UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Sbírka řešených příkladů z pravděpodobnosti: náhodná veličina

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí bakalářské práce: **doc. RNDr. Eva Fišerová, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Daniel Lupienski**
Studijní program: B1101 Matematika
Studijní obor Matematika a její aplikace
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2017

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Daniel Lupienski

Název práce: Sbírka řešených příkladů z pravděpodobnosti: náhodná veličina

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: doc. RNDr. Eva Fišerová, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2017

Abstrakt: Tato práce obsahuje stručný přehled teorie z oblasti náhodných veličin, přehled základních rozdělení a řešené příklady. V teoretické části uvádím základní definice a vysvětluji pojmy týkající se náhodných veličin, přehled základních rozdělení obsahuje nejdůležitější rozdělení spolu se svými vlastnostmi a řešené příklady jsou rozděleny do kategorií, aby pokrývaly široké spektrum početních úkonů.

Klíčová slova: náhodná veličina, rozdělení pravděpodobností, distribuční funkce, pravděpodobnostní funkce, hustota pravděpodobnosti, střední hodnota, rozptyl, medián, kvantily, modus.

Počet stran: 93

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Daniel Lupienski

Title: Problems in probability with solutions: a random variable

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: doc. RNDr. Eva Fišerová, Ph.D.

The year of presentation: 2017

Abstract: This thesis consists of a brief overview of the theory of a random variable, a list of elementary distributions and problems with solutions. In the thoeritical part, I present elementary definitions and explain terms related to random variables, a list of elementary distributions contains elementary distributions along with their properties and problems with solutions are divided into sections so they cover wide range of mathematical operations.

Key words: random variable, probability distribution, cumulative distribution function, probability mass function, probability density function, mean, variance, median, quantiles, mode.

Number of pages: 93

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně pod vedením paní doc. RNDr. Evy Fišerové, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedl v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Poděkování

Děkuji paní doc. RNDr. Evě Fišerové, Ph.D. za odbornou pomoc, čas strávený kontrolováním mé bakalářské práce a spolupráci při řešení problémů, na které jsem při tvorbě bakalářské práce narazil. Také děkuji mé rodině a mým přátelům, kteří mě po celou dobu studia podporovali a motivovali.

Úvod

Tématem mé bakalářské práce je „Sbírka řešených příkladů z pravděpodobnosti: náhodná veličina“. Toto téma jsem zvolil, protože už při studiu této problematiky v kurzu *Pravděpodobnost a statistika* mě velmi fascinovalo, kolik problémů v reálném životě lze takto popsat, a co všechno nám to může o daném problému říct.

Práci jsem rozdělil do tří částí. V první části jsem se snažil uvést přehled teorie, kterou potřebujeme k vyřešení praktických příkladů. Snažil jsem se, aby to bylo napsané v co nejstručnější podobě, proto uvedená tvrzení uvádím bez důkazů. Ve druhé části jsem uvedl přehled základních rozdělení, a to jak diskrétních, tak i spojitých. Závěrečná část je věnována názorně řešeným příkladům. Tuto část jsem rozdělil do čtyř sekcí podle povahy příkladů, aby bylo jednodušší se v ní orientovat. Některé příklady by mohly být zařazeny do více sekcí, ale roztřídil jsem je podle toho, co na nich chci demonstrovat nejvíce.

Většina teoretických znalostí, které jsou uvedeny v mé práci, jsem čerpal ze skripta *Základy počtu pravděpodobnosti a metod matematické statistiky* autorů Hrona K. a Kunderové P., [3, kap. 2]. V tomto skriptu jsem ovšem nenašel všechny informace k teorii rozdělení pravděpodobností funkcí náhodných veličin, takže jsem je doplnil informacemi z internetového zdroje, [6].

Kapitola 1

Teoretická část

Tématem této práce je sbírka řešených příkladů z náhodné veličiny, ale než přistoupíme k samotnému řešení příkladů, musíme si nejdřív objasnit pojmy a postupy, které při tom budeme potřebovat.

1.1. Náhodná veličina

Začneme s náhodnou veličinou. Abychom si přiblížili, co je to náhodná veličina, musíme si nejdřív objasnit, co je to náhodný pokus. Náhodným pokusem rozumíme uskutečnění určitého pevně daného systému podmínek, který končí nastoupením jednoho výsledku z množiny možných výsledků Ω. Můžeme si představit počet zmetků v dodávce výrobků, objem dešťových srážek, výšku dospělého člověka, aj. Náhodná veličina pak představuje číselné ohodnocení těchto výsledků. I výsledek takového pokusu, jako je pohlaví narozeného dítěte, můžeme číselně ohodnotit, například 0 pro chlapce a 1 pro holku.

Podle množiny možných výsledků Ω dělíme náhodné veličiny do dvou skupin. První skupinu tvoří náhodné veličiny, jejichž množina možných výsledků Ω je spočetná. To zahrnuje množiny s konečným počtem prvků a množiny s nekonečným počtem prvků, jejichž prvky lze seřadit do posloupnosti. Tyto náhodné veličiny nazýváme diskrétními. Druhou skupinu tvoří náhodné veličiny, jejichž množina možných výsledků Ω je nespočetná. Tyto náhodné veličiny nazýváme absolutně spojitými. Jako zástupce první skupiny si můžeme představit počet ok, který padne na hrací kostce, pro konečnou množinu možných výsledků a počet výstřelů na střelnici, než zasáhneme cíl, pro nekonečnou spočetnou množinu výsledku. Jako zástupce druhé skupiny si můžeme představit výšku dospělého člověka.

Pravděpodobnost, že se náhodná veličina X realizuje hodnotou x značíme

$$\mathsf{P}\{X = x\}$$

a pravděpodobnost, že se náhodná veličina X realizuje v intervalu $\langle a; b\rangle$ značíme

$$\mathsf{P}\{X \in \langle a; b\rangle\}.$$

1.2. Pravděpodobnostní funkce a hustota pravděpodobnosti

Každá náhodná veličina nabývá svých realizací s určitými pravděpodobnostmi. U diskrétních náhodných veličin je to jednoduché. Náhodná veličina je určena přímo posloupnostmi $\{x_n\}$ a $\{p_n\}$, kde posloupnost $\{x_n\}$ je posloupností realizací náhodné veličiny a posloupnost $\{p_n\}$ je posloupností pravděpodobností těchto realizací. Součet pravděpodobností v posloupnosti $\{p_n\}$ musí být roven 1. Nebo máme předepsanou funkci, které říkáme pravděpodobnostní, do které jako argument dosazujeme realizací, pro kterou chceme vypočítat pravděpodobnost.

Příklad 1.1. Náhodná veličina X je dána tabulkou rozdělení pravděpodobností:

x_i	1	2	3	4	5
$p(x_i)$	0,12	0,26	0,2	0,31	0,11

Náhodná veličina X je dobře definována, neboť součet pravděpodobností je roven 1.

Příklad 1.2. Náhodná veličina X je dána pravděpodobnostní funkcí:
$\mathsf{P}(X = x) = \frac{1}{14}x^2, \quad x \in \{1, 2, 3\}.$

Jednotlivé pravděpodobnosti určíme dosazením hodnoty z oboru hodnot za x

do pravděpodobnostní funkce. Pravděpodobnosti jsou po řadě $\frac{1}{14}$, $\frac{4}{14}$ a $\frac{9}{14}$, a jejich součet je roven 1, takže náhodná veličina X je dobře definována.

U absolutně spojitých náhodných veličin je situace komplikovanější. Používáme nezápornou funkci $f_X(x)$ zvanou hustota pravděpodobnosti nebo jen hustota. Integrál z této funkce přes interval $\langle a; b\rangle$ představuje pravděpodobnost, že se náhodná veličina realizuje v intervalu $\langle a; b\rangle$. Z této skutečnosti plyne následující důsledek:

$$\forall x \in R: \quad \mathsf{P}(X = x) = 0.$$

Funkce $g(x)$ musí ovšem splňovat určitá pravidla, aby mohla být hustotou.

Věta 1.1. *Každá nezáporná, borelovsky měřitelná funkce g taková, že*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathrm{d}t = 1,$$

je hustotou rozdělení pravděpodobností nějaké náhodné veličiny, tj. existuje náhodná veličina X absolutně spojitého typu taková, že g(x) je její hustotou.

Příklad 1.3. Náhodná veličina X je dána hustotou pravděpodobnosti:

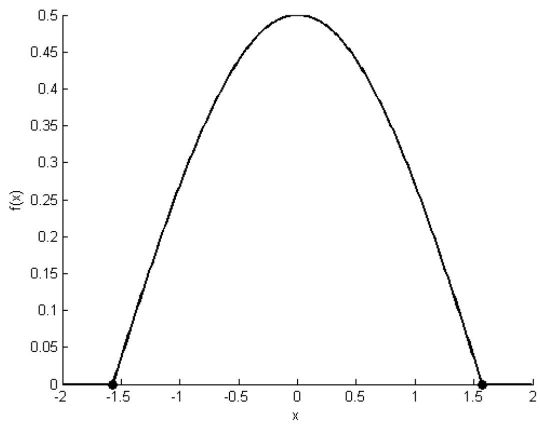
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; -\frac{\pi}{2}) \\ \frac{1}{2}\cos x & x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ 0 & x \in \langle \frac{\pi}{2}; \infty) \end{cases}$$

Ověřte, že takto definována funkce je opravdu hustotou a určete pravděpodobnost, že se náhodná veličina X realizuje v intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$.

Řešení:

Funkce $\cos x$ je v intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ nezáporná. Funkce $f(x)$ je borelovky měřitelná a platí $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos x \mathrm{d}x = 1$. Graf hustoty $f(x)$ je uveden na obrázku 1.1. Požadovanou pravděpodobnost zjistíme přeintegrováním hustoty přes daný interval:

$$\mathsf{P}\{X \in \langle 0; \tfrac{\pi}{2}\rangle\} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{2}\cos x \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}\sin x\right]_0^{\pi/2} = \tfrac{1}{2}.$$



Obrázek 1.1: Graf hustoty z příkladu 1.3.

1.3. Distribuční funkce

Pokud chceme spočítat pravděpodobnost, že se náhodná veličina X realizuje v nějaké množině B, pro diskrétní náhodnou veličinu stačí sečíst pravděpodobnosti jednotlivých realizací, které leží v množině B, tj.

$$\mathsf{P}\{X \in \mathrm{B}\} = \sum_{i:x_i \in \mathrm{B}} p(x_i).$$

Pro náhodnou veličinu absolutně spojitého typu musíme přeintegrovat hustotu přes danou množinu, a to není vždy tak jednoduché. Proto zavádíme nový pojem: distribuční funkce. Distribuční funkce $F_X(x)$ je reálná funkce reálné proměnné, která představuje pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabývá hodnoty menší nebo rovné x.

Definice 1.2. Nechť X je náhodná veličina. Reálnou funkci F_X definovanou na R^1 předpisem

$$F_X(x) = \mathsf{P}(X \leq x), \quad x \in R^1,$$

nazýváme *distribuční funkcí náhodné veličiny* X.

Hodnotu distribuční funkce v bodě x pro diskrétní náhodnou veličinu spočítáme jako součet všech pravděpodobností realizací náhodné veličiny, které jsou menší nebo rovny x. Matematicky řečeno je

$$F(x) = \sum_{i:x_i \leq x} p(x_i). \tag{1.1}$$

Příklad 1.4. Náhodná veličina X představuje počet ok, který padne na hrací kostce. Určete distribuční funkci.

Řešení:

Náhodná veličina X může nabývat všech přirozených čísel od 1 po 6 s pravděpodobností 1/6 pro každé číslo. Náhodná veličina X je diskrétního typu, takže distribuční funkci určíme podle vztahu (1.1).

$F(0) = \mathsf{P}(X \leq 0) = 0,$

$F(1) = \mathsf{P}(X \leq 1) = \mathsf{P}(X = 1) = 1/6,$

$F(2) = \mathsf{P}(X \leq 2) = \mathsf{P}(X = 1) + \mathsf{P}(X = 2) = 1/6 + 1/6 = 2/6,$

$\vdots$

$F(6) = \mathsf{P}(X \leq 6) = \mathsf{P}(X = 1) + \mathsf{P}(X = 2) + \mathsf{P}(X = 3) + \mathsf{P}(X = 4)$

$+\mathsf{P}(X = 5) + \mathsf{P}(X = 6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1.$

Distribuční funkci teď přepíšeme v obvyklém tvaru.

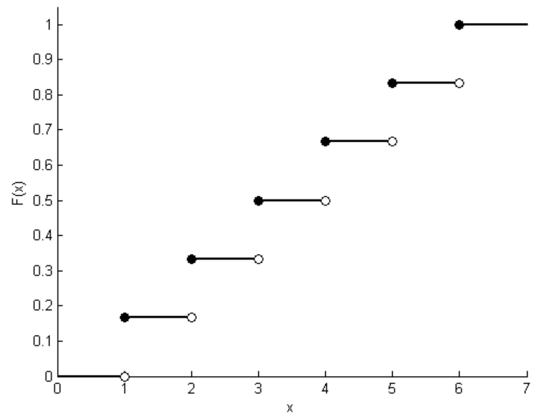
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 1) \\ 1/6 & x \in \langle 1; 2) \\ 2/6 & x \in \langle 2; 3) \\ 3/6 & x \in \langle 3; 4) \\ 4/6 & x \in \langle 4; 5) \\ 5/6 & x \in \langle 5; 6) \\ 1 & x \in \langle 6; \infty) \end{cases}$$

Její graf je na obrázku 1.2.

Pro absolutně spojitou náhodnou veličinu postupujeme podobně, jen místo sčítání integrujeme. Matematicky řečeno je

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t. \tag{1.2}$$

Tento vzorec funguje i obráceně. Tzn., že můžeme určit hustotu derivováním



Obrázek 1.2: Graf distribuční funkce z příkladu 1.4.

distribuční funkce, tedy:

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{1.3}$$

Tohle ovšem platí jen v bodech distribuční funkce, ve kterých derivace existuje.

Příklad 1.5. Určete distribuční funkci pro náhodnou veličinu X z příkladu 1.3.

Řešení:

Náhodná veličina X je absolutně spojitého typu, takže její distribuční funkci budeme určovat podle vztahu (1.2).

$x \in (-\infty; -\frac{\pi}{2})$ $\quad \int\limits_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t = 0$

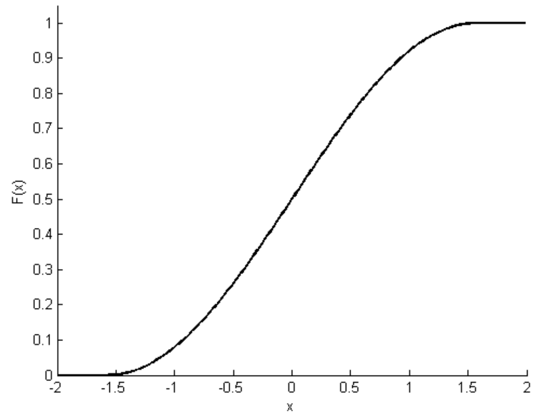
$x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ $\quad \int\limits_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0\mathrm{d}t + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{1}{2}\cos t\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\sin t\right]_{-\pi/2}^{x} = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}$

$x \in \langle \frac{\pi}{2}; \infty)$ $\quad \int\limits_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0\mathrm{d}t + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos t\mathrm{d}t + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} 0\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\sin t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 1$

Distribuční funkci přepíšeme v obvyklém tvaru.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; -\frac{\pi}{2}) \\ \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2} & x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ 1 & x \in \langle \frac{\pi}{2}; \infty) \end{cases}$$

Její graf je na obrázku 1.3.



Obrázek 1.3: Graf distribuční funkce z příkladu 1.5.

Všechny distribuční funkce splňují následující vlastnosti:

Věta 1.3. *Nechť $F_X(x)$ je distribuční funkce. Pak platí:*

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1, \ \forall x \in R^1$.

2. *F_X je neklesající funkce.*

3. $\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0.$

4. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a), \quad \forall a < b \in R^1.$

5. *Distribuční funkce je zprava spojitá v libovolném bodě $x \in R^1$.*

6. $\mathsf{P}(X = x_0) = F_X(x_0) - \lim\limits_{x \to x_0^-} F_X(x), \quad \forall x_0 \in R^1.$

   V dalším budeme označovat $\lim\limits_{x \to x_0^-} F_X(x) = F_X(x_0 - 0)$.

7. $\mathsf{P}(X < x) = F_X(x - 0), \quad \forall x \in R^1.$

8. $\mathsf{P}(a < X < b) = F_X(b - 0) - F_X(a),$

   $\mathsf{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a - 0),$

   $\mathsf{P}(a \leq X < b) = F_X(b - 0) - F_X(a - 0).$

9. *F_X má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti 1. druhu (skoků).*

Vlastnosti 2, 3 a 5 jsou nejen nutné, ale i postačující. Tzn., že reálná funkce reálné proměnné splňující tyto vlastnosti je distribuční funkcí nějaké náhodné veličiny.

Příklad 1.6. Náhodná veličina X je určena distribuční funkcí. Spočítejte hustotu.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; -1) \\ 0,5x^3 + 0,5 & x \in \langle -1; 1) \\ 1 & x \in \langle 1; \infty) \end{cases}$$

Řešení:

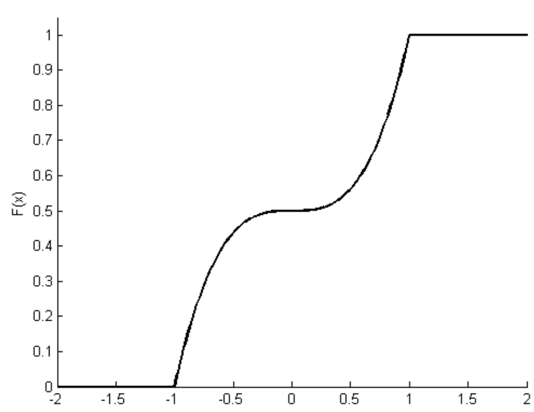
K výpočtu hustoty využijeme vzájemně jednoznačného vztahu (1.3), který říká, že hustota je derivací distribuční funkce.

$$\begin{array}{ll} x \in (-\infty; -1) & f(x) = 0' = 0 \\ x \in \langle -1; 1) & f(x) = (0,5x^3 + 0,5)' = 1,5x^2 \\ x \in \langle 1; \infty) & f(x) = 1' = 0 \end{array}$$

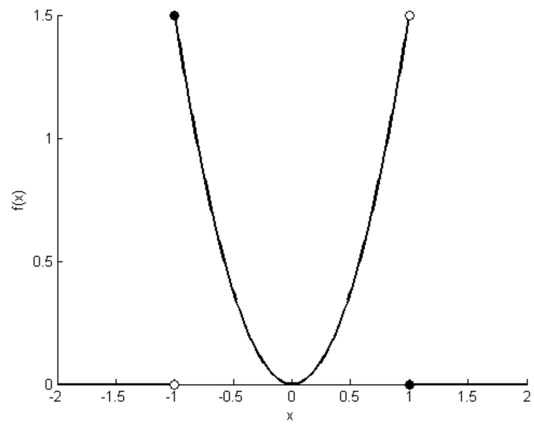
Hustotu přepíšeme v obvyklém tvaru.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; -1) \\ 1,5x^2 & x \in \langle -1; 1) \\ 0 & x \in \langle 1; \infty) \end{cases}$$

Graf distribuční funkce je na obrázku 1.4 a graf hustoty je na obrázku 1.5.



Obrázek 1.4: Graf distribuční funkce z příkladu 1.6.



Obrázek 1.5: Graf hustoty z příkladu 1.6.

1.4. Funkce náhodných veličin

Při počítáni často narazíme na situaci, kdy potřebujeme určit rozdělení pravděpodobností nebo hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny Y, která je funkcí náhodné veličiny X. Situaci probereme zvlášť pro diskrétní náhodnou veličinu, a zvlášť pro absolutně spojitou náhodnou veličinu.

1.4.1. Diskrétní náhodná veličina

Pro diskrétní náhodnou veličinu používáme tuto větu:

Věta 1.4. *Nechť X je diskrétní náhodná veličina, nechť $\varphi : R^1 \to R^1$ je prostá borelovsky měřitelná funkce a $Y = \varphi(X)$. Označme φ^{-1} inverzní funkci k φ. Pro pravděpodobnostní funkci p_Y náhodné veličiny Y s oborem hodnot $\{y_n\}$ pak platí:*

$$p_Y(y_n) = p_X[\varphi^{-1}(y_n)], \tag{1.4}$$

kde p_X je pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X.

Příklad 1.7. Určete pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny $Y = 2X - 3$, kde X je náhodná veličina z příkladu 1.2.

Řešení:

(Poznámka: Pravděpodobnostní funkce je funkce, která přiřazuje realizaci její pravděpodobnost.)

Prvním krokem, který uděláme, je určení tabulky rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X. Její první řádek tvoří všechny hodnoty z oboru hodnot a druhý řádek pravděpodobnosti těchto hodnot. Tyto pravděpodobnosti vypočítáme dosazením příslušné hodnoty za x do pravděpodobnostní funkce.

x_i	1	2	3
$p(x_i)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{9}{14}$

Následně určíme obor hodnot náhodné veličiny Y. Ten určíme tak, že do transformace $y = 2x - 3$ dosadíme za x postupně všechny hodnoty z oboru hodnot náhodné veličiny X.

x_i	1	2	3
y_i	-1	1	3

V dalším kroku určíme tabulku rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny Y. Jako první řádek použijeme právě vypočítaný obor hodnot náhodné veličiny Y a jako druhý řádek použijeme pravděpodobnosti hodnot náhodné veličiny X. Transformace totiž nemá na pravděpodobnosti vliv.

y_i	-1	1	3
$p(y_i)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{9}{14}$

Nyní určíme inverzní transformaci, kterou potřebujeme k výpočtu pravděpodobnostní funkce.

$\varphi(x) : y = 2x - 3$

$\varphi(x)^{-1} : x = \frac{y+3}{2}$

Nakonec určíme pravděpodobnostní funkci $p_Y(y)$ podle vztahu (1.4).

$p_Y(y) = \mathsf{P}(Y = y) = \frac{1}{14}\frac{(y+3)^2}{4}, \quad y \in \{-1, 1, 3\}.$

Není-li funkce $\varphi(x)$ prostá, může existovat víc hodnot z oboru hodnot náhodné veličiny X, které se po aplikování funkce $\varphi(x)$ zobrazí na jedinou hodnotu z oboru hodnot náhodné veličiny $Y = \varphi(X)$. V takovém případě pravděpodobnost pro hodnotu y_n dostaneme jako součet pravděpodobností těch hodnot x_i, pro které $\varphi(x_i) = y_n$.

Věta 1.5. *Nechť X je diskrétní náhodná veličina, nechť $\varphi : R^1 \to R^1$ je borelovsky měřitelná funkce, která není prostá, a $Y = \varphi(X)$. Označme φ_i^{-1} inverzní funkci k φ v bodě x_i. Pro pravděpodobnostní funkci p_Y náhodné veličiny Y s oborem hodnot $\{y_n\}$ pak platí:*

$$p_Y(y_n) = \sum_{i:\varphi(x_i)=y_n} p_X[\varphi_i^{-1}(y_n)], \tag{1.5}$$

kde p_X je pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X.

Příklad 1.8. Náhodná veličina X je dána pravděpodobnostní funkcí.
$p_X(x) = \mathsf{P}(X = x) = \frac{|x|}{4}, \quad x \in \{-1, 1, 2\}$.
Určete pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny $Y = X^2$.

Řešení:

Nejdříve určíme tabulku rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X. Určíme ji stejným způsobem jako v předchozím příkladě.

x_i	-1	1	2
$p(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$

Stejným způsobem jako v předchozím příkladě nyní určíme obor hodnot náhodné veličiny Y.

x_i	-1	1	2
y_i	1	1	4

Vidíme, že -1 a 1 se zobrazily na jediné číslo, a to 1. Pravděpodobnost $p_Y(1)$ tedy určíme jako součet pravděpodobností $p_X(-1)$ a $p_X(1)$. Na 4 se zobrazila pouze 2, takže $p_Y(4) = p_X(2)$. Tabulka rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny Y vypadá následovně:

y_i	1	4
$p(y_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Teď určíme inverzní transformaci v každém bodě oboru hodnot náhodné veličiny X. -1 se zobrazí na 1, inverzní transformace je $x = -\sqrt{y}$; 1 se zobrazí na 1, inverzní transformace je $x = \sqrt{y}$; 2 se zobrazí na 4, inverzní transformace je $x = \sqrt{y}$. Nakonec určíme pravděpodobnostní funkci p_Y podle vztahu (1.5).

$$p_Y(y) = \mathsf{P}(Y = y) = \begin{cases} \frac{|-\sqrt{y}|}{4} + \frac{|\sqrt{y}|}{4} & y = 1 \\ \frac{|\sqrt{y}|}{4} & y = 4 \end{cases}$$

Vidíme, že jí můžeme přepsat takto:

$p_Y(y) = \mathsf{P}(Y = y) = \frac{1}{2}, \quad y \in \{1, 4\}.$

1.4.2. Absolutně spojitá náhodná veličina

Vidíme, že pravděpodobnosti v diskrétním případě zůstávají stejné, protože body zůstávají po transformaci pořád body. V absolutně spojitém případě ovšem pracujeme s intervaly a ty můžou měnit velikosti při transformaci. Tuto skutečnost musíme zohlednit při našich výpočtech. Proto ve větách vystupuje absolutní hodnota z derivace inverzní transformace.

Věta 1.6. *Nechť X je absolutně spojitá náhodná veličina s hustotou f_X, φ je borelovsky měřitelná ryze monotónní funkce a $Y = \varphi(X)$. Pak Y je absolutně spojitá náhodná veličina s hustotou f_Y, která je dána vztahem:*

$$f_Y(y) = f_X[\varphi^{-1}(y)]|[\varphi^{-1}(y)]'|, \quad \forall y \in R^1. \tag{1.6}$$

Příklad 1.9. Náhodná veličina X je dána hustotou pravděpodobnosti:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0) \\ \frac{1}{2}x & x \in \langle 0; 2) \\ 0 & x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$$

Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = \mathrm{e}^{-X}$.

Řešení:

Nejdříve určíme interval pro nenulovou část hustoty náhodné veličiny Y aplikováním funkce $y = \mathrm{e}^{-x}$ na interval $\langle 0; 2)$.

$\mathrm{e}^{-0} = 1$

$\mathrm{e}^{-2} \doteq 0,1353$

Vidíme, že meze vyšly v opačném pořadí. Vyšly tak, protože $y = \mathrm{e}^{-x}$ je klesající funkce. V případě rostoucí funkce by meze vyšly v původním pořadí.

Nyní vypočítáme údaje potřebné pro výpočet hustoty $f_Y(y)$.

$\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$

$\varphi^{-1}(y) = -\ln(y)$

$|[\varphi^{-1}(y)]'| = \frac{1}{y}$

Hustotu náhodné veličiny Y teď určíme podle vztahu (1.6).

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty; 0,1353) \\ \frac{1}{2}(-\ln(y))\frac{1}{y} & y \in \langle 0,1353; 1) \\ 0 & y \in \langle 1; \infty) \end{cases}$$

V případě, že funkce φ není ryze monotónní, může existovat víc hodnot x, které se po aplikaci funkce φ zobrazí na jedinou hodnotu y. Tuto situaci řešíme podobně jako u diskrétní náhodné veličiny, akorát teď pracujeme s intervaly. Takže pravděpodobnost, že se náhodná veličina Y realizuje v intervalu $(a; b)$ je rovna pravděpodobnosti, že se náhodná veličina X realizuje v kterémkoliv z intervalů $(c; d)$, pro který platí $\varphi((c; d)) = (a; b)$, neboli

$$\mathsf{P}\{Y \in (a; b)\} = \mathsf{P}\{X \in (c_1; d_1) \cup (c_2; d_2) \cup \cdots \cup (c_i; d_i)\}.$$

Věta 1.7. *Nechť X je absolutně spojitá náhodná veličina s hustotou f_X, φ je borelovsky měřitelná funkce, která není ryze monotónnní, a $Y = \varphi(X)$. Označme φ_i^{-1} inverzní funkci k φ na intervalu I_{Xi}. Pak Y je absolutně spojitá náhodná veličina s hustotou f_Y, která je dána vztahem:*

$$f_Y(y) = \sum_{i:\varphi(I_{Xi})=I_{Yn}} f_X[\varphi_i^{-1}(y)]|[\varphi_i^{-1}(y)]'|, \quad y \in I_{Yn}. \tag{1.7}$$

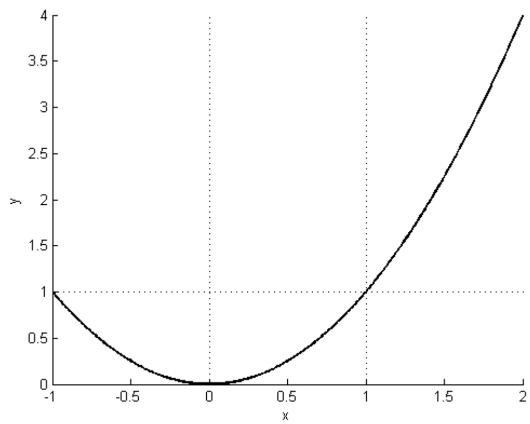
Příklad 1.10. Náhodná veličina X je dána hustotou pravděpodobnosti:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; -1) \\ \frac{2}{9}x + \frac{2}{9} & x \in \langle -1; 2) \\ 0 & x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$$

Určete hustotu náhodné veličiny $Y = X^2$.

Řešení:

Graf transformace $y = x^2$ je na obrázku 1.4. Intervaly nyní budeme značit dolním indexem, aby bylo jasné, do definičního oboru hustoty které náhodné veličiny patří. Začneme tím, že rozdělíme definiční obor nenulové části hustoty náhodné



Obrázek 1.6: Graf transformace $y = x^2$ z příkladu 1.10.

veličiny X na intervaly, na kterých je transformace $y = x^2$ monotónní. Interval s nenulovou hustotou je $\langle -1; 2)_X$ a transformace $y = x^2$ je monotónní na intervalech $(-1; 0)_X$ a $(0; 2)_X$. (Při našich úvahách nezáleží na tom, jaké typy intervalů z hlediska uzavřenosti použijeme.) Následně na tyto intervaly aplikujeme transformaci $y = x^2$ a určíme inverzní transformaci φ^{-1} na těchto intervalech. Interval $(-1; 0)_X$ se zobrazí na interval $(0; 1)_Y$ s inverzní transformací $x = -\sqrt{y}$ a interval $(0; 2)_X$ se zobrazí na interval $(0; 4)_Y$ s inverzní transformací $x = \sqrt{y}$. Intervaly $(0; 1)_Y$ a $(0; 4)_Y$, které vznikly aplikací transformace $y = x^2$, se částečné překrývají, a to je problém, který musíme odstranit. My potřebujeme, aby se intervaly po transformaci buď překrývaly úplně, nebo aby se nepřekrývaly vůbec. Proto interval $(0; 4)_Y$ rozdělíme v bodě 1 na intervaly $(0; 1)_Y$ a $(1; 4)_Y$. Nyní musíme odpovídajícím způsobem rozdělit jeho vzor, interval $(0; 2)_X$. Interval $(0; 4)_Y$ jsme rozdělili v bodě 1, takže bod 1 nyní dosadíme do inverzní transformace na tomto intervalu a dostaneme 1, takže interval $(0; 2)_X$ rozdělíme na intervaly $(0; 1)_X$ a $(1; 2)_X$. Nakonec určíme absolutní hodnoty z derivací inverzních transformací. Vše teď zapíšeme do tabulky.

interval $f_X(x)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; 2)$
interval $f_Y(y)$	$(0; 1)$	$(0; 1)$	$(1; 4)$
φ^{-1}	$x = -\sqrt{y}$	$x = \sqrt{y}$	$x = \sqrt{y}$
$\lvert[\varphi^{-1}]'\rvert$	$x = \frac{1}{2\sqrt{y}}$	$x = \frac{1}{2\sqrt{y}}$	$x = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

Hustotu náhodné veličiny Y teď určíme podle vztahu (1.7).

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty; 0\rangle \\ \left(\frac{2}{9}(-\sqrt{y}) + \frac{2}{9}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} + \left(\frac{2}{9}\sqrt{y} + \frac{2}{9}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{2}{9\sqrt{y}} & y \in (0; 1) \\ \left(\frac{2}{9}\sqrt{y} + \frac{2}{9}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{9\sqrt{y}} + \frac{1}{9} & y \in \langle 1; 4) \\ 0 & y \in \langle 4; \infty) \end{cases}$$

1.5. Číselné charakteristiky

Číselné charakteristiky jsou čísla, která popisují různé vlastnosti náhodných veličin. Používáme je v případě, když nepotřebujeme o náhodné veličině úplnou informaci, kterou poskytuje distribuční funkce, hustota nebo rozdělení pravděpodobností. Základní číselné charakteristiky můžeme rozdělit do dvou skupin: charakteristiky polohy a charakteristiky variability.

1.5.1. Charakteristiky polohy

Střední hodnota

Základní číselnou charakteristikou polohy je střední hodnota. Střední hodnotu můžeme chápat jako vážený průměr pro náhodné veličiny.

Věta 1.8. Nechť X je diskrétní náhodná veličina s rozdělením $\{x_n\}$, $\{p_n\}$. Je-li

$$\sum_n |x_n| p_n = \sum_n |x_n| \mathsf{P}(X = x_n) < \infty,$$

definujeme *střední hodnotou* $\mathsf{E}(X)$ *náhodné veličiny* X tímto vztahem:

$$\mathsf{E}(X) = \sum_n x_n p_n = \sum_n x_n \mathsf{P}(X = x_n). \tag{1.8}$$

Pokud není uvedená podmínka splněna, řekneme, že náhodná veličina X nemá střední hodnotu.

Absolutní konvergenci příslušné řady v definici požadujeme, protože náhodná veličina může nabývat i záporných realizací a při nekonečném počtu těchto realizací by se součet řady mohl měnit při změně indexování.

Věta 1.9. Nechť $\varphi(x) : R^1 \to R^1$ je borelovská funkce. Je-li

$$\sum_n |\varphi(x_n)|p_n = \sum_n |\varphi(x_n)|\mathsf{P}(X = x_n) < \infty,$$

definujeme *střední hodnotou* $\mathsf{E}(\varphi(x))$ *náhodné veličiny* $\varphi(X)$ tímto vztahem:

$$\mathsf{E}(\varphi(X)) = \sum_n \varphi(x_n)p_n = \sum_n \varphi(x_n)\mathsf{P}(X = x_n). \tag{1.9}$$

Pokud není uvedená podmínka splněna, řekneme, že náhodná veličina $\varphi(X)$ nemá střední hodnotu.

Definice střední hodnoty pro absolutně spojitou náhodnou veličinu je podobná, akorát integrujeme místo sčítání.

Věta 1.10. Nechť X je absolutně spojitá náhodná veličina s hustotou $f_X(x)$. Je-li

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\mathrm{d}x < \infty,$$

definujeme *střední hodnotou* $\mathsf{E}(X)$ *náhodné veličiny* X tímto vztahem:

$$\mathsf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x. \tag{1.10}$$

Není-li podmínka splněna, řekneme, že náhodná veličina X nemá střední hodnotu (její střední hodnota neexistuje).

Věta 1.11. Nechť $\varphi(x) : R^1 \to R^1$ je borelovská funkce. Je-li

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| f_X(x)\mathrm{d}x < \infty,$$

definujeme *střední hodnotou* $\mathsf{E}(\varphi(X))$ *náhodné veličiny* $\varphi(X)$ tímto vztahem:

$$\mathsf{E}(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_X \mathrm{d}x. \tag{1.11}$$

V opačném případě řekneme, že náhodná veličina $\varphi(X)$ nemá střední hodnotu.

Některé vlastnosti střední hodnoty shrnuje následující věta.

Věta 1.12. *Nechť X, Y jsou náhodné veličiny a nechť a je libovolné reálné číslo. Pak platí*

1. $\mathsf{P}(X \geq 0) = 1 \Longrightarrow \mathsf{E}(X) \geq 0$,
2. $\mathsf{P}(X = a) = 1 \Longrightarrow \mathsf{E}(X) = a$.

Pokud tyto náhodné veličiny mají střední hodnotu, pak platí

3. $\mathsf{E}(aX) = a\mathsf{E}(X)$,
4. $\mathsf{E}(X + Y) = \mathsf{E}(X) + \mathsf{E}(Y)$,
5. $\mathsf{P}(X \leq Y) = 1 \Longrightarrow \mathsf{E}(X) \leq E(Y)$,

Kvantily

Dalšími důležitými číselnými charakteristikami zejména pro matematickou statistiku jsou kvantily.

Definice 1.13. Nechť $\alpha \in (0, 1)$. *α-kvantil náhodné veličiny X* je takové reálné číslo x_α, pro které platí

$$\mathsf{P}(X \leq x_\alpha) \geq \alpha \quad \text{a současně} \quad \mathsf{P}(X \geq x_\alpha) \geq 1 - \alpha.$$

Kvantily nejsnadněji určíme z distribuční funkce. Z definice α-kvantilu vidíme, že x_α je reálné číslo splňující nerovnost $F(x_\alpha - 0) \leq \alpha \leq F(x_\alpha)$. Pro diskrétní náhodnou veličinu máme dvě možnosti: buď se α shoduje s hodnotou distribuční funkce v některém bodě, a potom je α-kvantil x_α kterákoliv hodnota z intervalu, ve kterém je hodnota distribuční funkce konstantní s hodnotou α (do intervalu zahrnujeme i jeho pravý koncový bod), nebo se α neshoduje s žádnou hodnotou distribuční funkce, a v tom případě je α-kvantil x_α nejmenší číslo splňující nerovnost $F(x_\alpha) \geq \alpha$. Jestliže je distribuční funkce absolutně spojitá, je α-kvantil určen jednoznačně podle vztahu $F(x_\alpha) = \alpha$.

Některým důležitým kvantilům říkáme speciálním názvem:

$x_{0,5}$ nazýváme medián,
$x_{0,25}$ nazýváme dolní kvartil,
$x_{0,75}$ nazýváme horní kvartil,
$x_{0,k}$ nazýváme k-tý decil, pro $k \in \{1, 2, \ldots, 9\}$,
$x_{0,0k}$ nazýváme k-tý percentil, pro $k \in \{1, 2, \ldots, 99\}$.

Příklad 1.11. Náhodná veličina X je dána tabulkou rozdělení pravděpodobností:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(x_i)$	0,12	0,08	0,05	0,24	0,09	0,14	0,03	0,1	0,04	0,11

Určete dolní kvartil a medián.

Řešení:

V prvním kroku potřebujeme určit distribuční funkci. Jelikož je náhodná veličina X diskrétní, distribuční funkci určíme podle vztahu (1.1) na straně 12.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0) \\ 0,12 & x \in \langle 0; 1) \\ 0,2 & x \in \langle 1; 2) \\ 0,25 & x \in \langle 2; 3) \\ 0,49 & x \in \langle 3; 4) \\ 0,58 & x \in \langle 4; 5) \\ 0,72 & x \in \langle 5; 6) \\ 0,75 & x \in \langle 6; 7) \\ 0,85 & x \in \langle 7; 8) \\ 0,89 & x \in \langle 8; 9) \\ 1 & x \in \langle 9; \infty) \end{cases}$$

Dolní kvartil $x_{0,25}$ se svou hodnotou α shoduje s hodnotou distribuční funkce $F(2)$, takže dolní kvartil $x_{0,25}$ je kterákoliv hodnota z intervalu $\langle 2; 3\rangle$. Správnost konce intervalu můžeme ověřit postupným sčítáním pravděpodobností v tabulce z pravé strany. Dostaneme $\mathsf{P}(X \geq 3) = 0,75$.

Medián $x_{0,5}$ se svou hodnotou α neshoduje s žádnou hodnotou distribuční funkce, takže ho určíme v jednom kroku. A určíme ho jako nejmenší číslo splňující nerovnost $F(x_{0,5}) \geq 0,5$. Z distribuční funkce vidíme, že $x_{0,5} = 4$. Správnost našeho výsledku můžeme ověřit postupným sčítáním pravděpodobností v tabulce z pravé strany. Dostaneme $\mathsf{P}(X \geq 4) = 0,51$.

Příklad 1.12. Náhodná veličina X je dána distribuční funkcí:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0) \\ 0,5\sin(x - \pi/2) + 0,5 & x \in \langle 0; \pi) \\ 1 & x \in \langle \pi; \infty) \end{cases}$$

Určete medián.

Řešení:

Náhodná veličina X je absolutně spojitá, takže nyní řešíme rovnici $F(x_{0,5}) = 0,5$.

$$\begin{aligned} 0,5\sin(x-\pi/2)+0,5 &= 0,5 \\ 0,5\sin(x-\pi/2) &= 0 \\ \sin(x-\pi/2) &= 0 \end{aligned}$$

Poslední rovnice má nekonečné množství řešení, ale jelikož chceme řešení v intervalu $\langle 0;\pi\rangle$, je $x_{0,5} = \pi/2$.

Modus

Další velice užitečnou číselnou charakteristikou je modus. Modus diskrétní náhodné veličiny je její nejpravděpodobnější hodnota. Modus absolutně spojité náhodné veličiny je lokální maximum hustoty pravděpodobnosti. Značíme $\hat{x}$ nebo Mo.

1.5.2. Charakteristiky variability

Rozptyl, směrodatná odchylka

Po střední hodnotě druhou nejdůležitější číselnou charakteristikou je rozptyl. Rozptyl vyjadřuje koncentraci hodnot náhodné veličiny kolem střední hodnoty.

Definice 1.14. Druhý centrální moment náhodné veličiny X nazýváme *rozptyl (variance, disperse) náhodné veličiny* X. Obvykle jej značíme

$$\operatorname{var}(X) = \mathsf{E}[(X-\mathsf{E}(X))^2]. \tag{1.12}$$

Druhou odmocninu z rozptylu $\sigma = \sqrt{\operatorname{var}(X)}$ nazýváme *směrodatná (standardní, střední kvadratická) odchylka náhodné veličiny* X.

Některé vlastnosti rozptylu shrnuje následující věta.

Věta 1.15. *Nechť náhodná veličina X má konečný rozptyl a nechť a, b, c jsou libovolná reálná čísla. Pak platí*

1. $\operatorname{var}(X) \geq 0$,
2. $\operatorname{var}(a+bx) = b^2\operatorname{var}(x)$,
3. $\operatorname{var}(X) = \mathsf{E}(X^2) - [\mathsf{E}(X)]^2$,
4. $\mathsf{P}(X = c) = 1 \Leftrightarrow var(X) = 0$.

Příklad 1.13. Náhodná veličina X je dána tabulkou rozdělení pravděpodobností:

x_i	1	2	3
$p(x_i)$	0,23	0,58	0,19

Určete střední hodnotu a rozptyl.

Řešení:

Náhodná veličina X je diskrétního typu, takže pro výpočet střední hodnoty využijeme vztahu (1.8) na straně 22.

$\mathsf{E}(X) = 1 \times 0,18 + 2 \times 0,58 + 3 \times 0,19 = 1,96.$

Rozptyl je definován vztahem (1.3), ale snadnější je výpočet podle vlastnosti 3. ve větě 1.15. V této vlastnosti vystupuje $\mathsf{E}(X^2)$, takže nejdříve musíme spočítat:

$\mathsf{E}(X^2) = 1^2 \times 0,18 + 2^2 \times 0,58 + 3^2 \times 0,19 = 4,26.$

$\mathrm{var}(X) = 4,26 - 1,96^2 = 0,4184.$

Příklad 1.14. Náhodná veličina X je dána hustotou pravděpodobnosti:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; -1) \\ \frac{x+1}{2} & x \in \langle -1; 1) \\ 0 & x \in \langle 1; \infty) \end{cases}$$

Určete střední hodnotu a rozptyl.

Řešení:

Náhodná veličina X je absolutně spojitá, takže k výpočtu střední hodnoty využijeme vztahu (1.10) na straně 23. Integrály z nuly nezahrnujeme do výpočtu, protože jsou nulové.

$\mathsf{E}(X) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2+x}{2} \mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$

Rozptyl opět spočítáme podle vlastnosti 3. z věty 1.15.

$\mathsf{E}(X^2) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^3+x^2}{2} \mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$

$\mathrm{var}(X) = \frac{1}{3} - (\frac{1}{3})^2 = \frac{2}{9}.$

1.5.3. Momenty

Definice 1.16. Nechť X je náhodná veličina, $r = 1, 2, \dots$

$\mathsf{E}(X^r)$ nazýváme *r-tý (počáteční nebo obecný) moment*,
$\mathsf{E}(|X|^r)$ nazýváme *r-tý absolutní (obecný) moment.*

Má-li X konečnou střední hodnotu

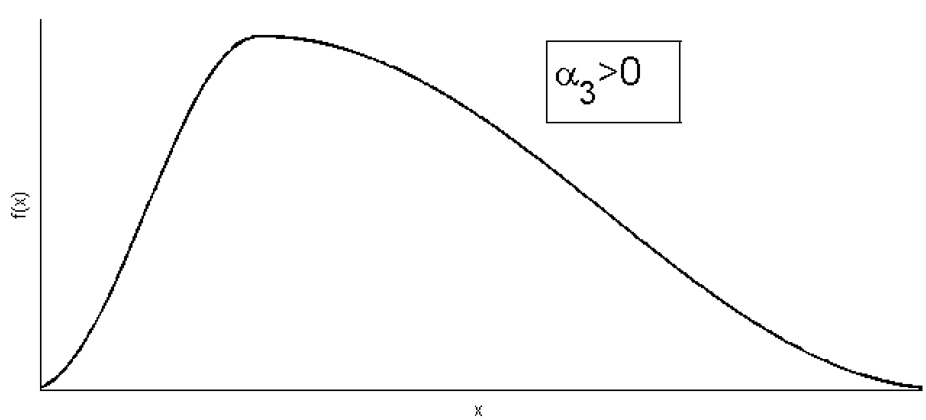
$\mathsf{E}[(X - \mathsf{E}(X))^r]$ nazýváme *r-tý centrální moment*,
$\mathsf{E}(|X - \mathsf{E}(X)|^r)$ nazýváme *r-tý centrální absolutní moment.*

1.5.4. Koeficient šikmosti

Chceme-li charakterizovat symetrii rozdělení, používáme koeficient šikmosti. Ten poskytuje informaci o tom, zda je rozdělení symetrické, protáhlejší směrem vlevo nebo protáhlejší směrem vpravo. Definujeme ho vztahem:

$$\alpha_3(X) = \frac{\mathsf{E}[(X - \mathsf{E}(X))^3]}{(\sqrt{\mathrm{var}(X)})^3}. \tag{1.13}$$

Pro hodnotu $\alpha_3(X) = 0$ je rozdělení symetrické, pro hodnotu $\alpha_3(X) > 0$ je rozdělení protáhlejší směrem vpravo a pro hodnotu $\alpha_3(X) < 0$ je rozdělení protáhlejší směrem vlevo.



Obrázek 1.7: Kladný koeficient šikmosti

1.5.5. Koeficient špičatosti

Koeficient špičatosti charakterizuje fakt, zda je pravděpodobnostní funkce nebo hustota na svých koncích menší nebo větší než hustota normálního rozdělení se stejnou střední hodnotou a se stejným rozptylem. Definujeme ho vztahem:

$$\alpha_4(X) = \frac{\mathsf{E}[(X - \mathsf{E}(X))^4]}{(\sqrt{\mathrm{var}(X)})^4} - 3. \tag{1.14}$$

Při jeho kladné (záporné) hodnotě je pravděpodobnostní funkce nebo hustota na svých koncích větší (menší) než hustota normálního rozdělení se stejnou střední hodnotou a se stejným rozptylem.

1.6. Standardizace náhodné veličiny

V praxi, hlavně ve statistice, někdy potřebujeme porovnat dvě nebo i více náhodných veličin. Přímému porovnání brání obecně rozdílné číselné charakteristiky, jako jsou střední hodnota a rozptyl. Proto definujeme nový proces zvaný *standardizace*, který tyto číselné charakteristiky transformuje po řadě na 0 a 1, a tím potlačí jejich vliv.

Definice 1.17. Nechť náhodná veličina X má střední hodnotu a nenulový rozptyl. Uvažujme náhodnou veličinu

$$Y = \frac{X - \mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}}.$$

Potom platí

$$\mathsf{E}(Y) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}}\,\mathsf{E}[X - \mathsf{E}(X)] = 0,$$

$$\mathrm{var}(Y) = \left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}}\right)^2 \mathrm{var}[X - \mathsf{E}(X)] = 1.$$

Říkáme, že náhodná veličina Y je *normovaná* nebo *standardizovaná*.

Kapitola 2

Základní rozdělení pravděpodobností

2.1. Diskrétní rozdělení

2.1.1. Alternativní (nula-jedničkové) rozdělení

Tímto rozdělením modelujeme situace, kdy existují dvě možnosti, jak může náhodný pokus skončit. Např. výsledek příkladu je správný, nebo špatný; narodí se chlapec, nebo holka, aj. Jeden výsledek vždy považujeme za úspěch; X je pak rovno počtu úspěchů, které nastanou v pokuse. Toto rozdělení má jeden parametr $p \in (0; 1)$, který je roven pravděpodobnosti úspěchu. Značíme $X \sim \mathrm{Alt}(p)$. Náhodná veličina s tímto rozdělením nabývá pouze dvou hodnot $x_1 = 0$ (neúspěch), $x_2 = 1$ (úspěch) s pravděpodobnostmi

$$p_1 = \mathsf{P}(X = 0) = 1 - p, \quad p_2 = \mathsf{P}(X = 1) = p,$$

kde $p \in (0; 1)$ je parametr tohoto rozdělení.
Distribuční funkce vypadá takto:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0) \\ 1 - p & x \in \langle 0; 1) \\ 1 & x \in \langle 1; \infty) \end{cases}$$

Střední hodnota je rovna pravděpodobnosti úspěchu.

$$\mathsf{E}(X) = p.$$

Rozptyl je roven součinu pravděpodobností úspěchu a neúspěchu.

$$\mathrm{var}(X) = p(1-p).$$

2.1.2. Binomické rozdělení

Toto rozdělení představuje výsledek n-krát opakovaného alternativního pokusu. Např. kolikrát padne orel při čtyřech hodech mincí; kolik výrobků bude bez vady z pěti, aj. Jeden výsledek vždy považujeme za úspěch; X je pak rovno počtu úspěchů v n nezávislých pokusech. Toto rozdělení má dva parametry $p \in (0;1)$ a $n \in N$, které postupně vyjadřují pravděpodobnost úspěchu a počet opakování pokusu. Značíme $X \sim \mathrm{Bi}(n,p)$. Náhodná veličina s tímto rozdělením nabývá hodnot $k = 0, 1, , \ldots, n$ s pravděpodobnostmi

$$p_k = \mathsf{P}(X = k) = \binom{n}{p} p^k (1-p)^{n-k},$$

kde $p \in (0;1)$ a $n \in N$ jsou parametry tohoto rozdělení.
Distribuční funkce vypadá takto:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0) \\ \sum_{k \le x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & x \in \langle 0; n) \\ 1 & x \in \langle n; \infty) \end{cases}$$

Střední hodnota je rovna součinu pravděpodobnosti úspěchu a počtu opakování.

$$\mathsf{E}(X) = np.$$

Rozptyl je roven součinu pravděpodobnosti úspěchu, pravděpodobnosti neúspěchu a počtu opakování.

$$\mathrm{var}(X) = np(1-p).$$

2.1.3. Poissonovo rozdělení

Toto rozdělení je limitním případem binomického rozdělení pro $n \to \infty$. Výskyt jevu je s malou pravděpodobností. Představuje počet úspěchů, kde teoretickým maximem je nekonečno. Toto rozdělení má jeden parametr $\lambda > 0$. Značíme

$X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$. Náhodná veličina s tímto rozdělením nabývá hodnot $k = 0, 1, \ldots$ s pravděpodobnostmi

$$p_k = \mathsf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

kde $\lambda \in (0; \infty)$ je parametr tohoto rozdělení. Distribuční funkce vypadá takto:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0) \\ \sum_{k \leq x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & x \in \langle 0; \infty) \end{cases}$$

Střední hodnota i rozptyl jsou rovny parametru λ:

$$\mathsf{E}(X) = \lambda, \quad \mathrm{var}(X) = \lambda.$$

2.1.4. Hypergeometrické rozdělení

Toto rozdělení modeluje situaci, kdy máme množinu N prvků, mezi kterými je M s určitou vlastností. Náhodná veličina s tímto rozdělením pak představuje počet prvků s danou vlastností mezi n vybranými. Značíme $X \sim \mathrm{Hg}(N, M, n)$. Náhodná veličina s tímto rozdělením nabývá hodnot $k = 0, 1, \ldots, n$ s pravděpodobnostmi

$$p_k = \mathsf{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

kde parametry M, N a n jsou celá nezáporná čísla splňující nerovnosti $1 \leq n < N$ a $1 \leq M < N$. Distribuční funkci určíme podle vztahu (1.1) na straně 12:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0) \\ \sum_{k \leq x} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} & x \in \langle 0; n) \\ 1 & x \in \langle n; \infty) \end{cases}$$

Střední hodnota je rovna součinu počtu vybraných prvků a podílu počtu prvků s vlastností a počtu prvků bez vlastnosti.

$$\mathsf{E}(X) = n\frac{M}{N}.$$

Pro rozptyl hypergeometrického rozdělení platí:

$$\mathrm{var}(X) = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.$$

2.1.5. Geometrické rozdělení

Toto rozdělení představuje počet neúspěchů, než nastane požadovaný výsledek. Např. po kolika hodech hodíme šestku na hrací kostce. Toto rozdělení má jeden parametr $p \in (0;1)$, který představuje pravděpodobnost úspěchu. Značíme $X \sim \mathrm{Ge}(p)$. Náhodná veličina s tímto rozdělením nabývá hodnot $k = 0, 1, \ldots$ s pravděpodobnostmi

$$p_k = \mathsf{P}(X = k) = (1-p)^k p,$$

kde $p \in (0;1)$ je parametr tohoto rozdělení. Distribuční funkci určíme podle vztahu (1.1) na straně 12:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0) \\ \sum_{k \leq x} (1-p)^k p & x \in \langle 0; \infty) \end{cases}$$

Střední hodnota je rovna podílu pravděpodobností neúspěchu a úspěchu.

$$\mathsf{E}(X) = \frac{1-p}{p}.$$

Pro rozptyl geometrického rozdělení platí:

$$\mathrm{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

2.2. Absolutně spojitá rozdělení

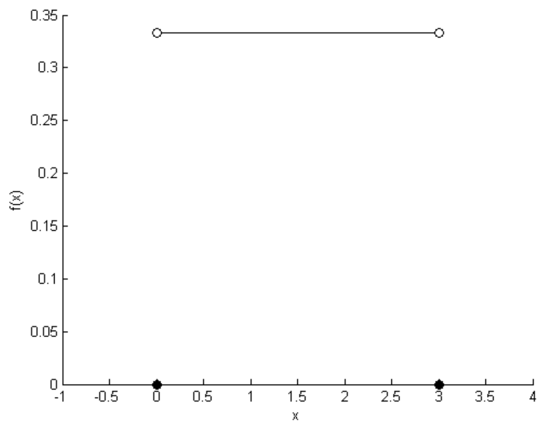
2.2.1. Rovnoměrné rozdělení

Toto rozdělení má dva parametry $a < b$, které jsou reálnými čísly. Tímto rozdělením modelujeme např. chybu při zaokrouhlování. Toto rozdělení má hustotu:

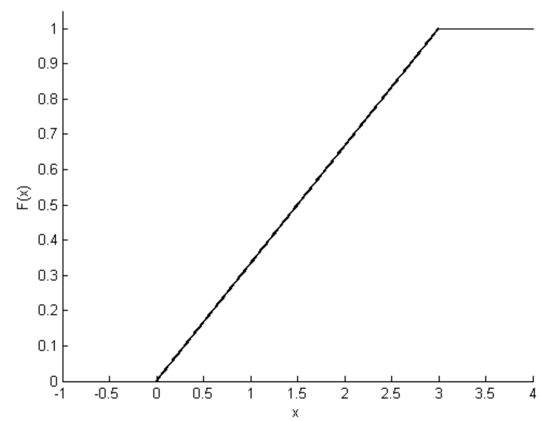
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; a\rangle \\ \frac{1}{b-a} & x \in (a; b) \\ 0 & x \in \langle b; \infty) \end{cases}$$

Distribuční funkci získáme jako obvykle integrováním hustoty.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; a) \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in \langle a; b) \\ 1 & x \in \langle b; \infty) \end{cases}$$



Obrázek 2.1: Hustota náhodné veličiny $X \sim \mathrm{Ro}(0, 3)$.



Obrázek 2.2: Distribuční funkce náhodné veličiny $X \sim \mathrm{Ro}(0, 3)$.

Nakonec vypočteme základní číselné charakteristiky:

$$\mathsf{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Značíme $X \sim \mathrm{Ro}(a, b)$.

2.2.2. (Obecné) normální rozdělení

(Obecné) normální rozdělení má náhodná veličina X, která má hustotu:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R^1,$$

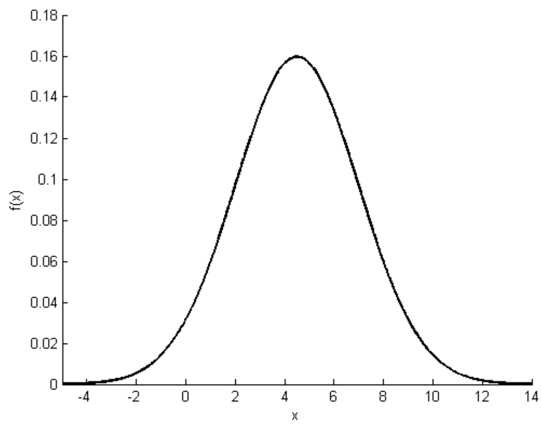
kde $\mu \in R^1$ a $\sigma > 0$ jsou parametry tohoto rozdělení. Střední hodnota je rovna parametru μ.

$$\mathsf{E}(X) = \mu.$$

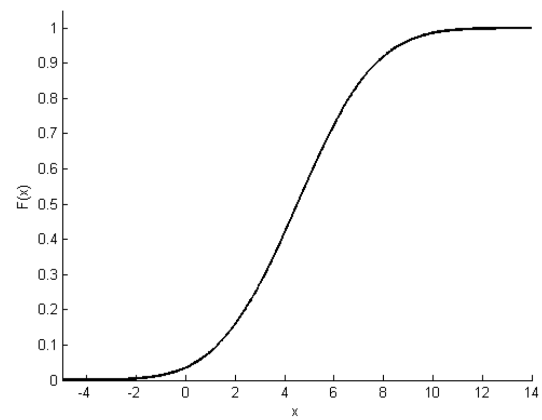
Rozptyl je roven parametru σ umocněnému na druhou.

$$\mathrm{var}(X) = \sigma^2.$$

Značíme $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.



Obrázek 2.3: Hustota náhodné veličiny $X \sim \mathrm{N}(4,5;2,5)$.



Obrázek 2.4: Distribuční funkce náhodné veličiny $X \sim \mathrm{N}(4,5;2,5)$.

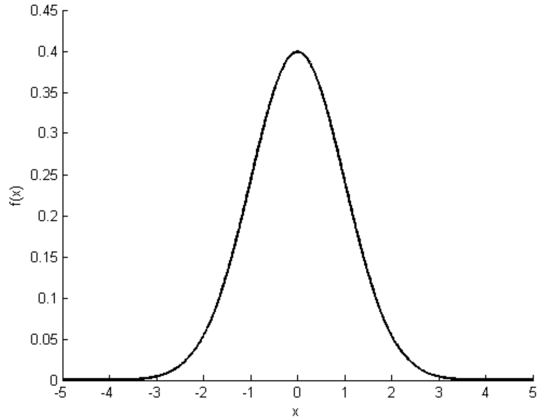
2.2.3. Normální normované rozdělení

Toto rozdělení je speciálním případem předchozího rozdělení s parametry $\mu = 0$ a $\sigma = 1$. Toto rozdělení má hustotu:

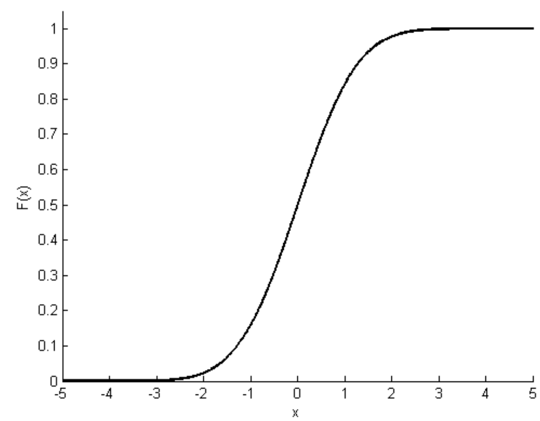
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x \in R^1.$$

Střední hodnota a rozptyl jsou po řadě rovny 0 a 1. Proto tomuto rozdělení říkáme normované.

$$\mathsf{E}(X) = 0, \quad \mathrm{var}(X) = 1.$$



Obrázek 2.5: Hustota náhodné veličiny $X \sim \mathrm{N}(0,1)$.



Obrázek 2.6: Distribuční funkce náhodné veličiny $X \sim \mathrm{N}(0,1)$.

Značíme $X \sim \mathrm{N}(0,1)$. Je zvykem označovat jeho distribuční funkci $\Phi(x)$. Pro distribuční funkce obecného a normovaného normálního rozdělení platí vztah:

$$F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) \quad x \in R^1.$$

2.2.4. Exponenciální rozdělení

Toto rozdělení dobře popisuje životnost různých zařízení, kde selhání nastupuje ze zcela náhodných příčin. Exponenciální rozdělení má náhodná veličina X, která má hustotu:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0\rangle \\ \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & x \in (0; \infty) \end{cases}$$

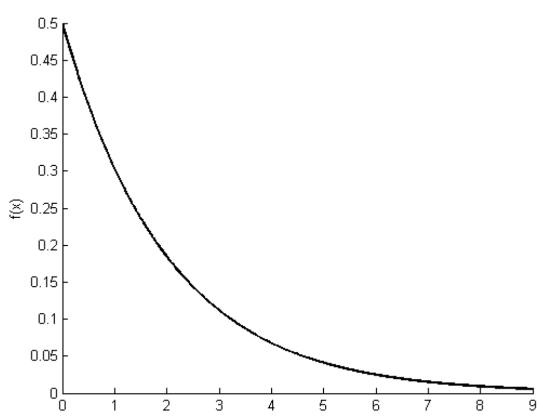
kde $\lambda > 0$ je parametr tohoto rozdělení. Distribuční funkce vypadá takto:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0\rangle \\ 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}} & x \in (0; \infty) \end{cases}$$

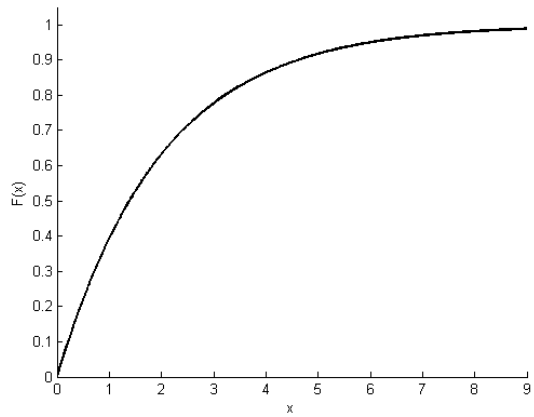
Střední hodnota a rozptyl jsou po řadě rovny parametru λ a jeho druhé mocnině.

$$\mathsf{E}(X) = \lambda, \quad \mathrm{var}(x) = \lambda^2.$$

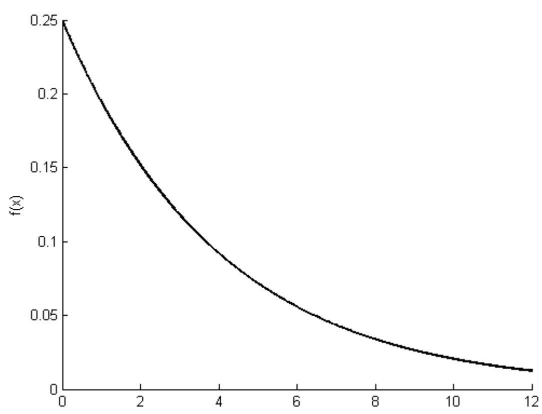
Značíme $X \sim \mathrm{Ex}(\lambda)$.



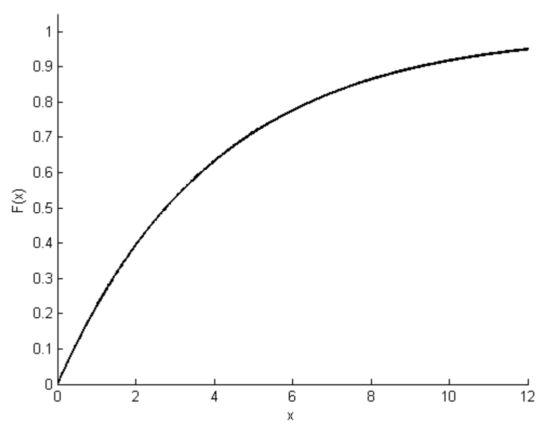
Obrázek 2.7: Hustota náhodné veličiny $X \sim \mathrm{Ex}(2)$.



Obrázek 2.8: Distribuční funkce náhodné veličiny $X \sim \mathrm{Ex}(2)$.



Obrázek 2.9: Hustota náhodné veličiny $X \sim \mathrm{Ex}(4)$.



Obrázek 2.10: Distribuční funkce náhodné veličiny $X \sim \mathrm{Ex}(4)$.

Kapitola 3

Řešené příklady

3.1. Distribuční funkce a hustota

Příklad 3.1. V mrazícím boxu v supermarketu mají v jedné krabici 5 nanuků po dvanácti korunách a 3 nanuky po patnácti korunách. Zákazník náhodně vybere 3 nanuky z této krabice. Určete rozdělení pravděpodobností a distribuční funkci pro cenu vybraných nanuků a pravděpodobnost, že zákazník zaplatí nejvýše 40 korun.

Řešení:

Náhodná veličina X „cena vytažených nanuků“ může nabývat hodnot 36 (tři nanuky za 12 korun), 39 (2 nanuky za 12 korun + 1 nanuk za 15 korun), 42 (1 nanuk za 12 korun + 2 nanuky za 15 korun) nebo 45 (3 nanuky za 15 korun). Vypočítáme pravděpodobnosti pro jednotlivé hodnoty náhodné veličiny X.

$p_1 = \mathsf{P}(X = 36) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{5}{8}\frac{4}{7}\frac{3}{6} = \frac{5}{28} = 0,1786.$

(Vybíráme tři nanuky za 12 korun, kterých je 5 mezi 8.)

$p_2 = \mathsf{P}(X = 39) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} = 3\frac{5}{8}\frac{4}{7}\frac{3}{6} = \frac{15}{28} = 0,5357.$

(Vybíráme dva nanuky za 12 korun, kterých je 5 mezi 8, a jeden nanuk za 15 korun, kterých jsou 3 mezi 8.)

$p_3 = \mathsf{P}(X = 42) = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{2}}{\binom{8}{3}} = 3\frac{5}{8}\frac{3}{7}\frac{2}{6} = \frac{15}{56} = 0,2679.$

(Vybíráme jeden nanuk za 12 korun, kterých je 5 mezi 8, a dva nanuky za 15 korun, kterých jsou 3 mezi 8.)

$p_4 = \mathsf{P}(X = 45) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{3}{8}\frac{2}{7}\frac{1}{6} = \frac{1}{56} = 0,0179.$

(Vybíráme tři nanuky za 15 korun, kterých jsou 3 mezi 8.)

Sestavíme tabulku rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X. První řádek tvoří realizace náhodné veličiny X a druhý řádek tvoří pravděpodobnosti těchto realizací.

x_i	36	39	42	45
$p(x_i)$	0,1786	0,5357	0,2679	0,0179

Náhodná veličina X je diskrétní, takže k výpočtu distribuční funkce použijeme vztah (1.1) na straně 12. Pro připomenutí, vztah vypadá takto:

$$F(x) = \sum_{i:x_i \leq x} p(x_i).$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 36) \\ 0,1786 & x \in \langle 36; 39) \\ 0,7143 & x \in \langle 39; 42) \\ 0,9821 & x \in \langle 42; 45) \\ 1 & x \in \langle 45; \infty) \end{cases}$$

Pravděpodobnost, že zákazník zaplatí nejvýše 40 korun můžeme určit dvěma způsoby. Jednodušší je určit tuto pravděpodobnost z distribuční funkce, protože podle definice distribuční funkce je:

$$F(x) = \mathsf{P}(X \leq x)$$

a my chceme vypočítat $\mathsf{P}(X \leq 40)$. Druhým způsobem je sečíst pravděpodobnosti realizací menších nebo rovných 40.

- z distribuční funkce:

$\mathsf{P}(X \leq 40) = F(40) = 0,7143.$

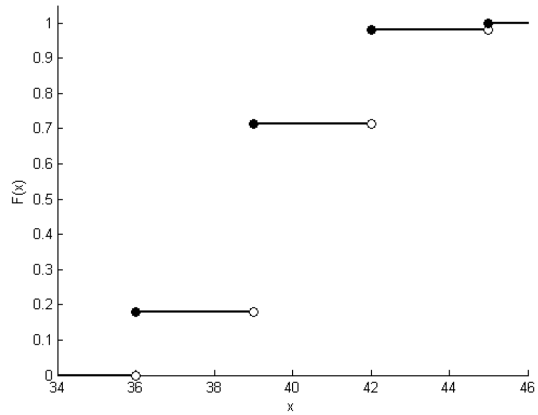
- jako součet pravděpodobností:

$\mathsf{P}(X \leq 40) = \mathsf{P}(X = 36) + \mathsf{P}(X = 39) = 0,1786 + 0,5357 = 0,7143.$

Graf distribuční funkce je na obrázku 3.1.

Příklad 3.2. Náhodná veličina X udává součet dvou přirozených čísel menších než 5. Zjistěte

a) rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X,



Obrázek 3.1: Graf distribuční funkce z příkladu 3.1.

b) distribuční funkci náhodné veličiny X a nakreslete její graf,

c) pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabývá hodnoty z intervalu $\langle 4; 7\rangle$.

Řešení:

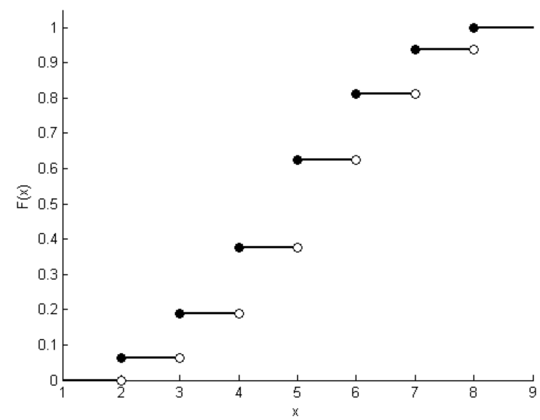
a) Přirozená čísla menší než 5 jsou čtyři (1, 2, 3 a 4). Na dvě místa je můžeme dosadit 16 způsoby. Náhodná veličina X může tedy nabývat hodnot 2 až 8. Stanovíme pravděpodobnosti pro jednotlivé hodnoty náhodné veličiny X.

$p_1 = \mathsf{P}(X = 2) = \frac{1}{16}$ dvojice $(1, 1)$
$p_2 = \mathsf{P}(X = 3) = \frac{2}{16}$ dvojice $(1, 2)$ a $(2, 1)$
$p_3 = \mathsf{P}(X = 4) = \frac{3}{16}$ dvojice $(1, 3), (2, 2)$ a $(3, 1)$
$p_4 = \mathsf{P}(X = 5) = \frac{4}{16}$ dvojice $(1, 4), (2, 3), (3, 2)$ a $(4, 1)$
$p_5 = \mathsf{P}(X = 6) = \frac{3}{16}$ dvojice $(2, 4), (3, 3)$ a $(4, 2)$
$p_6 = \mathsf{P}(X = 7) = \frac{2}{16}$ dvojice $(3, 4)$ a $(4, 3)$
$p_7 = \mathsf{P}(X = 8) = \frac{1}{16}$ dvojice $(4, 4)$

Stejně jako v předchozím příkladě sestavíme tabulku rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X.

x_i	2	3	4	5	6	7	8
$p(x_i)$	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16

b) Náhodná veličina X je diskrétní, takže její distribuční funkci sestavíme jako v předchozím příkladě.



Obrázek 3.2: Graf distribuční funkce z příkladu 3.2.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 2) \\ 1/16 & x \in \langle 2; 3) \\ 3/16 & x \in \langle 3; 4) \\ 6/16 & x \in \langle 4; 5) \\ 10/16 & x \in \langle 5; 6) \\ 13/16 & x \in \langle 6; 7) \\ 15/16 & x \in \langle 7; 8) \\ 1 & x \in \langle 8; \infty) \end{cases}$$

Graf distribuční funkce je na obrázku 3.2.

c) Při výpočtu pravděpodobnosti $\mathsf{P}\{X \in \langle 4; 7\rangle\}$ postupujeme stejně jako v předchozím příkladě.

- z distribuční funkce:

$\mathsf{P}(X \in \langle 4; 7\rangle) = F(7) - F(4-0) = \frac{15}{16} - \frac{3}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

- jako součet pravděpodobností:

$\mathsf{P}(X \in \langle 4; 7\rangle) = \mathsf{P}(X = 4) + \mathsf{P}(X = 5) + \mathsf{P}(X = 6) + \mathsf{P}(X = 7) =$

$= \frac{3}{16} + \frac{4}{16} + \frac{3}{16} + \frac{2}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

Příklad 3.3. Rozhodněte, které z uvedených náhodných veličin jsou diskrétní a které jsou spojité a stanovte množinu všech hodnot náhodné veličiny:

a) úhel mezi dvěma přímkami,

b) počet jablek v košíku,

c) hmotnost tělesa,

d) počet bodů z testu složeného z 20 otázek, kde za každou správnou odpověď získáváte jeden bod.

Řešení:

a) spojitá náhodná veličina nabývající hodnot z intervalu $\langle 0; \pi/2\rangle$,

b) diskrétní náhodná veličina teoreticky nabývající celých nezáporných čísel, ale prakticky nás omezuje velikost košíku,

c) spojitá náhodná veličina nabývající hodnot z intervalu $\langle 0; \infty)$,

d) diskrétní náhodná veličina nabývající celých čísel z intervalu $\langle 0; 20\rangle$.

Příklad 3.4. Náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci:

$\mathsf{P}(X = x) = 1/62 \times 2^x \quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Jaká je pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabývá hodnoty

a) menší než 3, b) větší než 4, c) větší než 1 a menší než 4?

Určete distribuční funkci a nakreslete její graf.

Řešení:

Nejdřív určíme jednotlivé pravděpodobnosti dosazením z oboru hodnot za x do pravděpodobnostní funkce.

$p_1 = \mathsf{P}(X = 1) = \frac{1}{31}$

$p_2 = \mathsf{P}(X = 2) = \frac{2}{31}$

$p_3 = \mathsf{P}(X = 3) = \frac{4}{31}$

$p_4 = \mathsf{P}(X = 4) = \frac{8}{31}$

$p_5 = \mathsf{P}(X = 5) = \frac{16}{31}$

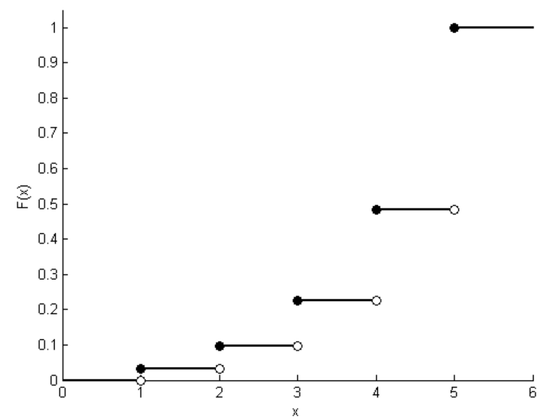
Pravděpodobnosti požadované v otázce dostaneme jako součet pravděpodobností příslušných hodnot.

a) $\mathsf{P}(X < 3)$=P(X = 1) + P(X = 2) = $\frac{3}{31}$.

b) $\mathsf{P}(X > 4)$=P(X = 5) = $\frac{16}{31}$.

c) $\mathsf{P}(1 < X < 4)$=P(X = 2) + P(X = 3) = $\frac{6}{31}$.

Nakonec určíme distribuční funkci stejně jako v prvním příkladě.



Obrázek 3.3: Graf distribuční funkce z příkladu 3.4.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 1) \\ 1/31 & x \in \langle 1; 2) \\ 3/31 & x \in \langle 2; 3) \\ 7/31 & x \in \langle 3; 4) \\ 15/31 & x \in \langle 4; 5) \\ 1 & x \in \langle 5; \infty) \end{cases}$$

Graf distribuční funkce je na obrázku 3.3.

Příklad 3.5. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X je dána funkcí:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; -0,5) \\ x^2 - 3x & x \in \langle -0,5; 0) \\ 1 & x \in \langle 0; 7/12) \\ 0 & x \in \langle 7/12; \infty) \end{cases}$$

a) určete distribuční funkci F,

b) určete $\mathsf{P}\{X \in (-0,4; 1)\}$,

c) nakreslete graf hustoty a distribuční funkce.

Řešení:

a) Náhodná veličina X je absolutně spojitá, k určení distribuční funkce tedy využijeme vztah (1.2) na straně 12. Pro připomenutí, vztah vypadá takto:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

$x \in (-\infty; -0,5)$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t = 0$

$x \in \langle -0,5; 0)$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{-0,5} 0\mathrm{d}t + \int_{-0,5}^{x} (t^2 - 3t)\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3} - 1,5x^2 + \frac{5}{12}$

$x \in \langle 0; 7/12)$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{-0,5} 0\mathrm{d}t + \int_{-0,5}^{0} (t^2 - 3t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} 1\mathrm{d}t = x + \frac{5}{12}$

$x \in \langle 7/12; \infty)$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{-0,5} 0\mathrm{d}t + \int_{-0,5}^{0} (t^2 - 3t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{7/12} 1\mathrm{d}t + \int_{7/12}^{x} 0\mathrm{d}t = 1$

Distribuční funkci zapíšeme obvyklým způsobem.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; -0,5) \\ \frac{x^3}{3} - 1,5x^2 + \frac{5}{12} & x \in \langle -0,5; 0) \\ x + \frac{5}{12} & x \in \langle 0; 7/12) \\ 1 & x \in \langle 7/12; \infty) \end{cases}$$

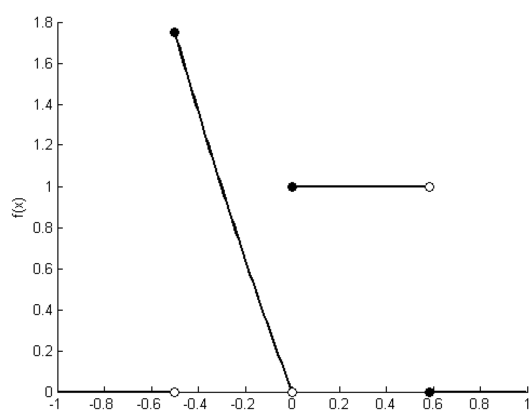
b) Danou pravděpodobnost můžeme určit z distribuční funkce.

$\mathsf{P}\{X \in (-0,4; 1)\} = F(1) - F(-0,4) \doteq 1 - 0,1553 = 0,8447.$

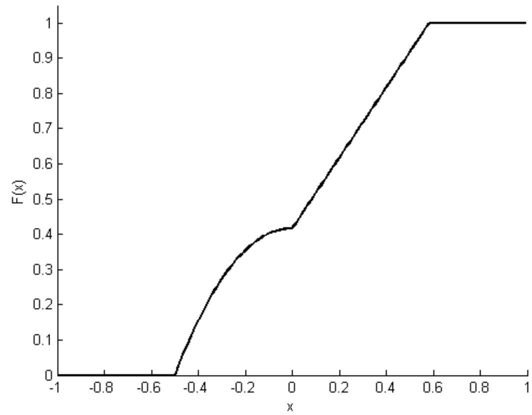
Druhou možností, jak určit danou pravděpodobnost, je přeintegrovat hustotu přes interval $(-0,4; 1)$.

$\mathsf{P}\{X \in (-0,4; 1)\} = \int_{-0,4}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-0,4}^{0} (x^2 - 3x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{7/12} 1\mathrm{d}x + \int_{7/12}^{1} 0\mathrm{d}x \doteq 0,8447.$

c) Graf hustoty je na obrázku 3.4 a graf distribuční funkce je na obrázku 3.5.



Obrázek 3.4: Graf hustoty z příkladu 3.5.



Obrázek 3.5: Graf distribuční funkce z příkladu 3.5.

Příklad 3.6. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X je dána funkcí:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 3) \\ \frac{x-3}{4} & x \in \langle 3; 5) \\ \frac{7-x}{3} & x \in \langle 5; 6) \\ 0 & x \in \langle 6; \infty) \end{cases}$$

a) určete distribuční funkci F,

b) určete $\mathsf{P}\{X \in (4; 6)\}$,

c) nakreslete graf hustoty a distribuční funkce.

Řešení:

a) Náhodná veličina X je absolutně spojitá, proto distribuční funkci určíme jako v předchozím příkladě.

$x \in (-\infty; 3)$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \mathrm{d}t = 0$

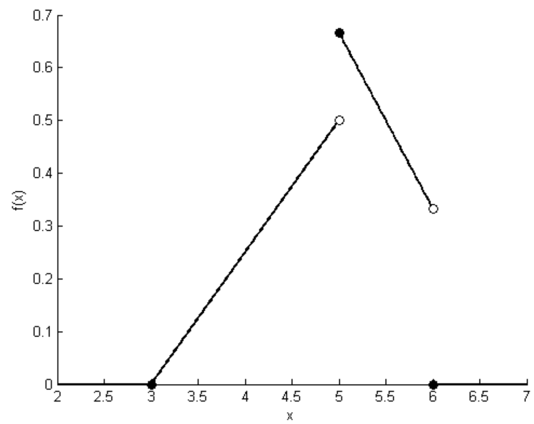
$x \in \langle 3; 5)$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{3} 0 \mathrm{d}t + \int_{3}^{x} \frac{t-3}{4} \mathrm{d}t = \frac{(x-3)^2}{8}$

$x \in \langle 5; 6)$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{3} 0 \mathrm{d}t + \int_{3}^{5} \frac{t-3}{4} \mathrm{d}t + \int_{5}^{x} \frac{7-t}{3} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{(x-5)\times(x-9)}{6}$

$x \in \langle 6; \infty)$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{3} 0 \mathrm{d}t + \int_{3}^{5} \frac{t-3}{4} \mathrm{d}t + \int_{5}^{6} \frac{7-t}{3} \mathrm{d}t + \int_{6}^{\infty} 0 \mathrm{d}t = 1$

Distribuční funkci zapíšeme obvyklým způsobem.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 3) \\ \frac{(x-3)^2}{8} & x \in \langle 3; 5) \\ \frac{1}{2} - \frac{(x-5)\times(x-9)}{6} & x \in \langle 5; 6) \\ 1 & x \in \langle 6; \infty) \end{cases}$$



Obrázek 3.6: Graf hustoty z příkladu 3.6.

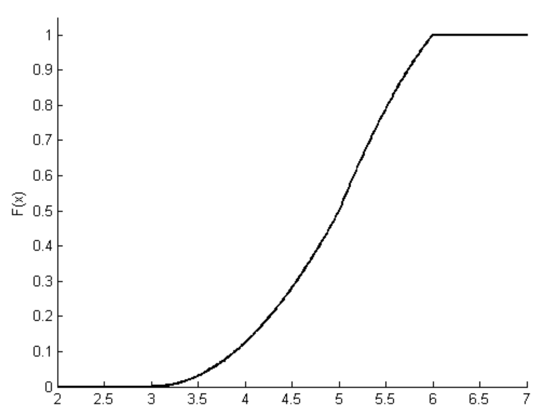
b) Danou pravděpodobnost můžeme určit z distribuční funkce.

$\mathsf{P}\{X \in (4;6)\} = F(6) - F(4) = 1 - 0,125 = 0,875.$

Druhou možností, jak určit danou pravděpodobnost, je přeintegrovat hustotu přes interval $(4;6)$.

$\mathsf{P}\{X \in (4;6)\} = \int_4^6 f(x)\mathrm{d}x = \int_4^5 \frac{x-3}{4}\mathrm{d}x + \int_5^6 \frac{7-x}{3}\mathrm{d}x = 0,875.$

c) Graf hustoty je na obrázku 3.6 a graf distribuční funkce je na obrázku 3.7.



Obrázek 3.7: Graf distribuční funkce z příkladu 3.6.

Příklad 3.7. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X je dána funkcí:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0) \\ ax\cos(x/4) & x \in \langle 0; \pi) \\ 0 & x \in \langle \pi; \infty) \end{cases}$$

a) vypočítejte koeficient a,

b) určete distribuční funkci F,

c) určete $\mathsf{P}\{X \in (\pi/2; 3\pi/2)\}$,

d) nakreslete graf hustoty a distribuční funkce.

Řešení:

a) K výpočtu koeficientu a využijeme vlastnosti, že integrál z hustoty přes celou reálnou osu je 1, tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

$1 = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\pi} ax\cos(x/4)\mathrm{d}x + \int\limits_{\pi}^{\infty} 0\mathrm{d}x \doteq 4,1995a.$

$a = 1/4,1995 \doteq 0,2381.$

Ještě je nutné ověřit platnost druhé vlastnosti hustoty, a to $f(x) \geq 0$. Tato podmínka je splněna, hustota je tvaru $0,2381x\cos(x/4)$ pro $x \in \langle 0; \pi)$.

b) Náhodná veličina X je absolutně spojitá, distribuční funkci určíme jako v předchozím příkladě.

$$\begin{array}{ll} x \in (-\infty; 0) & F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t = 0 \\ x \in \langle 0; \pi) & F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} 0,2381t\cos(t/4)\mathrm{d}t = \frac{2381x\sin(x/4)}{2500} - \frac{4762(\sin(x/8))^2}{625} \\ x \in \langle \pi; \infty) & F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} 0,2381t\cos(t/4)\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{x} 0\mathrm{d}t = 1 \end{array}$$

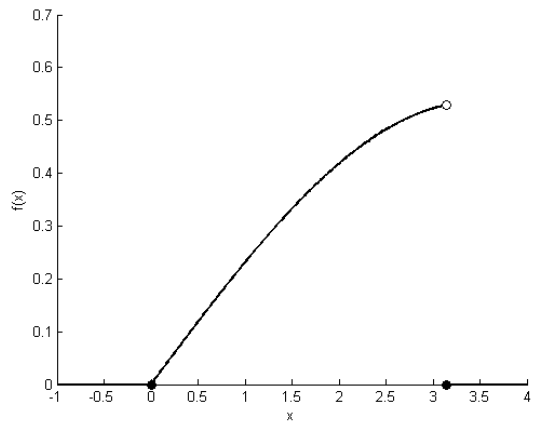
Distribuční funkci přepíšeme obvyklým způsobem.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0) \\ \frac{2381x\sin(x/4)}{2500} - \frac{4762(\sin(x/8))^2}{625} & x \in \langle 0; \pi) \\ 1 & x \in \langle \pi; \infty) \end{cases}$$

c) Danou pravděpodobnost můžeme určit z distribuční funkce.

$\mathsf{P}\{X \in (\pi/2; 3\pi/2)\} = F(3\pi/2) - F(\pi/2) \doteq 1 - 0,2825 = 0,7175.$

Druhou možností, jak určit danou pravděpodobnost, je přeintegrovat hustotu přes

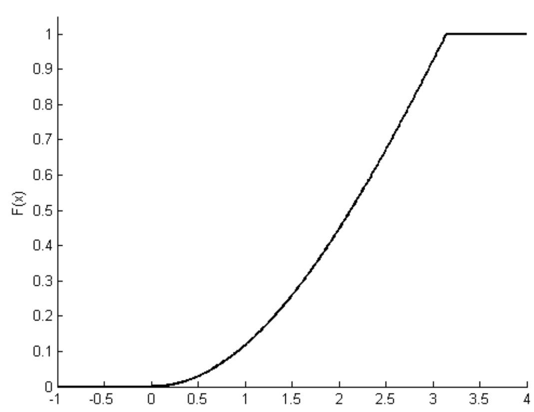


Obrázek 3.8: Graf hustoty z příkladu 3.7.

interval $(\pi/2; 3\pi/2)$.

$\mathsf{P}\{X \in (\pi/2; 3\pi/2)\} = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^{\pi} 0,2381x\cos(x/4)\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{3\pi/2} 0\mathrm{d}x \doteq 0,7175.$

d) Graf hustoty je na obrázku 3.8 a graf distribuční funkce je na obrázku 3.9.



Obrázek 3.9: Graf distribuční funkce z příkladu 3.7.

Příklad 3.8. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X je dána funkcí:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0) \\ a\sin(3x/4) & x \in \langle 0; 4\pi/9) \\ 0 & x \in \langle 4\pi/9; \infty) \end{cases}$$

a) vypočítejte koeficient a,

b) určete distribuční funkci F,

c) určete $\mathsf{P}\{X \in (\pi/4; 4\pi/9)\}$,

d) nakreslete graf hustoty a distribuční funkce.

Řešení:

a) K výpočtu koeficientu a využijeme vlastnosti, že integrál z hustoty přes celou reálnou osu je 1, tedy

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

$1 = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{4\pi/9} a\sin(3x/4)\mathrm{d}x + \int\limits_{4\pi/9}^{\infty} 0\mathrm{d}x = \frac{2}{3}a.$

$a = 1/\frac{2}{3} = 1,5.$

Ještě je nutno ověřit platnost druhé vlastnosti hustoty, a to $f(x) \geq 0$. Tato podmínka je splněna, hustota je tvaru $f(x) = 1,5\sin(3x/4)$ pro $x \in \langle 0; 4\pi/9)$.

b) Náhodná veličina X je absolutně spojitá, distribuční funkci určíme jako v předchozím příkladě.

$$\begin{array}{ll} x \in (-\infty; 0) & F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t = 0 \\ x \in \langle 0; 4\pi/9) & F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} 1,5\sin(3t/4)\mathrm{d}t = 2 - 2\cos(3x/4) \\ x \in \langle 4\pi/9; \infty) & F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int_{0}^{4\pi/9} 1,5\sin(3t/4)\mathrm{d}t + \int_{4\pi/9}^{x} 0\mathrm{d}t = 1 \end{array}$$

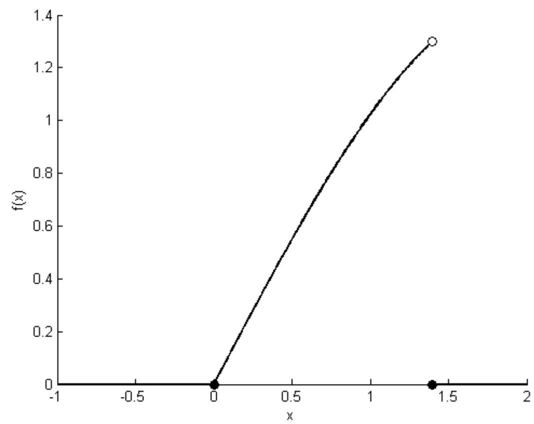
Distribuční funkci přepíšeme v obvyklém tvaru.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0) \\ 2 - 2\cos(3x/4) & x \in \langle 0; 4\pi/9) \\ 1 & x \in \langle 4\pi/9; \infty) \end{cases}$$

c) Danou pravděpodobnost můžeme určit z distribuční funkce.

$\mathsf{P}\{X \in (\pi/4; 4\pi/9)\} = F(4\pi/9) - F(\pi/4) \doteq 1 - 0,3371 = 0,6629.$

Druhou možností, jak určit danou pravděpodobnost, je přeintegrovat hustotu přes

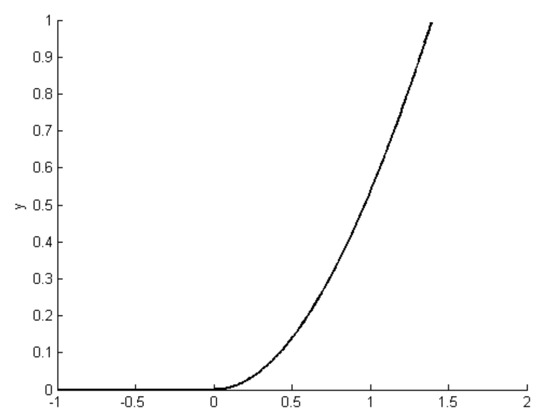


Obrázek 3.10: Graf hustoty z příkladu 3.8.

interval $(\pi/4; 4\pi/9)$.

$\mathsf{P}\{X \in (\pi/4; 4\pi/9)\} = \int_{\pi/4}^{4\pi/9} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\pi/4}^{4\pi/9} 1,5\sin(3x/4)\mathrm{d}x \doteq 0,6629.$

d) Graf hustoty je na obrázku 3.10 a graf distribuční funkce je na obrázku 3.11.



Obrázek 3.11: Graf distribuční funkce z příkladu 3.8.

Příklad 3.9. Náhodná veličina X má distribuční funkci tvaru:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; -1) \\ \frac{x+1}{4} & x \in \langle -1; 3) \\ 1 & x \in \langle 3; \infty) \end{cases}$$

Určete

a) hustotu pravděpodobnosti,

b) pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabývá hodnoty z intervalu (-1,1).

c) nakreslete graf hustoty a distribuční funkce.

Řešení:

a) Hustotu určíme podle vzájemně jednoznačného vztahu (1.3) mezi distribuční funkcí a hustotou na straně 13. Pro připomenutí, vztah vypadá takto:

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}.$$

$$\begin{array}{ll} x \in (-\infty; -1) & f(x) = 0' = 0 \\ x \in \langle -1; 3) & f(x) = (\frac{x+1}{4})' = \frac{1}{4} \\ x \in \langle 3; \infty) & f(x) = 1' = 0 \end{array}$$

Hustotu přepíšeme v obvyklém tvaru.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; -1) \\ 1/4 & x \in \langle -1; 3) \\ 0 & x \in \langle 3; \infty) \end{cases}$$

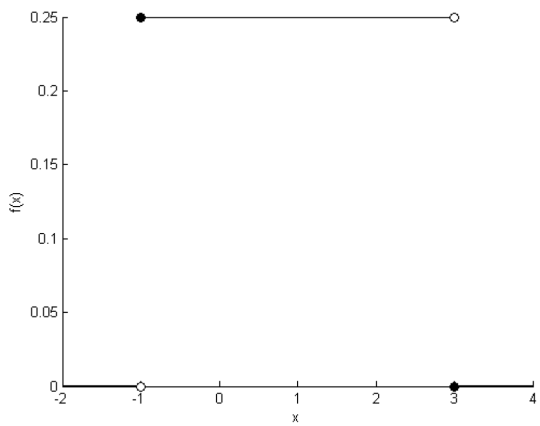
b) Danou pravděpodobnost můžeme určit z distribuční funkce.

$\mathsf{P}\{X \in (-1; 1)\} = F(1) - F(-1) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$.

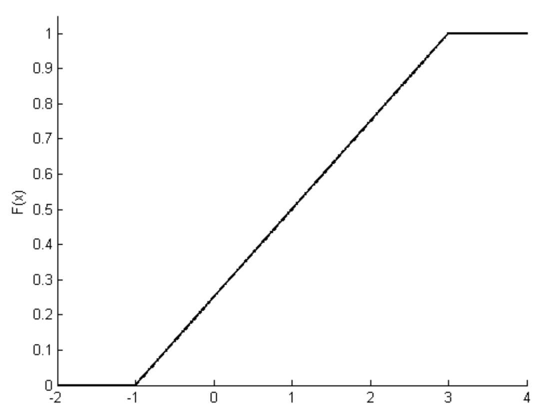
Druhou možností, jak určit danou pravděpodobnost, je přeintegrovat hustotu přes interval $(-1; 1)$.

$\mathsf{P}\{X \in (-1; 1)\} = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 1/4\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

c) Graf hustoty je na obrázku 3.12 a graf distribuční funkce je na obrázku 3.13.



Obrázek 3.12: Graf hustoty z příkladu 3.9.



Obrázek 3.13: Graf distribuční funkce z příkladu 3.9.

Příklad 3.10. Distribuční funkce náhodné veličiny X je dána vztahem:

$F(x) = a + b\arctan(x) \quad x \in R^1$.

a) určete koeficienty a a b,

b) určete hustotu pravděpodobnosti,

c) určete pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabývá hodnoty z intervalu (-2,2).

d) nakreslete graf hustoty a distribuční funkce.

Řešení:

a) K výpočtu koeficientů a a b využijeme vlastností distribuční funkce na svých koncích:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

$0 = \lim_{x\to-\infty} a + b\arctan(x) = a - b\frac{\pi}{2}$

$1 = \lim_{x\to\infty} a + b\arctan(x) = a + b\frac{\pi}{2}$

Z této soustavy teď vypočítáme oba koeficienty.

$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{\pi}$.

Ještě musíme ověřit spojitost zprava a neklesající charakter funkce. Distribuční funkce $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x)$ obě vlastnosti splňuje.

b) Náhodná veličina X je absolutně spojitá, hustotu určíme jako v předchozím příkladě.

$x \in R^1, \quad f(x) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x))' = \frac{1}{\pi x^2+\pi}$.

Hustotu přepíšeme v obvyklém tvaru.

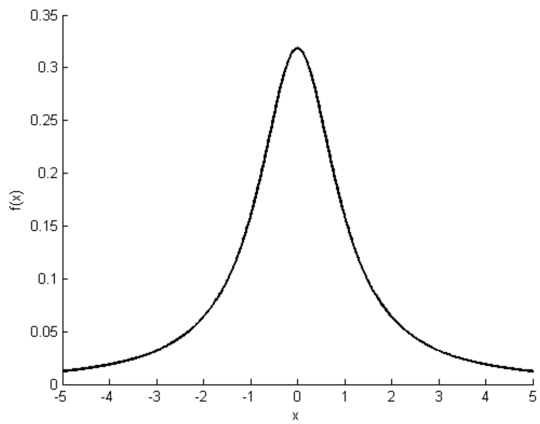
$f(x) = \frac{1}{\pi x^2+\pi}, \quad x \in R^1$.

c) Danou pravděpodobnost můžeme určit z distribuční funkce.

$\mathsf{P}\{X \in (-2;2)\} = F(2) - F(-2) \doteq 0,8524 - 0,1476 = 0,7048$.

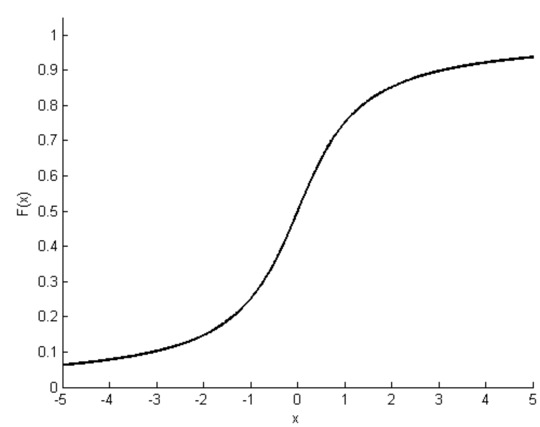
Druhou možností, jak určit danou pravděpodobnost, je přeintegrovat hustotu přes interval $(-2;2)$.

$\mathsf{P}\{X \in (-2;2)\} = \int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \frac{1}{\pi x^2+\pi}\mathrm{d}x \doteq 0,7048$.



Obrázek 3.14: Graf hustoty z příkladu 3.10.

d) Graf hustoty je na obrázku 3.14 a graf distribuční funkce je na obrázku 3.15.



Obrázek 3.15: Graf distribuční funkce z příkladu 3.10.

3.2. Funkce náhodných veličin

Příklad 3.11. Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; -2) \\ k(x-3)^2 & x \in \langle -2; 1) \\ 0 & x \in \langle 1; \infty) \end{cases}$$

Vypočítejte koeficient k a hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = \ln(X+3) - 2$.

Řešení:

K výpočtu koeficientu k využijeme vlastnosti, že integrál z hustoty přes celou reálnou osu je 1, tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

$1 = \int_{-\infty}^{-2} 0\mathrm{d}x + \int_{-2}^{1} k(x-3)^2\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} 0\mathrm{d}x = 39k.$

$k = 1/39.$

Ještě je nutno ověřit druhou vlastnost hustoty, a to $f(x) \geq 0$. Tato podmínka je splněna, hustota je tvaru $\frac{1}{39}(x-3)^2$ pro $x \in \langle -2; 1)$.

Transformací $y = \ln(x+3) - 2$ se změní i meze pro nenulovou část hustoty $f_Y(y) : \ln(-2+3) - 2 = -2$ a $\ln(1+3) - 2 \doteq -0,6137$.

Hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny Y vypočítáme podle vztahu (1.6) na straně 19. Pro připomenutí, vztah vypadá takto:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))|(g^{-1}(y))'|.$$

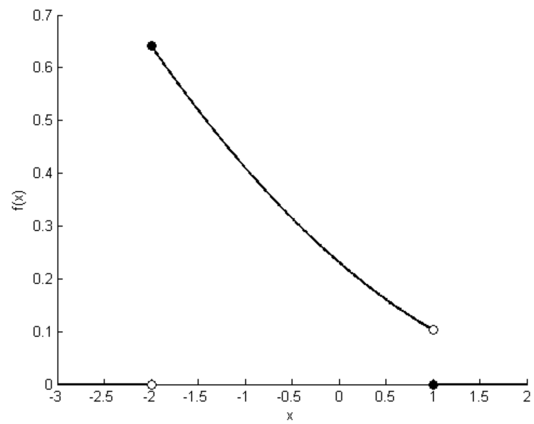
Položíme

$g(x) = \ln(x+3) - 2$

$g^{-1}(y) = \exp(y+2) - 3$

$(g^{-1}(y))' = \exp(y+2)$

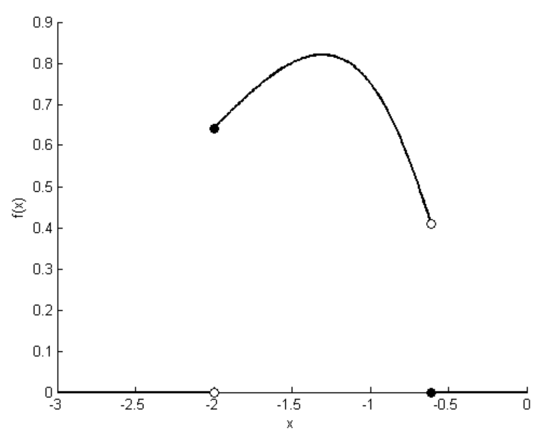
Dosazením do vztahu (1.6) pro výpočet hustoty pravděpodobnosti náhodné veličiny Y dostáváme:



Obrázek 3.16: Graf hustoty náhodné veličiny X z příkladu 3.11.

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty; -2) \\ 1/39(\exp(y+2) - 6)^2 \times \exp(y+2) & y \in \langle -2; -0,6137) \\ 0 & y \in \langle -0,6137; \infty) \end{cases}$$

Graf hustoty náhodné veličiny X je na obrázku 3.16 a graf hustoty náhodné veličiny Y je na obrázku 3.17.



Obrázek 3.17: Graf hustoty náhodné veličiny Y z příkladu 3.11.

Příklad 3.12. Náhodná veličina X má distribuční funkci:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 1) \\ x - 1 & x \in \langle 1; 2) \\ 1 & x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$$

Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = \mathrm{e}^{-X}$.

Řešení:

Nejdřív určíme hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny X. Náhodná veličina X je absolutně spojitá, takže využijeme vztahu (1.3) na straně 13. Pro připomenutí, vztah vypadá takto:

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}.$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 1) \\ 1 & x \in \langle 1; 2) \\ 0 & x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$$

Transformací $y = \mathrm{e}^{-x}$ se změní i meze pro nenulovou část hustoty $f_Y(y) : \mathrm{e}^{-1} \doteq 0,3679$ a $\mathrm{e}^{-2} \doteq 0,1353$. Meze nám vyšly v opačném pořadí, protože transformace $y = \mathrm{e}^{-x}$ je klesající funkce.

Hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny Y vypočítáme podle vztahu (1.6) na straně 19. Pro připomenutí, vztah vypadá takto:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))|(g^{-1}(y))'|.$$

Položíme

$g(x) = \mathrm{e}^{-x}$

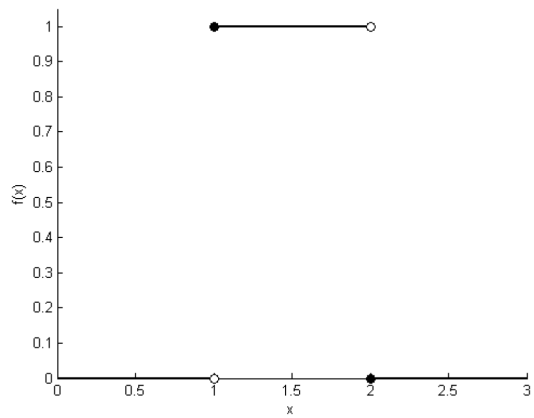
$g^{-1}(y) = -\ln(y)$

$(g^{-1}(y))' = -\frac{1}{y}$

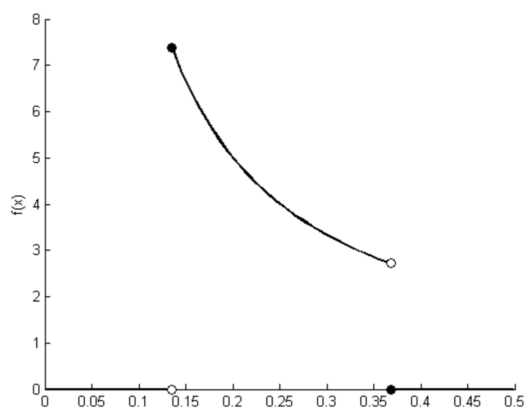
Dosazením do vztahu (1.6) pro výpočet hustoty pravděpodobnosti náhodné veličiny Y dostáváme:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty; 0,1353) \\ \frac{1}{y} & y \in \langle 0,1353; 0,3679) \\ 0 & y \in \langle 0,3679; \infty) \end{cases}$$

Graf hustoty náhodné veličiny X je na obrázku 3.18 a graf hustoty náhodné veličiny Y je na obrázku 3.19.



Obrázek 3.18: Graf hustoty náhodné veličiny X z příkladu 3.12.



Obrázek 3.19: Graf hustoty náhodné veličiny Y z příkladu 3.12.

Příklad 3.13. Náhodná veličina X má distribuční funkci definovanou vztahem:
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 1) \\ x^2 - 2x + 1 & x \in \langle 1; 2) \\ 1 & x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$$
Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = \sin X$.

Řešení:

Protože je náhodná veličina X absolutně spojitá, distribuční funkci na hustotu převedeme stejným způsobem jako v předchozím příkladě.
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 1) \\ 2x - 2 & x \in \langle 1; 2) \\ 0 & x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$$
Transformace $y = \sin x$ není na intervalu $\langle 1; 2)$ monotónní, musíme proto postupovat jinak. Intervaly budeme nyní značit dolním indexem, aby bylo jasné, do definičního oboru hustoty které náhodné veličiny patří. Začneme tím, že rozdělíme definiční obor nenulové části hustoty náhodné veličiny X na intervaly, na kterých je transformace $y = \sin x$ monotónní. Interval s nenulovou hustotou je $\langle 1; 2)_X$ a transformace $y = \sin x$ je monotónní na intervalech $(1; \pi/2)_X$ a $(\pi/2; 2)_X$. (Při našich úvahách nezáleží na tom, jaké typy intervalů z hlediska uzavřenosti použijeme.) Následně na tyto intervaly aplikujeme transformaci $y = \sin x$ a taky určíme inverzní transformaci φ^{-1} na těchto intervalech. Interval $(1; \pi/2)_X$ se zobrazí na interval $(\sin 1; 1)_Y$ s inverzní transformací $x = \arcsin y$ a interval $(\pi/2; 2)_X$ se zobrazí na interval $(\sin 2; 1)_Y$ s inverzní transformací $x = \pi - \arcsin y$. Intervaly $(\sin 1; 1)_Y$ a $(\sin 2; 1)_Y$, které vznikly aplikací transformace $y = \sin x$, se částečné překrývají, a to je problém, který musíme odstranit. My potřebujeme, aby se intervaly po transformaci buď překrývaly úplně, nebo aby se nepřekrývaly vůbec. Proto interval $(\sin 1; 1)_Y$ rozdělíme v bodě $\sin 2$ na intervaly $(\sin 1; \sin 2)_Y$ a $(\sin 2; 1)_Y$. Nyní musíme odpovídajícím způsobem rozdělit jeho vzor, interval $(1; \pi/2)_X$. Interval $(\sin 1; 1)_Y$ jsme rozdělili v bodě $\sin 2$, takže bod $\sin 2$ nyní dosadíme do inverzní transformace na tomto intervalu a dostaneme $\pi - 2$, takže interval $(1; \pi/2)_X$ rozdělíme na intervaly $(1; \pi - 2)_X$ a $(\pi - 2; \pi/2)_X$. Nakonec určíme absolutní hodnoty z derivací inverzních transformací. Výše uvedené úvahy

přehledně shrneme do tabulky.

interval $f_X(x)$	$(1; \pi - 2)$	$(\pi - 2; \pi/2)$	$(\pi/2; 2)$
interval $f_Y(y)$	$(\sin 1; \sin 2)$	$(\sin 2; 1)$	$(\sin 2; 1)$
φ^{-1}	$x = \arcsin y$	$x = \arcsin y$	$x = \pi - \arcsin y$
$\lvert[\varphi^{-1}]'\rvert$	$x = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$	$x = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$	$x = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

Hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny Y teď určíme podle vztahu (1.7) na straně 20. Pro připomenutí, vztah vypadá takto:

$$f_Y(y) = \sum_{i:\varphi(I_{Xi})=I_{Yn}} f_X[\varphi_i^{-1}(y)]|[\varphi_i^{-1}(y)]'| \quad \forall y \in I_{Yn}.$$

Pro $y \in (\sin 1; \sin 2)$ máme:

$f_Y(y) = f_X(\arcsin y)|(\arcsin y)'| = (2\arcsin y - 2)/\sqrt{1-y^2}$

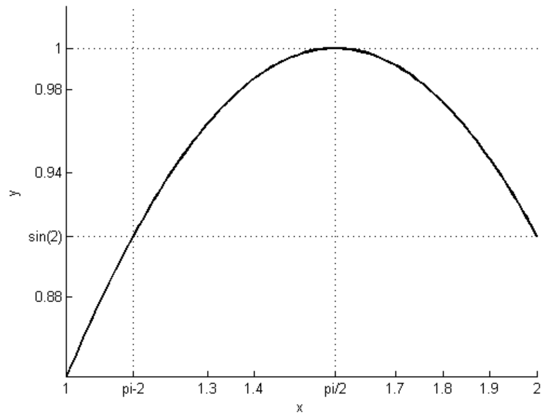
a pro $y \in (\sin 2; 1)$ máme:

$f_Y(y) = f_X(\arcsin y)|(\arcsin y)'| + f_X(\pi - \arcsin y)|(\pi - \arcsin y)'| = (2\arcsin y - 2 + 2\pi - 2\arcsin y - 2)/\sqrt{1-y^2} = (2\pi - 4)/\sqrt{1-y^2}$.

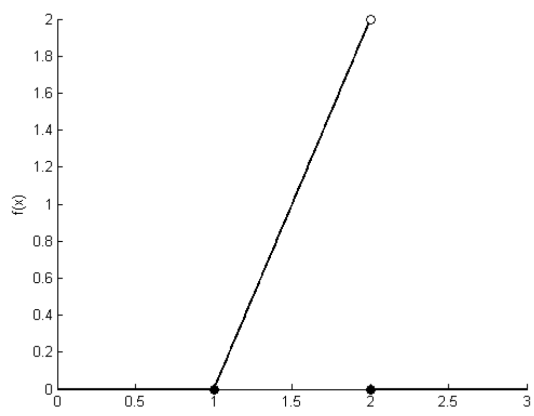
Hustotu přepíšeme v obvyklém tvaru.

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty; 0,8415) \\ (2\arcsin y - 2)/\sqrt{1-y^2} & y \in \langle 0,8415; 0,9093) \\ (2\pi - 4)/\sqrt{1-y^2} & y \in \langle 0,9093; 1) \\ 0 & y \in \langle 1; \infty) \end{cases}$$

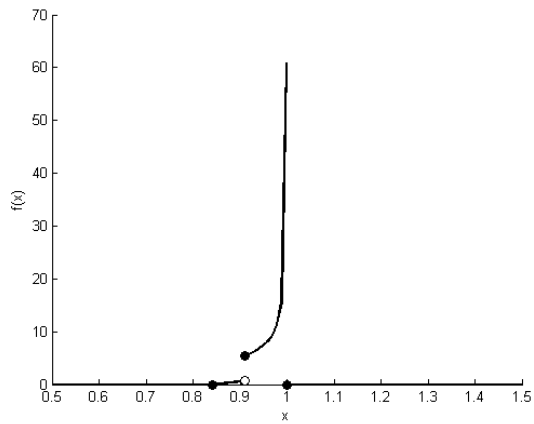
Graf transformace je na obrázku 3.20, graf hustoty náhodné veličiny X je na obrázku 3.21 a graf hustoty náhodné veličiny Y je na obrázku 3.22.



Obrázek 3.20: Graf transformace $y = \sin x$ z příkladu 3.13.



Obrázek 3.21: Graf hustoty náhodné veličiny X z příkladu 3.13.



Obrázek 3.22: Graf hustoty náhodné veličiny $Y = \sin X$ z příkladu 3.13.

Příklad 3.14. Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0) \\ 2x & x \in \langle 0; 1) \\ 0 & x \in \langle 1; \infty) \end{cases}$$

Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = (X - 0,5)^2 = X^2 - X + 0,25$.

Řešení:

Ani v tomto příkladě není transformace $y = (x - 0,5)^2$ na intervalu $\langle 0; 1)$ monotónní. Tento příklad je ovšem jednodušší než předchozí, protože oba intervaly, na kterých je transformace $y = (x - 0,5)^2$ monotónní, se zobrazí na totožný interval. Nebudu teď rozepisovat celý postup (uveden v předchozím příkladě), napíšu jen výsledky. Interval s nenulovou hustotou je $\langle 0; 1)_X$ a transformace $y = (x-0,5)^2$ je monotónní na intervalech $(0; 0,5)_X$ a $(0,5; 1)_X$. Interval $(0; 0,5)_X$ se zobrazí na interval $(0; 0,25)_Y$ s inverzní transformací $x = -\sqrt{y} + 0,5$ a interval $(0,5; 1)_X$ se zobrazí na interval $(0; 0,25)_Y$ s inverzní transformací $x = \sqrt{y} + 0,5$. Výsledky teď zapíšeme do tabulky.

interval $f_X(x)$	$(0;0,5)$	$(0,5;1)$
Interval $f_Y(y)$	$(0;0,25)$	$(0;0,25)$
φ^{-1}	$x=-\sqrt{y}+0,5$	$x=\sqrt{y}+0,5$
$\lvert[\varphi^{-1}]'\rvert$	$x=\frac{1}{2}y^{-1/2}$	$x=\frac{1}{2}y^{-1/2}$

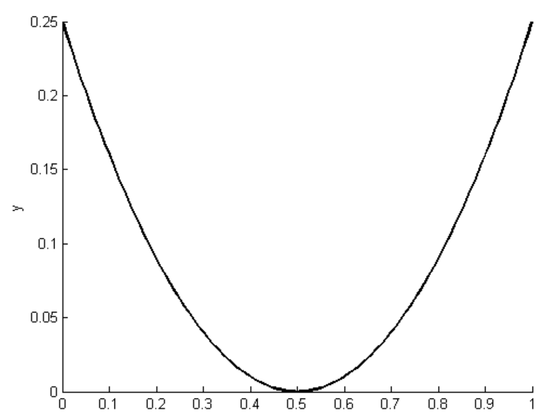
Hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny Y teď určíme stejným způsobem jako v předchozím příkladě. Pro $y \in (0;0,25)$ máme:

$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}+0,5)|(\sqrt{y}+0,5)'| + f_X(-\sqrt{y}+0,5)|(-\sqrt{y}+0,5)'| = (2\sqrt{y}+1-2\sqrt{y}+1)\frac{1}{2}y^{-1/2} = y^{-1/2}$.

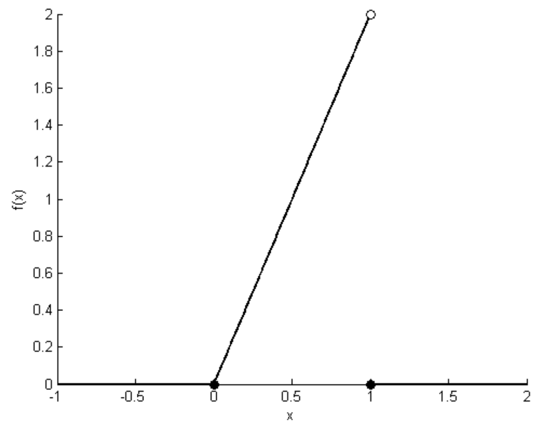
Hustotu přepíšeme v obvyklém tvaru.

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty;0) \\ y^{-1/2} & y \in \langle 0;0,25) \\ 0 & y \in \langle 0,25;\infty) \end{cases}$$

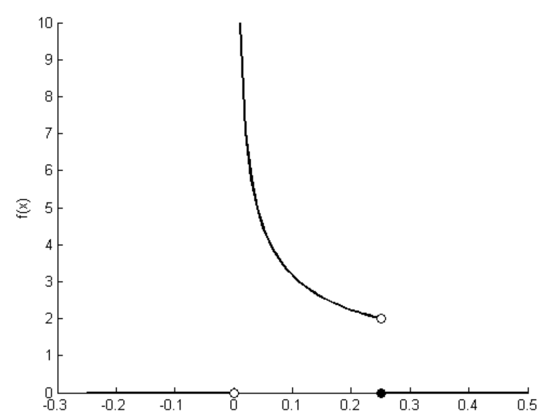
Graf transformace je na obrázku 3.23, graf hustoty náhodné veličiny X je na obrázku 3.24 a graf hustoty náhodné veličiny Y je na obrázku 3.25.



Obrázek 3.23: Graf transformace $y=(x-0,5)^2$ z příkladu 3.14.



Obrázek 3.24: Graf hustoty náhodné veličiny X z příkladu 3.14.



Obrázek 3.25: Graf hustoty náhodné veličiny $Y = (X - 0,5)^2$ z příkladu 3.14.

3.3. Číselné charakteristiky

Příklad 3.15. Náhodná veličina X je dána tabulkou rozdělení pravděpodobností. Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X. Dále určete střední hodnotu, rozptyl a rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny $Y = 3X^2 - 2$.

x_i	0	2	4	6
$p(x_i)$	0,1	0,5	0,3	0,1

Řešení:

Jelikož je náhodná veličina X diskrétní, střední hodnotu vypočteme podle vzorce

$$\mathsf{E}(X) = \sum_n x_n p(x_n).$$

$\mathsf{E}(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p(x_i) = 0 \times 0,1 + 2 \times 0,5 + 4 \times 0,3 + 6 \times 0,1 = 2,8.$

Rozptyl budeme počítat podle vzorce

$$\mathrm{var}(X) = \mathsf{E}(X^2) - [\mathsf{E}(X)]^2,$$

ve kterém vystupuje $\mathsf{E}(X^2)$, takže ji nejdřív spočítáme.

$\mathsf{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p(x_i) = 0^2 \times 0,1 + 2^2 \times 0,5 + 4^2 \times 0,3 + 6^2 \times 0,1 = 10,4.$

Teď už můžeme vypočítat rozptyl.

$\mathrm{var}(X) = \mathsf{E}(X^2) - [\mathsf{E}(X)]^2 = 10,4 - 2,8^2 = 10,4 - 7,84 = 2,56.$

Pro střední hodnotu náhodné veličiny Y podle vzorců dostáváme:

$\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(3X^2 - 2) = 3\mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}(2) = 3 \times 10,4 - 2 = 29,2.$

Rozptyl budeme počítat podle vzorce

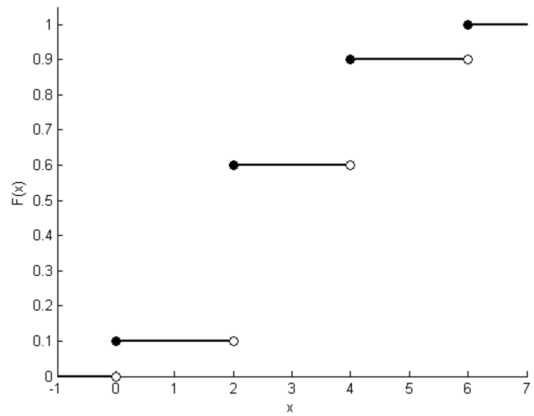
$$\mathrm{var}(a + bX^2) = b^2 \mathrm{var}(X^2),$$

takže předtím spočítáme $\mathrm{var}(X^2)$. Pro ten budeme zase potřebovat $\mathsf{E}(X^4)$.

$\mathsf{E}(X^4) = \sum_{i=1}^{5} x_i^4 p(x_i) = 0 \times 0,1 + 16 \times 0,5 + 256 \times 0,3 + 1296 \times 0,1 = 214,4.$

$\mathrm{var}(X^2) = \mathsf{E}(X^4) - [\mathsf{E}(X^2)]^2 = 214,4 - 10,4^2 = 214,4 - 108,16 = 106,24.$

$\mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(3X^2 - 2) = 9\mathrm{var}(X^2) = 9 \times 106,24 = 956,16.$



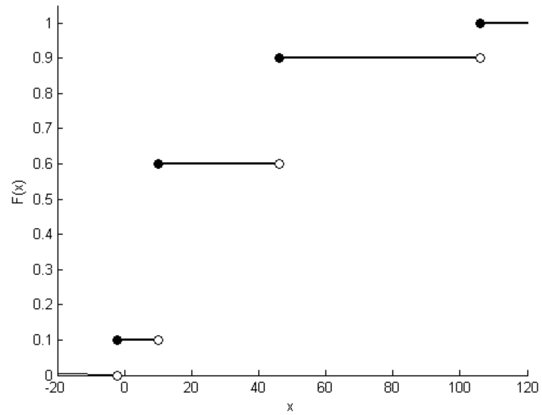
Obrázek 3.26: Graf distribuční funkce náhodné veličiny X z příkladu 3.15.

Nakonec spočítáme tabulku rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny Y. Hodnoty náhodné veličiny Y vypočítáme aplikací transformace $y = 3x^2 - 2$ na hodnoty náhodné veličiny X, jako pravděpodobnosti hodnot náhodné veličiny Y použijeme pravděpodobnosti hodnot náhodné veličiny X, protože transformace na ně nemá vliv.

x_i	0	2	4	6
y_i	-2	10	46	106
$p(y_i)$	0,1	0,5	0,3	0,1

Střední hodnotu i rozptyl náhodné veličiny Y můžeme vypočítat přímo z tabulky rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny Y, nemusíme používat vzorce uvedené výše.

Graf distribuční funkce náhodné veličiny X je na obrázku 3.26 a graf distribuční funkce náhodné veličiny Y je na obrázku 3.27.



Obrázek 3.27: Graf distribuční funkcenáhodné veličiny Y z příkladu 3.15.

Příklad 3.16. Náhodná veličina X je dána tabulkou rozdělení pravděpodobností:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(x_i)$	0,1	0,15	0,12	0,07	0,04	0,16	0,32	0,04

Určete střední hodnotu, rozptyl, modus, medián, horní a dolní kvartil, distribuční funkci a sestavte její graf

Řešení:

Náhodná veličina X je diskrétní, střední hodnotu vypočteme podle vzorce

$$\mathsf{E}(X) = \sum_n x_n p(x_n).$$

$\mathsf{E}(X) = \sum_{i=1}^{8} x_i p(x_i) = 1 \times 0,1 + 2 \times 0,15 + 3 \times 0,12 + 4 \times 0,07 + 5 \times 0,04$
$+ 6 \times 0,16 + 7 \times 0,32 + 8 \times 0,04 = 4,76.$

Rozptyl vypočítáme podle vztahu

$$\mathrm{var}(X) = \mathsf{E}(X^2) - [\mathsf{E}(X)]^2.$$

Pro výpočet rozptylu budeme potřebovat $\mathsf{E}(X^2)$.

$\mathsf{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{8} x_i^2 p(x_i) = 1^2 \times 0,1 + 2^2 \times 0,15 + 3^2 \times 0,12 + 4^2 \times 0,07 + 5^2 \times 0,04$
$+ 6^2 \times 0,16 + 7^2 \times 0,32 + 8^2 \times 0,04 = 27,9.$

$\text{var}(X) = \mathsf{E}(X^2) - [\mathsf{E}(X)]^2 = 27,9 - 4,76^2 = 27,9 - 22,6576 = 5,2424.$

Modus diskrétní náhodné veličiny je hodnota s nejvyšší pravděpodobností, takže $\hat{x} = 7$.

Pro další výpočty nejdřív určíme distribuční funkci podle vzorce (1.1) na straně 12. Pro připomenutí, vzorec vypadá takto:

$$F(x) = \sum_{x_n \leq x} p(x_n).$$

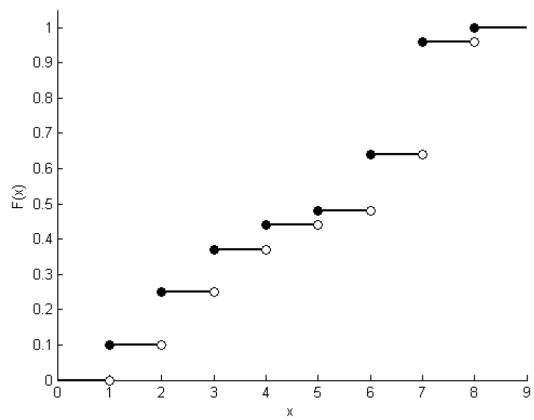
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 1) \\ 0,1 & x \in \langle 1; 2) \\ 0,25 & x \in \langle 2; 3) \\ 0,37 & x \in \langle 3; 4) \\ 0,44 & x \in \langle 4; 5) \\ 0,48 & x \in \langle 5; 6) \\ 0,64 & x \in \langle 6; 7) \\ 0,96 & x \in \langle 7; 8) \\ 1 & x \in \langle 8; \infty) \end{cases}$$

Medián $x_{0,5}$ nyní určíme jako takové číslo x, pro které platí $\mathsf{P}(X \leq x) \geq 0,5$ a současně $\mathsf{P}(X \geq x) \geq 1 - 0,5$. Hodnota $\alpha = 0,5$ se neshoduje s žádnou hodnotou distribuční funkce, takže jej určíme jako nejmenší číslo vyhovující nerovnosti $F(x_{0,5}) \geq 0,5$. Zřejmě $x_{0,5} = 6$.

Dolní kvartil $x_{0,25}$ je každé číslo z intervalu $\langle 2; 3 \rangle$, protože $\mathsf{P}(X \leq 2) \geq 0,25$ a $\mathsf{P}(X \geq 3) \geq 0,75$.

Horní kvartil $x_{0,75}$ určíme podobně jako medián. Hodnota $\alpha = 0,75$ se neshoduje s žádnou hodnotou distribuční funkce, takže jej určíme jako nejmenší číslo vyhovující nerovnosti $F(x_{0,75}) \geq 0,75$. Zřejmě $x_{0,75} = 7$.

Graf distribuční funkce je na obrázku 3.28



Obrázek 3.28: Graf distribuční funkce z příkladu 3.16.

Příklad 3.17. Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti definovanou vztahem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 1) \\ \frac{4}{35}x^3 + \frac{4}{7} & x \in \langle 1; 2) \\ 0 & x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$$

a) nakreslete graf hustoty pravděpodobnosti,

b) vypočítejte střední hodnotu,

c) určete modus,

d) určete rozptyl a směrodatnou odchylku,

e) určete koeficient šikmosti,

f) určete koeficient špičatosti,

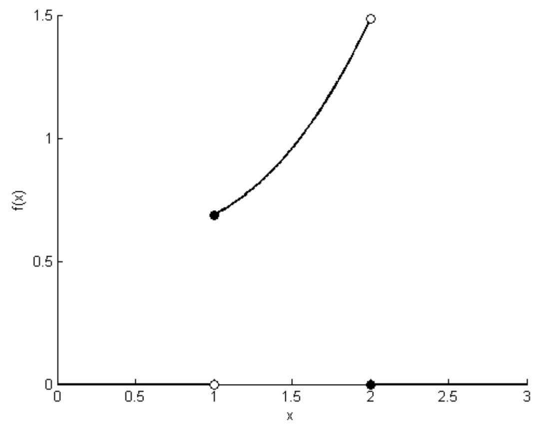
g) medián a horní a dolní kvartil.

Řešení:

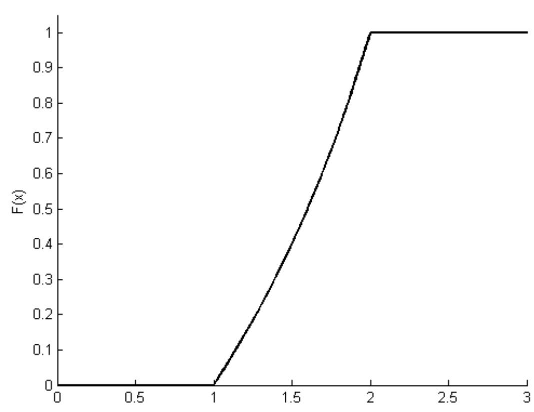
a) Graf hustoty je na obrázku 3.29.

b) Náhodná veličina X je absolutně spojitá, střední hodnotu vypočítáme podle vztahu (1.8) na straně 22. Pro připomenutí, vtah vypadá takto:

$$\mathsf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x.$$



Obrázek 3.29: Graf hustoty z příkladu 3.17.



Obrázek 3.30: Graf distribuční funkce z příkladu 3.17.

$\mathsf{E}(X) = \int\limits_1^2 \frac{4}{35}x^4 + \frac{4}{7}x\mathrm{d}x = \frac{274}{175} \doteq 1,566.$

c) Modus spojité náhodné veličiny je lokální maximum (může jich být víc). Modus v našem případě neexistuje, protože v intervalu s nenulovou hustotou je hustota sice rostoucí, ale konec tohoto intervalu, kde by modus právě byl, do intervalu nepatří.

d) Rozptyl vypočítáme podle vztahu:

$$\mathrm{var}(X) = \mathsf{E}(X^2) - [\mathsf{E}(X)]^2.$$

$\mathsf{E}(X^2) = \int\limits_1^2 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \frac{4}{35}x^5 + \frac{4}{7}x^2\mathrm{d}x = \frac{38}{15} \doteq 2,533.$

$\mathrm{var}(X) \doteq 2,533 - 2,452 = 0,081.$

$\sigma = \sqrt{\mathrm{var}(X)} = \sqrt{0,081} \doteq 0,285.$

e) Po koeficient šikmosti platí:

$$\alpha_3(X) = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

kde

$$\mu_3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mathsf{E}(X))^3 f(x)\mathrm{d}x.$$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mathsf{E}(X))^3 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 (x - 1,566)^3 \frac{4}{35}x^3 + \frac{4}{7}\mathrm{d}x \doteq -0,0066.$

$\alpha_3(X) = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{-0,0066}{0,0231} \doteq -0.2856$, takže je rozdělení protáhlejší směrem vlevo.

f) Pro koeficient špičatosti platí:

$$\alpha_4(X) = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3,$$

kde

$$\mu_4 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mathsf{E}(X))^4 f(x)\mathrm{d}x.$$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mathsf{E}(X))^4 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 (x - 1,566)^4 (\frac{4}{35}x^3 + \frac{4}{7})\mathrm{d}x \doteq 0,0127.$

$\alpha_4(X) = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{0,0127}{0,0066} - 3 \doteq -1,0765$, takže je hustota na svých koncích menší než hustota normálního rozdělení se stejnou střední hodnotou a stejným rozptylem

g) Pro další výpočty nejdřív určíme distribuční funkci užitím vztahu (1.2) na straně 12. Pro připomenutí, vztah vypadá takto:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 1) \\ \frac{x^4}{35} + \frac{4x}{7} - \frac{3}{5} & x \in \langle 1; 2) \\ 1 & x \in \langle 2; \infty) \end{cases}$$

Její graf je na obrázku 3.30.

Pro medián u spojité náhodné veličiny platí

$F(x_{0,5}) = 0,5.$

Takže řešíme rovnici

$\frac{x_{0,5}^4}{35} + \frac{4x_{0,5}}{7} - \frac{3}{5} = 0,5$

$x_{0,5} \doteq 1,5985.$

Pro kvartily nyní řešíme stejnou rovnici akorát s jinou pravou stranou. Nejdřív s 0,25, potom s 0,75.

$x_{0,25} \doteq 1,3308.$

$x_{0,75} \doteq 1,8172.$

Příklad 3.18. Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti definovanou vztahem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 1) \\ \frac{3}{4} & x \in \langle 1; 2) \\ 0 & x \in \langle 2; 3) \\ \frac{1}{4} & x \in \langle 3; 4) \\ 0 & x \in \langle 4; \infty) \end{cases}$$

Určete střední hodnotu, rozptyl, modus, medián a horní a dolní kvartil.

Řešení:

Střední hodnotu určíme stejně jako v předchozím příkladě.

$\mathsf{E}(X) = \int\limits_1^2 \frac{3x}{4}\mathrm{d}x + \int\limits_3^4 \frac{x}{4}\mathrm{d}x = 2.$

Rozptyl taktéž určíme stejně jako v předchozím příkladě.

$\mathsf{E}(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \frac{3x^2}{4}\mathrm{d}x + \int\limits_3^4 \frac{x^2}{4}\mathrm{d}x = \frac{29}{6} \doteq 4,8333.$

$\mathrm{var}(X) = \mathsf{E}(X^2) - [\mathsf{E}(X)]^2 = \frac{29}{6} - 2^2 = \frac{5}{6} \doteq 0,8333.$

Modus je lokální maximum, takže nyní je $\hat{x}$ kterákoliv hodnota z intervalů $\langle 1;2)$ a $\langle 3;4)$.

Pro další výpočty budeme potřebovat distribuční funkci. Určíme ji stejným způsobem jako v předchozím příkladě.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty;1) \\ -\frac{3}{4} + \frac{3x}{4} & x \in \langle 1;2) \\ 0,75 & x \in \langle 2;3) \\ \frac{x}{4} & x \in \langle 3;4) \\ 1 & x \in \langle 4;\infty \end{cases}$$

Pro medián nyní řešíme rovnici $F(x_{0,5}) = 0,5$, takže

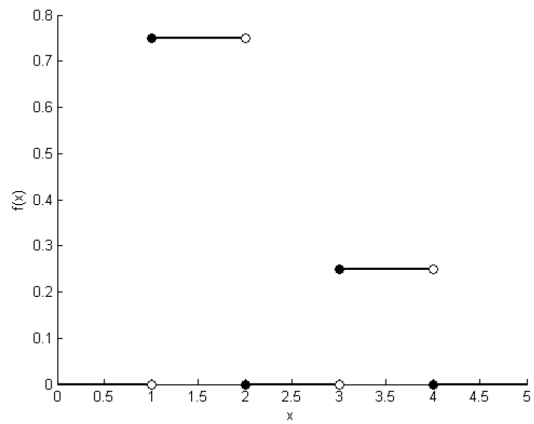
$x_{0,5} = \frac{5}{3}.$

Pro dolní kvartil řešíme rovnici $F(x_{0,25}) = 0,25$, takže

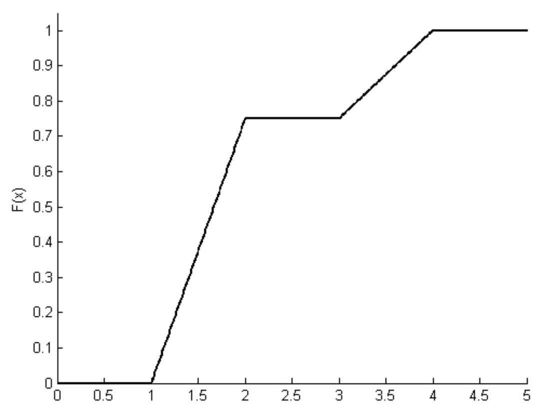
$x_{0,25} = \frac{4}{3}.$

Horní kvartil $x_{0,75}$ je každé číslo z intervalu $\langle 2;3\rangle$, protože $\mathsf{P}(X \leq 2) = 0,75$ a $\mathsf{P}(X \geq 3) = 0,25.$

Graf hustoty je na obrázku 3.31 a graf distribuční funkce je na obrázku 3.32.



Obrázek 3.31: Graf hustoty z příkladu 3.18.



Obrázek 3.32: Graf distribuční funkce z příkladu 3.18.

3.4. Aplikace základních rozdělení pravděpodobností

Příklad 3.19. Na cvičení z matematické analýzy cvičící zadal příklad. Ze zkušenosti ví, že pravděpodobnost správného vyřešení tohoto příkladu je 0,83. Určete

a) rozdělení pravděpodobnosti správného vyřešení,

b) střední hodnotu a rozptyl správného vyřešení,

c) distribuční funkci a sestavte její graf.

Řešení:

Náhodná veličina X představuje počet správných vyřešení v jednom pokuse a má alternativní rozdělení s parametrem $p = 0,83$.

a) Náhodná veličina X nabývá hodnot $\{0,1\}$ s pravděpodobnostmi

$$p_1 = \mathsf{P}(X = 0) = 1 - 0,83 = 0,17, \quad p_2 = \mathsf{P}(X = 1) = 0,83.$$

Sestavíme tabulku rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X.

x_i	0	1
$p(x_i)$	0,17	0,83

b) Podle vzorců uvedených v oddíle 2.1.1 na straně 30 s přehledem alternativního rozdělení platí:

$\mathsf{E}(X) = 0,83,$

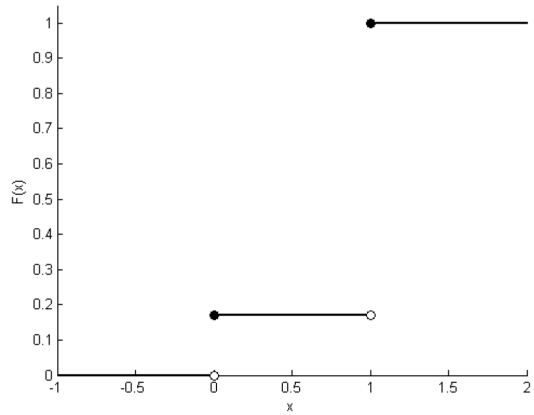
$\mathrm{var}(X) = 0,83(1 - 0,83) = 0,1411.$

c) Náhodná veličina X je diskrétní, distribuční funkci sestavíme podle vztahu (1.1) na straně 12. Pro připomenutí vztah vypadá takto:

$$F(x) = \sum_{x_n \leq x} p(x_n).$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0) \\ 0,17 & x \in \langle 0; 1) \\ 1 & x \in \langle 1; \infty) \end{cases}$$

Graf distribuční funkce je na obrázku 3.33.



Obrázek 3.33: Graf distribuční funkce z příkladu 3.19.

Příklad 3.20. Čtyřikrát vystřelíme na cíl. Pravděpodobnost zásahu při každém výstřelu je 0,6. Určete

a) rozdělení pravděpodobnosti počtu zásahů,

b) střední hodnotu a rozptyl počtu zásahů,

b) distribuční funkci a sestavte její graf.

Řešení:

Náhodná veličina X představuje počet zásahů cíle a má binomické rozdělení s parametry $n = 4$ a $p = 0,6$.

a) Náhodná veličina X nabývá hodnot $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Vypočítáme pravděpodobnosti jednotlivých hodnot podle pravděpodobnostní funkce binomického rozdělení s parametry $n = 4$ a $p = 6$.

$p_1 = \mathsf{P}(X = 0) = 0,6^0 0,4^4 = 0,0256$

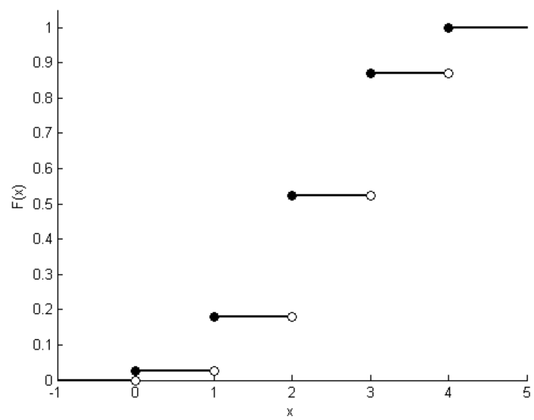
$p_2 = \mathsf{P}(X = 1) = 4 \times 0,6^1 0,4^3 = 0,1536$

$p_2 = \mathsf{P}(X = 2) = 6 \times 0,6^2 0,4^2 = 0,3456$

$p_4 = \mathsf{P}(X = 3) = 4 \times 0,6^3 0,4^1 = 0,3456$

$p_5 = \mathsf{P}(X = 4) = 0,6^4 0,4^0 = 0,1296$

Sestavíme tabulku rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X.



Obrázek 3.34: Graf distribuční funkce z příkladu 3.20.

x_i	0	1	2	3	4
$p(x_i)$	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296

b) Podle vzorců uvedených v oddíle 2.1.2 na straně 31 s přehledem binomického rozdělení platí:

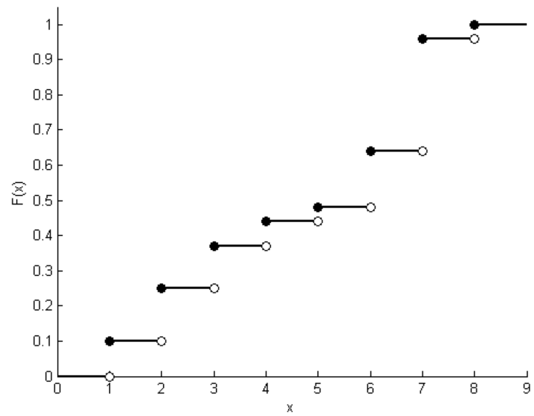
$\mathsf{E}(X) = 2,4,$

$\text{var}(X) = 0,96.$

c) Náhodná veličina X je diskrétní, distribuční funkci sestavíme jako v předchozím příkladě.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0) \\ 0,0256 & x \in \langle 0; 1) \\ 0,1792 & x \in \langle 1; 2) \\ 0,5248 & x \in \langle 2; 3) \\ 0,8704 & x \in \langle 3; 4) \\ 1 & x \in \langle 4; \infty) \end{cases}$$

Graf distribuční funkce je na obrázku 3.34.



Obrázek 3.35: Graf distribuční funkce z příkladu 3.21.

Příklad 3.21. Eshop obdrží průměrně 31 objednávek za den. Určete

a) střední hodnotu a rozptyl počtu objednávek,

b) distribuční funkci a sestavte její graf,

c) pravděpodobnost, že počet objednávek za den překročí 50.

Řešení:

Náhodná veličina X představuje počet objednávek, které eshop obdrží za den, a má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda = 31$.

a) Podle vzorců uvedených v oddíle 2.1.3 na straně 31 s přehledem Poissonova rozdělení platí:

$\mathsf{E}(X) = 31$,

$\mathrm{var}(X) = 31$.

b) Náhodná veličina X je diskrétní, distribuční funkci sestavíme jako v předchozím příkladě.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0) \\ \sum_{k \le x} \frac{31^k}{k!} \mathrm{e}^{-31} & x \in \langle 0; \infty) \end{cases}$$

Graf distribuční funkce je na obrázku 3.35.

c) Pravděpodobnost, že počet objednávek překročí 50, určíme z distribuční funkce.

$$\mathsf{P}(X>50)=1-\mathsf{P}(X\le 50)=1-F(50)=1-\sum_{k=0}^{50}\frac{31^k}{k!}\mathrm{e}^{-31}\doteq 1-0,9994=0,0006.$$

Příklad 3.22. V osudí je 15 losů, z kterých jsou 4 výherní. Náhodně vybereme 3. Určete

a) střední hodnotu a rozptyl počtu vybraných výherních losů,

b) distribuční funkci počtu vybraných výherních losů a sestavte její graf,

c) pravděpodobnost, že jsme vybrali nejméně 2 výherní losy.

Řešení:

Náhodná veličina X představuje počet výherních losů, které jsou mezi 3, které jsme vybrali, a má hypergeometrické rozdělení s parametry $N=15$, $M=4$ a $n=3$.

a) Podle vzorců uvedených v oddíle 2.1.4 na straně 32 s přehledem hypergeometrického rozdělení platí:

$\mathsf{E}(X)=4\frac{4}{15}=\frac{16}{15}$,

$\mathrm{var}(X)=4\frac{4}{15}\frac{11}{15}\frac{12}{14}=\frac{352}{525}\doteq 0,6705.$

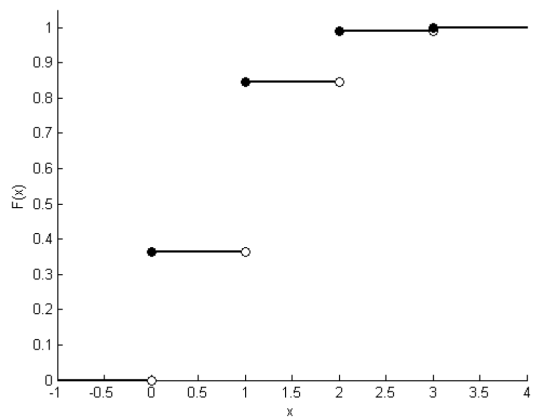
b) Náhodná veličina X je diskrétní, distribuční funkci sestavíme jako v předchozím příkladě.

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\in(-\infty;0)\\ 33/91 & x\in\langle 0;1)\\ 11/13 & x\in\langle 1;2)\\ 451/455 & x\in\langle 2;3)\\ 1 & x\in\langle 3;\infty)\end{cases}$$

Graf distribuční funkce je na obrázku 3.36.

c) Pravděpodobnost, že jsme vybrali nejméně 2 výherní losy, určíme z distribuční funkce.

$$\mathsf{P}(X\ge 2)=1-\mathsf{P}(X\le 1)=1-F(1)=1-\sum_{k=0}^{1}\frac{\binom{4}{k}\binom{11}{3-k}}{\binom{15}{3}}=1-\frac{11}{13}=\frac{2}{13}.$$



Obrázek 3.36: Graf distribuční funkce z příkladu 3.22.

Příklad 3.23. V určitém manuálním výrobním procesu je známo, že jeden z deseti výrobků nevyhovuje přísným kvalitativním normám. Určete

a) pravděpodobnost, že třetí náhodně vybraný výrobek je první, který nevyhovuje,

b) střední hodnotu a rozptyl počtu vyhovujících výrobků, než narazíme na nevyhovující výrobek,

c) distribuční funkci počtu vyhovujících výrobků, než narazíme na nevyhovující výrobek a sestavte její graf.

Řešení:

Náhodná veličina X představuje počet vyhovujících výrobků, než narazíme na první nevyhovující výrobek a má geometrické rozdělení s parametrem $p = 0,1$.

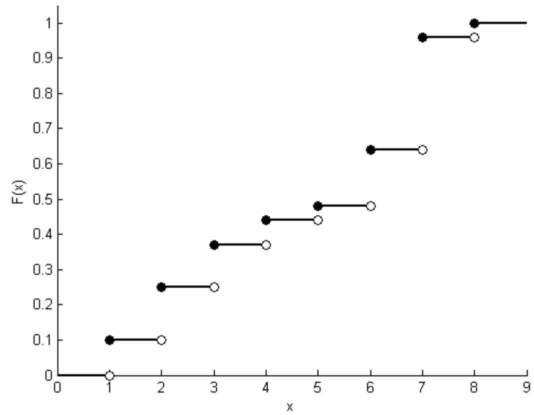
a) Danou pravděpodobnost určíme z pravděpodobnostní funkce geometrického rozdělení.

$\mathsf{P}(X = 2) = p(1 - p)^2 = 0,1 \times 0,9^2 = 0,081.$

b) Podle vzorců uvedených v oddíle 2.1.5 na straně 33 s přehledem geometrického rozdělení platí:

$\mathsf{E}(X) = 9,$

$\mathrm{var}(X) = 90.$



Obrázek 3.37: Graf distribuční funkce z příkladu 3.23.

c) Náhodná veličina X je diskrétní, distribuční funkci určíme jako v předchozím příkladě.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0) \\ \sum_{k \leq x} 0,9^k 0,1 & x \in \langle 0; \infty) \end{cases}$$

Graf distribuční funkce je na obrázku 3.37.

Příklad 3.24. Náhodně vybereme reálné číslo z intervalu $(0; 10)$. Určete

a) střední hodnotu a rozptyl náhodně vybraného čísla,

b) hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny X, která představuje náhodně vybrané číslo, a sestavte její graf,

c) pravděpodobnost, že vybrané číslo je z intervalu $\langle 2; 7 \rangle$,

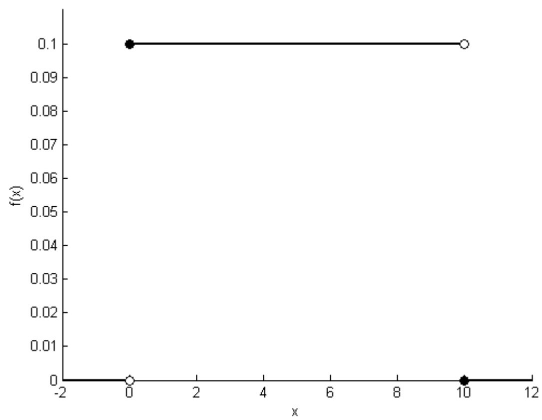
d) distribuční funkci náhodné veličiny X, která představuje náhodně vybrané číslo, a sestavte její graf.

Řešení:

Náhodná veličina X představuje námi vybrané číslo z intervalu $(0; 10)$ a má rovnoměrné rozdělení s parametry $a = 0$ a $b = 10$.

a) Podle vzorců uvedených v oddíle 2.2.1 na straně 33 s přehledem rovnoměrného rozdělení platí:

$\mathsf{E}(X) = 5$,



Obrázek 3.38: Graf hustoty z příkladu 3.24.

$\mathrm{var}(X) = \frac{25}{3}$.

b) Hustotu určíme podle vztahu pro hustotu rovnoměrného rozdělení ze stejného oddílu.

$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0\rangle \\ 0,1 & x \in (0; 10) \\ 0 & x \in \langle 10; \infty) \end{cases}$

Graf hustoty je na obrázku 3.38.

c) Pravděpodobnost, že vybrané číslo je z intervalu $\langle 2; 7\rangle$, určíme přeintegrováním hustoty přes tento interval.

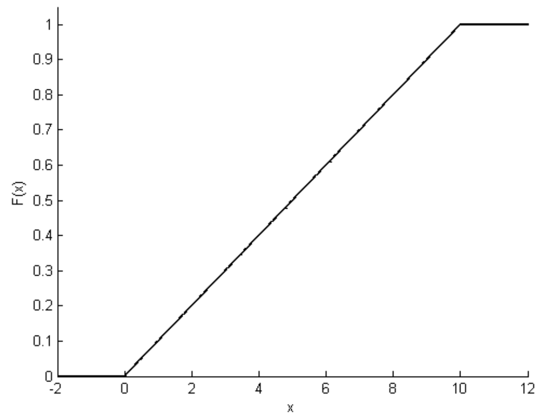
$\mathsf{P}(X \in \langle 2; 7\rangle) = \int\limits_2^7 0,1 \mathrm{d}x = 0,5$

d) Náhodná veličina X je absolutně spojitá, distribuční funkci určíme podle vztahu (1.2) na straně 12. Pro připomenutí, vztah vypadá takto:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0,1 \mathrm{d}t.$$

$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0) \\ \frac{x}{10} & x \in \langle 0; 10) \\ 1 & x \in \langle 10; \infty) \end{cases}$

Graf distribuční funkce je na obrázku 3.39.



Obrázek 3.39: Graf distribuční funkce z příkladu 3.24.

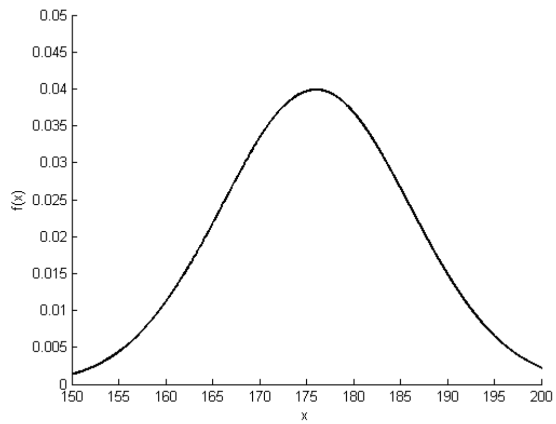
Příklad 3.25. Výška dospělého člověka v jedné oblasti se řídí normálním rozdělením se střední hodnotou 176 cm a směrodatnou odchylkou 10 cm. Určete
a) pravděpodobnost, že dospělý člověk měří mezi 170 a 180 cm,
b) hustotu pravděpodobnosti výšky dospělého člověka a sestavte její graf,
c) distribuční funkci výšky dospělého člověka a sestavte její graf.

Řešení:
Náhodná veličina X představuje výšku dospělého člověka a má normální rozdělení se střední hodnotou $\mu = 176$ a směrodatnou odchylkou $\sigma = 10$.
a) Abychom mohli využít statistické tabulky, budeme hledat danou pravděpodobnost pomocí normovaného normálního rozdělení. Jestliže veličina X značí výšku dospělého člověka (s uvedenou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou), pak náhodná veličina

$$Z = \frac{X - 176}{10} \sim N(0, 1).$$

Vyjádříme-li také zadané realizace veličiny X jako realizace veličiny Z,

$$z_1 = \frac{170 - 176}{10} = -0,6 \quad z_2 = \frac{180 - 176}{10} = 0,4$$



Obrázek 3.40: Graf hustoty z příkladu 3.25.

potom bude hledaná pravděpodobnost rovna

$$\mathsf{P}(170 \leq X \leq 180) = \mathsf{P}(-0,6 \leq Z \leq 0,4) = \Phi(0,4) - \Phi(-0,6) =$$

$$= \Phi(0,4) - [1 - \Phi(0,6)] = 0,65542 - 1 + 0,72675 = 0,38217$$

b) Hustotu určíme podle vztahu pro hustotu normálního rozdělení ze stejného oddílu.

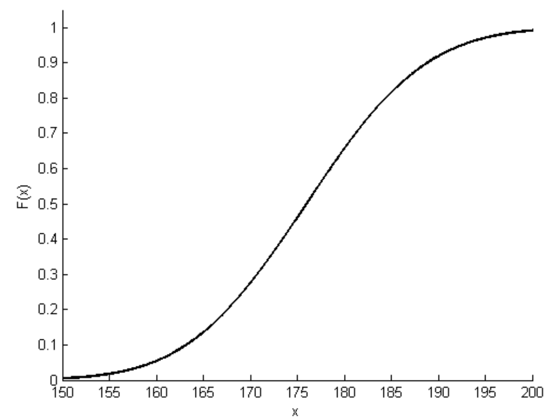
$$f(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-176)^2}{200}} \quad x \in R^1.$$

Graf hustoty je na obrázku 3.40.

c) Náhodná veličina X je absolutně spojitá, distribuční funkce určíme jako v předchozím příkladě.

$$F(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-176)^2}{200}} \mathrm{d}t \quad x \in R^1.$$

Graf distribuční funkce je na obrázku 3.41.



Obrázek 3.41: Graf distribuční funkce z příkladu 3.25.

Příklad 3.26. Ze zkušeností víme, že životnost určité elektronické součástky se řídí exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 4 roky. Určete

a) střední hodnotu a rozptyl životnosti elektronické součástky,

b) hustotu pravděpodobnosti životnosti součástky a sestavte její graf,

c) distribuční funkci životnosti součástky a sestavte její graf,

d) pravděpodobnost, že součástka vydrží déle než 6 let.

Řešení:

Náhodná veličina X představuje životnost součástky v rocích a má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda = 4$.

a) Podle vzorců uvedených v oddíle 2.2.4 na straně 38 s přehledem exponenciálního rozdělení platí:

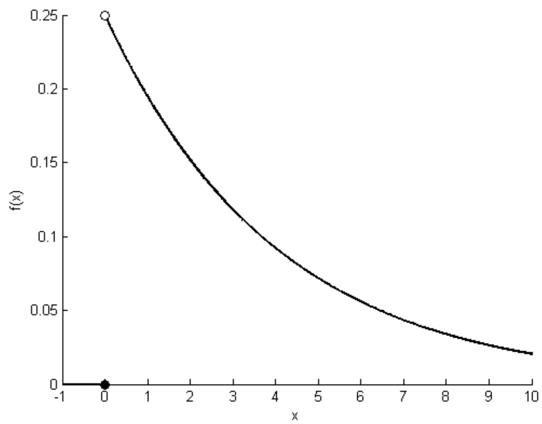
$\mathsf{E}(X) = 4$ roky,

$\mathrm{var}(X) = 16$ roky^2.

b) Hustotu určíme podle vztahu pro hustotu exponenciálního rozdělení ze stejného oddílu

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0\rangle \\ \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x/4} & x \in (0; \infty) \end{cases}$$

Graf hustoty je na obrázku 3.42.



Obrázek 3.42: Graf hustoty z příkladu 3.26.

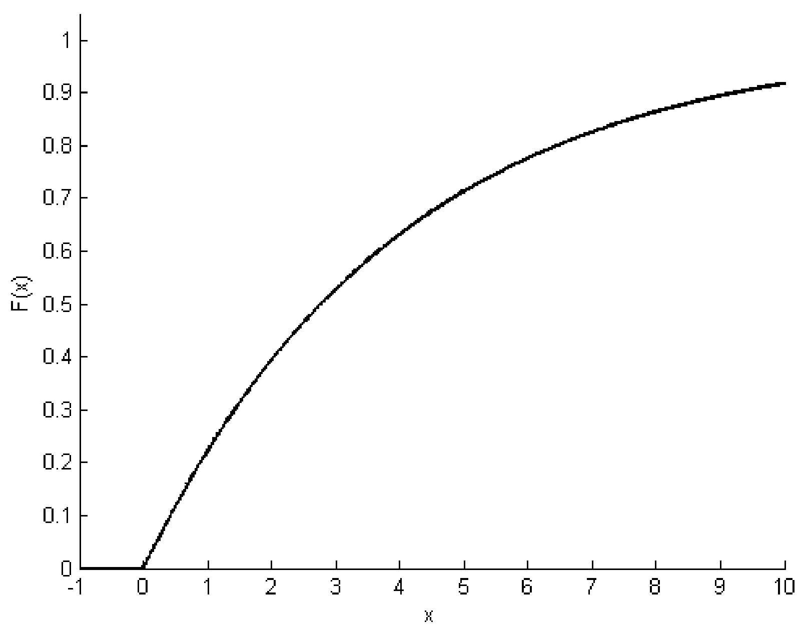
c) Náhodná veličina X je absolutně spojitá, distribuční funkci určíme jako v předchozím příkladě.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0) \\ \frac{1}{4}\int_0^x \mathrm{e}^{-t/4}\mathrm{d}t = \frac{1}{4} \times (-4)\mathrm{e}^{-t/4} = -\mathrm{e}^{-t/4} & x \in \langle 0; \infty) \end{cases}$$

Graf distribuční funkce je na obrázku 3.43.

d) Danou pravděpodobnost určíme z distribuční funkce.

$$\mathsf{P}(X > 6) = 1 - \mathsf{P}(X \leq 6) = 1 - F(6) = 1 - \frac{1}{4}\int\limits_0^6 \mathrm{e}^{-x/4}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-3/2} \doteq 0,2231.$$



Obrázek 3.43: Graf distribuční funkce z příkladu 3.26.

Závěr

Hlavním cílem mé práce je, aby sloužila jako návod studentům k samostatnému řešení příkladů, proto jsem se snažil o co nejpodrobnější popis postupu, který při řešení používám já. Složitější výpočty v práci jsem nechal vypočítat počítačovým programem zvaným Matlab, který někteří z vás už určitě znají. Všechny výsledky jsem se snažil kontrolovat např. počítáním jiným způsobem, ale je možné, že mi něco uniklo, v tom případě se předem omlouvám.

Myslím, že po přečtení příkladové části si čtenář uvědomí, že výpočet uvedených příkladů je ve skutečnosti celkem jednoduchý a bude umět tyto postupy aplikovat sám. Jak už jsem uvedl, u příkladů jsem se snažil vše podstatné co nejlépe vysvětlit a popsat. Doufám, že jsem uspěl a že moje práce pomůže mnoha studentům při řešení příkladů.

Zadání příkladů jsem někdy vymýšlel sám a někdy jsem se inspiroval příklady ze skripta *Sbírka příkladů z pravděpodobnosti* autorů Kubanové J. a Bohdana L., [4]. Tato sbírka obsahuje spoustu neřešených příkladů, takže pokud chcete otestovat svoje znalosti, nebo se více procvičit v počítaní, můžete ji k tomu využít.

Literatura

[1] Anděl, J.: *Základy matematické statistiky.* MATFYZPRESS, Praha, 2005.

[2] Anděl, J.: *Základy matematické statistiky.* MATFYZPRESS, Praha, 2007.

[3] Hron, K., Kunderová, P.: *Základy počtu pravděpodobnosti a metod matematické statistiky.* Vydavatelství Univerzity Palackého, Olomouc, 2013.

[4] Kubanová, J., Bohdan, L.: *Sbírka příkladu z pravděpodobnosti.*

[5] Kunderová, P.: *Základy pravděpodobnosti a matematické statistiky.* Vydavatelství Univerzity Palackého, Olomouc, 2004.

[6] Introduction To Probability, Statistics and Random Processes – Functions of Continuous Random Variables [online]. [cit. 2016-11-28]. Dostupné z: https://www.probabilitycourse.com/chapter4/4_1_3_functions_continuous_var.php.