UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lineární zobrazení a jejich vlastnosti

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí bakalářské práce: **doc. RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.**
Vypracovala: **Věra Stanzelová**
Studijní program: B1101 Matematika
Studijní obor: Matematika a její aplikace
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2021

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Věra Stanzelová

Název práce: Lineární zobrazení a jejich vlastnosti

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2021

Abstrakt: Tato práce pojednává o lineárních zobrazeních mezi normovanými lineárními prostory. Cílem je sestavit sbírku řešených příkladů zaměřenou na spojitost a normu lineárního zobrazení.

Klíčová slova: normovaný lineární prostor, Banachův prostor, lineární zobrazení, spojitost, norma operátoru

Počet stran: 36

Počet příloh: 1

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Věra Stanzelová

Title: Linear Mappings and Their Properties

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Applications of Mathematics

Supervisor: doc. RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.

The year of presentation: 2021

Abstract: This thesis deals with linear mappings between normed linear spaces. The aim is to assemble a collection of solved exercises focused on continuity and the norm of a linear mapping.

Key words: normed linear space, Banach space, linear mapping, continuity, operator norm

Number of pages: 36

Number of appendices: 1

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením pana doc. RNDr. Jana Tomečka, Ph.D., a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Poděkování

Na tomto místě chci poděkovat panu doc. RNDr. Janu Tomečkovi, Ph.D., za příkladné vedení bakalářské práce, za čas a trpělivost, které mi věnoval, a zpětnou vazbu, již mi poskytl.

Úvod

Bakalářská práce pojednává o lineárních zobrazeních mezi normovanými lineárními prostory. Cílem je sestavit sbírku řešených příkladů, které jsou zaměřené na linearitu, spojitost a výpočet normy lineárního zobrazení.

Práce je členěna do tří kapitol. První dvě kapitoly jsou teoretické, obsahují formulace základních vět a definic potřebných k porozumění v příkladové části. První kapitola sestává ze stěžejních pojmů funkcionální analýzy, jako jsou normovaný lineární prostor, Banachův prostor, prostor se skalárním součinem, Hilbertův prostor, a dále jsou zde představeny některé známé normované lineární prostory a prostory se skalárním součinem. Druhá kapitola představuje pojem omezenosti, normy lineárního zobrazení a základní tvrzení platná v normovaných lineárních prostorech. Třetí kapitola obsahuje již zmiňovanou sbírku, kde se čtenář seznámí s postupem vyšetřování spojitosti a hledání normy lineárního zobrazení. V příloze je odvozen známý součet použitý v práci.

Aby čtenář dobře porozuměl textu práce, měl by ovládat znalosti ze základního kurzu matematické analýzy a lineární algebry.

Teoretická část vychází zejména ze zdroje [1], ale také z pramenů [2] a [3]. Příloha čerpá ze zdroje [4].

Kapitola 1

Základní pojmy

V této kapitole si shrneme základní pojmy z funkcionální analýzy, které budeme využívat v příkladové části. Představíme si zejména prostory funkcí a některé jejich vlastnosti.

1.1. Normované lineární prostory

Před zavedením pojmu normovaného lineárního prostoru si stručně připomeňme, že *lineárním* neboli *vektorovým prostorem* rozumíme neprázdnou množinu X nad tělesem T společně s operací sčítání dvou prvků z X a násobení prvku z X prvkem tělesa T. Současně platí 8 axiomů vektorového prostoru.

Definice 1.1. *(Reálným) normovaným lineárním prostorem* rozumíme každý vektorový prostor X nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ vybavený normou $\|.\|$, což je nezáporná funkce na X splňující požadavky:

(a) $\|x\| \geq 0$, přičemž $\|x\| = 0$, právě když $x = 0$,

(b) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

pro každé $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definice 1.2. *Banachovým prostorem* rozumíme každý normovaný lineární prostor, který je v indukované metrice[1] $\varrho(x, y) := \|x - y\|,\ x, y \in X$, úplný.

[1]Vycházíme z metrických prostorů a předpokládá se jejich předchozí znalost.

Vzpomeňme si, že prostor se nazývá *úplný*, jestliže v něm každá cauchyovská posloupnost konverguje.

Uveďme příklady některých známých normovaných lineárních prostorů:

(a) Prostor $\mathbb{R}^n$. Prostory $\mathbb{R}^n$ jsou tvořeny uspořádanými n-ticemi reálných čísel. Pro $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definujeme *eukleidovskou* normu jako

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

(b) Prostor $\mathcal{C}([0,1])$. Vektorový prostor všech spojitých funkcí na intervalu $[0,1]$ budeme uvažovat s normou

$$\|f\| := \max\{|f(t)| \colon t \in [0,1]\} \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{C}([0,1]).$$

(c) Prostor $\mathcal{C}^k([0,1])$. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Vektorový prostor $\mathcal{C}^k([0,1])$ všech spojitě diferencovatelných funkcí až do řádu k na intervalu $[0,1]$ opatříme normou

$$\|f\| := \max_{t\in[0,1]} |f(t)| + \max_{t\in[0,1]} |f'(t)| + \cdots + \max_{t\in[0,1]} |f^{(k)}(t)| \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{C}([0,1]).$$

(d) Prostory c a c_0. Prostor všech konvergentních posloupností reálných čísel $x = \{x_n\}$ značíme c a opatříme ho normou

$$\|x\| := \sup\{|x_n| \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Speciální případ, kdy c je prostor všech posloupností konvergujících k 0, budeme značit c_0.

(e) Prostory L^p, $p \in [1, \infty]$. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Symbolem $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ značíme množinu všech měřitelných funkcí na X, jež jsou skoro všude omezené, tzn. existuje konstanta C tak, že

$$|f(t)| \leq C \quad \text{pro skoro všechna } t \in X.$$

Nejmenší takovou konstantu C nazveme L^∞-*normou* funkce f a značí se $\|f\|_\infty$. Jinak řečeno, L^∞-norma funkce f je *esenciálním supremem* funkce f na X. Můžeme psát

$$\|f\|_\infty = \inf\{\sup\{|f(t)|: t \in X \setminus M\}: M \in \mathcal{A} \wedge \mu(M) = 0\}$$

a značíme

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}\{|f(t)|: t \in X\}.$$

Nechť $p \in [1, \infty)$. Množinu $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ tvoří všechny měřitelné funkce na X, kde

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Toto číslo se nazývá L^p-*norma* funkce z $\mathcal{L}^p$.

Takto definované funkce $\|.\|_\infty$ a $\|.\|_p$ však nejsou normami. Prvky příslušných prostorů modifikujeme následovně. Každé funkci $f \in \mathcal{L}^p, 1 \leq p \leq \infty$, přiřadíme třídu funkcí

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^p: g = f \text{ skoro všude na } X\}$$

a definujeme $L^p = L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \{[f]: f \in \mathcal{L}^p\}$. Potom už L^p je lineární prostor opatřený normou $\|[f]\|_p := \|f\|_p$. Pro jednoduchost budeme dále o prvcích tohoto prostoru hovořit jako o funkcích, nikoli třídách ekvivalence. Jako speciální případ L^p prostorů se dají chápat následující prostory.

(f) Prostory l^p, $p \in [1, \infty]$. Symbolem $l^p, 1 \leq p < \infty$, značíme prostor všech (nekonečných) posloupností reálných čísel $x = \{x_n\}$, kde

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

a l^∞ je prostor všech omezených posloupností reálných čísel $x = \{x_n\}$ vybavený normou

$$\|x\|_\infty := \sup\{|x_n|: n \in \mathbb{N}\}.$$

Povšimněme si, že prostor c je podprostorem v l^∞.

Poznámka 1.3. *Všechny uvedené prostory jsou v zavedených normách Banachovy.*

Za zmínku stojí nerovnost, která hraje významnou roli při studiu L^p prostorů.

Věta 1.4 (Hölderova nerovnost)**.** *Na prostoru s mírou $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mějme měřitelné funkce f, g. Dále nechť existují čísla $p, q \in (1, \infty)$ tak, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom platí*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \; \|g\|_q.$$

Důkaz. [3], str. 111. □

1.2. Prostory se skalárním součinem

Ze základního kurzu lineární algebry jsou nám známy tzv. *eukleidovské prostory*, což jsou prostory se skalárním součinem konečné dimenze. My tento pojem zobecníme i na nekonečnou dimenzi.

Definice 1.5. *Prostorem se skalárním součinem* rozumíme každý vektorový prostor X (nad $\mathbb{R}$), v němž pro každé dva prvky x, y je definován *skalární součin* (x, y) jakožto prvek $\mathbb{R}$ splňující požadavky:

(a) $(x, x) \geq 0$, přičemž $(x, x) = 0$, právě když $x = 0$,

(b) $(x, y) = (y, x)$,

(c) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$,

(d) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,

kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Poznámka 1.6. *Skalární součin indukuje normu $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$, $x \in X$.*

Definice 1.7. *Hilbertův prostor* je každý prostor se skalárním součinem, který je v indukované normě úplný.

Uveďme několik příkladů prostorů se skalárním součinem:

(a) Banachovy prostory $\mathbb{R}^n$, kde je skalární součin dvou prvků $x = (x_1, \ldots, x_n)$ a $y = (y_1, \ldots, y_n)$ definován jako

$$(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

tvoří Hilbertův prostor.

(b) Prostor L^2 je Hilbertův a skalární součin dvou funkcí $f, g \in \mathcal{L}^2$ je ve tvaru

$$(f, g) = \int_X f g \, \mathrm{d}\mu.$$

(c) Prostor posloupností l^2, kde skalární součin dvou prvků $x = \{x_n\}$ a $y = \{y_n\}$ představuje

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

je Hilbertův.

Kapitola 2

Lineární zobrazení a operátory

Tato kapitola pojednává o lineárních zobrazeních mezi normovanými lineárními prostory X a Y. Je-li $Y = X$, zobrazení se nazývají *operátory*, pokud $Y = \mathbb{R}$, hovoříme o *funkcionálech* na X.

Nezaměňujme však pojem lineárního zobrazení a lineární funkce. Připomeňme, že zobrazení $L : X \to Y$ nazveme *lineární*, jestliže pro každé $x, y \in X$ a $\alpha \in T$ jsou splněny podmínky:

$$L(x + y) = Lx + Ly,$$

$$L(\alpha x) = \alpha Lx,$$

kde T je těleso skalárů nad X (a Y). Lineární zobrazení tedy zachovává sčítání prvků lineárního prostoru a násobení prvku skalárem z tělesa nad tímto prostorem. Tyto dvě vlastnosti se nazývají *aditivita* a *homogenita*.

Definice 2.1. Podmnožina A normovaného lineárního prostoru je *omezená*, má-li konečný *průměr* $\operatorname{diam} A := \sup\{\|x - y\| \colon x, y \in A\}$.

Poznámka 2.2. *Množina A je omezená, právě když je obsažena v nějaké kouli, nebo dokonce v kouli se středem v počátku, tj. existuje $K > 0$ tak, že pro každé $x \in A$: $\|x\| \leq K$.*

Definice 2.3. Řekneme, že lineární zobrazení L prostoru X do Y je *omezené*, zobrazuje-li omezené množiny v X na množiny omezené v Y.

Poznámka 2.4. *Je-li lineární zobrazení L omezené na jednotkové kouli, tj. existuje-li $K > 0$ tak, že $\|Lx\|_Y \leq K$ pro všechna $x \in X, \|x\|_X \leq 1$, lze díky linearitě tvrdit, že L je omezené.*

Věta 2.5. *Nechť L je lineární zobrazení X do Y. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(a) *L je spojité,*

(b) *L je spojité v 0,*

(c) *L je omezené.*

Důkaz. [1], str. 17. □

Tato věta vlastně říká, že díky linearitě zobrazení není třeba dokazovat spojitost přímo z definice. Stačí tedy dokázat, že lineární zobrazení je omezené.

Definice 2.6. Je-li L omezené lineární zobrazení mezi normovanými lineárními prostory X a Y, definujeme jeho *normu* vztahem

$$\|L\| = \sup\{\|Lx\|_Y \colon \|x\|_X \leq 1\}.$$

Prostor všech omezených lineárních zobrazení X do Y značíme symbolem $\mathcal{L}(X, Y)$ a uvažujeme na něm právě definovanou normu.

Poznámka 2.7. *Platí*

$$\|L\| = \sup\left\{\frac{\|Lx\|_Y}{\|x\|_X} \colon x \in X \setminus \{o\}\right\}.$$

Definice 2.8. *Duálním prostorem* k normovanému lineárnímu prostoru X nazveme prostor všech omezených (spojitých) lineárních funkcionálů z $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ a značíme ho X^*, přičemž norma zde představuje

$$\|L\| = \sup\{|Lx| \colon \|x\|_X \leq 1\}.$$

Následující věta nám umožní libovolný spojitý lineární funkcionál na Hilbertově prostoru reprezentovat pomocí skalárního součinu.

Věta 2.9 (Rieszova věta)**.** *Nechť L je spojitý lineární funkcionál na Hilbertově prostoru X. Potom existuje právě jedno $a \in X$ tak, že $L(x) = (x, a)$ pro každé $x \in X$. Navíc platí $\|L\| = \|a\|$.*

Důkaz. [1], str. 19. □

Připomeňme, že dva vektorové prostory X, Y nazveme *izomorfní*, jestliže existuje mezi těmito prostory bijektivní a lineární zobrazení X na Y neboli izomorfismus (izomorfní zobrazení).

Definice 2.10. Normované prostory X a Y nazveme *izometricky izomorfní*, existuje-li izomorfní zobrazení, které je navíc izometrické.

Jen ve stručnosti doplníme, že *izometrické* zobrazení je takové, které zachovává normy prvků. V Hilbertově prostoru pak dokonce zachovává skalární součin.

Věta 2.11. *Nechť $1 < p < \infty$ a $q = \frac{p}{p-1}$. Pak prostory $(L^p)^*$ a L^q jsou izometricky izomorfní. Pokud je $g \in \mathcal{L}^q$ a F_g ve tvaru*

$$F_g : f \longmapsto \int_X fg \, \mathrm{d}\mu,$$

kde $f \in \mathcal{L}^p$, je F_g spojitý lineární funkcionál z $(L^p)^*$ a $\|F_g\| = \|g\|$.

Důkaz. [2], str. 361. □

Definice 2.12. Nechť X a Y jsou normované lineární prostory. Řekneme, že prostor X je spojitě vnořen do prostoru Y, značíme $X \hookrightarrow Y$, jestliže je identické zobrazení $I : X \to Y$ spojité, tzn. existuje $C > 0$ tak, že pro každé $f \in X$ platí

$$\|f\|_Y \leq C\|f\|_X.$$

Kapitola 3

Řešené příklady

Zadání uvedených příkladů je převzato z [1], str. 33.

Příklad 1. Zjistěte, zda následující operátory na prostoru X jsou lineární a spojité. Pokud ano, spočtěte jejich normu:

(a) $Lf(t) := \omega(t)f(t),\ X = \mathcal{C}([0,1])\ (\omega \in \mathcal{C}([0,1]),$

(b) $Lf(t) := \omega(t)f(t),\ X = L^2([0,1])\ (\omega \in L^\infty([0,1])),$

(c) $Lf(t) := f(t^3),\ X = \mathcal{C}([0,1]),$

(d) $Lf(t) := f(t^3),\ X = L^2([0,1]),$

(e) L je identické vnoření prostoru $\mathcal{C}^1([0,1])$ do $\mathcal{C}([0,1])$,

(f) $Lf(t) := \displaystyle\int_0^{2\pi} f(s)\cos(t-s)\,\mathrm{d}s,\ X = L^2([0,2\pi]),$

(g) $Lf(t) := t\displaystyle\int_0^1 f(s)\,\mathrm{d}s,\ X = L^2([0,1]),$

(h) $L(\{x_n\}) := (x_1, x_2, x_3, 0, 0, \dots),\ X = l^1,$

(i) $L(\{x_n\}) := (x_1, x_2, x_3, 0, 0, \dots),\ X = c_0,$

(j) $L(x_1, x_2, x_3) := (x_1, -2x_2, 3x_3)$ pro $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Řešení. Linearita je ve většině případů zřejmá za předpokladu, že je operátor definovaný korektně. Z tohoto důvodu ji budeme vyšetřovat jen u některých úloh. ad (a): Nejdříve je třeba ověřit, zda je operátor dobře definovaný. Protože součinem dvou spojitých funkcí na příslušném intervalu je funkce spojitá na tomto intervalu, zobrazení je definované korektně. V dalším kroku vyšetříme, zda je tento operátor lineární. Tedy pro každé $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$ platí

$$\begin{aligned} L(\alpha f + \beta g)(t) &= \omega(t)(\alpha f(t) + \beta g(t)) \\ &= \alpha\omega(t)f(t) + \beta\omega(t)g(t) \\ &= \alpha Lf(t) + \beta Lg(t), \end{aligned}$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $t \in [0,1]$. Dále chceme dokázat, že je operátor spojitý. Podle Věty 2.5 stačí ukázat, že je lineární operátor omezený. Dostáváme odhad

$$|Lf(t)| = |\omega(t)f(t)| = |\omega(t)||f(t)| \leq \|\omega\|_\infty \|f\|_\infty,\ t \in [0,1],$$

kde poslední nerovnost vyplývá ze vztahu

$$|\omega(t)| \leq \max_{t\in[0,1]} |\omega(t)| = \|\omega\|_\infty,\ t \in [0,1].$$

Odvodili jsme, že pro každé $f \in \mathcal{C}([0,1])$

$$\|Lf\|_\infty \leq \|\omega\|_\infty \|f\|_\infty.$$

Tedy operátor je omezený, spočteme jeho normu. Z předchozí nerovnosti dále plyne

$$\|L\| \leq \|\omega\|_\infty.$$

V tomto případě stačí najít takovou funkci $f^0 \in \mathcal{C}([0,1])$, pro kterou nabývá operátor své normy. Lze vidět, že pokud položíme $f^0 \equiv 1$, potom

$$\|Lf^0\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |\omega(t) \cdot 1| = \|\omega\|_\infty,$$

přitom platí $\|f^0\|_\infty = 1$. Odtud plyne nerovnost

$$\|L\| \geq \|\omega\|_\infty.$$

Zřejmě jsme s výpočtem hotovi a celkově nám vychází

$$\|L\| = \|\omega\|_\infty.$$

ad (b): Fakt, že funkce $f \in L^2([0,1])$ a ω je skoro všude omezená na [0,1], značí, že je operátor dobře definovaný. Platí totiž

$$\|Lf\|_2^2 = \int_0^1 (\omega(t)f(t))^2 \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \omega^2(t)f^2(t)\,\mathrm{d}t \le \|\omega\|_\infty^2 \|f\|_2^2$$

pro s.v. $t \in [0,1]$ a pro každé $f \in L^2([0,1])$. Poslední nerovnost jsme dostali ze vztahu

$$\omega(t) \le \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,1]} |\omega(t)| = \|\omega\|_\infty \quad \text{pro s.v. } t \in [0,1].$$

Dokázali jsme, že operátor je omezený, tedy i spojitý. Z předchozího odhadu máme nerovnost

$$\|L\| \le \|\omega\|_\infty.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně a označme si množinu

$$M_\varepsilon = \{t \in [0,1] : |\omega(t)| \ge \|\omega\|_\infty - \varepsilon\}.$$

Dále definujme charakteristickou funkci

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in M_\varepsilon, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak platí

$$\begin{aligned} \frac{\|Lf_\varepsilon\|_2^2}{\|f_\varepsilon\|_2^2} &= \frac{\int_0^1 (|\omega(t)| \cdot \chi_{M_\varepsilon}(t))^2 \,\mathrm{d}t}{\int_0^1 (\chi_{M_\varepsilon}(t))^2 \,\mathrm{d}t} = \frac{\int_{M_\varepsilon} |\omega(t)|^2 \,\mathrm{d}t}{\mu(M_\varepsilon)} \\ &\ge \frac{(\|\omega\|_\infty - \varepsilon)^2 \mu(M_\varepsilon)}{\mu(M_\varepsilon)} = (\|\omega\|_\infty - \varepsilon)^2. \end{aligned}$$

Z toho nám vychází nerovnost

$$\|L\| \ge \|\omega\|_\infty - \varepsilon.$$

Protože ε bylo libovolné, dokázali jsme, že $\|L\| \ge \|\omega\|_\infty$, a dohromady

$$\|L\| = \|\omega\|_\infty.$$

ad (c): Pro $t \in [0,1]$ je $t^3 \in [0,1]$ a $f \in \mathcal{C}([0,1])$. To znamená, že je zobrazení dobře definované. Ukažme linearitu. Pro každé $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$ platí

$$L(\alpha f + \beta g)(t) = \alpha f(t^3) + \beta g(t^3) = \alpha L f(t) + \beta L g(t),\ t \in [0,1].$$

Spočteme normu. Pro každé $f \in \mathcal{C}([0,1])$ platí

$$\|Lf\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t^3)| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)| = \|f\|_\infty,\ t \in [0,1],$$

což plyne z faktu, že t^3 je bijekce na intervalu $[0,1]$. Lze okamžitě vidět, že

$$\|L\| = 1.$$

ad (d): Ukažme, že toto zobrazení není korektně definováno. Zvolme například funkci $L^2([0,1]) \ni f(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}},\ t \in [0,1]$, tzn. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\,\mathrm{d}t = 3 < \infty$, ale $\int_0^1 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \infty$, tedy $Lf \notin L^2([0,1])$.

ad (e): Zobrazení je korektně definováno, protože $\mathcal{C}^1([0,1]) \subset \mathcal{C}([0,1])$. Pro každé $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ platí

$$\|Lf\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)| = \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|_1,\ t \in [0,1].$$

Z předchozí nerovnosti plyne spojitost operátoru a pro normu L patrně platí $\|L\| \leq 1$. Položme $f^0 \equiv 1$, pak

$$\|Lf^0\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} 1 = 1,$$

tedy je nám už jasné, že

$$\|L\| = 1.$$

ad (f): Zobrazení je definováno korektně, protože $f \in L^2([0,2\pi])$ a cos je funkce omezená v $\mathbb{R}$. Pro každé $f, g \in L^2([0,2\pi])$ platí

$$\begin{aligned}
L(\alpha f + \beta g)(t) &= \int_0^{2\pi} (\alpha f(s) + \beta g(s)) \cos(t-s)\,\mathrm{d}s \\
&= \alpha \int_0^{2\pi} f(s)\cos(t-s)\,\mathrm{d}s + \beta \int_0^{2\pi} g(s)\cos(t-s)\,\mathrm{d}s \\
&= \alpha L f(t) + \beta L g(t),
\end{aligned}$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $t \in [0, 2\pi]$, tzn. operátor je lineární. Nyní ukážeme, že je i omezený. Nejprve si odvodíme nerovnost, která bude užitečná v dalším výpočtu. Tedy platí

$$\begin{aligned} Lf(t) &= \int_0^{2\pi} f(s)\cos(t-s)\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} f(s)\left(\cos t\cos s + \sin t \sin s\right)\,\mathrm{d}s \\ &= \cos t \underbrace{\int_0^{2\pi} f(s)\cos s\,\mathrm{d}s}_{\pi\cdot a_1} + \sin t \underbrace{\int_0^{2\pi} f(s)\sin s\,\mathrm{d}s}_{\pi\cdot b_1}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

kde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\cos ns\,\mathrm{d}s,\ \ n \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\sin ns\,\mathrm{d}s,\ \ n \in \mathbb{N},$$

jsou (reálné) Fourierovy koeficienty funkce f. Z Parsevalovy rovnosti (viz Příloha) dále plyne

$$\frac{1}{\pi}\|f\|_2^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \geq a_1^2 + b_1^2. \tag{3.2}$$

Pro každé $f \in L^2([0, 2\pi])$ platí

$$\begin{aligned} \|Lf\|_2^2 &= \int_0^{2\pi} \left(\pi a_1 \cos t + \pi b_1 \sin t\right)^2\,\mathrm{d}t \\ &= \pi^2 a_1^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t + 2\pi^2 a_1 b_1 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin t\cos t\,\mathrm{d}t}_{0} + \pi^2 b_1^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \pi^2\left(a_1^2\pi + b_1^2\pi\right) = \pi^3\left(a_1^2 + b_1^2\right) \leq \pi^2\|f\|_2^2, \end{aligned}$$

kde jsme užili (3.2). Odtud plyne, že $\|L\| \leq \pi$. Zvolme funkci

$$f^0(s) = \frac{\cos s}{\sqrt{\pi}},\ \ s \in [0, 2\pi],$$

přitom platí $\|f^0\|_2 = 1$, pak dosazením do (3.1) dostaneme

$$\|Lf^0\|_2^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\pi\cos t\right)^2\,\mathrm{d}t = \pi^2.$$

Celkově to pro nás znamená, že

$$\|L\| = \pi.$$

ad (g): Jelikož $t \in [0,1]$ a $f \in L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$, zobrazení je korektně definované. Snadno nahlédneme, že je operátor lineární. Pro $f, g \in L^2([0,1])$ totiž platí

$$\begin{aligned}
L(\alpha f + \beta g)(t) &= t \int_0^1 (\alpha f(s) + \beta g(s)) \, \mathrm{d}s \\
&= t \int_0^1 \alpha f(s) \, \mathrm{d}s + t \int_0^1 \beta g(s) \, \mathrm{d}s \\
&= \alpha \left(t \int_0^1 f(s) \, \mathrm{d}s \right) + \beta \left(t \int_0^1 g(s) \, \mathrm{d}s \right) \\
&= \alpha L f(t) + \beta L g(t),
\end{aligned}$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $t \in [0,1]$. V dalším kroku chceme ukázat, že je operátor spojitý. Platí

$$\begin{aligned}
\|Lf\|_2^2 &= \int_0^1 \left(t \int_0^1 f(s) \, \mathrm{d}s \right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^1 t^2 \left(\int_0^1 f(s) \, \mathrm{d}s \right)^2 \mathrm{d}t \\
&= \left(\int_0^1 f(s) \, \mathrm{d}s \right)^2 \int_0^1 t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{3} \left(\int_0^1 f(s) \, \mathrm{d}s \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{3} \int_0^1 f^2(s) \, \mathrm{d}s = \frac{1}{3} \|f\|_2^2,
\end{aligned}$$

kde $f \in L^2([0,1])$ a $t \in [0,1]$. Poslední nerovnost plyne z Hölderovy nerovnosti (Věta 1.4), kde $p = q = 2$. Tím jsme ukázali spojitost operátoru a odvodíme, že $\|L\| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$. Zvolme $f^0 \equiv 1$, pak máme

$$\|Lf^0\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \left(t \int_0^1 1 \, \mathrm{d}s \right)^2 \mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Tím je náš výpočet u konce a celkově nám vychází

$$\|L\| = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

ad (h): Protože $(x_1, x_2, x_3, 0, 0, \dots)$ je konečná posloupnost reálných čísel, zobrazení je korektně definované pro každé $x = \{x_n\} \in l^1$. Dostáváme odhad

$$\|Lx\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3| \le \sum_{n=1}^{\infty} |x| = \|x\|_1,$$

kde $x \in l^1$. Z toho už vidíme, že L je spojitý. Nyní spočteme normu. Vyjdeme z nerovnosti $\|L\| \le 1$. Stačí zvolit posloupnost $x^0 = (1, 0, 0, \dots)$, potom je $\|Lx^0\| = |1| = 1$, tedy

$$\|L\| = 1.$$

ad (i): Zobrazení je dobře definované, neboť $(x_1, x_2, x_3, 0, 0, \dots)$ konverguje k nule pro každé $x = \{x_n\} \in c_0$. Spočteme normu. Dostáváme

$$\|Lx\|_0 = \sup\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} \le \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = \|x\|_0,$$

kde $x \in c_0$. Vezměme například posloupnost $x^0 = (1, 1, 1, \dots)$, tedy $\|Lx^0\| = 1$, pak je pochopitelně

$$\|L\| = 1.$$

ad (j): Zobrazení je definováno korektně, neboť $(x_1, -2x_2, 3x_3) \in \mathbb{R}^3$. Ukážeme, že je lineární. Pro každé $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ platí

$$\begin{aligned} L(\alpha x + \beta y) &= (\alpha x_1 + \beta y_1, -2(\alpha x_2 + \beta y_2), 3(\alpha x_3 + \beta y_3)) \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1, -2\alpha x_2 - 2\beta y_2, 3\alpha x_3 + 3\beta y_3) \\ &= \alpha(x_1, -2x_2, 3x_3) + \beta(y_1, -2y_2, 3y_3) \\ &= \alpha Lx + \beta Ly, \end{aligned}$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. V dalším kroku ukážeme, že je operátor omezený. Tudíž platí

$$\begin{aligned} \|Lx\|^2 &= x_1^2 + (-2x_2)^2 + (3x_3)^2 \\ &= x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 \\ &\le 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &= 9\|x\|^2, \end{aligned}$$

kde $x \in \mathbb{R}^3$. Z předchozího dále plyne nerovnost $\|L\| \leq 3$. Zvolme $x^0 = (0, 0, 1)$, pak už je vidět, že

$$\|Lx^0\| = \sqrt{(3 \cdot 1)^2} = 3.$$

S výpočtem jsme patrně u konce a

$$\|L\| = 3.$$

Příklad 2. Rozmyslete si, zda následující funkcionály na Banachově prostoru X jsou lineární a omezené. V kladném případě nalezněte jejich normy:

(a) $F\colon \{x_n\} \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2},\ X = c_0,$

(b) $F\colon f \longmapsto \int_0^{\pi} f(t) \sin t \,\mathrm{d}t,\ X = L^2([0,\pi]),$

(c) $F\colon f \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} f\left(\frac{1}{n}\right),\ X = \mathcal{C}([-1,1]),$

(d) $F\colon \{x_n\} \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} x_n,\ X = l^2,$

(e) $F\colon f \longmapsto \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t^n) \,\mathrm{d}t,\ X = \mathcal{C}([0,1]),$

(f) $F\colon f \longmapsto \int_0^1 t^{-\frac{1}{5}}\ f(t) \,\mathrm{d}t,\ X = L^2([0,1]),$

(g) $F\colon \{x_n\} \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right) x_n,\ X = l^1,$

(h) $F\colon f \longmapsto \int_0^1 t\ f(t) \,\mathrm{d}t,\ X = L^p([0,1]).$

Řešení. Stejně jako v předchozím řešení vyšetřování linearity u některých příkladů vynecháme, neboť je často patrná již z tvaru zadaného funkcionálu.
ad (a): V prvním kroku ukažme linearitu. Tedy pro každé $x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in c_0$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ máme

$$F(\alpha x + \beta y) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha \frac{x_n}{n^2} + \beta \frac{y_n}{n^2}\right)$$
$$= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2} + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{n^2} = \alpha F x + \beta F y,$$

pokud jsou uvedené součty konečné. Pro každé $x \in c_0$ platí

$$|Fx| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x_n}{n^2}\right| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \|x\|_0\ \frac{\pi^2}{6} < \infty,$$

kde poslední nerovnost plyne z faktu, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \text{ viz Příloha.} \tag{3.3}$$

Zobrazení je dobře definované a omezené, tedy spojité. Dostáváme

$$\|F\| \leq \frac{\pi^2}{6}.$$

Zvolme nyní $c_0 \ni x_k = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-\text{krát}}, 0, \dots),\ k \in \mathbb{N}$, pak je

$$\lim_{k\to\infty} Fx_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Tedy celkově nám vychází

$$\|F\| = \frac{\pi^2}{6}.$$

ad (b): Funkcionál je dobře definovaný, neboť $f \in L^2([0,\pi])$ a $\sin \in L^2([0,\pi])$. Pro každé $f \in L^2([0,\pi])$ totiž platí

$$\begin{aligned} |Ff| &= \left| \int_0^{\pi} f(t) \sin t \,\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^{\pi} |f(t) \sin t| \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} |f(t)| |\sin t| \,\mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_0^{\pi} f^2(t) \,\mathrm{d}t} \sqrt{\int_0^{\pi} \sin^2 t \,\mathrm{d}t} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|f\|_2 < \infty, \end{aligned}$$

kde $t \in [0,\pi]$, přitom poslední nerovnost plyne z Hölderovy nerovnosti (Věta 1.4), kde $p = q = 2$. Zřejmě je funkcionál omezený a dále máme $\|F\| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Zvolme

$$f^0(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}},\ t \in [0,\pi].$$

Pak dosazením do funkcionálu plyne

$$Ff^0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_0^{\pi} \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

a celkově máme

$$\|F\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Mohli bychom argumentovat i jiným způsobem. Protože $(f, \sin) = \int_0^\pi f(t) \sin t \,\mathrm{d}t$ představuje skalární součin v $L^2([0,\pi])$, lze podle Rieszovy věty (Věta 2.9) položit

$$\|F\| = \|\sin\|_2 = \sqrt{\int_0^\pi \sin^2 t \,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Důkaz Rieszovy věty nám vlastně říká, proč volíme funkci f^0 právě v uvedeném tvaru.

ad (c): Pro každé $f \in \mathcal{C}([-1,1])$ a pro $t \in [-1,1]$ platí

$$\begin{aligned}
|Ff| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \max_{t\in[-1,1]} |f(t)| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{\pi^2}{6} \|f\|_\infty < \infty,
\end{aligned}$$

kde jsme opět využili vzorec (3.3). Tedy funkcionál je definovaný korektně. Z omezenosti plyne spojitost a dále platí

$$\|F\| \leq \frac{\pi^2}{6}.$$

V dalším kroku zkonstruujeme posloupnost po částech lineárních funkcí $f_k(t)$ splňující

$$\begin{aligned}
f_k\left(\frac{1}{n}\right) &= (-1)^n \quad \text{pro} \quad n = 1, \dots, k, \\
f_k(-1) &= (-1)^k, \ k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Na Obrázku 3.1 jsou vidět grafy několika prvních členů uvedené posloupnosti.

Dále dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} Ff_k &= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n + \lim_{k\to\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^k\\ &= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},\end{aligned}$$

kde pro zbytek konvergentní řady platí

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^k = 0.$$

Zřejmě jsme s výpočtem u konce a celkově máme

$$\|F\| = \frac{\pi^2}{6}.$$

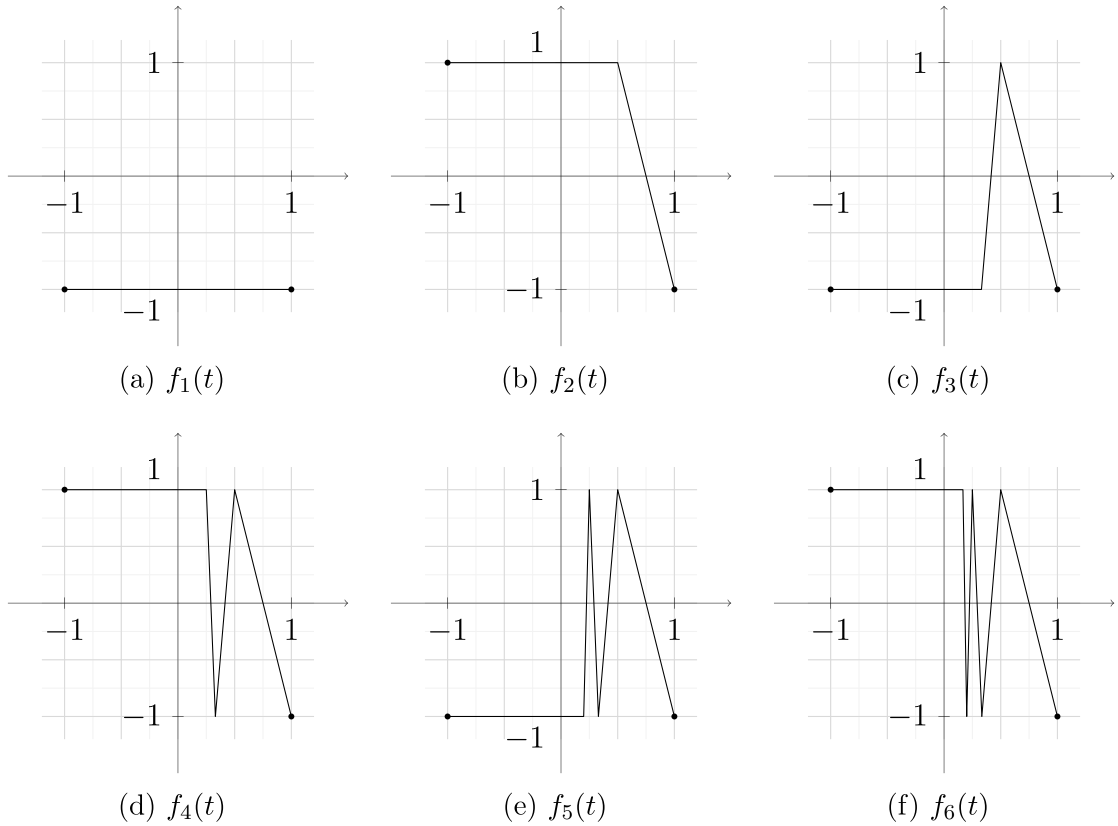
ad (d): Pro každé $x = \{x_n\} \in l^2$ platí

$$\begin{aligned}|Fx| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}x_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}\right||x_n|\\ &\le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}\right)^2}\underbrace{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2}}_{\|x\|_2}\\ &\le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}}\|x\|_2.\end{aligned}$$

Při odvození jsme užili Hölderovy nerovnosti (Věta 1.4), kde $p = q = 2$. Označme si

$$S = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}}.$$

Například pomocí odmocninového Cauchyova kritéria bychom zjistili, že S konverguje. V tom případě je zobrazení definováno korektně. Spojitost jsme dokázali



(a) $f_1(t)$ (b) $f_2(t)$ (c) $f_3(t)$

(d) $f_4(t)$ (e) $f_5(t)$ (f) $f_6(t)$

Obrázek 3.1: Grafy funkcí z Př. 2.(c)

a dále platí $\|F\| \leq S$. Uvažujme posloupnost $x^0 = \{x_n^0\}$ definovanou předpisem

$$x_n^0 = \frac{1}{S} \frac{n}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}, \; n \in \mathbb{N},$$

pak nahlédneme, že

$$Fx^0 = \frac{1}{S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} \frac{n}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{S} \cdot S^2 = S,$$

a skoro hned je vidět, že

$$\|F\| = S.$$

I v tomto případě lze využít Rieszovy věty (Věta 2.9), neboť Fx představuje skalární součin v l^2. Můžeme psát

$$\|F\| = \left\| \frac{n}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} \right\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^{n}}} = S.$$

ad (e): Platí

$$
\begin{aligned}
|Ff| &= \left|\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t\right| \le \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \max_{t\in[0,1]}|f(t^n)|\;\mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \underbrace{\max_{t\in[0,1]}|f(t)|}_{\|f\|_\infty}\;\mathrm{d}t = \|f\|_\infty \lim_{n\to\infty}\int_0^1 1\,\mathrm{d}t \\
&= \|f\|_\infty < \infty,
\end{aligned}
$$

kde $f \in \mathcal{C}([0,1])$ a $t \in [0,1]$. Zobrazení je dobře definované a je vidět, že je funkcionál omezený. Pro každé $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$ platí

$$
\begin{aligned}
F(\alpha f + \beta g)(t) &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \alpha f(t^n) + \beta g(t^n)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\alpha\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t + \beta\int_0^1 g(t^n)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \alpha\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t + \beta\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g(t^n)\,\mathrm{d}t \\
&= \alpha Ff + \beta Fg,
\end{aligned}
$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $t \in [0,1]$, přitom jsme nejprve užili linearitu integrálu a potom linearitu limity. Z linearity a omezenosti plyne spojitost funkcionálu. Pro normu zobrazení F platí $\|F\| \le 1$. Při volbě $f^0 \equiv 1$ dostáváme

$$
Ff^0 = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1
$$

a dohromady máme $\|F\| = 1$.

ad (f): Pro každé $f \in L^2([0,1])$ a $t \in [0,1]$ platí

$$
\begin{aligned}
|Ff| &= \left|\int_0^1 t^{-\frac{1}{5}}\;f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 \left|t^{-\frac{1}{5}}\;f(t)\right|\;\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left|t^{-\frac{1}{5}}\right|\,|f(t)|\;\mathrm{d}t \le \sqrt{\int_0^1 t^{-\frac{2}{5}}\,\mathrm{d}t}\;\underbrace{\sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t}}_{\|f\|_2} \\
&\le \sqrt{\frac{5}{3}}\;\|f\|_2 < \infty,
\end{aligned}
$$

což jsme odvodili pomocí Hölderovy nerovnosti (Věta 1.4), kde $p = q = 2$. Funkcionál je korektně definovaný a spojitý. Uvažujme funkci

$$f^0(t) = \frac{t^{-\frac{1}{5}}}{\sqrt{\frac{5}{3}}},\ t \in [0,1],$$

potom po dosazení dostaneme

$$Ff^0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3}}} \int_0^1 t^{-\frac{2}{5}}\,\mathrm{d}t = \frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{\frac{5}{3}}} = \sqrt{\frac{5}{3}},$$

a proto můžeme psát

$$\|F\| = \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Také bychom opět mohli využít Rieszovy věty (Věta 2.9) a normu počítat jako

$$\|F\| = \left\| t^{-\frac{1}{5}} \right\|_2 = \sqrt{\int_0^1 t^{-\frac{2}{5}}\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

ad (g): Pro každé $x = \{x_n\} \in l^1$ platí

$$|Fx| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left| \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right|}_{\le 1} |x_n| \le 1 \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|}_{\|x\|_1} < \infty.$$

Funkcionál je definovaný korektně. Dokázali jsme také jeho spojitost a v dalším kroku spočteme normu. Platí $\|F\| \le 1$. Zvolme $x_k = (0,\dots,0,1,0,\dots),\ k \in \mathbb{N}$, pak

$$\lim_{k\to\infty} Fx_k = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1,$$

tedy už je vidět, že

$$\|F\| = 1.$$

ad (h): Funkcionál je korektně definovaný, protože $t \in [0,1]$ a $L^1([0,1]) \supset L^p([0,1])$, kde $p \in [1,\infty]$. Platí

$$|Ff| = \left|\int_0^1 t\ f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 t\ |f(t)|\,\mathrm{d}t$$
$$\leq \underbrace{\sqrt[q]{\int_0^1 t^q\,\mathrm{d}t}}_{\|t\|_q}\underbrace{\sqrt[p]{\int_0^1 |f(t)|^p\,\mathrm{d}t}}_{\|f\|_p},$$

kde $f \in L^p([0,1])$ a $t \in [0,1]$. Zde jsme užili Hölderovu nerovnost (Věta 1.4), kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a $1 < p, q < \infty$. Dostáváme odhad

$$|Ff| \leq \sqrt[q]{\left[\frac{t^{q+1}}{q+1}\right]_0^1}\|f\|_p = (q+1)^{-\frac{1}{q}}\|f\|_p.$$

Pro normu zobrazení F tedy platí

$$\|F\| \leq (q+1)^{-\frac{1}{q}}.$$

V posledním kroku využijeme toho, že prostory L^q a $(L^p)^*$ jsou izometricky izomorfní, kde p, q jsou sdružené hodnoty splňující $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a $1 < p, q < \infty$. Podle Věty 2.11 totiž platí

$$F \in (L^p)^* \text{ a } \|F\| = \|t\|_q = (q+1)^{-\frac{1}{q}}.$$

Nyní vyřešíme případ, kdy $p = 1$ nebo $p = \infty$. Pro $p = 1$ dostáváme

$$|Ff| = \left|\int_0^1 t\ f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \|f\|_1,\ t \in [0,1].$$

Z toho nám plyne, že $\|F\| \leq 1$. Zvolme posloupnost $f_k(t) = (k+1)t^k,\ t \in [0,1]$, $k \in \mathbb{N}$, pro kterou

$$\lim_{k\to\infty} Ff_k = \lim_{k\to\infty}(k+1)\int_0^1 t^{k+1}\,\mathrm{d}t = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k+2} = 1,$$

celkově nám vychází

$$\|F\| = 1.$$

V případě, že $p = \infty$, dostaneme

$$|Ff| = \left| \int_0^1 t\ f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^1 t\ |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}\|f\|_\infty$$

pro s.v. $t \in [0,1]$. Poslední nerovnost vyplývá ze vztahu

$$f(t) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,1]} |f(t)| = \|f\|_\infty \quad \text{pro s.v. } t \in [0,1].$$

Lze vidět, že při volbě $f^0 \equiv 1$ vychází

$$Ff^0 = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

A celkově máme $\|F\| = \frac{1}{2}$.

Závěr

Cílem bakalářské práce bylo vytvořit sbírku řešených příkladů týkající se lineárních zobrazení.

V prvních dvou kapitolách jsou stručně uvedeny teoretické znalosti nezbytné pro porozumění v příkladové části, která utváří kapitolu třetí. První kapitola pojednávala zejména o prostorech funkcí a představila stěžejní definice a pojmy, jako jsou normovaný lineární prostor, Banachův prostor, prostor se skalárním součinem a Hilbertův prostor. V druhé kapitole se pak čtenář dozvěděl přímo o lineárních zobrazeních a základních větách platných v normovaných lineárních prostorech. V kapitole třetí byl pak seznámen s postupem vyšetřování spojitosti a výpočtu normy lineárního zobrazení.

Příloha

Ukážeme si jeden z mnoha způsobů, jak lze odvodit součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Věta (Parsevalova rovnost)**.** *Nechť* $a \in \mathbb{R}$, $p > 0$ *a* $f \in L^2([a, a+p])$ *je* p*-periodická funkce. Dále nechť jsou* a_n *a* b_n *(reálné) Fourierovy koeficienty funkce* f*. Potom platí*

$$\frac{2}{p} \int_a^{a+p} f^2(t)\, dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

Důkaz. [3], str. 154. □

Funkci $f(t) = t$ rozvineme do Fourierovy řady na intervalu $(-\pi, \pi)$ s koeficienty

$$a_n = 0,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

neboť $f(t) = t$ je lichá a jde tedy o sinovou řadu. Dále dopočítáme koeficent b_n užitím metody per partes a pro $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin nt\, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-t\, \frac{\cos nt}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\cos n\pi}{n}\, dt}_{0} \\ &= -2\, \frac{\cos n\pi}{n} = 2\, \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Fourierova řada k funkci f vypadá následovně

$$t \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt,\ \ t \in (-\pi, \pi).$$

Podle Parsevalovy rovnosti platí

$$\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\, dt}_{\frac{2\pi^2}{3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2\ \frac{(-1)^n}{n}\right)^2.$$

Tedy celkově máme

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Pomocí Fourierových řad lze zřejmě odvodit i další známé součty, které čtenář nalezne např. v [4].

Literatura

[1] Lukeš, J.: *Zápisky z funkcionální analýzy.* 2., nezměn. vyd. Karolinum, Praha, 2012.

[2] Taylor, A. E.: *Úvod do funkcionální analýzy.* Academia, Praha, 1973.

[3] Bachman, G., Narici, L.: *Functional analysis.* Academic Press, New York, 1966.

[4] Došlá, Z.; Novák, V.: *Nekonečné řady.* Brno: Masarykova univerzita, 2002.