



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MATEMATIKY**

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**ANALÝZA PROUDĚNÍ KAPALINY S TRAJEKTORIÍ TVARU  
PROSTOROVÉ SPIRÁLY**

ANALYSIS OF THE LIQUID FLOW WITH THE TRAJECTORY OF THE SPATIAL SPIRAL SHAPE

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

Ondřej Klimeš

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

doc. Ing. Simona Fialová, Ph.D.

BRNO 2017



## Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky  
Student: **Ondřej Klimeš**  
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství  
Studijní obor: Matematické inženýrství  
Vedoucí práce: **doc. Ing. Simona Fialová, Ph.D.**  
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Analýza proudění kapaliny s trajektorií tvaru prostorové spirály**

#### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Předmětem práce bude literární rešerše Navier–Stokesových rovnic a rovnice kontinuity v křivočarých souřadnicích. Na základě analýzy těchto rovnic bude vytvořen matematický model za předpokladu, že jednu z křivočarých souřadnic tvoří proudnice.

#### **Cíle bakalářské práce:**

Cílem práce je definice křivočarých souřadnic, vyjádření operátoru gradientu, divergence a rotace v křivočarých souřadnicích. Odvození Navier–Stokesových rovnic a rovnice kontinuity v křivočarých souřadnicích za předpokladu, že jedna z křivočarých souřadnic je proudnice. Analyzována bude spirální trajektorie částice kapaliny, pro kterou platí  $\text{rot } \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0$  ( $\mathbf{v}$  je vektor rychlosti kapaliny).

#### **Seznam doporučené literatury:**

POCHYLÝ, F. Analýza proudění kapaliny na trajektorii tvaru prostorové spirály, Výzkumná zpráva, VUT-EU13303-QR-14-10, 2010.

BRDIČKA, M., SAMEK, L. a SOPKO, B. Mechanika kontinua, AVČR, ISBN 80-200-0772-5, 2000.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty



## **Abstrakt**

Tato bakalářská práce se zabývá vyjádřením diferenciálních operátorů gradient, divergence, rotace a Laplaceova operátoru v ortogonálních křivočarých souřadnicích. Odvozeny jsou vzorce pro válcový souřadnicový systém. Dále je analyzováno proudění kapaliny s trajektorií tvaru prostorové spirály, pro které jsou odvozeny Navier-Stokesovy rovnice. Nakonec jsou vyřešeny tři příklady potenciálního proudění v rovině na oblastech popsaných polárními a eliptickými souřadnicemi. Výpočet je proveden numericky metodou konečných diferencí v programu MATLAB.

## **Summary**

This bachelor thesis deals with the expression of differential operators gradient, divergence, curl and Laplace operator in orthogonal curvilinear coordinates. The formulas for cylindrical coordinate system are derived. Further, liquid flow with a trajectory of spatial spiral shape is analyzed, for which the Navier-Stokes equations are derived. Finally, three examples of potential flow in the plane are solved in the areas described by polar and elliptical coordinates. The calculation is done numerically by the finite differences method in MATLAB.

## **Klíčová slova**

křivočaré souřadnice, diferenciální operátory, proudění kapaliny, spirální trajektorie, potenciální proudění

## **Keywords**

curvilinear coordinates, differential operators, fluid flow, spiral trajectory, potential flow

KLIMEŠ, O. *Analýza proudění kapaliny s trajektorií tvaru prostorové spirály*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 33 s. Vedoucí doc. Ing. Simona Fialová, Ph.D.



Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Analýza proudění kapaliny s trajektorií tvaru prostorové spirály* vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Simony Fialové, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Ondřej Klimeš



Rád bych na tomto místě poděkoval své vedoucí doc. Ing. Simoně Fialové, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce a za všechny cenné rady a tipy. Dále bych rád poděkoval rodičům a prarodičům za podporu během celého studia.

Ondřej Klimeš



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Vektorová analýza</b>	<b>3</b>
2.1	Operátory grad, div, rot . . . . .	4
2.2	Některé identity vektorové analýzy . . . . .	5
2.3	Diferenciální operátory v křivočarých souřadnicích . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Proudění kapaliny</b>	<b>12</b>
3.1	Rozdělení proudění podle kinematických hledisek . . . . .	12
3.2	Proudění ideální kapaliny . . . . .	13
3.2.1	Nevířivé (potenciální) proudění . . . . .	13
3.2.2	Vířivé proudění . . . . .	14
3.3	Proudění reálné kapaliny . . . . .	14
3.3.1	Laminární proudění . . . . .	15
3.3.2	Turbulentní proudění . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Pohyb částice po trajektorii tvaru prostorové spirály</b>	<b>17</b>
<b>5</b>	<b>Příklady</b>	<b>20</b>
5.1	Diferenční metoda . . . . .	20
5.2	Příklad 1 - Potenciální proudění na oblasti mezikruží . . . . .	20
5.3	Příklad 2 - Potenciální proudění na oblasti výseče mezikruží . . . . .	23
5.4	Příklad 3 - Rozšiřující se potrubí . . . . .	26
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>29</b>
<b>7</b>	<b>Seznam použitých symbolů a veličin</b>	<b>32</b>
<b>8</b>	<b>Seznam příloh</b>	<b>33</b>

# 1. Úvod

Pro popis a analýzu proudění kapaliny je nutné zvládnout matematický aparát, který pro tento popis používáme. Ve všech základních rovnicích hydrodynamiky, jako je Eulerova rovnice hydrodynamiky, Navier-Stokesova rovnice nebo rovnice kontinuity, se vyskytují diferenciální operátory. Proto bychom měli rozumět tomu, co tyto operátory znamenají, a jak se s nimi počítá.

Cílem této bakalářské práce je definice křivočarých souřadnic a vyjádření diferenciálních operátorů v křivočarých souřadnicích.

V různých reálných problémech analyzujeme proudění na oblasti, kterou lze lépe popsat nějakými křivočarými souřadnicemi než klasickým kartézským souřadnicovým systémem. Kvůli tomu potřebujeme vyjádření diferenciálních operátorů a následně i rovnic v těchto křivočarých souřadnicích. Odvození v obecných křivočarých souřadnicích pomocí kovariantních a kontravariantních komponentů metrického tenzoru najdeme např. v Brdička [2]. Spojitost s Christoffelovými symboly uvádí Sungnul [12]. V Redžić [10] nebo v Nikitin [8] nalezneme odvození pro speciální případ ortogonálních křivočarých souřadnic pomocí tzv. Laméových (metrických) koeficientů.

Dalším cílem práce je analyzovat proudění kapaliny s trajektorií tvaru prostorové spirály. Spirální vír vzniká například v savce turbíny. Při analýze tohoto proudění budeme vycházet z Pochylý [9]. Problematikou spirálních vírů se široce zabývá Kuibin v [1] nebo i v několika jeho člancích, např. v [6].

Motivací pro popis a analýzu proudění může být tzv. tvarová optimalizace, například pro části hydraulických strojů. Pokud dokážeme popsat proudění na nějaké oblasti, můžeme pak změnou tvaru dosáhnout změny proudění podle našich požadavků.

Práce obsahuje matematickou teorii vektorové analýzy, obecný popis proudění ideální a reálné kapaliny, dále samotnou analýzu pohybu po prostorové spirále a na závěr příklady potenciálního proudění na oblastech popsáných křivočarými souřadnicemi.



## 2. Vektorová analýza

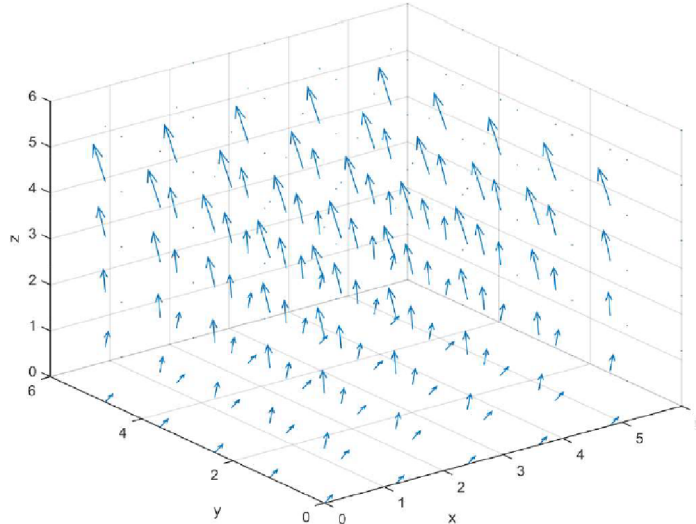
Pro popis fyzikálních veličin se často setkáváme s pojmem (fyzikální) *pole*. Polem nazýváme veličinu, která závisí na poloze v určitém prostoru.

Funkci  $a : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  nazýváme *skalárním polem*. Každému bodu oblasti  $U \subset \mathbb{R}^m$ , kde je funkce  $a$  definována, přiřazuje určitou číselnou hodnotu (skalár).

Vektorovou funkci  $\vec{u} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  nazýváme *vektorovým polem*. Podobně každému bodu oblasti  $U \subset \mathbb{R}^m$ , kde je vektorová funkce  $\vec{u}$  definována, přiřazuje určitý vektor o  $m$  složkách.

Dále budeme uvažovat pouze trojrozměrný prostor, tedy  $m = 3$ ,  $a = a(x, y, z)$  a  $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z)$ , kde  $x, y, z$  jsou kartézské souřadnice.

Příkladem skalárního pole je teplota, tlak nebo hustota, vektorovým polem může být např. síla v gravitačním poli, intenzita magnetického a elektrického pole nebo, jak tomu bude v této práci, rychlost proudění kapaliny. Vektorové pole můžeme znázornit graficky, viz obrázek 2.1.



Obrázek 2.1: Příklad vektorového pole

V literatuře hydromechaniky (a obecně fyziky) často používáme pro zjednodušení zápisu *Einsteinovo sumační pravidlo*. Podle tohoto pravidla provádíme sumaci přes každý index, který se ve výrazu vyskytuje právě dvakrát. Sčítáme přes všechny možné hodnoty indexu. Můžeme přitom vynechat znak sumace  $\Sigma$ .

Dále se pro zjednodušený zápis využívá *Levi-Civitaův tenzor*. Je to tenzor třetího řádu, antisymetrický ve všech indexech [2] a platí pro něj:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{pokud } i = j \vee j = k \vee i = k \\ 1, & \text{pro } \varepsilon_{123}, \varepsilon_{312}, \varepsilon_{231} \\ -1, & \text{pro } \varepsilon_{321}, \varepsilon_{132}, \varepsilon_{213} \end{cases}$$

Jako příklad uveďme zápis vektorového součinu dvou vektorů. Je-li  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ , pak pro jednotlivé složky vektoru  $c_i$  platí

$$c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k. \quad (2.1)$$

## 2.1. OPERÁTOR GRAD, DIV, ROT

### 2.1. Operátory grad, div, rot

Zavedeme diferenciální operátor 1. řádu, tzv. *Hamiltonův nabla operátor*

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i,$$

kde  $\vec{e}_i$  jsou bázové vektory.

**Definice 2.1.1.** *Gradientem skalárního pole  $a$  nazýváme funkci*

$$\text{grad}(a) = \nabla a = \left( \frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial a}{\partial z} \right) = \frac{\partial a}{\partial x_i} \vec{e}_i.$$

Vidíme, že gradient funkce  $f$  je vektor, jehož složky jsou parciální derivace této funkce podle jednotlivých kartézských souřadnic. V každém bodě vyjadřuje směr největšího růstu funkce.

**Definice 2.1.2.** *Divergencí vektorového pole  $\vec{u}$  nazýváme funkci*

$$\text{div}(\vec{u}) = \nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Divergence je součet parciálních derivací jednotlivých složek podle jednotlivých kartézských souřadnic. Výsledkem divergence je tedy skalár. Je-li  $\text{div}(\vec{u}) = 0$ , pak je  $\vec{u}$  *nezřídlové* vektorové pole. Naopak platí-li  $\text{div}(\vec{u}) \neq 0$  nazveme pole  $\vec{u}$  *zřídlové*.

Platí-li pro konkrétní bod  $A$  uvažované oblasti  $\text{div}(\vec{u})(A) > 0$ , pak je v bodě  $A$  *zřídlo*. Naopak pokud platí v bodě  $A$   $\text{div}(\vec{u})(A) < 0$ , pak je v bodě  $A$  *nor* (propad).

Pokud  $\vec{v}$  vyjadřuje rychlost proudění kapaliny, pak pro nestlačitelnou kapalinu platí  $\text{div}(\vec{v}) = 0$ . Tato rovnice je vyjádřením rovnice kontinuity pro nestlačitelnou kapalinu, se kterou budeme pracovat v dalších kapitolách práce.

**Definice 2.1.3.** *Rotací vektorového pole  $\vec{u}$  nazýváme funkci*

$$\text{rot}(\vec{u}) = \nabla \times \vec{u} = \left( \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right).$$

Jednotlivé složky rotace můžeme vyjádřit jako

$$\text{rot}_i(\vec{u}) = \varepsilon_{ijk} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right).$$

Platí-li  $\text{rot}(\vec{u}) = \vec{0}$  nazýváme  $\vec{u}$  *nevírové* vektorové pole. Naopak je-li  $\text{rot}(\vec{u}) \neq \vec{0}$  nazýváme  $\vec{u}$  *vírové* vektorové pole. Pokud pro konkrétní bod  $A$  uvažované oblasti platí  $\text{rot}(\vec{u})(A) \neq \vec{0}$ , řekneme, že je v bodě  $A$  *vír*.

Nevírové pole označujeme někdy jako pole *potenciální*. V dalších kapitolách budeme také pracovat s pojmem *kvazipotenciální pole*, které definujeme jako pole, pro které platí

$$\text{rot}(\vec{u}) \cdot \vec{u} = 0. \quad (2.2)$$

Pokud  $\vec{v}$  vyjadřuje rychlost proudění kapaliny, pak definujeme *vír rychlosti*  $\vec{\Omega}$  vztahem

$$\vec{\Omega} = \text{rot}(\vec{v}). \quad (2.3)$$

V anglické literatuře se pro rotaci používá označení *curl*( $\vec{u}$ ).

*Poznámka.* Divergenci a rotaci můžeme též definovat pomocí integrálních vět. Divergence je spjata s *Gauss - Ostrogradského větou*, která dává do souvislosti plošný a objemový integrál. Rotace figuruje ve *Stokesově větě*, která převádí plošný integrál na křivkový a naopak. Tvary i odvození těchto integrálních vět nalezneme např. v [2].

## 2.2. Některé identity vektorové analýzy

V následující podkapitole uvedeme několik identit vektorové analýzy, které budou použity v dalších kapitolách práce. Všechny identity lze dokázat přímým rozepsáním a porovnáním levé a pravé strany. V jednotlivých důkazech ale použijeme různé způsoby vyjádření jednotlivých členů identit.

Nejprve uveďme, jak lze vyjádřit divergenci vektoru, vynásobeného skalární funkcí, a divergenci vektorového součinu dvou vektorů:

$$\operatorname{div}(a \cdot \vec{u}) = a \cdot \operatorname{div}(\vec{u}) + \vec{u} \cdot \operatorname{grad}(a), \quad (2.4)$$

$$\operatorname{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \operatorname{rot}(\vec{u}) - \vec{u} \cdot \operatorname{rot}(\vec{v}). \quad (2.5)$$

*Důkaz.* Ověření (2.4) provedeme pomocí (Einsteinova) sumačního zápisu divergence a pravidla pro derivaci součinu.

$$\operatorname{div}(a \cdot \vec{u}) = \frac{\partial(a u_i)}{\partial x_i} = \left( \frac{\partial a}{\partial x_i} u_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} a \right) = \frac{\partial a}{\partial x_i} u_i + a \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Poslední tvar už zjevně odpovídá pravé straně identity (2.4)  $\vec{u} \cdot \operatorname{grad}(a) + a \cdot \operatorname{div}(\vec{u})$ .

Pro důkaz (2.5) použijeme zápis rotace a vektorového součinu pomocí Levi-Civitova symbolu, Einsteinovo sumační pravidlo a vyjádření vektorového součinu (2.1). Platí

$$\operatorname{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = \frac{\partial(\vec{u} \times \vec{v})_i}{\partial x_i} = \frac{\partial(\varepsilon_{ijk} u_j v_k)}{\partial x_i} = v_k \varepsilon_{ijk} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + u_j \varepsilon_{ijk} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right).$$

Z definice Levi-Civitova tenzoru je zřejmé, že platí  $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = \varepsilon_{kij}$ , a po uvážení definice složek rotace dostáváme identitu (2.5). [7]

□

Rotaci vektoru násobeného skalární funkcí lze vyjádřit jako

$$\operatorname{rot}(a \cdot \vec{u}) = a \cdot \operatorname{rot}(\vec{u}) - \vec{u} \times \operatorname{grad}(a). \quad (2.6)$$

*Důkaz.* Důkaz provedeme pomocí přímého výpočtu. Rozepíšeme levou a pravou stranu identity:

$$\begin{aligned} L(2.6) &= \operatorname{rot}(a \cdot \vec{u}) = \operatorname{rot}((a u_1, a u_2, a u_3)) = \\ &= \left( \frac{\partial(a u_3)}{\partial y} - \frac{\partial(a u_2)}{\partial z}, \frac{\partial(a u_1)}{\partial z} - \frac{\partial(a u_3)}{\partial x}, \frac{\partial(a u_2)}{\partial x} - \frac{\partial(a u_1)}{\partial y} \right) = \\ &= \left( \frac{\partial u_3}{\partial y} a + \frac{\partial a}{\partial y} u_3 - \frac{\partial u_2}{\partial z} a - \frac{\partial a}{\partial z} u_2, \frac{\partial u_1}{\partial z} a + \frac{\partial a}{\partial z} u_1 - \frac{\partial u_3}{\partial x} a - \frac{\partial a}{\partial x} u_3, \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial x} a + \frac{\partial a}{\partial x} u_2 - \frac{\partial u_1}{\partial y} a - \frac{\partial a}{\partial y} u_1 \right) \end{aligned}$$

## 2.2. NĚKTERÉ IDENTITY VEKTOROVÉ ANALÝZY

$$\begin{aligned}
 P(2.6) &= a \cdot \text{rot}(\vec{u}) - \vec{u} \times \text{grad}(a) = \\
 &= a \cdot \left( \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - \vec{u} \times \left( \frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial a}{\partial z} \right) = \\
 &= a \cdot \left( \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \\
 &\quad - \left( u_3 \frac{\partial a}{\partial y} - u_2 \frac{\partial a}{\partial z}, u_1 \frac{\partial a}{\partial z} - u_3 \frac{\partial a}{\partial x}, u_2 \frac{\partial a}{\partial x} - u_1 \frac{\partial a}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

Z posledního tvaru P(2.6) je už patrné, že identita platí.  $\square$

Prozatím jsme aplikovali gradient, divergenci a rotaci přímo na zkoumané skalární či vektorové pole. Složením těchto operací dostaneme pět různých operací druhého řádu

1.  $\text{div}(\text{rot}(\vec{u}))$ ,
2.  $\text{rot}(\text{grad}(a))$ ,
3.  $\text{div}(\text{grad}(a))$ ,
4.  $\text{rot}(\text{rot}(\vec{u}))$ ,
5.  $\text{grad}(\text{rot}(\vec{u}))$ .

Aplikujeme-li divergenci na rotaci, dostaneme vždy nulu.

$$\text{div}(\text{rot}(\vec{u})) = 0 \tag{2.7}$$

*Důkaz.* Vyjádříme divergenci i rotaci pomocí nabla operátoru a dostáváme

$$\begin{aligned}
 \text{div}(\text{rot}(\vec{u})) &= \nabla \cdot (\nabla \times \vec{u}) = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \\
 &= \frac{\partial^2 u_3}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial z} = 0.
 \end{aligned}$$

$\square$

Podobně, když aplikujeme rotaci na gradient, dostaneme vždy nulový vektor

$$\text{rot}(\text{grad}(a)) = \vec{0}. \tag{2.8}$$

*Důkaz.* Rozepíšeme výraz a dostaneme

$$\begin{aligned}
 \text{rot}(\text{grad}(f)) &= \text{rot} \left( \frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial a}{\partial z} \right) = \\
 &= \left( \frac{\partial^2 a}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 a}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a}{\partial y \partial x} \right) = \vec{0}
 \end{aligned}$$

$\square$

## 2. VEKTOROVÁ ANALÝZA

Aplikujeme-li divergenci na gradient, definujeme tím diferenciální operátor 2. řádu, tzv. *Laplaceův delta operátor*  $\Delta$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(a)) = \nabla \cdot \operatorname{grad}(a) = \nabla \cdot \nabla a = \nabla^2 a = \Delta a.$$

Snadno odvodíme, že pro Laplaceův operátor platí

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

a můžeme ho aplikovat na skalární i vektorové pole

$$\begin{aligned} \Delta a &= \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 a}{\partial x_i^2}, \\ \Delta \vec{u} &= (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3) = \sum_{i=1}^3 \Delta u_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) \vec{e}_i. \end{aligned}$$

Aplikujeme-li rotaci na rotaci, dostáváme

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{u})) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{u})) - \Delta \vec{u}. \quad (2.9)$$

*Důkaz.* Pro důkaz použijeme vyjádření rotace pomocí nabla operátoru. Vyjdeme z identity, která platí obecně pro vektory [7]

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{w}) - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Potom platí

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{u})) = \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{u}) - (\nabla \cdot \nabla) \cdot \vec{u} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{u})) - \Delta \vec{u}.$$

□

Identitou (2.9) jsme také odvodili vztah mezi zbývajícími operacemi druhého řádu.

Poslední identitu si uvedeme bez důkazu. Platí

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \frac{1}{2} \operatorname{grad}(\|\vec{u}\|^2) - \vec{u} \times \operatorname{rot}(\vec{u}). \quad (2.10)$$

Vysvětleme si význam členu  $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ . Skalární součin

$$(\vec{u} \cdot \nabla) = u_1 \frac{\partial}{\partial x} + u_2 \frac{\partial}{\partial y} + u_3 \frac{\partial}{\partial z} = u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

sám o sobě nic neznamená, protože je to stále pouhý (diferenciální) operátor. Neplatí tedy, že  $\vec{u} \cdot \nabla = \nabla \cdot \vec{u}$  ačkoliv je nabla operátor  $\nabla$  v jistém smyslu vektor. Když tento diferenciál aplikujeme na vektor  $\vec{u}$ , dostaneme

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = ((\vec{u} \cdot \nabla) u_1, (\vec{u} \cdot \nabla) u_2, (\vec{u} \cdot \nabla) u_3)$$

a označíme-li  $\vec{w} = (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ , tak pro j-tou složku  $w_j$  dostáváme

$$w_j = u_1 \frac{\partial u_j}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_j}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_j}{\partial z} = u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

Pokud  $\vec{v}$  vyjadřuje rychlost proudění kapaliny, výraz  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$  představuje konvektivní zrychlení kapaliny (prostorová změna rychlosti).

## 2.3. Diferenciální operátory v křivočarých souřadnicích

**Definice 2.3.1.** *Křivočarým souřadnicovým systémem*  $q_1, \dots, q_n$  v nějaké oblasti  $U \subset \mathbb{R}^n$  nazýváme (nelineární) difeomorfismus  $\psi : U \rightarrow V$ , kde  $V \subset \mathbb{R}^n$  je oblast v kartézských souřadnicích  $x_1, \dots, x_n$  a píšeme

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi(q_1, \dots, q_n), \\ &\vdots \\ x_n &= \psi(q_1, \dots, q_n). \end{aligned} \tag{2.11}$$

*Poznámka.* Difeomorfismus je zobrazení, které je spojitě diferencovatelné, a existuje k němu inverzní zobrazení, které je také spojitě diferencovatelné. Pro difeomorfismus platí, že jeho jakobián je na uvažované oblasti různý od nuly

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial q_n} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Pro odvození diferenciálních operátorů v obecných (neortogonálních) křivočarých souřadnicových systémech je potřebný tenzorový počet. Kompletní odvození nalezneme např. v [2].

V této práci se budeme dále zabývat pouze ortogonálními křivočarými souřadnicovými systémy. Mezi ně patří všechny nejčastěji používané souřadnicové systémy jako např. polární, válcový nebo sférický.

**Definice 2.3.2.** Mějme obecné křivočaré souřadnice (2.11) a v nich polohový vektor  $\vec{r}$

$$\vec{r} = \vec{r}(x_1, \dots, x_n) = \vec{r}(x_1(q_1, \dots, q_n), \dots, x_n(q_1, \dots, q_n)).$$

*Jednotkové bázové vektory* tohoto křivočarého souřadnicového systému definujeme vztahem

$$\vec{e}_i = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right\|}. \tag{2.12}$$

**Definice 2.3.3.** Křivočarý souřadnicový systém se nazývá *ortogonální*, jestliže pro jeho bázové vektory platí

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij},$$

kde  $\delta_{ij}$  je tzv. *Kroneckerovo delta*, pro které platí

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{pro } i = j, \\ 1, & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$$

*Poznámka.* Jednoduše můžeme říci, že křivočarý souřadnicový systém je ortogonální, jestliže jsou jeho bázové vektory navzájem kolmé.

## 2. VEKTOROVÁ ANALÝZA

Pro ortogonální křivočarý souřadnicový systém zavedeme tzv. *Laméovy (metrické) koeficienty* vzorcem

$$h_k = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right\|. \quad (2.13)$$

Vzhledem k (2.12) a (2.13) můžeme psát

$$h_k \vec{e}_k = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}. \quad (2.14)$$

Pro trojrozměrný souřadnicový systém dostáváme [8]

$$h_k = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_k}\right)^2} \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.15)$$

Pomocí těchto koeficientů lze snadno zavést obecné vzorce pro výpočet diferenciálních operátorů v ortogonálním křivočarém souřadnicovém systému. Označme  $h = h_1 h_2 h_3$ , pro skalární pole  $a$  a vektorové pole  $\vec{u}$  pak platí [8]

$$\text{grad}(a) = \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial a}{\partial q_1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial a}{\partial q_2}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial a}{\partial q_3} \right), \quad (2.16)$$

$$\text{div}(\vec{u}) = \frac{1}{h} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h u_1}{h_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h u_2}{h_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h u_3}{h_3} \right) \right] = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{h u_i}{h_i} \right), \quad (2.17)$$

$$\text{rot}(\vec{u}) = \left( \frac{h_1}{h} \left[ \frac{\partial h_3 a_3}{\partial q_2} - \frac{\partial h_2 a_2}{\partial q_3} \right], \frac{h_2}{h} \left[ \frac{\partial h_1 a_1}{\partial q_3} - \frac{\partial h_3 a_3}{\partial q_1} \right], \frac{h_3}{h} \left[ \frac{\partial h_2 a_2}{\partial q_1} - \frac{\partial h_1 a_1}{\partial q_2} \right] \right) \quad (2.18)$$

a pro úplnost vzorec pro výpočet Laplaceova operátoru

$$\Delta = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^3 \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{h}{h_i^2} \right) \right] \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{h}{h_i^2} \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} \right\}. \quad (2.19)$$

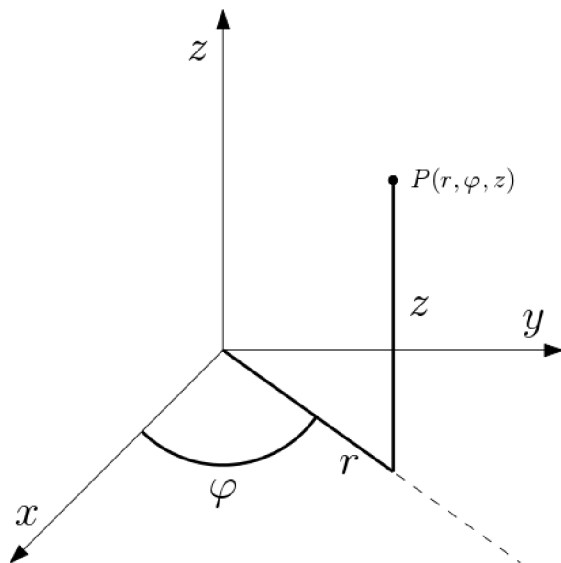
Nejpoužívanějším příkladem ortogonálních křivočarých souřadnicových systémů je válcový (cylindrický) souřadnicový systém

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \\ z &= z, \end{aligned}$$

kde  $r > 0$  a  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , viz obrázek 2.2.

Pomocí výše uvedených vztahů odvodíme vzorce pro gradient, divergenci a rotaci ve válcovém souřadnicovém systému. K výpočtu Laméových koeficientů potřebujeme deri-

### 2.3. DIFERENCIÁLNÍ OPERÁTORY V KŘIVOČARÝCH SOUŘADNICÍCH



Obrázek 2.2: Válcové souřadnice

váče jednotlivých kartézských souřadnic  $x, y, z$  podle (ortogonálních) křivočarých souřadnic  $r, \varphi, z$

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \varphi, & \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \varphi, & \frac{\partial z}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos \varphi, & \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial z} = 0, & \frac{\partial y}{\partial z} = 0, & \frac{\partial z}{\partial z} = 1. \end{array}$$

Tyto derivace dosadíme do (2.15) a získáme tak Laméovy koeficienty pro válcové souřadnice

$$h_1 = h_r = \sqrt{(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2 + 0^2} = 1 \quad (2.20)$$

$$h_2 = h_\varphi = \sqrt{(-r \cos \varphi)^2 + (-r \sin \varphi)^2 + 0^2} = \sqrt{r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = r \quad (2.21)$$

$$h_3 = h_z = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1 \quad (2.22)$$

Po dosazení těchto koeficientů do (2.16) - (2.18) dostáváme vzorce pro výpočet gradientu, divergence a rotace ve válcových souřadnicích

$$\text{grad}(a) = \left( \frac{\partial a}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial \varphi}, \frac{\partial a}{\partial z} \right), \quad (2.23)$$

$$\text{div}(\vec{u}) = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (2.24)$$

$$\text{rot}(\vec{u}) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}, \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right). \quad (2.25)$$

Přidejme ještě vyjádření Laplaceova operátoru



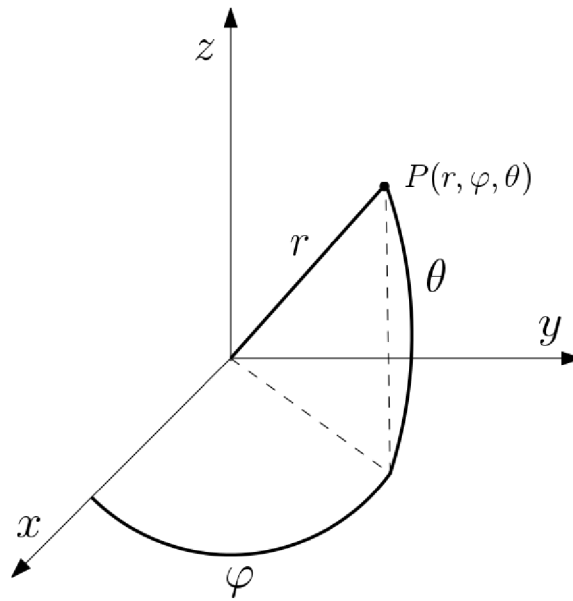
## 2. VEKTOROVÁ ANALÝZA

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.26)$$

Jako další příklad uveďme sférické souřadnice

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned}$$

kde  $r > 0$ ,  $0 \leq \theta < \pi$  a  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , viz obrázek 2.3.



Obrázek 2.3: Sférické souřadnice

Bez dalšího odvozování uveďme diferenciální operátory pro sférické souřadnice

$$\text{grad}(a) = \left( \frac{\partial a}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a}{\partial \varphi} \right), \quad (2.27)$$

$$\text{div}(\vec{u}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}, \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{u}) = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{\partial(\sin \theta u_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right), \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r u_\varphi)}{\partial r}, \right. \\ \left. \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (2.30)$$

### 3. Proudění kapaliny

Popisem pohybu kapalin (prouděním) se zabývá hydrodynamika. Obecně existují dva přístupy, jak vyšetřovat pohyb kapaliny. Při tzv. *Lagrangeově* metodě si v určitém čase  $t_0$  zvolíme libovolnou částici, jejíž polohu v tomto čase můžeme obecně určit pomocí křivočarých souřadnic  $x_0, y_0, z_0$ . Potom bude poloha zkoumané částice záviset právě na její počáteční poloze a času  $t$

$$\vec{x} = \vec{x}(x_0, y_0, z_0, t). \quad (3.1)$$

Různou volbou parametrů  $x_0, y_0, z_0$  můžeme zahrnout všechny částice zkoumané kapaliny.

Častěji ovšem používáme tzv. *Eulerovu* metodu, při které vyšetřujeme proudění kapaliny v určitém bodě zkoumaného prostoru o souřadnicích  $x, y, z$ . Pro rychlost proudění kapaliny v tomto bodě v čase  $t$  pak můžeme psát

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t). \quad (3.2)$$

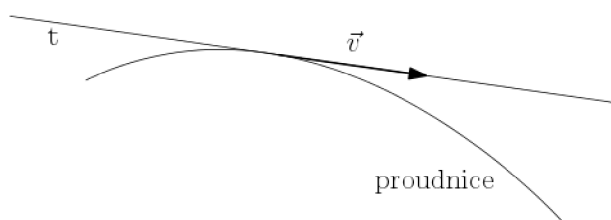
Zvolíme-li pevně čas  $t$ , dostaneme vektorové pole rychlosti proudění kapaliny.

S Lagrangeovou metodou souvisí pojem *trajektorie částice* kapaliny. Trajektorie je dráha pohybu částice za určitý časový úsek. Její parametrické vyjádření získáme vyloučením času  $t$  ze soustavy rovnic (3.1).

S Eulerovou metodou je spjat pojem *proudnice (proudová čára)*, což je trajektorie velmi malého objemu, jejíž tečna ukazuje v libovolném bodě směr rychlosti pohybující se částice, viz obrázek 3.1. Svazek proudnic tvoří tzv. proudové vlákno. Označíme-li  $dx, dy, dz$  složky elementárního oblouku proudnice, pak můžeme proudnici popsat diferenciálními rovnicemi ve tvaru

$$dx : dy : dz = v_x(x, y, z, t) : v_y(x, y, z, t) : v_z(x, y, z, t), \quad (3.3)$$

kde  $v_x, v_y, v_z$  jsou složky vektoru  $\vec{v}$ . [2]



Obrázek 3.1: Proudnice

#### 3.1. Rozdělení proudění podle kinematických hledisek

Podle závislosti proudění kapaliny na čase  $t$  rozlišujeme *stacionární (ustálené)* a *nestacionární (neustálené)* proudění. Při stacionárním proudění se veličiny s časem nemění a např. pro rychlost platí

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0, \text{ resp. } \vec{v} = \vec{v}(x, y, z).$$

U nestacionárního proudění jsou veličiny závislé na čase a pro rychlost platí naopak

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \neq 0, \text{ resp. } \vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t).$$

Na základě uspořádání proudění v prostoru rozlišujeme *prostorové (3D) proudění*, pro které platí  $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$ , *rovinné (2D) proudění*, analogicky  $\vec{v} = \vec{v}(x, y)$  a *jednorozměrné (1D) proudění* po střední proudnici  $\vec{v} = \vec{v}(x)$ .

## 3.2. Proudění ideální kapaliny

Podle fyzikálních vlastností rozlišujeme dva základní modely kapalin - *ideální* a *reálné* kapaliny. Ideální (dokonalá) kapalina je nestlačitelná a její odpor proti změně tvaru (viskozita) je nulový. Díky tomuto zjednodušení je tento model vhodný pro matematické odvození mechanických vlastností kapaliny.

### 3.2.1. Nevířivé (potenciální) proudění

Proudění (ideální) kapaliny nazveme *nevířivé*, pokud pro její rychlost  $\vec{v}$  resp. vír rychlosti  $\vec{\Omega}$  platí v každém bodě

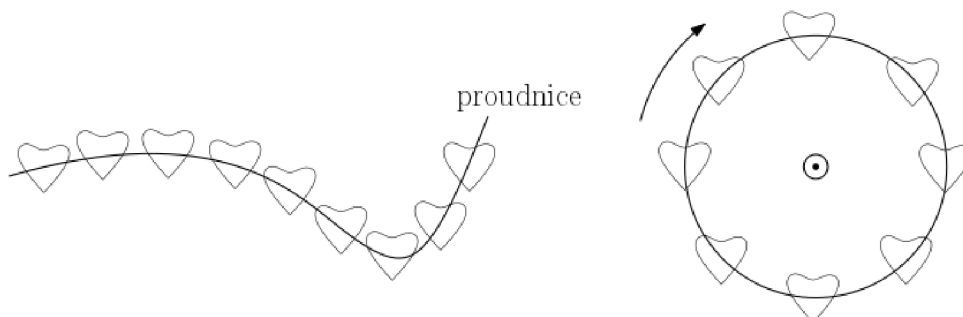
$$\text{rot}(\vec{v}) = \vec{\Omega} = \vec{0}. \quad (3.4)$$

Prakticky to znamená, že se částice kapaliny neotáčejí kolem vlastní osy. Do nevířivého proudění řadíme také tzv. *potenciální vír*, kdy se částice pohybují po kruhové trajektorii kolem vírového vlákna (osy), viz obrázek 3.2.

Podle (2.8) je rovnice (3.4) nutnou i postačující podmínkou pro to, aby byl vektor rychlosti  $\vec{v}$  gradientem nějaké skalární funkce  $\phi$ . Tuto funkci nazýváme *potenciálem rychlosti* (proto o nevířivém proudění mluvíme někdy jako o proudění potenciálním). Nevířivé proudění tedy můžeme alternativně definovat vztahem

$$\vec{v} = \text{grad}(\phi), \quad (3.5)$$

kde  $\phi$  je obecně funkcí souřadnic  $x, y, z$  a času  $t$ .



Obrázek 3.2: Nevířivé proudění, potenciální vír

### 3.3. PROUDĚNÍ REÁLNÉ KAPALINY

#### 3.2.2. Vířivé proudění

U vířivého proudění se částice mohou otáčet kolem vlastních os, viz obrázek 3.3 a pro víř rychlosti obecně platí

$$\vec{\Omega} \neq \vec{\sigma}. \quad (3.6)$$



Obrázek 3.3: Vířivé proudění

Matematickým popisem proudění ideální kapaliny je Eulerova rovnice hydrodynamiky. Jedná se o rovnici silové rovnováhy vztaženou na jednotku hmoty. Její vektorový zápis je

$$\vec{A} - \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}, \quad (3.7)$$

kde  $\vec{A}$  je vnější objemové zrychlení,  $\rho$  značí hustotu kapaliny a  $p$  tlak v kapalině. Člen  $\frac{1}{\rho} \text{grad}(p)$  vyjadřuje tlakové zrychlení,  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  představuje lokální zrychlení a člen  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$  konvektivní zrychlení (nezávislé na čase). Matematický smysl posledního členu rovnice je vysvětlen na konci kapitoly 2.2.

Rovnice kontinuity pro ideální kapalinu má tvar

$$\text{div}(\vec{v}) = 0. \quad (3.8)$$

Tato rovnice vychází ze zákona zachování hmotnosti a její odvození najdeme např. v [2].

### 3.3. Proudění reálné kapaliny

Reálné kapaliny jsou stlačitelné a viskózní. V tomto případě je matematický popis složitý, a proto využíváme experimentálně zjištěné koeficienty.

Rozlišujeme *newtonskou* a *neneutronskou* (reálnou) kapalinu. Newtonská kapalina se řídí Newtonovým zákonem viskozity ve tvaru

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}, \quad (3.9)$$

kde  $\tau$  vyjadřuje vnitřní tření (tečné napětí),  $\eta$  značí dynamickou viskozitu (vlastnost kapaliny, závislá na teplotě a tlaku) a  $\frac{dv}{dy}$  je gradient rychlosti.

Neneutronské kapaliny nemají tečné napětí přímo úměrné gradientu rychlosti, ale je pouze obecně jeho funkcí

$$\tau = f\left(\frac{dv}{dy}\right). \quad (3.10)$$

K matematickému popisu se tak u těchto kapalin používají různé reologické modely, o kterých nalezneme více např. v [4].

U reálné kapaliny rozlišujeme obecně dva typy proudění - *laminární* a *turbulentní* - které dále blíže popíšeme.

### 3.3.1. Laminární proudění

Při laminárním proudění se částice pohybují ve vrstvách a nedochází tak ke křížení proudnic, viz obrázek 3.4.

Navier-Stokesovy rovnice popisují laminární proudění reálné kapaliny. Vektorový tvar této rovnice má pro stlačitelnou kapalinu tvar

$$\vec{A} - \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) + \nu \Delta \vec{v} + \frac{\nu}{3} \text{grad}(\text{div}(\vec{v})) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}, \quad (3.11)$$

kde  $\nu$  značí kinematickou viskozitu kapaliny, která se dá vyjádřit jako podíl dynamické viskozity a hustoty

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (3.12)$$

V rovnici (3.11) vyjadřuje člen  $\nu \Delta \vec{v}$  třetí zrychlení. Podobný význam má i člen  $\frac{\nu}{3} \text{grad}(\text{div}(\vec{v}))$ , který ovšem vyjadřuje třetí zrychlení vzhledem ke stlačitelnosti kapaliny. Zbylé členy rovnice mají stejný význam jako u Eulerovy rovnice hydrodynamiky (3.7).

Pro nestlačitelnou kapalinu platí (3.8) a díky tomu se Navier-Stokesovy rovnice (3.11) zjednoduší na tvar

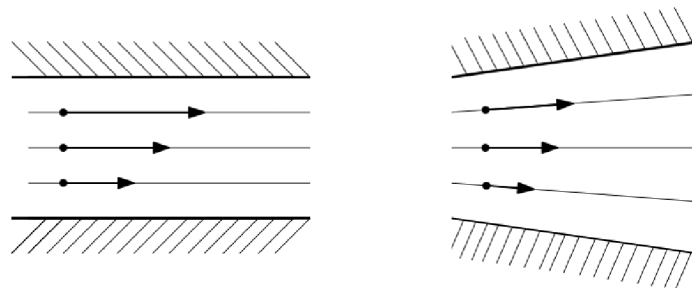
$$\vec{A} - \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) + \nu \Delta \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}. \quad (3.13)$$

Doplňme ještě rovnici kontinuity reálné kapaliny

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.14)$$

a její tvar pro stacionární proudění

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (3.15)$$



Obrázek 3.4: Laminární proudění

### 3.3. PROUDĚNÍ REÁLNÉ KAPALINY

#### 3.3.2. Turbulentní proudění

U turbulentního proudění může docházet ke křížení jednotlivých proudnic. Částice mají kromě postupné rychlosti i tzv. *fluktuální (turbulentní)* složku rychlosti  $v'$ , která je zodpovědná za přemísťování částic v průřezu, viz obrázek 3.5.

Přechod mezi laminárním a turbulentním prouděním určuje *Reynoldsovo číslo*  $Re$  definované vztahem

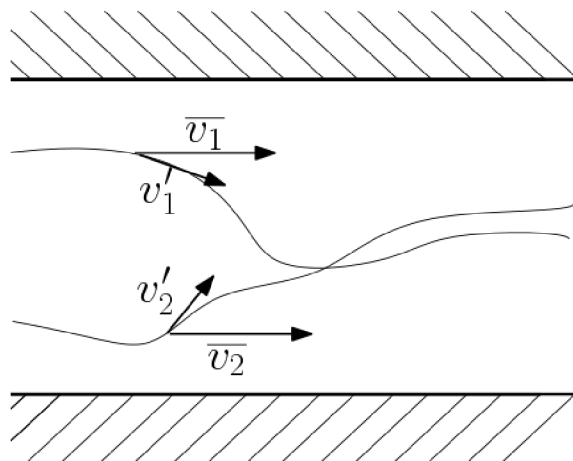
$$Re = \frac{vd}{\nu},$$

kde  $v$  je střední rychlost kapaliny,  $d$  charakteristický rozměr a  $\nu$  je kinematická viskozita. Je-li hodnota Reynoldsova čísla větší než kritické Reynoldsovo číslo, tedy platí-li  $Re > Re_{kr}$ , dochází k turbulentnímu proudění. Hodnoty  $Re_{kr}$  se vztahují ke konkrétní kapalině a konkrétnímu tvaru obtékaného profilu. Např. pro proudění vody v potrubí s kruhovým průřezem platí  $Re_{kr} = 2320$ .

Turbulentní proudění popisují Reynoldsovy rovnice. Ty vychází z Navier-Stokesových rovnic, ve kterých navíc zahrnujeme turbulentní napětí. Uveďme tvar Reynoldsovy rovnice pro x-ovou souřadnici:

$$\overline{A_x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial t} + \nu \Delta \overline{v_x} + \frac{\partial \overline{(v'_x v'_x)}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{(v'_x v'_y)}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{(v'_x v'_z)}}{\partial z}. \quad (3.16)$$

V rovnicích se vyskytují střední hodnoty veličin. Poslední tři členy vyjadřují fluktuální zrychlení od přídavných turbulentních napětí. [13] Společně s rovnicí kontinuity tak dostaneme soustavu 4 rovnic pro 10 neznámých. Tuto soustavu tedy nelze vyřešit, a proto se k přibližnému řešení zavádějí doplňující předpoklady a vytváří se tak různé matematické modely turbulence. [5]



Obrázek 3.5: Turbulentní proudění

## 4. Pohyb částice po trajektorii tvaru prostorové spirály

Uvažujme dále reálnou nestlačitelnou kapalinu s laminárním prouděním. Základem pro analýzu takového proudění jsou Navier-Stokesovy rovnice (3.13) a rovnice kontinuity (3.8). Pro přehlednost uvedme znovu jejich tvary

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{A} - \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) + \nu \Delta \vec{v}, \quad (4.1)$$

$$\text{div}(\vec{v}) = 0. \quad (4.2)$$

Vektorový zápis rovnice (4.1) můžeme rozepsat do jednotlivých složek (souřadnic). Například pro válcový souřadnicový systém dostaneme

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) v_r = A_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right), \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) v_\varphi = A_\varphi - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left( \Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right), \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) v_z = A_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z. \quad (4.5)$$

Rovnice kontinuity (4.2) má ve válcových souřadnicích tvar

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (4.6)$$

Nyní upravme Navier-Stokesovy rovnice (4.1) do jednoduššího tvaru. Některé členy této rovnice vyjádříme pomocí identit (2.9) a (2.10), podle kterých platí

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \text{grad}(\|\vec{v}\|^2) - \vec{v} \times \text{rot}(\vec{v}) \quad (4.7)$$

a také

$$\Delta \vec{v} = \text{grad}(\text{div}(\vec{v})) - \text{rot}(\text{rot}(\vec{v})). \quad (4.8)$$

Identita (4.8) se po uvážení rovnice kontinuity (4.2) zjednoduší na tvar

$$\Delta \vec{v} = -\text{rot}(\text{rot}(\vec{v})), \quad (4.9)$$

neboť je zřejmé, že platí  $\text{grad}(0) = \vec{0}$ . Po dosazení (4.7) a (4.9) do rovnice (4.1) dostáváme Navier-Stokesovy rovnice ve tvaru

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}(\|\vec{v}\|^2) - \vec{v} \times \text{rot}(\vec{v}) - \vec{A} + \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) + \nu \text{rot}(\text{rot}(\vec{v})) = 0. \quad (4.10)$$

Pokračujme dále v úpravách. Ve druhé i třetí kapitole jsme zavedli pojem vír rychlosti proudění  $\vec{\Omega}$  definován vztahem

$$\vec{\Omega} = \text{rot}(\vec{v}). \quad (4.11)$$

Dále platí, že gradient je aditivní operátor, což přímo vyplývá z jeho definice a linearity (parciálních) derivací. Obecně tedy platí

$$\text{grad}(a + b) = \text{grad}(a) + \text{grad}(b), \quad (4.12)$$

kde  $a$ ,  $b$  jsou libovolná skalární pole.

Vzhledem k (4.11) a (4.12) se Navier-Stokesovy rovnice (4.10) upraví na tvar

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nu \text{rot}(\vec{\Omega}) - \vec{v} \times \vec{\Omega} + \text{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2 - \vec{A} \cdot \vec{x} \right) = 0 \quad (4.13)$$

V této rovnici označme vztahem

$$Y = \left( \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2 - \vec{A} \cdot \vec{x} \right) \quad (4.14)$$

lokální měrnou energii v bodě  $(\vec{x}, t)$ , kde  $\vec{x}$  je polohový vektor  $\vec{x} = (x, y, z)$ . [9]

Navier-Stokesovy rovnice mají po těchto úpravách tvar

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nu \text{rot}(\vec{\Omega}) - \vec{v} \times \vec{\Omega} + \text{grad}(Y) = 0. \quad (4.15)$$

Dále uvažujme pohyb částice kapaliny po trajektorii tvaru prostorové spirály. Podmínku pro tento pohyb lze vyjádřit vztahem [9]

$$\vec{v} \times \vec{\Omega} = \vec{o}. \quad (4.16)$$

Za uvážení této podmínky (4.16) se Navier-Stokesovy rovnice (4.15) zjednoduší na konečný tvar

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nu \text{rot}(\vec{\Omega}) + \text{grad}(Y) = 0. \quad (4.17)$$

Pokud je výsledkem vektorového součinu dvou vektorů nulový vektor, znamená to, že jsou vektory kolineární (lineárně závislé). Z podmínky (4.16) tedy plyne, že vektor vířivosti  $\vec{\Omega}$  je kolineární s vektorem rychlosti  $\vec{v}$  a můžeme psát:

$$\vec{\Omega} = \text{rot}(\vec{v}) = \lambda(\vec{x})\vec{v}, \quad (4.18)$$

kde  $\lambda(\vec{x})$  je neznámá skalární funkce. Dosazením (4.18) do vyjádření Laplaceova operátoru na vektor rychlosti (4.9) dostáváme

$$\Delta \vec{v} = -\text{rot}(\lambda \vec{v}). \quad (4.19)$$

Tuto rovnici upravíme podle identity (2.6) na tvar

$$\Delta \vec{v} = -\text{rot}(\lambda \vec{v}) = -(\lambda \text{rot}(\vec{v}) + \text{grad}(\lambda) \times \vec{v}) \quad (4.20)$$

a nakonec využijeme opět (4.18) a můžeme tak psát

$$\Delta \vec{v} + \text{grad}(\lambda) \times \vec{v} + \lambda^2 \vec{v} = 0. \quad (4.21)$$

Z rovnice (4.21) a rovnice kontinuity (4.2) můžeme při zadaných okrajových podmínkách stanovit neznámou skalární funkci  $\lambda(\vec{x})$  a neznámou rychlost proudění kapaliny  $\vec{v}$  a tím vyřešit a popsat pohyb po prostorové spirální trajektorii. [9]



#### 4. POHYB ČÁSTICE PO TRAJEKTORII TVARU PROSTOROVÉ SPIRÁLY

Vraťme se ještě k funkci  $\lambda(\vec{x})$ . Rovnici, ve které jsme tuto funkci definovali (4.18), vynásobíme skalárně vektorem  $\vec{v}$  a dostaneme tak

$$\text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v} \cdot \vec{v}. \quad (4.22)$$

Z tohoto tvaru můžeme vyjádřit funkci  $\lambda$

$$\lambda = \frac{\text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}. \quad (4.23)$$

Tato hodnota vyjadřuje tzv. *helicitu*, která je spojena s velikostí druhé křivosti (torze) prostorové křivky. Helicita určuje míru odklonu proudového pole kapaliny (obecně tekutiny) od pole kvazipotenciálního definovaného vztahem (2.2). Pro kvazipotenciální pole tedy platí  $\lambda = 0$ . [9]

Kvazipotenciální pole můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\vec{v} = \kappa \text{grad}(\phi), \quad (4.24)$$

kde  $\kappa$  a  $\phi$  jsou skalární funkce.

*Důkaz.* Důkaz provedeme přímým dosazením rovnice (4.24) do vztahu (2.2). Platí

$$\text{rot}(\kappa \text{grad}(\phi)) \cdot (\kappa \text{grad}(\phi)) = 0 \quad (4.25)$$

a vzhledem k identitě (2.6) můžeme psát

$$[\kappa \text{rot}(\text{grad}(\phi)) - \text{grad}(\phi) \times \text{grad}(\kappa)] \cdot (\kappa \text{grad}(\phi)) = 0. \quad (4.26)$$

Dále díky identitě (2.8) se rovnice zjednoduší na tvar

$$[\text{grad}(\kappa) \times \text{grad}(\phi)] \cdot (\kappa \text{grad}(\phi)) = 0. \quad (4.27)$$

Pro smíšený součin vektorů obecně platí [7]

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Vzhledem k této vlastnosti a komutativitě skalárního součinu vektorů můžeme rovnici (4.27) přepsat do tvaru

$$\text{grad}(\kappa) \cdot [\kappa \text{grad}(\phi) \times \text{grad}(\phi)] = 0. \quad (4.28)$$

Vektory  $\kappa \text{grad}(\phi)$  a  $\text{grad}(\phi)$  jsou zjevně kolineární a výsledkem jejich vektorového součinu je tedy nulový vektor. Poslední identita tak platí pro libovolné  $\kappa$  a  $\phi$ , čímž jsme dokázali platnost (4.24).  $\square$

Pro kvazipotenciální proudění nestlačitelné kapaliny můžeme sestavit soustavu rovnic

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\kappa} \vec{v} \right) = \vec{o}, \quad (4.29)$$

$$\text{div}(\vec{v}) = 0, \quad (4.30)$$

kde  $\vec{v} = \kappa \text{grad}(\phi)$ .

## 5. Příklady

V této kapitole využijeme křivočaré souřadnicové systémy a vyjádření diferenciálních operátorů v těchto souřadnicích na konkrétních příkladech. Nejprve krátce popíšeme numerickou metodu pro výpočet řešení okrajových úloh - tzv. metodu sítí. Potom uvedeme příklady potenciálního 2D proudění v polárních souřadnicích a eliptických souřadnicích. Okrajové úlohy jsou podrobně popsány v [11] a [3]. V této práci je nebudeme blíže popisovat.

### 5.1. Diferenční metoda

Diferenční metoda, někdy označována jako metoda sítí nebo metoda konečných diferencí, slouží pro numerické řešení (parciálních) diferenciálních rovnic. Spočívá v tom, že na oblasti, ve které hledáme řešení dané rovnice, zvolíme konečnou množinu bodů - tzv. síť. V těchto bodech, které nazýváme *uzly sítě*, poté hledáme aproximaci řešení.

Pro každý bod sestavíme tzv. síťovou rovnici tak, že derivace nahradíme diferenčním podílem. V této práci počítáme s centrální diferencí, podle které aproximujeme derivace následujícími vztahy. Pro případ jedné dimenze,  $u = u(x)$ , dostáváme pro první a druhou derivaci

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2. \quad (5.2)$$

Ve dvou dimenzích, pro  $u = u(x_1, x_2)$ , poté

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\Delta x_1} + O(\Delta x_1)^2, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{(\Delta x_1)^2} + O(\Delta x_1)^2 \quad (5.4)$$

a obdobně pro proměnnou  $x_2$ . Chybové členy  $O$  zanedbáme a získáme tak soustavu  $n$  algebraických rovnic, kde  $n$  je počet uzlů.

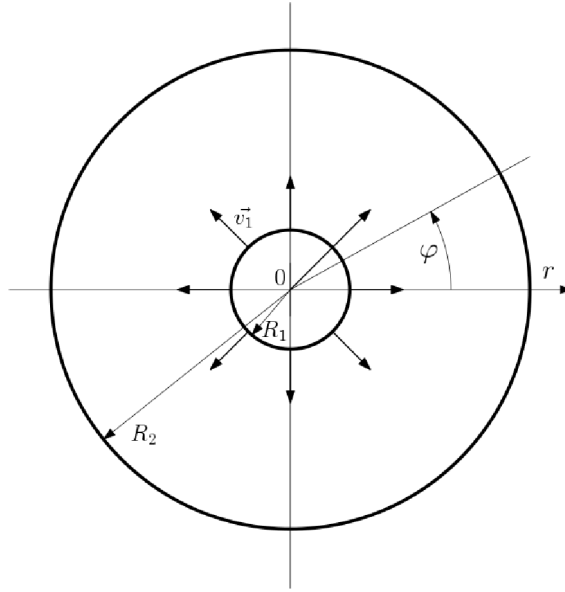
Více informací o této metodě můžeme najít např. v [11] nebo v [3].

### 5.2. Příklad 1 - Potenciální proudění na oblasti mezikruží

V prvním příkladě uvažujeme rovinné kvazipotenciální proudění v oblasti tvaru mezikruží o krajních hodnotách  $R_1$  a  $R_2$ . Na této oblasti zavedeme polární souřadnice, viz obrázek 5.1.

Pro rychlost kvazipotenciálního proudění platí (4.24). Pokud zvolíme  $\kappa = 1$ , pole je přímo potenciální a můžeme psát  $\vec{v} = \text{grad}(\phi)$ . Pak se rovnice kontinuity (4.30) převede na tvar

$$\Delta\phi = 0. \quad (5.5)$$



Obrázek 5.1: Příklad 1

Rovnice (5.5) se nazývá Laplaceova rovnice. [3] Vyjádření Laplaceova operátoru v polárních souřadnicích je analogické s vyjádřením ve válcových souřadnicích, můžeme tak psát

$$\Delta\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0. \quad (5.6)$$

Vzhledem k tomu, že je oblast symetrická podle  $\varphi$  a okrajové podmínky zadáme též symetrické podle  $\varphi$ , platí  $\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = 0$ . Potenciál  $\phi$  je tedy závislý pouze na souřadnici  $r$ :  $\phi = \phi(r)$ . Stejně tak i pro rychlost  $\vec{v}$  platí  $\vec{v} = \vec{v}(r)$ . Problém se tak zjednoduší na 1D proudění.

Řešíme tedy diferenciální rovnici pro neznámou skalární funkci  $\phi$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) = 0 \quad (5.7)$$

s okrajovými podmínkami

$$\phi(R_1) = K, \quad (5.8)$$

$$\phi(R_2) = 0, \quad (5.9)$$

kde  $K < 0$ . Tento okrajový problém lze řešit analyticky. Integrací rovnice (5.7) podle  $r$  dostáváme

$$r \frac{\partial\phi}{\partial r} = C_1, \quad (5.10)$$

kde  $C_1 \in \mathbb{R}$  a upravíme na tvar

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{C_1}{r} \quad (5.11)$$

opětovnou integrací dostáváme obecné řešení diferenciální rovnice (5.7)

$$\phi = C_1 \ln(r) + C_2, \quad (5.12)$$

## 5.2. PŘÍKLAD 1 - POTENCIÁLNÍ PROUDĚNÍ NA OBLASTI MEZIKRUŽÍ

kde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Dosazením okrajových podmínek (5.8) a (5.9) získáme hodnoty konstant  $C_1$  a  $C_2$

$$C_1 = \frac{K}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}, \quad (5.13)$$

$$C_2 = -\frac{K \ln(R_2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}. \quad (5.14)$$

a dostaneme partikulární řešení odpovídající okrajovým podmínkám

$$\phi = \frac{K}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \ln(r) - \frac{K \ln(R_2)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}, \quad (5.15)$$

které ještě zjednodušíme substitucí na tvar

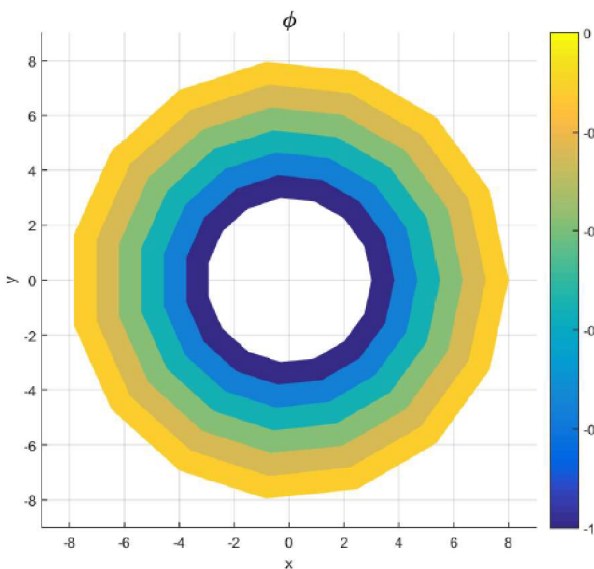
$$\phi = K_0 \ln(r) - K_0 \ln(R_2), \quad (5.16)$$

kde  $K_0 = \frac{K}{\ln(R_1/R_2)}$ .

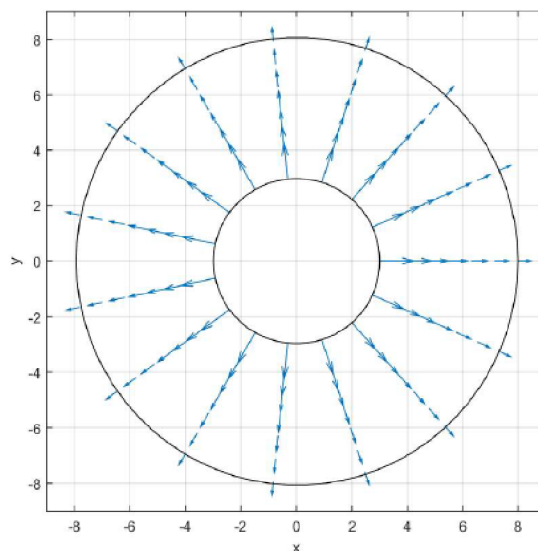
Pro rychlost  $\vec{v}$  pak v polárních souřadnicích platí

$$\vec{v} = \text{grad}(\phi) = \left( \frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) = \left( \frac{\partial \phi}{\partial r}, 0 \right) = \left( K_0 \frac{1}{r}, 0 \right) \quad (5.17)$$

Výpočet byl proveden i numericky pomocí metody konečných diferencí. Výsledné skalární pole potenciálu  $\phi$  můžeme vidět na obrázku 5.2 a vektorové pole rychlosti  $\vec{v}$  na obrázku 5.3. Pro vykreslení v programu Matlab bylo potřeba převést výsledky do kartézských souřadnic  $x, y$ .



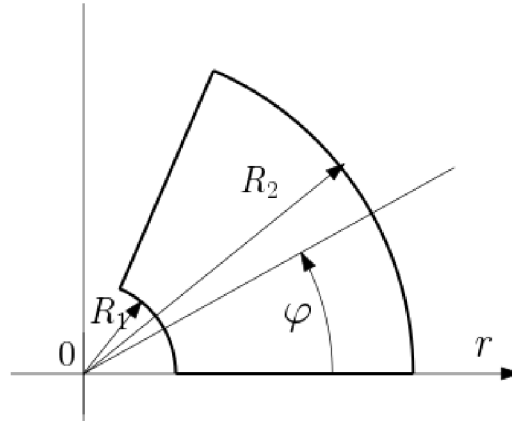
Obrázek 5.2: Př. 1 - výsledný potenciál  $\phi$



Obrázek 5.3: Př. 1 - výsledná rychlost  $\vec{v}$

### 5.3. Příklad 2 - Potenciální proudění na oblasti výseče mezikruží

Uvažujme opět rovinné potenciální proudění, tentokrát v oblasti tvaru výseče mezikruží o krajních hodnotách  $R_1 = 3$ ,  $R_2 = 6$ ,  $\varphi_1 = 0^\circ$ ,  $\varphi_2 = 60^\circ$ . Na této oblasti zavedeme polární souřadnice, viz obrázek 5.4.



Obrázek 5.4: Příklad 2

Opět řešíme parciální diferenciální rovnici pro neznámou skalární funkci  $\phi$ , nyní ji uvedme v rozepsaném tvaru

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (5.18)$$

Doplníme smíšené okrajové podmínky

$$\phi(R_1, \varphi) = K, \quad (5.19)$$

$$\phi(r, 0) = \phi(r, 60^\circ) = L, \quad (5.20)$$

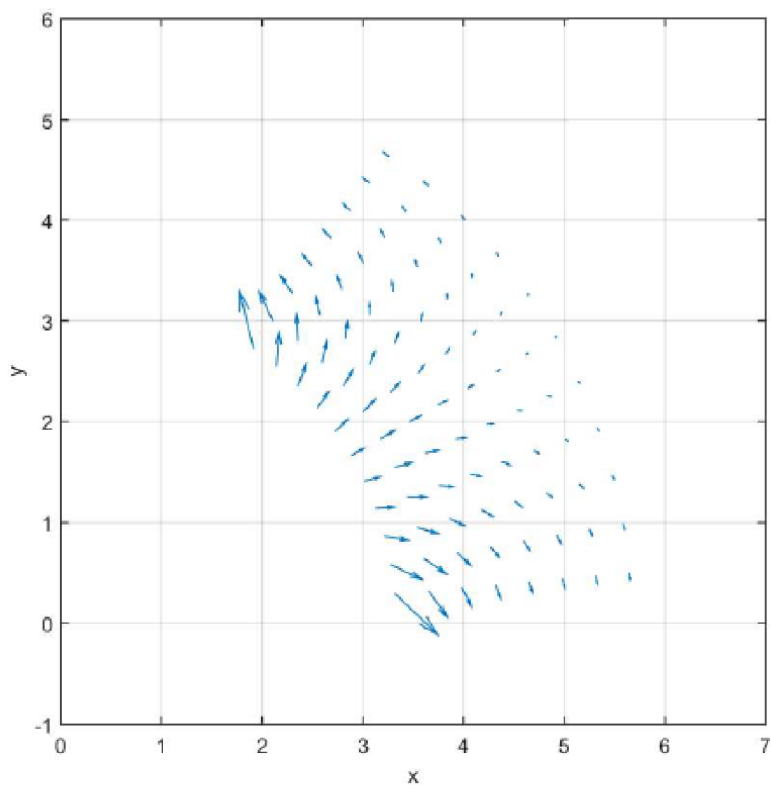
$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(R_2, \varphi) = 0. \quad (5.21)$$

Tuto okrajovou úlohu již nelze řešit analyticky a tak k výpočtu potenciálu  $\phi$  resp. rychlosti  $\vec{v}$  využijeme metodu konečných diferencí, viz kapitola 5.1. Z diferenciální rovnice (5.18) dostaneme síťovou rovnici ve tvaru

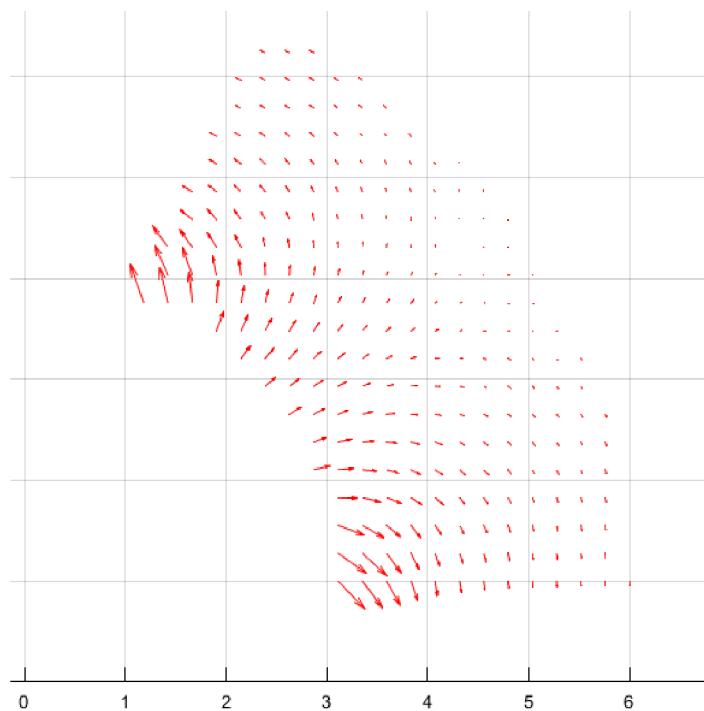
$$r_i^2 \frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{(\Delta r)^2} + r_i \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2(\Delta r)} + \frac{\phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}}{(\Delta \varphi)^2} = 0 \quad (5.22)$$

pro všechny aproximace  $\phi(r_i, \varphi_j) \approx \phi_{i,j}$ . Výsledné vektorové pole rychlosti můžeme vidět na obrázku 5.5. Pro porovnání výsledku přiložíme vykreslené vektorové pole rychlosti vypočítané funkcí *pdetool* programu Matlab, která řeší okrajové úlohy pomocí metody konečných prvků, viz obrázek 5.6.

5.3. PŘÍKLAD 2 - POTENCIÁLNÍ PROUDĚNÍ NA OBLASTI VÝSEČE MEZIKRUŽÍ



Obrázek 5.5: Příklad 2 - vektorové pole rychlosti  $\vec{v}$



Obrázek 5.6: Rychlost  $\vec{v}$  vypočítaná pomocí programu Matlab

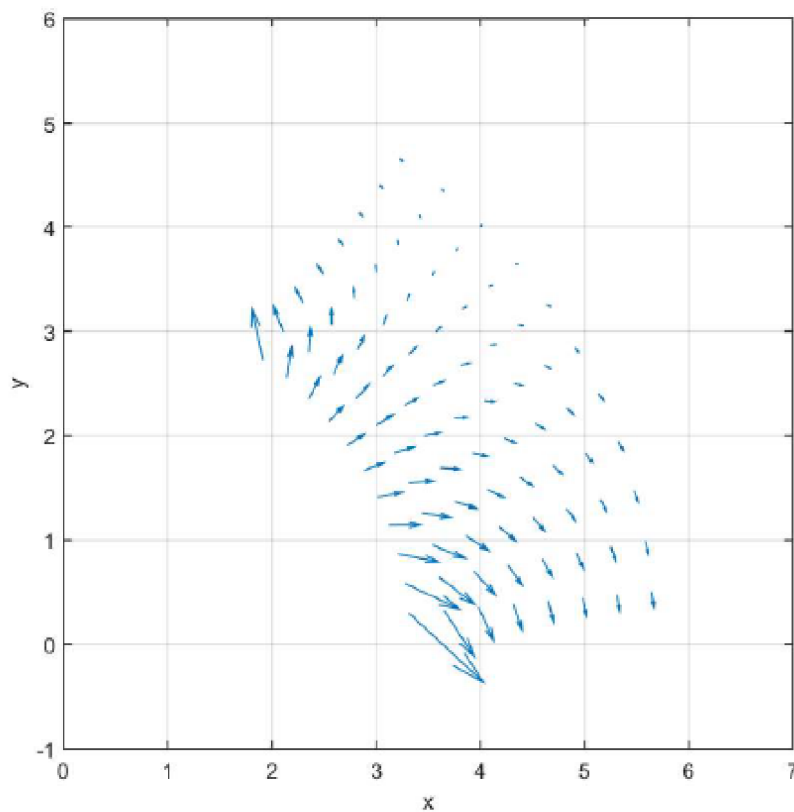
## 5. PŘÍKLADY

V případě různých okrajových podmínek pro  $\varphi_1 = 0^\circ$  a  $\varphi_2 = 60^\circ$ , například

$$\phi(r, 0) = 1, \quad (5.23)$$

$$\phi(r, 60^\circ) = 0, \quad (5.24)$$

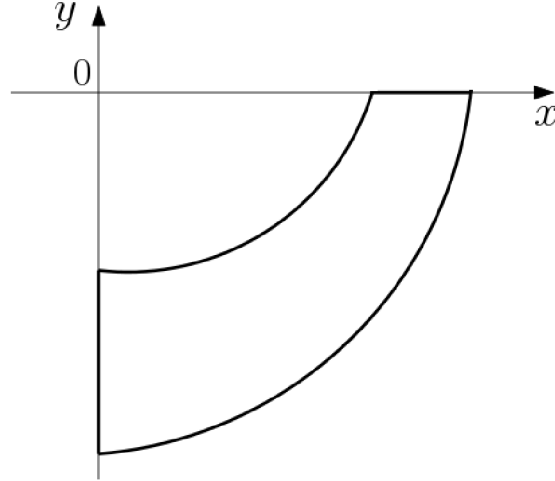
dostaneme nesymetrické vektorové pole, viz obrázek 5.7.



Obrázek 5.7: Vektorové pole rychlosti  $\vec{v}$ , nesymetrické okrajové podmínky

### 5.4. Příklad 3 - Rozšiřující se potrubí

Znovu budeme počítat s potenciálním prouděním, tentokrát na rozšiřující se zakřivené 2D oblasti, viz obrázek 5.8.



Obrázek 5.8: Příklad 3

Na této oblasti zavedeme eliptický souřadnicový systém

$$x = a \cosh \mu \cos \nu, \quad (5.25)$$

$$y = a \sinh \mu \sin \nu, \quad (5.26)$$

kde  $a = konst.$ ,  $\mu > 0$  a  $\nu \in \langle 0, 2\pi \rangle$ . Z obrázku 5.9 je patrné, že tento systém je složen z elips, které odpovídají souřadnici  $\mu$ , a hyperbol, které odpovídají souřadnici  $\nu$ . Konstanta  $a$  odpovídá vzdálenosti mezi počátkem  $[0, 0]$  a ohniskem elips. Přesný tvar naší oblasti tedy určujeme volbou parametrů  $a$ ,  $\mu_1$  a  $\mu_2$ , kde hodnota  $\mu_1$  odpovídá hornímu zakřivenému okraji potrubí a hodnota  $\mu_2$  dolnímu okraji potrubí.

K vyřešení budeme potřebovat vyjádření gradientu a Laplaceova operátoru v těchto souřadnicích. Podle (2.15) vypočítáme Laméovy koeficienty, které jsou v tomto případě shodné pro souřadnici  $\mu$  i  $\nu$

$$h_\mu = h_\nu = a \sqrt{\sinh^2 \mu + \sin^2 \nu}. \quad (5.27)$$

Pro gradient a Laplaceův operátor poté dostáváme

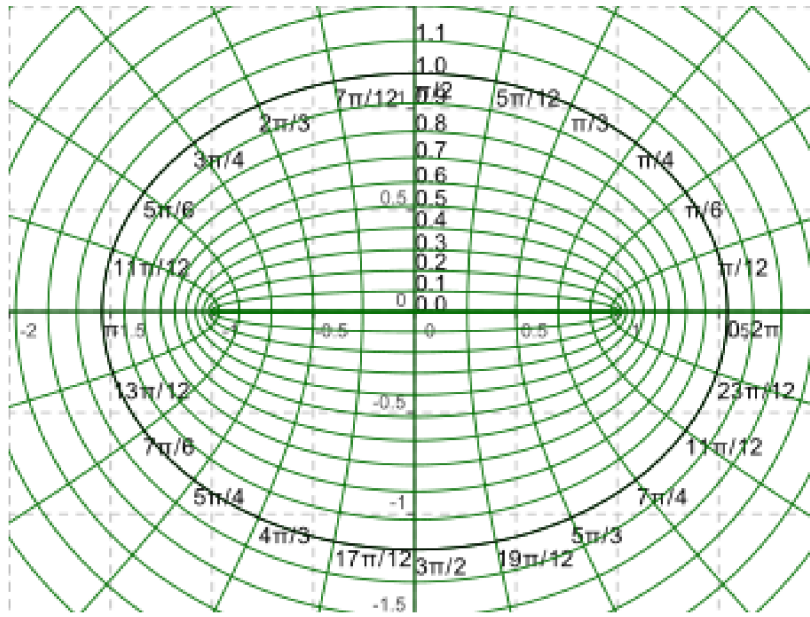
$$\text{grad}(\phi) = \frac{1}{a \sqrt{\sinh^2 \mu + \sin^2 \nu}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \mu}, \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right), \quad (5.28)$$

$$\Delta \phi = \frac{1}{a^2 (\sinh^2 \mu + \sin^2 \nu)} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \nu^2} \right). \quad (5.29)$$

Znovu řešíme Laplaceovu rovnici

$$\Delta \phi = \frac{1}{a^2 (\sinh^2 \mu + \sin^2 \nu)} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \nu^2} \right) = 0, \quad (5.30)$$





Obrázek 5.9: Eliptické souřadnice [15]

kterou můžeme tentokrát upravit na jednoduchý tvar

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \nu^2} = 0. \quad (5.31)$$

Přidáme okrajové podmínky

$$\phi\left(\mu, \frac{3}{2}\pi\right) = K, \quad (5.32)$$

$$\phi(\mu, 2\pi) = L, \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(\mu_1, \nu) = 0, \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(\mu_2, \nu) = 0, \quad (5.35)$$

kde pro konstanty  $K$  a  $L$  platí  $K < L$  a pro krajní hodnoty souřadnice  $\mu$  platí  $\mu_1 < \mu_2$ .

Výpočet provedeme opět pomocí metody konečných diferencí. Síťová rovnice, kterou získáme z rovnice (5.31), má v tomto případě tvar

$$\frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{(\Delta\mu)^2} + \frac{\phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}}{(\Delta\nu)^2} = 0. \quad (5.36)$$

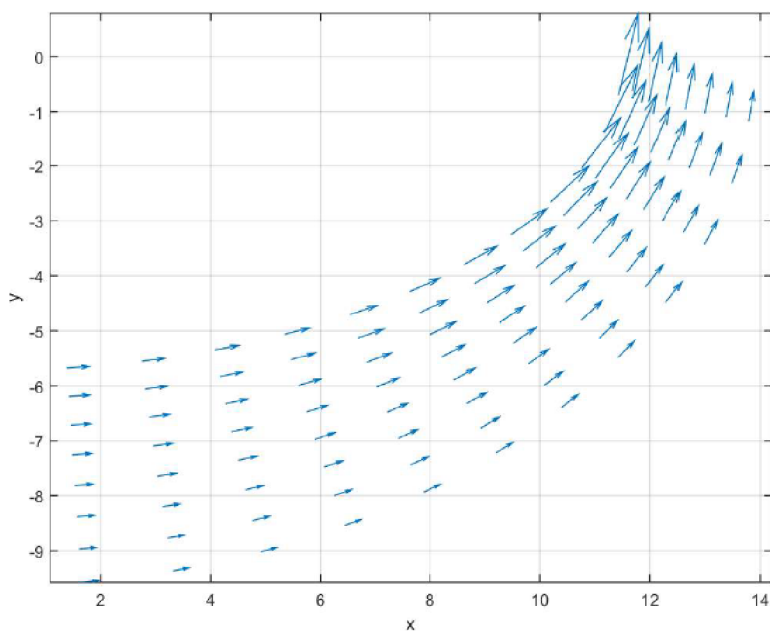
Dostaneme řešení potenciálu  $\phi$  v odpovídajících uzlech. Pro rychlost  $\vec{v}$  pak platí

$$\vec{v} = \text{grad}(\phi) = \frac{1}{a\sqrt{\sinh^2 \mu + \sin^2 \nu}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \mu}, \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right). \quad (5.37)$$

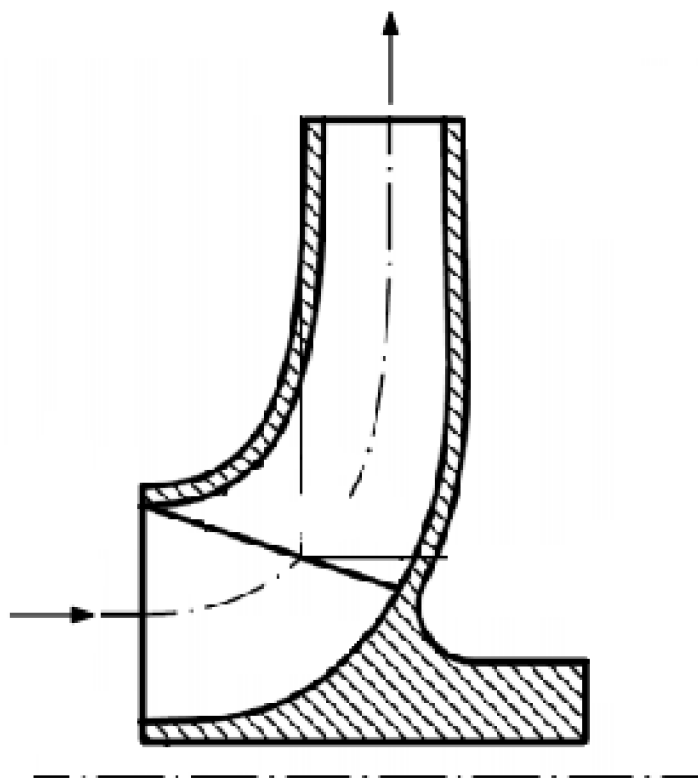
Výsledné vektorové pole můžeme vidět na obrázku 5.10.

Tato oblast byla navržena tak, aby přibližně odpovídala meridiálnímu řezu radiálního odstředivého čerpadla, který můžeme vidět na obrázku 5.11.

#### 5.4. PŘÍKLAD 3 - ROZŠÍŘUJÍCÍ SE POTRUBÍ



Obrázek 5.10: Příklad 3 - vektorové pole rychlosti  $\vec{v}$



Obrázek 5.11: Meridiální řez radiálního čerpadla

## 6. Závěr

Prvním cílem práce byla definice křivočarých souřadnic a vyjádření operátorů gradient, divergence, rotace a Laplaceova operátoru v křivočarých souřadnicích. Ve 2. kapitole jsme uvedli vzorce pro výpočet těchto operátorů v ortogonálních křivočarých souřadnicích pomocí Laméových koeficientů. Z těchto vzorců jsme následně odvodili vztahy pro válcový souřadnicový systém. V podkapitole 2.2 jsme dokázali několik identit vektorové analýzy.

Dalším cílem byla analýza spirální trajektorie částice kapaliny. Ve 3. kapitole jsme obecně rozebrali proudění ideální a reálné kapaliny s přihlédnutím na matematický popis. V následující 4. kapitole byl odvozen tvar Navier-Stokesových rovnic pro spirální trajektorii. Z podmínky pro pohyb částice po prostorové spirále jsme odvodili vztah pro výpočet helicity a také jsme popsali kvazipotenciální proudění, které s helicitou souvisí.

V 5. kapitole jsme řešili příklady potenciálního proudění na zadaných oblastech, které jsme popsali křivočarými souřadnicemi. Začali jsme jednoduchým příkladem 1D proudění, dále jsme řešili proudění na oblasti výseče mezikruží a nakonec proudění na zakřivené rozšiřující se 2D oblasti. Všechny příklady jsme spočítali numericky metodou konečných diferencí pomocí vlastních skriptů v programu MATLAB, ve kterém jsme poté také vykreslili výsledky. Dalším logickým krokem by bylo řešení potenciálního proudění v nějaké 3D oblasti.

K samotnému modelování proudění kapaliny na trajektorii prostorové spirály, které je nutné řešit právě v trojrozměrném prostoru, jsme se v práci z časových důvodů nedostali. Nicméně výsledky této bakalářské práce mohou být použity v navazující diplomové práci.

# Literatura

- [1] ALEKSEENKO, S. V., P. A. KUIBIN a V. L. OKULOV. *Theory of concentrated vortices: an introduction*. New York: Springer, c2007. ISBN 978-3-540-73375-1.
- [2] BRDIČKA, Miroslav, Ladislav SAMEK a Bruno SOPKO. *Mechanika kontinua*. Vyd. 3., rev. Praha: Academia, 2005. Česká matice technická (Academia). ISBN 80-200-1344-X.
- [3] ČERMÁK, Libor. *Numerické metody II: diferenciální rovnice*. Vyd. 2., upr. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2010. ISBN 978-80-214-4110-1.
- [4] DVOŘÁK, Lukáš.: *Vlastnosti tekutin* [online]. Ostrava, 2010 [cit. 2017-05-20]. Syllabus předmětu. Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra hydromechaniky a hydraulických zařízení. Dostupné z: <http://docplayer.cz/7775953-Vysoka-skola-banska-technicka-univerzita-ostava-fakulta-strojni-katedra-hydromechaniky-a-hydraulicky-zarizeni-syllabus-predmetu-vlastnosti-tekutin.html>
- [5] KUDELA, Henryk. *Turbulent flow*[online]. [cit. 2017-05-20] Dostupné z: [http://www.itcmp.pwr.wroc.pl/znmp/dydaktyka/fundam\\_FM/Lecture\\_no3\\_Turbulent\\_flow\\_Modelling.pdf](http://www.itcmp.pwr.wroc.pl/znmp/dydaktyka/fundam_FM/Lecture_no3_Turbulent_flow_Modelling.pdf).
- [6] KUIBIN, P A, R F SUSAN-RESIGA a S MUNTEAN. A model for precessing helical vortex in the turbine discharge cone. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science* [online]. 2014, **22**(2), 022024- [cit. 2017-05-20]. DOI: 10.1088/1755-1315/22/2/022024. ISSN 1755-1307. Dostupné z: <http://stacks.iop.org/1755-1315/22/i=2/a=022024?key=crossref.1d35f94807fa4326fb4d5b86552a8fed>
- [7] KVASNICA, Jozef. *Matematický aparát fyziky*. Vyd. 2. opr. Praha: Academia, 1997. ISBN 80-200-0603-6.
- [8] NIKITIN, Nikolay. Finite-difference method for incompressible Navier-Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates. *Journal of Computational Physics* [online]. 2006, **217**(2), 759-781 [cit. 2017-05-20]. DOI: 10.1016/j.jcp.2006.01.036. ISSN 00219991. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0021999106000398>
- [9] POCHYLÝ, František.: *Analýza proudění kapaliny na trajektorii tvaru prostorové spirály*, Výzkumná zpráva, VUT-EU13303-QR-14-10, 2010.
- [10] REDZIC, Dragan V. The operator  $\nabla$  in orthogonal curvilinear coordinates. *European Journal of Physics* [online]. 2001, **22**(6), 595-599 [cit. 2017-05-20]. Dostupné z: <http://stacks.iop.org/0143-0807/22/i=6/a=304>
- [11] REKTORYS, Karel. *Přehled užité matematiky*. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000. Česká matice technická (Prometheus). ISBN 80-719-6181-7.

## LITERATURA

- [12] SUNGNUL, Surattana. Transformation of the Navier-Stokes Equations in Curvilinear Coordinate Systems with Maple. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics* [online]. 2016, **12**(4), 3315-3325 [cit. 2017-05-20]. ISSN 0973-1768. Dostupné z: [http://www.ripublication.com/gjpam16/gjpamv12n4\\_45.pdf](http://www.ripublication.com/gjpam16/gjpamv12n4_45.pdf)
- [13] ŠOB, František. *Hydromechanika*. Brno: CERM, 2001. Učební texty vysokých škol. ISBN 80-214-2037-5.
- [14] ZORICH, V. A. a Roger COOKE. *Mathematical analysis*. New York: Springer, c2004. ISBN 35-404-0633-6.
- [15] Coordinate System. In: *Liverpool Mathematical Society* [online]. [cit. 2017-05-20]. Dostupné z: <http://www.livmathsoc.org.uk/cgi-bin/sews.py?CoordinateSystem>

## 7. Seznam použitých symbolů a veličin

Označení	Jednotka	Popis
$\vec{A}$	$m \cdot s^{-2}$	vnější objemové zrychlení
$K, K_0, L$	1	konstanty v příkladech
$p$	$Pa$	tlak
$R_1, R_2$	$m$	krajní hodnoty (výseče) mezikruží v příkladech 1 a 2
$Re$	1	Reynoldsovo číslo
$t$	$s$	čas
$\vec{v}$	$m \cdot s^{-2}$	rychlost kapaliny
$Y$	$J \cdot kg^{-1}$	lokální měrná energie
$\delta_{ij}$	1	Kroneckerovo delta
$\varepsilon_{ijk}$	1	Levi-Civitův tenzor
$\eta$	$Pa \cdot s$	dynamická viskozita
$\nu$	$m^2 \cdot s^{-1}$	kinematická viskozita
$\mu_1, \mu_2$	$m$	krajní hodnoty souřadnice $\mu$ v příkladu 3
$\rho$	$kg \cdot m^{-3}$	hustota
$\tau$	$Pa$	tečné napětí
$\varphi_1, \varphi_2$	$rad$	krajní hodnoty výseče mezikruží v příkladu 2
$\Omega$	$rad \cdot s^{-1}$	vír rychlosti
$x, y, z$	$m$	kartézské souřadnice
$r, \varphi, (z)$	$m, rad, (m)$	polární (válcové) souřadnice
$\mu, \nu$	$m, rad$	eliptické souřadnice
$r, \theta, \varphi$	$m, rad, rad$	sférické souřadnice

## 8. Seznam příloh

K práci je přiložen CD nosič, který obsahuje elektronickou verzi práce a zdrojové kódy skriptů programu MATLAB pro jednotlivé příklady:

- 2017\_BP\_Klimes\_Ondrej\_170446.pdf
- Příklad1\_mezikruzi.m
- Příklad2\_vysec\_mezikruzi.m
- Příklad3\_rozsirujici\_se\_potrubi.m