Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Derivace v aplikačních úlohách – sbírka řešených příkladů

Vypracovala: Bc. Jana Zacharová
Vedoucí práce: RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

České Budějovice 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Derivace v aplikačních úlohách – sbírka řešených příkladů jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 15. 12. 2014 ……………………...

Jana Zacharová

Poděkování

Ráda bych touto cestou vyjádřila poděkování vedoucí mé diplomové práce RNDr. Libuši Samkové, Ph.D. za její ochotu při spolupráci, připomínky a čas, který mi věnovala. Zvláštní poděkování patří mé rodině a mým přátelům, kteří při mně po celou dobu studia stáli.

Anotace:

Hlavním cílem mé diplomové práce na téma „Derivace v aplikačních úlohách – sbírka řešených příkladů“ je vytvořit soubor řešených příkladů, které nějakým způsobem využívají při řešení diferenciální počet. Sbírka obsahuje 43 řešených praktických úloh, které se týkají funkcí jedné nebo dvou proměnných. Účelem je, aby tato sbírka sloužila jako cvičební pomůcka pro žáky středních či vysokých škol. Pro lepší přehled jsou jednotlivé úlohy řazeny do odpovídajících vědních oblastí (matematická, biologická, fyzikální, ekonomická).

Klíčová slova: derivace, parciální derivace, extrém funkce, lokální extrém funkce, globální extrém funkce, minimum, maximum

Annotation:

The main goal of my diploma work on the topic "Derivative in apllied problems – a digest of solved examples" is to create a set of solved exercises that somehow use calculus during solving. The collection contains 43 solved practical problems relating to calculus of one or two variables. This collection intends to serve as a training aid for students of middle or high schools. For a better overview individual tasks are sorted by appropriate fields of science (mathematical, biological, physical, economic).

Key words: derivative, partial derivative, extreme of a function, local extreme of a function, global extreme of a function, minimum, maximum

Obsah

1 Úvod

Z 8 m dlouhého úhlového železa se má svařit kostra akvária, jehož hrany dna mají být v poměru 2 : 3. Jaké rozměry má mít kostra, aby se do akvária vešlo co nejvíce vody? S touto úlohou jsem se setkala již na gymnáziu a vybrala jsem ji jako motivační prvek na úvod mé diplomové práce, protože právě úlohami tohoto typu se budu zabývat.

Hlavním cílem této práce je sestavit sbírku řešených příkladů na aplikační úlohy využívající derivaci funkce jedné nebo více proměnných, kterou by bylo možné využít nejen při studiu na středních či vysokých školách, ale i v běžném životě. Do práce jsou zakomponovány úlohy vycházející z konkrétních situací a čísel, ale i úlohy řešené obecně (např. 3.1.12).

Zadání úloh jsou vybrána z různých učebnic – nejen z těch, podle kterých se dnešní žáci učí, ale i ze starších, které se již nepoužívají. Další inspirací pro mě byly internetové portály a matematická fóra, kde žáci uveřejňují úlohy, které jim dělají největší obtíže.

Sbírka obsahuje celkem 43 řešených úloh. Zadání 3 úloh jsem zformulovala sama, u ostatních 40 úloh jsem z uvedených zdrojů převzala pouze zadání. Z toho jsem 35 úloh vyřešila samostatně a u 5 úloh jsem zjednodušila původní řešení (nebo jsem nalezla řešení jiné).

Pří řešení úloh jsou využívány především aplikace diferenciálního počtu (hledání extrémů funkce, souvislost znaménka derivace a monotonie, atd.), přestože některé úlohy lze řešit i jinými metodami. Pro lepší představivost je více než polovina úloh doplněna názornými obrázky, které jsem vytvořila v programu GeoGebra.

Nejen v matematickém, ale i v dalších vědních oborech jako je fyzika, biologie či ekonomie, je možné setkat se s úlohami, jejichž řešení lze nalézt prostřednictvím diferenciálního počtu, proto zde uvádím i několik příkladů z těchto oblastí.

Praktická část diplomové práce je rozčleněna na podkapitoly podle vědních oblastí a na podkapitolu Derivace dvou proměnných. Derivace jedné proměnné jsou spíše vhodné na střední školy, resp. gymnázia, na rozdíl od derivací dvou (resp. více) proměnných, hodících se spíše na školy vysoké.

2 Základní pojmy a návod k řešení

Tato úvodní kapitola je vytvořena na základě podkladů z literatury [7] a [22].

2.1 Stacionární bod

Bod, ležící v definičním oboru dané funkce, nazveme stacionárním, jestliže první derivace v tomto bodě je rovna nule nebo neexistuje. Stacionární body jsou body podezřelé z extrému. Existuje několik způsobů, jak zjistit, zda je ve stacionárním bodě lokální či globální extrém.[1]

2.2 Lokální extrémy

Nechť f je funkce definovaná v intervalu (a, b). Řekneme, že funkce f má v bodě $c \in (a, b)$ lokální maximum (resp. lokální minimum), existuje-li $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in (c - \delta, c + \delta)$ platí $f(x) \leq f(c)$ (resp. $f(x) \geq f(c)$). Lokální maxima a lokální minima funkce f souhrnně nazýváme lokální extrémy funkce f.

2.3 Určení lokálních extrémů pomocí monotonie

Předpokládejme, že funkce je na celém svém definičním oboru spojitá. Stacionární body pak dělí definiční obor na více intervalů:

Je-li na intervalu vlevo od stacionárního bodu derivace kladná (tedy funkce je rostoucí) a na intervalu vpravo od stacionárního bodu záporná (tedy funkce je klesající), je ve stacionárním bodě lokální maximum.

Je-li na intervalu vlevo od stacionárního bodu derivace záporná (tedy funkce je klesající) a na intervalu vpravo od stacionárního bodu kladná (tedy funkce je rostoucí), je ve stacionárním bodě lokální minimum.

[1] V jiných než stacionárních bodech lokální extrémy být nemohou.

2.4 Určení lokálních extrémů pomocí druhé derivace

Je-li druhá derivace ve stacionárním bodě záporná a funkce je na celém jejím definičním oboru spojitá, je ve stacionárním bodě lokální maximum.
Je-li druhá derivace ve stacionárním bodě kladná a funkce je na celém jejím definičním oboru spojitá, je ve stacionárním bodě lokální minimum.

2.5 Hessova matice (funkce dvou proměnných)

Hessova matice druhého řádu se skládá z druhých parciálních derivací dané funkce a vypadá takto: $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\, \partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{pmatrix}$. Hessovu matici vytváříme proto, abychom mohli spočítat její determinant, který poté rozhodne o lokálních extrémech dané funkce.

Označme $D_1 = \left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right|$ a $D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\, \partial x} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix}$.

Je-li D_2 >0, $D_1 > 0$, má funkce v daném bodě $[x, y]$ *lokální minimum.*
Je-li D_2 >0, $D_1 < 0$, má funkce v daném bodě $[x, y]$ *lokální maximum.*
Je-li $D_2 < 0$, má funkce ve stacionárním bodě $[x, y]$ *sedlo.*
Je-li $D_2 = 0$, nelze o extrému touto metodou rozhodnout, je třeba zvolit jiný postup.

2.6 Globální extrémy

Existuje-li max $\{f(x); x \epsilon D(f)\}$, nazýváme toto číslo globálním maximem.

Existuje-li min $\{f(x); x \epsilon D(f)\}$, nazýváme toto číslo globálním minimem.

Souhrnně nazýváme globální minimum a globálním maximum globálními extrémy.[2]

[2] V literatuře se také můžeme setkat s pojmem absolutní extrémy, což je synonymum pro globální extrémy.

2.7 Určení globálních extrémů

Předpokládejme, že funkce je na celém svém definičním oboru spojitá. Porovnáme funkční hodnoty ve všech lokálních extrémech a hodnoty nebo limity v krajních bodech definičního oboru. Z nich pak vybereme největší a nejmenší.[3] Je-li největší hodnota limitou, globální maximum neexistuje. V ostatních případech se jedná o globální maximum. Je-li nejmenší hodnota limitou, globální minimum neexistuje. V ostatních případech se jedná o globální minimum.

[3] Má-li funkce pouze jeden stacionární bod, je lokální minimum (resp. maximum) zároveň globálním minimem (resp. maximem).

3 Derivace jedné proměnné v aplikačních úlohách - řešené příklady

3.1 Matematické úlohy

3.1.1 Příklad 1

Nalezněte taková dvě přirozená čísla, jejichž součet je 100 a součet jejich třetích mocnin je co nejmenší.
([14], str. 333)

Označme hledaná čísla jako x a y, kde $x \in \langle 1, 99 \rangle$. Součet jejich třetích mocnin zapíšeme jako funkci

$$f(x) = x^3 + y^3, \tag{1}$$

a dále víme, že

$$x + y = 100. \tag{2}$$

Ze vztahu (2) vyjádříme proměnnou y:

$$y = 100 - x, \tag{3}$$

kterou poté dosadíme do (1):

$$f(x) = x^3 + (100 - x)^3. \tag{4}$$

Po úpravě výrazu (4) dostaneme:

$$f(x) = 300x^2 - 30\,000x + 1\,000\,000. \tag{5}$$

Součet třetích mocnin hledaných čísel má být minimální, proto funkci (5) zderivujeme:

$$f'(x) = 600x - 30\,000. \tag{6}$$

První derivace je nulová, je-li $x = 50$.
Provedeme druhou derivaci:

$$f''(x) = 600. \tag{7}$$

Jelikož $f'(50) = 0$ a $f''(50) > 0$, má funkce v hodnotě 50 lokální minimum. Protože je to jediný stacionární bod funkce $f(x)$ v intervalu $\langle 1, 99 \rangle$ a funkce $f(x)$ je v tomto intervalu spojitá, jde zároveň také o globální minimum této funkce.

Druhé hledané číslo dopočteme dosazením x do (3):

$$y = 100 - 50 = 50. \tag{8}$$

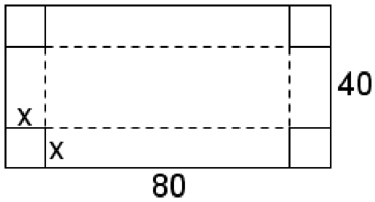
Dvojice hledaných čísel splňující počáteční podmínky jsou čísla 50 a 50.

Součet třetích mocnin těchto čísel je roven $250\,000$.

3.1.2 Příklad 2

Z plechu tvaru obdélníku o rozměrech 40 cm a 80 cm je třeba v rozích vystřihnout shodné čtverce tak, aby ze zbytku složená krabice měla co největší objem. Určete délku strany těchto čtverců.

([13], str. 354)



Označme délku čtverců, které je třeba vystřihnout jako x cm, kde $x \in (0, 20)$ cm. Potom objem vzniklé krabice je

$$V(x) = (80 - 2x) \cdot (40 - 2x) \cdot x, \tag{1}$$

neboli

$$V(x) = 4x^3 - 240x^2 + 3\,200x. \tag{2}$$

Funkci (2) zderivujeme:

$$V'(x) = 12x^2 - 480x + 3\,200. \tag{3}$$

První derivace je nulová, je-li $x_{1,2} = 20 \pm \frac{20\sqrt{3}}{3}$.

Kořen $x_1 = 20 + \frac{20\sqrt{3}}{3}$ však neleží v intervalu $(0, 20)$, proto nás bude zajímat pouze kořen $x_2 = 20 - \frac{20\sqrt{3}}{3}$.

Druhá derivace:

$$V''(x) = 24x - 480, \tag{4}$$

$$V''\left(20 - \frac{20\sqrt{3}}{3}\right) < 0. \tag{5}$$

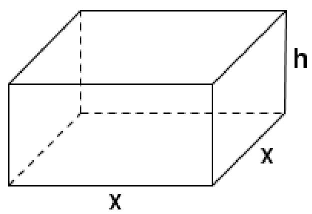
Protože $V'\left(20 - \frac{20\sqrt{3}}{3}\right) = 0$ a zároveň $V''\left(20 - \frac{20\sqrt{3}}{3}\right) < 0$, má funkce $V(x)$ v hodnotě $20 - \frac{20\sqrt{3}}{3}$ ostré lokální maximum. Protože je to jediný stacionární bod funkce $V(x)$ v intervalu $(0, 20)$ a funkce $V(x)$ je v tomto intervalu spojitá, jde také o globální maximum této funkce.

Aby měla krabice maximální objem, musíme v rozích vystříhat čtverce o straně $20 - \frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm.

Objem této krabice pak bude přibližně 19 080 cm^2.

3.1.3 Příklad 3

Jaké rozměry musí mít bazén se čtvercovým dnem a objemem $V = 108\ \mathrm{m}^3$, má-li se na jeho vyzdění spotřebovat co nejméně materiálu?
([9], str. 323)



Délku strany čtvercového dna označme x m, kde $x \in (0, +\infty)$ a výšku bazénu h. Potom objem

$$V = x^2 \cdot h, \tag{1}$$

neboli

$$h = \frac{V}{x^2} = \frac{108}{x^2}. \tag{2}$$

Plocha k vyzdění bazénu

$$S = x^2 + 4xh. \tag{3}$$

Dosazením vztahu (2) do (3) získáváme funkci

$$S(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{108}{x^2} = x^2 + \frac{432}{x}. \tag{4}$$

Plocha k vyzdění bazénu má být minimální, provedeme derivaci:

$$S'(x) = 2x - \frac{432}{x^2}. \tag{5}$$

Funkce má nulovou derivaci, je-li $x = 6$.

Nyní provedeme druhou derivaci:

$$S''(x) = 2 + \frac{864}{x^3}. \tag{6}$$

$$S''(6) = 2 + \frac{864}{6^3} = 6. \tag{7}$$

Protože $S'(6) = 0$ a zároveň $S''(6) > 0$, má funkce $S(x)$ v hodnotě 6 ostré lokální minimum. Jelikož je to jediný stacionární bod funkce $S(x)$ v intervalu $(0, +\infty)$ a funkce $S(x)$ je v tomto intervalu spojitá, jde také o globální minimum této funkce.

Nyní dopočítáme chybějící rozměr h ze vztahu (2):

$$h = \frac{V}{x^2} = \frac{108}{6^2} = 3. \tag{8}$$

Abychom spotřebovali co nejméně materiálu na vyzdění bazénu se čtvercovým dnem o objemu $V = 108$ m^3, musí být rozměry bazénu 6 m, 6 m a 3 m.

Na vyzdění takového bazénu spotřebujeme 108 m^2 materiálu.

Pozn.:
U úloh tohoto typu je v reálném životě určena hloubka, např. chceme, aby byl bazén hluboký alespoň 1 m. Potom by strana čtvercového dna měla smysl pouze pro $x \in \left(0, \sqrt{108}\right)$. Dále bychom postupovali obdobně.
V tomto konkrétním případě se dostaneme ke stejným výsledkům.

3.1.4 Příklad 4

Které kladné číslo dává s číslem k němu převráceným nejmenší součet?
([1], str. 214)

Hledané číslo označíme x, kde $x \in (0, +\infty)$. Potom jeho převrácená hodnota bude $\frac{1}{x}$. Jejich součet označíme jako funkci

$$f(x) = x + \frac{1}{x}. \tag{1}$$

Hledáme globální minimum této funkce, proto funkci zderivujeme:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}. \quad (2)$$

Funkce má nulovou derivaci, je-li $x_{1,2} = \pm 1$, avšak $x_2 = -1$ neleží v intervalu $(0, +\infty)$. Proto nás bude zajímat pouze kořen $x_1 = 1$.

Nyní provedeme druhou derivaci:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad (3)$$

$$f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2. \quad (4)$$

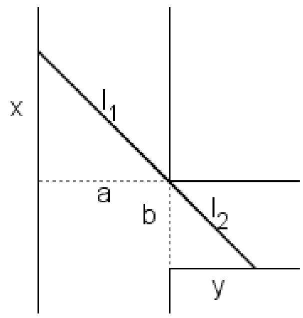
Protože $f'(1) = 0$ a zároveň $f''(1) > 0$, má funkce $f(x)$ v hodnotě 1 ostré lokální minimum. Jelikož je to jediný stacionární bod funkce $f(x)$ v intervalu $(0, +\infty)$ a funkce $f(x)$ je v tomto intervalu spojitá, jde také o globální minimum této funkce.

Kladné číslo, které dává s číslem k němu převráceným nejmenší součet je číslo 1. Součet bude roven číslu 2.

3.1.5 Příklad 5

Z kanálu šířky a vychází pod pravým úhlem kanál šířky b. Najděme největší délku l dřeva, které je možno splavit z jednoho kanálu do druhého.

([5], str. 481)



Z obrázku je patrné, že délka dřeva

$$l = l_1 + l_2 = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{b^2 + y^2}. \quad (1)$$

Dále platí, že

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{y}, \quad (2)$$

odtud

$$y = \frac{a \cdot b}{x}. \quad (3)$$

Dosazením vztahu (3) do (1) dostaneme následující funkci:

$$l(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{b^2 + \frac{a^2b^2}{x^2}} =$$

$$= \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{\frac{b^2x^2 + a^2b^2}{x^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{\frac{b^2 \cdot (x^2 + a^2)}{x^2}} = \tag{4}$$

$$= \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{b}{x}\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{x^2 + a^2} \cdot \left(1 + \frac{b}{x}\right).$$

Největší délka dřeva, které lze splavit z jednoho kanálu do druhého, nesmí být vlastně větší než minimum funkce l na intervalu (0, +∞).

Vypočteme derivaci $l(x)$:

$$l'(x) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \left(1 + \frac{b}{x}\right) + \sqrt{x^2 + a^2} \cdot \left(-\frac{b}{x^2}\right) =$$

$$\frac{x + b}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{b\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} = \frac{x^3 + bx^2 - b(x^2 + a^2)}{x^2\sqrt{x^2 + a^2}} = \tag{5}$$

$$= \frac{x^3 - a^2b}{x^2\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

Funkce $l'(x) = 0$, je-li čitatel roven nule, tedy je-li $x^3 - a^2b = 0$.

$$x^3 - a^2b = 0 \Leftrightarrow x = a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}. \tag{6}$$

Vzhledem k obtížnosti druhé derivace funkce $l(x)$ určíme monotonii funkce $l'(x)$ na intervalech $\left(-\infty, a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)$ a $\left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}, +\infty\right)$. Funkce $l'(x)$ je v levém intervalu záporná, tedy klesající, a v pravém kladná, tedy rostoucí. Funkce má v hodnotě $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$ lokální minimum.

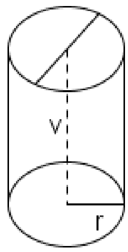
Jelikož je funkce na celém jejím definičním oboru spojitá a má pouze jeden stacionární bod, nastává v tomto bodě také globální minimum.

Největší hledanou délku dřeva l dostaneme dosazením (6) do (4):

$$
\begin{aligned}
l &= \sqrt{\left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)^2 + a^2} \cdot \left(1 + \frac{b}{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}}\right) = \sqrt{a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}} + a^2} \cdot \left(1 + a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right) = \\
&= \sqrt{a^2 \cdot \left(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} + 1\right)} \cdot \left(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} + 1\right) = \\
&= a \cdot \left(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} + 1\right) = \\
&= a \cdot \left(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} + 1\right)^{\frac{3}{2}} = a \cdot \left(\frac{b^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(b^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Největší délka dřeva, které lze splavit z jednoho kanálu do druhého je $\left(b^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

3.1.6 Příklad 6



Určete rozměry válcové nádoby s víkem tak, aby při objemu 2 litry měla tato nádoba minimální povrch.
([11], str. 161)

Objem válce $V = \pi r^2 v$. Povrch válce $S = 2\pi r(r + v)$, kde $r \in (0, +\infty)$.
Dále víme, že

$$V = \pi r^2 v = 2, \tag{1}$$

odtud

$$v = \frac{2}{\pi r^2}. \tag{2}$$

Nyní vztah (2) dosadíme do vzorce pro výpočet povrchu válce:

$$S(r) = 2\pi r\left(r + \frac{2}{\pi r^2}\right), \tag{3}$$

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{4}{r}. \tag{4}$$

Hledáme globální minimum této funkce, proto ji zderivujeme:

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{4}{r^2}. \tag{5}$$

Derivace je nulová, je-li $r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$.

Druhá derivace:

$$S''(r) = 4\pi + \frac{8}{r^3}, \tag{6}$$

$$S''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\right) = 4\pi + \frac{8}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\right)^3} = 12\pi. \tag{7}$$

Protože $S'\left(\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\right) = 0$ a zároveň $S''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\right) > 0$, má funkce $S(r)$ v hodnotě $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$ ostré lokální minimum. Jelikož je to jediný stacionární bod funkce $S(r)$ na intervalu $(0, +\infty)$ a funkce $S(r)$ je na tomto intervalu spojitá, jde také o globální minimum této funkce.

Nyní dopočítáme chybějící rozměr dosazením r do (2):

$$v = \frac{2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}. \tag{8}$$

Válcová nádoba o objemu 2 l má minimální povrch, je-li poloměr podstavy $r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$ dm a výška $v = \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$ dm.

Povrch nádoby s těmito rozměry odpovídá přibližně 8,788 dm^2.

3.1.7 Příklad 7

Drát dlouhý 12 cm se rozdělí na dva kusy, z nichž první se ohne do kružnice a druhý do čtverce. Ukažte, že součet obou obsahů má minimální hodnotu $\frac{36}{4+\pi}\,\mathrm{cm}^2$.

([2], str. 148)

Ze zadání je patrné, že obvod kruhu a čtverce je roven 12 cm:

$$2\pi r + 4a = 12, \tag{1}$$

odtud

$$a = \frac{6 - \pi r}{2}. \tag{2}$$

Součet obsahů kruhu a čtverce označíme jako funkci

$$f(r) = \pi r^2 + a^2, \tag{3}$$

kde $r \in \left(0, \frac{6}{\pi}\right)$.

Nyní (2) dosadíme do (3):

$$\begin{aligned} f(r) = \pi r^2 + \left(\frac{6 - \pi r}{2}\right)^2 = \pi r^2 + \frac{36 - 12\pi r + \pi^2 r^2}{4} = \\ = \pi r^2 + 9 - 3\pi r + \frac{1}{4}\pi^2 r^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Hledáme globální minimum této funkce, proto ji zderivujeme:

$$f'(r) = 2\pi r - 3\pi + \frac{1}{2}\pi^2 r. \tag{5}$$

Derivace je nulová, je-li $r = \frac{6}{4+\pi}$.

Druhá derivace:

$$f''(r) = 2\pi + \frac{1}{2}\pi^2, \tag{6}$$

$$f''\left(\frac{6}{4+\pi}\right) = 2\pi + \frac{1}{2}\pi^2 > 0. \tag{7}$$

Protože $f'\left(\frac{6}{4+\pi}\right) = 0$ a zároveň $f''\left(\frac{6}{4+\pi}\right) > 0$, má funkce $f(r)$ v hodnotě $\left(\frac{6}{4+\pi}\right)$ ostré lokální minimum. Jelikož je to jediný stacionární bod funkce $f(r)$ v intervalu $\left(0, \frac{6}{\pi}\right)$ a funkce $f(r)$ je v tomto intervalu spojitá, jde také o globální minimum této funkce.

Nyní dopočítáme stranu čtverce a dosazením r do (2):

$$a = \frac{6 - \pi r}{2} = \frac{6 - \pi \cdot \left(\frac{6}{4+\pi}\right)}{2} = \frac{24}{4+\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{12}{4+\pi}. \tag{8}$$

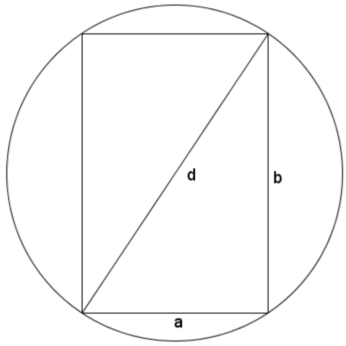
Součet obsahů kruhu a čtverce je potom

$$f(r) = \pi\left(\frac{6}{4+\pi}\right)^2 + \left(\frac{12}{4+\pi}\right)^2 = \frac{36\pi}{(4+\pi)^2} + \frac{144}{(4+\pi)^2} = \\ = \frac{36\cdot(\pi+4)}{(4+\pi)^2} = \frac{36}{4+\pi}. \tag{9}$$

Ukázali jsme, že součet obou obsahů má minimální hodnotu $\frac{36}{4+\pi}$ cm^2 a to v případě, že délka strany čtverce $\left(a = \frac{12}{4+\pi}\ \text{cm}\right)$ je dvakrát delší než poloměr kružnice $\left(r = \frac{6}{4+\pi}\ \text{cm}\right)$.

3.1.8 Příklad 8

Z válcového kmene s kruhovým průřezem o průměru $d = 6$ dm se má vytesat trám obdélníkového průřezu, aby měl maximální nosnost, přičemž z nauky o pevnosti je známo, že nosnost y trámu je určena vzorcem $y = kab^2$, kde $k > 0$ je součinitel materiálu, a šířka a b výška obdélníku.
([17], str. 559)



Z obrázku je patrné, že platí Pythagorova věta:

$$d^2 = b^2 + a^2, \tag{1}$$

odtud

$$b^2 = d^2 - a^2 = 6^2 - a^2 = 36 - a^2, \tag{2}$$

kde $a \in (0, d)$.

Ze zadání víme, že nosnost trámu je určena vzorcem

$$y = kab^2, \tag{3}$$

neboli

$$y(a) = ka\cdot(36 - a^2). \tag{4}$$

Hledáme globální maximum této funkce, proto ji zderivujeme:

$$y'(a) = 36k - 3ka^2. \tag{5}$$

Derivace je nulová, je-li $a = \pm 2\sqrt{3}$. Zápornou délku však nelze brát v úvahu,

proto stačí vyšetřit jediný stacionární bod: $a = 2\sqrt{3}$.
Druhá derivace:

$$y''(a) = -6ka, \tag{6}$$

$$y''(2\sqrt{3}) = -6ka = -12k\sqrt{3} \tag{7}$$

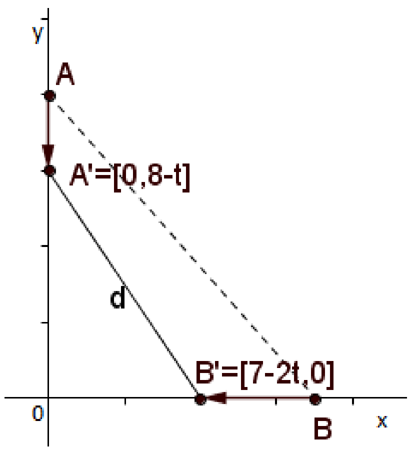
Protože $y'(2\sqrt{3}) = 0$ a zároveň $y''(2\sqrt{3}) < 0$, má funkce $y(a)$ v hodnotě $2\sqrt{3}$ ostré lokální maximum. Jelikož je to jediný stacionární bod funkce $y(a)$ v intervalu $(0, d)$ a funkce $y(a)$ je v tomto intervalu spojitá, jde také o globální maximum této funkce.
Nyní dopočítáme chybějící rozměr dosazením a do (4):

$$y = ka \cdot (36 - a^2) = k \cdot 2\sqrt{3} \cdot \left(36 - \left(2\sqrt{3}\right)^2\right) = 48k\sqrt{3}\,. \tag{8}$$

Aby měl trám maximální nosnost, musely by být jeho rozměry $2\sqrt{3}$ dm a $48k\sqrt{3}$ dm.

3.1.9 Příklad 9

Dva hmotné body jsou umístěny v soustavě souřadnic v bodech $A[0,8], B[7,0]$. Souřadnice jsou uvedeny v metrech. V témže okamžiku se oba hmotné body dají do pohybu po osách soustavy souřadnic směrem k jejímu počátku. Hmotný bod umístěný v bodě A se pohybuje rychlostí $v_1 = 1m \cdot s^{-1}$, hmotný bod umístěný v bodě B se pohybuje rychlostí $v_2 = 2m \cdot s^{-1}$. Po kolika sekundách bude vzdálenost hmotných bodů nejmenší a jak velká tato vzdálenost bude?
([8], str. 131)



Máme-li dva body $A[a_1, a_2]$, $B[b_1, b_2]$ v rovině, jejich vzdálenost je dána vzorcem

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}. \tag{1}$$

Dráha, kterou hmotné body urazí, je dána vztahem

$$s = v \cdot t, \tag{2}$$

kde s je dráha (m), t je čas (s) a v je rychlost (m/s).

V našem případě chceme, aby vzdálenost $d = |A'B'|$, kde

$A' = [0;\ 8 - v_1 t] = [0;\ 8 - t]$ a $B' = [7 - v_2 t; 0] = [7 - 2t; 0]$, v čase t byla minimální.

Dosazením těchto bodů do (1) dostaneme funkci:

$$d(t) = |A'B'| = \sqrt{(7 - 2t - 0)^2 + (0 - 8 + t)^2}, \tag{3}$$

neboli

$$d(t) = \sqrt{5t^2 - 44t + 113}, \tag{4}$$

kde $t \in (0, +\infty)$.

Délka d má být minimální, proto funkci (4) zderivujeme:

$$d'(t) = \frac{10t - 44}{2\sqrt{5t^2 - 44t + 113}}. \tag{5}$$

Rovnice (5) má smysl bez ohledu na t. (Diskriminant kvadratické rovnice ve jmenovateli je záporný, tudíž celá funkce leží nad osou x.)

Derivace je nulová, je-li $t = 4{,}4$.

Zda je v čase $t = 4{,}4$ s vzdálenost d, musíme ověřit pomocí druhé derivace:

$$d''(t) = \frac{10 \cdot 2\sqrt{5t^2 - 44t + 113} - (10t - 44) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5t^2 - 44t + 113}}}{4 \cdot (5t^2 - 44t + 113)}, \tag{6}$$

$$d''(4{,}4) > 0. \tag{7}$$

Protože $d'(4{,}4) = 0$ a zároveň $d''(4{,}4) > 0$, má funkce $d(t)$ v hodnotě 4,4 ostré lokální minimum. Jelikož je to jediný stacionární bod funkce $d(t)$ v intervalu $(0, +\infty)$ a funkce $d(t)$ je v tomto intervalu spojitá, jde také o globální minimum této funkce.

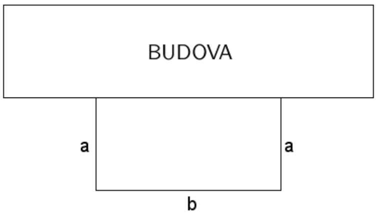
Délku vzdálenosti d dopočítáme dosazením t do (4):

$$d = \sqrt{5t^2 - 44t + 113} = \sqrt{5 \cdot 4{,}4^2 - 44 \cdot 4{,}4 + 113} = 4. \tag{8}$$

Vzdálenost hmotných bodů je nejmenší po 4,4 sekundách a měří přibližně 4 metry.

3.1.10 Příklad 10

Farmář chce postavit obdélníkový výběh, jehož jednu stranu tvoří budova. K oplocení tří stran má pletivo délky 18 m. Při kterých rozměrech výběhu bude jeho plošná výměra maximální?
([1], str. 214)



Strany obdélníkového výběhu označíme jako a a b. Ze zadání je patrné, že

$$2a + b = 18, \tag{1}$$

odtud

$$b = 18 - 2a. \tag{2}$$

Obsah výběhu spočteme jako

$$S = a \cdot b, \tag{3}$$

kde $a \in (0, +\infty)$.

Nyní (2) dosadíme do (3) a dostaneme funkci

$$S(a) = a \cdot (18 - 2a), \tag{4}$$

$$S(a) = 18a - 2a^2. \tag{5}$$

Hledáme globální maximum této funkce, proto ji zderivujeme:

$$S'(a) = 18 - 4a. \tag{6}$$

Derivace je nulová, je-li $a = \frac{9}{2}$.

Nyní musíme ověřit, zda je v tomto bodě globální maximum:

$$S''(a) = -4 < 0. \tag{7}$$

Protože $S'\left(\frac{9}{2}\right) = 0$ a zároveň $S''\left(\frac{9}{2}\right) < 0$, má funkce $S(a)$ v hodnotě $\frac{9}{2}$ lokální maximum. Jelikož je to jediný stacionární bod funkce $S(a)$ v intervalu $(0, +\infty)$ a funkce $S(a)$ je v tomto intervalu spojitá, jde také o globální maximum této funkce.

Nyní dopočítáme stranu b dosazením a do (2):

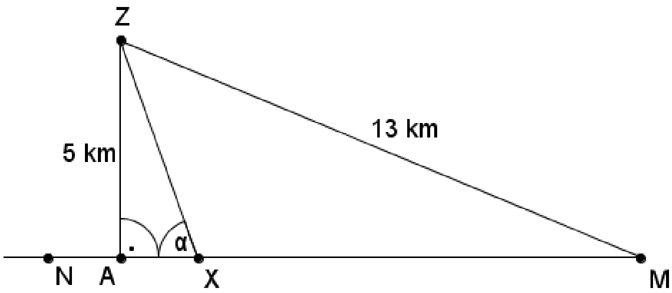
$$b = 18 - 2a = 18 - 2 \cdot \frac{9}{2} = 9. \tag{8}$$

Plošná výměra výběhu bude maximální, budou-li rozměry výběhu $\frac{9}{2}$ m a 9 m.

Takový výběh pak bude mít 40,5 m^2.

3.1.11 Příklad 11

Průmyslový závod Z je vzdálen 5 km od silnice vedoucí do města M. Vzdálenost závodu Z od města M je 13 km. Určete, pod jakým úhlem α je třeba vybudovat cestu k silnici, aby doprava materiálu ze Z do M byla nejlevnější. Předpokládané náklady na přepravu 1 t materiálu na 1 km jsou po silnici 5 Kč a po vybudované cestě třikrát větší.



([4], str. 132)

Pomocí Pythagorovy věty lze dopočítat délku silnice $|AM|$:

$$|AM|^2 = 13^2 - 5^2, \tag{1}$$

odtud

$$|AM| = 12 \text{ km}. \tag{2}$$

Přeprava materiálu bude nejprve ze *Z* do *X* a poté z *X* do *M*.

Cestu ze *Z* do *X* lze vyjádřit jako

$$|ZX| = \frac{5}{\sin\alpha}, \tag{3}$$

kde $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Cestu z *X* do *M* lze vyjádřit jako

$$|XM| = |AM| - |AX|, \tag{4}$$

kde $|AM| = 12$ a $|AX| = \frac{5}{\mathrm{tg}\alpha}$.

Cestu z *X* do *M* lze tedy vyjádřit jako

$$|XM| = 12 - \frac{5}{\mathrm{tg}\alpha}. \tag{5}$$

Za 1 km cesty z *X* do *M* zaplatíme 5 Kč, za 1 km cesty ze *Z* do *X* zaplatíme třikrát více, tedy 15 Kč.

Cestu ze *Z* do *M* přes *X* lze vyjádřit funkcí

$$f(\alpha) = 15 \cdot \frac{5}{\sin\alpha} + 5 \cdot \left(12 - \frac{5}{\mathrm{tg}\alpha}\right), \tag{6}$$

$$f(\alpha) = \frac{75}{\sin\alpha} + 60 - \frac{25}{\mathrm{tg}\alpha}. \tag{7}$$

Hledáme minimum dané funkce, proto provedeme první derivaci:

$$f'(\alpha) = -\frac{75}{\sin^2\alpha} \cdot \cos\alpha + \frac{25}{\mathrm{tg}^2\alpha} \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} =$$

$$= -\frac{75\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{25}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} = -\frac{75\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{25}{\sin^2\alpha =} = \frac{25 - 75\cos\alpha}{\sin^2\alpha}. \tag{8}$$

Derivace je nulová, je-li čitatel zlomku nulový a to je právě tehdy, když

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}, \tag{9}$$

odtud

$$\alpha = 70°31'. \tag{10}$$

Druhá derivace:

$$f''(\alpha) = \frac{75\sin\alpha \cdot \sin^2\alpha - (25 - 75\cos\alpha) \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin^4\alpha}, \tag{11}$$

$$f''(70°31') > 0. \tag{12}$$

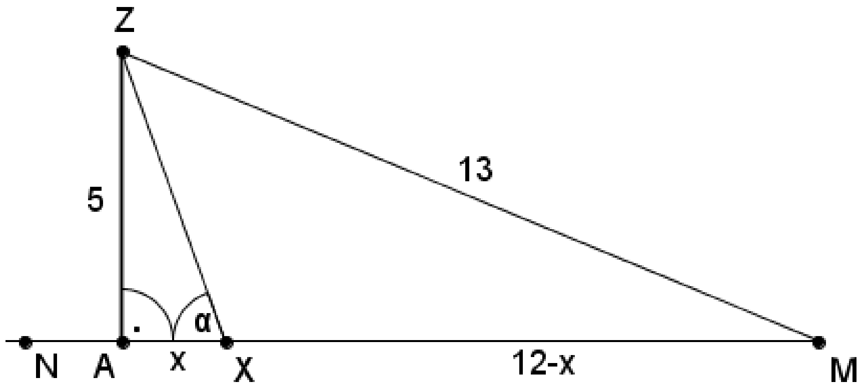
Protože $f'(70°31') = 0$ a zároveň $f''(70°31') > 0$, má funkce $f(\alpha)$ v hodnotě $70°31'$ ostré lokální minimum. Jelikož je to jediný stacionární bod funkce $f(\alpha)$ v intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a $f(\alpha)$ je v tomto intervalu spojitá, jedná se rovněž o globální minimum této funkce.

Náklady na přepravu ze *Z* do *M* přes *X* budou minimální, bude-li cesta k silnici vybudovaná pod úhlem $\alpha = 70°31'$.

Tyto náklady budou ve výši zhruba 130 Kč.

Tuto úlohu lze řešit i jiným způsobem:

Nejprve určíme ideální polohu bodu *X* a teprve poté dopočítáme úhel, pod jakým má být silnice vybudovaná, aby byly náklady na přepravu minimální.



Nejprve stejně jako v přechozím způsobu řešení dopočítáme délku silnice $|AM|$: $|AM| = 12$ km. Dále označme vzdálenost bodů $|AX| = x$. Potom platí, že $|XM| = 12 - x$.

Dle Pythagorovy věty platí, že vzdálenost $|AX| = \sqrt{x^2 + 25}$.

Za 1 km cesty ze *Z* do *X* zaplatíme 15 Kč, za 1 km cesty z *X* do *M* zaplatíme 5 Kč, proto je zřejmé, že celá cesta je dána funkcí

$$f(x) = 15\sqrt{x^2 + 25} + 5(12 - x), \tag{1}$$

kde $x \in \langle 0{,}12 \rangle$.

Hledáme minimum této funkce, proto ji zderivujeme:

$$f'(x) = \frac{15 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 + 25}} - 5. \tag{2}$$

Derivace je nulová, je-li

$$\frac{15x}{\sqrt{x^2 + 25}} = 5, \tag{3}$$

$$3x = \sqrt{x^2 + 25}, \tag{4}$$

$$9x^2 = x^2 + 25. \tag{5}$$

$$x^2 = \pm\frac{25}{8}, \tag{6}$$

$$x = \pm\frac{5\sqrt{2}}{4}. \tag{7}$$

Délka nemůže být záporná, proto nás zajímá pouze $x = \frac{5\sqrt{2}}{4}$.

Vzhledem k obtížnosti druhé derivace funkce $f(x)$ určíme monotonii funkce $f'(x)$ na intervalech $\langle 0, \frac{5\sqrt{2}}{4})$ a $(\frac{5\sqrt{2}}{4}, 12\rangle$. Funkce $f'(x)$ je v levém intervalu záporná, tedy klesající, a v pravém kladná, tedy rostoucí. Funkce má v bodě $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ lokální minimum.

Jelikož je funkce na celém jejím definičním oboru spojitá a má pouze jeden stacionární bod, nastává v tomto bodě také globální minimum.

Jelikož známe nyní délku x, lze z trojúhelníku *AZX* dopočítat úhel α.
V pravoúhlém trojúhelníku *AZX* platí:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{5}{\frac{5\sqrt{2}}{4}}, \tag{8}$$

odtud

$$\alpha = 70°31'. \tag{9}$$

Došli jsme ke stejnému závěru jako v předchozí úvaze.

3.1.12 Příklad 12

Najděte pravoúhelník, který má při daném obsahu minimální obvod.
([4], str. 130)

Strany pravoúhelníku označme a a b. Potom obvod o pravoúhelníku spočteme jako

$$o = 2a + 2b. \tag{1}$$

Obsah S pravoúhelníku spočteme jako

$$S = a \cdot b, \tag{2}$$

odtud

$$a = \frac{S}{b}. \tag{3}$$

Nyní (3) dosadíme do (1) a dostaneme funkci:

$$o(b) = 2a + 2b = 2 \cdot \frac{S}{b} + 2b = \frac{2S}{b} + 2b, \tag{4}$$

kde $b \in (0, +\infty)$.

Hledáme minimum této funkce, proto ji zderivujeme:

$$o'(b) = -\frac{2S}{b^2} + 2. \tag{5}$$

Derivace je nulová, je-li $b = \pm\sqrt{S}$. Ale protože b je délka, bude nás zajímat pouze $b = +\sqrt{S}$.

Zbývá ověřit, zda v tomto bodě nabývá funkce skutečně minima.

$$o''(b) = \frac{4S}{b^3}, \tag{6}$$

$$o''\left(\sqrt{S}\right) = \frac{4S}{b^3} = \frac{4}{\sqrt{S}} > 0. \tag{7}$$

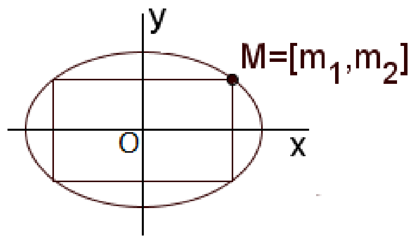
Protože $o'\left(\sqrt{S}\right) = 0$ a zároveň $o''\left(\sqrt{S}\right) > 0$, má funkce $o(b)$ v hodnotě $\sqrt{S}$ ostré lokální minimum. Jelikož je to jediný ostrý lokální extrém funkce $o(b)$ v intervalu $(0, +\infty)$ a funkce $o(b)$ je v tomto intervalu spojitá, jedná se také o globální minimum této funkce.

Nyní dopočítáme stranu a dosazením b do (3):

$$a = \frac{S}{b} = \frac{S}{\sqrt{S}} \cdot \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S}} = \sqrt{S}. \tag{8}$$

Pravoúhelník, který má při daném obsahu minimální obvod je čtverec o straně $\sqrt{S}$. Tento obvod bude roven $4\sqrt{S}$.

3.1.13 Příklad 13



Do elipsy $4x^2 + 9y^2 = 36$ vepište obdélník, jehož strany jsou rovnoběžné s osami elipsy, a jeho obsah je maximální. Určete jeho rozměry.
([11], str. 161)

Označíme-li bod, který leží na dané elipse a zároveň tvoří vrchol hledaného obdélníka $M = [m_{1,} m_2]$, lze pak pomocí jeho souřadnic spočítat obsah obdélníka:

$$S = 2m_1 \cdot 2m_2 = 4m_1 m_2. \tag{1}$$

Vzhledem k tomu, že bod M leží na dané elipse, musí splňovat rovnici

$$4m_1^2 + 9m_2^2 = 36, \tag{2}$$

odtud

$$m_2 = \sqrt{4 - \frac{4}{9} m_1^2}\,, \tag{3}$$

kde $m_1 \in \langle -3{,}3 \rangle$, protože m_1 leží na elipse a definiční obor elipsy je také $\langle -3{,}3 \rangle$.

Dosazením (3) do (1) dostaneme funkci:

$$S(m_1) = 4m_1 m_2 = 4m_1 \cdot \sqrt{4 - \frac{4}{9} m_1^2}. \tag{4}$$

Hledáme maximum této funkce, proto ji zderivujeme:

$$\begin{aligned} S'(m_1) &= 4 \cdot \sqrt{4 - \frac{4}{9} m_1^2} + 4m_1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4 - \frac{4}{9} m_1^2}} \cdot \left(-\frac{8}{9} m_1\right) = \\ &= 4 \cdot \sqrt{4 - \frac{4}{9} m_1^2} - \frac{16m_1^2}{9 \cdot \sqrt{4 - \frac{4}{9} m_1^2}} = \end{aligned} \tag{5}$$

$$= \frac{144 - \frac{144}{9} m_1^2 - 16m_1^2}{9 \cdot \sqrt{4 - \frac{4}{9} m_1^2}} = \frac{144 - 32m_1^2}{9 \cdot \sqrt{4 - \frac{4}{9} m_1^2}}.$$

Derivace je nulová, je-li

$$\frac{144 - 32m_1^2}{9 \cdot \sqrt{4 - \frac{4}{9} m_1^2}} = 0, \tag{6}$$

$$144 - 32m_1^2 = 0, \tag{7}$$

$$32m_1^2 = 144, \tag{8}$$

$$m_1^2 = \frac{144}{32}, \tag{9}$$

$$m_1^2 = \frac{9}{2}, \tag{10}$$

$$m_1 = \sqrt{\frac{9}{2}}, \tag{11}$$

$$m_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}. \tag{12}$$

Zda v tomto bodě nabývá funkce maxima, musíme provést druhou derivaci:

$$S''(m_1) = \frac{-64m_1 \cdot 9\sqrt{4 - \frac{4}{9} m_1^2} - (144 - 32m_1^2) \cdot \frac{9}{2\sqrt{4 - \frac{4}{9} m_1^2}} \cdot \left(-\frac{8}{9} m_1\right)}{81\left(4 - \frac{4}{9} m_1^2\right)}, \tag{13}$$

$$S''\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) < 0, \tag{14}$$

Jelikož $S'\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ a zároveň $S''\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) < 0$, má funkce $S(m_1)$ v hodnotě $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ostré lokální maximum. Protože je to jediný ostrý lokální extrém funkce $S(m_1)$ na intervalu $\langle -3{,}3 \rangle$ a funkce $S(m_1)$ je na tomto intervalu spojitá, jde také o globální maximum této funkce.

Nyní dopočítáme druhou chybějící souřadnici dosazením m_1 do (3):

$$m_2 = \sqrt{4 - \frac{4}{9} m_1^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{9} \cdot \frac{18}{4}} = \sqrt{2}. \tag{15}$$

Protože známe obě dvě souřadnice bodu M, lze dopočítat rozměry hledaného obdélníka:

$$\begin{aligned}&\text{Delší strana: } 2m_1 = 2 \cdot \tfrac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2},\\&\text{kratší strana: } 2m_2 = 2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.\end{aligned} \tag{16}$$

Obsah obdélníka s těmito rozměry bude 12 j^2.

Jiný způsob řešení:

Využijeme zobecněných polárních souřadnic. Elipsu $4x^2 + 9y^2 = 36$ upravíme do následujícího tvaru:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1. \tag{1}$$

Nyní zavedeme polární souřadnice:

$$\begin{aligned}m_1 &= 3\cos\varphi,\\ m_2 &= 2\sin\varphi,\end{aligned} \tag{2}$$

kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Potom obsah obdélníka spočteme jako

$$\begin{aligned}S(\varphi) = 6\cos\varphi \cdot 4\sin\varphi &= 12 \cdot 2\cos\varphi\sin\varphi =\\ &= 12 \cdot \sin 2\varphi.\end{aligned} \tag{3}$$

Hledáme maximum této funkce, proto ji zderivujeme:

$$S'(\varphi) = 12\cos 2\varphi \cdot 2. \tag{4}$$

Derivace je rovna nule, je-li

$$2\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, \tag{5}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \tag{6}$$

přičemž pro nás je postačující řešení

$$\varphi = \frac{\pi}{4}. \tag{7}$$

Zda je v tomto bodě skutečně maximum ověříme pomocí druhé derivace:

$$S''(\varphi) = -24\sin 2\varphi \cdot 2, \tag{8}$$

$$S''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -24\sin 2\varphi \cdot 2 = -48 < 0. \tag{9}$$

Jelikož $S'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ a zároveň $S''\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$, má funkce $S(\varphi)$ v bodě $\frac{\pi}{4}$ ostré lokální maximum. Protože je to jediný ostrý lokální extrém funkce $S(\varphi)$, jde také o globální maximum této funkce.

Nyní dopočítáme souřadnice dosazením (7) do (2):

$$m_1 = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$m_2 = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}. \tag{10}$$

Rozměry a obsah obdélníka dopočítáme stejným způsobem jako v předchozím řešení:

Delší strana: $2m_1 = 2\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2},$

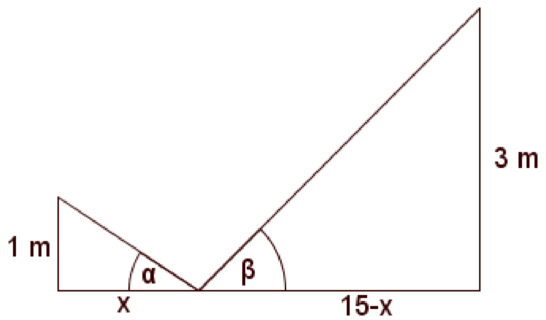
kratší strana: $2m_2 = 2\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$ (11)

Obsah hledaného obdélníka je 12 j^2.

Tento příklad lze řešit oběma způsoby, nicméně tento je dle mého názoru přehlednější.

3.1.14 Příklad 14

Na plotě, jehož výška je 1 metr, sedí vrabec. Ve vzdálenosti 15 metrů od plotu roste strom, který má větev ve výšce 3 metry. Na zemi mezi plotem a stromem jsou hustě rozesety žížaly. V jaké vzdálenosti od plotu má vrabec sezobnout žížalu, aby proletěl trasu plot-žížala-větev po přímkách a po nejkratší dráze? ([26], str. 15)



Vzdálenost x je místo od plotu, kde vrabec sezobne žížalu. Potom je zřejmé, že délka trasy, kterou vrabec musí uletět, je dána funkcí

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1^2} + \sqrt{(15 - x)^2 + 3^2}, \tag{1}$$

kde $x \in \langle 0{,}15 \rangle$.

Hledáme minimum této funkce, proto ji zderivujeme:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{2(15 - x) \cdot (-1)}{2\sqrt{(15 - x)^2 + 9}} = \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{15 - x}{\sqrt{(15 - x)^2 + 9}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Derivace je nulová, je-li

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{15 - x}{\sqrt{(15 - x)^2 + 9}}. \tag{3}$$

Z obrázku je dále patrné, že:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \cos\alpha \tag{4}$$

a

$$\frac{15 - x}{\sqrt{(15 - x)^2 + 9}} = \cos\beta. \tag{5}$$

Proto platí, že

$$\cos\alpha = \cos\beta, \tag{6}$$

neboli

$$\alpha = \beta. \tag{7}$$

Jelikož jsou oba trojúhelníky na obrázku pravoúhlé a $\alpha = \beta$, jsou trojúhelníky podobné. A proto platí:

$$\frac{1}{x} = \frac{3}{15 - x}, \tag{8}$$

odtud

$$x = \frac{15}{4} = 3{,}75. \tag{9}$$

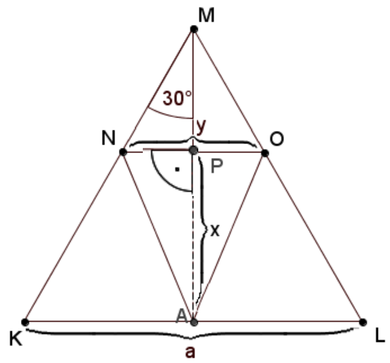
Zda je v bodě 3,75 skutečně minimum, ověříme pomocí funkčních hodnot v krajních bodech a v bodě 3,75:

$$f(0) = \sqrt{x^2 + 1^2} + \sqrt{(15 - x)^2 + 3^2} = 16{,}3$$
$$f(3{,}75) = \sqrt{x^2 + 1^2} + \sqrt{(15 - x)^2 + 3^2} = 15{,}52 \qquad (10)$$
$$f(15) = \sqrt{x^2 + 1^2} + \sqrt{(15 - x)^2 + 3^2} = 18{,}03$$

Je patrné, že nejnižší funkční hodnota je v bodě 3,75.

Vrabec musí sezobnout žížalu ve vzdálenosti 3,75 m od plotu, aby uletěl co nejkratší dráhu plot-žížala-větev.
Tato dráha bude dlouhá přibližně 15,52 metrů.

3.1.15 Příklad 15



Do rovnostranného trojúhelníku o straně a vepište rovnoramenný trojúhelník maximálního obsahu tak, aby vrchol proti jeho základně ležel ve středu strany rovnostranného trojúhelníku.
([23], str. 3)

V rovnostranném trojúhelníku platí, že výška $v = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.[4] Délku $|MP|$ pak lze napsat jako

$$|MP| = \frac{\sqrt{3}}{2}a - x. \qquad (1)$$

V trojúhelníku MNP platí, že

$$\operatorname{tg} 30 = \frac{\frac{y}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a - x}, \qquad (2)$$

odtud

$$\frac{y}{2} = \operatorname{tg} 30 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\right), \qquad (3)$$

[4] Převzato z [36].

$$\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\right), \tag{4}$$

$$\frac{y}{2} = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}x. \tag{5}$$

Obsah hledaného trojúhelníku pak můžeme napsat jako funkci

$$f(x) = \frac{1}{2}yx, \tag{6}$$

$$f(x) = \left(\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}x\right) \cdot x, \tag{7}$$

kde $x \in \langle 0, v \rangle$.

Hledáme maximum této funkce, proto ji zderivujeme:

$$f'(x) = \frac{a}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}x. \tag{8}$$

Derivace je nulová, je-li

$$x = \frac{3a}{4\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}. \tag{9}$$

Druhá derivace:

$$f''(x) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \tag{10}$$

$$f''\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{3} < 0. \tag{11}$$

Jelikož $f'\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right) = 0$ a zároveň $f''\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right) < 0$, má funkce $f(x)$ v hodnotě $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ ostré lokální maximum. Jelikož je to jediný ostrý lokální extrém funkce $f(x)$ v intervalu $\langle 0, v \rangle$ a funkce $f(x)$ je v tomto intervalu spojitá, jde také o globální maximum této funkce.

Výška hledaného trojúhelníku je dlouhá $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Základnu dopočítáme dosazením (9) do (5):

$$\frac{y}{2} = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}x, \tag{12}$$

$$y = 2 \cdot \left(\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4}\right), \tag{13}$$

$$y = 2 \cdot \left(\frac{a}{4}\right), \tag{14}$$

$$y = \frac{a}{2}. \tag{15}$$

Základna hledaného trojúhelníku měří $\frac{a}{2}$.

Obsah tohoto trojúhelníku bude $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ j^2.

Pozn.:
Vzhledem k tomu, že základna hledaného trojúhelníku leží přesně v polovině výšky trojúhelníku původního, je základna menšího trojúhelníku zároveň střední příčkou většího.

3.1.16 Příklad 16

Určete číslo, jehož dekadický logaritmus se nejméně liší od jeho druhé odmocniny. ([21], str. 312)

Chceme, aby se dekadický logaritmus daného čísla co nejméně lišil od jeho druhé odmocniny, tedy hledáme minimum funkce

$$f(x) = \sqrt{x} - \log_{10} x, \tag{1}$$

kde $x > 0$.

Funkci zderivujeme:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x \cdot \ln 10}. \tag{2}$$

Derivace je nulová, je-li:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x \cdot \ln 10} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x \cdot \ln 10}, \tag{4}$$

$$x \cdot \ln 10 = 2\sqrt{x}, \tag{5}$$

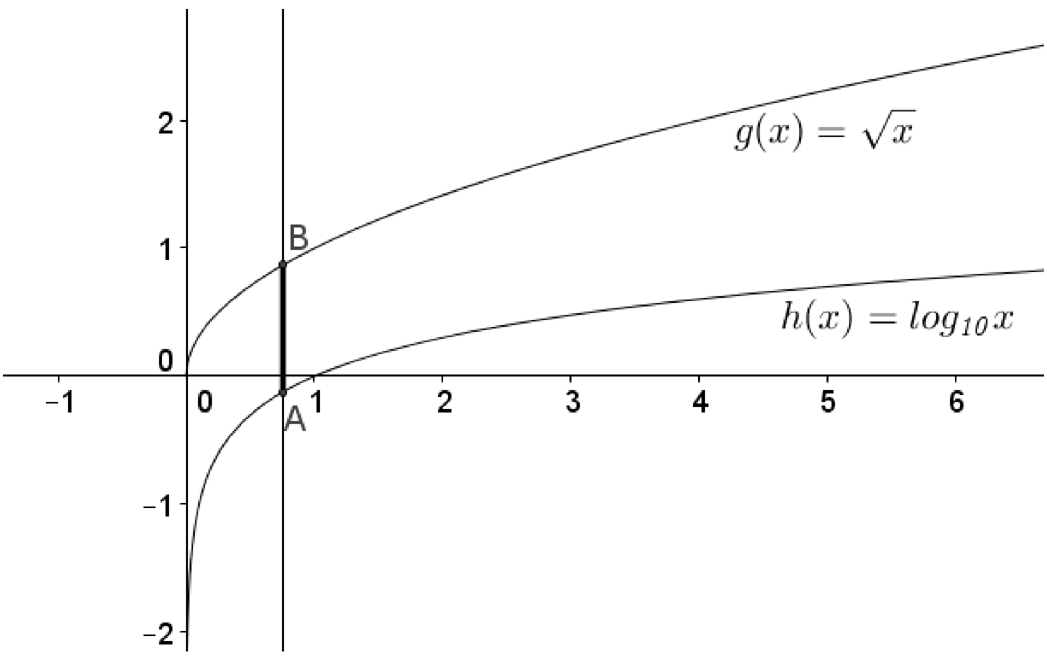
aby se v rovnici nevyskytovala odmocnina, umocníme obě dvě strany rovnice:

$$x^2 \cdot \ln^2 10 = 4x, \tag{6}$$

$$x \cdot \ln^2 10 = 4, \tag{7}$$

$$x = \frac{4}{\ln^2 10}. \tag{8}$$

Vzhledem k obtížnosti druhé derivace funkce $f(x)$ určíme monotonii funkce $f'(x)$ na intervalech $\left(0, \frac{4}{\ln^2 10}\right)$ a $\left(\frac{4}{\ln^2 10}, +\infty\right)$. Funkce $f'(x)$ je v prvním intervalu záporná, tedy klesající, a v druhém kladná, resp. rostoucí. Funkce má v bodě $\frac{4}{\ln^2 10}$ globální minimum.



Úsečka AB na výše uvedeném obrázku graficky představuje nejkratší vzdálenost mezi funkcemi $g(x)$ a $h(x)$ a měří přibližně 1 j.

3.1.17 Příklad 17

Zkusme nyní nahradit dekadický logaritmus logaritmem přirozeným:
(vlastní příklad)

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x, \tag{1}$$

kde $x > 0$.

Funkci zderivujeme:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}. \tag{2}$$

Derivace je nulová, je-li:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x}, \tag{3}$$

$$x = 2\sqrt{x}, \tag{4}$$

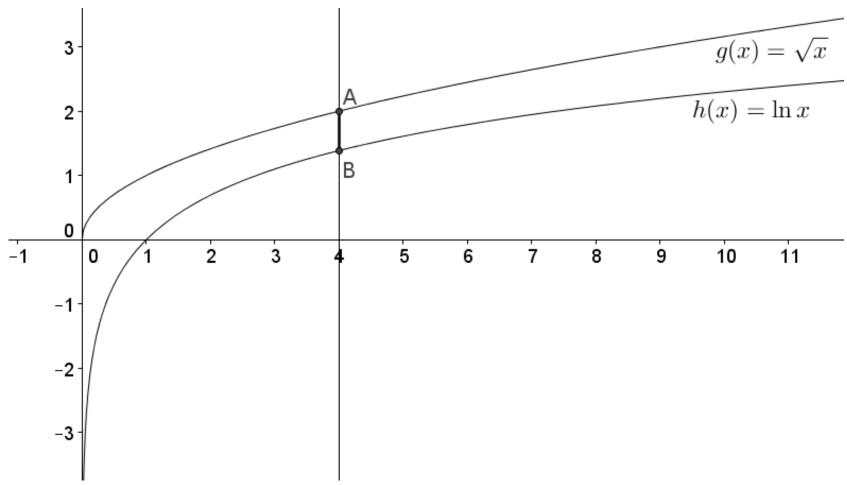
$$x^2 = 4x, \tag{5}$$

$$x = 0 \ \vee x = 4. \tag{6}$$

Řešení $x = 0$ však nesplňuje podmínku $x > 0$.

Nyní vyšetříme monotonii funkce $f'(x)$ na intervalech $(0, 4)$ a $(4, +\infty)$.

Funkce $f'(x)$ je v prvním intervalu záporná, tedy klesající, a v druhém kladná, resp. rostoucí. Funkce má v bodě 4 globální minimum.



Úsečka AB graficky představuje nejkratší vzdálenost mezi funkcemi $g(x)$ a $h(x)$ a měří přibližně 0,61 j.

Pozn.:
Porovnáme-li tento graf s grafem z předchozího příkladu (3.1.16), zjistíme, že na rozdíl od dekadického logaritmu, kde nejbližší místo je mezi kladnou a zápornou hodnotou, je u přirozeného logaritmu nejbližší místo mezi dvěma kladnými hodnotami.

3.1.18 Příklad 18

Jakou největší délku má horizontální úsečka ohraničená křivkami $y = \sqrt{x}$ a $y = x^2$, definovanými na intervalu $\langle 0,1 \rangle$?
([2], str. 148)

Protože jsou obě dvě křivky na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ symetrické[5], můžeme hledat největší délku vertikální úsečky, která je stejně dlouhá jako největší délka horizontální úsečky.

Hledáme tedy maximum funkce

$$f(x) = \sqrt{x} - x^2, \tag{1}$$

kde $x \in \langle 0, 1 \rangle$.
Funkci zderivujeme:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x. \tag{2}$$

Derivace je nulová, je-li:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x = 0, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x, \tag{4}$$

$$\frac{1}{4x} = 4x^2, \tag{5}$$

[5] Funkce jsou symetrické, protože jsou na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ inverzní.

$$1 = 16x^3, \tag{6}$$

$$\frac{1}{16} = x^3, \tag{7}$$

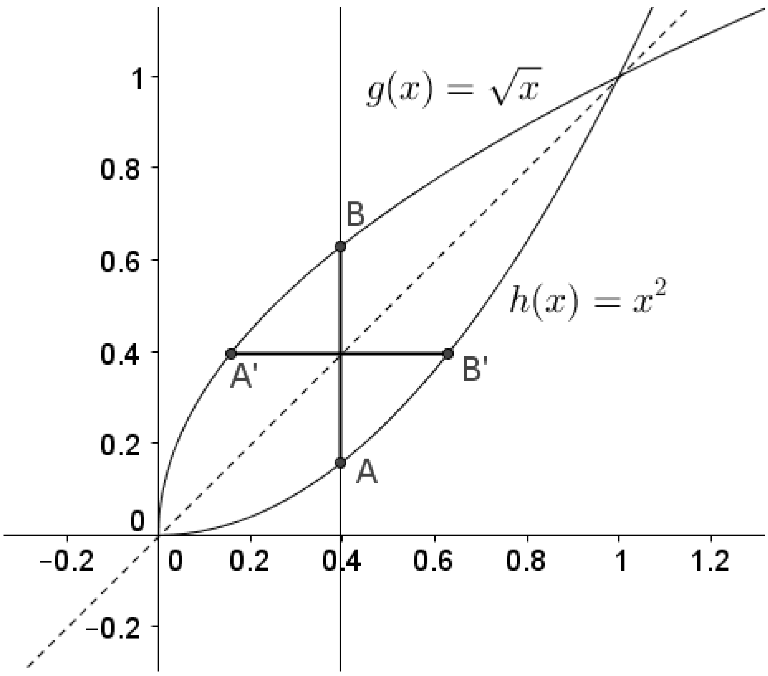
$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{16}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{4}. \tag{8}$$

Druhá derivace:

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} - 2, \tag{9}$$

$$f''\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{4}\right) = -\frac{1}{4 \cdot \sqrt{\frac{2}{64}}} - 2 < 0. \tag{10}$$

Jelikož $f'\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{4}\right) = 0$ a zároveň $f''\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{4}\right) < 0$, má funkce $f(x)$ v hodnotě $\frac{\sqrt[3]{4}}{4}$ ostré lokální maximum. Jelikož je to jediný ostrý lokální extrém funkce $f(x)$ v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a funkce $f(x)$ je v tomto intervalu spojitá, jde také o globální maximum této funkce.



Úsečka AB graficky představuje největší délku vertikální úsečky mezi funkcemi, úsečka A´B´ znázorňuje největší délku horizontální úsečky.

Nyní délku dopočítáme dosazením (8) do (1):

$$f(x) = \sqrt{x} - x^2 = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{4}}{4} - \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{4}\right)^2} = 0,472. \tag{11}$$

Největší délka horizontální úsečky daných křivek je 0,427 j.

3.1.19 Příklad 19

Jakou největší délku má horizontální úsečka ohraničená křivkami $y = \sqrt{x}$ a $y = x^3$, definovanými na intervalu $\langle 0,1 \rangle$?
(vlastní příklad)

Vzhledem k tomu, že tyto dvě křivky na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ nejsou symetrické, nelze postupovat jako v úloze 3.1.18. Podívejme se tedy na úlohu vzhledem k y:

$$y = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad x = y^2,$$
$$y = x^3 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{y}.$$

Hledáme tedy maximum funkce

$$f(y) = \sqrt[3]{y} - y^2, \tag{1}$$

kde $y \in \langle 0,1 \rangle$.
Funkci zderivujeme:

$$f'(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} - 2y. \tag{2}$$

Derivace je nulová, je-li:

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} - 2y = 0, \tag{3}$$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} = 2y, \tag{4}$$

$$\frac{1}{6} = \sqrt[3]{y^5}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{216} = y^5, \tag{6}$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{216}} = y, \tag{7}$$

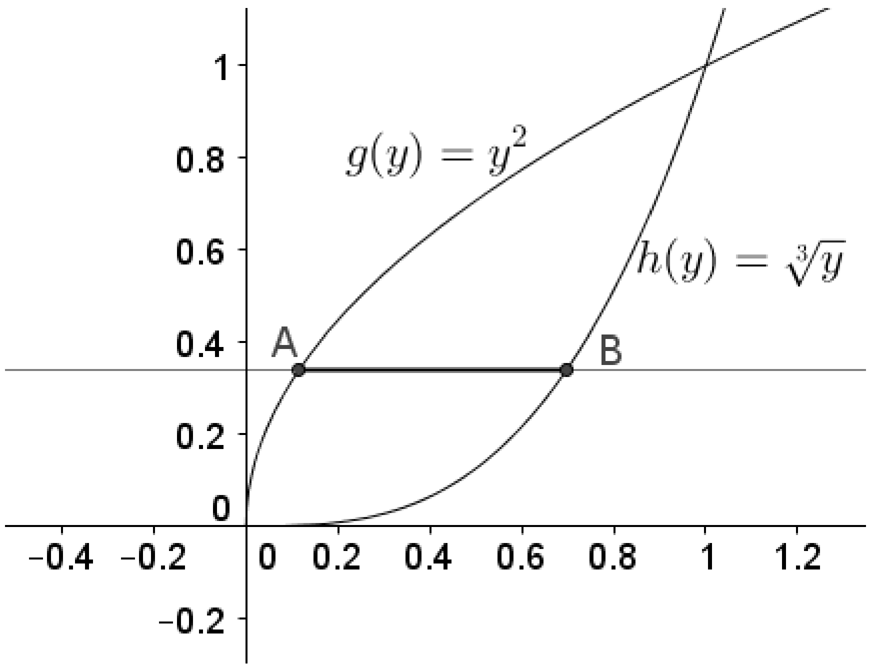
$$y = \frac{1}{\sqrt[5]{216}}. \tag{8}$$

Druhá derivace:

$$f''(y) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{y^5}} - 2. \tag{9}$$

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt[5]{216}}\right) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{216}}} - 2 = -\frac{2}{9 \cdot \frac{1}{6}} - 2 = -\frac{10}{3} < 0. \tag{10}$$

Jelikož $f'\left(\frac{1}{\sqrt[5]{216}}\right) = 0$ a zároveň $f''\left(\frac{1}{\sqrt[5]{216}}\right) < 0$, má funkce $f(y)$ v hodnotě $\frac{1}{\sqrt[5]{216}}$ ostré lokální maximum. Jelikož je to jediný ostrý lokální extrém funkce $f(y)$ v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a funkce $f(y)$ je v tomto intervalu spojitá, jde také o globální maximum této funkce.



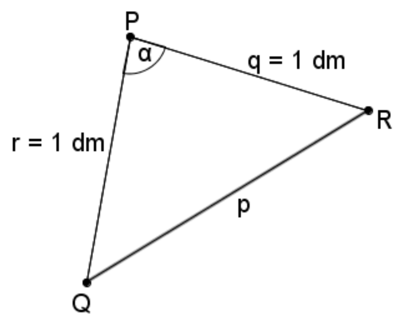
Úsečka AB graficky znázorňuje největší délku horizontální úsečky mezi danými funkcemi.

Nyní délku dopočítáme dosazením (8) do (1):

$$f(y) = \sqrt[3]{y} - y^2 = \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt[5]{216}}} - \left(\frac{1}{\sqrt[5]{216}}\right)^2 = 0{,}582. \tag{11}$$

Největší délka horizontální úsečky daných křivek je 0,582 j.

3.1.20 Příklad 20



Je dán rovnoramenný trojúhelník PQR, ve kterém $|PQ| = |PR| = 1$ dm. Nechť úhel při vrcholu P má velikost α. Jak velký musí být úhel α, aby byl obsah trojúhelníku maximální?
([30])

Obsah trojúhelníka lze vypočítat pomocí vnitřního úhlu:[6]

$$S(\alpha) = \frac{1}{2} qr \cdot \sin\alpha, \tag{1}$$

kde $q = r = 1$, proto:

$$S(\alpha) = \frac{1}{2}\sin\alpha, \tag{2}$$

kde $\alpha \in (0, \pi)$, protože platí, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je vždy 180°.

Hledáme maximum této funkce, proto ji zderivujeme:

$$S'(\alpha) = \frac{1}{2}\cos\alpha. \tag{3}$$

Derivace je nulová, je-li

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \vee \alpha = \frac{3}{2}\pi, \tag{4}$$

avšak $\alpha \in (0, \pi)$, proto nás bude zajímat pouze kořen $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

[6] Vzorec převzat z [37].

Druhá derivace:

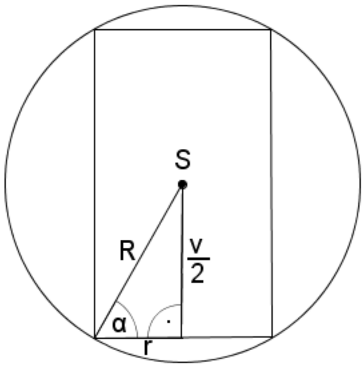
$$S''(\alpha) = -\frac{1}{2}\sin\alpha, \tag{5}$$

$$S''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sin\alpha < 0. \tag{6}$$

Jelikož $S'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ a zároveň $S''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, má funkce $S(\alpha)$ v hodnotě $\frac{\pi}{2}$ ostré lokální maximum. Jelikož je to jediný ostrý lokální extrém funkce $S(\alpha)$ v intervalu $(0, \pi)$ a funkce $S(\alpha)$ je v tomto intervalu spojitá, jde také o globální maximum této funkce.

Bude-li $\alpha = \frac{\pi}{2}$, bude obsah hledaného trojúhelníku maximální, tedy $\frac{1}{2}\,\mathrm{dm}^2$.

3.1.21 Příklad 21



Do koule o poloměru R je vepsán válec. Určete jeho rozměry, aby měl maximální objem.
([19], str. 50)

Pro objem válce platí, že

$$V = \pi r^2 \cdot v. \tag{1}$$

Z obrázku je dále patrné že platí

$$\sin\alpha = \frac{\frac{v}{2}}{R} = \frac{v}{2R}, \tag{2}$$

odtud

$$v = 2R \cdot \sin\alpha. \tag{3}$$

Dále platí, že

$$\cos\alpha = \frac{r}{R}, \tag{4}$$

odtud

$$r = R \cdot \cos\alpha. \tag{5}$$

Nyní vztahy (3) a (5) dosadíme do (1):

$$V(\alpha) = \pi \cdot R^2 \cdot \cos^2\alpha \cdot 2R \cdot \sin\alpha, \tag{6}$$

$$V(\alpha) = 2\pi R^3 \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha, \tag{7}$$

kde $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Chceme, aby byl objem maximální, proto funkci (7) zderivujeme:

$$V'(\alpha) = 4\pi R^3 \cdot \cos\alpha \cdot (-\sin\alpha) \cdot \sin\alpha + 2\pi R^3 \cos^2\alpha \cdot \cos\alpha\,. \tag{8}$$

Derivace je nulová, je-li

$$-4\pi R^3 \cdot \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha + 2\pi R^3 \cos^3\alpha = 0, \tag{9}$$

$$2\pi R^3 \cos^3\alpha = 4\pi R^3 \cdot \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha, \tag{10}$$

$$\cos^2\alpha = 2\sin^2\alpha, \tag{11}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}, \tag{12}$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{2}. \tag{13}$$

Protože máme rozměry válce vyjádřené pomocí funkce sinus a cosinus, využijeme vzorec

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \tag{14}$$

dále vztah (14) vydělíme výrazem $\cos^2\alpha$:

$$1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \tag{15}$$

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \tag{16}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}. \tag{17}$$

Nyní vztah (13) dosadíme do (17):

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \tag{18}$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}. \tag{19}$$

Vzhledem k tomu, že $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, je jediné možné řešení $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

neboli $\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Zda je v bodě arccos $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ skutečně maximum, ověříme pomocí funkčních hodnot v krajních bodech a v bodě α:

$$V(0) = 0,$$
$$V\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right) > 0, \tag{20}$$
$$V\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Je patrné, že největší funkční hodnota je v bodě arccos $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Protože známe hodnotu $\cos\alpha$, můžeme nyní dopočítat poloměr válce dosazením $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ do (5):

$$r = R \cdot \cos\alpha = R \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}R}{3}. \tag{21}$$

Abychom mohli dopočítat výšku válce, musíme zjistit hodnotu $\sin\alpha$ dosazením (18) do (14):

$$\frac{2}{3} + \sin^2\alpha = 1, \tag{22}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{3}, \tag{23}$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}. \tag{24}$$

Opět do intervalu $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ spadá pouze kladné řešení.

Výška válce:

$$v = 2R \cdot \sin\alpha = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}R}{3}. \tag{25}$$

Aby měl válec maximální objem, musel by být jeho poloměr $r = \frac{\sqrt{6}R}{3}$ a výška $v = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$.

Tento objem bude roven $\frac{4\sqrt{3}R^3\pi}{9}\, j^3$.

3.1.22 Příklad 22

Učitel matematické analýzy dovolil studentům, aby zvolili kladné číslo x s tím, že student, který bude mít z testu alespoň $100\left(1-\frac{12x}{10x^2+21}\right)$ bodů, udělá úspěšně zkoušku. Jaké x mají zvolit?
([25], str. 6)

Mějme funkci

$$f(x) = 100\left(1-\frac{12x}{10x^2+21}\right), \tag{1}$$

která v závislosti na x vyjadřuje počet bodů určujících hranici úspěšně vykonané zkoušky. Ze zadání víme, že $x \in (0, +\infty)$,
Vzhledem k tomu, že pravděpodobně budeme chtít složit zkoušku úspěšně s nejnižším počtem bodů, budeme hledat globální minimum funkce (1).
Aby se nám funkce (1) lépe derivovala, upravíme ji do tvaru:

$$f(x) = 100 - \frac{1200x}{10x^2+21}. \tag{2}$$

Derivace funkce (2):

$$f'(x) = -\frac{1200 \cdot (10x^2+21) - 1200x \cdot 20x}{(10x^2+21)^2}. \tag{3}$$

Po úpravě (3) dostaneme:

$$f'(x) = \frac{12000x^2 - 25200}{(10x^2+21)^2}. \tag{4}$$

Derivace je nulová, je-li čitatel zlomku nulový:

$$12000x^2 - 25200 = 0, \tag{5}$$

$$x^2 = \frac{25200}{12000}, \tag{6}$$

$$x = \pm\sqrt{2{,}1}. \tag{7}$$

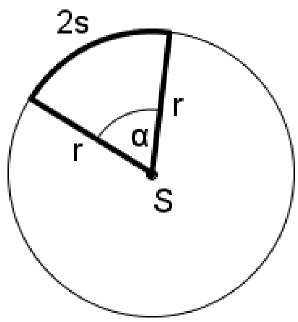
Záporný kořen však neleží v definičním oboru funkce, proto nás bude zajímat, zda se globální minimum funkce nachází v hodnotě $\sqrt{2{,}1}$.

Vzhledem k obtížnosti druhé derivace funkce $f(x)$ určíme monotonii funkce

$f'(x)$ na intervalech $(0, \sqrt{2,1})$ a $(\sqrt{2,1}, +\infty)$. Funkce $f'(x)$ je v prvním intervalu záporná, tedy klesající, a v druhém kladná, resp. rostoucí. Funkce má v hodnotě $\sqrt{2,1}$ globální minimum.

Pro žáky je ideální hodnota $x = \sqrt{2,1}$, protože pak by úspěšně složili zkoušku již při 59 bodech.

3.1.23 Příklad 23



Najděte kruhovou výseč, která má při daném obvodu $2s$ maximální obsah.
([4], str. 130)

Obsah kruhové výseče lze vypočítat jako

$$S = \frac{\alpha r^2}{2}, \tag{1}$$

kde r je poloměr kruhové výseče a úhel α je vyjádřen v radiánech.[7]
Obvod kruhové výseče je pak

$$o = (\alpha + 2)r. \tag{2}$$

Ze zadání víme, že obvod kruhové výseče je $2s$:

$$2s = (\alpha + 2)r, \tag{3}$$

odtud

$$\alpha = \frac{2s - 2r}{r}. \tag{4}$$

Vztah (4) dosadíme do (1):

$$S(r) = \frac{\frac{2s - 2r}{r} \cdot r^2}{2} = \frac{2sr - 2r^2}{2} = sr - r^2. \tag{5}$$

kde $r \in (0, +\infty)$.

[7] Vzorec převzat z [35].

Funkci (5) nyní zderivujeme, protože hledáme její maximum:

$$S'(r) = s - 2r. \tag{6}$$

Derivace je nulová, je-li

$$s - 2r = 0, \tag{7}$$

$$r = \frac{s}{2}. \tag{8}$$

Zda je v tomto bodě skutečně maximum ověříme pomocí druhé derivace:

$$S''(r) = -2, \tag{9}$$

$$S''\left(\frac{s}{2}\right) = -2 < 0. \tag{10}$$

Jelikož $S'\left(\frac{s}{2}\right) = 0$ a zároveň $S''\left(\frac{s}{2}\right) < 0$, má funkce $S(r)$ v hodnotě $\frac{s}{2}$ ostré lokální maximum. Jelikož je to jediný ostrý lokální extrém funkce $S(r)$ v intervalu $(0, +\infty)$ a funkce $S(r)$ je v tomto intervalu spojitá, jde také o globální maximum této funkce.

Nyní dopočítáme úhel α dosazením (8) do (4):

$$\alpha = \frac{2s - 2 \cdot \left(\frac{s}{2}\right)}{\left(\frac{s}{2}\right)} = 2. \tag{11}$$

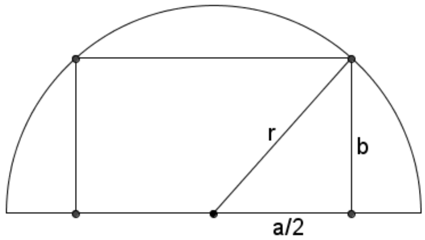
Hledaná kruhová výseč je o poloměru $r = \frac{s}{2}$ se středovým úhlem $\alpha = 2$.

Obsah této kruhové výseče bude $\frac{s^2}{4}$ j^2.

Pozn.:

Je zajímavé, že úhel α není závislý na obvodu $2s$.

3.1.24 Příklad 24



Vypočtěte rozměry obdélníku maximálního obsahu, vepsaného do půlkruhu o poloměru r. ([9], str. 327)

Označme strany obdélníka a a b. Potom obsah obdélníka lze napsat jako

$$S = a \cdot b. \tag{1}$$

Z obrázku je dále patrné, že dle Pythagorovy věty platí:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = r^2, \tag{2}$$

kde r je poloměr půlkruhu.

Ze vztahu (2) vyjádříme stranu obdélníka a:

$$a = 2\sqrt{r^2 - b^2}\,. \tag{3}$$

Nyní (3) dosadíme do (1):

$$S = \left(2\sqrt{r^2 - b^2}\right) \cdot b. \tag{4}$$

Obsah obdélníka je dán funkcí:

$$S(b) = \left(2\sqrt{r^2 - b^2}\right) \cdot b, \tag{5}$$

kde $b \in (0, +\infty)$.

Funkci (5) nyní zderivujeme, protože hledáme její maximum:

$$S'(b) = \frac{-2b}{\sqrt{r^2 - b^2}} \cdot b + 2\sqrt{r^2 - b^2}. \tag{6}$$

Derivace je nulová, je-li

$$\frac{-2b}{\sqrt{r^2 - b^2}} \cdot b + 2\sqrt{r^2 - b^2} = 0, \tag{7}$$

$$-2b^2 + 2(r^2 - b^2) = 0, \tag{8}$$

$$2r^2 - 4b^2 = 0, \tag{9}$$

$$b^2 = \frac{r^2}{2}, \tag{10}$$

$$b = \pm\sqrt{\frac{r^2}{2}} = \pm\frac{r\sqrt{2}}{2}. \tag{11}$$

Záporný kořen však v tomto případě nemá smysl, proto nás bude zajímat

pouze $\frac{r\sqrt{2}}{2}$.

Vzhledem k obtížnosti druhé derivace funkce $S(b)$, určíme monotonii funkce $S'(b)$ na intervalech $\left(0, \frac{r\sqrt{2}}{2}\right)$ a $\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$. Funkce $S'(b)$ je v prvním intervalu kladná, tedy rostoucí, a v druhém záporná, resp. klesající. Funkce má v hodnotě $\frac{r\sqrt{2}}{2}$ globální maximum.

Nyní dopočteme chybějící rozměr obdélníka a, a to dosazením b do (3):

$$a = 2\sqrt{r^2 - b^2}, \tag{12}$$

$$a = 2\sqrt{r^2 - \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2}, \tag{13}$$

$$a = 2\sqrt{r^2 - \frac{2r^2}{4}}, \tag{14}$$

$$a = 2\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}}, \tag{15}$$

$$a = 2\sqrt{\frac{r^2}{2}}, \tag{16}$$

$$a = \pm r\sqrt{2}. \tag{17}$$

Délka obdélníka však nemůže být záporná, proto je jediným řešením $a = r\sqrt{2}$.

Aby měl obdélník maximální obsah, musely by být jeho rozměry $r\sqrt{2}$ a $\frac{r\sqrt{2}}{2}$.

Maximální obsah obdélníka je r^2.

3.2 Biologické disciplíny

3.2.1 Příklad 1

Výšku rostliny popisuje funkce

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^2}{8},$$

kde x je čas v měsících a $f(x)$ je výška rostliny na konci x-tého měsíce. Kdy roste rostlina rychleji, na konci 1. nebo na konci 4. měsíce?
([28])

Abychom zjistili, zda rostlina roste rychleji na konci 1. nebo 4. měsíce, musíme danou funkci nejprve zderivovat:

$$f'(x) = \sqrt{x} - \frac{x}{4}. \qquad (1)$$

Na konci prvního měsíce roste rostlina rychlostí:

$$f'(1) = \sqrt{1} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \qquad (2)$$

na konci měsíce čtvrtého:

$$f'(4) = \sqrt{4} - \frac{4}{4} = 1. \qquad (3)$$

Je zřejmé, že $1 > \frac{3}{4}$, proto lze tvrdit, že rostlina poroste rychleji na konci čtvrtého měsíce (1 metr za měsíc).

3.2.2 Příklad 2

Počet žab na sledovaném území vyjadřuje funkce

$$f(x) = 80 + 3x^2 - \frac{x^3}{3},$$

kde x je počet roků od začátku sledování a $f(x)$ je počet žab na konci x-tého roku. Území se sledovalo 10 let. Který rok bylo žab nejvíce a který nejméně?
([15], str. 65)

Území se sledovalo 10 let, tedy $x \in \langle 0, 10\rangle$. Potřebujeme určit maximum a minimum funkce $f(x)$ na intervalu $\langle 0, 10\rangle$, proto funkci zderivujeme:

$$f'(x) = 6x - x^2. \tag{1}$$

Derivace je nulová, je-li $x = 0$ nebo $x = 6$.
Zjistíme hodnoty v podezřelých bodech (0, 6 a 10):

$$\begin{aligned} f(0) &= 80 + 3 \cdot 0^2 - \frac{0^3}{3} = 80, \\ f(6) &= 80 + 3 \cdot 6^2 - \frac{6^3}{3} = 116, \\ f(10) &= 80 + 3 \cdot 10^2 - \frac{10^3}{3} = 47. \end{aligned} \tag{2}$$

Z těchto hodnot vidíme, že nejvíce žab bude na sledovaném území na konci 6. roku, a to 116. Naopak nejméně jich bude na konci 10. roku, a to 47 žab.

3.2.3 Příklad 3

Vliv chemikálie na růst bakterií vyjadřuje funkce

$$f(x) = 1000 + 30x^2 - x^3,$$

kde x je čas v minutách od počátku pokusu a $f(x)$ je počet bakterií na konci x-té minuty. Zjistěte maximální a minimální počet bakterií během prvních 30 minut pokusu. ([15], str. 65)

Pokus bude trvat celkem 30 minut, tedy $x \in \langle 0, 30\rangle$. Potřebujeme určit maximum a minimum funkce $f(x)$ na intervalu $\langle 0, 30\rangle$, proto funkci zderivujeme:

$$f'(x) = 60x - 3x^2. \tag{1}$$

Derivace je nulová, je-li $x = 0$ nebo $x = 20$.
Zjistíme hodnoty v podezřelých bodech (0, 20 a 30):

$$\begin{aligned} f(0) &= 1000 + 30 \cdot 0^2 - 0^3 = 1000, \\ f(20) &= 1000 + 30 \cdot 20^2 - 20^3 = 5000, \\ f(30) &= 1000 + 30 \cdot 30^2 - 30^3 = 1000. \end{aligned} \tag{2}$$

Vidíme, že maximální počet bakterií během prvních 30 minut pokusu bude 5000, a to na konci 20. minuty. Minimální počet bakterií je 1000 a této hodnoty bude dosaženo během pokusu celkem dvakrát – v čase 0 a 30 minut.

3.2.4 Příklad 4

Teplota vzduchu ve skleníku mezi 5. a 21. hodinou je určena funkcí

$$f(x) = 15 + 25\sin\left(\frac{(x-5)\pi}{24}\right),$$

kde x je konkrétní čas (tj. počet hodin od půlnoci) a $f(x)$ je teplota skleníku v čase x hodin. Kdy bude teplota nejvyšší a kolika stupňů dosáhne?

([15], str. 65)

Teplota vzduchu ve skleníku je danou funkcí vyjádřena mezi 5. a 21. hodinou, proto $x \in \langle 5, 21 \rangle$.

Potřebujeme určit maximum funkce $f(x)$ na intervalu $\langle 5, 21 \rangle$, proto funkci zderivujeme:

$$f'(x) = 25\cos\left(\frac{(x-5)\pi}{24}\right) \cdot \frac{\pi}{24}. \tag{1}$$

Derivace je nulová, je-li

$$25\cos\left(\frac{(x-5)\pi}{24}\right) \cdot \frac{\pi}{24} = 0, \tag{2}$$

neboli

$$\cos\left(\frac{(x-5)\pi}{24}\right) = 0 \iff \left(\frac{(x-5)\pi}{24}\right) = \frac{\pi}{2} \vee \left(\frac{(x-5)\pi}{24}\right) = \frac{3\pi}{2}, \tag{3}$$

odtud $x = 17 \vee x = 41$.

Řešení $x = 41$ nás však nezajímá, protože neleží v intervalu $\langle 5, 21 \rangle$.

Nyní zjistíme funkční hodnoty v podezřelých bodech (5, 17 a 21):

$$\begin{aligned} f(5) &= 15 + 25\sin\left(\frac{(5-5)\pi}{24}\right) = 15, \\ f(17) &= 15 + 25\sin\left(\frac{(17-5)\pi}{24}\right) = 40, \\ f(21) &= 15 + 25\sin\left(\frac{(21-5)\pi}{24}\right) = 36{,}7. \end{aligned} \tag{4}$$

Vidíme, že nejvyšší naměřená teplota dosáhne 40° a bude to v 17 hodin.

3.3 Fyzikální úlohy

3.3.1 Příklad 1

Závislost dráhy na čase je dána vztahem $s(t) = -2t^3 + 14t^2$. Vypočítejte okamžitou rychlost a okamžité zrychlení v čase 2 sekundy.
(vlastní příklad)

Okamžitou rychlost získáme první derivací dráhy podle času:

$$s'(t) = -6t^2 + 28t. \tag{1}$$

Okamžitá rychlost v čase 2 vteřiny je pak:

$$s'(2) = -6 \cdot 2^2 + 28 \cdot 2 = 32. \tag{2}$$

Okamžité zrychlení je dané druhou derivací dráhy podle času:

$$s''(t) = -12t + 28. \tag{3}$$

Okamžité zrychlení v čase 2 vteřiny:

$$s''(2) = -12 \cdot 2 + 28 = 4. \tag{4}$$

3.3.2 Příklad 2

Míč je vyhozen z výšky $h = 20$m kolmo vzhůru a jeho počáteční rychlost $v_0 = 30$ m/s. Jakou rychlost bude mít míč v čase $t = 2{,}5$ s? V jakém čase bude míč dosahovat maximální výšky a jaké výšky bude dosahovat? ($g = 10$ m$\cdot$ s^{-2})
([29])

Dráha míče je dána vztahem

$$s(t) = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,^{8} \tag{1}$$

kde $t \in \langle 0, t_1 \rangle$. Čas t_1 je čas, kdy míč dopadne na zem.

---

[8] Vzorec převzat z [3].

Nyní dosadíme informace ze zadání:

$$s(t) = 20 + 30 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 = 20 + 30t - 5t^2. \qquad (2)$$

Abychom zjistili rychlost v určitém čase, musíme funkci (2) zderivovat:

$$s'(t) = 30 - 10t. \qquad (3)$$

Rychlost v čase $t = 2{,}5$ s:

$$s'(2{,}5) = 30 - 10 \cdot 2{,}5 = 5. \qquad (4)$$

Rychlost míče v čase $t = 2{,}5$ s bude 5 m/s.

Pro zjištění, v jakém čase bude míč dosahovat maximální výšky,
musíme získat stacionární body: $s'(t) = 0$:

$$30 - 10t = 0, \qquad (5)$$

odtud $t = 3$ s.

Zda míč ve 3 sekundách dosahuje maximální výšky, ověříme druhou derivací:

$$s''(t) = -10, \qquad (6)$$

$$s''(3) = -10 < 0, \qquad (7)$$

Protože $s'(3) = 0$ a zároveň $s''(3) < 0$, má funkce $s(t)$ v hodnotě 3 ostré lokální maximum. Jelikož je to jediný ostrý lokální extrém funkce $s(t)$ v intervalu $\langle 0, +\infty)$ a funkce $s(t)$ je v tomto intervalu spojitá, jedná se rovněž o globální maximum této funkce.

Nyní zjistíme, jaké maximální výšky bude míč dosahovat (dosazením $t = 3$ do (1)):

$$s(t) = 20 + 30 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3^2 = 65. \qquad (8)$$

Maximální výše, které míč dosáhne, je 65 m.

3.3.3 Příklad 3

Určete trajektorii a rychlost hmotného bodu, jehož pohyb je popsán rovnicemi

$$x = at^3, y = bt^2, z = 0, a, b > 0.$$

([20], str. 125)

Abychom získali rovnici hledané trajektorie, vytkneme z první rovnice čas t:

$$t = \sqrt[3]{\frac{x}{a}}, \tag{1}$$

který dosadíme do druhé rovnice:

$$y = bt^2 = b \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{x}{a}}\right)^2. \tag{2}$$

Rovnici (2) upravíme – umocníme na třetí:

$$y^3 = b^3 \cdot \frac{x^2}{a^2}, \tag{3}$$

odtud

$$x^2 b^3 = y^3 a^2, \tag{4}$$

což je rovnice semikubické paraboly.[9]

Velikost rychlosti hmotného bodu je dána vztahem[10]

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}. \tag{5}$$

Derivace

$$x'(t) = 3at^2 \tag{6}$$

a

$$y'(t) = 2bt. \tag{7}$$

Vztah (6) a (7) dosadíme do (5):

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(3at^2)^2 + (2bt)^2}, \tag{8}$$

odtud

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{9a^2t^4 + 4b^2t^2} = \sqrt{t^2 \cdot (9a^2t^2 + 4b^2)} = \\ &= t\sqrt{9a^2t^2 + 4b^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

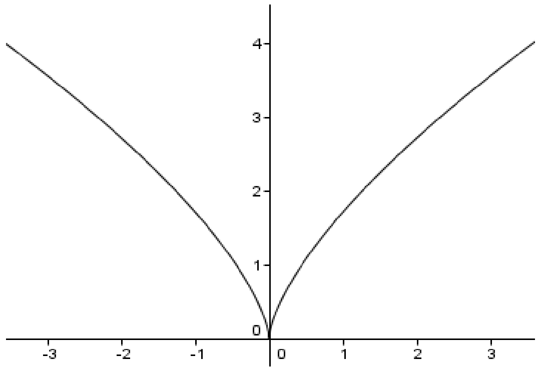
Trajektorií hmotného bodu je $x^2b^3 = y^3a^2$ (semikubická parabola) a rychlost $v = t\sqrt{9a^2t^2 + 4b^2}$.

---

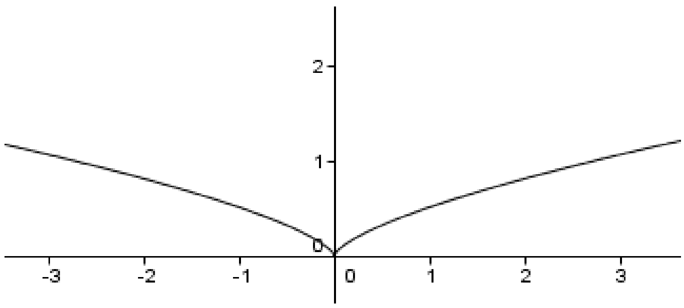
[9] Semikubická parabola je první rovinná křivka (vyjma přímky), u které byla vypočítána délka. V roce 1657 ji objevil anglický matematik William Neil, proto se někdy užívá název Neilova parabola. [32]

[10] Vztah převzat z [20].

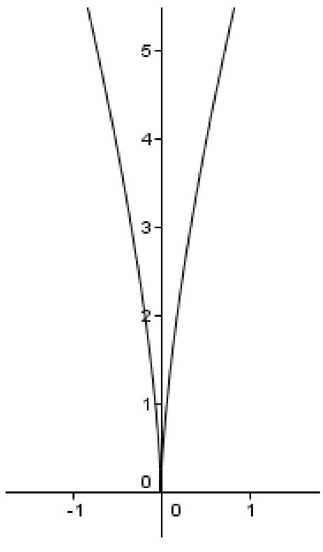
Pro představu je na následujícím obrázku znázorněn graf semikubické paraboly, pro kterou platí, že $a = b$.



Graf semikubické paraboly pro $a > b$.



Graf semikubické paraboly pro $a < b$.



3.3.4 Příklad 4

Dva světelné zdroje jsou umístěny 30 m od sebe a poměr jejich svítivosti je 27 : 8. Najděte na jejich spojnici nejméně osvětlený bod.
([34], str. 2)

Označme hledanou vzdálenost od prvního světelného zdroje x. Vzdálenost od druhého světelného zdroje je pak rovna $30 - x$. Svítivosti jednotlivých zdrojů označme I_1 a I_2. Potom pro intenzitu osvětlení v bodech platí:[11]

$$f(x) = \frac{I_1}{x^2} + \frac{I_2}{(30-x)^2}, \tag{1}$$

kde $x \in \langle 0,30 \rangle$.
Je dán poměr svítivostí

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{27}{8}, \tag{2}$$

odtud

$$I_1 = \frac{27}{8} I_2. \tag{3}$$

Vztah (3) dosadíme do (1):

$$f(x) = \frac{\frac{27}{8} I_2}{x^2} + \frac{I_2}{(30-x)^2}. \tag{4}$$

Hledáme nejméně osvětlený bod, proto budeme hledat minimum funkce.
Funkci (4) zderivujeme:

$$f'(x) = \frac{\frac{27}{8} I_2 \cdot (-2)}{x^3} + \frac{2I_2}{(30-x)^3}, \tag{5}$$

Derivace je rovna nule, je-li

$$\frac{\frac{27}{8} I_2 \cdot (-2)}{x^3} + \frac{2I_2}{(30-x)^3} = 0, \tag{6}$$

[11] Vzorec převzat z [18].

$$\frac{2I_2}{(30-x)^3} = \frac{\frac{27}{8}I_2 \cdot 2}{x^3}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{(30-x)^3} = \frac{27}{8x^3}, \tag{8}$$

$$\frac{x^3}{(30-x)^3} = \frac{27}{8}, \tag{9}$$

$$\frac{x}{30-x} = \frac{3}{2}, \tag{10}$$

$$2x = 90 - 3x, \tag{11}$$

$$x = 18. \tag{12}$$

Zda v tomto bodě nastává extrém, ověříme pomocí druhé derivace:

$$f''(x) = \frac{\frac{27}{8}I_2 \cdot 6}{x^4} + \frac{6I_2}{(30-x)^4}, \tag{13}$$

$$f''(18) = \frac{\frac{27}{8}I_2 \cdot 6}{x^4} + \frac{6I_2}{(30-x)^4} > 0. \tag{14}$$

Protože $f'(18) = 0$ a zároveň $f''(18) > 0$, má funkce $f(x)$ v hodnotě 18 ostré lokální minimum. Jelikož je to jediný ostrý lokální extrém funkce $f(x)$ v intervalu $\langle 0,30 \rangle$ a $f(x)$ je v tomto intervalu spojitá, jde také o globální minimum této funkce.

Nejméně osvětlené místo je 18 m od prvního (silnějšího) zdroje.

3.3.5 Příklad 5

Výkon elektrického spotřebiče zapojeného do stejnosměrného obvodu je dán vztahem $P = I^2R$, kde I je proud v obvodu a R odpor spotřebiče. Pokud nezanedbáváme vnitřní odpor zdroje, platí pro velikost proudu vztah $I = \frac{U_e}{R+R_i}$, kde R_i je vnitřní odpor zdroje

a U_e jeho elektromotorické napětí. Urči, jaký musí být vztah mezi R a R_i, aby byl výkon spotřebiče maximální.
([33])

Výkon elektrického spotřebiče je dán vztahem

$$P(R) = I^2 R = \left(\frac{U_e}{R + R_i}\right)^2 \cdot R = \frac{R \cdot U_e^2}{(R + R_i)^2}. \tag{1}$$

Chceme zjistit, pro jakou hodnotu odporu R je výkon maximální,
proto funkci zderivujeme podle R:

$$\begin{aligned} P'(R) &= \frac{U_e^2 \cdot (R + R_i)^2 - R \cdot U_e^2 \cdot 2(R + R_i)}{(R + R_i)^4} = \\ &= \frac{U_e^2 \cdot (R^2 + 2RR_i + R_i^2) - 2R^2 U_e^2 - 2RR_i U_e^2}{(R + R_i)^4} = \\ &= \frac{U_e^2 \cdot (R_i^2 - R^2)}{(R + R_i)^4}. \end{aligned} \tag{2}$$

Derivace je nulová, je-li čitatel zlomku nulový, tedy pokud

$$U_e^2 \cdot (R_i^2 - R^2) = 0, \tag{3}$$

$$R_i^2 - R^2 = 0, \tag{4}$$

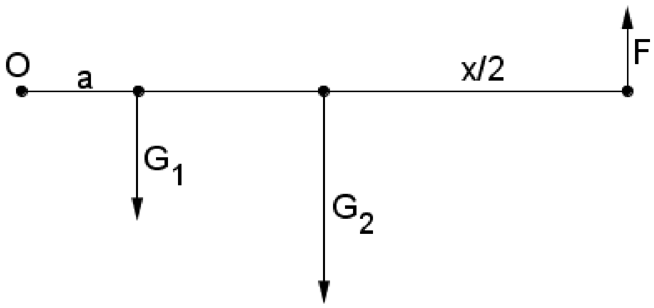
$$R = \pm R_i. \tag{5}$$

V úvahu však nebudeme brát kořen $R = -R_i$, protože odpor být záporný nemůže.
Zda je v R_i skutečně globální maximum ověříme pomocí monotonie funkce $P'(R)$ na intervalech $(-\infty, R_i)$ a $(R_i, +\infty)$. Funkce $P'(R)$ je v levém intervalu kladná, tedy rostoucí, a v pravém záporná, tedy klesající. Funkce má v hodnotě R_i globální maximum.

Výkon spotřebiče bude maximální v případě, že se jeho odpor bude rovnat odporu zdroje.

3.3.6 Příklad 6

Určete délku jednozvratné páky tak, aby ke zdvižení břemene tíhy G_1, umístěného ve vzdálenosti a od podpěry, bylo třeba nejmenší síly. Lineární hustota materiálu páky je γ. Řešte úlohu obecně a potom pro hodnoty $G_1 = 1\,000$ N, $a = 0{,}49$ m, $\gamma = 32$ kg/m. Tíhové zrychlení $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.



([20], str. 115)

Hledanou délku páky označíme x, pro které platí, že $x \in \langle 0, +\infty)$. Tíha páky[12]

$$G_2 = x\gamma g, \tag{1}$$

působící sílu, která udržuje páku s břemenem v rovnováze, označíme F.
Při rovnováze je součet momentů sil působících na páku vzhledem k ose otáčení roven 0 N. Proto musí platit tato rovnice:

$$F \cdot x - G_2 \frac{x}{2} - G_1 a = 0. \tag{2}$$

Nyní dosadíme vztah (1) do (2) a získáme následující rovnici:

$$F \cdot x = x\gamma g \frac{x}{2} + G_1 a, \tag{3}$$

$$F = \frac{x^2 \gamma g}{2x} + \frac{G_1 a}{x}. \tag{4}$$

Chceme, aby bylo třeba co nejmenší síly, proto hledáme minimum funkce

$$F(x) = \frac{x\gamma g}{2} + \frac{G_1 a}{x}. \tag{5}$$

Funkci (5) zderivujeme:

$$F'(x) = \frac{\gamma g}{2} - \frac{G_1 a}{x^2}. \tag{6}$$

[12] Převzato z [20].

Derivace je rovna nule, je-li

$$\frac{\gamma g}{2} = \frac{G_1 a}{x^2}, \tag{7}$$

$$\gamma g x^2 = 2G_1 a, \tag{8}$$

$$x^2 = \frac{2G_1 a}{\gamma g}, \tag{9}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2G_1 a}{\gamma g}}. \tag{10}$$

Záporná hodnota však nenáleží definičnímu oboru, proto nás bude zajímat pouze $x = \sqrt{\frac{2G_1 a}{\gamma g}}$.

Zda se jedná opravdu o minimum funkce, ověříme druhou derivací:

$$F''(x) = \frac{2G_1 a}{x^3}, \tag{11}$$

$$F''\left(\sqrt{\frac{2G_1 a}{\gamma g}}\right) = \frac{2G_1 a}{x^3} > 0. \tag{12}$$

Protože $F'\left(\sqrt{\frac{2G_1 a}{\gamma g}}\right) = 0$ a zároveň $F''\left(\sqrt{\frac{2G_1 a}{\gamma g}}\right) > 0$, má funkce $F(x)$ v hodnotě $\sqrt{\frac{2G_1 a}{\gamma g}}$ ostré lokální minimum. Jelikož je to jediný ostrý lokální extrém funkce $F(x)$ na intervalu $\langle 0, +\infty)$ a funkce $F(x)$ je v tomto intervalu spojitá, jde také o globální minimum této funkce.

Minimální sílu, která je potřebná ke zdvižení břemene, vypočteme dosazením x do (5). Funkci (5) však nejprve upravíme převedením na společného jmenovatele:

$$F(x) = \frac{x^2\gamma g + 2G_1 a}{2x}. \tag{13}$$

Dosadíme $x = \sqrt{\frac{2G_1 a}{\gamma g}}$:

$$F(x) = \frac{\frac{2G_1a}{\gamma g} \cdot \gamma g + 2G_1a}{2 \cdot \sqrt{\frac{2G_1a}{\gamma g}}}, \tag{14}$$

$$F(x) = \frac{2G_1a+2G_1a}{2 \cdot \sqrt{\frac{2G_1a}{\gamma g}}}, \tag{15}$$

$$F(x) = \frac{2G_1a}{\sqrt{\frac{2G_1a}{\gamma g}}}. \tag{16}$$

Zlomek (16) rozšíříme a dále upravujeme:

$$F(x) = \frac{2G_1a}{\sqrt{\frac{2G_1a}{\gamma g}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{2G_1a}{\gamma g}}}{\sqrt{\frac{2G_1a}{\gamma g}}} = \frac{2G_1a \cdot \sqrt{\frac{2G_1a}{\gamma g}}}{\frac{2G_1\,a}{\gamma g}} = \frac{\sqrt{\frac{2G_1a}{\gamma g}}}{\frac{1}{\gamma g}} =$$
$$= \sqrt{\frac{2G_1a}{\gamma g}} \cdot \gamma g = \sqrt{\frac{2G_1a \cdot \gamma^2 \cdot g^2}{\gamma g}} = \sqrt{2G_1a\gamma g}. \tag{17}$$

Je-li $G_1 = 1\,000$ N, $a = 0{,}49$ m a $\gamma = 32$ kg/m, pak $x = \sqrt{\frac{2G_1a}{\gamma g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \cdot 0{,}49}{32 \cdot 10}} =$

$= 1{,}75$ a $F(1{,}75) = \sqrt{2G_1a\gamma g} = \sqrt{2 \cdot 1000 \cdot 0{,}49 \cdot 32 \cdot 10} = 560$ N.

Pro dané hodnoty je minimální délka $x = 1{,}75$ m a odpovídající minimální síla $F = 560$ N.

3.4 Úlohy z oblasti ekonomie

Tato část kapitoly je vytvořena na základě podkladů z literatury [6].

V této kapitole je nutné, abychom věděli, že:

p … cena p

$D(p)$ … poptávková funkce, která vyjadřuje množství zboží $D = D(p)$, které spotřebitel zamýšlí koupit při dané ceně.

$D(p) \cdot p$ … množství peněz, které je spotřebitel ochoten utratit za dané zboží při ceně p

$D'(p)$ … mezní poptávka (derivace funkce D podle proměnné p).

Předpokládejme, že

$$\big(p \cdot D(p)\big)' = 0.$$

Odtud je patrné, že funkce $p \cdot D(p)$ je konstantní. Výdaje na nákup $D(p)$ kusů o ceně p jsou konstantní. V praxi to znamená, že s poklesem ceny statku se objem výdajů na nákup tohoto statku nezmění (např. 100 g sýra stojí 30 Kč. Po slevě stojí 25 Kč. Koupím-li 120 g sýra, moje výdaje na nákup sýra se nezmění a budu mít o 20 g sýra víc.)

Podle vzorečku

$$\big(p \cdot D(p)\big)' = D(p) + p \cdot D'(p)$$

platí, že

$$D(p) + p \cdot D'(p) = 0,$$

odtud

$$p \cdot D'(p) = -D(p),$$

neboli

$$p \cdot \frac{D'(p)}{D(p)} = -1.$$

Levá strana této rovnice představuje elasticitu[13] poptávkové funkce $D(p)$. Je-li rovna číslu -1, pak říkáme, že poptávková funkce je jednotkově elastická.

[13] Elasticita (pružnost) poptávky graficky udává „rychlost“ poklesu poptávkové křivky.

V případě, že

$$\left(p \cdot D(p)\right)' < 0,$$

pak

$$p \cdot \frac{D'(p)}{D(p)} < -1.$$

Jedná se o klesající funkci, což znamená, že s poklesem ceny statku bude objem výdajů na nákup tohoto statku růst (např. klesne-li cena 1kg zlata z 860 000 Kč na 820 000 Kč, nezakoupím pouze 1kg, ale 2kg, protože zlato je uchovatel hodnoty a moje výdaje na nákup zlata se tak zvýší – místo 860 000 Kč utratím 1 640 000 Kč). Poptávka je tzv. cenově elastická.

Je-li

$$\left(p \cdot D(p)\right)' > 0,$$

pak

$$p \cdot \frac{D'(p)}{D(p)} > -1.$$

Jedná se o rostoucí funkci, což znamená, že s poklesem ceny statku bude objem výdajů na nákup tohoto statku klesat (např. klesne-li cena léku z 800 Kč na 750 Kč, nebudu kupovat léků více, zakoupím pouze lék jeden (kvůli krátké době spotřeby), přesto se moje výdaje na lék se sníží o 50 Kč). Poptávka je tzv. cenově neelastická.

3.4.1 Příklad 1

Vypočtěte elasticitu poptávkové funkce $D(p) = \frac{100}{p}$, pro $p > 0$.

([6], str. 31)

Elasticita poptávkové funkce je dána vztahem $p \cdot \frac{D'(p)}{D(p)}$. Abychom mohli do toho vztahu dosadit vše potřebné, musíme zjistit $D'(p)$:

$$D'(p) = -\frac{100}{p^2}. \tag{1}$$

Potom

$$p \cdot \frac{D'(p)}{D(p)} = p \cdot \frac{-\frac{100}{p^2}}{\frac{100}{p}} = p \cdot \left(-\frac{1}{p}\right) = -1. \tag{2}$$

Elasticita poptávkové funkce je pro $p > 0$ jednotkově elastická.

3.4.2 Příklad 2

Vypočtěte elasticitu poptávkové funkce $D(p) = 800 - p$ pro $p \in (0, 800)$.
([6], str. 31)

$$p \cdot \frac{D'(p)}{D(p)} = p \cdot \frac{-1}{800 - p}. \tag{1}$$

Nyní je třeba zjistit, pro jaké p je funkce jednotkově elastická, elastická a neelastická. Funkce je jednotkově elastická, je-li

$$p \cdot \frac{-1}{800 - p} = -1, \tag{2}$$

$$-p = -800 + p, \tag{3}$$

$$p = 400. \tag{4}$$

Funkce je elastická, je-li

$$p \cdot \frac{-1}{800 - p} < -1, \tag{5}$$

$$p > 800 - p, \tag{6}$$

$$p > 400. \tag{7}$$

Funkce je neelastická, je-li

$$p \cdot \frac{-1}{800 - p} > -1, \tag{8}$$

$$p < 800 - p, \tag{9}$$

$$p < 400. \tag{10}$$

Daná funkce je pro $p \in (400, 800)$ elastická, pro $p = 400$ jednotkově elastická a pro $p \in (0, 400)$ neelastická.

3.4.3 Příklad 3

Americký výrobce mýdlových vloček má stálé týdenní výdaje 10 000 dolarů a nadto 200 dolarů na každou tunu vloček. Určí-li cenu vloček P dolarů, prodá $500 - \frac{P}{2}$ tun týdně. Při jaké ceně bude jeho zisk maximální? (Návod: Považujte cenu za spojitou proměnnou.)
([2], str. 149)

Nejprve musíme sestavit funkci, která bude vyjadřovat zisk. Zisk získáme odečtením výdajů od výnosu. Protože P je cena vloček v dolarech při prodeji 500-1/2P tun vloček týdně, je výnos vyjádřen funkcí

$$f(P) = P \cdot \left(500 - \frac{P}{2}\right),\text{[14]} \tag{1}$$

kde $P \in \langle 0, +\infty)$.
Výdaje vyjadřuje funkce

$$g(P) = 10\,000 + 200 \cdot \left(500 - \frac{P}{2}\right). \tag{2}$$

Funkci pro zisk získáme rozdílem funkcí (1) a (2):

$$h(P) = f(P) - g(P), \tag{3}$$

$$h(P) = P \cdot \left(500 - \frac{P}{2}\right) - \left(10\,000 + 200 \cdot \left(500 - \frac{P}{2}\right)\right), \tag{4}$$

$$h(P) = -\frac{P^2}{2} + 600P - 110000. \tag{5}$$

Ptáme se, při jaké ceně bude zisk maximální, proto funkci zderivujeme:

$$h'(P) = -P + 600. \tag{6}$$

Derivace je nulová, je-li $P = 600$.

[14] Výnos je z pohledu výrobce. Kdyby však vše koupil 1 zákazník, pak z jeho pohledu platí $f(P) = D(p)$.

Zda při ceně 600 dolarů nastává skutečně maximum, ověříme pomocí druhé derivace:

$$h''(P) = -1, \tag{7}$$

$$h''(600) = -1 < 0. \tag{8}$$

Protože $h'(600) = 0$ a zároveň $h''(600) < 0$, má funkce $h(P)$ v hodnotě 600 ostré lokální maximum. Jelikož je to jediný ostrý lokální extrém funkce $h(P)$ v intervalu $\langle 0, +\infty)$ a funkce $h(P)$ je v tomto intervalu spojitá, jde také o globální maximum této funkce.

Americký výrobce mýdlových vloček bude mít maximální zisk v případě, že určí cenu vloček na 600 dolarů.
Výrobce získá 120 000 dolarů.

3.4.4 Příklad 4

Bylo zjištěno, že zisk z prodeje jistého typu výrobků závisí na investicích do reklamy podle vzorce $II(a) = -a^2 + 200a + 80$, $(0 \leq a \leq 150)$, kde a je investice v tisících korun. Určete, jakou částku je třeba do reklamy investovat, aby zisk z prodeje byl maximální.
([6], str. 48)

Investice do reklamy je dána funkcí

$$II(a) = -a^2 + 200a + 80, \tag{1}$$

kde $a \in \langle 0, 150 \rangle$.
Hledáme maximum této funkce – funkci zderivujeme:

$$II'(a) = -2a + 200. \tag{2}$$

Derivace je nulová, je-li $a = 100$.
Zda v tomto bodě opravdu nastává maximum, ověříme pomocí druhé derivace:

$$II''(a) = -2. \tag{3}$$

Protože $\Pi'(100) = 0$ a zároveň $\Pi''(100) < 0$, má funkce $\Pi(a)$ v hodnotě 100 ostré lokální maximum. Jelikož je to jediný ostrý lokální extrém funkce $\Pi(a)$ v intervalu $\langle 0, 150 \rangle$ a funkce $\Pi(a)$ je v tomto intervalu spojitá, jde také o globální maximum této funkce.

Ze zadání víme, že a je investice v tisících korunách, proto musíme investovat

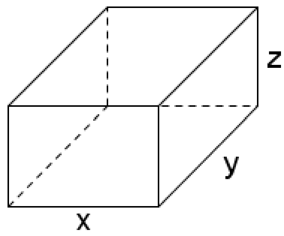
$$100 \cdot 1000 = 100\,000 \text{ Kč.} \tag{4}$$

Aby byl zisk z prodeje maximální, je třeba investovat do reklamy 100 000 Kč.

4 Derivace dvou proměnných v aplikačních úlohách - řešené příklady

4.1 Příklad 1

Při jakých rozměrech bude mít otevřená nádoba tvaru kvádru o objemu 36 litrů minimální povrch?
([31], str. 19)



Označme strany kvádru *x*, *y*, a *z*. Potom povrch

$$S = xy + 2xz + 2yz. \tag{1}$$

Dále známe vzorec pro výpočet objemu:

$$V = x \cdot y \cdot z = 36, \tag{2}$$

odtud

$$z = \frac{36}{xy}. \tag{3}$$

Vztah (3) dosadíme do (1) a tím získáváme:

$$S(x, y) = xy + 2x \cdot \frac{36}{xy} + 2y \cdot \frac{36}{xy}, \tag{4}$$

kde $x, y > 0$.

Rovnici (4) upravíme do tvaru:

$$S(x, y) = xy + \frac{72}{y} + \frac{72}{x}. \tag{5}$$

Hledáme globální minimum funkce (5), proto provedeme první parciální derivace:

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial x} = y - \frac{72}{x^2} \qquad \frac{\partial S(x, y)}{\partial y} = x - \frac{72}{y^2}. \tag{6}$$

Abychom našli stacionární body, položíme první parciální derivace rovny nule:

$$y - \frac{72}{x^2} = 0, \tag{7}$$

$$x - \frac{72}{y^2} = 0. \tag{8}$$

Z rovnice (7) vyjádříme y a dosadíme do (8):

$$x - \frac{72}{\left(\frac{72}{x^2}\right)^2} = 0, \tag{9}$$

neboli

$$x - \frac{x^4}{72} = 0. \tag{10}$$

Řešením rovnice (10) jsou dva kořeny: $x_1 = 0$ a $x_2 = 2\sqrt[3]{9}$. Kořen x_1 nelze brát v úvahu, protože délka nemůže být rovna nule.

Dosazením x_2 do (1) získáme y: $y = 2\sqrt[3]{9}$.

Podezřelý bod z extrému má souřadnice $[2\sqrt[3]{9}, 2\sqrt[3]{9}]$. Nyní musíme ověřit, zda v tomto bodě skutečně nastává lokální minimum. Provedeme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 S(x,y)}{\partial^2 x} = \frac{144}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 S(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} = 1$$
$$\frac{\partial^2 S(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} = 1 \qquad \frac{\partial^2 S(x,y)}{\partial^2 y} = \frac{144}{y^3} \tag{11}$$

Hessova matice:

$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 S(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 \mathrm{S}(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 S(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 S(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{144}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{144}{y^3} \end{vmatrix}$ ⇒ Dosadíme stacionární bod:

Dosazení stacionárního bodu $[2\sqrt[3]{9}, 2\sqrt[3]{9}]$:

$\begin{vmatrix} \frac{144}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{144}{y^3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 > 0.$ Funkce má v bodě lokální extrém.

$\left|\frac{\partial^2 S(x,y)}{\partial^2 x}\right| = 2 > 0$ ⇒ Funkce má v bodě $[2\sqrt[3]{9}, 2\sqrt[3]{9}]$ lokální minimum.

Jelikož je to jediný stacionární bod funkce $S(x,y)$ na celém jejím definičním oboru a funkce $S(x,y)$ je spojitá, jde zároveň také o globální minimum této funkce.

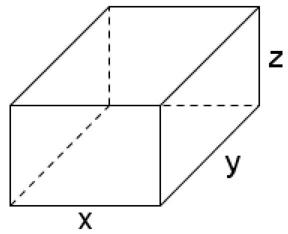
Nyní zbývá dopočítat třetí chybějící rozměr z:

$$z = \frac{36}{xy} = \frac{36}{2\sqrt[3]{9} \cdot 2\sqrt[3]{9}} = \sqrt[3]{9}. \tag{12}$$

Aby měla otevřená nádoba tvaru kvádru o objemu 36 litrů minimální povrch, musela by mít čtvercovou podstavu o straně $2\sqrt[3]{9}$, $2\sqrt[3]{9}$ a výšku $\sqrt[3]{9}$.
Povrch této nádoby bude přibližně 42,93 dm^2.

4.2 Příklad 2

Na výrobu akvária se používá sklo (na stěny) a břidlice (na dno). Břidlice je 5 krát dražší než sklo. Při jakých rozměrech 160 - litrového akvária budou náklady na sklo + břidlici nejmenší?
([16])



Označme strany kvádru *x*, *y*, a *z*. Potom povrch

$$S = 5xy + 2xz + 2yz. \tag{1}$$

Objem akvária

$$V = x \cdot y \cdot z = 160, \tag{2}$$

odtud

$$z = \frac{160}{xy}. \tag{3}$$

Vztah (3) dosadíme do (1) a tím získáváme funkci vyjadřující cenu akvária:

$$S(x,y) = 5xy + 2x \cdot \frac{160}{xy} + 2y \cdot \frac{160}{xy}, \tag{4}$$

kde $x, y > 0$.

Rovnici (4) upravíme do tvaru:

$$S(x,y) = 5xy + \frac{320}{y} + \frac{320}{x}. \tag{5}$$

Cena materiálu pro rozměry $x, y = s \cdot S(x,y)$, kde s je cena za sklo.
Hledáme globální minimum funkce (5), proto provedeme první parciální derivace:

$$\frac{\partial S(x,y)}{\partial x} = 5y - \frac{320}{x^2} \qquad \frac{\partial S(x,y)}{\partial y} = 5x - \frac{320}{y^2}. \tag{6}$$

Abychom našli stacionární body, položíme první parciální derivace rovny nule:

$$5y - \frac{320}{x^2} = 0, \tag{7}$$

$$5x - \frac{320}{y^2} = 0. \tag{8}$$

Z rovnice (7) vyjádříme y a dosadíme do (8):

$$x - \frac{320}{\left(\frac{64}{x^2}\right)^2} = 0, \tag{9}$$

neboli

$$x - \frac{x^4}{64} = 0. \tag{10}$$

Řešením rovnice (10) jsou dva kořeny: $x_1 = 0$ a $x_2 = 4$. Kořen x_1 nelze brát v úvahu, protože délka nemůže být rovna nule.

Dosazením x_2 do (1) získáme y: $y = 4$.

Podezřelý bod z extrému má souřadnice [4, 4]. Nyní musíme ověřit, zda v tomto bodě skutečně nastává lokální minimum. Provedeme druhé parciální derivace:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 S(x,y)}{\partial^2 x} = \frac{640}{x^3} \qquad && \frac{\partial^2 S(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} = 5 \\ &\frac{\partial^2 S(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} = 5 && \frac{\partial^2 S(x,y)}{\partial^2 y} = \frac{640}{y^3} \end{aligned} \tag{11}$$

Hessova matice:

$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 S(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 S(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 S(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 S(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{640}{x^3} & 5 \\ 5 & \frac{640}{y^3} \end{vmatrix}$ $\Rightarrow$ Dosadíme stacionární bod:

Dosazení stacionárního bodu [4, 4].

$\begin{vmatrix} \frac{640}{x^3} & 5 \\ 5 & \frac{640}{y^3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 10 \cdot 10 - 5 \cdot 5 = 75 > 0.$ Funkce má v bodě lokální extrém.

$\left|\frac{\partial^2 S(x,y)}{\partial^2 x}\right| = 10 > 0$ $\Rightarrow$ Funkce má v bodě [4, 4] lokální minimum.

Jelikož je to jediný stacionární bod funkce $S(x,y)$ na celém jejím definičním oboru a funkce $S(x,y)$ je spojitá, jde zároveň také o globální minimum této funkce.

Nyní zbývá dopočítat třetí chybějící rozměr z:

$$z = \frac{160}{xy} = \frac{160}{4 \cdot 4} = 10. \tag{12}$$

Povrch akvária:

$$S(x, y) = 5xy + \frac{320}{y} + \frac{320}{x} = 5 \cdot 4 \cdot 4 + \frac{320}{4} + \frac{320}{4} = 240. \tag{13}$$

Bude-li mít akvárium čtvercové dno o straně 4 dm, budou náklady na výrobu tohoto akvária nejmenší a budou činit $240\ s$.

4.3 Příklad 3

Číslo 30 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl maximální. ([24], str. 18)

Označme tři kladná hledaná čísla jako *x*, *y* a *z*. Součin těchto čísel pak lze napsat jako funkci

$$F(x, y) = x \cdot y \cdot z \tag{1}$$

a součet bude

$$x + y + z = 30, \tag{2}$$

kde $x, y, z > 0$.

Ze vztahu (2) vyjádříme proměnnou *z*:

$$z = 30 - x - y. \tag{3}$$

Vztah (3) dosadíme do (1) a tím získáváme:

$$F(x, y) = xy \cdot (30 - x - y) = 30xy - x^2y - xy^2. \tag{4}$$

Hledáme globální maximum funkce (4), proto vytvoříme první parciální derivace:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 30y - 2xy - y^2 \qquad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 30x - x^2 - 2xy \tag{5}$$

Abychom našli stacionární body, položíme první parciální derivace rovny nule:

$$30y - 2xy - y^2 = 0, \tag{6}$$

$$30x - x^2 - 2xy = 0. \tag{7}$$

Ze vztahu (6) vyjádříme proměnnou x:

$$x = 15 - \frac{1}{2}y, \tag{8}$$

a dosadíme do (7):

$$30 \cdot \left(15 - \frac{1}{2}y\right) - \left(15 - \frac{1}{2}y\right)^2 - 2y \cdot \left(15 - \frac{1}{2}y\right) = 0. \tag{9}$$

Zjednodušením rovnice (9) dostaneme kvadratickou rovnici

$$y^2 - 40y + 300 = 0, \tag{10}$$

jejímž řešením jsou dva kořeny: $y_1 = 10$ a $y_2 = 30$.

Druhý kořen však nelze brát v úvahu; je-li $y = 30$, pak $x = z = 0$, ale proměnné x a z mají být kladné.

Dosazením y_1 do (8) vypočteme x: $x = 10$.

Nyní je třeba ověřit, zda v bodě [10, 10] nastává skutečně lokální maximum.

Provedeme druhé parciální derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} &= -2y & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} &= 30 - 2y - 2x \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} &= 30 - 2x - 2y & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} &= -2x \end{aligned} \tag{11}$$

Hessova matice:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2y & 30 - 2y - 2x \\ 30 - 2x - 2y & -2x \end{vmatrix}$$

Dosadíme stacionární bod: [10, 10]

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -20 & -10 \\ -10 & -20 \end{vmatrix} = (-20) \cdot (-20) - (-10) \cdot (-10) = 300.$$

Funkce má v bodě lokální extrém, protože $300 > 0$.

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = -20 < 0$ ⇒ Funkce má v bodě [10, 10] lokální maximum.

Jelikož je to jediný stacionární bod funkce $F(x, y)$ na celém jejím definičním oboru a funkce $F(x, y)$ je spojitá, jde zároveň také o globální maximum této funkce.

Dopočtení neznámé z:

$$z = 30 - x - y = 30 - 10 - 10 = 10. \tag{12}$$

Tři hledaná kladná čísla jsou: 10, 10, 10.

Součin těchto čísel je 1000.

4.4 Příklad 4

Výrobce sportovních potřeb produkuje dva typy surfovacích prken. Rovnice $P(x, y) = -2x^2 + 2xy - y^2 + 10x - 4y + 107$ vyjadřuje roční zisk v závislosti na počtu prodaných kusů 1. a 2. typu. Jakého maximálního ročního zisku lze dosáhnout a při jaké produkci?

([10], str. 115)

Abychom zjistili, jakého maximálního ročního zisku lze dosáhnout, musíme provést první parciální derivace této funkce:

$$P(x, y) = -2x^2 + 2xy - y^2 + 10x - 4y + 107, \tag{1}$$

kde $x, y > 0$.

První parciální derivace funkce (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x,y)}{\partial x} &= -4x + 2y + 10, \\ \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} &= 2x - 2y - 4\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Abychom našli stacionární body, položíme první parciální derivace rovny nule:

$$\begin{aligned} -4x + 2y + 10 &= 0, \\ 2x - 2y - 4 &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Sčítací metodou dostaneme rovnici:

$$-2x + 6 = 0, \tag{4}$$

odtud

$$x = 3. \tag{5}$$

Dosazením (5) do (3) zjistíme, že

$$y = 1. \tag{6}$$

Podezřelý bod z extrému má souřadnice [3, 1]. Nyní musíme ověřit, zda v tomto bodě skutečně nastává lokální minimum. Provedeme druhé parciální derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial^2 x} &= -4 & \qquad \frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} &= 2 \\ \frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} &= 2 & \qquad \frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial^2 y} &= -2 \end{aligned} \tag{7}$$

Hessova matice:

$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 \mathrm{P}(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow (-4) \cdot (-2) - 2 \cdot 2 = 4 > 0. \Rightarrow$ Funkce má v bodě lokální extrém.

$\left|\frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial^2 x}\right| = -4 < 0 \Rightarrow$ Funkce má v bodě [3,1] lokální maximum.

Jelikož je to jediný stacionární bod funkce $P(x,y)$ na celém jejím definičním oboru a funkce $P(x,y)$ je spojitá, jde zároveň také o globální maximum této funkce.

Maximálního ročního zisku lze dosáhnout:

$$P(x,y) = -2 \cdot (3)^2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 - 1^2 + 10 \cdot 3 - 4 \cdot 1 + 107, \tag{8}$$

$$P(x,y) = 120. \tag{9}$$

Maximum ročního zisku je 120 a to při produkci 1. typu v počtu 3 a 2. typu v počtu 1.

4.5 Příklad 5

Číslo 1000 rozložte na součin tří kladných čísel tak, aby součet jejich převrácených hodnot byl minimální.
([10], str. 116)

Hledaná čísla označme *x*, *y*, a *z*. Součet převrácených hodnot lze napsat jako funkci

$$F(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \tag{1}$$

kde $x, y, z > 0$.
Dále víme, že

$$x \cdot y \cdot z = 1000, \tag{2}$$

odtud

$$z = \frac{1000}{xy}. \tag{3}$$

Vztah (3) dosadíme do (1) a tím získáváme:

$$F(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{\frac{1000}{xy}}, \tag{4}$$

po úpravě

$$F(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{xy}{1000}. \tag{5}$$

Hledáme globální minimum funkce (5), proto provedeme první parciální derivace:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{y}{1000} \qquad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} + \frac{x}{1000}. \tag{6}$$

Abychom našli stacionární body, položíme první parciální derivace rovny nule:

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{y}{1000} = 0, \tag{7}$$

$$-\frac{1}{y^2} + \frac{x}{1000} = 0. \tag{8}$$

Z rovnice (7) vyjádříme y:

$$y = \frac{1000}{x^2}, \tag{9}$$

A dosadíme do rovnice (8):

$$-\frac{1}{\left(\frac{1000}{x^2}\right)^2} + \frac{x}{1000} = 0, \tag{10}$$

$$-\frac{x^4}{1000000} + \frac{x}{1000}, \tag{11}$$

$$-x^4 + 1000x = 0, \tag{12}$$

$$x^3 = 1000, \tag{13}$$

$$x = 10. \tag{14}$$

Dosazením (14) do (9) zjistíme y:

$$y = \frac{1000}{x^2} = \frac{1000}{10^2} = 10. \tag{15}$$

Podezřelý bod z extrému má souřadnice [10,10]. Nyní musíme ověřit, zda v tomto bodě skutečně nastává lokální minimum. Provedeme druhé parciální derivace:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} = \frac{2}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} = \frac{1}{1000}$$
$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} = \frac{1}{1000} \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} = \frac{2}{y^3} \tag{16}$$

Hessova matice:

$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} & \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{x^3} & \frac{1}{1000} \\ \frac{1}{1000} & \frac{2}{y^3} \end{vmatrix}$ ⇒ Dosadíme stacionární bod:

Dosazení stacionárního bodu [10,10].

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{x^3} & \frac{1}{1000} \\ \frac{1}{1000} & \frac{2}{y^3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{1000} & \frac{1}{1000} \\ \frac{1}{1000} & \frac{2}{1000} \end{vmatrix} = \frac{2}{1000} \cdot \frac{2}{1000} - \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{1000} = 3 > 0.$$

⇒ Funkce má v bodě lokální extrém.

$\left|\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial^2 x}\right| = \frac{2}{1000} > 0$ ⇒ Funkce má v bodě [10,10] lokální minimum.

Jelikož je to jediný stacionární bod funkce $F(x, y)$ na celém jejím definičním oboru a funkce $F(x, y)$ je spojitá, jde zároveň také o globální minimum této funkce.

Nyní zbývá dopočítat třetí chybějící rozměr z:

$$z = \frac{1000}{xy} = \frac{1000}{10 \cdot 10} = 10. \tag{17}$$

Hledaná čísla jsou 10, 10 a 10.

Součet převrácených hodnot těchto čísel je $\frac{3}{10}$.

5 Závěr

Cílem této práce bylo vytvořit sbírku řešených příkladů na jedno z nejdůležitějších témat matematické analýzy, totiž derivace v aplikačních úlohách. V průběhu psaní práce jsem si uvědomila, že některé uvedené úlohy lze řešit bez znalostí diferenciálního počtu. Na druhou stranu, pokud člověk poznatky z diferenciálního počtu má, jedná se pak o jednodušší cestu k řešení úlohy.

6 Seznam použité literatury a ostatní zdrojů

6.1 Literatura

[1] Dlouhý, Z., Hruša, K., Kůst, J., a kol: *Úvod do matematické analýzy,* Praha: SPN, 1965.

[2] Gilmann, L., McDowell R. H.: *Matematická analýza*, Praha: SNTL, 1980.

[3] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.:*Fyzika 1*, Brno: Vutium, 2013.

[4] Hrubý, D., Kubát, J.: M*atematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet*, Praha: Prometheus, 1997.

[5] Jirásek, F., Kriegelstein, E., Tichý, Z.: *Sbírka řešených příkladů z matematiky,* Praha: SNTL, 1979.

[6] Kaňka, M., Henzler, J.: *Matematika 2*, Praha: Ekopress, 2003.

[7] Kaňka, M., Henzler, J.: *Matematika pro ekonomy (2)*, Praha: Ekopress, 1997.

[8] Kubát, J., Hrubý, D., Pilgr, J.: *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – maturitní minimum,* Praha: Prometheus, 1996.

[9] Kubát, J: *Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*, Praha: Prometheus, 2004.

[10] Nýdl, V., Klufová, R..: *Matematika část 2 – Matematická analýza*, České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2000.

[11] Petáková, J.: M*atematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*, Praha: Prometheus, 2006.

[12] Petrášková, V.: *Přednášky z analýzy 2*: Akademický rok 2011/2012.

[13] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky,* Praha: Prometheus, 1991.

[14] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky,* Praha: SPN, 1972.

[15] Samková, L.: *Matematické modelování v biologických disciplínách*, České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2011.

[16] Samková, L.: *Přednášky z analýzy 4*: Akademický rok 2012/2013.

[17] Škrášek, J., Tichý, Z.: *Základy aplikované matematiky I*, Praha: SNTL 1983.

[18] Štrba, A., Mesároš, V., Senderáková, D.: *Svetlo,* Nitra: Enigma Publishing s.r.o., 2011.

[19] Tesař, J.: *Sbírka úloh z matematiky pro fyziky*, České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 1995.

[20] Ungermann, Z.: *Matematika a řešení fyzikálních úloh*, Praha: SPN, 1990.

[21] Vejsada, F., Talafous, F.: *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*, Praha: SPN, 1969.

[22] Zacharová, J.: *Extrémy funkcí více proměnných – sbírka řešených příkladů*, bakalářská práce. JČU, Pedagogická fakulta, České Budějovice 2013.

6.2 Internetové zdroje:

[23] Funkce jedné reálné proměnné – kvadratická funkce. [online]. [cit. 2014-02-10]. Dostupné z: http://matgjp.webz.cz/2.rocnik/du/27_11_kvfce_B.pdf.

[24] Řezníčková, E.: Elementární metody řešení extremálních úloh, diplomová práce, JČU, Pedagogická fakulta, České Budějovice 2001. [online]. [cit. 2014-02-13]. Dostupné z: http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/MRG/element.pdf.

[25] Diferenciální počet funkcí jedné reálné proměnné. [online]. [cit. 2014-03-07]. Dostupné z: http://artemis.osu.cz/uvma1/prikl/d04_extrem.pdf.

[26] Diferenciální počet v $\mathbb{R}$. [online]. [cit. 2014-02-10]. Dostupné z: http://homepages.math.slu.cz/MichalMalek/vyuka/04-05/Zaznamy/Derivace.pdf.

[27] Geogebra. [online]. [cit. 2014-02-10]. Dostupné z: http://www.geogebra.org/.

[28] Matematická analýza 5 pro SŠ. [online]. [cit. 2014-02-11]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~lsamkova/mbipate.pdf.

[29] Fyzikální význam derivace. [online]. [cit. 2014-02-11]. Dostupné z: http://www.priklady.eu/cs/Matematika/Derivace/Fyzikalni-vyznam-derivace.alej.

[30] Portál středoškolské matematiky. [online]. [cit. 2014-02-12]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/karel.trnka/derivace/?page=714priklad.

[31] Extrémy funkcí více proměnných. [online]. [cit. 2014-02-12]. Dostupné z: http://math.feld.cvut.cz/tiser/web7.pdf.

[32] Semikubická parabola. [online]. [cit. 2014-03-01]. Dostupné z: http://mathworld.wolfram.com/SemicubicalParabola.html.

[33] Slovní úlohy na hledání extrémů. [online]. [cit. 2014-03-03]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/hodina.php?.id=701.

[34] SOŠ Podyjí. [online]. [cit. 2014-03-07]. Dostupné z: http://www.podyji.cz/pages/matematika/m_temata/derivace30.pdf.

[35] Kruhová výseč. [online]. [cit. 2014-10-09]. Dostupné z: http://mathworld.wolfram.com/CircularSector.html.

[36] Rovnostranný trojúhelník. [online]. [cit. 2014-10-10]. Dostupné z: http://mathworld.wolfram.com/EquilateralTriangle.html.

[37] Trojúhelník. [online]. [cit. 2014-10-10]. Dostupné z: http://mathworld.wolfram.com/Triangle.html.