

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Numerické řešení soustav nelineárních rovnic



Vedoucí bakalářské práce:
RNDr. Jitka Machalová, Ph.D.
Rok odevzdání: 2010

Vypracovala:
Jana Krejčí
MAP, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto bakalářskou práci samostatně za vedení RNDr. Jitky Machalové, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 14. 4. 2010

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucí bakalářské práce RNDr. Jitce Machalové, Ph.D. za obětavou spolupráci i za čas, který mi věnovala při konzultacích. Dále si zaslouží poděkování můj počítač, že vydržel moje pracovní tempo, a typografický systém L^AT_EX, kterým je práce vysázena.

Obsah

Použité značení	4
Úvod	5
1 Přípravná kapitola	6
2 Formulace ulohy	18
3 Iterační metody	23
4 Newtonova metoda	52
4.1 Konvergence Newtonovy metody	55
5 Urychlovací metody	74
Závěr	89
Literatura	90

Použité značení

$ x $	absolutní hodnota z čísla x
\mathbb{R}^+	všechna kladná reálná čísla, tj. $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$
\mathbb{N}	všechna přirozená čísla
\mathbb{N}_0	všechna přirozená čísla včetně nuly, tj. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{R}^n	n -rozměrný reálný prostor
$\mathbb{R}^{n,m}$	prostor všech reálných matic typu $n \times m$
$\ \cdot\ $	libovolná z vektorových norem $\ \cdot\ _1, \ \cdot\ _2, \ \cdot\ _\infty$ nebo libovolná jim přidružená maticová norma
$U(\boldsymbol{\alpha})$	okolí bodu $\boldsymbol{\alpha}$, tj. $U(\boldsymbol{\alpha}) = \{\mathbf{x}; \ \mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}\ \leq r\}, r \in \mathbb{R}^+$
$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$	\mathbf{x} je n -složkový sloupcový vektor, tj. $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, kde $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$
δ_{ij}	Kroneckerovo δ , tj. $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ a $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$
$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$	označení matice, kde a_{ij} je prvek v i -tém řádku a j -tém sloupci
I	jednotková matice, tj. $I = (\delta_{ij})_{i,j=1}^n$
O	nulová matice, tj. všechny prvky matice jsou rovny nule
$B = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$	diagonální matice typu $n \times n$ ve tvaru $B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & b_n \end{pmatrix}$
$ A $	determinant matice A
\mathbf{o}	nulový sloupcový vektor, tj. $\mathbf{o} = [0, 0, \dots, 0]^T$
$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$	parciální derivace funkce f podle proměnné x_i

Úvod

Téma numerické řešení soustavy nelineárních rovnic jsem si pro svou bakalářskou práci vybrala, protože jsem se s tímto tématem při svém studiu setkala jen okrajově a chtěla jsem se o tomto problému dozvědět více.

Na začátek této práce jsem zařadila přípravnou kapitolu s tématy, která sice nejsou obsahem práce, ale v následujícím se jejich znalost předpokládá. V následující kapitole zformulujeme úlohu řešení soustav nelineárních rovnic. V kapitole 3 se zaměříme podrobně na iterační metody, uvedeme si některé věty potřebné k nalezení řešení systému nelineárních rovnic a všechny tyto věty aplikujeme na příkladech doplněných obrázky. V další kapitole zformulujeme Newtonovu iterační metodu a podíváme se na konvergenci této metody. Věty v této kapitole opět aplikujeme na příkladech, které budou doplněny obrázky. V poslední kapitole se podíváme na možnost, jak urychlit konvergenci iterační metody z kapitoly 3 a konvergenci Newtonovy metody. Tato kapitola bude opět doplněna příklady.

Výpočty budou prováděny v matematickém softwaru MATLAB za použití m-filů, které jsem si pro tento účel sama vytvořila.

Konce důkazů, příkladů resp. m-filů budou v této práci značeny po řadě \square , \clubsuit resp. \triangle .

1 Přípravná kapitola

V této kapitole si uvedeme některé věty a definice, které se tématu řešení systémů nelineárních rovnic přímo netýkají, ale jejich znalost je pro nastudování a pochopení tohoto tématu nezbytná. Zaměříme se zde zejména na teorii vektorových a maticových norem.

Definice 1.1. Zobrazení $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h = [h_1, h_2, \dots, h_n]^T$, se nazývá diferencovatelné v bodě $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, jestliže v tomto bodě existují příslušné parciální derivace $\partial h_i(\mathbf{x})/\partial x_j$, kde $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Definice 1.2. Čtvercová matice A se nazývá regulární, jestliže je její determinant různý od nuly, tj. $|A| \neq 0$.

Věta 1.1. Ke čtvercové matici A existuje inverzní matice A^{-1} právě tehdy, když je matice A regulární.

Důkaz: Viz [6], strana 120.

Definice 1.3. Metrickým prostorem nazýváme dvojici (\mathbf{P}, ρ) , kde \mathbf{P} je libovolná neprázdná množina a ρ je tzv. metrika, což je zobrazení $\rho : \mathbf{P} \times \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$, které splňuje následující axiomy

- (i) axiom nezápornosti: $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$,
- (ii) axiom totožnosti: $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$,
- (iii) axiom symetrie: $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x})$,
- (iv) trojúhelníková nerovnost: $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z})$

pro libovolná $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{P}$.

Definice 1.4. Pokud (\mathbf{P}, ρ_1) a (\mathbf{Q}, ρ_2) jsou metrické prostory a pokud pro zobrazení $\mathbf{f} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda < 1$, takové, že

$$\rho_2(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{y})) \leq \lambda \rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{pro všechna } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{P},$$

pak zobrazení \mathbf{f} nazýváme kontrakcí.

Definice 1.5. Necht' $\mathbf{f} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ je zobrazení. Prvek $\mathbf{x} \in \mathbf{P}$ nazveme pevným bodem zobrazení \mathbf{f} , jestliže platí $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Definice 1.6. Libovolná funkce $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ s vlastnostmi

- 1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
- 2) $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{o} = [0, 0, \dots, 0]^T$,
- 3) $\|k\mathbf{x}\| = |k| \cdot \|\mathbf{x}\|$ pro každé $k \in \mathbb{R}$ a každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
- 4) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

se nazývá vektorová norma.

Pro naši potřebu uvedeme tři typy vektorových norem:

maximální norma: $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

oktaedrická norma: $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

euklidovská norma: $\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Věta 1.2. Každá vektorová norma $\|\cdot\|$ je spojitou funkcí vektoru.

Důkaz: Viz [2], strana 6.

Věta 1.3. Každé dvě vektorové normy $\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta$ jsou ekvivalentní v tom smyslu, že existují kladné konstanty m, M takové, že $m\|\mathbf{x}\|_\alpha \leq \|\mathbf{x}\|_\beta \leq M\|\mathbf{x}\|_\alpha$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz: Viz [2], strana 7.

Věta 1.4. Pro vektorové normy $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ a $\|\cdot\|_\infty$ platí

a) $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n\|\mathbf{x}\|_\infty$

b) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1$,

c) $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq n\|\mathbf{x}\|_\infty$,

pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz:

a) Necht' $i \in \{1, \dots, n\}$ je takové, že $|x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$. Pak platí

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = |x_i| \leq |x_i| + \sum_{j=1, j \neq i}^n |x_j| = \sum_{j=1}^n |x_j| = \|\mathbf{x}\|_1$$

a

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| = n \|\mathbf{x}\|_\infty.$$

Z těchto nerovností tedy dostáváme $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n \|\mathbf{x}\|_\infty$.

b) Platí

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n 1^2} = \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2,$$

kde jsme užili Hölderovy nerovnosti. Dále platí

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i| |x_j| \geq \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

a odmocněním dostáváme

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \|\mathbf{x}\|_2.$$

Celkem tedy dostáváme $\frac{1}{\sqrt{n}} \|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1$.

c) Platí

$$\left(\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \Rightarrow \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \|\mathbf{x}\|_2.$$

Druhá nerovnost plyne z již dokázaných předchozích nerovností, protože $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1$ a $\|\mathbf{x}\|_1 \leq n \|\mathbf{x}\|_\infty$. \square

Věta 1.5. Pro $n \in \mathbb{N}$ je n -rozměrný reálný prostor \mathbb{R}^n metrický prostor s metrikou definovanou vztahem $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz: Musíme ukázat, že (\mathbb{R}^n, ρ) splňuje axiomy metrického prostoru uvedené v definici 1.3. Tedy

- (i) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq 0$ pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, kde jsme užili vlastnosti 1) vektorové normy.
- (ii) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{o} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$, kde jsme užili vlastnosti 2) vektorové normy.
- (iii) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|(-1)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\| = 1\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, kde jsme užili vlastnosti 3) vektorové normy.
- (iv) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{z}\| = \|(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{z})\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, kde jsme užili vlastnosti 4) vektorové normy. □

Definice 1.7. Libovolná funkce $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}$ s vlastnostmi

- 1) $\|A\| \geq 0$ pro každé $A \in \mathbb{R}^{n,n}$,
- 2) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A$ je nulová matice, tj. $a_{ij} = 0$, pro $i, j = 1, 2, \dots, n$,
- 3) $\|kA\| = |k|\|A\|$ pro každé $k \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n,n}$,
- 4) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ pro každé $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$,
- 5) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ pro každé $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$

se nazývá maticová norma na $\mathbb{R}^{n,n}$.

Definice 1.8. Řekneme, že maticová norma $\|\cdot\|$ je souhlasná s danou vektorovou normou $\|\cdot\|_\alpha$, jestliže platí $\|A\mathbf{x}\|_\alpha \leq \|A\|\|\mathbf{x}\|_\alpha$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Věta 1.6. *Nechť $\|\cdot\|_\alpha$ je daná vektorová norma. Pak číslo $\|A\|_\alpha$ definované předpisem $\|A\|_\alpha = \max_{\|\mathbf{x}\|_\alpha=1} \|\mathbf{Ax}\|_\alpha$ je maticová norma souhlasná s danou vektorovou normou. Tato maticová norma se nazývá maticová norma přidružená k dané vektorové normě.*

Důkaz: Nejprve dokážeme existenci čísla $\|\cdot\|_\alpha$. Vzhledem k tomu, že vektorová norma $\|\cdot\|_\alpha$ je spojitou funkcí vektoru, bude na uzavřené množině $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{x}\|_\alpha = 1\}$ nabývat svého maxima, tj. existuje $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}_0\|_\alpha = 1$ a $\|\mathbf{Ax}_0\|_\alpha = \max_{\|\mathbf{x}\|_\alpha=1} \|\mathbf{Ax}\|_\alpha$.

Dále musíme ukázat, že jsou splněny všechny vlastnosti z definice 1.7.

1) Nechť $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ je nenulová matice. Pak $\|\mathbf{Ax}\|_\alpha > 0$ pro každé $\|\mathbf{x}\|_\alpha = 1$ a tedy $\|A\|_\alpha = \max_{\|\mathbf{x}\|_\alpha=1} \|\mathbf{Ax}\|_\alpha > 0$.

2) Nechť $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ je nulová matice. Pak $\|\mathbf{Ax}\|_\alpha = 0$, neboť $\mathbf{Ax} = \mathbf{o}$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\|_\alpha = 1$. A tedy $\|A\|_\alpha = \max_{\|\mathbf{x}\|_\alpha=1} \|\mathbf{Ax}\|_\alpha = 0$.

Naopak nechť $\|A\|_\alpha = 0$. Pak $\max_{\|\mathbf{x}\|_\alpha=1} \|\mathbf{Ax}\|_\alpha = 0$ a tedy $\|\mathbf{Ax}\|_\alpha = 0$ pro $\|\mathbf{x}\|_\alpha = 1$. Nyní zvolme $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ libovolné, $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$, a položme $\mathbf{z} = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_\alpha}$. Pak $\|\mathbf{z}\|_\alpha = \left\| \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_\alpha} \right\|_\alpha = \frac{1}{\|\mathbf{y}\|_\alpha} \|\mathbf{y}\|_\alpha = 1$ a tedy $\|\mathbf{Az}\|_\alpha = 0$. Navíc pro $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ je $\|\mathbf{Ax}\|_\alpha = 0$ a tedy $\|\mathbf{Ax}\|_\alpha = 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Z toho plyne, že $A = \mathbf{O}$.

3) $\|kA\|_\alpha = \max_{\|\mathbf{x}\|_\alpha=1} \|(kA)\mathbf{x}\|_\alpha = \max_{\|\mathbf{x}\|_\alpha=1} \|k(\mathbf{Ax})\|_\alpha = \max_{\|\mathbf{x}\|_\alpha=1} |k| \|\mathbf{Ax}\|_\alpha =$
 $= |k| \max_{\|\mathbf{x}\|_\alpha=1} \|\mathbf{Ax}\|_\alpha = |k| \|A\|_\alpha$ pro každé $k \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n,n}$.

4) Nechť existuje $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}_0\|_\alpha = 1$, takové, že platí $\|(A+B)\mathbf{x}_0\|_\alpha =$
 $= \max_{\|\mathbf{x}\|_\alpha=1} \|(A+B)\mathbf{x}\|_\alpha$. Pak $\|(A+B)\|_\alpha = \max_{\|\mathbf{x}\|_\alpha=1} \|(A+B)\mathbf{x}\|_\alpha =$
 $= \|(A+B)\mathbf{x}_0\|_\alpha = \|\mathbf{Ax}_0 + \mathbf{Bx}_0\|_\alpha \leq \|\mathbf{Ax}_0\|_\alpha + \|\mathbf{Bx}_0\|_\alpha \leq \max_{\|\mathbf{x}\|_\alpha=1} \|\mathbf{Ax}\|_\alpha +$
 $+ \max_{\|\mathbf{x}\|_\alpha=1} \|\mathbf{Bx}\|_\alpha = \|A\|_\alpha + \|B\|_\alpha$ pro každé $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Než dokážeme vlastnost 5) z definice 1.7, dokážeme souhlasnost, protože tu pak využijeme v důkazu vlastnosti 5). Nechť $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \neq \mathbf{o}$, a položme $\mathbf{z} = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_\alpha}$. Pak $\|\mathbf{z}\|_\alpha = 1$ a platí $\|\mathbf{A}\mathbf{y}\|_\alpha = \|\mathbf{A}(\mathbf{z}\|\mathbf{y}\|_\alpha)\|_\alpha = \|\mathbf{y}\|_\alpha \|\mathbf{A}\mathbf{z}\|_\alpha \leq \|\mathbf{y}\|_\alpha \max_{\|\mathbf{x}\|_\alpha=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_\alpha = \|\mathbf{A}\|_\alpha \|\mathbf{y}\|_\alpha$. Pro $\mathbf{y} = \mathbf{o}$ je $\|\mathbf{A}\mathbf{y}\|_\alpha = 0$ a zároveň $\|\mathbf{A}\|_\alpha \|\mathbf{y}\|_\alpha = \|\mathbf{A}\|_\alpha 0 = 0$, tedy $\|\mathbf{A}\mathbf{y}\|_\alpha \leq \|\mathbf{A}\|_\alpha \|\mathbf{y}\|_\alpha$ pro každé $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$.

$$\begin{aligned} 5) \|\mathbf{A}\mathbf{B}\|_\alpha &= \max_{\|\mathbf{x}\|_\alpha=1} \|(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{x}\|_\alpha = \max_{\|\mathbf{x}\|_\alpha=1} \|\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x})\|_\alpha \leq \max_{\|\mathbf{x}\|_\alpha=1} \|\mathbf{A}\|_\alpha \|\mathbf{B}\mathbf{x}\|_\alpha = \\ &= \|\mathbf{A}\|_\alpha \max_{\|\mathbf{x}\|_\alpha=1} \|\mathbf{B}\mathbf{x}\|_\alpha = \|\mathbf{A}\|_\alpha \|\mathbf{B}\|_\alpha, \text{ čímž je důkaz hotov.} \quad \square \end{aligned}$$

Věta 1.7. *Uvažujme vektorové normy $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ definované výše. Pak*

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad \text{tzv. sloupcová norma}$$

je přidružená maticová norma k vektorové normě $\|\cdot\|_1$,

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^* \mathbf{A})} \quad \text{tzv. spektrální norma}$$

je přidružená maticová norma k vektorové normě $\|\cdot\|_2$ a

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \text{tzv. řádková norma}$$

je přidružená maticová norma k vektorové normě $\|\cdot\|_\infty$.

\mathbf{A}^ je komplexně sdružená a pak transponovaná matice \mathbf{A} a $\rho(\mathbf{A})$ je spektrální poloměr matice \mathbf{A} .*

Důkaz: Viz. [2], strana 9.

Věta 1.8. *Každá maticová norma $\|\cdot\|$ je spojitou funkcí matice.*

Důkaz: Pro každé dvě matice \mathbf{A}, \mathbf{B} platí

$$\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|,$$

tedy

$$\|A + B\| - \|A\| \leq \|B\|.$$

Zároveň platí

$$\|A\| = \|A + B - B\| \leq \|A + B\| + \|B\|,$$

a tedy

$$-\|B\| \leq \|A + B\| - \|A\|.$$

Celkem tedy dostáváme

$$\| \|A + B\| - \|A\| \| \leq \|B\|. \quad (1.1)$$

Pokud označíme E_{ij} matici, která má na pozici ij jedničku a jinak samé nuly, pak můžeme matici B psát ve tvaru

$$B = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} E_{ij},$$

kde b_{ij} jsou prvky matice B . Nyní můžeme psát

$$\begin{aligned} \|B\| &= \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} E_{ij} \right\| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|b_{ij} E_{ij}\| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \|E_{ij}\| \leq \max_{1 \leq k, l \leq n} |b_{kl}| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|E_{ij}\| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{l=1}^n |b_{kl}| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|E_{ij}\| = M \|B\|_{\infty}, \end{aligned}$$

kde $M := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|E_{ij}\|$. Použitím tohoto výsledku v nerovnosti (1.1) dostáváme

pro libovolné $\epsilon > 0$ a B takové, že $\|B\|_{\infty} \leq \frac{\epsilon}{M}$,

$$\| \|A + B\| - \|A\| \| \leq \|B\| \leq M \|B\|_{\infty} \leq M \frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

Z tohoto dostáváme, že $\|\cdot\|$ je spojitá funkce v bodě A . Jelikož A bylo libovolné, plyne z toho, že $\|\cdot\|$ je spojitá v každém bodě, $\|\cdot\|$ je tedy spojitá. \square

Věta 1.9. Každé dvě maticové normy $\|\cdot\|_{\alpha}, \|\cdot\|_{\beta}$ jsou ekvivalentní v tom smyslu, že existují konstanty m, M takové, že $m\|A\|_{\alpha} \leq \|A\|_{\beta} \leq M\|A\|_{\alpha}$.

Důkaz: Nejprve ukážeme, že libovolná norma $\|\cdot\|$ je ekvivalentní s normou $\|\cdot\|_\infty$. Označme $S := \{A; \|A\|_\infty = 1, A \in \mathbb{R}^{n,n}\}$. S je uzavřená a ohraničená množina. Protože $\|\cdot\|$ je spojitá funkce, pak z Weierstrassovy věty plyne, že $\|\cdot\|$ nabývá na S svého minima a maxima. Tedy existují matice $A^0, A^1 \in S$ takové, že

$$\|A^0\| = \min_{A \in S} \|A\|, \quad \|A^1\| = \max_{A \in S} \|A\|,$$

tj.

$$0 < \|A^0\| \leq \|A\| \leq \|A^1\| \leq \infty, \quad \text{pro každé } A \in S.$$

Nechť nyní $B \neq O$. Pak $\frac{B}{\|B\|_\infty} \in S$, protože $\|\frac{B}{\|B\|_\infty}\|_\infty = \frac{\|B\|_\infty}{\|B\|_\infty} = 1$. Tedy

$$\|A^0\| \leq \left\| \frac{B}{\|B\|_\infty} \right\| \leq \|A^1\|$$

a z toho dostáváme

$$\|B\|_\infty \|A^0\| \leq \|B\| \leq \|B\|_\infty \|A^1\|.$$

Ukázali jsme tedy, že existují konstanty $m = \|A^0\|$ a $M = \|A^1\|$ takové, že $m\|B\|_\infty \leq \|B\| \leq M\|B\|_\infty$.

Nyní ukážeme, že libovolné dvě normy $\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta$ jsou ekvivalentní. Jelikož jsou tyto normy ekvivalentní s normou $\|\cdot\|_\infty$, existují konstanty $m, M, n, N \in \mathbb{R}^+$ takové, že

$$m\|A\|_\infty \leq \|A\|_\alpha \leq M\|A\|_\infty, \tag{1.2}$$

$$n\|A\|_\infty \leq \|A\|_\beta \leq N\|A\|_\infty. \tag{1.3}$$

Vydělením nerovnosti (1.2) konstantou m dostáváme nerovnost

$$\|A\|_\infty \leq \frac{1}{m}\|A\|_\alpha \leq \frac{M}{m}\|A\|_\infty,$$

vydělením nerovnosti (1.3) konstantou N dostáváme nerovnost

$$\frac{n}{N}\|A\|_\infty \leq \frac{1}{N}\|A\|_\beta \leq \|A\|_\infty.$$

Z posledních dvou nerovností pak dostáváme

$$\frac{1}{N}\|A\|_\beta \leq \frac{1}{m}\|A\|_\alpha$$

a vynásobením této nerovnosti konstantou m pak dostáváme

$$\frac{m}{N}\|A\|_{\beta} \leq \|A\|_{\alpha}. \quad (1.4)$$

Podobně z nerovností (1.2) a (1.3) postupně dostáváme

$$\frac{m}{M}\|A\|_{\infty} \leq \frac{1}{M}\|A\|_{\alpha} \leq \|A\|_{\infty},$$

$$\|A\|_{\infty} \leq \frac{1}{n}\|A\|_{\beta} \leq \frac{N}{n}\|A\|_{\infty},$$

z nich dostáváme

$$\frac{1}{M}\|A\|_{\alpha} \leq \frac{1}{n}\|A\|_{\beta}$$

a vynásobením této nerovnosti konstantou M dostáváme

$$\|A\|_{\alpha} \leq \frac{M}{n}\|A\|_{\beta}. \quad (1.5)$$

Celkem pak z nerovností (1.5) a (1.4) dostáváme

$$\frac{m}{N}\|A\|_{\beta} \leq \|A\|_{\alpha} \frac{M}{n}\|A\|_{\beta},$$

čímž je důkaz hotov. □

Věta 1.10. *Pro maticové normy $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ a $\|\cdot\|_{\infty}$ na $\mathbb{R}^{n,n}$ platí:*

$$a) \frac{1}{n}\|A\|_{\infty} \leq \|A\|_1 \leq n\|A\|_{\infty},$$

$$b) \frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_1,$$

$$c) \frac{1}{n}\|A\|_2 \leq \|A\|_{\infty} \leq n\|A\|_2,$$

pro každé $A \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Důkaz: V důkazu využijeme toho, že maticové normy $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_{\infty}$ jsou přidružené k příslušným vektorovým normám $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_{\infty}$ a dále nerovnosti ve větě 1.4. Protože přidružená maticová norma $\|\cdot\|_1$ k vektorové normě $\|\cdot\|_1$ je souhlasná s danou vektorovou normou, platí $\|A\mathbf{x}\|_1 \leq \|A\|_1\|\mathbf{x}\|_1$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n,n}$, tedy $\|A\|_1 = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1}$. Podobně to platí i pro normy $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_{\infty}$.

a) Můžeme tedy psát

$$\|A\|_1 = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1} \geq \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_1} \geq \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_\infty}{n\|\mathbf{x}\|_\infty} = \frac{1}{n}\|A\|_\infty,$$

kde jsme využili nerovnosti $\|A\mathbf{x}\|_1 \geq \|A\mathbf{x}\|_\infty$, $\|\mathbf{x}\|_1 \leq n\|\mathbf{x}\|_\infty$ pro vektorové normy dokázané ve větě 1.4. Tím jsme tedy dokázali první nerovnost vztahu a). Nyní se podívejme na druhou nerovnost.

$$\|A\|_1 = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1} \leq \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{n\|A\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_1} \leq \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{n\|A\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} = n\|A\|_\infty,$$

Celkem tedy dostáváme $\frac{1}{n}\|A\|_\infty \leq \|A\|_1 \leq n\|A\|_\infty$, čímž je důkaz hotov.

b) Pro $\|A\|_2$ můžeme psát

$$\|A\|_2 = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \leq \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_2} \leq \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_1}{\frac{1}{\sqrt{n}}\|\mathbf{x}\|_1} = \sqrt{n}\|A\|_1,$$

kde jsme užili nerovnosti $\|A\mathbf{x}\|_2 \leq \|A\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\|\mathbf{x}\|_1$ pro vektorové normy dokázané ve větě 1.4. Tím jsme tedy dokázali první nerovnost vztahu b). Nyní se podívejme na druhou nerovnost.

$$\|A\|_2 = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \geq \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_2} \geq \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\mathbf{x}\|_1}{\|\mathbf{x}\|_1} = \frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1,$$

kde jsme užili nerovnosti $\|A\mathbf{x}\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\|A\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1$ pro vektorové normy dokázané ve větě 1.4. Celkem tedy dostáváme $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_1$, čímž je důkaz hotov.

c) Pro $\|A\|_\infty$ můžeme psát

$$\|A\|_\infty = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_2}{\frac{1}{n}\|\mathbf{x}\|_2} = n\|A\|_2,$$

kde jsme užili nerovnosti $\|A\mathbf{x}\|_\infty \leq \|A\mathbf{x}\|_2$, $\|\mathbf{x}\|_\infty \geq \frac{1}{n}\|\mathbf{x}\|_2$ pro vektorové normy dokázané ve větě 1.4. Tím jsme tedy dokázali první nerovnost

vztahu c). Nyní se podívejme na druhou nerovnost.

$$\|A\|_\infty = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \geq \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{\frac{1}{n}\|A\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \geq \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{\frac{1}{n}\|A\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \frac{1}{n}\|A\|_2,$$

kde jsme užili nerovnosti $\|A\mathbf{x}\|_\infty \geq \frac{1}{n}\|A\mathbf{x}\|_2$, $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2$ pro vektorové normy dokázané ve větě 1.4. Celkem tedy dostáváme $\frac{1}{n}\|A\|_2 \leq \|A\|_\infty \leq n\|A\|_2$, čímž je důkaz hotov. \square

Definice 1.9. Posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}_{k=0}^\infty$ bodů z \mathbb{R}^n se nazývá konvergentní v \mathbb{R}^n , jestliže existuje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}\| = 0.$$

Číslo \mathbf{x} se nazývá limita posloupnosti $\{\mathbf{x}^k\}_{k=0}^\infty$.

Definice 1.10. Posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}_{k=0}^\infty$ bodů z \mathbb{R}^n se nazývá cauchyovská v \mathbb{R}^n , jestliže pro každé $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$ platí

$$\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^n\| < \epsilon.$$

Věta 1.11. (Bolzano-Weierstrassova) Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní posloupnost.

Důkaz: Viz. [7], strana 10.

Věta 1.12. Posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}_{k=0}^\infty$ je cauchyovská v \mathbb{R}^n právě tehdy, když je konvergentní v \mathbb{R}^n .

Důkaz:

- (i) Nejprve dokážeme implikaci " \Leftarrow ". Protože posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}$ je konvergentní, platí, že pro každé $\epsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ je $\|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}\| < \epsilon$. Tedy pro každé $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$ platí $\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^n\| = \|\mathbf{x}^m - \mathbf{x} + \mathbf{x} - \mathbf{x}^n\| \leq \|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}\| < 2\epsilon = \epsilon_1$. Tedy posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}$ je cauchyovská.

(ii) Nyní dokážeme implikaci " \Rightarrow ". Protože posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}$ je cauchyovská, platí, že pro každé $\epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{R}$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0$ je $\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^n\| < \epsilon$. Položme $K = \max\{\|\mathbf{x}^0\|, \|\mathbf{x}^1\|, \dots, \|\mathbf{x}^{n_0}\|, \|\mathbf{x}^{n_0}\| + \epsilon\}$ a tedy $\|\mathbf{x}^n\| \leq K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. To znamená, že posloupnost $\{\mathbf{x}^n\}$ je omezená, a podle věty 1.11 z ní lze vybrat konvergentní posloupnost $\{\mathbf{x}^{n_k}\}$. Necht' $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{n_k} = \mathbf{x}$. Pak pro každé $\epsilon_1 > 0$ existuje n_1 takové, že pro každé $n_k > n_1$ je $\|\mathbf{x}^{n_k} - \mathbf{x}\| < \epsilon_1$. Pro $n, n_k > n_0$ navíc platí $\|\mathbf{x}^{n_k} - \mathbf{x}^n\| < \epsilon$. Odtud pak pro $n, n_k > \max\{n_0, n_1\}$ dostáváme $\|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^{n_k}\| + \|\mathbf{x}^{n_k} - \mathbf{x}\| < \epsilon + \epsilon_1 = \epsilon_2$ a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}^n = \mathbf{x}$, čímž je důkaz hotov. \square

Věta 1.13. (Weierstrassova) Necht' funkce f je spojitá na omezené a uzavřené množině M . Pak f nabývá na M svého minima a maxima, tj. existují prvky $\mathbf{x}_*, \mathbf{x}^* \in M$ takové, že $f(\mathbf{x}_*) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^*)$ pro každé $\mathbf{x} \in M$.

Důkaz: Viz [7], strana 26.

Definice 1.11. Necht' funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ parciální derivace až do řádu p . Pak Taylorův rozvoj funkce f v bodě $\boldsymbol{\alpha}$ má tvar

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = & f(\boldsymbol{\alpha}) + \frac{1}{1!} \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(\boldsymbol{\alpha})}{\partial x_k} (x_k - \alpha_k) + \\ & + \frac{1}{2!} \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{\alpha})}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2}} (x_{k_1} - \alpha_{k_1})(x_{k_2} - \alpha_{k_2}) + \dots + \\ & + \frac{1}{p!} \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_p=1}^n \frac{\partial^p f(\boldsymbol{\alpha})}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_p}} (x_{k_1} - \alpha_{k_1}) \dots (x_{k_p} - \alpha_{k_p}) + \\ & + \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_{p+1}=1}^n \frac{\partial^{p+1} f(\boldsymbol{\xi})}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_{p+1}}} (x_{k_1} - \alpha_{k_1}) \dots (x_{k_{p+1}} - \alpha_{k_{p+1}}), \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \phi(\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha})$ a $0 < \phi < 1$.

2 Formulace ulohy

Uvažujme funkce $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$. Řešení soustavy nelineárních rovnic znamená hledat řešení systému n rovnic o n neznámých ve tvaru

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Pokud označíme

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

kde $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, můžeme soustavu (2.1) psát ve tvaru

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}. \tag{2.2}$$

Řešením této soustavy je každý vektor $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$, pro který platí $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{o}$.

Řešení soustav nelineárních rovnic tvaru (2.2) je složitým problémem. Při jejich řešení mohou nastat následující situace.

1. Soustava má konečný počet řešení.

Příkladem je soustava dvou rovnic ve tvaru

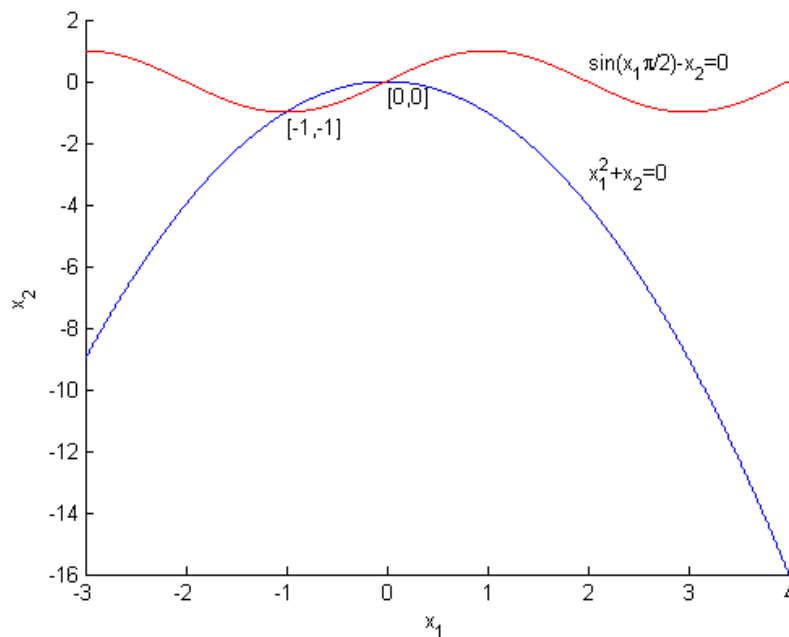
$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2 &= 0 \\ \sin(x_1 \frac{\pi}{2}) - x_2 &= 0, \end{aligned}$$

která má dvě řešení $[0, 0]^T, [-1, -1]^T$, viz. obrázek 1.

2. Soustava má spočetný systém řešení.

Příkladem je soustava dvou rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x_1 - x_2 &= 0 \\ \sin x_1 - x_2 + 2 &= 0, \end{aligned}$$



Obr. 1

která má spočetný systém řešení, viz. obrázek 2.

3. Soustava má množinu řešení mohutnosti kontinua.

Příkladem je soustava dvou rovnic ve tvaru

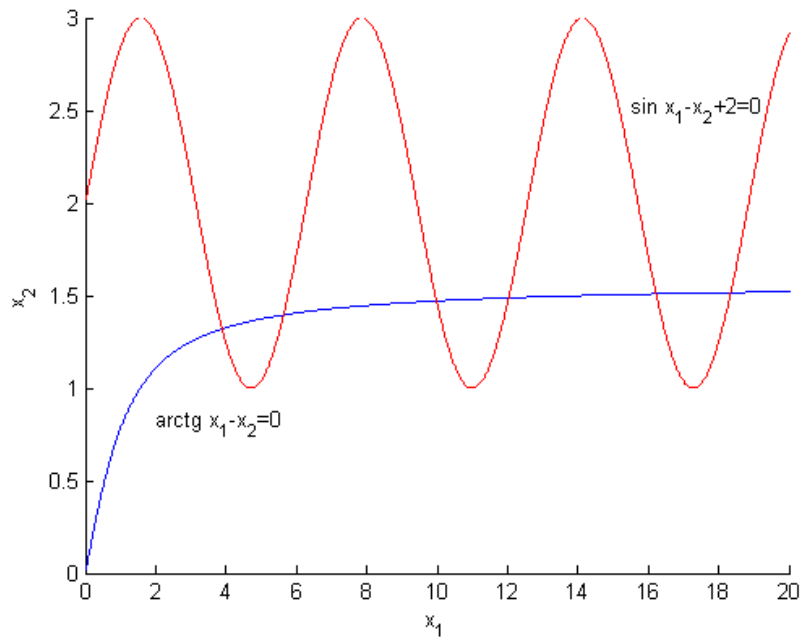
$$\begin{aligned} x_1^3 - x_2 + 1 &= 0 \\ |x_1|^3 - x_2 + 1 &= 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením je část hyperboly $x_2 = x_1^3 + 1$ ležící v prvním kvadrantu, viz. obrázek 3.

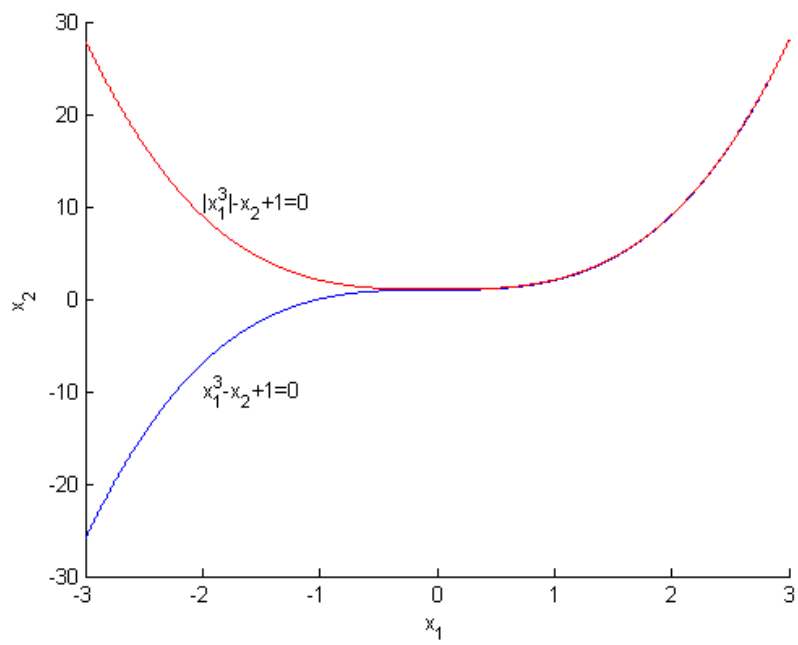
Pro řešení soustav nelineárních rovnic tvaru (2.2) se používá celá řada metod, které se dělí do dvou skupin: přímé metody a iterační metody.

Přímé metody jsou obvykle vhodné pouze pro malé systémy nelineárních rovnic speciálního tvaru, kdy lze postupnou eliminací jednotlivých proměnných či vhodnou kombinací jednotlivých rovnic získat analytický tvar řešení nebo aspoň převést původní soustavu na řešení soustavy o menším počtu neznámých.

Protože obvykle není možné určit nulový bod ξ funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ explicitně během konečného počtu kroků, používají se při řešení soustav nelineárních rovnic



Obr. 2



Obr. 3

iterační metody. Ty spočívají v tom, že systém (2.2) převedeme ekvivalentními úpravami na systém ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (2.3)$$

kde $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, a hledáme pevný bod $\boldsymbol{\xi}$ zobrazení \mathbf{g} . Tedy úlohu nalezení nulového bodu zobrazení \mathbf{f} převádíme na úlohu nalezení pevného bodu zobrazení \mathbf{g} a platí, že pevný bod zobrazení \mathbf{g} je zároveň hledaným řešením soustavy (2.2) a naopak. Řešení systému (2.3) najdeme pomocí iteračních metod tak, že zvolíme libovolnou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ a generujeme posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}$ danou předpisem

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Potřebovali bychom, aby tato posloupnost konvergovala k hledanému pevnému bodu $\boldsymbol{\xi}$ zobrazení \mathbf{g} , což ale nemusí být vždy zaručeno. Otázkou tedy je, za jakých předpokladů konverguje tato posloupnost k bodu $\boldsymbol{\xi}$. V případě konvergence nás bude zajímat také rychlost. S analýzou iteračního procesu jsou spojeny 3 základní problémy.

1. Prvním problémem je ověření, zda jsou iterace \mathbf{x}^{k+1} správně definovány, tj. zda zobrazení \mathbf{g} je definované v bodech \mathbf{x}^k , $k \in \mathbb{N}_0$. Obecně je nemožné najít množinu všech počátečních iterací, pro které by byl daný proces dobře definovaný. Omezíme se tedy pouze na určení podmínek, které zaručí, že iterační posloupnost je dobře definovaná pro určitý počáteční bod.
2. Druhý problém se týká konvergence posloupnosti generované iteračním procesem a otázky, zda limita této posloupnosti je řešením soustavy.

Podle toho, zda předpokládáme existenci nějakého řešení $\boldsymbol{\xi}$ nebo existence řešení vyplýne až ze splnění nějakých předpokladů, a podle velikosti množiny počátečních aproximací, pro které je zaručena konvergence, rozlišujeme 3 typy konvergenčí.

- (a) První typ nazývaný **lokální konvergence** začíná předpokladem, že existuje nějaké řešení $\boldsymbol{\xi}$, a za splnění určitých podmínek pak existuje

okolí $U(\xi)$ bodu ξ takové, že pro všechny počáteční iterace ležící v okolí $U(\xi)$ jsou iterace generované iteračním procesem dobře definované a konvergují k ξ .

- (b) Druhý typ konvergence se nazývá **semilokální**. Tento typ konvergence nevyžaduje znalost existence řešení, ale vezmeme-li za počáteční iteraci bod, pro který jsou splněny určité podmínky, je konvergence k nějakému řešení ξ zaručena.
- (c) Pokud je konvergence k řešení zaručena pro počáteční vektor ležící kdekoliv v \mathbb{R}^n nebo aspoň ve velké části \mathbb{R}^n , pak se tento typ konvergence nazývá **globální**.

3. Třetí problém se týká celkové úspornosti všech operací a otázky, jak rychle daná posloupnost bude konvergovat.

3 Iterační metody

Nyní se budeme podrobněji zabývat iteračními metodami pro řešení soustav nelineárních rovnic.

System $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$ tedy převedeme ekvivalentními úpravami na systém

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

kde $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ je n -rozměrný vektor funkčních hodnot, tedy je to sloupcový vektor se složkami $g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_n(\mathbf{x})$. Hledáme řešení systému (3.1), kterým je nějaký vektor $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ se složkami $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Zvolíme počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]^T$ a generujeme iterační posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}$ danou vztahem

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Bude nás zajímat, za jakých podmínek daná posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}$ konverguje k řešení $\boldsymbol{\xi}$ systému (3.1) a jak rychlá je tato konvergence. K určování rychlosti konvergence posloupnosti nám poslouží pojem řád metody, který je uveden v následující definici.

Definice 3.1. Nechť $\boldsymbol{\xi}$ je řešením systému (3.1) a nechť pro libovolný počáteční vektor $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ ležící v okolí bodu $\boldsymbol{\xi}$ a pro posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}$ generovanou vztahem (3.2) platí nerovnost

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \boldsymbol{\xi}\| \leq C \|\mathbf{x}^k - \boldsymbol{\xi}\|^p, \quad p \in \mathbb{N}$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$, kde pro $p = 1$ je $C < 1$. Pak se iterační metoda (3.2) nazývá **metoda minimálně p -tého řádu pro určení bodu $\boldsymbol{\xi}$** .

Věta 3.1. Každá metoda tvaru (3.2) minimálně p -tého řádu pro určení bodu $\boldsymbol{\xi}$ je lokálně konvergentní, tj. existuje okolí $U(\boldsymbol{\xi})$ bodu $\boldsymbol{\xi}$ takové, že pro každou počáteční iteraci $\mathbf{x}^0 \in U(\boldsymbol{\xi})$ posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}$ konverguje k bodu $\boldsymbol{\xi}$.

Důkaz: Nejprve dokážeme platnost tvrzení pro $p = 1, C < 1$. Platí nerovnost

$$0 \leq \|\mathbf{x}^{k+1} - \boldsymbol{\xi}\| \leq C \|\mathbf{x}^k - \boldsymbol{\xi}\| \leq C^2 \|\mathbf{x}^{k-1} - \boldsymbol{\xi}\| \leq \dots \leq C^{k+1} \|\mathbf{x}^0 - \boldsymbol{\xi}\|$$

a protože $\lim_{k \rightarrow \infty} C^{k+1} \|\mathbf{x}^0 - \boldsymbol{\xi}\| = 0$ a $\lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0$, dostáváme z věty o limitě tří posloupností, že $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^{k+1} - \boldsymbol{\xi}\| = 0$. Tedy posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $\boldsymbol{\xi}$.

Nyní se podívejme na případ, kdy $p > 1$. Platí

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\mathbf{x}^{k+1} - \boldsymbol{\xi}\| &\leq C \|\mathbf{x}^k - \boldsymbol{\xi}\|^p \leq CC^p \|\mathbf{x}^{k-1} - \boldsymbol{\xi}\|^{p^2} \leq CC^p C^{p^2} \|\mathbf{x}^{k-2} - \boldsymbol{\xi}\|^{p^3} \leq \\ &\leq \dots \leq CC^p C^{p^2} \dots C^{p^k} \|\mathbf{x}^0 - \boldsymbol{\xi}\|^{p^{k+1}} = \prod_{i=0}^k C^{p^i} \|\mathbf{x}^0 - \boldsymbol{\xi}\|^{p^{k+1}}. \end{aligned}$$

Nyní, pokud okolí $U(\boldsymbol{\xi})$ zvolíme ve tvaru $U(\boldsymbol{\xi}) = \{\mathbf{x}; \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\| < 1\}$, tak pro $\mathbf{x}^0 \in U(\boldsymbol{\xi})$ dostáváme $\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^k C^{p^i} \|\mathbf{x}^0 - \boldsymbol{\xi}\|^{p^{k+1}} = 0$. Potom, protože $\lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0$, dostáváme opět z věty o limitě tří posloupností, že $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^{k+1} - \boldsymbol{\xi}\| = 0$ a tedy posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ konverguje k bodu $\boldsymbol{\xi}$. \square

Nyní se podívejme na podmínky, které nám zaručí konvergenci posloupnosti $\{\mathbf{x}^k\}$ k hledanému řešení $\boldsymbol{\xi}$ systému (3.1).

Věta 3.2. *Nechť zobrazení \mathbf{g} je kontrakce na \mathbb{R}^n , tj. pro $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ platí*

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq \lambda \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad 0 \leq \lambda < 1, \quad (3.3)$$

pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Pak pro každou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}$ generovaná vztahem (3.2) konverguje k bodu $\boldsymbol{\xi}$, tj. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k = \boldsymbol{\xi}$, a $\boldsymbol{\xi}$ je jediné řešení systému (3.1).

Důkaz:

(i) Nejprve ukážeme, že posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}$ konverguje. K tomu nám stačí ukázat, že posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}$ je cauchyovská, protože pak podle věty 1.12 je také konvergentní. Pro $n \in \mathbb{N}$ můžeme za použití nerovnosti (3.3) psát

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n\| &= \|\mathbf{g}(\mathbf{x}^n) - \mathbf{g}(\mathbf{x}^{n-1})\| \leq \lambda \|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^{n-1}\| = \\ &= \lambda \|\mathbf{g}(\mathbf{x}^{n-1}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}^{n-2})\| \leq \lambda^2 \|\mathbf{x}^{n-1} - \mathbf{x}^{n-2}\| \leq \\ &\leq \dots \leq \lambda^{n-1} \|\mathbf{g}(\mathbf{x}^1) - \mathbf{g}(\mathbf{x}^0)\| \leq \lambda^n \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Pro $m > n$ pak za použití nerovnosti (3.4) platí

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^n\| &\leq \|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^{m-1}\| + \|\mathbf{x}^{m-1} - \mathbf{x}^{m-2}\| + \dots + \|\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n\| \leq \\ &\leq \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|(\lambda^{m-1} + \lambda^{m-2} + \dots + \lambda^n) = \\ &= \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|\lambda^n(1 + \lambda + \dots + \lambda^{m-n-1}) < \\ &< \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|\lambda^n(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots) = \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|\lambda^n \frac{1}{1-\lambda} \end{aligned}$$

a tedy

$$0 \leq \|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^n\| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|.$$

Nyní, protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\| = 0,$$

a z věty o limitě tří posloupností dostáváme $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^n\| = 0$.

- (ii) Nyní ukážeme jednoznačnost existence řešení, a to sporem. Předpokládejme, že existují dvě různá řešení $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}$ systému (3.1), tj. $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta}), \boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{\zeta}$. Pak můžeme psát

$$\|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}\| = \|\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta})\| \leq \lambda \|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}\| < \|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}\|,$$

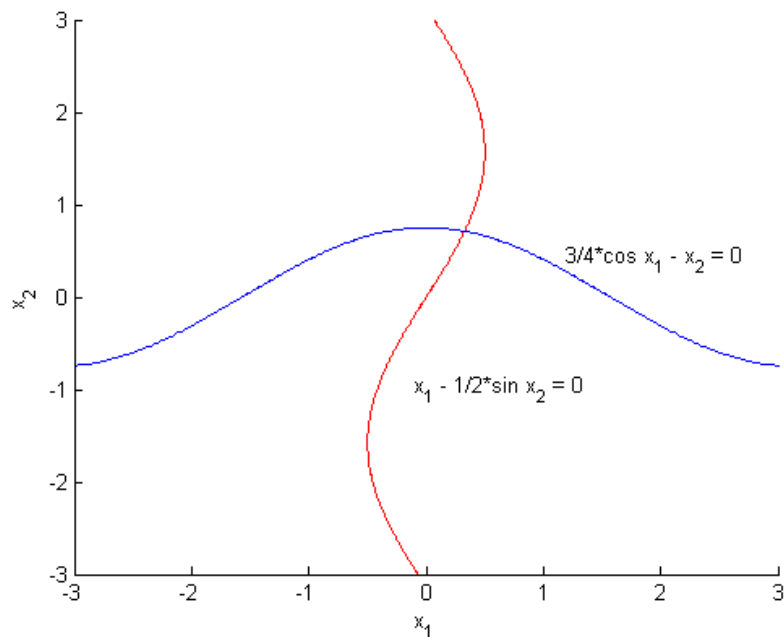
což je spor. Tedy existuje jediné řešení systému (3.1). □

Příklad 3.1. Ověřte, zda systém rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 - \sin x_2 &= 0 \\ 3 \cos x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

splňuje předpoklady věty 3.2 a případně najděte řešení tohoto systému.

Z grafu funkcí viz. obr.4 vidíme, že řešení systému se nachází v okolí bodu $[0.5, 0.5]$.



Obr. 4

Funkci $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ lze psát např. ve tvaru

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sin x_2 \\ \frac{3}{4} \cos x_1 \end{bmatrix}$$

V obecném případě není snadné podmínku (3.3) ověřit, v tomto případě to ale lze. Označme $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^T$ a za normu zvolme $\|\cdot\|_\infty$. Musíme tedy ověřit, zda je splněna nerovnost

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\|_\infty \leq \lambda \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty$$

pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, 0 < \lambda < 1$, tj.

$$\max\{|g_1(\mathbf{x}) - g_1(\mathbf{y})|, |g_2(\mathbf{x}) - g_2(\mathbf{y})|\} \leq \lambda \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

Můžeme psát

$$\begin{aligned} |g_1(\mathbf{x}) - g_1(\mathbf{y})| &= \left| \frac{1}{2} \sin x_2 - \frac{1}{2} \sin y_2 \right| = \frac{1}{2} |\sin x_2 - \sin y_2| = \\ &= \frac{1}{2} \left| 2 \cos\left(\frac{x_2+y_2}{2}\right) \sin\left(\frac{x_2-y_2}{2}\right) \right| = \left| \cos\left(\frac{x_2+y_2}{2}\right) \right| \left| \sin\left(\frac{x_2-y_2}{2}\right) \right| \leq \\ &\leq \left| \sin\left(\frac{x_2-y_2}{2}\right) \right| \leq \left| \frac{x_2-y_2}{2} \right| = \frac{1}{2} |x_2 - y_2| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|g_2(\mathbf{x}) - g_2(\mathbf{y})| &= \left| \frac{3}{4} \cos x_1 - \frac{3}{4} \cos y_1 \right| = \frac{3}{4} |\cos x_1 - \cos y_1| = \\
&= \frac{3}{4} \left| -2 \sin\left(\frac{x_1+y_1}{2}\right) \sin\left(\frac{x_1-y_1}{2}\right) \right| = \frac{3}{2} \left| \sin\left(\frac{x_1+y_1}{2}\right) \right| \left| \sin\left(\frac{x_1-y_1}{2}\right) \right| \leq \\
&\leq \frac{3}{2} \left| \sin\left(\frac{x_1-y_1}{2}\right) \right| \leq \frac{3}{2} \left| \frac{x_1-y_1}{2} \right| = \frac{3}{4} |x_1 - y_1|
\end{aligned}$$

kde jsme užili nerovnosti $|\sin x| \leq |x|$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Nyní můžeme užitím předchozích nerovností psát

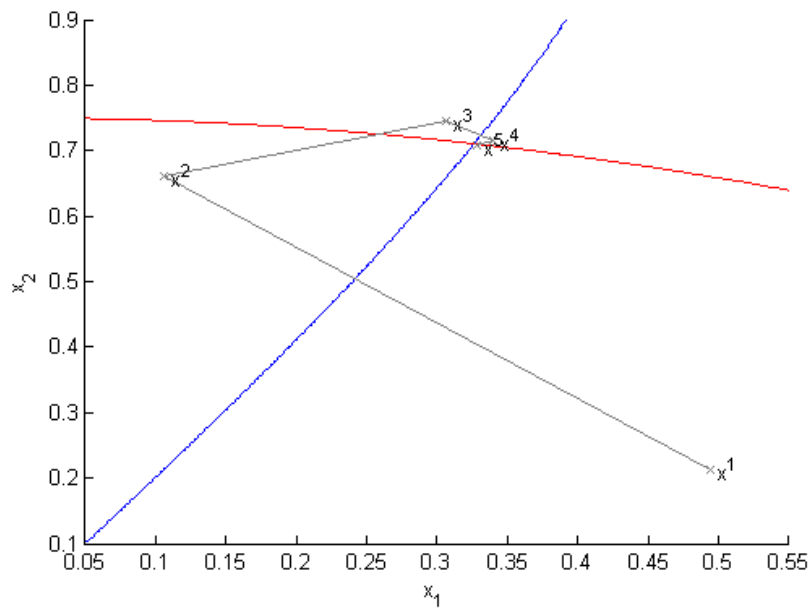
$$\begin{aligned}
\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\|_\infty &= \max\left\{ \frac{1}{2} |\sin x_2 - \sin y_2|, \frac{3}{4} |\cos x_1 - \cos y_1| \right\} \leq \\
&\leq \max\left\{ \frac{1}{2} |x_2 - y_2|, \frac{3}{4} |x_1 - y_1| \right\} \leq \\
&\leq \frac{3}{4} \max\{|x_2 - y_2|, |x_1 - y_1|\} = \frac{3}{4} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty,
\end{aligned}$$

což platí pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. Ukázali jsme tedy, že zobrazení \mathbf{g} je kontrakce na \mathbb{R}^2 . Jsou tak splněny předpoklady věty 3.2 a proto posloupnost iterací $\{\mathbf{x}^k\}$ generovaná vztahem

$$\begin{aligned}
x_1^{k+1} &= \frac{1}{2} \sin x_2^k \\
x_2^{k+1} &= \frac{3}{4} \cos x_1^k
\end{aligned}$$

konverguje k řešení $\boldsymbol{\xi}$ a toto řešení je jediné.

Jelikož v Matlabu neexistuje žádný příkaz pro nalezení řešení systému nelineárních rovnic iterační metodou, vytvořila jsem vlastní m-file (viz. m-file 3.1), který je uveden hned za příkladem. Vstupy u tohoto m-filu jsou počáteční iterace \mathbf{x}^0 , vektor symbolických proměnných, vektor funkcí $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ ze systému (3.1) a přesnost e , se kterou chceme počítat. Přesnost e není nutné udávat. Pokud ji neuvedeme, je v m-filu automaticky nastavena na hodnotu 10^{-9} . Jako zastavovací kritérium při výpočtu řešení systému použijeme maximální normu a výpočet zastavíme pokud $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k - x_i^{k-1}| \leq e$. Výstupy u tohoto m-filu jsou odhad řešení x_k , počet iterací k a případně také posloupnost iterací I . Protože posloupnost iterací generovaná iterační metodou může mít i tisíce členů a nebo nemusí vůbec konvergovat, je v m-filu uvedeno další zastavovací kritérium:



Obr. 5

výpočet je zastaven, pokud počet iterací dosáhne 1000. Posloupnost iterací I je pak lepší žádat na výstupu jen pro menší k . Za použití tohoto m-filu pak pro různé počáteční iterace $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ příkazem $[\mathbf{x}_k, k, I]=\text{iterace}(F, \mathbf{x}, \mathbf{x}^0)$, kde

$$F = [(\sin(x(2)))/2, 3 * \cos(x(1))/4],$$

$$x = \text{sym}('[x1, x2]'),$$

$$x_0 = [10, 20] \text{ nebo } x_0 = [-5, 8],$$

dostáváme následující hodnoty:

$$x_k = [0.326096931, 0.710474922],$$

$$k = 17 \quad \text{pro } \mathbf{x}^0 = [10, 20],$$

$$x_k = [0.326096930, 0.710474922],$$

$$k = 18 \quad \text{pro } \mathbf{x}^0 = [-5, 8],$$

k	x_1^k	x_2^k	k	x_1^k	x_2^k
0	10	20	0	-5	8
1	0.4564726254	-0.6293036468	1	0.4946791233	0.2127466391
2	-0.2942909713	0.6732096683	2	0.1055727040	0.6600908183
3	0.3117492958	0.7177560335	3	0.3065942976	0.7458242821
4	0.3288479932	0.7138488565	4	0.33928875	0.7150252379
5	0.3273738809	0.7098112616	5	0.3278182367	0.7072437148
6	0.3258453137	0.710167542	6	0.3248705180	0.7100603074
7	0.32598041	0.7105353538	7	0.3259397523	0.7107690474
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
16	0.326096932	0.7104749246	17	0.3260969313	0.7104749208
17	0.3260969311	0.7104749223	18	0.3260969297	0.7104749224
18	0.3260969302	0.7104749223	19	0.3260969303	0.7104749228

Pro $\mathbf{x}^0 = [10, 20]$ tedy dostáváme řešení $xk = [0.326096931, 0.710474922]$ při přesnosti $e = 10^{-9}$ po sedmnácti iteracích a pro $\mathbf{x}^0 = [-5, 8]$ řešení $xk = [0.326096930, 0.710474922]$ po osmnácti iteracích. Pro počáteční iteraci $\mathbf{x}^0 = [-5, 8]$ je několik prvních iterací počínaje iterací \mathbf{x}^1 zakresleno na obrázku 5.



M-file 3.1. `function[xk,k,I]=iterace(F,x,x0,e)`

`%iterační metoda pro řešení systémů nelineárních rovnic`

`%vstupní data: x symbolický vektor`

`% F řádkový vektor symbolických funkcí`

`% x0 počáteční iterace (řádkový vektor)`

`% e přesnost, se kterou chceme počítat`

`%(není nutné ji udávat)`

`%výstupní data: k počet iterací`

`% xk odhad řešení systému`

`% I posloupnost iterací`

`%vstupní argumenty mohou vypadat například takto:`

```

% x = sym(' [x1,x2] ');
% F=[(sin(x(2)))/2,3*cos(x(1))/4];
% x0=[10,20];

%ověření vstupních dat
if(nargin<4)%pokud uživatel nezadá přesnost, nastavíme ji na
            %9 desetinných míst
    e=1e-9;
end
if(nargin<3)
    error('Neodpovídá počet vstupních dat')
end
if(length(x)~=length(x0))
    error('Vektory x a x0 nemají stejnou velikost')
end
if(e<=0)
    error('přesnost e není kladné číslo')
end
if(length(F)~=length(x0))
    error('Vektory F a x0 nemají stejnou velikost')
end
%odhad řešení systému
format long
n=length(F);
v=ones(1,n);
X(1,:)=v+x0;
X(2,:)=x0;
for j=1:n
    E(j)=abs(X(2,j)-X(1,j));
end

```

```

k=0;
l=2;
while max(E)>e && k<1000
    g=double(subs(F,x,X(l,:)));
    X(l+1,:)=g;
    for j=1:n
        E(j)=abs(X(l+1,j)-X(l,j));%zastavovací kritérium:maximální
                                %norma vektoru xk-x(k-1)
    end
    l=l+1;
    k=k+1;
end
X(1,:)=[];
xk=X(l-1,:);
if k==1000
    disp('Posloupnost iterací k řešení systému nekonverguje
        a nebo konverguje a má více jak 1000 členů.')
```

△

Kontrakce na \mathbb{R}^n v předchozí větě je ale poměrně silný požadavek. Konvergence k nějakému řešení může být zajištěna i za slabšího předpokladu, například pokud zobrazení \mathbf{g} je kontrakce pouze na nějakém okolí počáteční aproximace \mathbf{x}^0 . K tomu nám slouží následující věta.

Věta 3.3. *Nechť pro libovolné $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ a pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ležící v $U(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{x}; \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \rho\}$, kde $\rho \in \mathbb{R}^+$, platí vztah (3.3). Nechť pro počáteční aproximaci \mathbf{x}^0 platí $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{x}^0\| \leq (1 - \lambda)\rho$. Pak platí následující tvrzení.*

(i) *Pro všechny iterace \mathbf{x}^k platí $\mathbf{x}^k \in U(\mathbf{x}^0)$.*

(ii) Posloupnost iterací $\{\mathbf{x}^k\}$ konverguje k nějakému bodu $\boldsymbol{\xi}$, který je řešením systému (3.1).

(iii) $\boldsymbol{\xi}$ je jediné řešení systému (3.1) v okolí $U(\mathbf{x}^0)$.

Důkaz:

(i) Dokážeme matematickou indukcí. Protože $\mathbf{x}^1 = \mathbf{g}(\mathbf{x}^0)$ a $0 \leq \lambda < 1$, dostáváme $\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\| \leq (1 - \lambda)\rho \leq \rho$. Předpokládejme dále, že tvrzení platí pro $k \in \mathbb{N}$ a ukážeme platnost i pro $k + 1$. Protože platí $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| = \|\mathbf{g}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{g}(\mathbf{x}^{k-1})\|$, můžeme užitím nerovnosti (3.4) psát

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| \leq \lambda^k \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\| \leq \lambda^k (1 - \lambda)\rho,$$

a tedy

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^0\| &= \|(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) + (\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}) + \dots + (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0)\| \leq \\ &\leq \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| + \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\| + \dots + \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\| \leq \\ &\leq (\lambda^k + \lambda^{k-1} + \dots + 1)(1 - \lambda)\rho = (1 - \lambda^{k+1})\rho \leq \rho, \end{aligned}$$

čímž je důkaz tvrzení (i) hotov.

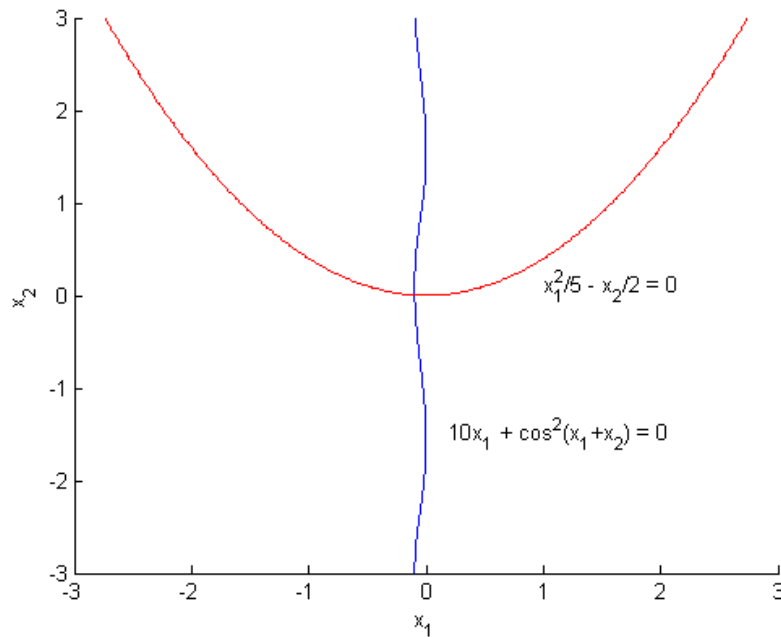
(ii) Postupujeme podobně jako v části (i) důkazu věty 3.2 s tím rozdílem, že nyní pracujeme na okolí $U(\mathbf{x}^0)$.

(iii) Postupujeme podobně jako v části (ii) důkazu věty 3.2 s tím rozdílem, že nyní pracujeme na okolí $U(\mathbf{x}^0)$. \square

Příklad 3.2. Ověřte, zda systém rovnic

$$\begin{aligned} 10x_1 + \cos^2(x_1 + x_2) &= 0 \\ x_1^2/5 - x_2/2 &= 0 \end{aligned}$$

splňuje předpoklady věty 3.3 a případně najděte řešení tohoto systému.



Obr. 6

Funkci $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ lze psát např. ve tvaru

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\cos^2(x_1+x_2)}{10} \\ \frac{2}{5}x_1^2 \end{bmatrix}.$$

Za normu $\|\cdot\|$ si zvolíme maximální normu $\|\cdot\|_\infty$.

Z grafu funkcí viz. obrázek 6 vidíme, že řešení systému se nachází v okolí bodu $[0, 0]$. Za počáteční iteraci tedy zvolme bod $\mathbf{x}^0 = [0, 0]$.

Nyní vypočítáme normu $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{x}^0\|_\infty$. Protože

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}^0) - x_1^0 &= -\frac{\cos^2(0+0)}{10} - 0 = -\frac{1}{10}, \\ g_2(\mathbf{x}^0) - x_2^0 &= \frac{2}{5}0 - 0 = 0, \end{aligned}$$

pak

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{x}^0\|_\infty = \max \left\{ \left| \frac{-1}{10} \right|, 0 \right\} = \frac{1}{10}.$$

Nyní tedy musíme najít ρ a λ takové, aby platilo $\frac{1}{10} \leq (1 - \lambda)\rho$. Za ρ zvolme

například číslo $\rho = 0.5$ a podívejme se, zda zobrazení \mathbf{g} je kontrakce na $U(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{x}; \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty \leq 0.5\}$. Označme $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. Musíme tedy ukázat, že platí

$$\max\{|g_1(\mathbf{x}) - g_1(\mathbf{y})|, |g_2(\mathbf{x}) - g_2(\mathbf{y})|\} \leq \lambda \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

pro každé $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \langle -0.5, 0.5 \rangle$. Můžeme psát

$$|g_2(\mathbf{x}) - g_2(\mathbf{y})| = \left| \frac{2}{5}x_1^2 - \frac{2}{5}y_1^2 \right| = \frac{2}{5}|x_1^2 - y_1^2| = \frac{2}{5}|x_1 - y_1||x_1 + y_1| \leq \frac{2}{5}|x_1 - y_1|,$$

kde jsme využili toho, že $|x_1 + y_1| \leq 1$ pro každé $x_1, y_1 \in \langle -0.5, 0.5 \rangle$.

Nyní se podívejme na $|g_1(\mathbf{x}) - g_1(\mathbf{y})|$:

$$\begin{aligned} |g_1(\mathbf{x}) - g_1(\mathbf{y})| &= \left| -\frac{\cos^2(x_1+x_2)}{10} + \frac{\cos^2(y_1+y_2)}{10} \right| = \frac{1}{10} |\cos^2(x_1 + x_2) - \cos^2(y_1 + y_2)| = \\ &= \frac{1}{10} |\cos(x_1 + x_2) - \cos(y_1 + y_2)| |\cos(x_1 + x_2) + \cos(y_1 + y_2)| \end{aligned}$$

Výraz $|g_1(\mathbf{x}) - g_1(\mathbf{y})|$ je těžké nebo vůbec nelze zhora vhodně omezit žádným výrazem $k|x_2 - y_2|$, $0 < k < 1$. Podmínku kontrakce tedy nelze ověřit.

Budeme tedy potřebovat nějaký aparát, který nám zajistí splnění podmínky kontrakce. Tento příklad tedy dokončíme až za větou 3.6, která nám zaručí splnění podmínky kontrakce. ♣

Konvergence k hledanému řešení je zaručena i pokud zobrazení \mathbf{g} je kontrakce pouze na nějakém okolí řešení $\boldsymbol{\xi}$. To uvádí následující věta.

Věta 3.4. *Nechť systém (3.1) má řešení $\boldsymbol{\xi}$. Nechť pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ splňující nerovnosti $\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\| \leq \rho, \|\mathbf{y} - \boldsymbol{\xi}\| \leq \rho$, kde $\rho \in \mathbb{R}^+$, platí vztah (3.3). Pak pro libovolnou počáteční aproximaci \mathbf{x}^0 takovou, že $\|\mathbf{x}^0 - \boldsymbol{\xi}\| \leq \rho$, platí*

(i) *všechny iterace \mathbf{x}^k splňují podmínku $\|\mathbf{x}^k - \boldsymbol{\xi}\| \leq \rho$,*

(ii) *$\|\mathbf{x}^{k+1} - \boldsymbol{\xi}\| \leq \lambda \|\mathbf{x}^k - \boldsymbol{\xi}\| \leq \lambda^{k+1} \|\mathbf{x}^0 - \boldsymbol{\xi}\|$, tedy posloupnost iterací konverguje aspoň lineárně k bodu $\boldsymbol{\xi}$.*

Důkaz: Viz. [8], strana 267.

Příklad k větě 3.4 uvedeme dále, až za větou 3.6, která nám zaručí splnění předpokladů ve větě 3.4.

Jelikož podmínku kontrakce je těžké v obecném případě ověřit, má praktičtější využití následující věta, ve které je podmínka kontrakce nahrazena jinou, snadněji ověřitelnou, podmínkou.

Věta 3.5. *Nechť systém (3.1) má řešení ξ . Nechť funkce $g_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \dots, n$ mají spojité první parciální derivace a nechť nerovnost*

$$\left| \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right| \leq \frac{\lambda}{n}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+, \lambda < 1, i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

platí pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ splňující nerovnost

$$\|\mathbf{x} - \xi\|_\infty \leq \rho, \quad \rho \in \mathbb{R}^+. \quad (3.6)$$

Pak

- (i) pro libovolnou počáteční aproximaci \mathbf{x}^0 splňující nerovnost (3.6), všechny iterace \mathbf{x}^k generované vztahem (3.2) splňují také nerovnost (3.6),
- (ii) pro libovolnou počáteční aproximaci \mathbf{x}^0 , která splňuje nerovnost (3.6), posloupnost iterací (3.2) konverguje k řešení ξ systému (3.1) a toto řešení je jediné splňující nerovnost (3.6).

Důkaz: Viz. [2], strana 111.

Podmínka (3.5) v předchozí větě může být nahrazena jinými podmínkami, které jsou méně omezující, a věta zůstává platná. Jednou takovou podmínkou je například

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |g_{ij}(\mathbf{x})| \leq \lambda < 1, \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \xi\|_\infty < \rho, \quad (3.7)$$

kde $g_{ij}(\mathbf{x}) = \partial g_i(\mathbf{x}) / \partial x_j$. Pokud definujeme matici $G(\mathbf{x}) = (g_{ij}(\mathbf{x}))_{i,j=1}^n$, pak nerovnost (3.7) můžeme psát ve tvaru $\|G(\mathbf{x})\|_\infty \leq \lambda < 1$.

Touto nerovností můžeme dokonce nahradit podmínku kontrakce ve všech předchozích větách, jelikož platí následující věta.

Věta 3.6. Jestliže $\|G(\mathbf{x})\|_\infty \leq \lambda < 1$ pro každé \mathbf{x} z nějakého okolí $U(\mathbf{z})$ bodu \mathbf{z} , pak platí $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\|_\infty \leq \lambda \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty$ pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U(\mathbf{z})$.

Důkaz: Protože Taylorovy rozvoje funkcí $g_i, i = 1, 2, \dots, n$, v bodě \mathbf{y} můžeme psát ve tvaru

$$g_i(\mathbf{x}) = g_i(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{\alpha})(x_j - y_j),$$

kde $\boldsymbol{\alpha}$ leží mezi body \mathbf{x} a \mathbf{y} , platí

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{\alpha})(x_j - y_j) \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{\alpha}) \right| |x_j - y_j| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{\alpha}) \right| \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j| \leq \|G(\mathbf{x})\|_\infty \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty. \end{aligned}$$

Užitím předpokladu $\|G(\mathbf{x})\|_\infty \leq \lambda < 1$ pak dostáváme $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\|_\infty \leq \lambda \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty$, čímž je důkaz hotov. \square

Ve větách 3.5 a 3.6 jsme sice uvažovali konkrétní normu $\|\cdot\|_\infty$, ale vzhledem k tomu, že každé dvě normy jsou podle vět 1.3 a 1.9 ekvivalentní, platí tato věta pro všechny normy.

Příklad 3.3. Nyní, protože už máme k dispozici větu 3.6, můžeme dopočítat příklad 3.2.

K ověření podmínek věty 3.3 nám už stačí jen ukázat, že zobrazení \mathbf{g} je kontrakce na $U(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{x}; \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty \leq 0.5\}$. Stačí tedy, abychom ukázali, že $\|G(\mathbf{x})\|_\infty \leq \lambda < 1$ na $U(\mathbf{x}^0)$, a potom podle věty 3.6 je \mathbf{g} kontrakce na $U(\mathbf{x}^0)$. Spočítáme tedy parciální derivace funkcí $g_1(\mathbf{x}) = -\frac{\cos^2(x_1+x_2)}{10}$, $g_2(\mathbf{x}) = \frac{2}{5}x_1^2$ z příkladu 3.2 podle proměnných x_1, x_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) &= \frac{2}{10} \cos(x_1 + x_2) \sin(x_1 + x_2) = \frac{1}{10} \sin(2x_1 + 2x_2) & \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) &= \frac{4}{5}x_1 \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{10} \sin(2x_1 + 2x_2) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) &= 0. \end{aligned}$$

Norma $\|G(\mathbf{x})\|_\infty$ potom vypadá takto:

$$\begin{aligned}\|G(\mathbf{x})\|_\infty &= \max_{\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}^0)} \left\{ \left| \frac{1}{10} \sin(2x_1 + 2x_2) \right| + \left| \frac{1}{10} \sin(2x_1 + 2x_2) \right|, \left| \frac{4}{5} x_1 \right| \right\} = \\ &= \max_{\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}^0)} \left\{ \left| \frac{1}{5} \sin(2x_1 + 2x_2) \right|, \frac{4}{5} |x_1| \right\} \leq \max_{\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}^0)} \left\{ \frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right\} = \frac{2}{5} \equiv \lambda < 1.\end{aligned}$$

Nyní stačí už jen ukázat, že je splněna podmínka $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{x}^0\|_\infty = \frac{1}{10} \leq (1 - \lambda)\rho$. Protože $(1 - \lambda)\rho = (1 - \frac{2}{5})\frac{1}{2} = \frac{3}{5}\frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ a $\frac{1}{10} < \frac{3}{10}$, je podmínka splněna.

Jsou tedy splněny všechny předpoklady věty 3.3 a proto posloupnost iterací $\{\mathbf{x}^k\}$ konverguje k řešení $\boldsymbol{\xi}$ systému pro počáteční iteraci $\mathbf{x}^0 = [0, 0]$.

Pro nalezení řešení toho systému opět uijeme m-file 3.1 a pro chybu $e = 10^{-9}$ pak v Matlabu příkazem `[xk, k, I]=iterace(F, x, x0)`, kde

$$\begin{aligned}F &= [(-(\cos(x(1) + x(2)))^2/10, 2/5 * x(1)^2], \\ x &= \text{sym}('[x1, x2]'), \\ x0 &= [0, 0],\end{aligned}$$

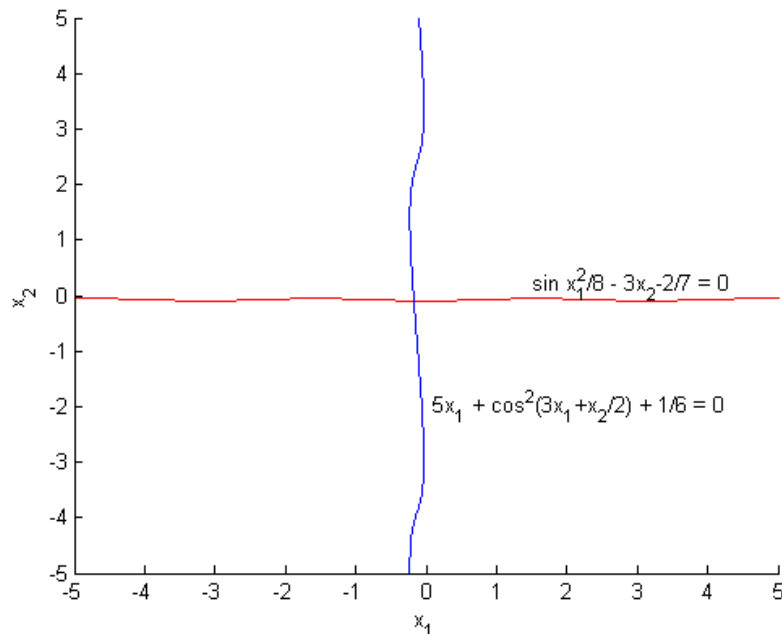
dostáváme následující hodnoty:

$$\begin{aligned}xk &= [-0.099097019, 0.003928088], \\ k &= 6,\end{aligned}$$

k	x_1^k	x_2^k
0	0	0
1	-0.1000000000	0
2	-0.0990033289	0.0040000000
3	-0.0991001489	0.0039206637
4	-0.0990968189	0.0039283358
5	-0.0990970270	0.0039280718
6	-0.0990970181	0.0039280883
7	-0.0990970186	0.0039280876

Pro počáteční iteraci $\mathbf{x} = [0, 0]$ tedy řešení $xk = [-0.099097019, 0.003928088]$ dostáváme při přesnosti $e = 10^{-9}$ po šesti iteracích.





Obr. 7

Příklad 3.4. Ověřte, zda systém rovnic

$$\begin{aligned} 5x_1 + \cos^2\left(3x_1 + \frac{x_2}{2}\right) + \frac{1}{6} &= 0 \\ \frac{\sin x_1^2}{8} - 3x_2 - \frac{2}{7} &= 0 \end{aligned}$$

splňuje předpoklady věty 3.4 a případně najděte řešení tohoto systému rovnic.

Systém si vhodným způsobem převedeme na systém tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Funkci $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ lze psát např. ve tvaru

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{30} - \frac{\cos^2(3x_1 + x_2/2)}{5} \\ \frac{\sin x_1^2}{24} - \frac{2}{21} \end{bmatrix}.$$

Za normu $\|\cdot\|$ si zvolíme maximální normu $\|\cdot\|_\infty$.

Z grafu funkcí viz. obrázek 7 vidíme, že řešení ξ systému leží v okolí bodu $[0, 0]$. Nyní si zvolme například $\rho = 1$ a musíme tedy ukázat, že zobrazení \mathbf{g} je kontrakce na $U(\xi) = \{\mathbf{x}; \|\mathbf{x} - \xi\|_\infty \leq 1\}$. Podle věty 3.6 stačí, když ukážeme, že

$\|G(\mathbf{x})\|_\infty \leq \lambda < 1$ na okolí $U(\boldsymbol{\xi})$, protože potom bude \mathbf{g} kontrakce. Spočítáme tedy parciální derivace:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) &= \frac{2}{5} \cos(3x_1 + \frac{x_2}{2}) \sin(3x_1 + \frac{x_2}{2}) 3 = \frac{3}{5} \sin(6x_1 + x_2), \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{5} \sin(6x_1 + x_2) \frac{1}{2} = \frac{1}{10} \sin(6x_1 + x_2), \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) &= \frac{2x_1}{24} \cos x_1^2 = \frac{x_1}{12} \cos x_1^2, \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) &= 0\end{aligned}$$

a užitím maximální vektorové normy můžeme psát

$$\begin{aligned}\|G(\mathbf{x})\|_\infty &= \max_{\mathbf{x} \in U(\boldsymbol{\xi})} \left\{ \left| \frac{3}{5} \sin(6x_1 + x_2) \right| + \left| \frac{1}{10} \sin(6x_1 + x_2) \right|, \left| \frac{x_1}{12} \cos x_1^2 \right| \right\} = \\ &= \max_{\mathbf{x} \in U(\boldsymbol{\xi})} \left\{ \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{10} \right) |\sin(6x_1 + x_2)|, \left| \frac{x_1}{12} \cos x_1^2 \right| \right\} = \\ &= \max_{\mathbf{x} \in U(\boldsymbol{\xi})} \left\{ \frac{7}{10} |\sin(6x_1 + x_2)|, \left| \frac{x_1}{12} \cos x_1^2 \right| \right\} \leq \max \left\{ \frac{7}{10}, \frac{1}{12} \right\} = \frac{7}{10} \equiv \lambda < 1,\end{aligned}$$

protože $|\sin(6x_1 + x_2)| \leq 1$, $\left| \frac{x_1}{12} \cos x_1^2 \right| < 1$ pro každé $\mathbf{x} \in U(\boldsymbol{\xi})$. Ukázali jsme tedy, že $\|G(\mathbf{x})\|_\infty \leq \lambda < 1$ na okolí $U(\boldsymbol{\xi})$ a proto je zobrazení \mathbf{g} kontrakce na $U(\boldsymbol{\xi})$.

Jsou tedy splněny všechny předpoklady věty 3.4 a proto posloupnost iterací $\{\mathbf{x}^k\}$ generovaná vztahem

$$\begin{aligned}x_1^{k+1} &= -\frac{1}{30} - \frac{\cos^2(3x_1^k + x_2^k/2)}{5} \\ x_2^{k+1} &= \frac{\sin(x_1^k)^2}{24} - \frac{2}{21}\end{aligned}$$

konverguje k hledanému řešení $\boldsymbol{\xi}$ daného systému pro libovolnou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 \in U(\boldsymbol{\xi})$.

Pro nalezení řešení tohoto systému nelineárních rovnic uijeme opět m-file 3.1 a při přesnosti $e = 10^{-9}$ pro různou volbu počátečních iterací $\mathbf{x}^0 \in U(\boldsymbol{\xi})$ dostáváme v Matlabu příkazem `[xk, k, I]=iterace(F, x, x0)`, kde

$$\begin{aligned}F &= [-1/30 - (\cos(3 * x(1) + x(2)/2))^2/5, (\sin(x(1)))^2/24 - 2/21], \\ x &= \text{sym}('[x1, x2]'), \\ x0 &= [-0.5, 0.3] \text{ nebo } x0 = [0.7, -0.4]\end{aligned}$$

následující hodnoty:

$$xk = [-0.174826785, -0.093964777],$$

$$k = 33, \quad \text{pro } \mathbf{x}^0 = [-0.5, 0.3],$$

$$xk = [-0.174826785, -0.093964777],$$

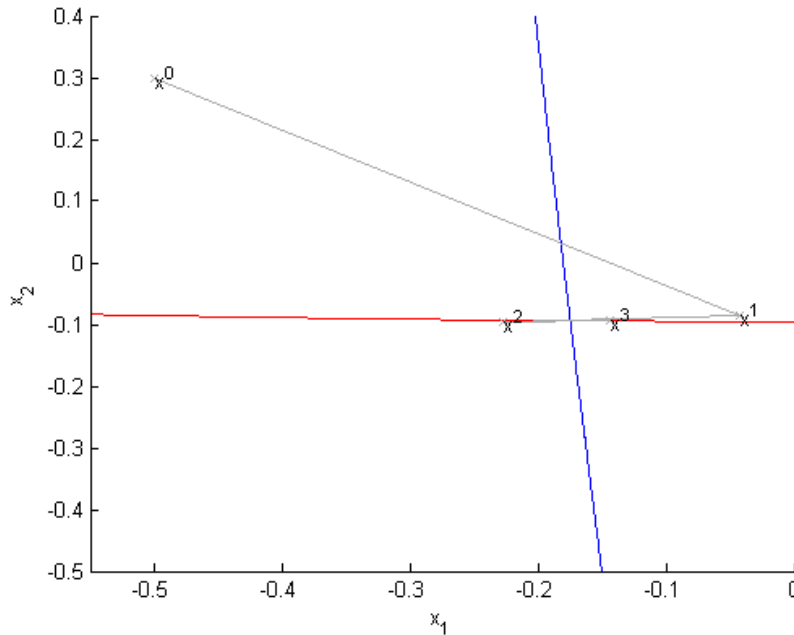
$$k = 33, \quad \text{pro } \mathbf{x}^0 = [0.7, -0.4],$$

k	x_1^k	x_2^k	k	x_1^k	x_2^k
0	-0.5	0.3	0	0.7	-0.4
1	-0.0429261191	-0.0849295969	1	-0.0542365621	-0.0756286832
2	-0.2275255933	-0.0951613181	2	-0.2253985689	-0.0951155286
3	-0.1443590161	-0.0930820629	3	-0.1456310617	-0.093122151
4	-0.1907478884	-0.0943698445	4	-0.1901180276	-0.0943544779
5	-0.1659210271	-0.0937223982	5	-0.1662795313	-0.0937323871
6	-0.1796484816	-0.0940911657	6	-0.1794568474	-0.0940862052
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
32	-0.1748267864	-0.0939647767	32	-0.1748267863	-0.0939647767
33	-0.1748267851	-0.0939647766	33	-0.1748267852	-0.0939647766
34	-0.1748267858	-0.0939647766	34	-0.1748267858	-0.0939647766

Řešení $xk = [-0.174826785, -0.093964777]$ dostáváme pro $\mathbf{x}^0 = [-0.5, 0.3]$ tedy při přesnosti $e = 10^{-9}$ po třicetitřech iteracích a pro počáteční iteraci $\mathbf{x}^0 = [0.7, -0.4]$ dostáváme řešení $xk = [-0.174826785, -0.093964777]$ také po třicetitřech iteracích. Konvergence k hledanému řešení je tedy poměrně pomalá. Několik prvních iterací počínaje iterací $\mathbf{x}^0 = [-0.5, 0.3]$ je zakresleno na obrázku 8.



Příklad 3.5. Až dosud jsme ve všech příkladech uvažovali vhodné iterační funkce, které splňovaly předpoklady daných vět. Nyní si ukážeme, že ne každá iterační funkce musí tyto předpoklady splňovat.



Obr. 8

Uvažujme systém rovnic

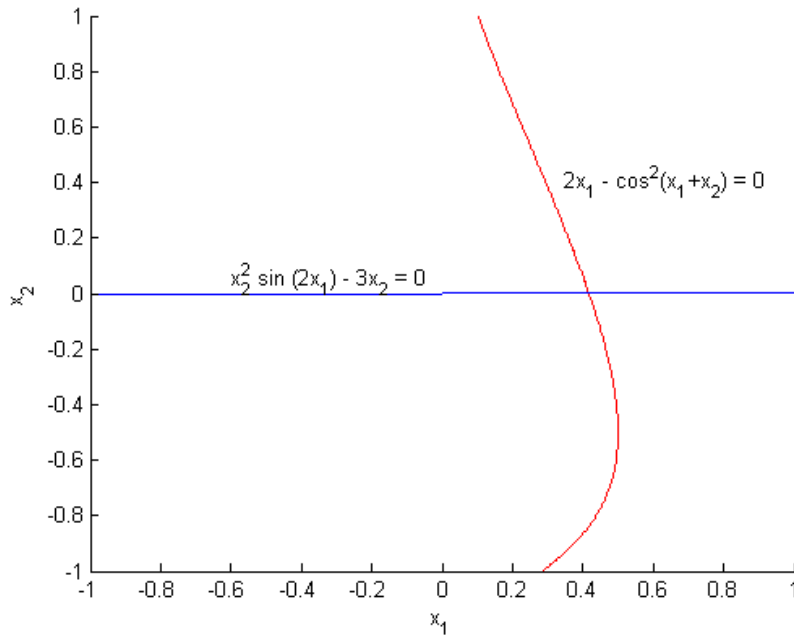
$$\begin{aligned} 2x_1 - \cos^2(x_1 + x_2) &= 0 \\ x_2^2 \sin(2x_1) - 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

a zkusme najít iterační funkci, která bude splňovat předpoklady věty 3.4.

Z grafu viz. obrázek 9 vidíme, že řešení ξ systému se nachází v okolí bodu $[0.4, 0]$. Systém rovnic přepíšeme do tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ a musíme ukázat, že zobrazení \mathbf{g} je kontrakce na nějakém okolí $U(\xi)$ bodu ξ . K tomu nám podle věty 3.6 stačí ukázat, že $\|\mathbf{G}(\mathbf{x})\|_\infty \leq \lambda < 1$ pro každé \mathbf{x} z okolí $U(\xi)$. Za okolí bodu ξ si zvolíme množinu $U(\xi) = \{\mathbf{x}; \|\mathbf{x} - \xi\|_\infty < 0.1\}$.

Zvolme iterační funkci \mathbf{g} například ve tvaru

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos^2(x_1+x_2)}{2} \\ \sqrt{\frac{3x_2}{\sin(2x_1)}} \end{bmatrix}.$$



Obr. 9

Nyní spočítáme parciální derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) &= \frac{-2 \cos(x_1+x_2) \sin(x_1+x_2)}{2} = -\frac{\sin(2x_1+2x_2)}{2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) &= -\frac{\sin(2x_1+2x_2)}{2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) &= \frac{-\sqrt{3x_2} \cos(2x_1)}{\sqrt{\sin^3(2x_1)}} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x_2} \sin(2x_1)}. \end{aligned}$$

Dále musíme ukázat, že pro každé $\mathbf{x} \in U(\xi)$ platí

$$\|G(\mathbf{x})\|_\infty = \max_{\mathbf{x} \in U(\xi)} \left\{ \left| \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right| + \left| \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \right|, \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \right| \right\} \leq \lambda < 1.$$

Platí

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right| + \left| \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \right| &= 2 \left| \frac{\sin(2x_1+2x_2)}{2} \right| = |\sin(2(x_1+x_2))| \leq \\ &\leq |\sin(2(0.55+0.15))| = \sin(1.4) \leq 0.99 < 1 \end{aligned}$$

pro každé $[x_1, x_2] \in U(\xi)$, kde výraz $|\sin(2(x_1+x_2))|$ jsme mohli shora omezit výrazem $|\sin(2(0.55+0.15))|$, protože platí $x_1 < 0.55, x_2 < 0.15$ pro každé $\mathbf{x} =$

$= [x_1, x_2] \in U(\boldsymbol{\xi})$, $0 < 2(x_1 + x_2) < 2(0.55 + 0.15) < \frac{\pi}{2}$ a funkce sinus je na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ rostoucí. Tedy g_1 je dobrá iterační funkce.

Předchozí postup bychom v obecném případě ale použít nemohli. Tyto přesné odhady lze dělat jen v některých speciálních příkladech, kdy máme k dispozici grafy, pomocí nichž lze vhodně odhadnout většinou velmi malá okolí řešení $\boldsymbol{\xi}$.

Parciální derivace funkce g_2 nejsou definovány v bodech $\mathbf{x} = [x_1, 0]$ a g_2 tedy není vhodná iterační funkce.

Zkusme iterační funkci g_2 napsat ve tvaru

$$g_2(\mathbf{x}) = \frac{x_2^2 \sin(2x_1)}{3}.$$

Parciální derivace vypadají takto:

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = \frac{2}{3}x_2^2 \cos(2x_1) \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = \frac{2}{3}x_2 \sin(2x_1).$$

Dále pro každé $\mathbf{x} \in U(\boldsymbol{\xi})$ platí

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \right| &\leq \frac{2}{3}x_2^2 + \frac{2}{3}|x_2| < \frac{2}{3} \left(\frac{15}{100} \right)^2 + \frac{2}{3} \frac{15}{100} = \frac{3}{200} + \frac{1}{10} = \\ &= \frac{23}{200} < 1. \end{aligned}$$

Našli jsme tedy vhodnou iterační funkci.

V předchozích nerovnostech jsem opět využili velmi přesné odhady, které jsme mohli určit jen díky grafům funkcí na obrázku 9. Přestože tento postup není nejvhodnější, pro naše jednoduché příklady je postačující, a proto podobné odhady budeme používat i v následujícím textu.

Celkem tedy máme iterační funkci \mathbf{g} ve tvaru

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos^2(x_1+x_2)}{2} \\ \frac{x_2^2 \sin(2x_1)}{3} \end{bmatrix},$$

která splňuje předpoklady věty 3.4. Tedy posloupnost $\{\mathbf{x}_k\}$ generovaná předpisem

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^{k+1} &= \frac{\cos^2(x_1^k + x_2^k)}{2} \\ \mathbf{x}_2^{k+1} &= \frac{(x_2^k)^2 \sin(2x_1^k)}{3} \end{aligned}$$

konverguje k řešení ξ soustavy.

Pro nalezení řešení tohoto systému nelineárních rovnic uijeme opět m-file 3.1 a pro různou volbu počátečních iterací $\mathbf{x}^0 \in U(\xi)$ při přesnosti $e = 10^{-9}$ dostáváme v Matlabu příkazem $[xk, k, I]=\text{iterace}(F, x, x0)$, kde

$$F = [(\cos(x(1) + x(2)))^2/2, x(2)^2 * \sin(2 * x(1))/3],$$

$$x = \text{sym}('[x1, x2]'),$$

$$x0 = [0.45, 0.05] \text{ nebo } x0 = [0.35, -0.03]$$

následující hodnoty:

$$xk = [0.417714792, 0],$$

$$k = 19, \quad \text{pro } \mathbf{x}^0 = [0.45, 0.05]$$

$$xk = [0.417714793, 0],$$

$$k = 19, \quad \text{pro } \mathbf{x}^0 = [0.35, -0.03]$$

k	x_1^k	x_2^k	k	x_1^k	x_2^k
0	0.45	0.05	0	0.35	-0.03
1	0.3850755764	0.0006527724	1	0.4474980579	0.0001978154
2	0.4292239624	0.0000000988	2	0.4063032810	-0.0951155286
3	0.4134031902	0	3	0.4219020446	0.0000000102
4	0.4193072466	0	4	0.4161563286	0
5	0.4171234732	0	5	0.4182918436	0
6	0.4179339321	0	6	0.4175007149	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
18	0.4177147941	0	18	0.4177147912	0
19	0.4177147921	0	19	0.4177147932	0
20	0.4177147929	0	20	0.4177147925	0

Pro $\mathbf{x}^0 = [0.45, 0.05]$ tedy dostáváme řešení $xk = [0.417714792, 0]$ při přesnosti $e = 10^{-9}$ po devatenácti iteracích a pro počáteční iteraci $\mathbf{x}^0 = [0.35, -0.03]$ dostáváme řešení $xk = [0.417714793, 0]$ také po devatenácti iteracích.



Nyní se podívejme na předpoklady, které zaručí, že metoda (3.2) je druhého řádu. Pokud pro funkci $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ platí

$$G(\boldsymbol{\xi}) \equiv \left(\frac{\partial g_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n = \mathbf{O} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.8)$$

a derivace $\partial g_i(\boldsymbol{\xi})/\partial x_j$ jsou spojité na nějakém okolí řešení $\boldsymbol{\xi}$, pak vztahy (3.5) a (3.7) jsou splněny pro nějaké $\rho > 0$. Jestliže navíc v okolí tohoto kořene existují druhé parciální derivace

$$\frac{\partial^2 g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_k},$$

pak pomocí Taylorova rozvoje funkce g_i v bodě $\boldsymbol{\xi}$

$$g_i(\mathbf{x}) = g_i(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial x_k} (x_k - \xi_k) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 g_i(\boldsymbol{\zeta}^i)}{\partial x_j \partial x_k} (x_j - \xi_j)(x_k - \xi_k),$$

kde $\boldsymbol{\zeta}^i \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\zeta}^i = \mathbf{x} - \phi(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$, $0 < \phi < 1$, můžeme psát

$$g_i(\mathbf{x}) - g_i(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 g_i(\boldsymbol{\zeta}^i)}{\partial x_j \partial x_k} (x_j - \xi_j)(x_k - \xi_k).$$

Odtud dostáváme

$$g_i(\mathbf{x}) - g_i(\boldsymbol{\xi}) \leq \frac{n^2}{2} \max_{1 \leq j, k \leq n} \left\{ \frac{\partial^2 g_i(\boldsymbol{\zeta}^i)}{\partial x_j \partial x_k} (x_j - \xi_j)(x_k - \xi_k) \right\}.$$

Nyní užitím maximální vektorové normy $\|\cdot\|_\infty$ v předchozí nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |g_i(\mathbf{x}) - g_i(\boldsymbol{\xi})| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{n^2}{2} \max_{1 \leq j, k \leq n} \left\{ \frac{\partial^2 g_i(\boldsymbol{\zeta}^i)}{\partial x_j \partial x_k} (x_j - \xi_j)(x_k - \xi_k) \right\} \right| \leq \\ &\leq \frac{n^2}{2} \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \max_{1 \leq j, k \leq n} \left\{ \left| \frac{\partial^2 g_i(\boldsymbol{\zeta}^i)}{\partial x_j \partial x_k} \right| |(x_j - \xi_j)(x_k - \xi_k)| \right\} \right\} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{n^2}{2} \max_{1 \leq i, j, k \leq n} \left| \frac{\partial^2 g_i(\boldsymbol{\zeta}^i)}{\partial x_j \partial x_k} \right| \max_{1 \leq j, k \leq n} |(x_j - \xi_j)(x_k - \xi_k)| = \\
&= \frac{n^2}{2} \max_{1 \leq i, j, k \leq n} \left| \frac{\partial^2 g_i(\boldsymbol{\zeta}^i)}{\partial x_j \partial x_k} \right| \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - \xi_j| \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - \xi_k| = \\
&= \frac{n^2}{2} \max_{1 \leq i, j, k \leq n} \left| \frac{\partial^2 g_i(\boldsymbol{\zeta}^i)}{\partial x_j \partial x_k} \right| \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|_\infty \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|_\infty.
\end{aligned}$$

Nyní dosadíme-li \mathbf{x}^{k-1} za \mathbf{x} v předchozí nerovnosti a označíme-li $M \in \mathbb{R}^+$ takové, že

$$M \geq \frac{n^2}{2} \max_{1 \leq i, j, k \leq n} \left| \frac{\partial^2 g_i(\boldsymbol{\zeta}^i)}{\partial x_j \partial x_k} \right|,$$

můžeme dále psát

$$\|\mathbf{x}^k - \boldsymbol{\xi}\|_\infty \leq M \|\mathbf{x}^{k-1} - \boldsymbol{\xi}\|_\infty^2,$$

což znamená, že metoda je druhého řádu. Tím jsme tedy dokázali následující větu.

Věta 3.7. *Nechť systém (3.1) má řešení $\boldsymbol{\xi}$. Nechť dále platí*

$$G(\boldsymbol{\xi}) \equiv \left(\frac{\partial g_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n = \mathbf{O} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

a derivace $\partial g_i(\boldsymbol{\xi})/\partial x_j$ jsou spojité na nějakém okolí řešení $\boldsymbol{\xi}$ a nechť v okolí bodu $\boldsymbol{\xi}$ existují druhé parciální derivace. Pak iterační metoda (3.2) je druhého řádu, pokud počáteční iteraci \mathbf{x}^0 zvolíme dostatečně blízko řešení $\boldsymbol{\xi}$.

U iterační metody (3.2) je potřeba si pamatovat všechny složky předchozí iterace. Místo toho ale můžeme použít modifikaci, která spočívá v tom, že pro výpočet x_i^{k+1} použijeme již vypočtených hodnot $x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}$. Iterační metoda má potom následující tvar:

$$\begin{aligned}
x_1^{k+1} &= g_1(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \\
x_2^{k+1} &= g_1(x_1^{k+1}, x_2^k, \dots, x_n^k) \\
x_3^{k+1} &= g_1(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_n^k) \\
&\vdots \\
x_n^{k+1} &= g_1(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{n-1}^{k+1}, x_n^k).
\end{aligned}$$

Tato modifikace se nazývá **nelineární Gauss-Seidelova metoda**. Touto metodou se zde podrobněji zabývat nebudeme, ale pro názornost si uvedeme jeden příklad.

Příklad 3.6. Řešte systém rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 - \sin x_2 &= 0 \\ 3 \cos x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

pomocí nelineární Gauss-Seidelovy metody.

Řešení tohoto systému jsme v příkladu 3.1 pro počáteční iteraci $\mathbf{x}^0 = [10, 20]$ našli pomocí iterační posloupnosti

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \frac{1}{2} \sin x_2^k \\ x_2^{k+1} &= \frac{3}{4} \cos x_1^k \end{aligned}$$

po sedmnácti iteracích.

Nelineární Gauss-Seidelova iterační posloupnost je tvaru

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \frac{1}{2} \sin x_2^k \\ x_2^{k+1} &= \frac{3}{4} \cos x_1^{k+1} \end{aligned}$$

a v Matlabu pro chybu $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\|_\infty \leq 10^{-9}$ pak dostáváme následující hodnoty:

	x_1^k	x_2^k
0	10	20
1	0.4564726254	0.6732096683
2	0.3117492958	0.7138488565
3	0.3273738809	0.710167542
4	0.3259804097	0.7105029132
5	0.3261075398	0.7104723737
6	0.3260959642	0.7104751548
7	0.3260970183	0.7104749015
8	0.3260969223	0.7104749245
9	0.3260969311	0.7104749225
10	0.3260969303	0.7104749227

Tedy posloupnost generovaná nelineárním Gauss-Seidelovým procesem konverguje k řešení $\xi = [0.326096931, 0.710474923]$ systému po devíti iteracích.



Ve všech příkladech této kapitoly jsme řešili pouze systémy dvou nelineárních rovnic. Řešení ξ těchto systémů a tedy také vhodné počáteční iterace \mathbf{x}^0 nebo vhodné okolí $U(\xi)$ jsme mohli odhadnout z grafu funkcí. Při řešení systémů tří rovnic by byl odhad řešení ξ z grafu funkcí obtížný a pro odhad řešení systému více rovnic už tento postup použít nelze.

Protože u systémů tří a více rovnic neznáme odhad řešení ξ a dokonce ani nevíme, zda toto řešení vůbec existuje, nelze pro řešení těchto systémů použít věty zajišťující lokální konvergenci. Tyto věty totiž předpokládají existenci a znalost řešení ξ .

Dalším typem konvergence zmíněným v kapitole 2 je semilokální konvergence. Věty zajišťující tento typ konvergence bychom k řešení těchto systémů teoreticky použít mohli, protože tyto věty nevyžadují znalost existence řešení ξ , ale zajišťují konvergenci k řešení ξ , pokud za počáteční iteraci \mathbf{x}^0 vezmeme bod, ve kterém jsou splněny určité podmínky. Stačí tedy najít pouze vhodné \mathbf{x}^0 . V praxi jsou však tyto věty nevhodné, protože najít bod \mathbf{x}^0 , ve kterém jsou tyto podmínky splněny, by bylo velmi náročné ne-li nemožné.

Posledním typem konvergence je konvergence globální. Věty zajišťující globální konvergenci k řešení ξ nepředpokládají znalost ani existenci řešení ξ a ani nepředpokládají splnění nějakých podmínek pro počáteční iteraci \mathbf{x}^0 . Stačí jen, aby iterační funkce splňovala určité podmínky na celém \mathbb{R}^n , a pak posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}$ konverguje k řešení ξ pro každou počáteční iteraci $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

Jedinou větou této kapitoly, která nám při splnění určitých podmínek zajišťuje globální konvergenci, je věta 3.2. Pokusme se tedy v následujícím příkladu ověřit splnění podmínek této věty pro systém tří nelineárních rovnic.

Příklad 3.7. Ověřte, zda systém rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + \sin x_3 &= 0 \\ 4 \cos x_1 - 9x_2 &= 0 \\ \sin(2x_2) + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

splňuje předpoklady věty 3.2 a případně najděte řešení tohoto systému.

Tento systém převedeme na systém $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Funkci $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ lze psát např. ve tvaru

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \\ g_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \sin x_3 \\ \frac{4}{9} \cos x_1 \\ -\frac{1}{5} \sin(2x_2) \end{bmatrix}.$$

Označme $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T$ a za normu zvolme $\|\cdot\|_\infty$. Nyní musíme ověřit splnění nerovnosti

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\|_\infty \leq \lambda \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty$$

pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, $0 < \lambda < 1$.

Můžeme psát

$$\begin{aligned} |g_1(\mathbf{x}) - g_1(\mathbf{y})| &= \left| -\frac{1}{3} \sin x_3 + \frac{1}{3} \sin y_3 \right| = \frac{1}{3} |\sin x_3 - \sin y_3| = \\ &= \frac{1}{3} \left| 2 \cos\left(\frac{x_3+y_3}{2}\right) \sin\left(\frac{x_3-y_3}{2}\right) \right| = \frac{2}{3} \left| \cos\left(\frac{x_3+y_3}{2}\right) \right| \left| \sin\left(\frac{x_3-y_3}{2}\right) \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{3} \left| \sin\left(\frac{x_3-y_3}{2}\right) \right| \leq \frac{2}{3} \left| \frac{x_3-y_3}{2} \right| = \frac{1}{3} |x_3 - y_3| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |g_2(\mathbf{x}) - g_2(\mathbf{y})| &= \left| \frac{4}{9} \cos x_1 - \frac{4}{9} \cos y_1 \right| = \frac{4}{9} |\cos x_1 - \cos y_1| = \\ &= \frac{4}{9} \left| -2 \sin\left(\frac{x_1+y_1}{2}\right) \sin\left(\frac{x_1-y_1}{2}\right) \right| = \frac{8}{9} \left| \sin\left(\frac{x_1+y_1}{2}\right) \right| \left| \sin\left(\frac{x_1-y_1}{2}\right) \right| \leq \\ &\leq \frac{8}{9} \left| \sin\left(\frac{x_1-y_1}{2}\right) \right| \leq \frac{8}{9} \left| \frac{x_1-y_1}{2} \right| = \frac{4}{9} |x_1 - y_1| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|g_3(\mathbf{x}) - g_3(\mathbf{y})| &= \left| -\frac{1}{5} \sin(2x_2) + \frac{1}{5} \sin(2y_2) \right| = \frac{1}{5} |\sin(2x_2) - \sin(2y_2)| = \\
&= \frac{1}{5} \left| 2 \cos\left(\frac{2x_2+2y_2}{2}\right) \sin\left(\frac{2x_2-2y_2}{2}\right) \right| = \\
&= \frac{2}{5} |\cos(x_2 + y_2)| |\sin(x_2 - y_2)| \leq \\
&\leq \frac{2}{5} |\sin(x_2 - y_2)| \leq \frac{2}{5} |x_2 - y_2|,
\end{aligned}$$

kde jsme užili nerovnosti $|\sin x| \leq |x|$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Nyní užitím předchozích nerovností můžeme psát

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\|_\infty &= \max\left\{ \frac{|\sin x_3 - \sin y_3|}{3}, \frac{4|\cos x_1 - \cos y_1|}{9}, \frac{|\sin x_2 - \sin y_2|}{5} \right\} \leq \\
&\leq \max\left\{ \frac{1}{3}|x_3 - y_3|, \frac{4}{9}|x_1 - y_1|, \frac{2}{5}|x_2 - y_2| \right\} \leq \\
&\leq \frac{4}{9} \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3|\} = \frac{4}{9} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty,
\end{aligned}$$

což platí pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Ukázali jsme tedy, že obrazení \mathbf{g} je kontrakce na \mathbb{R}^3 . Jsou tak splněny předpoklady věty 3.2 a proto posloupnost iterací $\{\mathbf{x}^k\}$ generovaná vztahem

$$\begin{aligned}
x_1^{k+1} &= -\frac{1}{3} \sin x_3^k \\
x_2^{k+1} &= \frac{4}{9} \cos x_1^k \\
x_3^{k+1} &= -\frac{1}{5} \sin(2x_2^k)
\end{aligned}$$

konverguje k řešení $\boldsymbol{\xi}$ tohoto systému pro každou počáteční aproximaci \mathbf{x}^0 a toto řešení je jediné.

Pro nalezení řešení tohoto systému nelineárních rovnic použijeme opět m-file 3.1 a pro různou volbu počátečních iterací $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ při přesnosti $e = 10^{-9}$ dostáváme v Matlabu příkazem `[xk, k, I]=iterace(F, x, x0)`, kde

$$\begin{aligned}
F &= [-(\sin(x(3)))/3, 4 * (\cos(x(1)))/9, -(sin(2 * x(2)))/5], \\
x &= \text{sym}('[x1, x2, x3]'), \\
x_0 &= [-9, 4, 11] \text{ nebo } x_0 = [17, 43, 29],
\end{aligned}$$

následující hodnoty:

$$xk = [0.051501434, 0.443855153, -0.155125710],$$

$$k = 11,$$

$$\text{pro } \mathbf{x}^0 = [-9, 4, 11],$$

$$xk = [0.051501434, 0.443855153, -0.155125710],$$

$$k = 11,$$

$$\text{pro } \mathbf{x}^0 = [17, 43, 29],$$

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	-9	4	11
1	0.3333300689	-0.4049467831	-0.1978716493
2	0.0655276523	0.4199813397	0.1448427569
3	-0.0481122783	0.4434905918	-0.1489236419
4	0.0494579248	0.4439301456	-0.1550336260
5	0.0514711074	0.4439009805	-0.1551446422
6	0.0515076686	0.4438558467	-0.1551372799
7	0.051505244	0.4438550103	-0.1551258853
8	0.0515014914	0.4438550658	-0.1551256742
9	0.0515014219	0.4438551517	-0.1551256882
10	0.0515014265	0.4438551533	-0.1551257098
11	0.0515014336	0.4438551532	-0.1551257102
12	0.0515014337	0.4438551530	-0.1551257102

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	17	43	29
1	0.2212112947	-0.1222948169	0.1846916894
2	-0.0612144917	0.4336143969	0.0484316386
3	-0.0161375690	0.4436119902	-0.1525078114
4	0.0506391038	0.4443865743	-0.1550642991
5	0.0514812091	0.4438747176	-0.1552597936
6	0.0515455910	0.4438556156	-0.1551306496
7	0.0515030604	0.4438541423	-0.155125827
8	0.0515014722	0.4438551158	-0.155125455
9	0.0515013497	0.4438551521	-0.1551257008
10	0.0515014306	0.4438551549	-0.15512571
11	0.0515014337	0.4438551531	-0.1551257107
12	0.0515014339	0.4438551530	-0.1551257102

Pro obě počáteční iterace tedy dostáváme při přesnosti $e = 10^{-9}$ stejné řešení $xk = [0.051501434, 0.443855153, -0.155125710]$ po jedenácti iteracích. ♣

4 Newtonova metoda

Nyní se budeme zabývat případem, kdy funkce \mathbf{g} má jeden konkrétní tvar. Podíváme se na to, kdy má původní systém

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}, \quad (4.1)$$

a nový systém

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (4.2)$$

stejnou množinu řešení a aplikujeme zde některé poznatky, které byly uvedeny pro iterační metody obecně.

Funkci \mathbf{g} budeme tedy psát ve tvaru

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x} - \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (4.3)$$

kde $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (a_{ij}(\mathbf{x}))_{i,j=1}^n$.

Rovnosti (4.1) a (4.2) budou mít stejnou množinu řešení, jestliže matice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ je regulární. V tom případě, jelikož $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x} - \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$, dostáváme $\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$, a tedy $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$.

Nejjednodušší volbou matice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ je

$$\mathbf{A}(x) \equiv \mathbf{A}, \quad (4.4)$$

kde $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ a \mathbf{A} je regulární.

Jestliže pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ označíme matici

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) \equiv \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n, \quad (4.5)$$

jejíž determinant je Jakobián funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, pak ze vztahů (4.3), (4.4) a (4.5) dostáváme

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) \equiv \left(\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n = \mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{J}(\mathbf{x}). \quad (4.6)$$

Podle věty 3.5 nebo její modifikace, kdy podmínka (3.5) je nahrazena podmínkou (3.7), posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}$ generovaná vztahem

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \mathbf{A}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$$

bude konvergovat ke kořenu $\boldsymbol{\xi}$ funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ pro $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ zvolené dostatečně blízko kořenu $\boldsymbol{\xi}$, jestliže jsou prvky matice (4.6) dostatečně malé. Tak je tomu například v případě, kdy $J(\boldsymbol{\xi})$ je regulární a A je přibližně rovna inverzní matici k matici $J(\boldsymbol{\xi})$, protože potom $AJ(\boldsymbol{\xi}) \approx I$ a tedy $G(\boldsymbol{\xi}) \approx O$, a proto také $G(\mathbf{x}) \equiv I - J^{-1}(\boldsymbol{\xi})J(\mathbf{x}) \approx O$ na nějakém okolí kořene $\boldsymbol{\xi}$.

Protože kořen $\boldsymbol{\xi}$ neznáme, můžeme konstantní matici $J^{-1}(\boldsymbol{\xi})$ nahradit maticí $J^{-1}(\mathbf{x})$ za předpokladu, že $|J(\mathbf{x})| \neq 0$ pro \mathbf{x} takové, že $\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\| \leq \rho$, kde $\rho \in \mathbb{R}^+$. Tím dostáváme **Newtonovu metodu**, která je tvaru

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - J^{-1}(\mathbf{x}^k)\mathbf{f}(\mathbf{x}^k). \quad (4.7)$$

Při používání předchozího postupu je potřeba v každém kroku vypočítat inverzní matici $J^{-1}(\mathbf{x}^k)$, což je časově i početně náročné. Místo toho ale můžeme řešit systém lineárních rovnic n -tého řádu. Úpravou vztahu (4.7) dostáváme

$$J(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^k), \quad (4.8)$$

což je už soustava lineárních rovnic, kterou řešíme pro vektor $(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k)$.

Algoritmus 4.1. Algoritmus pro řešení soustavy (4.8) vypadá takto:

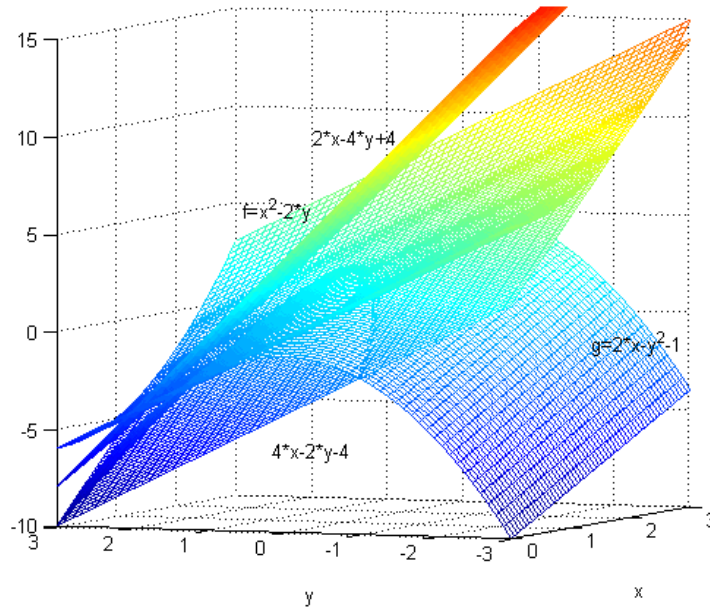
- zvolíme počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$
- pro $k = 0, 1, 2, \dots$
 - vypočítáme $J(\mathbf{x}^k), \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$
 - vyřešíme soustavu $J(\mathbf{x}^k)\mathbf{h} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$
 - položíme $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{h}$
- zastavovací kritérium: $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|_\infty < e$, kde e je chyba, s kterou počítáme

Nyní se podíváme na **geometrický význam Newtonovy metody**. Pro jednoduchost uvažujme systém dvou rovnic o dvou neznámých ve tvaru

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned}$$

a položme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix},$$



Obr. 10

$$J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{pmatrix}.$$

Systém (4.8) pak můžeme psát takto:

$$\begin{aligned} (x^{k+1} - x^k)f_x(x^k, y^k) + (y^{k+1} - y^k)f_y(x^k, y^k) + f(x^k, y^k) &= 0 \\ (x^{k+1} - x^k)g_x(x^k, y^k) + (y^{k+1} - y^k)g_y(x^k, y^k) + g(x^k, y^k) &= 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

V prostoru \mathbb{R}^3 rovnice

$$\begin{aligned} z &= (x - x^k)f_x(x^k, y^k) + (y - y^k)f_y(x^k, y^k) + f(x^k, y^k), \\ z &= (x - x^k)g_x(x^k, y^k) + (y - y^k)g_y(x^k, y^k) + g(x^k, y^k) \end{aligned} \quad (4.10)$$

reprezentují každá rovinu. Rovina daná první rovnicí je tečnou k ploše $z = f(x, y)$ v bodě $(x^k, y^k, f(x^k, y^k))$ a rovina daná druhou rovnicí je tečnou k ploše $z = g(x, y)$ v bodě $(x^k, y^k, g(x^k, y^k))$. Bod (x^{k+1}, y^{k+1}) určený ze soustavy (4.9) je průsečíkem těchto dvou rovin s rovinou $z = 0$.

Uvažujme například systém dvou rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned}x^2 - 2y &= 0 \\2x - y^2 - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Matice $J(\mathbf{x})$ má tvar

$$J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x & -2 \\ 2 & -2y \end{pmatrix}$$

a pokud zvolíme počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 = [2; 2]$, jsou rovnice (4.10) ve tvaru

$$\begin{aligned}z_1 &= (x - 2)4 + (y - 2)(-2) + 4 - 4 = 4x - 2y - 4 \\z_2 &= (x - 2)2 + (y - 2)(-4) + 4 - 4 - 1 = 2x - 4y + 3.\end{aligned}$$

Rovina z_1 je tečnou k ploše $f = x^2 - 2y$ v bodě $(2, 2, 0)$ a rovina z_2 je tečnou k ploše $g = 2x - y^2 - 1$ v bodě $(2, 2, -1)$ viz. obrázek 10. Bod $\mathbf{x}^1 = [\frac{11}{6}, \frac{5}{3}]$ je průsečíkem rovin z_1, z_2 a $z = 0$.

4.1 Konvergence Newtonovy metody

Podívejme se nyní na řád konvergence Newtonovy metody. K tomu, abychom ukázali, že tato metoda je druhého řádu, musíme ověřit, že funkce $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x} - J^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$ splňuje předpoklady věty 3.7. Musí být tedy splněna podmínka

$$G(\boldsymbol{\xi}) \equiv \left(\frac{\partial g_i(\boldsymbol{\xi})}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n = O.$$

Přítom j -tý sloupec matice $G(\mathbf{x})$ můžeme psát ve tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} [J^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})] = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_j} - J^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial x_j} - \frac{\partial J^{-1}(\mathbf{x})}{\partial x_j} \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Pokud nyní položíme $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ a protože platí $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{o}$ a $J = (\partial f_i / \partial x_j)$, dostáváme

$$G(\boldsymbol{\xi}) = I - J^{-1}(\boldsymbol{\xi})J(\boldsymbol{\xi}) - O = O,$$

což jsme chtěli ukázat. Nyní ale ještě musíme ověřit, zda existuje výraz $\partial J^{-1}(\mathbf{x}) / \partial x_j$. K tomu, abychom určili $\partial J^{-1}(\mathbf{x}) / \partial x_j$, si všimneme, že

$$0 = \frac{\partial I}{\partial x_j} = \frac{\partial(J^{-1}(\mathbf{x})J(\mathbf{x}))}{\partial x_j} = J^{-1}(\mathbf{x})\frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial J^{-1}(\mathbf{x})}{\partial x_j}J(\mathbf{x}), \quad (4.11)$$

a tedy

$$\frac{\partial J^{-1}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = -J^{-1}(\mathbf{x})\frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial x_j}J^{-1}(\mathbf{x}). \quad (4.12)$$

Výraz $\partial J^{-1}(\mathbf{x})/\partial x_j$ má tedy smysl, pokud existuje inverzní matice $J^{-1}(\mathbf{x})$ a výraz $\partial J(\mathbf{x})/\partial x_j$. Tudíž stačí pouze požadovat, aby $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ měla druhé parciální derivace a matice $J(\mathbf{x})$ byla regulární v bodě $\boldsymbol{\xi}$, a potom je řád konvergence Newtonovy metody dva.

Jestliže je počáteční iterace \mathbf{x}^0 zvolena dostatečně blízko kořene $\boldsymbol{\xi}$ funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, pak můžeme použít větu 3.5 k tomu, abychom ukázali, že posloupnost iterací $\{\mathbf{x}^k\}$ generovaná Newtonovou metodou bude konvergovat k hledanému kořenu $\boldsymbol{\xi}$. Jestliže je navíc matice $J(\mathbf{x})$ regulární a diferencovatelná v bodě $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$, pak je konvergence druhého řádu.

Nyní si uvedeme další větu, která nám při splnění určitých podmínek v okolí řešení $\boldsymbol{\xi}$ zajistí konvergenci posloupnosti $\{\mathbf{x}^k\}$ k řešení $\boldsymbol{\xi}$ pro počáteční aproximaci \mathbf{x}^0 zvolenou dostatečně blízko řešení $\boldsymbol{\xi}$.

Věta 4.1. *Nechť $\boldsymbol{\xi}$ je řešení systému $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$, $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$. Nechť Jakobián $J(\mathbf{x})$ funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ je regulární se spojitými prvky na nějakém okolí $U(\boldsymbol{\xi})$ bodu $\boldsymbol{\xi}$, přičemž pro každé $\mathbf{x} \in U(\boldsymbol{\xi})$ platí*

$$\|J^{-1}(\mathbf{x})\| \leq a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Nechť dále funkce $f_i, i = 1, 2, \dots, n$, mají spojitě druhé parciální derivace na okolí $U(\boldsymbol{\xi})$. Pak iterace generované Newtonovou metodou konvergují ke kořenu $\boldsymbol{\xi}$ funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ za předpokladu, že počáteční aproximace \mathbf{x}^0 je zvolena dostatečně blízko kořene $\boldsymbol{\xi}$.

Důkaz: Důkaz provedeme tak, že ukážeme existenci okolí $U_\delta(\boldsymbol{\xi}) \subseteq U(\boldsymbol{\xi}) = \{\mathbf{x}; \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\| < \delta_1\}$, na kterém iterační funkce $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - J^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$ splňuje před-

poklady věty 3.4. Z předpokladů plyne $|\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})| \neq 0$ na $U(\boldsymbol{\xi})$, tedy také $|\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x})| \neq 0$ na $U(\boldsymbol{\xi})$, a funkce \mathbf{g} je spojitá na $U(\boldsymbol{\xi})$. Dále platí

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_j} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x})}{\partial x_j} \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (4.13)$$

Musíme však ověřit, že výraz $\partial \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x})/\partial x_j$ existuje pro každé $\mathbf{x} \in U(\boldsymbol{\xi})$. Jelikož podle (4.11) a (4.12) platí

$$\frac{\partial \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = -\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{x})}{\partial x_j} \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}),$$

a protože podle předpokladů má $f_i, i = 1, 2, \dots, n$, spojitě druhé derivace a $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ je regulární se spojitými prvky na $U(\boldsymbol{\xi})$, dostáváme, že výraz $\partial \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x})/\partial x_j$ existuje.

Pro $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ tedy z rovnosti (4.13) dostáváme

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{I} - \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{O}.$$

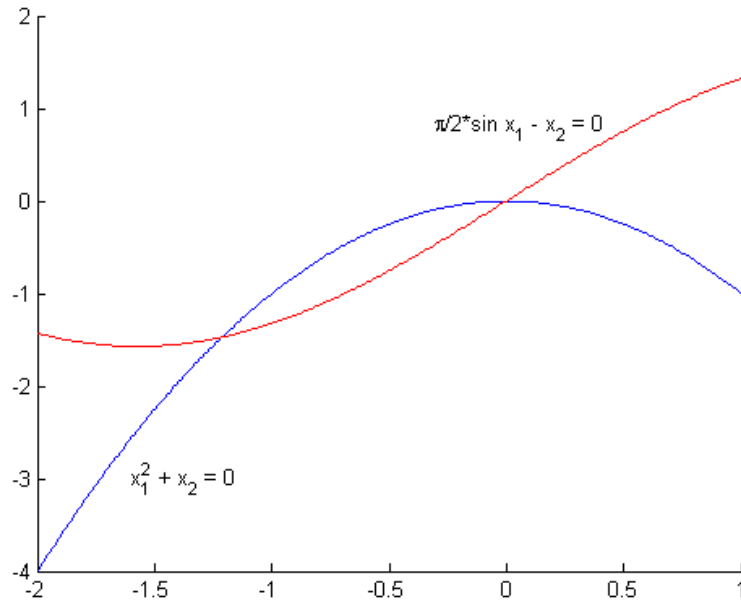
Proto tedy existuje $q \in \mathbb{R}^+, \delta \in \mathbb{R}, 0 < \delta < \delta_1$, takové, že $\|\mathbf{G}(\mathbf{x})\| \leq q < 1$ pro každé $\mathbf{x} \in U_\delta(\boldsymbol{\xi}) = \{\mathbf{x}; \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\| < \delta\}$. To znamená, že $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ jsou dostatečně blízko nule pro každé \mathbf{x} z okolí $U_\delta(\boldsymbol{\xi})$. (Pokud například za normu $\|\cdot\|$ zvolíme řádkovou normu $\|\cdot\|_\infty$, stačí, aby $\left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right| \leq \frac{q}{n}$ pro každé $\mathbf{x} \in U_\delta(\boldsymbol{\xi})$, kde $q < 1, i, j = 1, 2, \dots, n$. Pak totiž $\|\mathbf{G}(\mathbf{x})\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right| \leq n \frac{q}{n} = q < 1$.)

Z toho užitím věty 3.6 plyne, že zobrazení \mathbf{g} je kontrakce na \mathbb{R}^n , a jsou tedy splněny předpoklady věty 3.4. Iterace generované Newtonovou metodou tedy konvergují ke kořenu $\boldsymbol{\xi}$ funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ pro libovolnou počáteční aproximaci z $U_\delta(\boldsymbol{\xi})$. \square

Příklad 4.1. Řešte systém rovnic

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2 &= 0 \\ \frac{\pi}{2} \sin(x_1) - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

za použití věty 4.1.



Obr. 11

Uvažujme maximální normu $\|\cdot\|_\infty$ a označme

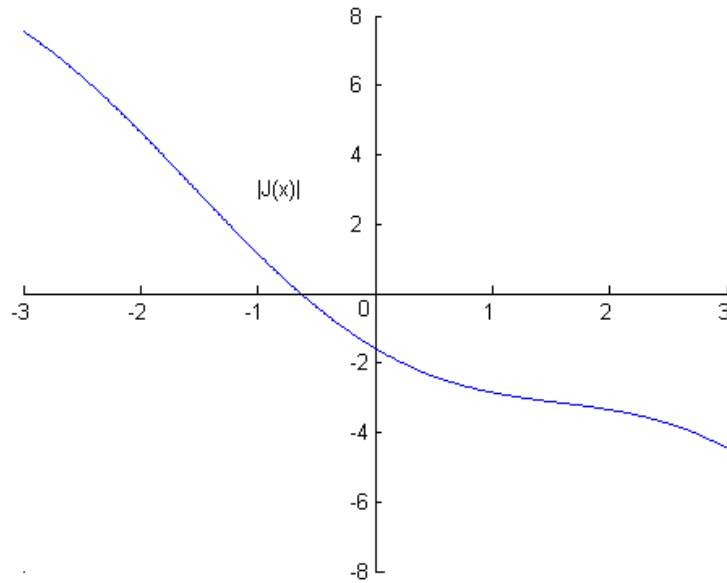
$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &\equiv x_1^2 + x_2 \\ f_2(\mathbf{x}) &\equiv \frac{\pi}{2} \sin(x_1) - x_2. \end{aligned}$$

Z grafu funkcí $f_1(\mathbf{x})$ a $f_2(\mathbf{x})$ viz. obr. 11 vidíme, že tato soustava má 2 řešení $\xi_1 = (\xi_{11}, \xi_{12})$, $\xi_2 = (\xi_{21}, \xi_{22})$, kde ξ_1 leží v okolí bodu $[0, 0]$ a ξ_2 leží v okolí bodu $[-1.2, -1.5]$.

Nejprve se zaměříme na nalezení řešení ξ_1 v okolí bodu $[0, 0]$. Pokud bychom dosadili bod $[0, 0]$ do rovnic, zjistíme, že přímo tento bod je řešením. V rámci procvičení ale ověříme předpoklady věty 4.1 i pro tento bod.

Nejdříve musíme ověřit, zda je matice $J(\mathbf{x})$ regulární se spojitými prvky na nějakém okolí hledaného řešení ξ_1 . Parciálním derivováním funkcí f_1 a f_2 dostáváme matici $J(\mathbf{x})$ ve tvaru

$$J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 1 \\ \frac{\pi}{2} \cos x_1 & -1 \end{pmatrix}.$$



Obr. 12

Matice má všechny prvky spojité. Body, ve kterých není matice $J(\mathbf{x})$ regulární, určíme z grafu jejího determinantu (obr.12), který má tvar $|J(\mathbf{x})| = -2x_1 - \frac{\pi}{2} \cos x_1$.

Vidíme, že matice $J(\mathbf{x})$ není regulární na okolí bodu $x_1 = -0.6$. Nyní tedy zvolíme vhodně okolí $U(\boldsymbol{\xi}_1) = \{\mathbf{x}; \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_1\|_\infty \leq r\}$ tak, aby body, jejichž první souřadnice leží v okolí bodu -0.6 , v tomto okolí neležely, viz. obr. 13.

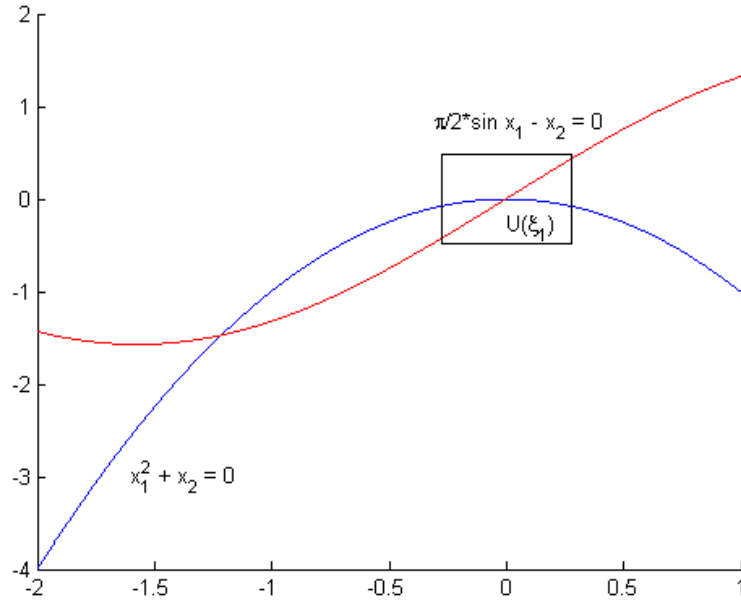
Musí tedy platit

$$\max\{|x_1 - \xi_{11}|, |x_2 - \xi_{12}|\} < r \quad \text{pro každé } \mathbf{x} = (x_1, x_2) \text{ z } U(\boldsymbol{\xi}_1).$$

To je splněno například pro $r = 0.5$, tj. uvažujme $U(\boldsymbol{\xi}_1) = \{\mathbf{x}; \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_1\|_\infty \leq 0.5\}$.

Nyní musíme ověřit, zda existuje nějaké $a \in \mathbb{R}$ takové, že $\|J^{-1}(\mathbf{x})\|_\infty \leq a$ pro každé $\mathbf{x} \in U(\boldsymbol{\xi}_1)$. Ručním výpočtem dostáváme

$$J^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{4x_1 + \pi \cos x_1} & \frac{2}{4x_1 + \pi \cos x_1} \\ \frac{\pi \cos x_1}{4x_1 + \pi \cos x_1} & \frac{-4x_1}{4x_1 + \pi \cos x_1} \end{pmatrix}$$



Obr. 13

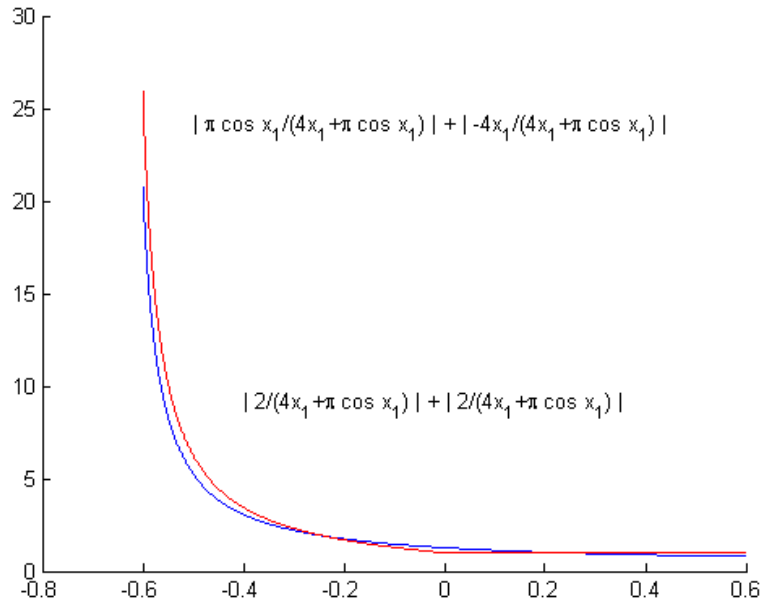
a tedy

$$\|J^{-1}(\mathbf{x})\|_{\infty} = \left| \frac{1}{4x_1 + \pi \cos x_1} \right| \max\{|2| + |2|, |\pi \cos x_1| + |-4x_1|\}.$$

Z grafu funkcí $\left| \frac{2}{4x_1 + \pi \cos x_1} \right| + \left| \frac{2}{4x_1 + \pi \cos x_1} \right|$ a $\left| \frac{\pi \cos x_1}{4x_1 + \pi \cos x_1} \right| + \left| \frac{-4x_1}{4x_1 + \pi \cos x_1} \right|$, viz. obr. 14, pak dostáváme, že $\|J^{-1}(\mathbf{x})\|_{\infty} \leq 10$ na $U(\xi_1)$.

Dále funkce f_1 a f_2 mají spojité druhé parciální derivace a tedy jsou splněny všechny předpoklady věty 4.1. Iterace generované Newtonovou metodou tedy konvergují ke kořenu ξ_1 , pokud počáteční aproximaci zvolíme v okolí $U(\xi_1)$. Newtonova metoda pro tento systém rovnic má tvar

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= x_1^k - \frac{2((x_1^k)^2 + x_2^k)}{4x_1^k + \pi \cos x_1^k} - \frac{2(\frac{\pi}{2} \sin x_1^k - x_2^k)}{4x_1^k + \pi \cos x_1^k} \\ x_2^{k+1} &= x_2^k - \frac{(\pi \cos x_1^k)((x_1^k)^2 + x_2^k)}{4x_1^k + \pi \cos x_1^k} + \frac{4x_1^k(\frac{\pi}{2} \sin x_1^k - x_2^k)}{4x_1^k + \pi \cos x_1^k}. \end{aligned} \quad (4.14)$$



Obr. 14

Jelikož v Matlabu neexistuje žádný příkaz pro nalezení řešení systému nelineárních rovnic Newtonovou metodou, vytvořila jsem vlastní m-file (viz. m-file 4.1), který je uveden hned za tímto příkladem. Vstupy u tohoto m-filu jsou počáteční iterace \mathbf{x}^0 , vektor symbolických proměnných, vektor funkcí $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ze systému (4.1) a přesnost e , se kterou chceme počítat. Přesnost e není nutné udávat. Pokud ji neuvedeme, je v m-filu automaticky nastavena na hodnotu 10^{-9} . Jako zastavovací kritérium při výpočtu řešení systému použijeme maximální normu a výpočet zastavíme pokud $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k - x_i^{k-1}| \leq e$. Výstupy u tohoto m-filu jsou odhad řešení x_k , počet iterací k a případně také posloupnost iterací I . Protože posloupnost iterací generovaná Newtonovou iterační metodou může mít i tisíce členů a nebo nemusí vůbec konvergovat, je v m-filu uvedeno další zastavovací kritérium: výpočet je zastaven, pokud počet iterací dosáhne 1000. Posloupnost iterací I je pak lepší žádat na výstupu jen pro menší k .

Za použití tohoto m-filu pak pro různé počáteční iterace při přesnosti $e = 10^{-9}$ příkazem `[xk, k, I]=newton(F, x, x0)`, kde

$$F = [x(1)^2 + x(2), \pi/\sin(x(1)) - x(2)],$$

$$x = \text{sym}'([x1, x2]'),$$

$$x_0 = [-0.4, 0.3] \text{ nebo } x_0 = [0.4, -0.2],$$

dostáváme následující hodnoty:

$$x_k = [0, 0],$$

$$k = 5 \quad \text{pro } \mathbf{x}^0 = [-0.4, 0.3],$$

$$x_k = [0, 0],$$

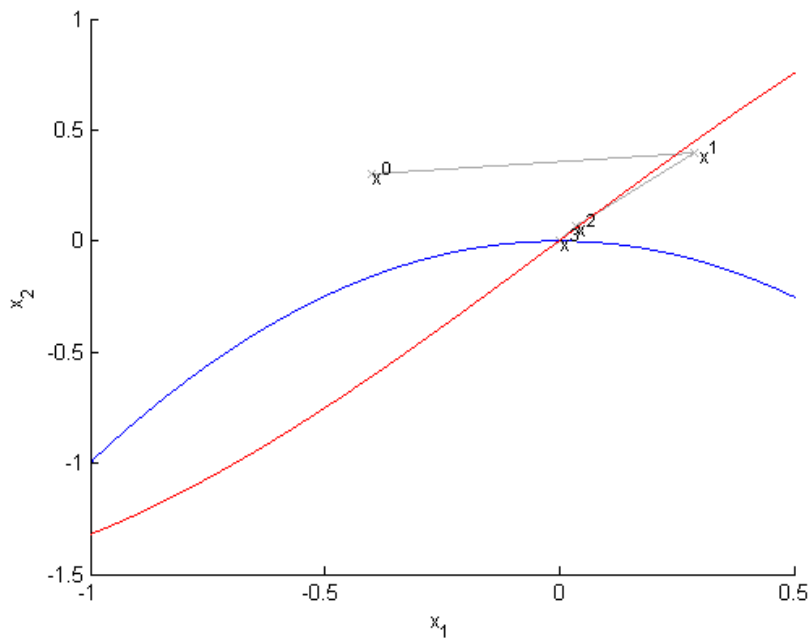
$$k = 4 \quad \text{pro } \mathbf{x}^0 = [0.4, -0.2],$$

	x_1^k	x_2^k		x_1^k	x_2^k
0	-0.4	0.3	0	0.4	-0.2
1	0.298357208	0.3986857664	1	0.0565349976	0.114772002
2	0.0358580260	0.0676200225	2	0.0018447146	0.0029876241
3	0.0007686007	0.0012306770	3	0.0000021592	0.0000033950
4	0.0000003756	0.0000005902	4	0.0000000000	0.0000000000
5	0,0000000000	0,0000000000	5	0.0000000000	0.0000000000
6	0,0000000000	0,0000000000			

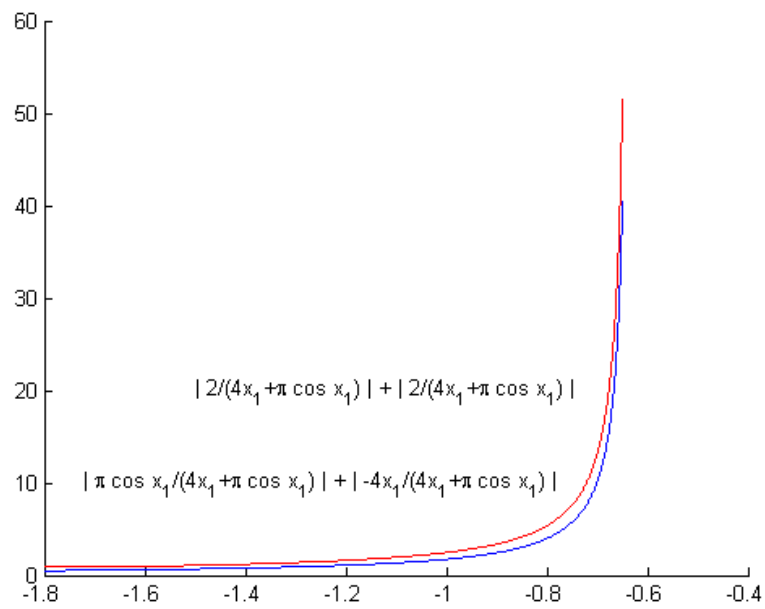
Tedy řešení $\xi_1 = [0, 0]$ dostáváme při přesnosti $e = 10^{-9}$ pro počáteční iteraci $\mathbf{x}^0 = [-0.4, 0.3]$ po pěti iteracích a pro počáteční iteraci $\mathbf{x}^0 = [0.4, -0.2]$ po čtyřech iteracích. Několik prvních iterací pro počáteční iteraci $\mathbf{x}^0 = [-0.4, 0.3]$ je zakresleno na obrázku 15.

Nyní se podívejme na nalezení řešení ξ_2 v okolí bodu $[-1.2, -1.5]$. Protože funkce f_1 a f_2 jsou spojité a matice $J(\mathbf{x})$ má spojité prvky, stačí nalézt nějaké okolí $U(\xi_2)$, na němž bude matice $J(\mathbf{x})$ regulární, a konstantu a takovou, že $\|J^{-1}(\mathbf{x})\|_\infty \leq a$ bude platit pro každé $\mathbf{x} \in U(\xi_2)$.

Okolí můžeme zvolit například takto $U(\xi_2) = \{\mathbf{x}; \|\mathbf{x} - \xi_2\|_\infty < 0.4\}$ a z grafu funkcí $\left| \frac{2}{4x_1 + \pi \cos x_1} \right| + \left| \frac{2}{4x_1 + \pi \cos x_1} \right|$ a $\left| \frac{\pi \cos x_1}{4x_1 + \pi \cos x_1} \right| + \left| \frac{-4x_1}{4x_1 + \pi \cos x_1} \right|$, viz. obr. 16, vidíme, že platí $\|J^{-1}(\mathbf{x})\|_\infty \leq 20$ pro každé $\mathbf{x} \in U(\xi_2)$.



Obr. 15



Obr. 16

Opět jsou tedy splněny předpoklady věty 4.1. Podobně tedy užitím m-filu 4.1 při přesnosti $e = 10^{-9}$ příkazem `[xk, k, I]=newton(F, x, x0)` pro různé počáteční iterace \mathbf{x}^0 , kde

$$F = [x(1)^2 + x(2), \pi/\sin(x(1)) - x(2)],$$

$$x = \text{sym}('[x1, x2]'),$$

$$x0 = [-1.5, -1.8] \text{ nebo } x0 = [-0.8, -1.2],$$

dostáváme

$$xk = [-1.212973413, -1.471304501],$$

$$k = 4 \quad \text{pro } \mathbf{x}^0 = [-1.5, -1.8],$$

$$xk = [-1.212973413, -1.471304501],$$

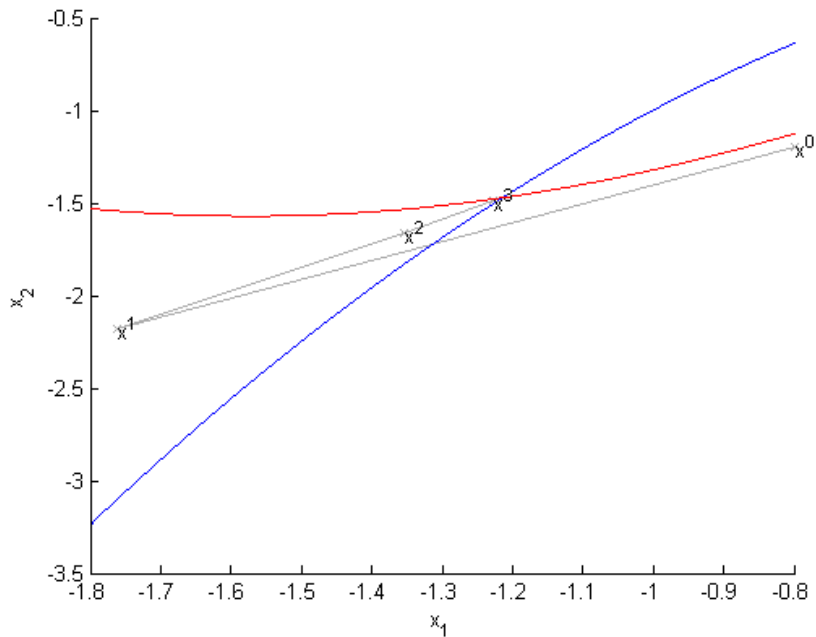
$$k = 6 \quad \text{pro } \mathbf{x}^0 = [-0.8, -1.2],$$

k	x_1^k	x_2^k	k	x_1^k	x_2^k
0	-1.5	-1.8	0	-0.8	-1.2
1	-1.2635287523	-1.5405862570	1	-1.7628268098	-2.1805228944
2	-1.2151462321	-1.4742394971	2	-1.3535579038	-1.6646179623
3	-1.2129777651	-1.4713103564	3	-1.2276406588	-1.4912464344
4	-1.2129734132	-1.4713045011	4	-1.2131674984	-1.4715659068
5	-1.2129734132	-1.4713045011	5	-1.2129734480	-1.471304548
			6	-1.2129734132	-1.4713045011
			7	-1.2129734132	-1.4713045011

Tedy řešení $\boldsymbol{\xi}_2 = [-1.212973413, -1.471304501]$ dostáváme při přesnosti $e = 10^{-9}$ pro počáteční iteraci $\mathbf{x}^0 = [-1.5, -1.8]$ po čtyřech iteracích a pro počáteční iteraci $\mathbf{x}^0 = [-0.8, -1.2]$ po šesti iteracích. Několik prvních iterací pro počáteční iteraci $\mathbf{x}^0 = [-0.8, -1.2]$ je zakresleno na obrázku 17.



M-file 4.1. `function[xk,k,I]=newton(F,x,x0,e)`
`%newtonova metoda pro řešení systémů nelineárních rovnic`



Obr. 17

```

%vstupní data:      x  symbolický vektor
%                   F  řádkový vektor symbolických funkcí
%                   x0 počáteční iterace (řádkový vektor)
%                   e  přesnost, se kterou chceme počítat
%                   %(není nutné ji udávat)

%výstupní data:    k  počet iterací
%                   xk odhad řešení systému
%                   I  posloupnost iterací

%vstupní argumenty mohou vypadat například takto:
%   x = sym(' [x1,x2] ');
%   F=[x(1)^2+x(2),pi/2*sin(x(1))-x(2)];
%   x0=[-0.4,0.3];

%ověření vstupních dat
if(nargin<4)%pokud uživatel nezadá přesnost, nastavíme ji na

```

```

                %9 desetinných míst
                e=1e-9;
end
if(nargin<3)
    error('Neodpovídá počet vstupních dat')
end
if(length(x)~=length(x0))
    error('Vektory x a x0 nemají stejnou velikost')
end
if(e<=0)
    error('přesnost e není kladné číslo')
end
if(length(F)~=length(x0))
    error('Vektory F a x0 nemají stejnou velikost')
end
%odhad řešení systému
n=length(F);
v=ones(1,n);
X(1,:)=v+x0;
X(2,:)=x0;
for i=1:n %výpočet Jakobiovy matice
    for j=1:n
        J(i,j)=diff(F(i),x(j));
    end
end
K=inv(J);% inverzní matice k Jakobiově matici
L=K.'; %transponovaná matice
for j=1:n
    E(j)=abs(X(2,j)-X(1,j));
end

```

```

k=0;
i=2;
while max(E)>e && k<1000%zastavovací kritérium: max(E) je
    %maximální norma vektoru xk-x(k-1)
    A=double(subs(L,x,X(i,:)));
    B=double(subs(F,x,X(i,:)));
    X(i+1,:)=X(i,:)-B*A;%výpočet (k+1)-iterace newtonovou metodou
    for j=1:n
        E(j)=abs(X(i+1,j)-X(i,j));%zastavovací kritérium:maximální
        %norma vektoru xk-x(k-1)
    end
    i=i+1;
    k=k+1;
end
X(1,:)=[];
xk=X(i-1,:);
if k==1000
    disp('Posloupnost iterací k řešení systému nekonverguje
        a nebo konverguje a má více jak 1000 členů.')
```

△

Obecně nevíme, zda je počáteční iterace \mathbf{x}^0 dostatečně blízko hledaného řešení ξ . Měli bychom tedy najít takové postačující podmínky, které lze ověřit bez znalosti kořene ξ a za kterých bude posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}$ generovaná Newtonovou metodou konvergovat.

Věta 4.2. *Nechť jsou dány konstanty $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, že platí*

$$abc \leq \frac{1}{2}.$$

Nechť je dána počáteční iterace \mathbf{x}^0 taková, že Jakobiho matice $J(\mathbf{x}^0)$ definovaná předpisem (4.5) má inverzní matici, pro kterou platí

$$\|J^{-1}(\mathbf{x}^0)\| \leq a. \quad (4.15)$$

Nechť dále

$$\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\| = \|J^{-1}(\mathbf{x}^0)\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)\| \leq b \quad (4.16)$$

a nechť složky vektoru $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ mají spojité druhé parciální derivace, pro které platí

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_k} \right| \leq \frac{c}{n} \quad (4.17)$$

pro všechna \mathbf{x} taková, že $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| \leq 2b$; $i, j = 1, 2, \dots, n$. Pak

(i) pro iterace \mathbf{x}^k generované Newtonovou metodou (4.7) platí

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0\| \leq 2b,$$

(ii) posloupnost iterací $\{\mathbf{x}^k\}$ konverguje ke kořenu $\boldsymbol{\xi}$ funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, tj. $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{o}$, a platí

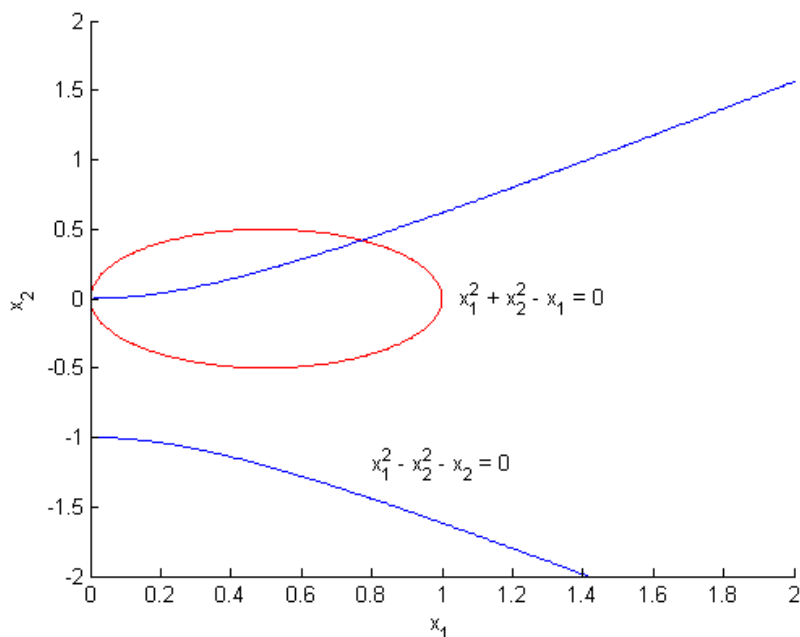
$$\|\mathbf{x}^k - \boldsymbol{\xi}\| \leq \frac{2b}{2^k} \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N}.$$

Důkaz: Viz. [2], strana 116.

Příklad 4.2. Ověřte, zda systém rovnic

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - x_1 &= 0 \\ x_1^2 - x_2^2 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

splňuje předpoklady věty 4.2 a případně najděte řešení tohoto systému.



Obr. 18

Za normu $\|\cdot\|$ si zvolíme maximální normu $\|\cdot\|_\infty$ a označíme

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 - x_1, \\ f_2(\mathbf{x}) &= x_1^2 - x_2^2 - x_2. \end{aligned}$$

Z grafu těchto funkcí na obr. 18 vidíme, že jedno řešení se nachází v bodě $[0, 0]$ a druhé v okolí bodu $[0.8, 0.5]$. My se zaměříme na řešení $\boldsymbol{\xi}$ v okolí bodu $[0.8, 0.5]$,

Zvolme tedy za počáteční aproximaci bod $\mathbf{x}^0 = [0.8, 0.5]$ a podívejme se na konstanty a, b, c . Jakobiovu matici můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

a matice k ní inverzní potom vypadá takto:

$$\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{2x_2+1}{8x_1x_2+2x_1-2x_2-1} & \frac{2x_2}{8x_1x_2+2x_1-2x_2-1} \\ \frac{2x_1}{8x_1x_2+2x_1-2x_2-1} & \frac{-2x_1+1}{8x_1x_2+2x_1-2x_2-1} \end{pmatrix}.$$

Pokud do matice $J^{-1}(\mathbf{x})$ dosadíme bod \mathbf{x}^0 , dostáváme

$$J^{-1}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{10}{14} & \frac{5}{14} \\ \frac{8}{14} & \frac{-3}{14} \end{pmatrix}$$

a tedy $\|J^{-1}(\mathbf{x}^0)\|_{\infty} \leq \frac{15}{14} = a$.

Nyní vypočítáme první iteraci \mathbf{x}^1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1 &= \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{5}{14} \\ \frac{4}{7} & -\frac{3}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8^2 + 0.5^2 - 0.8 \\ 0.8^2 - 0.5^2 - 0.5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{5}{14} \\ \frac{4}{7} & -\frac{3}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{100} \\ -\frac{11}{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 - \frac{5}{7} \frac{9}{100} + \frac{5}{14} \frac{11}{100} \\ 0.5 - \frac{4}{7} \frac{9}{100} - \frac{3}{14} \frac{11}{100} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0.755000 \\ 0.425000 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a tedy platí

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|_{\infty} &= \max\{|0.755 - 0.8|, |0.425 - 0.5|\} = \\ &= \max\{|0.045|, |0.075|\} \leq 0.08 = b. \end{aligned}$$

Nyní se podívejme na druhé parciální derivace funkcí f_1 a f_2 . Platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_1} &= 2 & \frac{\partial^2 f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0 = \frac{\partial^2 f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_2} &= 2 \\ \frac{\partial^2 f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_1} &= 2 & \frac{\partial^2 f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0 = \frac{\partial^2 f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_2} &= -2 \end{aligned}$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^2 \left| \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_k} \right| \leq 2 = \frac{4}{2}, \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \text{ taková, že } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_{\infty} \leq 0.16, i, j = 1, 2,$$

z čehož dostáváme $c = 4$.

Dále platí

$$abc = 4 \frac{15}{14} 0.08 = \frac{12}{35} < \frac{1}{2}.$$

Jsou tedy splněny všechny předpoklady věty 4.2 a tedy posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k hledanému řešení $\boldsymbol{\xi}$ systému.

Pro nalezení řešení tohoto systému nelineárních rovnic použijeme opět m-file 4.1. Pokud za počáteční aproximaci zvolíme například $\mathbf{x}^0 = [0.8, 0.5]$, pak pro přesnost $e = 10^{-9}$ v Matlabu příkazem `[xk, k, I]=newton(F, x, x0)`, kde

$$F = [x(1)^2 + x(2)^2 - x(1), x(1)^2 - x(2)^2 - x(2)],$$

$$x = \text{sym}('[x1, x2]'),$$

$$x0 = [0.8, 0.5],$$

dostáváme

$$xk = [0.771844506, 0.419643378],$$

$$k = 4$$

	x_1^k	x_2^k
0	0.8	0.5
1	0.7750000000	0.4250000000
2	0.7718683084	0.4196734475
3	0.7718445074	0.4196433787
4	0.7718445063	0.4196433776
5	0.7718445063	0.4196433776

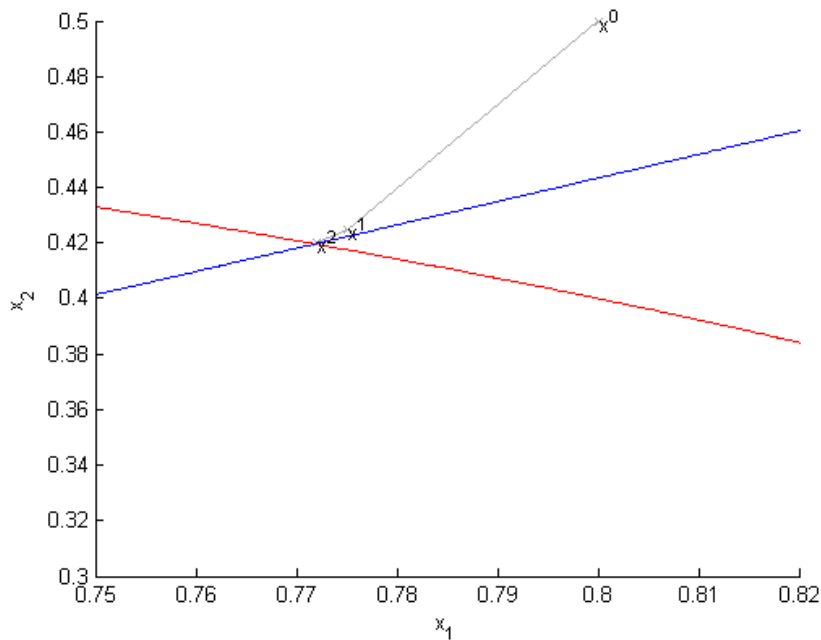
Tedy řešení $\boldsymbol{\xi} = [0.771844506, 0.419643378]$ dostáváme při přesnosti $e = 10^{-9}$ po čtyřech iteracích. Několik prvních iterací je zakresleno na obrázku 19.

Nyní se podívejme na případ, kdy vezmeme za počáteční iteraci horší odhad $\mathbf{x}^0 = [1, 1]$.

Pokud dosadíme bod $\mathbf{x}^0 = [1, 1]$ do matice $J^{-1}(\mathbf{x})$, dostáváme

$$J^{-1}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

a tedy $\|J^{-1}(\mathbf{x}^0)\|_{\infty} \leq \frac{5}{7} = a$.



Obr. 19

Nyní vypočítáme první iteraci \mathbf{x}^1

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^2 + 1^2 - 1 \\ 1^2 - 1^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix}$$

a tedy platí

$$\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|_\infty = \max\{|\frac{8}{7} - 1|, |\frac{10}{7} - 1|\} = \frac{3}{7} = b.$$

Podobně jako v předchozím případě pro druhé parciální derivace funkcí f_1 a f_2 platí

$$\sum_{k=1}^2 \left| \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_k} \right| \leq 2 = \frac{4}{2} \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \text{ taková, že } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty \leq \frac{6}{7}, i, j = 1, 2,$$

z čehož dostáváme $c = 4$.

Dále platí

$$abc = \frac{5}{7} \frac{3}{7} 4 = \frac{60}{49} > 1.$$

a tedy není splněna podmínka $abc < \frac{1}{2}$. Pro počáteční iteraci $\mathbf{x}^0 = [1, 1]$ tedy nejsou splněny předpoklady věty 4.2 a proto posloupnost $\{\mathbf{x}^k\}$ nemusí pro tuto počáteční iteraci konvergovat k řešení ξ systému. ♣

5 Urychlovací metody

Při řešení systému

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (5.1)$$

nemusí pro libovolně zvolenou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ posloupnost generovaná iteračním procesem

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^k), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.2)$$

konvergovat k hledanému řešení. Podobně jako u soustav lineárních rovnic ale můžeme obměnit postup (5.2) způsobem, který obecně zlepšuje řád konvergence nebo zajistí konvergenci u schémat, která za normálních okolností nekonvergují.

Urychlovací postup je definován takto

$$\mathbf{x}^0 \text{ libovolné}, \quad \mathbf{x}^{k+1} = \Theta \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) + (\mathbf{I} - \Theta) \mathbf{x}^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5.3)$$

kde Θ je diagonální matice daná předpisem

$$\Theta \equiv \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n), \quad |\Theta| = \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n \neq 0,$$

a i -tá složka $(k+1)$ -ní iterace v urychlovacím postupu (5.3) je tvaru

$$x_i^{k+1} = \theta_i g_i(\mathbf{x}^k) + (1 - \theta_i) x_i^k, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (5.4)$$

V případě $\Theta = I$ dostáváme původní schéma (5.2).

Předpokládejme, že systém (5.1) má řešení $\boldsymbol{\xi}$ a že v nějakém okolí $U(\boldsymbol{\xi}) = \{\mathbf{x}; \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\| \leq \rho\}$ tohoto řešení má funkce \mathbf{g} spojité první parciální derivace $g_{ij}(\mathbf{x}) \equiv \partial g_i(\mathbf{x}) / \partial x_j$. Nyní ukážeme, že za splnění určitých podmínek bude proces daný předpisem (5.3) konvergovat k řešení systému (5.1) pro libovolný počáteční odhad \mathbf{x}^0 takový, že $\|\mathbf{x}^0 - \boldsymbol{\xi}\| \leq \rho$.

Jestliže chybu k -té iterace označíme $\mathbf{e}^k = \mathbf{x}^k - \boldsymbol{\xi}$, pak z předpisu (5.3) dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{k+1} &= \mathbf{x}^{k+1} - \boldsymbol{\xi} = \Theta \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) + (\mathbf{I} - \Theta) \mathbf{x}^k - \boldsymbol{\xi} = \\
&= \Theta \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) + (\mathbf{I} - \Theta)(\mathbf{e}^k + \boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\xi} = \\
&= \Theta[\mathbf{g}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})] + (\mathbf{I} - \Theta)\mathbf{e}^k + \mathbf{I}\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi} = \\
&= \Theta[\mathbf{g}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})] + (\mathbf{I} - \Theta)\mathbf{e}^k.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Uvažujme Taylorovy rozvoje funkcí $g_i, i = 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
g_1(\mathbf{x}^k) &= g_1(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_1(\boldsymbol{\alpha}^{(1,k)})}{\partial x_j} (x_j^k - \xi_j) \\
g_2(\mathbf{x}^k) &= g_2(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_2(\boldsymbol{\alpha}^{(2,k)})}{\partial x_j} (x_j^k - \xi_j) \\
&\vdots \\
g_n(\mathbf{x}^k) &= g_n(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_n(\boldsymbol{\alpha}^{(n,k)})}{\partial x_j} (x_j^k - \xi_j),
\end{aligned} \tag{5.6}$$

kde $\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)} = \mathbf{x}^k - \phi_i(\mathbf{x}^k - \boldsymbol{\xi})$, $\phi_i \in \mathbb{R}$, $0 < \phi_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Nyní označíme

$$\mathbf{G}_k(\boldsymbol{\alpha}^k) \equiv (g_{ij}(\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)}))_{i,j=1}^n = (\partial g_i(\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)}) / \partial x_j)_{i,j=1}^n,$$

tj. i -tý řádek matice $\mathbf{G}_k(\boldsymbol{\alpha}^k)$ je vyčíslen v bodě $\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)}$. Pak můžeme systém (5.6) psát ve tvaru

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{G}_k(\boldsymbol{\alpha}^k)(\mathbf{x}^k - \boldsymbol{\xi}),$$

což je Taylorův rozvoj funkce \mathbf{g} v bodě $\boldsymbol{\xi}$. Nyní užitím tohoto rozvoje v rovnosti (5.5) dostáváme

$$\mathbf{e}^{k+1} = \Theta \mathbf{G}_k(\boldsymbol{\alpha}^k)(\mathbf{x}^k - \boldsymbol{\xi}) + (\mathbf{I} - \Theta)\mathbf{e}^k = (\mathbf{I} - \Theta + \Theta \mathbf{G}_k(\boldsymbol{\alpha}^k))\mathbf{e}^k \equiv \mathbf{M}_k \mathbf{e}^k, \tag{5.7}$$

kde jsme označili $\mathbf{M}_k \equiv \mathbf{I} - \Theta + \Theta \mathbf{G}_k(\boldsymbol{\alpha}^k)$. Posloupnost iterací $\{\mathbf{x}^k\}$ generovaná vztahem (5.3) zřejmě bude konvergovat, jestliže pro matici \mathbf{M}_k bude platit $\|\mathbf{M}_k\|_\infty \leq q < 1$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \dots$, protože potom $\|\mathbf{x}^{k+1} - \boldsymbol{\xi}\|_\infty \leq q \|\mathbf{x}^k - \boldsymbol{\xi}\|_\infty$.

Nerovnost $\|\mathbf{M}_k\|_\infty \leq q < 1$ je zřejmě splněna, jestliže pro i -tý řádek $R_i(\theta_i)$ matice \mathbf{M}_k platí

$$R_i(\theta_i) \equiv |1 - \theta_i[1 - g_{ii}(\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)})]| + |\theta_i| \sum_{j \neq i} |g_{ij}(\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)})| \leq q < 1, \quad (5.8)$$

$$1 \leq i \leq n, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

protože potom

$$\|\mathbf{M}_k\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |1 - \theta_i[1 - g_{ii}(\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)})]| + |\theta_i| \sum_{j \neq i} |g_{ij}(\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)})| \leq q < 1.$$

Uvažujme tedy nerovnosti ve tvaru

$$R(\theta) \equiv |1 - \theta a| + |\theta|b < 1, \quad b \geq 0,$$

kde jsme označili $\theta \equiv \theta_i$, $a \equiv 1 - g_{ii}(\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)})$ a $b \equiv \sum_{j \neq i} |g_{ij}(\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)})|$. Úpravou dostáváme

$$|1 - \theta a| < 1 - |\theta|b,$$

a tedy

$$|\theta|b < \theta a < 2 - |\theta|b. \quad (5.9)$$

Z nerovnosti $\theta a > |\theta|b > 0$ dostaneme

$$a > \frac{|\theta|b}{\theta} = b \quad \text{pro } \theta > 0,$$

$$a < \frac{|\theta|b}{\theta} = -b \quad \text{pro } \theta < 0,$$

tedy $|a| > b$.

Z nerovnosti $0 < \theta a < 2 - |\theta|b$ dostaneme

$$a < \frac{2 - |\theta|b}{\theta} = \frac{2}{\theta} - b \quad \text{pro } \theta > 0,$$

$$a > \frac{2 - |\theta|b}{\theta} = \frac{2}{\theta} + b \quad \text{pro } \theta < 0$$

a tedy $|a| > b$.

Celkem tedy dostáváme $R(\theta) < 1$ pro $|a| > b$, tj. platí $R(\theta) < 1$ pokud je splněna nerovnost

$$|1 - g_{ij}(\mathbf{x})| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |g_{ij}(\mathbf{x})|, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (5.10)$$

Dále z nerovnosti (5.9) pro $a > b$ dostáváme

$$\theta b < \theta a < 2 - \theta b$$

$$\theta a + \theta b < 2 \text{ a } \theta > 0$$

$$0 < \theta < \frac{2}{a+b},$$

a pro $-a > b$ dostáváme

$$-\theta b < \theta a < 2 + \theta b$$

$$\theta a - \theta b < 2 \text{ a } \theta < 0$$

$$0 > \theta > \frac{2}{a-b}.$$

Tedy $R(\theta) < 1$ pro $|a| > b$ a θ leží v intervalu

$$0 < \theta < \frac{2}{a+b} \quad \text{pro } a > b, \quad (5.11)$$

$$\frac{2}{a-b} < \theta < 0 \quad \text{pro } -a > b. \quad (5.12)$$

Navíc v každém z těchto intervalů nabývá funkce $R(\theta)$ svého minima v bodě

$$\theta^* = \frac{1}{a} \quad \text{a platí } R^* = R(\theta^*) = \left| \frac{b}{a} \right|. \quad (5.13)$$

K tomuto závěru dojdeme, pokud budeme uvažovat grafy funkcí $|\theta|b$, $|1 - \theta a|$ jako funkcí proměnné θ pro různou volbu a, b , viz. obr. 5.

Celkem ze vztahů (5.8), (5.11) a (5.12) dostáváme, že posloupnost iterací $\{\mathbf{x}^k\}$ generovaná vztahem (5.3) konverguje, jestliže je splněna podmínka (5.10) a pro urychlující parametry θ_i platí

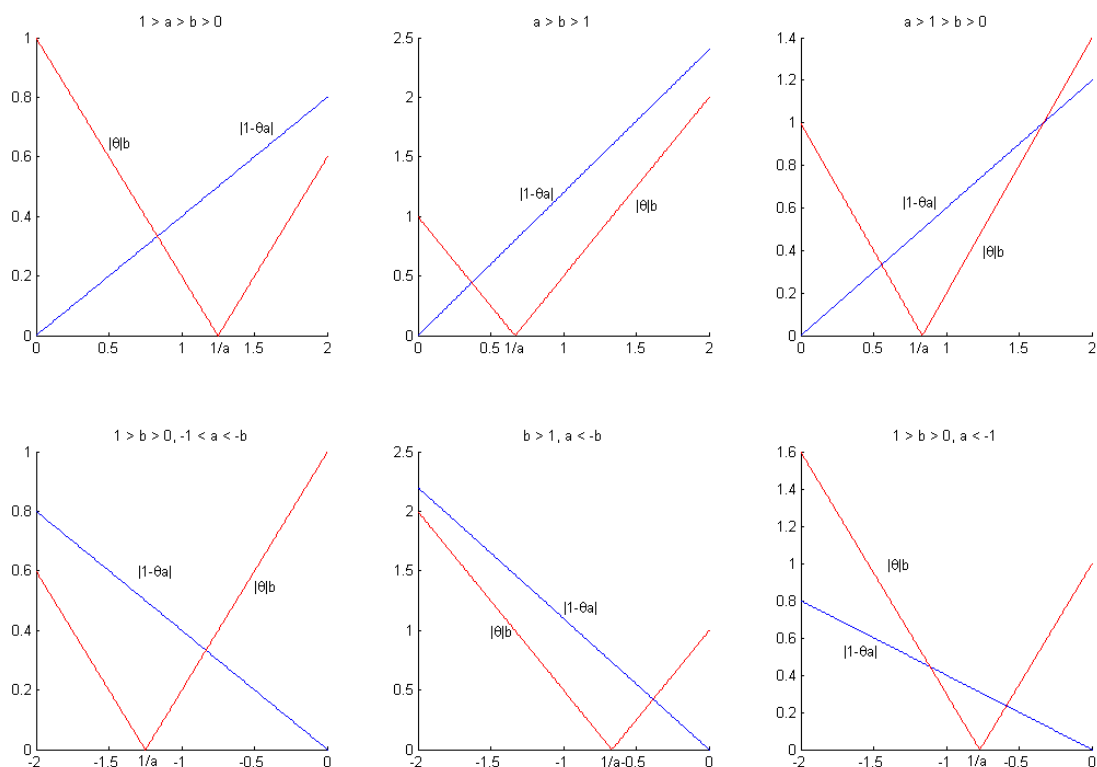
je-li $1 - g_{ii}(\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)}) > \sum_{j \neq i} |g_{ij}(\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)})|$, pak

$$0 < \theta_i < \frac{2}{1 - g_{ii}(\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)}) + \sum_{j \neq i} |g_{ij}(\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)})|},$$

je-li $1 - g_{ii}(\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)}) < -\sum_{j \neq i} |g_{ij}(\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)})|$, pak

$$\frac{2}{1 - g_{ii}(\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)}) - \sum_{j \neq i} |g_{ij}(\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)})|} < \theta_i < 0$$

kde $\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)}$ je takové, že $\|\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)} - \boldsymbol{\xi}\| \leq \rho$.



Z (5.13) navíc dostáváme, že

$$\theta_i^* = \frac{1}{1 - g_{ii}(\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)})}$$

je nejlepší hodnota pro θ_i . Protože ale tato hodnota závisí na $\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)}$, je nejlepší volbou θ_i^* takové, pro které platí

$$|\theta_i^*| = \min_{\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)}} \frac{1}{|1 - g_{ii}(\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)})|}, \quad \|\boldsymbol{\alpha}^{(i,k)} - \boldsymbol{\xi}\| \leq \rho. \quad (5.14)$$

Tato úvaha nabízí modifikaci schématu (5.3), ve které je aproximace nejlepšího θ_i použita v každém kroku iterace. Pokud je \mathbf{x}^k blízko řešení, mohou být ve schématu (5.3) konstanty θ_i^* nahrazeny hodnotami

$$\theta_i^k = \frac{1}{1 - g_{ii}(\mathbf{x}^k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.15)$$

K realizaci tohoto postupu potřebujeme pouze v každém kroku vyčíslit n partiálních derivací $g_{ii} = \partial g_i / \partial x_i$ k tomu, abychom určili vhodné θ_i^k . Pokud jsou tyto derivace složité nebo těžko vyjádřitelné, můžeme použít diferenční aproximace, které vyžadují pouze vyčíslení funkčních hodnot $g_i(\mathbf{x}^k)$. Protože $g_i(\mathbf{x}^k)$ známe, použijeme aproximaci

$$g_{ii}(\mathbf{x}^k) \approx \frac{g_i(x_i^k, \dots, x_{i-1}^k, x_i^k + h, x_{i+1}^k, \dots, x_n^k) - g_i(\mathbf{x}^k)}{h},$$

kde h je nějaká vhodná kladná hodnota.

Příklad 5.1. V příkladu 3.4 jsme systém nelineárních rovnic

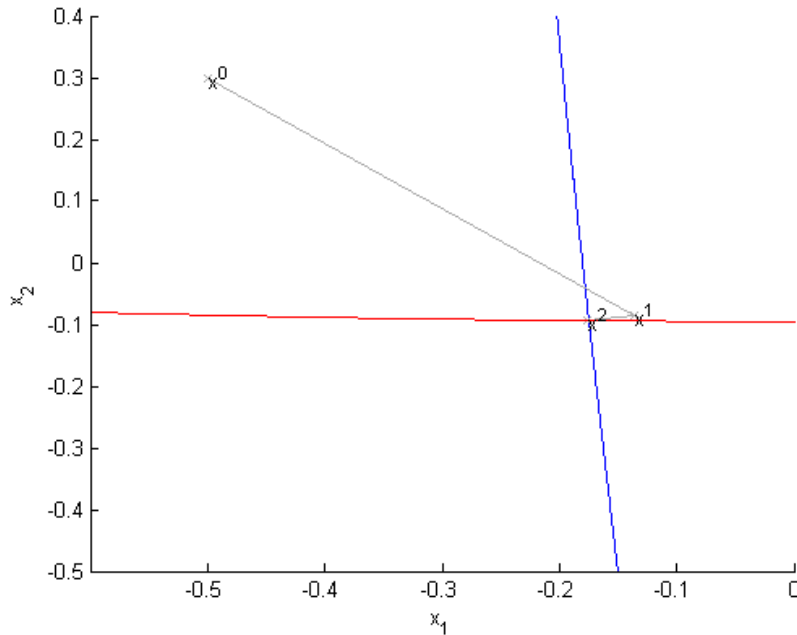
$$\begin{aligned} 5x_1 + \cos^2(3x_1 + \frac{x_2}{2}) + \frac{1}{6} &= 0 \\ \frac{\sin x_1^2}{8} - 3x_2 - \frac{2}{7} &= 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

přepsali na systém tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, kde

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{30} - \frac{\cos^2(3x_1 + x_2/2)}{5} \\ \frac{\sin x_1^2}{24} - \frac{2}{21} \end{bmatrix}.$$

Posloupnost generovaná iteračním procesem

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= -\frac{1}{30} - \frac{\cos^2(3x_1^k + x_2^k/2)}{5} \\ x_2^{k+1} &= \frac{\sin(x_1^k)^2}{24} - \frac{2}{21} \end{aligned}$$



Obr. 20

konvergovala k řešení systému (5.16) pomalu. Řešení jsme pro počáteční iterace $[-0.5, 0.3]$ a $[0.7, -0.4]$ dostali při zastavovacím kritériu $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\|_\infty \leq 10^{-9}$ až po 33 iteracích. Podívejme se, jak rychle bude konvergovat posloupnost generovaná urychlovacím iteračním procesem

$$x_1^{k+1} = \theta_1^k \left[-\frac{1}{30} - \frac{\cos^2(3x_1 + x_2/2)}{5} \right] + (I - \theta_1^k)x_1^k$$

$$x_2^{k+1} = \theta_2^k \left[\frac{\sin x_1^2}{24} - \frac{2}{21} \right] + (I - \theta_2^k)x_2^k$$

pro $\theta_i^k, k = 0, 1, \dots$, definované předpisem (5.15).

Jelikož v Matlabu neexistuje žádný příkaz pro nalezení řešení systému nelineárních rovnic urychlovací metodou, vytvořila jsem vlastní m-file (viz. m- file 5.1), který je uveden hned za příkladem. Vstupy u tohoto m-filu jsou počáteční iterace \mathbf{x}^0 , vektor symbolických proměnných, vektor funkcí $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ ze systému (5.1) a přesnost e , se kterou chceme počítat. Přesnost e není nutné udávat. Pokud ji neuvedeme, je v m-filu automaticky nastavena na hodnotu 10^{-9} . Jako zastavovací kritérium při výpočtu řešení systému použijeme maximální normu a výpočet za-

stavíme pokud $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k - x_i^{k-1}| \leq e$. Výstupy m-filu jsou odhad řešení x_k , počet iterací k a případně také posloupnost iterací I . Protože posloupnost iterací generovaná urychlovací iterační metodou může mít i tisíce členů a nebo nemusí vůbec konvergovat, je v m-filu uvedeno další zastavovací kritérium: výpočet je zastaven, pokud počet iterací dosáhne 1000. Posloupnost iterací I je pak lepší žádat na výstupu jen pro menší k . Za použití tohoto m-filu pak například pro počáteční iteraci $\mathbf{x}^0 = [-0.5, 0.3]$ a přesnost $e = 10^{-9}$ v Matlabu příkazem `[xk, k, I]=urychleni(F, x, x0)`, kde

$$F = [-(\cos(3 * x(1) + x(2)/2))^2/5 - 1/30, \sin(x(1)^2)/24 - 2/21],$$

$$x = \text{sym}('[x1, x2]'),$$

$$x0 = [-0.5, 0.3],$$

dostáváme

$$xk = [-0.174826786, -0.093964777],$$

$$x = 7,$$

	x_1^k	x_2^k
0	-0.5	0.3
1	-0.1362116198	-0.0849295969
2	-0.1764004067	-0.0944650727
3	-0.1747985603	-0.0939417585
4	-0.1748281407	-0.0939651876
5	-0.1748267614	-0.0939647569
6	-0.1748267867	-0.093964777
7	-0.1748267856	-0.0939647766
8	-0.1748267856	-0.0939647766

Tedy řešení $[-0.174826786, -0.093964777]$ dostáváme pro počáteční iteraci $\mathbf{x}^0 = [-0.5, 0.3]$ při přesnosti $e = 10^{-9}$ už po 7 iteracích. Několik prvních iterací je zakresleno na obrázku 20. ♣

M-file 5.1. `function[xk,k,I]=urychleni(F,x,x0,e)`

`%urychlení iterační metody pro řešení systémů nelineárních rovnic`

```

%vstupní data:      x   symbolický vektor
%                  F   řádkový vektor symbolických funkcí
%                  x0  počáteční iterace (řádkový vektor)
%                  e   přesnost, se kterou chceme počítat
%                    (není nutné ji udávat)
%výstupní data:    k   počet iterací
%                  xk  odhad řešení systému
%                  I   posloupnost iterací
%vstupní data mohou vypadat například takto:
%  x = sym(' [x1,x2] ');
%  F=[(cos(x(1)+x(2)))^2/2,(x(2)^2*sin(2*x(1)))/3];
%  x0=[0.3,-0.3];

%ověření vstupních dat
if(nargin<4)%pokud uživatel nezadá přesnost, nastavíme ji na
            %9 desetinných míst
            e=1e-9;
end
if(nargin<3)
    error('Neodpovídá počet vstupních dat')
end
if(length(x)~=length(x0))
    error('Vektory x a x0 nemají stejnou velikost')
end
if(e<=0)
    error('přesnost e není kladné číslo')
end
if(length(F)~=length(x0))
    error('Vektory F a x0 nemají stejnou velikost')
end

```

```

%odhad řešení systému
format long
I=eye(2)*1;
n=length(F);
v=ones(1,n);
X(1,:)=x0+v;
X(2,:)=x0;
for j=1:n
    E(j)=abs(X(2,j)-X(1,j));
end
for i=1:n
    for j=1:n
        O(i,j)=diff(F(i),x(j));
    end
end
k=0;
l=2;
while max(E)>e && k<1000
    g=double(subs(F,x,X(1,:)));
    for i=1:n
        P(i,i)=1/(1-double(subs(O(i,i),x,X(1,:))));
    end
    X(l+1,:)=g*P+X(l,)*(I-P);%výpočet (k+1)-iterace
    for j=1:n
        E(j)=abs(X(l+1,j)-X(l,j));%zastavovací kritérium: maxi-
        %mální norma vektoru xk-x(k-1)
    end
    l=l+1;
    k=k+1;
end

```

```

X(1,:)=[];
xk=X(l-1,:);
if k==1000
    disp('Posloupnost iterací k řešení systému nekonverguje
        a nebo konverguje a má více jak 1000 členů.')
```

else

```

    k=k-1;
end
I=X;
```

△

V této kapitole jsme se zabývali urychlením konvergence obecného iteračního procesu ve tvaru $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)$, $k = 1, 2, \dots$. Nyní se v příkladu 5.2 podíváme na konkrétní případ urychlení Newtonovy metody.

Příklad 5.2. V příkladu 4.2 konvergovala posloupnost generovaná Newtonovým iteračním procesem

$$\begin{aligned}
 x_1^{k+1} &= x_1^k - \frac{(2x_2^k+1)[(x_1^k)^2+(x_2^k)^2-x_1^k]+2x_2^k[(x_1^k)^2-(x_2^k)^2-x_2^k]}{8x_1^k x_2^k+2x_1^k-2x_2^k-1} \\
 x_2^{k+1} &= x_2^k - \frac{2x_1^k[(x_1^k)^2+(x_2^k)^2-x_1^k]+(-2x_1^k+1)[(x_1^k)^2-(x_2^k)^2-x_2^k]}{8x_1^k x_2^k+2x_1^k-2x_2^k-1}
 \end{aligned}$$

k řešení systému

$$\begin{aligned}
 x_1^2 + x_2^2 - x_1 &= 0 \\
 x_1^2 - x_2^2 - x_2 &= 0
 \end{aligned}$$

při počáteční iteraci $\mathbf{x}^0 = [0.8, 0.5]$ po čtyřech iteracích. Nyní se podíváme, jak rychle bude konvergovat posloupnost generovaná urychlovacím Newtonovým procesem.

Protože v Matlabu neexistuje žádný příkaz pro nalezení řešení tohoto systému urychlovací Newtonovou metodou, vytvořila jsem vlastní m-file (viz. m-file 5.2), který je uveden hned za tímto příkladem. Vstupy u tohoto m-filu jsou počáteční

iterace \mathbf{x}^0 , vektor symbolických proměnných, vektor funkcí $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ze systému (4.1) a přesnost e , se kterou chceme počítat. Přesnost e není nutné udávat. Pokud ji neuvedeme, je v m-filu automaticky nastavena na hodnotu 10^{-9} . Jako zastavovací kritérium při výpočtu řešení systému použijeme maximální normu a výpočet zastavíme pokud $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k - x_i^{k-1}| \leq e$. Výstupy u tohoto m-filu jsou odhad řešení xk , počet iterací k a případně také posloupnost iterací I . Protože posloupnost iterací generovaná urychlovací Newtonovou metodou může mít i tisíce členů a nebo nemusí vůbec konvergovat, je v m-filu uvedeno další zastavovací kritérium: výpočet je zastaven, pokud počet iterací dosáhne 1000. Posloupnost iterací I je pak lepší žádat na výstupu jen pro menší k .

Za použití tohoto m-filu pak pro počáteční aproximaci $\mathbf{x}^0 = [0.8, 0.5]$ při přesnosti $e = 10^{-9}$ v Matlabu příkazem `[xk, k, I]=urychnew(F, x, x0)`, kde

$$F = [x(1)^2 + x(2)^2 - x(1), x(1)^2 - x(2)^2 - x(2)],$$

$$x = \text{sym}('[x1, x2]'),$$

$$x0 = [0.8, 0.5],$$

dostáváme

$$xk = [0.771844506, 0.419643377],$$

$$k = 3,$$

	x_1^k	x_2^k
0	0.8	0.5
1	0.7735849057	0.4149797571
2	0.7718505749	0.4196247500
3	0.7718445065	0.4196433773
4	0.7718445063	0.4196433776

Tedy řešení $\boldsymbol{\xi} = [0.771844506, 0.419643378]$ dané soustavy dostáváme při přesnosti $e = 10^{-9}$ po třech iteracích. ♣

M-file 5.2. `function[xk,k,I]=urychnew(F,x,x0,e)`

`%urychlení newtonovy metody pro řešení systémů nelineárních rovnic`

```

%vstupní data:      x   symbolický vektor
%                  F   řádkový vektor symbolických funkcí
%                  x0  počáteční iterace (řádkový vektor)
%                  e   přesnost, se kterou chceme počítat
%                    %(není nutné ji udávat)

%výstupní data:    k   počet iterací
%                  xk  odhad řešení systému
%                  I   posloupnost iterací

%vstupní argumenty mohou vypadat například takto:
%   x = sym(' [x1,x2] ');
%   [x(1)^2+x(2)^2-x(1),x(1)^2-x(2)^2-x(2)];
%   x0=[0.8,0.5];

%ověření vstupních dat
if(nargin<4)%pokud uživatel nezadá přesnost, nastavíme ji na
            %9 desetinných míst
            e=1e-9;
end
if(nargin<3)
    error('Neodpovídá počet vstupních dat')
end
if(length(x)~=length(x0))
    error('Vektory x a x0 nemají stejnou velikost')
end
if(e<=0)
    error('přesnost e není kladné číslo')
end
if(length(F)~=length(x0))
    error('Vektory F a x0 nemají stejnou velikost')

```

```

end
%odhad řešení systému
format long
n=length(F);
I=eye(n)*1;
v=ones(1,n);
X(1,:)=x0+v;
X(2,:)=x0;
for j=1:n
    E(j)=abs(X(2,j)-X(1,j));
end
for i=1:n
    for j=1:n
        O(i,j)=diff(F(i),x(j));
    end
end
K=inv(O);
L=K.';
k=0;
l=2;
%%% nyní počítáme parciální derivace funkce  $g = x_k - J^{-1}(x_k) * F(x_k)$ ,
%%% abychom mohli určit parametry  $\theta_i^k$ 
R=x-F*L;
for j=1:n
    Q(j)=diff(R(j),x(j));
end
%%%
for j=1:n
    E(j)=abs(X(2,j)-X(1,j));
end

```



```

while max(E)>e && k<1000%zastavovací kritérium: max(E) je
    %maximální norma vektoru  $x_k - x_{(k-1)}$ 
    A=double(subs(L,x,X(1,:)));
    f=double(subs(F,x,X(1,:)));
    for i=1:n
        P(i,i)=1/(1-double(subs(Q(i),x,X(1,:))));
    end
    X(1+1,:)= [X(1,:)-f*A]*P+X(1,:)*(I-P);%výpočet (k+1)-iterace
    %urychlenou newtonovou
    %metodou
    for j=1:n
        E(j)=abs(X(1+1,j)-X(1,j));%zastavovací kritérium: maximální
        %norma vektoru  $x_k - x_{(k-1)}$ 
    end
    l=l+1;
    k=k+1;
end
X(1,:)=[];
xk=X(l-1,:);
if k==1000
    disp('Posloupnost iterací k řešení systému nekonverguje
        a nebo konverguje a má více jak 1000 členů.')
```

```

else
    k=k-1;
end
I=X;

```

△

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo nastudovat možnosti numerického řešení soustav nelineárních rovnic, nastudovanou teorii předvést na příkladech, sestavit M-fily k těmto příkladům a doplnit ty důkazy, které nejsou v literatuře běžně dostupné. Dalším ne méně důležitým cílem bylo zpracovat práci tak, aby mohla sloužit jako studijní materiál studentům, kteří mají zájem o tuto oblast numerické matematiky. Doufám, že oba tyto cíle byly splněny.

Řešení systémů nelineárních rovnic je velmi komplikovaná úloha. V této práci byly předvedeny jen velmi jednoduché příklady, na kterých jsme demonstrovali použití různých vět zajišťujících konvergenci. Až na jednu výjimku se vždy jednalo o systémy pouze dvou rovnic. Při jejich řešení jsme úzce pracovali s grafy, bez nichž bychom většinu příkladů ani nebyli schopni vyřešit, neboť jsme je využívali při odhadech řešení ξ a často i velmi malých vhodných okolí těchto řešení. Tento postup nebyl úplně optimální, ale pro naše jednoduché příklady postačující. Složitější systémy dvou rovnic a systémy více rovnic tímto způsobem však většinou řešit nelze.

Z rozsahu práce je zřejmé, že tato oblast numerické matematiky je velmi obsáhlá. V této práci jsou zmíněny jen základní metody a některé jejich modifikace. Další metody, o kterých jsem se nezmínila, jsou uvedeny například v literatuře [5].

Tato práce pro mě byla přínosem nejen tím, že jsem se seznámila s různými možnostmi numerického řešení soustav nelineárních rovnic, ale i tím, že jsem si prohloubila své znalosti v programu MATLAB a také v programu L^AT_EX, ve kterém je tato práce vytvořena.

Literatura

- [1] Horová I., Zelinka J.: Numerické metody, skriptum MU, Brno, 2004.
- [2] Isaacson E., Keller H.B.: Analysis of numerical methods, Dover Publications, INC., New York, 1994.
- [3] Kobza J.: Numerické metody, skriptum UP, Olomouc, 1993.
- [4] Míka S., Brandner M.: Numerické metody I, skriptum ZČU, Plzeň, 2000.
- [5] Ortega J.M., Rheinboldt W.C.: Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, New York, London, 1970.
- [6] Rachůnek J., Hort D.: Algebra I, skriptum UP, Olomouc, 2005
- [7] Rachůnek L., Rachůnková I.: Diferenciální počet funkcí více proměnných, skriptum UP, Olomouc, 2004.
- [8] Stoer J., Bulirsch R.: Introduction to Numerical Analysis, New York, 2002.
- [9] Wikipedie: dostupné z <http://cs.wikipedia.org/wiki>