t),t) =dX[2],
  diff(psi(t),t) =dX[3],
  diff(epsilon(t),t) =dX[4],
  diff(Epsilon(t),t)=dX[5],
  LL2[i]):
LL4[i] :=subs(
  theta(t) =X[1],
  phi(t) =X[2],
  psi(t) =X[3],
  epsilon(t) =X[4],
  Epsilon(t)=X[5],
  LL3[i]):
end do:
> AA:=matrix(5,15):
> for i from 1 by 1 to 5 do
  for j from 1 by 1 to 5 do
    AA[i,j]:=diff(LL4[i],X[j]);
    AA[i,j+5]:=diff(LL4[i],dX[j]);
    AA[i,j+10]:=diff(LL4[i],ddX[j]);
  end do:
end do:

> BB:=matsubs(AA, {seq(X[ii]=0,ii=1..5), seq(dX[ii]=0,ii=1..5), seq(ddX[ii]=
0,ii=1..5), diff(gyro(t),t,t)=0, diff(Gyro(t),t,t)=0}):
> E:=vectsubs(convert(LL4,vector), {seq(X[ii]=0,ii=1..5), seq(dX[ii]=0,ii=
1..5), seq(ddX[ii]=0,ii=1..5), diff(gyro(t),t,t)=0, diff(Gyro(t),t,t)=0}):

```

## Matice konzervativních sil

```
> C:=evalm(submatrix(BB, 1..5, 1..5)):
```

## Matice tlumení

```
> B1:=evalf(submatrix(BB, 1..5, 6..10)):
```

## Koeficienty matice hmotnosti

```
> A:=submatrix(BB, 1..5, 11..15):
```

```
> A[1,1];
```

$$R^2 m4 + R^2 m5 + R^2 m6 + R^2 m7 + R^2 m8 + R^2 mR + 2 R^2 mg + 4 J Ry \quad (1)$$

```
> A[2,2];
```

$$\begin{aligned}
& m5 x T^5 + m5 z T^5 + m6 x^6 + m6 z^6 + m7 x^6 + 2 m7 x^6 x^7 + m7 x^7 + m7 z^6 + 2 m7 z^6 z^7 \\
& + m7 z^7 + m8 x^6 + 2 m8 x^6 x^8 + m8 x^8 + m8 z^6 + 2 m8 z^6 z^8 + m8 z^8 + 2 mg x^6 \\
& + 2 mg x^6 x^7 + 2 mg x^6 x^8 + mg x^7 + mg x^8 + 2 mg z^6 + 2 mg z^6 z^7 + 2 mg z^6 z^8 + mg z^7 \\
& + mg z^8 + J5y + J6y + J7y + J8y + 2 Je
\end{aligned} \quad (2)$$

```
> A[3,3];
```

$$m7 y^7 + m7 z^7 + m8 y^8 + m8 z^8 + mg y^7 + mg y^8 + mg z^7 + mg z^8 + J6x + J7x + J8x + 2 Je \quad (3)$$



$$\begin{aligned} > \mathbf{A}[4, 4]; \\ & J7y + Je \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} > \mathbf{A}[5, 5]; \\ & Je + J8x \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} > \text{simplify}(\mathbf{A}[1, 2]); \\ -R(\sin(\theta) m5 zT5 + \sin(\theta) m6 z6 + \sin(\theta) m7 z6 + \sin(\theta) m7 z7 + \sin(\theta) m8 z6 \\ + \sin(\theta) m8 z8 + 2 \sin(\theta) mg z6 + \sin(\theta) mg z7 + \sin(\theta) mg z8 + \cos(\theta) m5 xT5 \\ + \cos(\theta) m6 x6 + \cos(\theta) m7 x6 + \cos(\theta) m7 x7 + \cos(\theta) m8 x6 + \cos(\theta) m8 x8 \\ + 2 \cos(\theta) mg x6 + \cos(\theta) mg x7 + \cos(\theta) mg x8) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} > \mathbf{A}[2, 1]; \\ -2 R mg z6 \sin(\theta) - 2 R mg x6 \cos(\theta) - R mg z7 \sin(\theta) - R m6 z6 \sin(\theta) - R m5 zT5 \sin(\theta) \\ - R mg z8 \sin(\theta) - R m7 z6 \sin(\theta) - R m7 x6 \cos(\theta) - R m7 x7 \cos(\theta) \\ - R m8 x6 \cos(\theta) - R m8 x8 \cos(\theta) - R m7 z7 \sin(\theta) - R m8 z8 \sin(\theta) - R m8 z6 \sin(\theta) \\ - R m6 x6 \cos(\theta) - R mg x7 \cos(\theta) - R mg x8 \cos(\theta) - R m5 xT5 \cos(\theta) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} > \mathbf{A}[3, 1]; \\ R m7 y7 \cos(\theta) + R mg y8 \cos(\theta) + R mg y7 \cos(\theta) + R m8 y8 \cos(\theta) + R m6 yT6 \cos(\theta) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} > \mathbf{A}[1, 4]; \\ 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} > \mathbf{A}[1, 5]; \\ 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} > \mathbf{A}[2, 3]; \\ -m6 x6 yT6 - m7 x6 y7 - m7 x7 y7 - m8 x6 y8 - m8 x8 y8 - mg x6 y7 - mg x6 y8 - mg x7 y7 \\ - mg x8 y8 - D6xy \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} > \mathbf{A}[2, 4]; \\ J7y + Je \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} > \mathbf{A}[2, 5]; \\ 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} > \mathbf{A}[3, 4]; \\ 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} > \mathbf{A}[3, 5]; \\ Je + J8x \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} > \mathbf{A}[4, 5]; \\ 0 \end{aligned} \quad (16)$$

## Složky vektoru kinematického buzení

Při  $\alpha(t)=0$  a  $\beta(t)=0$

$$\begin{aligned} > \text{eval}(\text{subs}([\alpha(t)=0, \beta(t)=0], \mathbf{E}[1])); \\ \left( \frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) \right) R m7 \cos(\theta) + \left( \frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) \right) R m5 \cos(\theta) + \left( \frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) \right) R m6 \cos(\theta) \\ + \left( \frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) \right) R m4 \cos(\theta) + \left( \frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) \right) R m8 \cos(\theta) + R g m4 \cos(\theta) \\ + R g m5 \cos(\theta) + R g m6 \cos(\theta) + R g m7 \cos(\theta) + R g m8 \cos(\theta) + 2 R g mR \cos(\theta) \\ + 2 R g mg \cos(\theta) + 2 \left( \frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) \right) R mR \cos(\theta) + 2 \left( \frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) \right) R mg \cos(\theta) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} > \text{eval}(\text{subs}([\alpha(t)=0, \beta(t)=0], \mathbf{E}[2])); \\ - \left( \frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) \right) m8 x8 - \left( \frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) \right) mg x8 - \left( \frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) \right) m6 x6 - g m5 xT5 - g m6 x6 - g m6 xT6 \\ - g m7 x6 - g m7 x7 - g m8 x6 - g m8 x8 - g mg x7 - g mg x8 - \left( \frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) \right) m5 xT5 \\ - \left( \frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) \right) mg x7 - \left( \frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) \right) m7 x6 - \left( \frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) \right) m7 x7 - \left( \frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) \right) m8 x6 \end{aligned} \quad (18)$$

```

- 2 \left( \frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) \right) mg x6 - 2 g mg x6
> eval (subs ([alpha (t)=0, beta (t)=0], E[3]));
g m6 yT6 + g m7 y7 + g m8 y8 + \left( \frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) \right) m6 yT6 + g mg y7 + g mg y8 + \left( \frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) \right) mg y7
+ \left( \frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) \right) m7 y7 + \left( \frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) \right) m8 y8 + \left( \frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) \right) mg y8
> eval (subs ([alpha (t)=0, beta (t)=0], E[4]));
0
> eval (subs ([alpha (t)=0, beta (t)=0], E[5]));
0
> save A, B1, C, E, "lagrmat2.txt";

```

(19)

(20)

(21)

## ▼ Příloha 5: Vlastní čísla systému s dvojosým gyroskopickým stabilizátorem

### ▼ Charakteristický polynom

```

> restart:with(plots):with(linalg):with(LinearAlgebra):Digits:=
12:with(plottools):read "knihovna.txt":
> g := 9.80665:
Hodnoty převodových funkcí pružin a tlumičů
> `mu[p,theta]` :=0.19:`mu[p,psi]` [1] :=0.42/2:`mu[p,psi]` [2] :=
0.42/2:
`mu[p,phi]` [1] := .6075: `mu[p,phi]` [2] := .4675:
`mu[t,theta]` :=0.19:`mu[t,psi]` [1] :=0.42/2:`mu[t,psi]` [2] :=
0.42/2:`mu[t,phi]` [1] := .6075: `mu[t,phi]` [2] := .4675:
Parametry pneumatických pružin
> S[4] := .22e-2: S[5] := .22e-2: S[6] := .22e-2: S[14] :=
.7056e-1: S[15] := .7056e-1: S[16] := .7056e-1:
V := .3e-3: `p[a]` := 100000: n:=1:
Hodnota  $\vartheta_0$ 
> theta0:=0.2435:
Délka ramen paralelogramu
> R := 0.4:
Hmotnosti členů systému
> m4:=14.34: m5:=17.56: mR:=1.34: `m[6]leh`:=14.17+13.7: `m[6]
clo`:=80: m6:=`m[6]leh`+`m[6]clo`:
mg:=6.7: m7:=0.8: m8:=0.8:
Poloha ložisek ramen vůči bodu S3 (střed spodní základny paralelogramu)
> x3c := 0.4: y3c := .21: z3c := 0:
Poloha středu spodní základny v systému O3
> xS3 := -1: yS3 := .65: zS3 := .786e-1:
Poloha bodu O5 v SS horní základny paralelogramu O4
> x5 := .755e-1: y5 := 0: z5 := .62e-1:
Poloha těžiště prvního rámu kardanova závěsu v SS O5
> xT5 := -.595e-1: yT5 := 0: zT5 := .316e-1:
Poloha bodu O6 v SS prvního rámu kardanova závěsu O5
> x6 := -.1426e-1: y6 := 0: z6 := .62e-1:
Momenty setrvačnosti ramen paralelogramu
> JRx := .25e-3: JRy := .160e-1: JRz := .25e-3:
Momenty setrvačnosti prvního rámu kardanova závěsu
> J5x := 3.05: J5y := 11.37: J5z := 14.34: D5xy:=0: D5xz:=0: D5yz:=
0:
Polohy SS precesních rámečků vzhledem k SS O6
> x7:=0.400: y7:=0: z7:=0:
x8:=-0.400: y8:=0: z8:=0:
Momenty setrvačnosti precesních rámečků
> J7x:=0.00815: J7z:=0.005: J7y:=0.00322:
J8x:=0.00322: J8z:=0.005: J8y:=0.00815:
Momenty setrvačnosti gyroskopů
> J9z:=8.4e-3: J10z:=8.4e-3: Je:=5.56e-3:
Tuhosti tlumičů
> b_theta[1]:=1128:
b_phi[1]:=1128:
b_psi[1]:=1128:

```

## Setrvačné parametry soustavy druhý rám kardanova závěsu + lehátko + pacient

```

> Setrvačné parametry pacienta
Iclo_1:=11.3:Iclo_2:=15.2:Iclo_3:=0.577:
Posun těžiště pacienta
x_Tclo:=0.05:
y_Tclo:=0.05:
z_Tclo:=0.0616:
x_Tleh:=0: y_Tleh:=0: z_Tleh:=0.05:
Úhel pootočení pacienta okolo osy kolmé k rovině lehátka
delta:=0*Pi/180:
mclo:=`m[6]clo`:mleh:=`m[6]leh`:
Iclo_centralni:=matrix(3,3,[
  Iclo_3, 0, 0,
  0, Iclo_2, 0,
  0, 0, Iclo_1]):
Transformační matice pootočení pacienta okolo osy kolmé k rovině lehátka
T:=matrix(3,3,[
  cos(delta), sin(delta), 0,
  -sin(delta), cos(delta), 0,
  0, 0, 1]):
Matice setrvačnosti pootočeného pacienta
Iclo_pootoceny:=evalm(transpose(T)*Iclo_centralni*T):
Matice Steinerových členů pro posun pacienta
I_m_clo:=matrix(3,3,[
  mclo*(y_Tclo^2+z_Tclo^2), -mclo*x_Tclo*y_Tclo, -mclo*
  x_Tclo*z_Tclo,
  -mclo*x_Tclo*y_Tclo, mclo*(x_Tclo^2+z_Tclo^2), -mclo*
  y_Tclo*z_Tclo,
  -mclo*x_Tclo*z_Tclo, -mclo*y_Tclo*z_Tclo, mclo*
  (x_Tclo^2+y_Tclo^2)]):
I_o6clo:=evalm(Iclo_pootoceny+I_m_clo):
Matice setrvačnosti druhého rámu + lehátka
I_leh:=matrix(3,3,[
  1.8564+0.8*1.8564, 0, 0,
  0, 7.49+0.8*7.49, 0,
  0, 0, 9.346+0.8*9.346]):
Matice Steinerových členů pro posun těžiště druhého rámu + lehátka
I_m_leh:=matrix(3,3,[
  mleh*(y_Tleh^2+z_Tleh^2), -mleh*x_Tleh*y_Tleh, -mleh*
  x_Tleh*z_Tleh,
  -mleh*x_Tleh*y_Tleh, mleh*(x_Tleh^2+z_Tleh^2), -mleh*
  y_Tleh*z_Tleh,
  -mleh*x_Tleh*z_Tleh, -mleh*y_Tleh*z_Tleh, mleh*
  (x_Tleh^2+y_Tleh^2)]):
I_o6leh:=evalm(I_leh+I_m_leh):
Matice setrvačnosti soustavy druhý rám + lehátko + pacient
I6:=evalm(I_o6leh+I_o6clo):
Polohový vektor těžiště soustavy druhý rám + lehátko + pacient
rT6:=vector(3,[
  (mclo*x_Tclo+mleh*x_Tleh)/(mleh+mclo),
  (mclo*y_Tclo+mleh*y_Tleh)/(mleh+mclo),
  (mclo*z_Tclo+mleh*z_Tleh)/(mleh+mclo)];
zT6 := rT6[3]: xT6 := rT6[1]: yT6 :=rT6[2]:
J6x:=I6[1,1]; J6y:=I6[2,2]; J6z:=I6[3,3]; D6xy:=-I6[1,2];
D6xz:=-I6[1,3]; D6yz:=-I6[2,3];
rT6 := [ 0.0370816723834 0.0370816723834 0.0586029479930 ]
J6x := 4.49175980

```

$$\begin{aligned}
 J_{6y} &:= 29.25523980 \\
 J_{6z} &:= 28.5228 \\
 D_{6xy} &:= 0.2000 \\
 D_{6xz} &:= 0.246400 \\
 D_{6yz} &:= 0.246400
 \end{aligned}
 \tag{1.1.1.1}$$

Buzení nulové

$$\begin{aligned}
 &> \text{alpha}(t) := 0; \text{beta}(t) := 0; \text{zeta}(t) := 0; \\
 &\quad \alpha(t) := 0 \\
 &\quad \beta(t) := 0 \\
 &\quad \zeta(t) := 0
 \end{aligned}
 \tag{1.1.1}$$

Načtení matic linearizovaných Lagrangeových rovnic a matic momentů pružin a tlumičů

```

> read "matice.txt";
read "lagrmat2.txt";
G:=matsubs(convert(B1, matrix), diff(gyro(t), t)=rotg);
G:=matsubs(G, diff(Gyro(t), t)=-rotg);
#print(G);

```

$$Cp := \begin{bmatrix} [0.010188864 p_4, 0, 0, 0, 0], \\$$

$$[0, 0.0260406090000 p_5_1 + 0.0154213290000 p_5_2, 0, 0, 0],$$

$$[0, 0, 0.00311169600000 p_6_1 + 0.00311169600000 p_6_2, 0, 0],$$

$$[0, 0, 0, 0, 0],$$

$$[0, 0, 0, 0, 0]]$$

$$Ep := \begin{bmatrix} 0.00162267611356 p_4 \\ 0.00133650 p_5_1 - 0.00102850 p_5_2 \\ 0.000462000000000 p_6_1 - 0.000462000000000 p_6_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 162.8832 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 662.82690000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 99.4896000000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} 25.0416 & -1.86486418929 & 1.55280010867 & 0 & 0 \\ -1.86486418929 & 44.2945149032 & -0.142960000000 & 0.00878 & 0 \\ 1.55280010867 & -0.142960000000 & 4.51424980 & 0 & 0.00878 \\ 0 & 0.00878 & 0 & 0.00878 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00878 & 0 & 0.00878 \end{bmatrix}$$

$$BI := \begin{bmatrix} [0., 0., -0., 0., 0.], \\$$

$$[0., 0., -0.0084 \left( \frac{d}{dt} gyro(t) \right) - 0.0084 \left( \frac{d}{dt} Gyro(t) \right), 0., -0.0084 \left( \frac{d}{dt} Gyro(t) \right)],$$

$$[0., 0.0084 \left( \frac{d}{dt} gyro(t) \right) + 0.0084 \left( \frac{d}{dt} Gyro(t) \right), 0., 0.0084 \left( \frac{d}{dt} gyro(t) \right), 0.],$$

$$[0., 0., -0.0084 \left( \frac{d}{dt} gyro(t) \right), 0., 0.],$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ 0., 0.0084 \left( \frac{d}{dt} Gyro(t) \right), 0., 0., 0. \right] \\
 C := & \begin{bmatrix} -148.909383978 & 0. & -0. & 0 & 0 \\ 0. & -142.140880134 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -61.9927379750 & 0. & 0. \\ 0 & 0. & 0. & 0. & 0 \\ 0 & 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix} \\
 E := & \begin{bmatrix} 599.402985846 & -11.7979275478 & 39.2266000000 & 0. & 0. \end{bmatrix} \\
 G := & \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0.0084 \text{ rotg} \\ 0. & 0. & 0. & 0.0084 \text{ rotg} & 0. \\ 0. & 0. & -0.0084 \text{ rotg} & 0. & 0. \\ 0. & -0.0084 \text{ rotg} & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix} \tag{1.1.2}
 \end{aligned}$$

Matice sil korekčních a kompenzačních zpětných vazeb

```

> K:=matrix(5,5,[
0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,
0 ,0 ,0 ,0 ,k1 ,
0 ,0 ,0 ,k1 ,0 ,
0 ,0 ,-k2 ,0 ,0 ,
0 ,-k2 ,0 ,0 ,0 ,
]);

```

$$K := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k1 \\ 0 & 0 & 0 & k1 & 0 \\ 0 & 0 & -k2 & 0 & 0 \\ 0 & -k2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1.3}$$

Přidání tlumení v osách precesních rámečků

```

> B[4,4]:=bp: B[5,5]:=bp:

```

Určení počátečních tlaků v pneumatických pružinách

```

> assign(solve([E[1]=Ep[1,1],E[2]=Ep[2,1], E[3]=Ep[3,1], -g*(m5+m6+m6+m8+2*mg)+S[5]*(p5[1]+p5[2]), -g*(m6+m6+m8+2*mg)+S[6]*(p6[1]+p6[2])], [p[4],p5[1],p5[2],p6[1],p6[2]]));

```

Sestavení charakteristického polynomu

```

> M:=simplify(det(lambda^2*A+lambda*evalm(B+G)+evalm(K+C+Cp))):

```

### ▼ Zadání rychlosti rotace gyroskopů, výpočet vlastních čísel

```

> rotgmin:=10000/(60)*2*Pi; rotgmax:=100000/(60)*2*Pi;

```

$$\text{rotgmin} := \frac{1000}{3} \pi$$

$$\text{rotgmax} := \frac{10000}{3} \pi \tag{1.1.2.1}$$

Nastavení tlumení v osách precesních rámečků

```

> bp:=0:

```

Nastavení zesílení korekčních a kompenzačních zpětných vazeb

```

> k2:=0.5;k1:=50;

```

$$k2 := 0.5$$

$$k1 := 50$$

(1.1.2.2)

Cyklus výpočtu vlastních čísel pro měnící se rychlost rotace gyroskopů

```

> Digits:=7:

```

```

for kn from 1 by 1 to 100 do
    rotg:=rotgmin+kn*(rotgmax-rotgmin)/100;
    Lambda[kn]:=solve(M,lambda);
    if kn<21 then barva:=red elif kn<41 then barva:=yellow elif
kn<61 then barva:=green elif kn<81 then barva:=blue else
barva:=violet end if;

    pll[kn]:=complexplot([Lambda[kn]],color=barva);

    frame[kn]:=display([pll[ng]$ng=1..kn],style=point);
od:

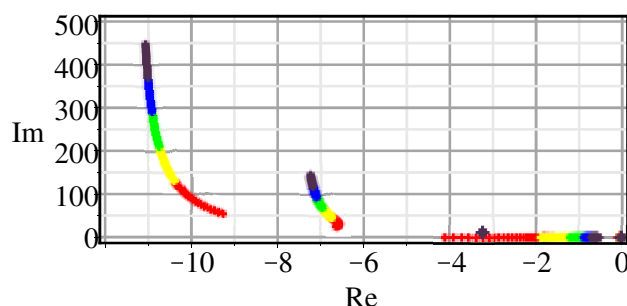
```

## Vlastní čísla - zobrazení v komplexní rovině

```

[> velikost_fontu:=9:
> Lambda[1];Lambda[50];Lambda[100];
display([frame[100]],style=point,view=[-12..0,-1..500],
insequence=true,gridlines,labels=["Re","Im"],symbolsize=15,
axes=boxed,labelfont=[default,default,velikost_fontu],axesfont=
[default,default,velikost_fontu],size=[0.55,0.5]);
la5:=display([frame[100]],style=point,view=[-0.5..0.001,0.1..
-0.1],insequence=true,gridlines,labels=["Re","Im"],axes=boxed,
labelfont=[default,default,velikost_fontu],axesfont=[default,
default,velikost_fontu]):
la4:=display([frame[100]],style=point,view=[-5..-0.5,0.1..
-0.1],insequence=true,gridlines,labels=["Re","Im"],axes=boxed,
labelfont=[default,default,velikost_fontu],axesfont=[default,
default,velikost_fontu]):
la3:=display([frame[100]],style=point,view=[-3.255..-3.235,
11.5..11.6],insequence=true,gridlines,labels=["Re","Im"],axes=
boxed,labelfont=[default,default,velikost_fontu],axesfont=
[default,default,velikost_fontu]):
la2:=display([frame[100]],style=point,view=[-6..-7.5,0..150],
insequence=true,gridlines,labels=["Re","Im"],axes=boxed,
labelfont=[default,default,velikost_fontu],axesfont=[default,
default,velikost_fontu]):
la1:=display([frame[100]],style=point,view=[-8.5..-11.5,0.
.500],insequence=true,gridlines,labels=["Re","Im"],axes=boxed,
labelfont=[default,default,velikost_fontu],axesfont=[default,
default,velikost_fontu]):
-9.281549 + 54.06510I, -6.643294 + 25.81598I, -3.240458 + 11.56240I, -0.05230369,
-0.05329983, -1.704001, -4.105058, -3.240458 - 11.56240I, -6.643294
- 25.81598I, -9.281549 - 54.06510I
-10.83734 + 247.0522I, -7.034467 + 80.45103I, -3.251529 + 11.56574I, -0.01033449,
-0.01034480, -0.9561667, -1.021745, -3.251529 - 11.56574I, -7.034467
- 80.45103I, -10.83734 - 247.0522I
-11.06711 + 447.7213I, -7.237245 + 142.8251I, -3.252030 + 11.56595I,
-0.005677238, -0.005692613, -0.5546988, -0.5664173, -3.252030 - 11.56595I,
-7.237245 - 142.8251I, -11.06711 - 447.7213I

```



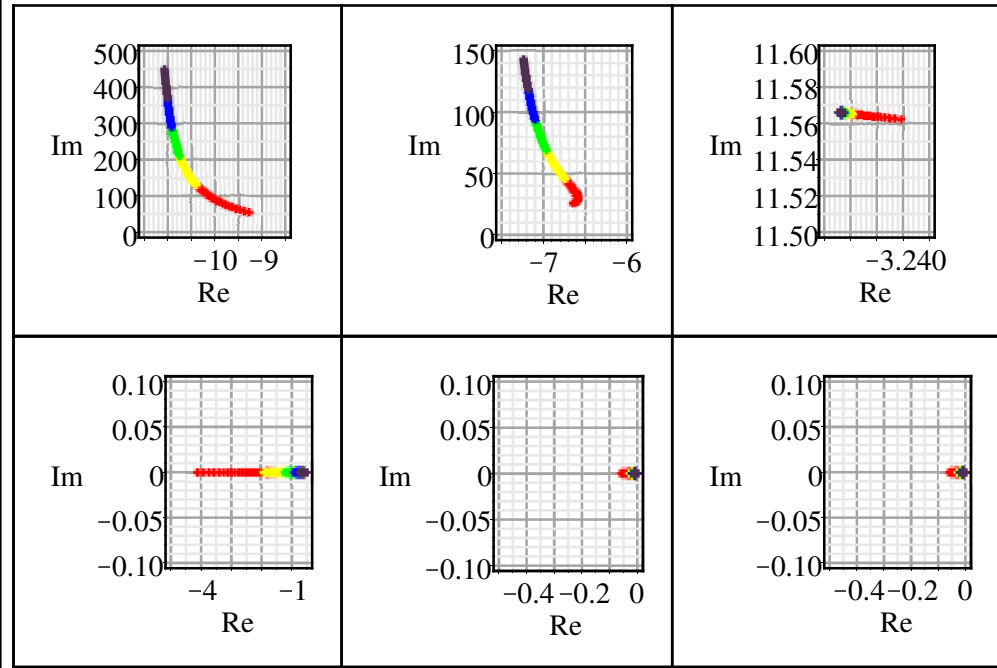
```

[> lambdy:=array([[la1,la2,la3],[la4,la5,la5]]):

```

Příloha 5: Vlastní čísla systému s dvojosým gyroskopickým stabilizátorem

```
> display(lambda, aligncolumns, symbolsize=15, size=[0.35,1]);
```





## ▼ Příloha 6: Numericá simulace systému s dvojosým gyroskopickým stabilizátorem

### ▼ Parametry systému

```

> restart:with(plots):with(linalg):with(LinearAlgebra):Digits:=
  12:with(plottools):read "knihovna.txt":
> g := 9.80665:
Hodnoty převodových funkcí pružin a tlumičů
> `mu[p,theta]` :=0.19:`mu[p,psi]` [1] :=0.42/2:`mu[p,psi]` [2] :=
  0.42/2:
  `mu[p,phi]` [1] := .6075: `mu[p,phi]` [2] := .4675:
  `mu[t,theta]` :=0.19:`mu[t,psi]` [1] :=0.42/2:`mu[t,psi]` [2] :=
  0.42/2:`mu[t,phi]` [1] := .6075: `mu[t,phi]` [2] := .4675:
Parametry pneumatických pružin
> S[4] := .22e-2: S[5] := .22e-2: S[6] := .22e-2: S[14] :=
  .7056e-1: S[15] := .7056e-1: S[16] := .7056e-1:
  V := .3e-3: `p[a]` := 100000: n:=1:
Hodnota  $\vartheta_0$ 
> theta0:=0.2435:
Délka ramen paralelogramu
> R := 0.4:
Hmotnosti členů systému
> m4:=14.34: m5:=17.56: mR:=1.34: `m[6]leh` :=14.17+13.7: `m[6]
  clo` :=80: m6:=`m[6]leh`+`m[6]clo`:
  mg:=6.7: m7:=0.8: m8:=0.8:
Poloha ložisek ramen vůči bodu S3 (střed spodní základny paralelogramu)
> x3c := 0.4: y3c := .21: z3c := 0:
Poloha středu spodní základny v systému O3
> xS3 := -1: yS3 := .65: zS3 := .786e-1:
Poloha bodu O5 v SS horní základny paralelogramu O4
> x5 := .755e-1: y5 := 0: z5 := .62e-1:
Poloha těžiště prvního rámu kardanova závěsu v SS O5
> xT5 := -.595e-1: yT5 := 0: zT5 := .316e-1:
Poloha bodu O6 v SS prvního rámu kardanova závěsu O5
> x6 := -.1426e-1: y6 := 0: z6 := .62e-1:
Momenty setrvačnosti ramen paralelogramu
> JRx := .25e-3: JRy := .160e-1: JRz := .25e-3:
Momenty setrvačnosti prvního rámu kardanova závěsu
> J5x := 3.05: J5y := 11.37: J5z := 14.34: D5xy:=0: D5xz:=0: D5yz:=
  0:
Polohy SS precesních rámečků vzhledem k SS O6
> x7:=0.400: y7:=0: z7:=0:
  x8:=-0.400: y8:=0: z8:=0:
Momenty setrvačnosti precesních rámečků
> J7x:=0.00815: J7z:=0.005: J7y:=0.00322:
  J8x:=0.00322: J8z:=0.005: J8y:=0.00815:
Momenty setrvačnosti gyroskopů
> J9z:=8.4e-3: J10z:=8.4e-3: Je:=5.56e-3:
Tuhosti tlumičů
> b_theta[1]:=1128:
  b_phi[1]:=1128:
  b_psi[1]:=1128:

```

## Setrvačné parametry soustavy druhý rám kardanova závěsu + lehátko + pacient

```

> Setrvačné parametry pacienta
Iclo_1:=11.3:Iclo_2:=15.2:Iclo_3:=0.577:
Posun těžiště pacienta
x_Tclo:=0.05:
y_Tclo:=0.05:
z_Tclo:=0.0616:
x_Tleh:=0: y_Tleh:=0: z_Tleh:=0.05:
Úhel pootočení pacienta okolo osy kolmé k rovině lehátka
delta:=0*Pi/180:
mclo:=`m[6]clo`:mleh:=`m[6]leh`:
Iclo_centralni:=matrix(3,3,[
  Iclo_3, 0, 0,
  0, Iclo_2, 0,
  0, 0, Iclo_1]):
Transformační matice pootočení pacienta okolo osy kolmé k rovině lehátka
T:=matrix(3,3,[
  cos(delta), sin(delta), 0,
  -sin(delta), cos(delta), 0,
  0, 0, 1]):
Matice setrvačnosti pootočeného pacienta
Iclo_pootoceny:=evalm(transpose(T)*Iclo_centralni*T):
Matice Steinerových členů pro posun pacienta
I_m_clo:=matrix(3,3,[
  mclo*(y_Tclo^2+z_Tclo^2), -mclo*x_Tclo*y_Tclo, -mclo*
  x_Tclo*z_Tclo,
  -mclo*x_Tclo*y_Tclo, mclo*(x_Tclo^2+z_Tclo^2), -mclo*
  y_Tclo*z_Tclo,
  -mclo*x_Tclo*z_Tclo, -mclo*y_Tclo*z_Tclo, mclo*
  (x_Tclo^2+y_Tclo^2)]):
I_o6clo:=evalm(Iclo_pootoceny+I_m_clo):
Matice setrvačnosti druhého rámu + lehátka
I_leh:=matrix(3,3,[
  1.8564+0.8*1.8564, 0, 0,
  0, 7.49+0.8*7.49, 0,
  0, 0, 9.346+0.8*9.346]):
Matice Steinerových členů pro posun těžiště druhého rámu + lehátka
I_m_leh:=matrix(3,3,[
  mleh*(y_Tleh^2+z_Tleh^2), -mleh*x_Tleh*y_Tleh, -mleh*
  x_Tleh*z_Tleh,
  -mleh*x_Tleh*y_Tleh, mleh*(x_Tleh^2+z_Tleh^2), -mleh*
  y_Tleh*z_Tleh,
  -mleh*x_Tleh*z_Tleh, -mleh*y_Tleh*z_Tleh, mleh*
  (x_Tleh^2+y_Tleh^2)]):
I_o6leh:=evalm(I_leh+I_m_leh):
Matice setrvačnosti soustavy druhý rám + lehátko + pacient
I6:=evalm(I_o6leh+I_o6clo):
Polohový vektor těžiště soustavy druhý rám + lehátko + pacient
rT6:=vector(3,[
  (mclo*x_Tclo+mleh*x_Tleh)/(mleh+mclo),
  (mclo*y_Tclo+mleh*y_Tleh)/(mleh+mclo),
  (mclo*z_Tclo+mleh*z_Tleh)/(mleh+mclo)];
zT6 := rT6[3]: xT6 := rT6[1]: yT6 :=rT6[2]:
J6x:=I6[1,1]; J6y:=I6[2,2]; J6z:=I6[3,3]; D6xy:=-I6[1,2];
D6xz:=-I6[1,3]; D6yz:=-I6[2,3];
rT6 := [ 0.0370816723834 0.0370816723834 0.0586029479930 ]
J6x := 4.49175980

```

$$\begin{aligned}
 J_{6y} &:= 29.25523980 \\
 J_{6z} &:= 28.5228 \\
 D_{6xy} &:= 0.2000 \\
 D_{6xz} &:= 0.246400 \\
 D_{6yz} &:= 0.246400
 \end{aligned}
 \tag{1.1.1.1}$$

Načtení matic linearizovaných Lagrangeových rovnic a matic momentů pružin a tlumičů

```

> read "matice.txt":
read "lagrmat2.txt":
G:=matsubs(convert(B1,matrix),diff(gyro(t),t)=rotg):
G:=matsubs(G,diff(Gyro(t),t)=-rotg):
E:=vectsubs(convert(E,vector),diff(gyro(t),t)=rotg):
E:=vectsubs(E,diff(Gyro(t),t)=-rotg):
    
```

Matice sil korekčních a kompenzačních zpětných vazeb

```

> K:=matrix(5,5,[
0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,
0 ,0 ,0 ,0 ,k25 ,
0 ,0 ,0 ,k34 ,0 ,
0 ,0 ,-k43,0 ,0 ,
0 ,-k52,0 ,0 ,0
]);
    
```

$$K := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{25} \\ 0 & 0 & 0 & k_{34} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{43} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{52} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tag{1.1.1}$$

Přidání tlumení v osách precesních rámečků

```

> B[4,4]:=bp: B[5,5]:=bp:
    
```

Určení počátečních tlaků v pneumatických pružinách

```

> assign(solve(
[subs([alpha(t)=0,beta(t)=0,zeta(t)=0],E[1])=-Ep[1,1],
subs([alpha(t)=0,beta(t)=0,zeta(t)=0],E[2])=-Ep[2,1],
subs([alpha(t)=0,beta(t)=0,zeta(t)=0],E[3])=-Ep[3,1],
-g*(m5+m6+m8+2*mg)+S[5]*(p5[1]+p5[2]),
-g*(m6+m6+m8+2*mg)+S[6]*(p6[1]+p6[2])],
[p[4],p5[1],p5[2],p6[1],p6[2]]));
    
```

Rychlost rotace gyroskopů

```

> rotg:=100000/(60)*2*Pi:
    
```

Nastavení tlumení v osách precesních rámečků

```

> bp:=5:
    
```

Nastavení zesílení korekčních a kompenzačních zpětných vazeb

```

> k25:=18e3; k34:=1400; k43:=450; k52:=400;
k25 := 18000.
k34 := 1400
k43 := 450
k52 := 400
    
```

$$\tag{1.1.2}$$

## ▼ Buzení

```

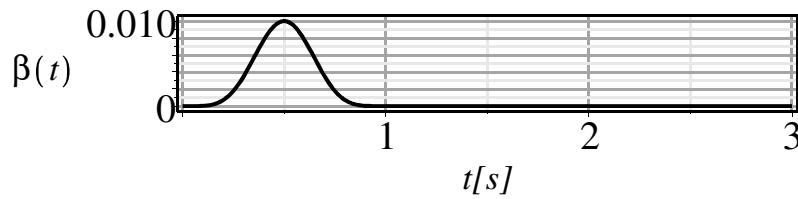
> alpha:=t->0:
beta:=t->0.01*piecewise(t<=0,0,t<1,sin(Pi/1*t)^5,0);
zeta:=t->0:
    
```

$$\beta := t \rightarrow 0.01 \text{ piecewise}(t \leq 0, 0, t < 1, \sin(\pi t)^5, 0)
 \tag{1.1.2.1}$$

```

> plot(beta(t),t=0..3,axes=boxed,gridlines,labels=['t[s]','beta
    
```

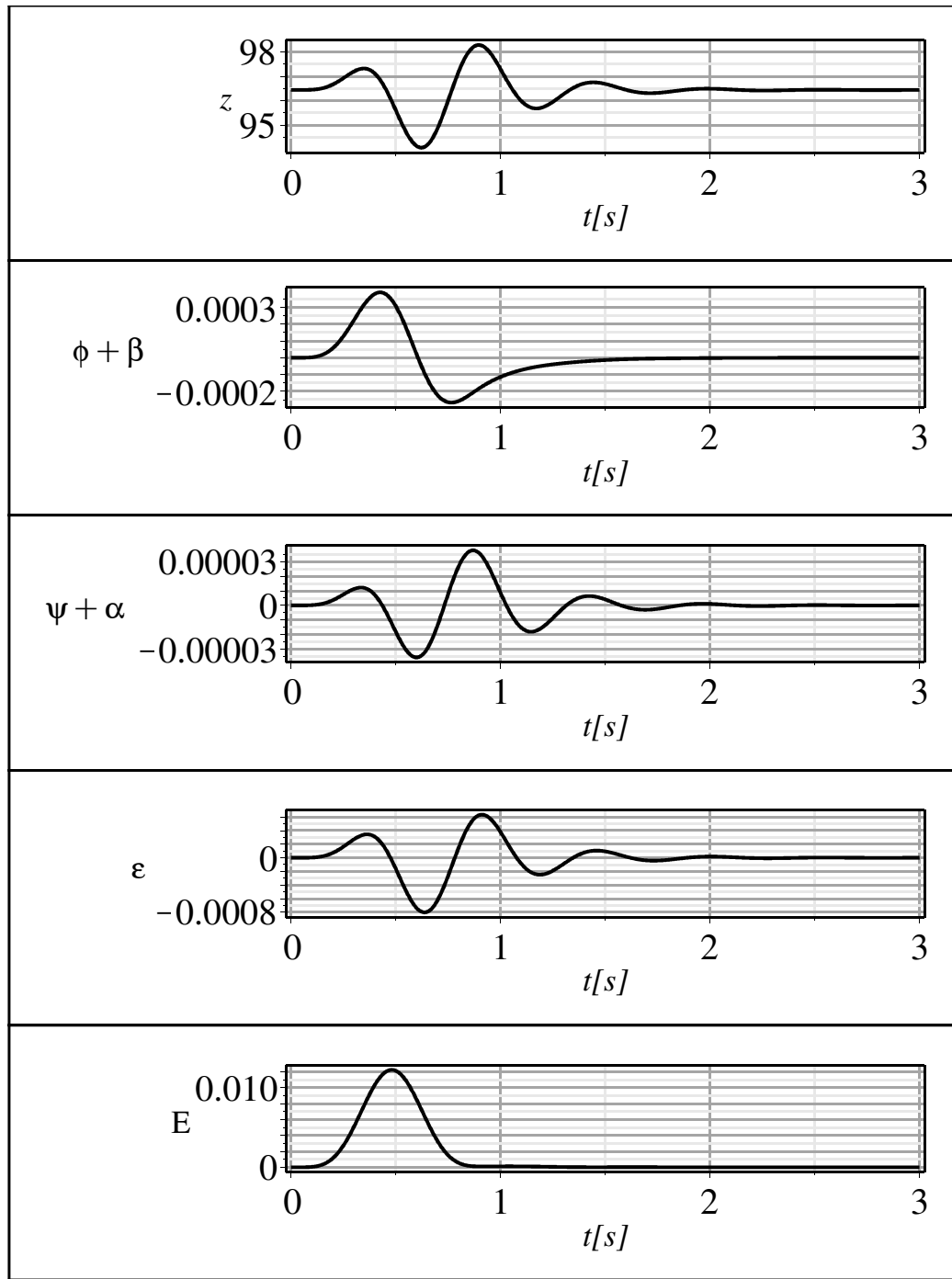
```
(t)'],color=black);
```



## Numerická simulace

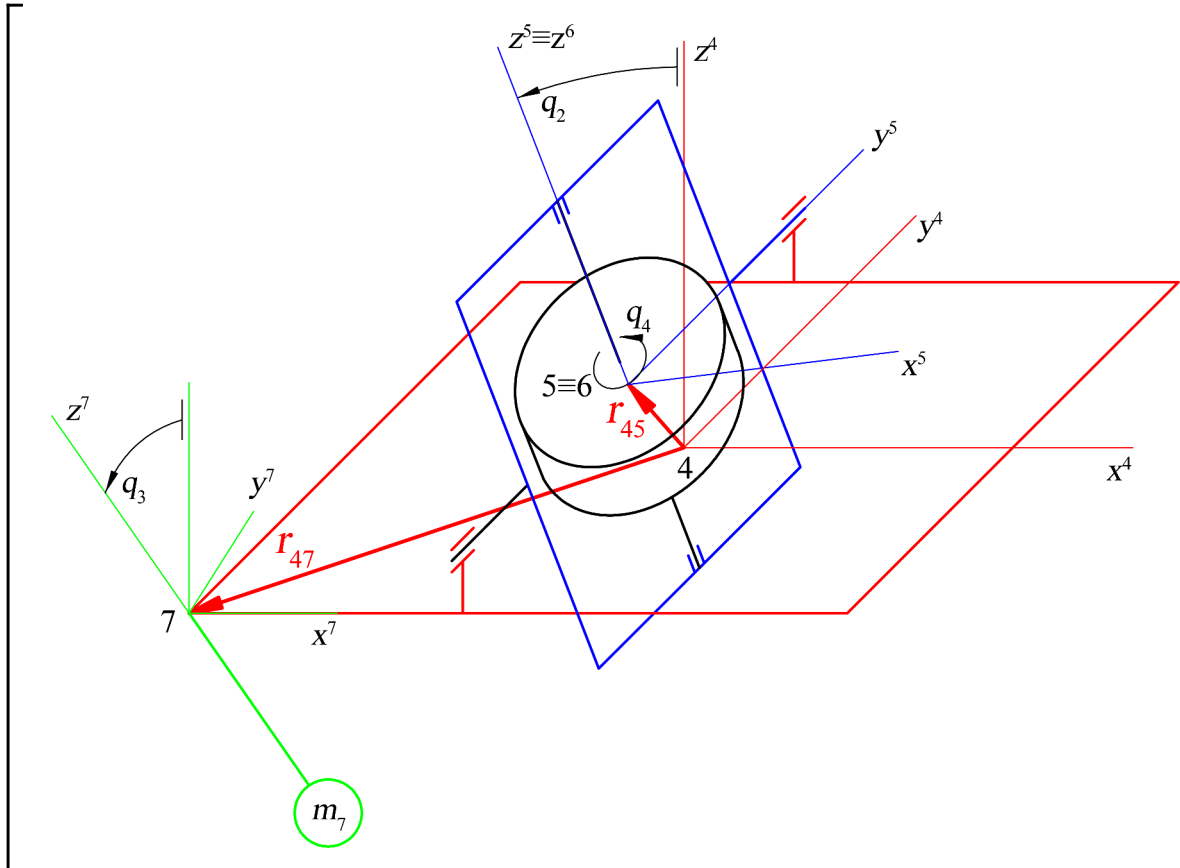
Sestavení linearizovaných rovnic

```
> RCE:=evalm(
  A &* vector(5, [diff(theta(t),t,t),diff(phi(t),t,t),diff(psi(t),t,
t),diff(epsilon(t),t,t),diff(Epsilon(t),t,t)]) +
  evalm(B+G) &* vector(5, [diff(theta(t),t),diff(phi(t),t),diff(psi
(t),t),diff(epsilon(t),t),diff(Epsilon(t),t)]) +
  evalm(K+C+Cp) &* vector(5, [theta(t),phi(t),psi(t),epsilon(t),
Epsilon(t)]) +
  E + Ep ):
> tmax:=3:
> Sol:=dsolve({
  RCE[1,1],
  RCE[2,1],
  RCE[3,1],
  RCE[4,1]-k43*alpha(t),
  RCE[5,1]-k52*beta(t),
  theta(0)=0,D(theta)(0)=0,
  phi(0)=0,D(phi)(0)=0,
  psi(0)=0,D(psi)(0)=0,
  epsilon(0)=0,D(epsilon)(0)=0,
  Epsilon(0)=0,D(Epsilon)(0)=0},
  numeric,method=rkf45,range=0..tmax,maxfun=20000000,output=
  listprocedure):
> plt:=convert(matrix(5,1),Array):
> plt[1,1]:=plots[odeplot](Sol,[[t,(R*sin(theta(t)+theta0)+zeta(t))
*1000,color=black,thickness=1]],numpoints=1000,labels=['t[s]',
'z'],gridlines=true):
> plt[2,1]:=plots[odeplot](Sol,[[t,phi(t)+beta(t),color=black,
thickness=1]],numpoints=1000,labels=['t[s]','phi+beta'],
gridlines=true):
> plt[3,1]:=plots[odeplot](Sol,[[t,psi(t)+alpha(t),color=black,
thickness=1]],numpoints=1000,labels=['t[s]','psi+alpha'],
gridlines=true):
> plt[4,1]:=plots[odeplot](Sol,[[t,epsilon(t),color=black,
thickness=1]],numpoints=1000,labels=['t[s]','varepsilon'],
gridlines=true):
> plt[5,1]:=plots[odeplot](Sol,[[t,Epsilon(t),color=black,
thickness=1]],numpoints=1000,labels=['t[s]','Epsilon'],gridlines=
true):
> plots[display](plt,axes=boxed,gridlines,aligncolumns=[1],size=[1,
0.25]);
```



# Příloha 7: Sestavení pohybových rovnic jednoosého stabilizátoru

```
> restart; with(linalg): read "knihovna.txt":
```



## Specifikace buzení

Specifikace matice rotačních buzení - rotace postupně okolo x<sub>3</sub> (z - svislá), x<sub>1</sub> (x - podélná), x<sub>2</sub> (y - příčná)

```
> T23 := M2 &* M1 &* M3;
```

$$T_{23} := (M2 \&* M1) \&* M3 \quad (1.1)$$

```
> M2 := Matrix([[ cos(alpha2(t)) , 0 , sin(alpha2(t)) ],
                [ 0 , 1 , 0 ],
                [ -sin(alpha2(t)) , 0 , cos(alpha2(t)) ]]);
```

$$M2 := \begin{bmatrix} \cos(\alpha_2(t)) & 0 & \sin(\alpha_2(t)) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha_2(t)) & 0 & \cos(\alpha_2(t)) \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

```
> M1 := Matrix([[ 1 , 0 , 0 ],
                [ 0 , cos(alpha1(t)) , -sin(alpha1(t)) ],
                [ 0 , sin(alpha1(t)) , cos(alpha1(t)) ]]);
```

$$M1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_1(t)) & -\sin(\alpha_1(t)) \\ 0 & \sin(\alpha_1(t)) & \cos(\alpha_1(t)) \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

```
> M3:=Matrix([[ cos(alpha3(t)) , -sin(alpha3(t)) , 0 ],
              [ sin(alpha3(t)) ,  cos(alpha3(t)) , 0 ],
              [ 0 , 0 , 1 ]]);
```

$$M3 := \begin{bmatrix} \cos(\alpha_3(t)) & -\sin(\alpha_3(t)) & 0 \\ \sin(\alpha_3(t)) & \cos(\alpha_3(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

```
> T23:=evalm(T23):
```

Specifikace vektoru translačních kinematických buzení

```
> r12_e:= vector(3, [e1(t), e2(t), e3(t)]);
```

$$r12_e := \begin{bmatrix} e1(t) & e2(t) & e3(t) \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

## Specifikace transformačních matic

Transformační matice pro natočení rámu (SS4) vůči základnímu rámu (SS3) v ose x1\_3 (x - podélná v SS3) o úhel q1

```
> T34:=Matrix([[ 1 , 0 , 0 ],
              [ 0 , cos(q1(t)) , -sin(q1(t)) ],
              [ 0 , sin(q1(t)) ,  cos(q1(t)) ]]);
```

$$T34 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q1(t)) & -\sin(q1(t)) \\ 0 & \sin(q1(t)) & \cos(q1(t)) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Transformační matice pro natočení precesního rámečku (SS5) vůči rámu (SS4) v ose x2\_4 (y - příčná v SS4) o úhel q2

```
> T45:=Matrix([[ cos(q2(t)) , 0 , sin(q2(t)) ],
              [ 0 , 1 , 0 ],
              [ -sin(q2(t)) , 0 , cos(q2(t)) ]]);
```

$$T45 := \begin{bmatrix} \cos(q2(t)) & 0 & \sin(q2(t)) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(q2(t)) & 0 & \cos(q2(t)) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Transformační matice pro natočení gyroskopu (SS6) vůči precesnímu rámečku (SS5) v ose x3\_5 (z - svislá v SS5) o úhel q4

```
> T56:=Matrix([[ cos(q4(t)) , -sin(q4(t)) , 0 ],
              [ sin(q4(t)) ,  cos(q4(t)) , 0 ],
              [ 0 , 0 , 1 ]]);
```

$$T56 := \begin{bmatrix} \cos(q4(t)) & -\sin(q4(t)) & 0 \\ \sin(q4(t)) & \cos(q4(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Transformační matice pro natočení kyvadla vůči rámu (SS4) v ose x1\_3 (x - podélná v SS3) o úhel q3

```
> T47:=Matrix([[ 1 , 0 , 0 ],
              [ 0 , cos(q3(t)) , -sin(q3(t)) ],
              [ 0 , sin(q3(t)) ,  cos(q3(t)) ]]);
```

$$T47 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q3(t)) & -\sin(q3(t)) \\ 0 & \sin(q3(t)) & \cos(q3(t)) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

## Specifikace polohových vektorů

Poloha souřadnicového systému 2 v systému 1 (poloha geometrického středu základního

```

[ rámu)
[ > r2_1:=r12_e;
[                                     r2_1:=r12_e
[                                     (3.1)

```

Polohový vektor těžiště rámu v sořadnicovém systému 4

```

[ > rT4_4:=vector(3);
[                                     rT4_4:=array(1..3, [ ])
[                                     (3.2)

```

Polohový vektor těžiště rámu v SS1

```

[ > rT4_1:=T23 &* T34 &* rT4_4 + r2_1:

```

Polohový vektor počátku SS4 (geometrický střed rámu) v SS1 (r34\_3 je polohový vektor počátku SS4 v SS3)

```

[ > r34_3:=vector(3):
[     r4_1:=T23 &* r34_3 + r2_1:

```

Polohový vektor počátku SS5 (geometrický střed precesního rámečku) v SS1 (r45\_4 je polohový vektor počátku SS5 v SS4)

```

[ > r45_4:=vector(3):
[     r5_1:=T23 &* T34 &* r45_4 + r2_1:

```

Polohový vektor těžiště precesního rámečku v SS1

```

[ > rT5_5:=vector(3):
[     rT5_1:=T23 &* T34 &* T45 &* rT5_5 + r2_1:

```

Polohový vektor počátku SS6 (geometrický střed rotoru gyroskopu) v SS1 (r56\_5 je polohový vektor počátku SS6 v SS5)

```

[ > r56_5:=vector(3):
[     r6_1:=T23 &* T34 &* T45 &* r56_5 + r2_1:

```

Polohový vektor těžiště rotoru gyroskopu v SS1

```

[ > rT6_6:=vector(3):
[     rT6_1:=T23 &* T34 &* T45 &* T56 &* rT6_6 + r2_1:

```

Polohový vektor počátku SS7 (závěs matematického kyvadla) v SS1 (vektor r47\_4 je polohový vektor počátku SS7 v SS4)

```

[ > r47_4:= vector(3):
[     r7_1:=T23 &* T34 &* r47_4 + r2_1:

```

Polohový vektor hmoty matematického kyvadla v SS1

```

[ > rT7_7:=vector(3, [0, 0, -1]):
[     rT7_1:=T23 &* T34 &* ((T47 &* rT7_7)+r47_4) + r2_1:

```

## ▼ Definice vektorů rychlostí a úhlových rychlostí

Vektor unášivé rychlosti SS4 v SS1

```

[ > v4_1:=vectdiff(evalm(r4_1), t):

```

Vektor unášivé rychlosti těžiště 4 v SS1

```

[ > vT4_1:=vectdiff(evalm(rT4_1), t):

```

Vektor unášivé rychlosti SS5 v SS1

```

[ > v5_1:=vectdiff(evalm(r5_1), t):

```

Vektor unášivé rychlosti těžiště 5 v SS1

```

[ > vT5_1:=vectdiff(evalm(rT5_1), t):

```

Vektor unášivé rychlosti SS6 v SS1

```

[ > v6_1:=vectdiff(evalm(r6_1), t):

```

Vektor unášivé rychlosti těžiště 6 v SS1

```

[ > vT6_1:=vectdiff(evalm(rT6_1), t):

```

Vektor unášivé rychlosti SS7 v SS1

```

[ > v7_1:=vectdiff(evalm(r7_1), t):

```

Vektor unášivé rychlosti těžiště 7 v SS1



```

> vT7_1:=vectdiff(evalm(rT7_1),t):
Vektor úhlové rychlosti rotace α1
> Omega_a1:=evalm(diff(alpha1(t),t)*vector(3,[1,0,0]));
      Omega_a1 := [ d/dt α1(t)  0  0 ]
(4.1)
Vektor úhlové rychlosti rotace α2
> Omega_a2:=evalm(diff(alpha2(t),t)*vector(3,[0,1,0]));
      Omega_a2 := [ 0  d/dt α2(t)  0 ]
(4.2)
Vektor úhlové rychlosti rotace α3
> Omega_a3:=evalm(diff(alpha3(t),t)*vector(3,[0,0,1]));
      Omega_a3 := [ 0  0  d/dt α3(t) ]
(4.3)
Vektor úhlové rychlosti rotace q1
> Omega_q1:=evalm(diff(q1(t),t)*vector(3,[1,0,0]));
      Omega_q1 := [ d/dt q1(t)  0  0 ]
(4.4)
Vektor úhlové rychlosti rotace q2
> Omega_q2:=evalm(diff(q2(t),t)*vector(3,[0,1,0]));
      Omega_q2 := [ 0  d/dt q2(t)  0 ]
(4.5)
Vektor úhlové rychlosti rotace q4
> Omega_q4:=evalm(diff(q4(t),t)*vector(3,[0,0,1]));
      Omega_q4 := [ 0  0  d/dt q4(t) ]
(4.6)
Vektor úhlové rychlosti rotace q3
> Omega_q3:=evalm(diff(q3(t),t)*vector(3,[1,0,0]));
      Omega_q3 := [ d/dt q3(t)  0  0 ]
(4.7)
Vektor úhlové rychlosti rotace SS4
> Omega4:=simplify(evalm(transpose(T34) &* (transpose(M2) &*
(transpose(M1) &* Omega_a3 + Omega_a1) + Omega_a2) + Omega_q1 ),
trig):
Vektor úhlové rychlosti rotace SS5
> Omega5:=simplify(evalm( transpose(T45) &* (transpose(T34) &*
(transpose(M2) &* (transpose(M1) &* Omega_a3 + Omega_a1) + Omega_a2)
+ Omega_q1) + Omega_q2 ),trig):
Vektor úhlové rychlosti rotace SS6 (úhlová rychlost gyroskopu)
> Omega6:=simplify(evalm( transpose(T56) &* (transpose(T45) &*
(transpose(T34) &* (transpose(M2) &* (transpose(M1) &* Omega_a3 +
Omega_a1) + Omega_a2) + Omega_q1) + Omega_q2) + Omega_q4 ),trig):
Vektor úhlové rychlosti rotace SS7 (úhlová rychlost kyvadla)
> Omega7:=simplify(evalm( transpose(T47) &* (transpose(T34) &*
(transpose(M2) &* (transpose(M1) &* Omega_a3 + Omega_a1) + Omega_a2)
+ Omega_q1) + Omega_q3),trig):

```

## ▼ Kinetické a potenciální energie

### ▼ Kinetická energie rámu

```

> T4:=T4_1 + T4_2 + T4_3:
kinetická energie unášivého pohybu rámu
> T4_1:=1/2*m4*sum(v4_1[i]^2,i=1..3):
kinetická energie rotace rámu vůči referenčnímu bodu (počátek SS4)
> J4:=matrix(3,3): #tenzor setrvačnosti rámu k počátku SS4
> T4_3:=evalm(1/2* transpose(Omega4) &* J4 &* Omega4):
prostřední člen Königovy věty
> T4_2:=evalm( m4* transpose(v4_1) &* (vT4_1 - v4_1) ):

```

### ▼ Kinetická energie precesního rámečku

```

> T5:=T5_1 + T5_2 + T5_3:
kinetická energie unášivého pohybu rámu
> T5_1:=1/2*m5*sum(v5_1[i]^2,i=1..3):
kinetická energie rotace rámu vůči referenčnímu bodu (počátek SS4)
> J5:=matrix(3,3): #tenzor setrvačnosti precesního rámečku
> T5_3:=evalm(1/2* transpose(Omega5) &* J5 &* Omega5):
prostřední člen Königovy věty
> T5_2:=evalm( m5* transpose(v5_1) &* (vT5_1 - v5_1) ):

```

### ▼ Kinetická energie gyroskopu

```

> T6:=T6_1 + T6_2 + T6_3:
kinetická energie unášivého pohybu rámu
> T6_1:=1/2*m6*sum(v6_1[i]^2,i=1..3):
kinetická energie rotace rámu vůči referenčnímu bodu (počátek SS4)
> J6:=matrix(3,3): #tenzor setrvačnosti rámu vzhledem k počátku SS4
> T6_3:=evalm(1/2* transpose(Omega6) &* J6 &* Omega6):
prostřední člen Königovy věty
> T6_2:=evalm( m6* transpose(v6_1) &* (vT6_1 - v6_1) ):

```

### ▼ Kinetická energie kyvadla

```

> T7:=T7_1 + T7_2 + T7_3:
kinetická energie unášivého pohybu kyvadla
> T7_1:=1/2*m7*sum(v7_1[i]^2,i=1..3):
kinetická energie rotace kyvadla vůči referenčnímu bodu (počátek SS4)
> J7:=matrix(3,3): #tenzor setrvačnosti hmoty kyvadla
> T7_3:=evalm(1/2* transpose(Omega7) &* J7 &* Omega7):
prostřední člen Königovy věty
> T7_2:=evalm( m7* transpose(v7_1) &* (vT7_1 - v7_1) ):

```

### ▼ Potenciální energie

```

> U4:= m4*g*evalm(rT4_1)[3]: #rám
> U5:= m5*g*evalm(rT5_1)[3]: #precesní rámeček
> U6:= m6*g*evalm(rT6_1)[3]: #gyroskop
> U7:= m7*g*evalm(rT7_1)[3]: #kyvadlo

```

## ▼ Celkové kinetické a potenciální energie

```

[ Kinetická energie systému bez kyvadla (rám, precesní rámeček, gyroskop)
> T_1:= T4 + T5 + T6 + T7:
[ Kinetická energie kyvadla bez mechanického systému
> T_2:= T4 + T5 + T6 + T7:
[ Celková kinetická energie mechanického systému
> T:= T_1 + T_2:
[ Potenciální energie systému bez kyvadla (rám, precesní rámeček, gyroskop)
> U_1:= U4 + U5 + U6:
[ Potenciální energie kyvadla bez mechanického systému
> U_2:= U7:
[ Celková potenciální energie mechanického systému
> U:= U_1 + U_2:

```

## ▼ Lagrangeovy rovnice

### ▼ Derivace kinetické energie podle časové derivace

souřadnic  $\left( \frac{d}{dt} q_i \right)$

```

[ TT_1:=subs(diff(q1(t),t)=dQ1,T_1):
> dT_1_dq1:=subs(dQ1=diff(q1(t),t),
diff(TT_1,dQ1)):
[ TT_1:=subs(diff(q2(t),t)=dQ2,T_1):
> dT_1_dq2:=subs(dQ2=diff(q2(t),t),
diff(TT_1,dQ2)):
[ TT_1:=subs(diff(q4(t),t)=dQ4,T_1):
> dT_1_dq4:=subs(dQ4=diff(q4(t),t),
diff(TT_1,dQ4)):
[ TT_2:=subs(diff(q3(t),t)=dQ3,T_2):
> dT_2_dq3:=subs(dQ3=diff(q3(t),t),
diff(TT_2,dQ3)):

```

### ▼ Derivace kinetického potenciálu podle času

```

[> dT_1_dq1_t:=diff(dT_1_dq1,t):
[> dT_1_dq2_t:=diff(dT_1_dq2,t):
[> dT_1_dq4_t:=diff(dT_1_dq4,t):
[> dT_2_dq3_t:=diff(dT_2_dq3,t):

```

### ▼ Derivace Lagrangeovy funkce podle souřadnice

```

[> LL1:=subs(diff(q1(t),t)=dq1,q1(t)=q1,T_1-U_1):
> dL_1_q1:=subs(q1=q1(t),dq1=diff(q1(t),t),
diff(LL1,q1)):
[> LL1:=subs(diff(q2(t),t)=dq2,q2(t)=q2,T_1-U_1):
> dL_1_q2:=subs(q2=q2(t),dq2=diff(q2(t),t),
diff(LL1,q2)):
[> LL1:=subs(diff(q4(t),t)=dq4,q4(t)=q4,T_1-U_1):
> dL_1_q4:=subs(q4=q4(t),dq4=diff(q4(t),t),
diff(LL1,q4)):

```

```
[> LL2:=subs(diff(q3(t),t)=dq3,q3(t)=q3,T_2-U_2):
[> dL_2_q3:=subs(q3=q3(t),dq3=diff(q3(t),t),
diff(LL2,q3)):
```

### ▼ Lagrangeovy rovnice

```
[Lagrangeova rovnice pro q1
[> Lq1:=simplify(dT_1_dq1_t-dL_1_q1):
[Lagrangeova rovnice pro q2
[> Lq2:=simplify(dT_1_dq2_t-dL_1_q2):
[Lagrangeova rovnice pro q3
[> Lq3:=simplify(dT_2_dq3_t-dL_2_q3):
[Lagrangeova rovnice pro q4
[> Lq4:=simplify(dT_1_dq4_t-dL_1_q4):
```

```
[> save Lq1,Lq2,Lq3,Lq4,dT_1_dq4_t,dL_1_q4, "lagrange.txt";
```

# Příloha 8: Momenty pružin a tlumičů jednoosé platformy

```
[> restart :
```

## ▼ Moment sil pružin

```
[> Mp := kp1*q1(t) + Mp0;
```

$$Mp := kp1 q1(t) + Mp0 \quad (1.1)$$

## ▼ Moment sil tlumičů

```
[> Mt := b1*diff(q1(t), t);
```

$$Mt := b1 \left( \frac{d}{dt} q1(t) \right) \quad (2.1)$$

## ▼ Moment pasivního odporu v závěsu kyvadla

```
[> Mpas := bp3*diff(q3(t) - q1(t), t);
```

$$Mpas := bp3 \left( \frac{d}{dt} q3(t) - \left( \frac{d}{dt} q1(t) \right) \right) \quad (3.1)$$

## ▼ Kompenzační moment (moment na rámu dle natočení gyroskopu)

```
[> Mk1 := k1*q2(t);
```

$$Mk1 := k1 q2(t) \quad (4.1)$$

## ▼ Korekční moment

```
[> Mk2 := k2*q3(t);
```

$$Mk2 := k2 q3(t) \quad (5.1)$$

```
[> save Mp, Mt, Mpas, Mk1, Mk2, "momenty.txt":
```

## Příloha 9: Optimalizace korekčního a kompenzačního systému horního rámu pro boční zrychlení

```
> restart: with(linalg): with(plots): read "lagrange.txt": read "momenty.txt":
> read("step5.txt"):
> g:=9.81:
```

### Zadání rozměrů, hmotností a tenzorů setrvačnosti

Setrvačné parametry gyroskopu (člen 6). Tensor setrvačnosti je vzhledem k těžišti (které splývá s SS6)

```
> m6:=6.7:
> J6:=Matrix([[ 5.6e-3 , 0 , 0 ],
               [ 0 , 5.6e-3 , 0 ],
               [ 0 , 0 , 8.4e-3 ]]);
```

$$J6 := \begin{bmatrix} 0.0056 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0056 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0084 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Setrvačné parametry precesního rámečku (člen 5). Tensor setrvačnosti je vzhledem k těžišti (které splývá s SS5 a SS6)

```
> m5:=0.8:
> J5:=Matrix([[ 8.15e-3 , 0 , 0 ],
               [ 0 , 3.22e-3 , 0 ],
               [ 0 , 0 , 5e-3 ]]);
```

$$J5 := \begin{bmatrix} 0.00815 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00322 & 0 \\ 0 & 0 & 0.005 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Setrvačné parametry hmoty kyvadla (člen 7). Tensor setrvačnosti je vzhledem k SS7.

```
> m7:=0.01: J7:=matrix(3,3,[0,0,0,0,0,0,0,0,0])+m7*matrix(3,3,[1^2,0,0,0,1^2,0,0,0,0]); J7:=evalm(J7);
```

$$J7 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0.01 \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J7 := \begin{bmatrix} 0.01\rho & 0. & 0. \\ 0. & 0.01\rho & 0. \\ 0. & 0. & 0. \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

### Setrvačné parametry rámu (člen 4) a poloha těžiště soustavy člověk-rám

- Tensor setrvačnosti je vzhledem k počátku SS4
- těžiště samotného rámu splývá s SS4

```
> m4:= m4ram + m4clo: m4ram:=28: m4clo:=80:
```

```

Tenzor setrvačnosti rámu vzhledem k jeho vlastnímu těžišti
> J4T_ram:=Matrix( [[1.8564+0.8*1.8564 , 0 , 0],
                    [0 , 7.49+0.8*7.49 , 0],
                    [0 , 0 , 9.346+0.8*
                    9.346]]):
polohový vektor těžiště těla člověka v SS4
> rT4clo_4:=vector(3,[ 0.05 , 0.05 , 0.0616 ]):
polohový vektor těžiště samotného rámu v SS4
> rT4ram_4:=vector(3,[ 0 , 0 , 0.05 ]):
matice Steinerových členů rámu
> D_T4_ram:=m4ram*Matrix([[ rT4ram_4[2]^2 + rT4ram_4[3]^2 , -
rT4ram_4[1]*rT4ram_4[2] , -rT4ram_4[1]*rT4ram_4[3] ],
[ -rT4ram_4[1]*rT4ram_4[2] ,
rT4ram_4[1]^2 + rT4ram_4[3]^2 , -rT4ram_4[2]*rT4ram_4[3] ],
[ -rT4ram_4[1]*rT4ram_4[3] , -
rT4ram_4[2]*rT4ram_4[3] , rT4ram_4[1]^2 + rT4ram_4[2]^2 ]]):

```

Tenzor setrvačnosti rámu vzhledem k počátku SS4

```

> J4_ram:= evalm( J4T_ram + D_T4_ram ):

```

Tenzor setrvačnosti člověka vůči svému vlastnímu těžišti

```

> J4T_clo:=Matrix([[ 0.577, 0 , 0 ],
                   [0 , 15.2 , 0 ],
                   [0 , 0 , 11.3]]):

```

```

> delta:=0*Pi/180:

```

Transformace pro pootočení o úhel  $\delta$  okolo vertikální osy

```

> Tdelta:=Matrix([[ cos(delta) , -sin(delta) , 0 ],
                  [ sin(delta) , cos(delta) , 0 ],
                  [ 0 , 0 , 1 ]]):

```

matice Steinerových členů člověka

```

> D_T4_clo:=m4clo*Matrix([[ rT4clo_4[2]^2 + rT4clo_4[3]^2 , -
rT4clo_4[1]*rT4clo_4[2] , -rT4clo_4[1]*rT4clo_4[3] ],
[ -rT4clo_4[1]*rT4clo_4[2] ,
rT4clo_4[1]^2 + rT4clo_4[3]^2 , -rT4clo_4[2]*rT4clo_4[3] ],
[ -rT4clo_4[1]*rT4clo_4[3] , -
rT4clo_4[2]*rT4clo_4[3] , rT4clo_4[1]^2 + rT4clo_4[2]^2 ]]):

```

Tenzor setrvačnosti člověka pootočeného o úhel  $\delta$  okolo vertikální osy vzhledem k počátku SS4

```

> J4_clo:= evalm(transpose(Tdelta) &* J4T_clo &* Tdelta + D_T4_clo)
:

```

Tenzor setrvačnosti členu 4 (rám + člověk) vzhledem k počátku SS4

```

> J4:= evalm( J4_ram + J4_clo );

```

$$J4 := \begin{bmatrix} 4.49208480000000 & -0.200000000000000 & -0.246400000000000 \\ -0.200000000000000 & 29.2555648000000 & -0.246400000000000 \\ -0.246400000000000 & -0.246400000000000 & 28.5228000000000 \end{bmatrix} \quad (1.1.1)$$

Poloha těžiště soustavy člověk-rám v SS4

```

> rT4_4:=vector(3):
> for i from 1 by 1 to 3 do
    rT4_4[i]:= (m4clo*rT4clo_4[i]+m4ram*rT4ram_4[i])/m4;
end do;

```

$$\begin{aligned} rT4_4_1 &:= 0.03703703704 \\ rT4_4_2 &:= 0.03703703704 \\ rT4_4_3 &:= 0.05859259259 \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Poloha těžiště gyroskopu (člen 6) vůči SS6

```

> rT6_6:=vector(3, [0, 0, 0]):

```

: Optimalizace korekčního a kompenzačního systému horního rámu pro boční zrychlení

```

[ Poloha SS6 vůči SS5
[ > r56_5:=vector(3,[0,0,0]):
[ Poloha těžiště precesního rámečku (člen 5) vůči SS5
[ > rT5_5:=vector(3,[0,0,0]):
[ Poloha počátku SS5 vůči SS4
[ > r45_4:=vector(3,[0,0,0]):
[ Poloha počátku SS7 vůči SS4
[ > r47_4:=vector(3,[0.5,0.5,0]):
[ délka závěsu kyvadla
[ > #1:=0.75:
[ Poloha počátku SS4 vůči SS3 (poloha bodu do nějž bude aplikováno rotační a translační
[ buzení)
[ > r34_3:=vector(3,[0,0,0]):
[ > #Specifikovat buzení, přidat momenty pružin a tlumičů, radiální
[ korekce, vynechat Lq4 a může se vesele počítat....
[ > Mkk1:=k1*q2(t) + d1*diff(q2(t),t) + i1*q02(t);
[
[ 
$$Mkk1 := k1 q2(t) + d1 \left( \frac{d}{dt} q2(t) \right) + i1 q02(t) \quad (1)$$

[ > Mkk2:=k2*q3(t) + d2*diff(q3(t),t) + i2*q03(t);
[
[ 
$$Mkk2 := k2 q3(t) + d2 \left( \frac{d}{dt} q3(t) \right) + i2 q03(t) \quad (2)$$


```

## ▼ Specifikace rovnic (přidání momentů pružin, tlumičů, pasivních odporů, radiálních korekcí)

```

[ > rce:=array(1..5):
[ > rce[1]:=Lq1 + Mp + Mt + Mkk1 - Mpas:
[ > rce[2]:=Lq2 + Mkk2 + bp*diff(q2(t),t):
[ > rce[3]:=Lq3 + Mpas:
[ > rce[4]:=diff(q02(t),t) - q2(t):
[ > rce[5]:=diff(q03(t),t) - q3(t):

```

## ▼ Určení vyvažovacího momentu Mp0

```

[ > rceMp0:=eval(subs(Mpor=0,q1(t)=0,q2(t)=0,q3(t)=0,q02(t)=0,q03(t)=0,
[ q4(t)=0,e1(t)=0,e2(t)=0,e3(t)=0,alpha1(t)=0,alpha2(t)=0,alpha3(t)=0,
[ rce[1]));
[
[ 
$$rceMp0 := Mp0 + 39.24000000000000 \quad (3.1)$$

[ > Mp0:=solve(rceMp0,Mp0);
[
[ 
$$Mp0 := -39.24000000 \quad (3.2)$$


```

## ▼ Specifikace buzení, korekcí, rotace gyroskopu, tlumení, tuhosti pružin

```

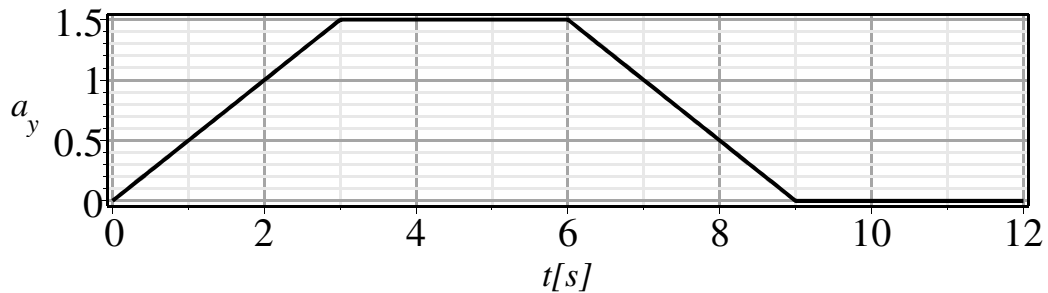
[ naklání okolo podélné osy  $\alpha_1$ 
[ > alpha1:=t->0:
[ naklání okolo příčné osy  $\alpha_2$ 

```



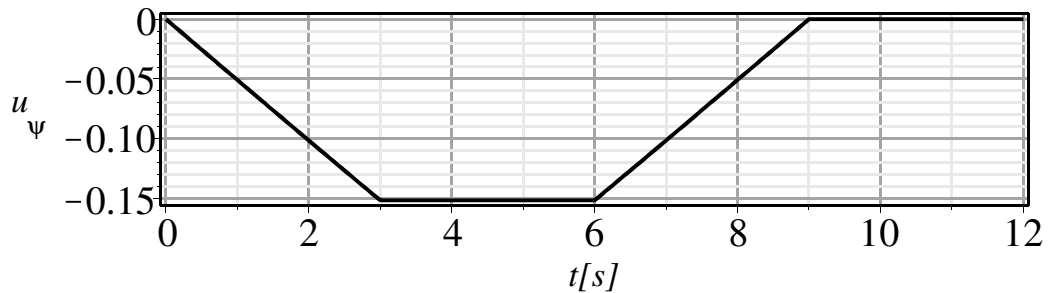
: Optimalizace korekčního a kompenzačního systému horního rámu pro boční zrychlení

```
> alpha2:=t->0:  
natáčení okolo vodorovné osy  $\alpha_2$   
> alpha3:=t->0:  
translace v podélném směru  $x_1$   
> e1:=t->0:  
translace v příčném směru  $x_2$   
> a_e2:=t->piecewise (t<3,0.5*t,t<=6,1.5,t<=9,4.5-0.5*t,0): e2:=unapply  
(int(int(a_e2(tau),tau=0..Tau),Tau=0..t),t):  
plot(diff(e2(t),t,t),t=0..12,gridlines, labels=['t[s]','a[y]'],axes=  
boxed,size=[1,0.27],color=black);
```



Žádaná odezva rámu stabilizátoru

```
> plot(-arctan(diff(e2(t),t,t)/9.81),t=0..12,gridlines,labels=['t[s]','  
'u[psi]'],axes=boxed,size=[1,0.27],color=black);
```



translace ve svislém směru  $x_3$

```
> e3:=t->0:  
koeficient tuhosti kompenzačního systému  
> #k1:=420;  
koeficient tuhosti korekčního systému  
> #k2:=0;  
tlumení v závěsu kyvadla  
parametry kyvadla  
> m7:=0.01: l:=g/(4*Pi^2*f_kyv^2): f_kyv:=8:  
bp3:=0.25*sqrt(4*m7^2*l^3*g):  
specifikace rychlosti rotace gyroskopu  
> q4:=t->rotg*t:  
> rotg:=100000/60*2*Pi:  
specifikace tuhosti tlumiče rámu  
> b1:=100:  
specifikace tuhosti pružiny rámu  
> kp1:=1500:  
Specifikace tlumení precesního rámečku  
> bp:=0.1:  
Poruchový moment
```

: Optimalizace korekčního a kompenzačního systému horního rámu pro boční zrychlení

```

> Mpor:=0:#piecewise(t<0,0,50):
Cas ustaleni
> t_u:=1:
Požadovaný průběh ustálení úhlu q1
> u:=unapply(-arctan(diff(e2(t),t,t)/9.81),t);
u := t → -arctan(0.1019367992 piecewise(t ≤ 3., 0.5000000000 t, t ≤ 6., 1.5000000000, t ≤ 9.,
4.5000000000 - 0.5000000000 t, 9. < t, 0.))

```

(4.1)

## ▼ Výpočet simulací změn k1 a k2

```

> imax:=10; jmax:=imax; # pocet simulaci
body:=500; # pocet bodu v simulaci
tmax:=12; # cas do ktereho bezi simulace
fvzork:=231.2:
k1min:=500: k1max:=1600: k2min:=150: k2max:=500:
i1min:=0: i1max:=2000: i2min:=0: i2max:=1600:
d1min:=0: d1max:=2000: d2min:=0: d2max:=80:
krit:=Array(0..imax,0..jmax): krit2:=Array(0..imax,0..jmax):
imax := 10
jmax := 10
body := 500
tmax := 12

```

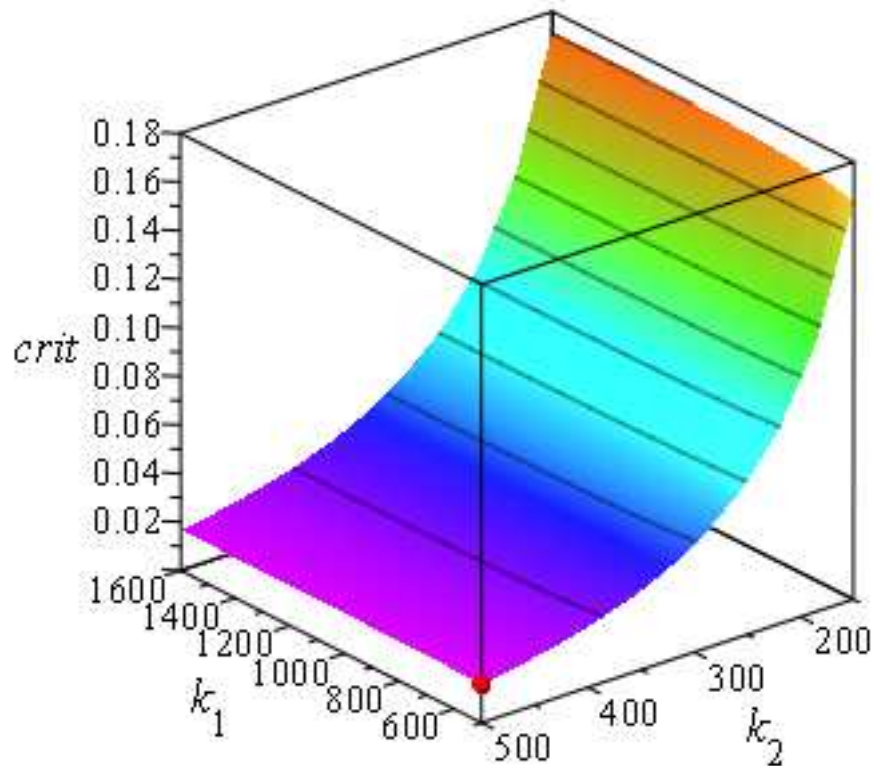
(5.1)

```

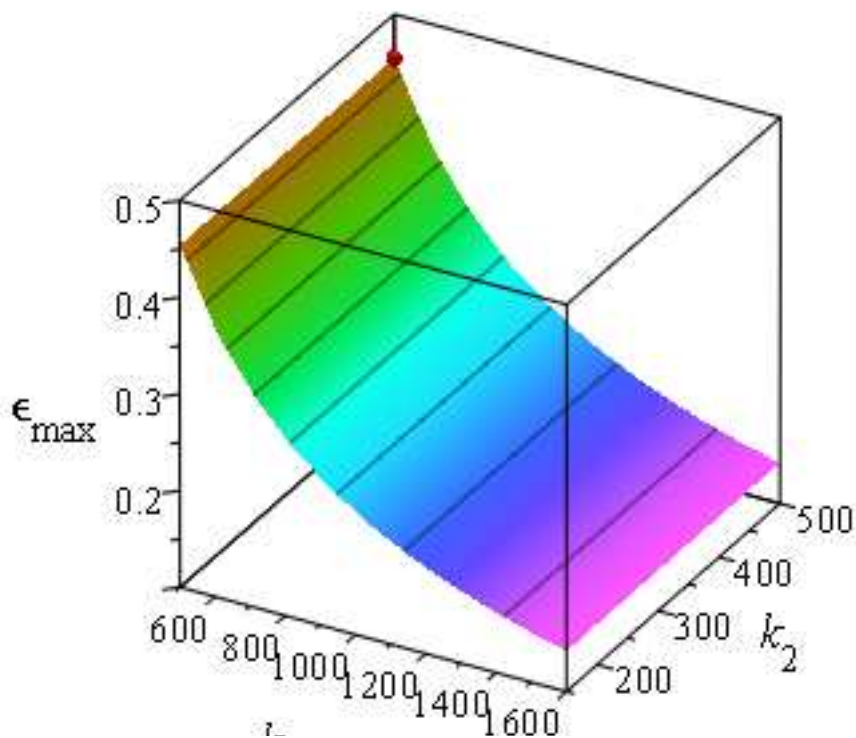
> d1:=0: d2:=0: i1:=0: i2:=0:
> for i from 0 by 1 to imax do
k1:=k1min+i*(k1max-k1min)/imax:
for j from 0 by 1 to jmax do
ar:=vector([evalf(seq((ki-1)*tmax/body,ki=1..body))]);
k2:=k2min+j*(k2max-k2min)/jmax;
sol[i,j]:=dsolve({rce[1],rce[2],rce[3],rce[4],rce[5],
q1(0)=0,q2(0)=0,q3(0)=0,q02(0)=0,q03(0)=0,
D(q1)(0)=0,D(q2)(0)=0,D(q3)(0)=0},[q1(t),q2(t),q3(t),q02(t),q03(t)],
numeric,method=rkf45,range=0..tmax,maxfun=50000,output=array(ar),
abserr=1e-7,relerr=1e-7);
for iii from 1 to body do
if whattype(sol[i,j][2,1][iii,2])='float' then body_max:=iii;
end if;
end do;
krit[i,j]:=sum((u(sol[i,j][2,1][kn,1])-sol[i,j][2,1][kn,2])^2, kn=
1..body_max);
krit2[i,j]:=max(seq(abs(sol[i,j][2,1][kn,4]),kn=1..body_max));
if krit2[i,j]>0.5 or body_max<body then krit[i,j]:=krit[i,j]+1000
end if;
#ssol[i,j]:=(sol[i,j])[2,1];
kk2[j]:=k2;
end do:
kk1[i]:=k1;
#print(i);
end do:
> minInd:=min[index](krit):
> graf1:=seq([seq([convert(kk1[ii],float[8]),convert(kk2[jj],float[8]),
convert(krit[ii,jj],float[8])],ii=0..imax)],jj=0..jmax):
min_bod:=pointplot3d([kk1[minInd[1]],kk2[minInd[2]],krit[minInd]],
symbol=solidSphere,symbolsize=20,color=red):
_graf1:=surfdata(graf1,axes=boxed,labels=['k[1]','k[2]','crit'],
labelfont=[TIMES,ROMAN,14]): display([_graf1,min_bod],view=[default,
default,0.0..0.18],style=surfacecontour,orientation=[141,66,0],shading=
zhue,lightmodel=light4);

```

Optimalizace korekčního a kompenzačního systému horního rámu pro boční zrychlení



```
> graf2:= [seq([seq([convert(kk1[ii],float[8]),convert(kk2[jj],float[8]),
convert(krit2[ii,jj],float[8])],ii=0..imax)],jj=0..jmax)]:
min_bod2:=pointplot3d([kk1[minInd[1]],kk2[minInd[2]],krit2[minInd]],
symbol=solidSphere,symbolsize=20,color=red):
_graf2:=surfdData(graf2,axes=boxed,labels=['k[1]','k[2]','epsilon[max]'],
labelFont=[TIMES,ROMAN,14]): display([_graf2,min_bod2],view=
[default,default,0.1..0.5],style=surfaceContour,orientation=[-61,61,0],
shading=zhue,lightModel=light2);
```



## Vykreslení grafů odezev

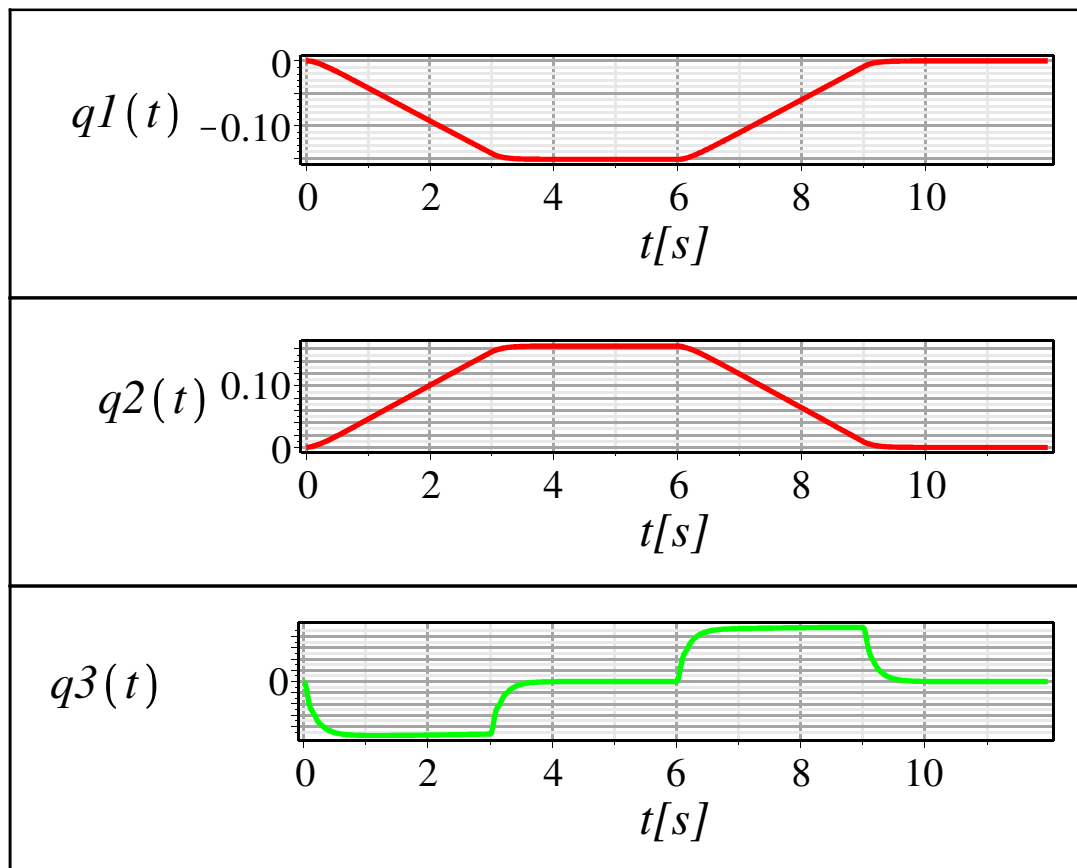
```
> _k1:=1400; _k2:=450; _i:=round((_k1-k1min)*imax/(k1max-k1min)); _j:=
round((_k2-k2min)*imax/(k2max-k2min));
#_k1:=kk1[minInd[1]]; _k2:=kk2[minInd[2]]; _i:=minInd[1]; _j:=minInd
[2];
      _k1 := 1400
      _k2 := 450
      _i := 8
      _j := 9
```

(6.1)

```
> odezvy:=Array([seq([
pointplot({seq([sol[_i,_j][2,1][kn,1],sol[_i,_j][2,1][kn,2*ng]],kn=
1..body)},
style=line,gridlines=true,labels=['t[s]',sol[_i,_j][1,1][2*ng]],
thickness=2,axes=boxed,labelfont=[TIMES,ROMAN,14])
],ng=1..2),
[pointplot({seq([sol[_i,_j][2,1][kn,1],sol[_i,_j][2,1][kn,2*3]],kn=
1..body)},
style=line,gridlines=true,labels=['t[s]',sol[_i,_j][1,1][2*3]],
thickness=2,axes=boxed,labelfont=[TIMES,ROMAN,14],color=green)
]):
```

Vykreslení odezev systému

```
> display(odezvy,color=red,aligncolumns=[1],size=[1,0.25]);
```



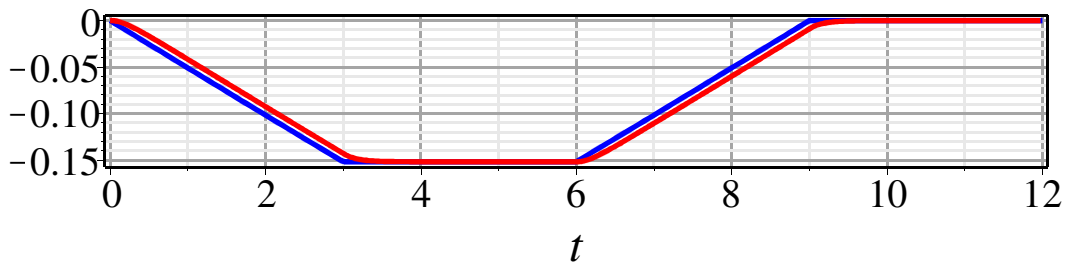
```
> plt_q1:=pointplot({seq([sol[_i,_j][2,1][kn,1],sol[_i,_j][2,1][kn,2*1]],
kn=1..body)},style=line,labels=['t[s]', 'psi(t)'],gridlines=true,axes=
boxed,color=red,thickness=2):
```

```
> plt_q1_ideal:=plot(u(t),t=0..12,thickness=2,color=blue):
```

Odezva vs. žádaná odezva stabilizovaného rámu

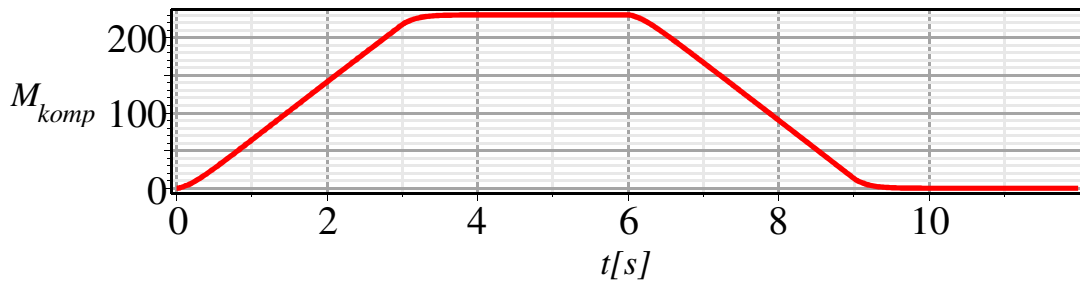
```
> display(plt_q1_ideal,plt_q1,labelfont=[TIMES,ROMAN,14],size=[1,0.25]);
```

Optimalizace korekčního a kompenzačního systému horního rámu pro boční zrychlení



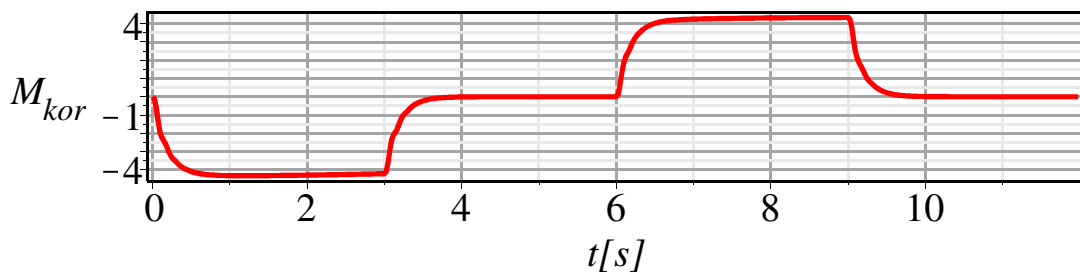
Kompenzační moment

```
> pointplot ({seq([sol[_i,_j][2,1][kn,1],
_k1*sol[_i,_j][2,1][kn,2*2]+d1*sol[_i,_j][2,1][kn,5]+i1*sol[_i,_j][2,1]
[kn,8]
],kn=1..body)}, style=line, labels=['`t[s]`', 'M[komp]'], gridlines=true,
axes=boxed, color=red, thickness=2, size=[1,0.25]);
```



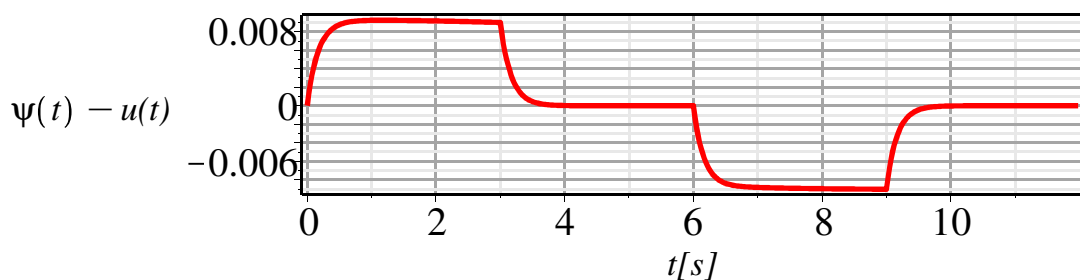
Korekční moment

```
> pointplot ({seq([sol[_i,_j][2,1][kn,1],
_k2*sol[_i,_j][2,1][kn,2*3]+d2*sol[_i,_j][2,1][kn,7]+i2*sol[_i,_j][2,1]
[kn,9]
],kn=1..body)}, style=line, labels=['`t[s]`', 'M[kor]'], gridlines=true,
axes=boxed, color=red, thickness=2, size=[1,0.25], labelfont=[TIMES,ROMAN,
1é]);
```



Výchylka stabilizovaného rámu v inerciálním systému

```
> pointplot ({seq([sol[_i,_j][2,1][kn,1],
sol[_i,_j][2,1][kn,2*1]-u(sol[_i,_j][2,1][kn,1])
],kn=1..body)}, style=line, labels=['`t[s]`', 'psi(t) '-`u(t)`'], gridlines=
true, axes=boxed, color=red, thickness=2, size=[1,0.25]);
```



## Příloha 10: Simulace systému jednoosého gyroskopického stabilizátoru s řízenou pneumatickou pružinou

```
> restart: with(linalg): with(plots): read "lagrange.txt": read "momenty.
txt": read("step5.txt"):
> g:=9.81: unassign('Mp', 'Mk1'):
```

### Zadání rozměrů, hmotností a tenzorů setrvačnosti

Setrvačné parametry gyroskopu (člen 6). Tensor setrvačnosti je vzhledem k těžišti (které splývá s SS6)

```
> m6:=6.7:
> J6:=Matrix([[ 5.6e-3 , 0 , 0 ],
               [ 0 , 5.6e-3 , 0 ],
               [ 0 , 0 , 8.4e-3 ]]);
```

$$J6 := \begin{bmatrix} 0.0056 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0056 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0084 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Setrvačné parametry precesního rámečku (člen 5). Tensor setrvačnosti je vzhledem k těžišti (které splývá s SS5 a SS6)

```
> m5:=0.8:
> J5:=Matrix([[ 8.15e-3 , 0 , 0 ],
               [ 0 , 3.22e-3 , 0 ],
               [ 0 , 0 , 5e-3 ]]);
```

$$J5 := \begin{bmatrix} 0.00815 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00322 & 0 \\ 0 & 0 & 0.005 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Setrvačné parametry hmoty kyvadla (člen 7). Tensor setrvačnosti je vzhledem k SS7.

```
> m7:=0.01: J7:=matrix(3,3,[0,0,0,0,0,0,0,0,0])+m7*matrix(3,3,[1^2,0,
0,0,1^2,0,0,0,0]); J7:=evalm(J7);
```

$$J7 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0.01 \begin{bmatrix} l^2 & 0 & 0 \\ 0 & l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J7 := \begin{bmatrix} 0.01 l^2 & 0. & 0. \\ 0. & 0.01 l^2 & 0. \\ 0. & 0. & 0. \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

### Setrvačné parametry rámu (člen 4) a poloha těžiště soustavy člověk-rám

- Tensor setrvačnosti je vzhledem k počátku SS4
- těžiště samotného rámu splývá s SS4

```
> m4:= m4ram + m4clo: m4ram:=28: m4clo:=80:
```

```

Tensor setrvačnosti rámu vzhledem k jeho vlastnímu těžišti
> J4T_ram:=Matrix( [[1.8564+0.8*1.8564 , 0 , 0],
                   [0 , 7.49+0.8*7.49 , 0],
                   [0 , 0 , 9.346+0.8*
                   9.346]]):
polohový vektor těžiště těla člověka v SS4
> rT4clo_4:=vector(3,[ 0.05 , 0.05 , 0.0616 ]):
polohový vektor těžiště samotného rámu v SS4
> rT4ram_4:=vector(3,[ 0 , 0 , 0.05 ]):
matice Steinerových členů rámu
> D_T4_ram:=m4ram*Matrix([[ rT4ram_4[2]^2 + rT4ram_4[3]^2 , -
rT4ram_4[1]*rT4ram_4[2] , -rT4ram_4[1]*rT4ram_4[3] ],
[ -rT4ram_4[1]*rT4ram_4[2] ,
rT4ram_4[1]^2 + rT4ram_4[3]^2 , -rT4ram_4[2]*rT4ram_4[3] ],
[ -rT4ram_4[1]*rT4ram_4[3] , -
rT4ram_4[2]*rT4ram_4[3] , rT4ram_4[1]^2 + rT4ram_4[2]^2 ]]):

```

Tensor setrvačnosti rámu vzhledem k počátku SS4

```

> J4_ram:= evalm( J4T_ram + D_T4_ram ):

```

Tensor setrvačnosti člověka vůči svému vlastnímu těžišti

```

> J4T_clo:=Matrix([[ 0.577, 0 , 0 ],
                   [0 , 15.2 , 0 ],
                   [0 , 0 , 11.3]]):

```

```

> delta:=0*Pi/180:

```

Transformace pro pootočení o úhel  $\delta$  okolo vertikální osy

```

> Tdelta:=Matrix([[ cos(delta) , -sin(delta) , 0 ],
                  [ sin(delta) , cos(delta) , 0 ],
                  [ 0 , 0 , 1 ]]):

```

matice Steinerových členů člověka

```

> D_T4_clo:=m4clo*Matrix([[ rT4clo_4[2]^2 + rT4clo_4[3]^2 , -
rT4clo_4[1]*rT4clo_4[2] , -rT4clo_4[1]*rT4clo_4[3] ],
[ -rT4clo_4[1]*rT4clo_4[2] ,
rT4clo_4[1]^2 + rT4clo_4[3]^2 , -rT4clo_4[2]*rT4clo_4[3] ],
[ -rT4clo_4[1]*rT4clo_4[3] , -
rT4clo_4[2]*rT4clo_4[3] , rT4clo_4[1]^2 + rT4clo_4[2]^2 ]]):

```

Tensor setrvačnosti člověka pootočeného o úhel  $\delta$  okolo vertikální osy vzhledem k počátku SS4

```

> J4_clo:= evalm(transpose(Tdelta) &* J4T_clo &* Tdelta + D_T4_clo)
:

```

Tensor setrvačnosti členu 4 (rám + člověk) vzhledem k počátku SS4

```

> J4:= evalm( J4_ram + J4_clo );

```

$$J4 := \begin{bmatrix} 4.49208480000000 & -0.200000000000000 & -0.246400000000000 \\ -0.200000000000000 & 29.2555648000000 & -0.246400000000000 \\ -0.246400000000000 & -0.246400000000000 & 28.5228000000000 \end{bmatrix} \quad (1.1.1)$$

Poloha těžiště soustavy člověk-rám v SS4

```

> rT4_4:=vector(3):
> for i from 1 by 1 to 3 do
   rT4_4[i]:= (m4clo*rT4clo_4[i]+m4ram*rT4ram_4[i])/m4;
end do;

```

$$\begin{aligned}
 rT4_4_1 &:= 0.03703703704 \\
 rT4_4_2 &:= 0.03703703704 \\
 rT4_4_3 &:= 0.05859259259
 \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Poloha těžiště gyroskopu (člen 6) vůči SS6

```

> rT6_6:=vector(3, [0, 0, 0]):

```

```

Poloha SS6 vůči SS5
> r56_5:=vector(3, [0, 0, 0]) :
Poloha těžiště precesního rámečku (člen 5) vůči SS5
> rT5_5:=vector(3, [0, 0, 0]) :
Poloha počátku SS5 vůči SS4
> r45_4:=vector(3, [0, 0, 0]) :
Poloha počátku SS7 vůči SS4
> r47_4:=vector(3, [0.5, 0.5, 0]) :
délka závěsu kyvadla
> #l:=0.75:
Poloha počátku SS4 vůči SS3 (poloha bodu do nějž bude aplikováno rotační a translační
buzení)
> r34_3:=vector(3, [0, 0, 0]) :
> #Specifikovat buzení, přidat momenty pružin a tlumičů, radiální
korekce, vynechat Lq4 a může se vesele počítat....
> #Mkk1:=k1*q2(t) + d1*diff(q2(t),t) + i1*q02(t);
> #Mkk2:=k2*q3(t) + d2*diff(q3(t),t) + i2*q03(t);
> Mkk1:=k1*q2(t);
Mkk1 := k1 q2(t) (1)
> Mkk2:=k2*q3(t) + d2*diff(q3(t),t);
Mkk2 := k2 q3(t) + d2 ( d/dt q3(t) ) (2)

```

## ▼ Moment pneumatických pružin

```

> Mp:= - Fp1*rp1 + Fp2*rp2; #rp1, rp2 jsou delky ramen ulozeni pruzin
Mp := -Fp1 rp1 + Fp2 rp2 (2.1)
> Fp1:= (p1(t)-pa) * Sef( l1(q1(t)) );
Fp1 := (p1(t) - pa) Sef(l1(q1(t))) (2.2)
> Fp2:= (p2(t)-pa) * Sef( l2(q1(t)) );
Fp2 := (p2(t) - pa) Sef(l2(q1(t))) (2.3)
> l1:=q1-> -rp1 * q1;
l1 := q1 -> -rp1 q1 (2.4)
> l2:=q1-> rp2 * q1;
l2 := q1 -> rp2 q1 (2.5)

```

## ▼ Specifikace rovnic (přidání momentů pružin, tlumičů, pasivních odporů, radiálních korekcí)

rovnice 4 a 5 jsou rovnice pro tlaky v pneumatických pružinách

```

> rce:=array(1..5):
> rce[1]:= Lq1 - Mp + Mt - Mpas:
> rce[2]:= Lq2 + Mkk2 + bp*diff(q2(t),t):
> rce[3]:= Lq3 + Mpas:
> rce[4]:= p1(t) * Sef( l1( q1(t) ) ) * diff( l1( q1(t) ) ,t) + V( l1(
q1(t) ) ) * diff(p1(t),t) = Rp*T*G1;
rce_4 := -p1(t) Sef(-rp1 q1(t)) rp1 ( d/dt q1(t) ) + V(-rp1 q1(t)) ( d/dt p1(t) ) = Rp T G1 (3.1)
> rce[5]:= p2(t) * Sef( l2( q1(t) ) ) * diff( l2( q1(t) ) ,t) + V( l2(
q1(t) ) ) * diff(p2(t),t) = Rp*T*G2;
rce_5 := p2(t) Sef(rp2 q1(t)) rp2 ( d/dt q1(t) ) + V(rp2 q1(t)) ( d/dt p2(t) ) = Rp T G2 (3.2)

```



## Specifikace průtoků G1 a G2

```

> G := (p1, Uc1) -> piecewise(0 <= Uc1, piecewise(pin <= p1, -p1*C(Uc1)*
rho*(1-
> pin/p1-b_pa)^2/(1-b_pa)^2)^(1/2), piecewise(b_pa*pin < p1, pin*C(Uc1)*
rho*(1-(p1
> /pin-b_pa)^2/(1-b_pa)^2)^(1/2), p1 <= b_pa*pin, pin*C(Uc1)*rho)), Uc1 <
0,
> piecewise(p1 <= pa, pa*C(Uc1)*rho*(1-(p1/pa-b_ar)^2/(1-b_ar)^2)^(
1/2), piecewise
> (p1 < pa/b_ar, -p1*C(Uc1)*rho*(1-(pa/p1-b_ar)^2/(1-b_ar)^2)^(1/2),
pa/b_ar <= p1
> , -p1*C(Uc1)*rho))) :
> G1:=G(p1(t), Uc1);

```

$$G1 := \begin{cases} -p1(t) C(Uc1) \rho \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{pin}{p1(t)} - b_{pa}\right)^2}{(1 - b_{pa})^2}} & pin \leq p1(t) \\ \begin{cases} pin C(Uc1) \rho \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{p1(t)}{pin} - b_{pa}\right)^2}{(1 - b_{pa})^2}} & b_{pa} pin < p1(t) \\ pin C(Uc1) \rho & p1(t) \leq b_{pa} pin \end{cases} & \text{otherwise} \\ pa C(Uc1) \rho \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{p1(t)}{pa} - b_{ar}\right)^2}{(1 - b_{ar})^2}} & p1(t) \leq pa \\ \begin{cases} -p1(t) C(Uc1) \rho \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{pa}{p1(t)} - b_{ar}\right)^2}{(1 - b_{ar})^2}} & p1(t) < \frac{pa}{b_{ar}} \\ -p1(t) C(Uc1) \rho & \frac{pa}{b_{ar}} \leq p1(t) \end{cases} & \text{otherwise} \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq Uc1 \\ \\ \\ \\ Uc1 < 0 \end{matrix}$$

```

> Uc1:=k*(p1r-p1(t)): #piecewise(p1r<=pin, k*(p1r-p1(t)), 0);

```

```

> G2:=G(p2(t), Uc2);

```

$$G2 := \begin{cases} -p2(t) C(Uc2) \rho \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{pin}{p2(t)} - b_{pa}\right)^2}{(1 - b_{pa})^2}} & pin \leq p2(t) \\ \begin{cases} pin C(Uc2) \rho \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{p2(t)}{pin} - b_{pa}\right)^2}{(1 - b_{pa})^2}} & b_{pa} pin < p2(t) \\ pin C(Uc2) \rho & p2(t) \leq b_{pa} pin \end{cases} & \text{otherwise} \\ pa C(Uc2) \rho \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{p2(t)}{pa} - b_{ar}\right)^2}{(1 - b_{ar})^2}} & p2(t) \leq pa \\ \begin{cases} -p2(t) C(Uc2) \rho \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{pa}{p2(t)} - b_{ar}\right)^2}{(1 - b_{ar})^2}} & p2(t) < \frac{pa}{b_{ar}} \\ -p2(t) C(Uc2) \rho & \frac{pa}{b_{ar}} \leq p2(t) \end{cases} & \text{otherwise} \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq Uc2 \\ \\ \\ \\ Uc2 < 0 \end{matrix}$$

lace systému jednoosého gyroskopického stabilizátoru s řízenou pneumatickou pružinou

```
> Uc2:=k*(p2r-p2(t)): #piecewise(p2r<=pin,k*(p2r-p2(t)),0);
```

## Požadované tlaky p1r a p2r

```
> rce1_pr:=-rp1*(p1r-p10)*Sef(l1(q1(t)))+rp2*(p2r-p20)*Sef(l2(q1(t)))+
Mkk1;
rce2_pr:=(p1r-pa)*Sef(l1(q1(t)))+(p2r-pa)*Sef(l2(q1(t)))-1*(m7+m6+
m5+m4)*g;
rce1_pr:=-rp1*(p1r-p10)*Sef(-rp1*q1(t))+rp2*(p2r-p20)*Sef(rp2*q1(t))+k1*q2(t)
rce2_pr:=(p1r-pa)*Sef(-rp1*q1(t))+(p2r-pa)*Sef(rp2*q1(t))-1133.1531 (5.1)
```

```
> p1r_p2r:=solve([rce1_pr,rce2_pr],[p1r,p2r]):
```

```
> assign(p1r_p2r);
```

```
> p1r;
```

$$\frac{1}{Sef(-rp1*q1(t))(rp1+rp2)} (0.0001000000000 (10000. rp1 Sef(-rp1*q1(t)) p10 + 10000. Sef(-rp1*q1(t)) pa rp2 - 10000. rp2 Sef(rp2*q1(t)) p20 + 10000. Sef(rp2*q1(t)) pa rp2 + 10000. k1 q2(t) + 1.1331531 10^7 rp2) \quad (5.2)$$

```
> p2r;
```

$$-\frac{1}{Sef(rp2*q1(t))(rp1+rp2)} (0.0001000000000 (10000. rp1 Sef(-rp1*q1(t)) p10 - 10000. Sef(-rp1*q1(t)) pa rp1 - 10000. rp2 Sef(rp2*q1(t)) p20 - 10000. Sef(rp2*q1(t)) pa rp1 + 10000. k1 q2(t) - 1.1331531 10^7 rp1) \quad (5.3)$$

```
> p1r_plot:=unapply(subs(q1(t)=q1,q2(t)=q2,p1r),[q1,q2]):
```

```
> p2r_plot:=unapply(subs(q1(t)=q1,q2(t)=q2,p2r),[q1,q2]):
```

```
> Mkor_plot:=(p1r,p2r,q1)->-rp1*(p1r-p10)*Sef(l1(q1))+rp2*(p2r-p20)*
Sef(l2(q1)):
```

## Parametry pružin

```
> Sef:=l->S0-S1*l; Sef:=l->S0-S1*l (6.1)
```

```
> v:=eval(int(Sef(l1),l1)+v0); V:=-1/2*S1*l^2+S0*l+v0 (6.2)
```

```
> v:=unapply(v,l1); V:=l->-1/2*S1*l^2+S0*l+v0 (6.3)
```

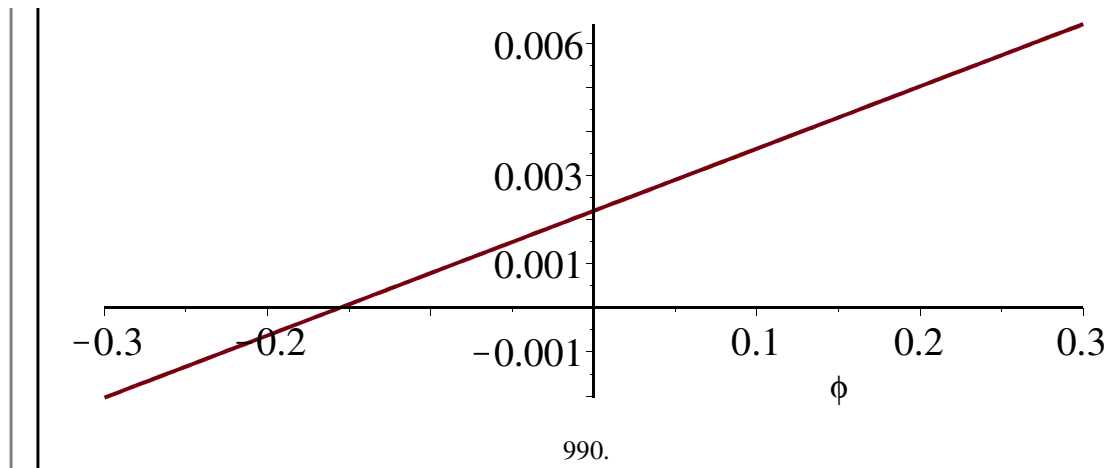
```
> S0:=.22e-2; S1:=.7056e-1; v0:=.4e-3; #S1:=.7056e-1:
```

Ramena uložení pružin (pružina 1 vlevo od osy)

```
> rp1:=0.2; rp2:=0.2; rp1:=0.2; rp2:=0.2 (6.4)
```

```
> plot(Sef(l1(phi)),phi=-0.3..0.3); S0*9e5*0.5;
```

lace systému jednoosého gyroskopického stabilizátoru s řízenou pneumatickou pružinou



(6.5)

## Určení tlaků počátečních tlaků $p_{10}$ a $p_{20}$ v pružinách

```
> rce1_p0:=eval(subs(q1(t)=0,q2(t)=0,q3(t)=0,p1(t)=p10,p2(t)=p20,
    alpha1(t)=0,alpha2(t)=0,alpha3(t)=0,e1(t)=0,e2(t)=0,e3(t)=0,
    q4(t)=rotg*t,rce[1]));
    rce1_p0:=39.24000000000000+0.00044p10-0.00044p20
```

(7.1)

```
> rce2_p0:=(p10-pa)*Sef(0)+(p20-pa)*Sef(0)-(m7+m6+m5+m4)*g;
    rce2_p0:=0.0022p10-0.0044pa+0.0022p20-1133.1531
```

(7.2)

```
> p10_p20:=solve([rce1_p0,rce2_p0],[p10,p20]):
```

```
> assign(p10_p20);
```

```
> p10;
```

$pa + 2.129438864 \cdot 10^5$  (7.3)

```
> p20;
```

$3.021257045 \cdot 10^5 + pa$  (7.4)

```
> Mp0:=subs(p1(t)=p10,p2(t)=p20,Mp);
    Mp0:=39.23999998-1453.732413q1(t)
```

(7.5)

## Specifikace buzení, korekcí, rotace gyroskopu, tlumení a dalších parametrů

naklání okolo podélné osy  $\alpha_1$

```
> alpha1:=t->0: # 1*Pi/180*sin(2*Pi*8*t):#
```

naklání okolo příčné osy  $\alpha_2$

```
> alpha2:=t->0:
```

natáčení okolo svislé osy  $\alpha_3$

```
> alpha3:=t->0:
```

translace v podélném směru  $x_1$

```
> e1:=t->0:
```

translace v příčném směru  $x_2$

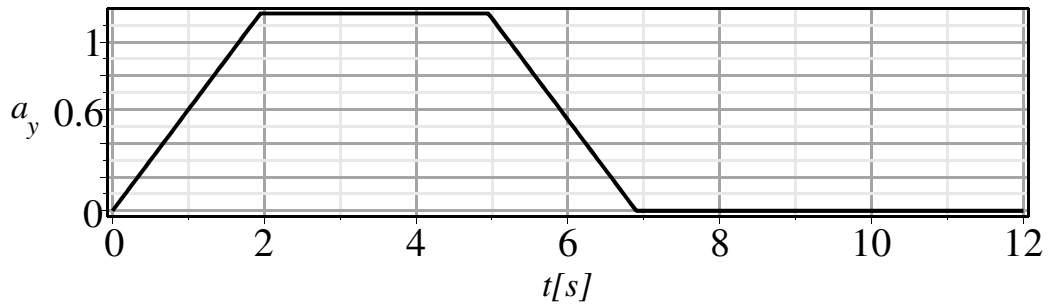
```
> k_a:=0.6: a_max:=1.17: t_s:=3:
```

```
> a_e2:=t->piecewise(t<a_max/k_a,k_a*t, t<=a_max/k_a+t_s, a_max, t<=
    2*a_max/k_a+t_s,-k_a*t+2*a_max+k_a*t_s,0):
```

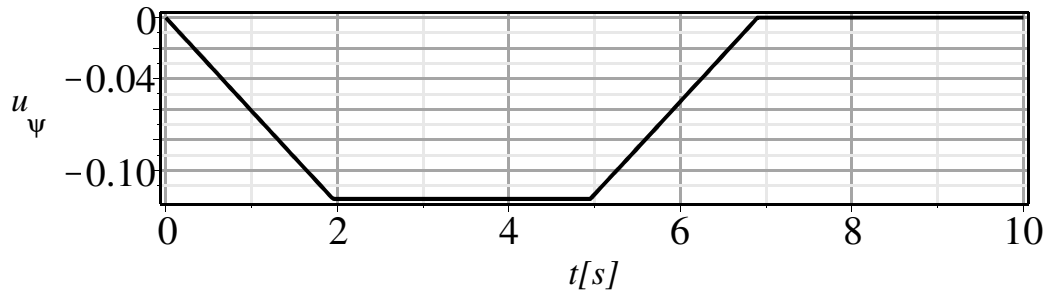
```
e2:=unapply(int(int(a_e2(tau),tau=0..Tau),Tau=0..t),t):
```

```
plot(diff(e2(t),t,t),t=0..12,gridlines,labels=['t[s]','a[y]'],axes=
    boxed,size=[1,0.27],color=black);
```

lace systému jednoosého gyroskopického stabilizátoru s řízenou pneumatickou pružinou



```
> plot(-arctan(diff(e2(t),t,t)/9.81),t=0..10,gridlines,labels=['t[s]`,  
'u[psi]'],axes=boxed,size=[1,0.27],color=black);
```



translace ve svislém směru  $x_3$

```
> e3:=t->0:
```

koeficient tuhosti kompenzačního systému

```
> k1:=1400;
```

$k1 := 1400$

(8.1)

koeficient tuhosti korekčního systému

```
> k2:=450;
```

```
d2:=0:
```

tlumení v závěsu kyvadla

```
> m7:=0.01: l:=g/(4*Pi^2*f_kyv^2): f_kyv:=18:
```

```
bp3:=0.25*sqrt(4*m7^2*l^3*g):
```

specifikace rychlosti rotace gyroskopu

```
> q4:=t->rotg*t:
```

```
> rotg:=100000/60*2*Pi:
```

specifikace tuhosti tlumiče rámu

```
> b1:=100:
```

specifikace tuhosti pružiny rámu

```
> kp1:=1500:
```

Specifikace tlumení precesního rámečku

```
> bp:=5:
```

Poruchový moment

```
> Mpor:=0:#piecewise(t<0,0,50):
```

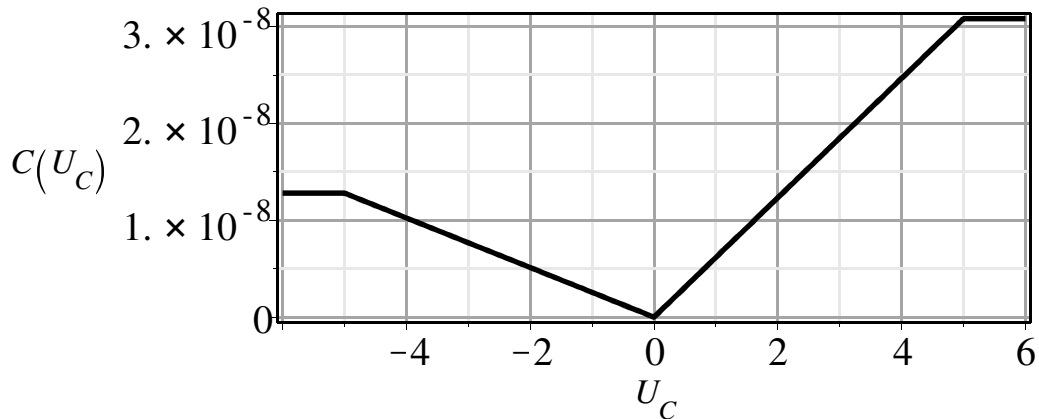
Parametry ventilu

```
> C:=x->piecewise(x<-5,0.8e-6*0.016,  
x<0,-0.8e-6/5*x*0.016,  
x<5,1.1e-6/5*x*0.028,  
1.1e-6*0.028);
```

$$C := x \rightarrow \text{piecewise} \left( x < -5, 8 \cdot 10^{-7} \cdot 0.016, x < 0, -\frac{8 \cdot 10^{-7} x \cdot 0.016}{5}, x < 5, \frac{0.0000011 x \cdot 0.028}{5}, 0.0000011 \cdot 0.028 \right) \quad (8.2)$$

lace systému jednoosého gyroskopického stabilizátoru s řízenou pneumatickou pružinou

```
> plot(C(Uc),Uc=-6..6,thickness=2, axes=boxed, gridlines=true, labels=
['U[C]', 'C(U[C])'],size=[1,0.25]);
```



```
> pa := .1e6;
> pin := .98e6;
> b_pa := .341;
> b_ar := .5;
> rho := 1.185;
```

```
pa := 1.105
pin := 9.8 105
b_pa := 0.341
b_ar := 0.5
ρ := 1.185
k := 4.10-7
```

(8.3)

```
> k:=8e-5;
```

```
k := 0.00008
```

(8.4)

```
> Rp:=287: T:=293:
```

## ▼ Výpočet simulace

```
> body:=2000; # pocet bodu v simulaci
tmax:=20; # cas do ktereho bezi simulace
body := 2000
tmax := 20
```

(9.1)

```
> ar:=vector([evalf(seq((ki-1)*tmax/body,ki=1..body))]);
> sol:=dsolve({rce[1],rce[2],rce[3],rce[4],rce[5],
q1(0)=0,q2(0)=0,q3(0)=0,p1(0)=p10,p2(0)=p20,
D(q1)(0)=0,D(q2)(0)=0,D(q3)(0)=0},[q1(t),q2(t),q3(t),p1(t),p2(t)],
numeric,range=0..tmax,maxfun=5000000,output=array(ar),method=rkf45):
#, stiff=true
```

```
> print(sol[1,1]);
```

$$\left[ t \quad q1(t) \quad \frac{d}{dt} q1(t) \quad q2(t) \quad \frac{d}{dt} q2(t) \quad q3(t) \quad \frac{d}{dt} q3(t) \quad p1(t) \quad p2(t) \right]$$

(3)

## ▼ Vykreslení grafů odezev

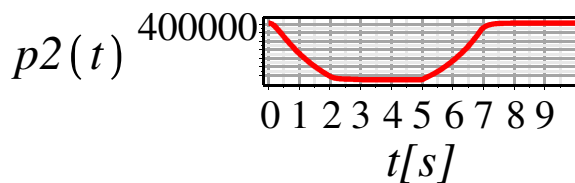
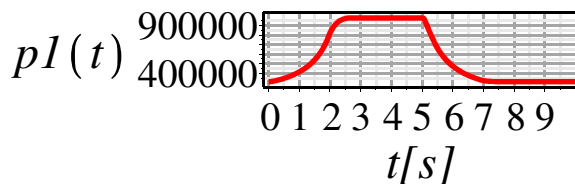
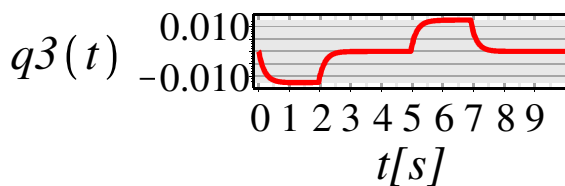
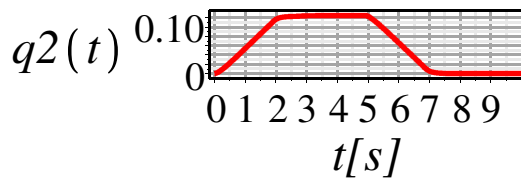
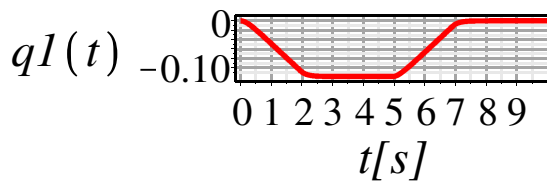
```
> okno:=tmax-10:
```

```
> odezvy:=Array([seq([
pointplot({seq([(sol[2,1])[kn,1],(sol[2,1])[kn,2*ng]],kn=1..round
(body/tmax*okno)}),
style=line,gridlines=true,labels=[`t[s]`,sol[1,1][2*ng]], axes=
boxed,thickness=2)
```

```

], ng=1..3),
seq([
pointplot({seq([(sol[2,1])[kn,1],(sol[2,1])[kn,ng]],kn=1..round
(body/tmax*okno)}),
style=line,gridlines=true,labels=['t[s]',sol[1,1][ng]], axes=boxed,
thickness=2)
],ng=8..9)
]):
> display(odezvy,color=red,aligncolumns=[1],labelfont=[TIMES,14],
axesfont=[TIMES,12],size=[1,0.25]);

```

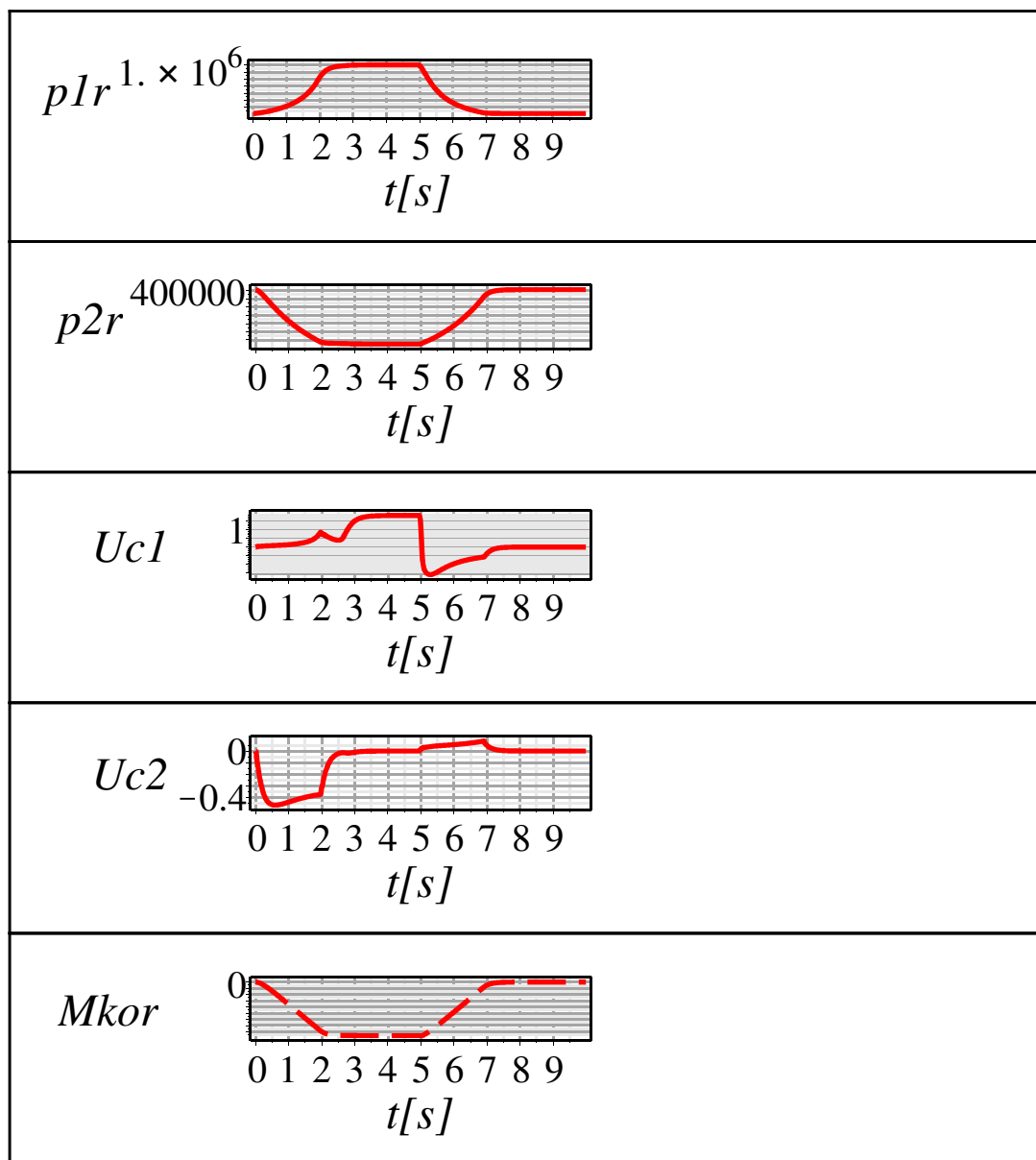


```

> odezvy2:=Array([pointplot({seq([(sol[2,1])[kn,1],p1r_plot((sol[2,1])
[kn,2],(sol[2,1])[kn,4]]),kn=1..round(body/tmax*okno)}),style=line,
gridlines=true,labels=['t[s]','p1r'], axes=boxed,thickness=2)],
[pointplot({seq([(sol[2,1])[kn,1],p2r_plot((sol[2,1])[kn,2],(sol[2,
1])[kn,4]]),kn=1..round(body/tmax*okno)}),style=line,gridlines=true,
labels=['t[s]','p2r'], axes=boxed,thickness=2)],
[pointplot({seq([(sol[2,1])[kn,1],k*(p1r_plot((sol[2,1])[kn,2],(sol
[2,1])[kn,4])-(sol[2,1])[kn,8]]),kn=1..round(body/tmax*okno)}),
style=line,gridlines=true,labels=['t[s]','Uc1'], axes=boxed,
thickness=2)],
[pointplot({seq([(sol[2,1])[kn,1],k*(p2r_plot((sol[2,1])[kn,2],(sol

```

```
[2,1])[kn,4])-(sol[2,1])[kn,9]),kn=1..round(body/tmax*okno)),
style=line,gridlines=true,labels=['t[s]','Uc2'],axes=boxed,
thickness=2)],
[pointplot({seq([(sol[2,1])[kn,1],Mkor_plot((sol[2,1])[kn,8],(sol[2,
1])[kn,9],(sol[2,1])[kn,2]),kn=1..round(body/tmax*okno))}),style=
line,gridlines=true,labels=['t[s]','Mkor'],axes=boxed,thickness=2)
}],
[pointplot({seq([(sol[2,1])[kn,1],G((sol[2,1])[kn,8],k*(p1r_plot(
(sol[2,1])[kn,2],(sol[2,1])[kn,4])-(sol[2,1])[kn,8]))/rho*1e3*60],
kn=1..round(body/tmax*okno))}),style=line,gridlines=true,labels=['t
[s]','G[1]'],axes=boxed,thickness=2)],
[pointplot({seq([(sol[2,1])[kn,1],G((sol[2,1])[kn,9],k*(p2r_plot(
(sol[2,1])[kn,2],(sol[2,1])[kn,4])-(sol[2,1])[kn,9]))/rho*1e3*60],
kn=1..round(body/tmax*okno))}),style=line,gridlines=true,labels=['t
[s]','G[2]'],axes=boxed,thickness=2)
]
}):
> display(odezvy2,color=red,aligncolumns=[1],labelfont=[TIMES,14],
axesfont=[TIMES,12],size=[1,0.25]);
```



lace systému jednoosého gyroskopického stabilizátoru s řízenou pneumatickou pružinou

