Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Sbírka úloh z lineární algebry
Exercises and problems in linear algebra

Bakalářská práce

Vypracoval: Klára Čapková

Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

České Budějovice 2022

Poděkování

Ráda bych tímto vyjádřila poděkování svému vedoucímu bakalářské práce panu Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D. za ochotu, čas, odborné vedení a mnoho cenných rad, které mi během mého psaní poskytl.

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 3. července 2022.

....

Klára Čapková

Abstrakt/Anotace

Hlavním cílem bakalářské práce je sestavení sbírky příkladů z lineární algebry, která by mohla sloužit jako doplňující studijní materiál studentům prvního ročníku pedagogické fakulty Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. Důležitá a stěžejní část mé práce je elektronické zpracování této sbírky v programu GeoGebra a vizuální interpretace příkladů pomocí 3D obrázků, QR kódů a hypertextových odkazů, které má studentům přiblížit řešení úloh.

Abstract

The aim of this thesis is to create a collection of solved examples and problems of linear algebra, which could serve as a learning tool for the first-year students of the Faculty of Education of University of South Bohemia in České Budějovice. The most important part of this thesis is the electronic processing of the collection in a program GeoGebra and its visual interpretation of examples and problems by 3D pictures, QR codes and hyperlinks that specify the solutions.

Obsah

Úvod

Jak již název napovídá, práce se zabývá jednou ze základních disciplín matematiky, a to lineární algebrou. Hlavním cílem mé bakalářské práce je vytvořit sbírku příkladů z lineární algebry pro studenty prvního ročníku pedagogické fakulty JU v Českých Budějovicích a její zpřístupnění v elektronické podobně v programu GeoGebra prostřednictvím *GeoGebra knihy*, hypertextových odkazů a QR kódů. Student si tak u každého příkladu může zkontrolovat výsledek, eventuálně podívat se na grafické znázornění daného problému pomocí QR kódů.

QR kódy nalezneme pouze u příkladů, které bylo možné znázornit pomocí obrázků, tedy příklady nejvýše dimenze 3. V případě vyšších dimenzí je vložen pod řešení kód do GeoGebry s výsledkem, který zároveň slouží pro čtenáře jako návod pro vkládání příkazů do programu. Od příkladu jsou tyto vstupy odděleny šedým pruhem.

Hypertextové odkazy se nachází vždy u příkladů, k nimž nebylo možné vytvořit vizuální interpretaci. Odkazy se vždy vyskytují přímo v zadání buď u označení „příklad + číslo příkladu“, nebo u číslování - a), b), c), d).

Celá práce se člení na sedm kapitol. V každé kapitole na začátku objasním základní pojmy a definice, které jsou důležité pro řešení příkladů v dané části. V prvních čtyřech kapitolách se zaměřuji na základní operace a vlastnosti matic, které jsou stěžejní v jejich aplikaci, konkrétně na výpočet soustavy lineárních rovnic, zjištění lineární závislosti a nezávislosti vektorů, lineární kombinace a bázi vektorových prostorů.

Práci jsem napsala v Overleafu, v online editačním nástroji pro psaní a publikování textů pomocí programu LaTeX. Obrázky jsem vytvořila v programu GeoGebra. V průběhu jsem využívala ke kontrole mých řešení nejen Geogebru, ale i internetovou stránku *Kalkulačka matic*, která ukazuje řešení i postup výpočtu. Díky tomu je z mého pohledu velmi užitečným nástrojem a v některých případech i praktičtější než GeoGebra.

1 Základní operace s maticemi

V této kapitole si představíme základní operace s maticemi a za jakých podmínek jsou tyto operace definovány. Konkrétně se budeme zabývat sčítáním matic, násobením matice skalárem a násobením matic.

Sčítání je celkem intuitivní. Matice musejí být stejného typu, jinak je nemůžeme sečíst ani odečíst. Pokud je tato podmínka splněna, sčítáme spolu prvky na stejných pozicích. Vznikne nám matice stejného typu jako jsou matice, které jsme spolu sčítali:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 11 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Při násobení skalárem nemusí být splněn žádný předpoklad. Platí pouze, že skalárem vynásobíme každý prvek matice. Výsledkem je matice stejného typu jako matice, kterou jsme násobili skalárem:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 21 \\ 15 & 18 & 6 \\ 12 & 3 & 27 \end{bmatrix}.$$

Nejzáludnější ze všech základních operací, které si popíšeme, je násobení matic. Není intuitivní jako předchozí dvě operace, které jsme si uvedli. Nenásobíme mezi sebou odpovídající členy, ale násobíme mezi sebou skalárně vždy řádek první matice a sloupec matice druhé. Nejdříve si vždy musíme ověřit, zda je splněno základní kritérium. Při násobení musí platit, že počet sloupců v první matici je roven počtu řádků v matici druhé. Například máme dvě matice, A typu 2×2 a B typu 2×3. Podmínka násobení je splněna v případě, že spolu násobíme matice v pořadí AB. Vzniklá matice je typu 2×3, kde 2 je počet řádků první matice a 3 je počet sloupců matice druhé. Zaměníme-li pořadí násobení BA, tak předpoklad není splněn a matice mezi sebou nemůžeme násobit. Zároveň je z předchozí věty zřejmé, že násobení není komutativní. Jak přesně algoritmus násobení matic probíhá si můžeme ilustrovat následujícím příkladem v němž násobíme matice $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ a $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ v tomto pořadí. Označme si matice postupně A a B. První řádek matice A vynásobím skalárně s prvním sloupcem matice B, získám tak první člen nové matice, viz žlutě vyznačené prvky. Druhý člen získáme analogicky. První řádek matice A vynásobíme skalárně s druhým sloupcem matice B. Obdobně pokračuji u dalších prvků matice, viz např. červeně vyznačené prvky.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 27 & 3 \\ 27 & 29 & 5 \end{bmatrix}.$$

V následující tabulce si uvedeme vlastnosti výše zmíněných operací.

Vlastnosti operací s maticemi		
Sčítání matic	Komutativnost	$A + B = B + A$
	Asociativnost	$(A + B) + C = A + (B + C)$
	Nulová matice	$A + 0 = A = 0 + A$
	Matice opačná k A	$A + (-A) = 0, \quad -A = (-1)A$
Násobení skalárem	Asociativnost	$c(dA) = (cd)A$
	Distributivnost	$c(A + B) = (cA) + (cB)$
		$(c + d)A = (cA) + (dA)$
	Násobení jedničkou	$1A = A$
	Násobení nulou	$0A = 0$
Násobení matic	Asociativnost	$(AB)C = A(BC)$
	Distributivnost	$A(B + C) = (AB) + (AC)$
		$(A + B)C = (AC) + (BC)$
	Jednotková matice	$AI = A = IA$
	Nulová matice	$AO = O, \quad OA = O$

Tabulka 1: Vlastnosti operací [5, s. 9]

Příklad 1 [5, s. 9]

Máme matice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rozhodněte, zda je možné spočítat následující výrazy. Pokud ano, vyřešte.

a) $3A - B$, b) AB, c) BA, d) $(A+B)C$,

e) $A + BC$, f) $A + 2CB$, g) $BCB - I$, h) $A^2 - 3A + I$,

i) $(B - I)(C + I)$.

Řešení:

Ad a) Matice nejsou stejného typu, nemůžeme je sečíst.

Ad b) $A = 3 \times 3$, $B = 2 \times 3$, počet sloupců první matice je jiný než počet řádků matice druhé, proto je nemůžeme mezi sebou vynásobit.

Ad c) $B = 2 \times 3$, $A = 3 \times 3$, tyto dvě matice můžeme násobit. Splňují podmínky pro násobení matic. Vznikne matice 2×3:

$$BA = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ad d) Při násobení matic uplatíme vlastnost distributivnosti
$(A + B)C = (AC + BC)$. Příslušné součiny mají smysl, platí:

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 13 \\ -16 & -23 \\ 12 & 21 \end{bmatrix},$$

$$BC = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -12 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matice jsou různého typu, nemůžeme je tedy sečíst.

Ad e) Stejný případ jako v d).

Ad f) Vynásobením matic BC získáme matici 3×3. Tuto matici můžeme sečíst s maticí A:

$$CB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 2 & -8 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A + 2CB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 12 & 6 \\ 4 & -16 & -10 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 9 \\ 3 & -12 & -12 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ad g) BCB je typu 2×3, proto ji nemůžeme odečíst od jednotkové matice. Jednotková matice je matice čtvercová 2×2, 3×3 atd.

Ad h) A^2 můžeme rozepsat jako násobení dvou matic $A \cdot A$. Vznikne matice 3×3. Násobení reálným číslem typ matice nezmění.
Jednotková matice je také typu 3×3. Můžeme je sčítat i odčítat:

$$\begin{bmatrix} 11 & -5 & 23 \\ -11 & 17 & -23 \\ 21 & -3 & 45 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -3 & 9 \\ -3 & 12 & -6 \\ 9 & 0 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 14 \\ -8 & 6 & -17 \\ 12 & -3 & 28 \end{bmatrix}.$$

Ad i) Nelze. Matice B a C nejsou čtvercové, proto je nemůžeme sečíst s I.

GeoGebra

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

B A

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

A + 2 C B

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 11 & 9 \\ 3 & -12 & -12 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3\,A + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 9 & -2 & 14 \\ -8 & 6 & -17 \\ 12 & -3 & 28 \end{pmatrix}$$

Příklad 2 [5, s. 5]

Pro jaké hodnoty x, y, z, w se matice: $\begin{bmatrix} x+y & x-z \\ y+w & x+2w \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ rovnají?

Řešení:

Aby se matice rovnaly, musí se prvky na všech pozicích v matici rovnat, proto platí:

$$x + y = 1$$

$$x - z = 0$$

$$y + w = 2$$

$$x + 2w = 1.$$

Získáváme lineární soustavu rovnic o čtyřech neznámých. Pro nalezení hodnot neznámých využijeme Gaussovu eliminaci [1]:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right],$$

$$\begin{array}{llll} w = \frac{2}{3}, & -z + \frac{2}{3} = 1 & -y + \frac{1}{3} = -1 & x = 1 - \frac{4}{3} \\ & -z = -1 - \frac{2}{3} & -y = -1 - \frac{1}{3} & x = -\frac{1}{3}. \\ & z = -\frac{1}{3}, & y = \frac{4}{3}, & \end{array}$$

GeoGebra

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A_{el} = SchodovityTvar(A)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -0.33 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.33 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.33 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.67 \end{pmatrix}$$

[1] V následující kapitole si blíže vysvětlíme, co je *Gaussova eliminace.*

Příklady k procvičení [6, s. 84]

Pro práci s následujícími úkoly máme dány matice: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

1. Spočítejte AC a BC.
2. Spočítejte $A + B$ a ukažte, že $AC + BC = (A + B) \cdot C$.
3. Spočítejte ABC a BAC.
4. Spočítejte $B^T A$.

Příklady k procvičení [2, s. 73]

Vypočtěte AB a BA, pokud existují:

a) A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, B=$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$,

b) A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,

c) A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, B= $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

2 Gaussova eliminace

V této práci využíváme Gaussovu eliminační metodu především při řešení soustav lineárních rovnic. Tato metoda má však širší uplatnění např. při určování hodnosti matic, určování inverzní matici nebo determinantu matice, ke stanovení závislosti a nezávislosti vektorů, dimenze či báze vektorového prostoru atd. Existuje tak řada situací, které lze řešit aplikací Gaussovy eliminace.

Gaussova eliminační metoda je založena na vytváření série navzájem ekvivalentních matic. Konečná matice je v tzv. Gaussově tvaru, můžeme se setkat také s označením schodovitý, trojúhelníkový nebo stupňovitý tvar. Gaussova eliminační metoda je založena na konkrétních úpravách matice, které "zachovávají"vektorový prostor generovaný řádkovými (sloupcovými) vektory matice tj. nemění hodnost této matice. Tyto úpravy nazýváme ekvivalentní a konkrétně se jedná o tyto změny:

1. vzájemné prohození řádků,
2. sčítání, odčítání řádků,
3. vynásobení řádku reálným číslem,
4. odstranění nulového řádku.

Konečnou matici jsme označili jako matici B, která vznikla z původní matice A výše zmíněnými úpravami. Říkáme, že B je *ekvivalentní* s maticí A, značíme $A \sim B$.

Příklad 1 [5, s. 15]

Pro následující matice napište odpovídající soustavu lineárních rovnic. Najděte řešení soustavy užitím Gaussovy eliminace:

$$\text{a)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -6 \\ -2 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right], \qquad \text{b)} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -5 & -1 \\ 6 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right].$$

Řešení: Ad a)

1. způsob: Maticový zápis soustavy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

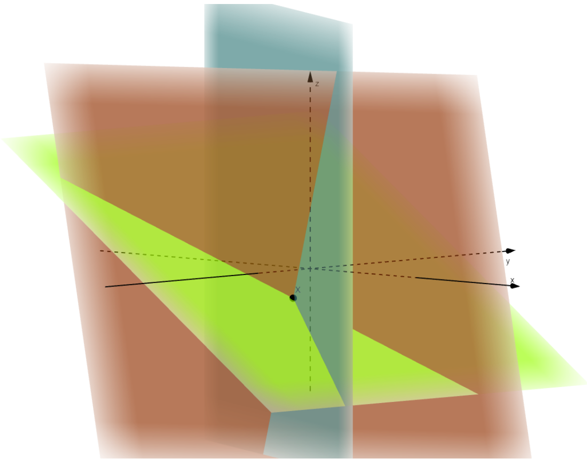
2. způsob: Jako soustava rovnic

$$\begin{aligned} x + 2y &= -3 \\ -x + 2y + z &= -6 \\ -2x - 3z &= 1. \end{aligned}$$

Řešení spočítáme pomocí Gaussovy eliminace. První řádek odečteme od druhého řádku a dvojnásobek prvního řádku od třetího. Poté vynásobíme druhý řádek (-1) a odečteme od třetího. Získáme matici v trojúhelníkovém tvaru. Získáme matici v Gaussově tvaru, ke které zpětně přiřadíme soustavu rovnic, z níž již snadno dostaneme řešení.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -6 \\ -2 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & -9 \\ 0 & 4 & -3 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right],$$

$$z = -1, \qquad \begin{aligned} 4y - 1 &= -9 \\ 4y &= -8 \\ y &= -2, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - 4 &= -3 \\ x &= 1. \end{aligned}$$



Obrázek 1: Grafické znázornění řešení a)

Řešení: Ad b)

1. způsob: Maticový zápis soustavy

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -5 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

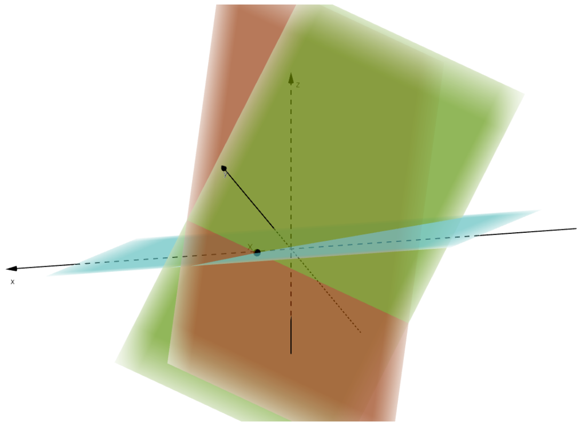
2. způsob: Jako soustava rovnic

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= -3 \\ -2y - 5z &= -1 \\ 6x - 2y + z &= -3. \end{aligned}$$

Řešení spočítáme Gaussovou eliminací.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -5 & -1 \\ 6 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right],$$

$$z = -1, \qquad \begin{aligned} -2y + 5 &= -1 \\ -2y &= -6 \\ y &= 3, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x - 5 &= -3 \\ 3x &= 2 \\ x &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$



Obrázek 2: Grafické znázornění řešení b)

Příklad k procvičení [2, s. 90, 91]

Řešte v R dané soustavy rovnic:

(Využij Gaussovu nebo Gauss-Jordanovu eliminaci.)

a)
$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2 \\
2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= -1 \\
-2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\
3x_1 + x_3 &= 1,
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 3x_3 &= 1 \\
x_1 + 5x_2 - x_3 &= 3 \\
6x_1 + 10x_2 - 14x_3 &= 0,
\end{aligned}
$$

c)
$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\
x_1 - x_2 - 5x_3 + 2x_4 &= 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\
3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0.
\end{aligned}
$$

3 Hodnost matice

Hodností matice rozumíme dimenzi vektorového prostoru generovaného jejími řádkovými (sloupcovými) vektory. [1, s. 142]

Laicky řečeno hodností matice A rozumíme číslo, které se rovná počtu řádků matice v Gaussově tvaru, která je s ní ekvivalentní. Můžeme také říci, že hodnost matice se rovná maximálnímu počtu jejích lineárně nezávislých řádků (sloupců). Pro hodnost matice A typu $m \times n$ tak platí $h(A) \leq min(m,n)$.

Hodnost matice je pro nás důležitá například při hledání řešení soustavy lineárních rovnic, kdy podle hodnosti matice soustavy a hodnosti její rozšířené matice určíme s využitím Frobeniovy věty, zda má daná soustava jedno, žádné nebo nekonečně mnoho řešení.

V kapitole, kde se zabýváme dimenzemi a vektorovými prostory, uvádíme hodnost matice jako *dimenzi vektorového prostoru generovaného řádky (sloupci) uvažované matice A*.

Příklad 1 [3, s. 63]

Určete hodnost následujících matic:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 1 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

Pomocí elementárních úprav převedeme matice na Gaussův tvar.

Ad a)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad h(A) = 4.$$

Ad b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 19 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad h(A) = 4.$$

GeoGebra

$$A_a = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

SchodovityTvar(A_a)

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}$$

SchodovityTvar(A_b)

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad k procvičení [1, s. 153]

Vypočtěte hodnost matic:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 56 & 11 \\ 6 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

Příklady k procvičení [2, s. 82]

Vypočtěte hodnost matic:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

4 Inverzní matice

Inverzní matice A^{-1} existuje pouze k regulární čtvercové matici A. **Regulární čtvercová matice** je matice, jejíž hodnost se rovná jejímu stupni $h(A) = n$, tzn. $\det A \neq 0$ [2]. Pokud matice není regulární, pak je **singulární**, platí $h(A) \leq n$, tzn. $\det A = 0$.

Nechť A je čtvercová matice stupně n. Matice X téhož stupně se nazývá inverzní maticí k matici A, jestliže platí:

$$X \cdot A = A \cdot X = I,$$

kde I je jednotková matice stupně n. Inverzní matici značíme A^{-1}. [9, s. 38]

Inverzní matici můžeme určit buď Gauss-Jordanovou eliminací nebo pomocí adjungované matice. Obě metody si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 1 [5, s. 35]

Řešte soustavu lineárních rovnic ve tvaru $A \cdot X = I$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -8 \end{bmatrix}.$$

Určete matici inverzní zprava k A.

Řešení:

Nejdříve si ukážeme metodu *Gauss - Jordanovy eliminace*. Postupujeme tak, že si vedle sebe napíšeme matici, kterou chceme invertovat, a matici jednotkovou příslušného typu, tj. vytvoříme z nich dělenou matici, v níž jsou zapsány dané matice vedle sebe. V našem případě takovou maticí je A a jednotková matice typu 3×3. Poté matici A upravujeme standardním postupem na matici jednotkovou. Omezíme se pouze na řádkové úpravy, které provádíme s celými řádky dělené matice;

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 16 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

[2] Označením $\det A$ rozumíme determinant matice. Více o determinantu v následující kapitole, str. 31.

Adjungovaná matice nám přináší další způsob získání inverzní matice. Platí: $A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A}$. Nejdříve si najdeme matici algebraických doplňků [3] k matici A (podrobnější vysvětlení nalezneme v *Příkladu 2, str. 23*). Transponováním matice doplňků získáme matici adjungovanou:

$$A' = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 16 & -8 & 3 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \operatorname{adj} \mathrm{A} = \begin{bmatrix} -5 & 16 & 6 \\ 3 & -8 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Spočítáme determinant matice: $\det A = 1$;

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} = \begin{bmatrix} -5 & 16 & 6 \\ 3 & -8 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ukázali jsme dva způsoby, jak získat inverzní matici A^{-1}. Teď můžeme spočítat maticovou rovnici $A \cdot X = I$. Tato rovnice vychází z definice inverzní matice. Víme, že X se rovná A^{-1}. Přesto si toto tvrzení ověříme:

$$\begin{aligned} A \cdot X &= I \\ X &= I \cdot A^{-1} \\ X &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 16 & 6 \\ 3 & -8 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 16 & 6 \\ 3 & -8 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pokud bychom řešili $X = A^{-1} \cdot I$, tj. násobili bychom jednotkovou matici s inverzní maticí k A zleva, dostali bychom stejný výsledek.

GeoGebra

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

[3] Přesná definice algebraického doplňku je zmíněna v podkapitole o *rozvoji determinantu na str. 33.*

$$A_{inv} = \text{Invertovat}(A)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 16 & 6 \\ 3 & -8 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklady 2 [3, s. 67]

Určete matici X tak, aby platila rovnost:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \text{(b)}\ X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 7 \\ 8 & 6 & -5 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

Ad a) Nejdříve vyhledáme inverzní matici k matici A pomocí Gaussovy eliminace.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{array}\right] \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

Když už známe A^{-1}, můžeme vyřešit maticovou rovnici:

$$A \cdot X = B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{15}{2} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{5} & -\frac{21}{10} \\ \frac{17}{10} & \frac{9}{5} & -\frac{7}{10} \end{bmatrix}.$$

GeoGebra

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{A_{inv}} = \mathsf{Invertovat}(\mathsf{A_a})$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.3 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & -0.1 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{X} = \mathsf{A_{inv}}\,\mathsf{B}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -0.5 & -1 & 7.5 \\ -0.1 & 0.6 & -2.1 \\ 1.7 & 1.8 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Ad b) Inverzní matici v této části příkladu vypočítáme pomocí adjungované matice.

Nejdříve vytvoříme matici doplňků:

$$a_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad a_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$a_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \qquad a_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$a_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \qquad a_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$a_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \qquad a_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$a_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6.$$

A' transponujeme, díky čemuž dostaneme matici adjungovanou:

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathrm{adj\,A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Determinant matice se rovná 1, tudíž se inverzní matice rovná matici adjungované. Nakonec vyřešíme maticovou rovnici:

$$\begin{aligned} X \cdot A &= B \\ X &= B \cdot A^{-1} \\ X &= \begin{bmatrix} 6 & 9 & -23 \\ 7 & 20 & -42 \\ -5 & -29 & 52 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

GeoGebra

$$A_b = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A_{inv} = \text{Invertovat}(A_b)$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 7 \\ 8 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$X = B\, A_{inv}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 9 & -23 \\ 7 & 20 & -42 \\ -5 & -29 & 52 \end{pmatrix}$$

Příklady 3 [5, s. 42]

Vyřešte následující soustavu lineárních rovnic za pomoci inverzní matice:

a)
$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x - 2y &= -2, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 3 \\ x - 2y + 3z &= -2 \\ x - 2y + z &= 2, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} y + 5z &= 3 \\ x - y + 3z &= -1 \\ -2x + 3y &= 5. \end{aligned}$$

Řešení:

Ad a) Soustavu rovnic převedeme do maticového tvaru:

$$A \cdot X = B$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Stejně jako v předchozím příkladě pro nalezení řešení soustavy určíme inverzní matici k matici A:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Vyjádříme matici X a následně vypočítáme řešení:

$$X = A^{-1} \cdot B$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

GeoGebra

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_{inv} = \text{Invertovat(A)}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & -0.25 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$X = A_{inv} \, B$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

V části b) a c) postupujeme stejně jako v části a).

Ad b)

$$A \cdot X = B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

GeoGebra

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

A_{inv} = Invertovat(A)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2.5 & 1.5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A_{inv} \, B$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ad c)

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -15 & -8 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

GeoGebra

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$A_{inv} = \mathrm{Invertovat}(A_c)$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 9 & -15 & -8 \\ 6 & -10 & -5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$X = A_{inv}\, B$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Příklady 4 [5, s. 35]

Dokažte, že L^{-1} je matice inverzní k matici L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ale matice M^{-1} není matice inverzní k matici M. Vyhledejte inverzní matici k matici M.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ -b & -c & 1 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

Aby matice L^{-1} byla inverzní k matici L, musí podle definice platit: $L \cdot L^{-1} = I$. To samé se týká matice M a M^{-1}. Následující tvrzení ověříme pro obě matice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ -b & -c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ ac & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že součin matic M a M^{-1} se nerovná matici jednotkové, tedy M^{-1} není maticí inverzní k M. V následujícím příkladě spočítáme matici inverzní k M:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & c & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -b+ac & -c & 1 \end{array}\right]$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b+ac & -c & 1 \end{bmatrix}.$$

GeoGebra

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{nesp.inv.} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ -b & -c & 1 \end{pmatrix}$$

$M \, M_{nesp.inv.}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\,a & 1 & 0 \\ a\,c & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M_{inv} = \text{Invertovat}(M)$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ a\,c - b & -c & 1 \end{pmatrix}$$

$L_{inv} = \text{Invertovat}(L)$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L \, L_{inv}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M \, M_{inv}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklady k procvičení [5, s. 35]

Ověřte, že následující matice jsou inverzní:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{5}{7} & \frac{8}{7} \end{bmatrix}.$$

5 Determinant,

Determinantem čtvercové matice A rozumíme skalár (prvek tělesa T, v našem případě se jedná o reálné číslo) příslušející této matici dle níže uvedené definice. Zapisujeme $\det A$. Jak už jsme se zmínili v předchozí kapitole, pokud je determinant matice nenulový, existuje k této matici matice inverzní, takovou matici nazýváme *regulární*. Je-li determinant roven nule, pak je matice *singulární*.

Definice: Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice n-tého řádu nad tělesem T. Determinantem matice A rozumíme prvek tělesa T ve tvaru:

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} zn\pi \cdot a_{1r_1} \cdot a_{2r_2} \cdot \ldots \cdot a_{2n_2},$$

kde sčítáme přes všechny permutace π množiny $1, 2, 3, \ldots, n$. Množina těchto permutací je označena symbolem S_n. [4] [9, s. 60]

Kromě postupu výpočtu dle definice existují další postupy výpočtu determinantu přizpůsobené typu příslušné matice. Konkrétně pomocí *křížového pravidla*, které používáme pro výpočet determinantů matic typu 2×2. Dále použitím *Sarrusova pravidla* používaného u determinantů třetího řádu. Pro determinanty $n > 3$ využíváme *tzv. rozvoj determinantu*. Determinant lze vypočítat i za pomoci *Gaussovy eliminace*. Tato metoda je univerzální a hodí se nám především u determinantů vyšších řádů, kde by byl výpočet pomocí rozvoje poněkud komplikovaný. Lze také jednotlivé postupy kombinovat. Všechny výše zmíněné metody si podrobněji popíšeme.

5.1 Křížové pravidlo

Jak jsme si již uvedli, křížové pravidlo používáme při výpočtu determinantu matice 2×2. Samotný název nám napovídá, že elementy matice násobíme křížem

[4] Znaménkem $zn\pi$ permutace π rozumíme hodnotu výrazu $(-1)^k$, kde k je počet všech inverzí permutace π. Zapisujeme

$$zn\pi = (-1)^k. \text{ [9, s. 59]}$$

O permutaci více [1].

a poté součin prvků na vedlejší diagonále odečteme od prvků na diagonále hlavní.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (a \cdot d) - (b \cdot c)$$

Příklad 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (1 \cdot 4) - (2 \cdot 5) = -6$$

Příklad 2 [3, s. 42]

Vypočtěte determinanty matic:

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}, \qquad \text{b)} \quad \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\cdot\sin\varphi & r\cdot\cos\varphi \end{vmatrix}.$$

Řešení:

Ad a) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix} = [(1+\sqrt{2})\cdot(1-\sqrt{2})] - [(2-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})] =$

$$= (1-2) - (4-3) = 1 - 2 - 4 + 3 = -2.$$

Ad b) $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\cdot\sin\varphi & r\cdot\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cdot\cos^2\phi + r\cdot\sin^2\varphi = r\cdot(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r.$

5.2 Sarrusovo pravidlo

Sarrusovo pravidlo je o něco komplikovanější. Využívá se u determinantů typu 3×3. Jedná se o schéma, které nám usnadňuje výpočet determinantu. Proto nemusíme složitě odvozovat všechny permutace a kontrolovat znaménka jednotlivých členů.

Princip výpočtu je založen na přepisu dvou řádku (resp. dvou sloupců) pod determinant (resp. za determinant) a následným vynásobením prvků ležících ve třech liniích rovnoběžných s hlavní diagonálou, které spolu sečteme. To samé uděláme s elementy ležícími rovnoběžně s diagonálou vedlejší. Následně tento druhý součet odečteme od prvního:

$$\det(B) = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| =$$

$$[(a_{11}+a_{22}+a_{33})+(a_{12}+a_{23}+a_{31})+(a_{13}+a_{21}+a_{32})]-$$
$$[(a_{31}+a_{22}+a_{13})+(a_{32}+a_{23}+a_{11})+(a_{33}+a_{21}+a_{12})].$$

Příklad 3 [3, s. 42]

Určete determinant matice:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Řešení:

$$\det(B) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & 3 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 2 \end{array}\right| = (125+0+0)\text{-}(0+30+30)=65.$$

GeoGebra

$$\text{Determinant}\left(\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\right)$$

$\rightarrow$ 65

Příklad k procvičení [2, s. 105, 107]

Podle definice určete hodnotu determinantu:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$.

5.3 Rozvoj determinantu

Definice: *(Algebraický doplněk)* Nechť A je čtvercová matice řádu n. Determinant matice, která vznikne z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce nazveme subdeterminant a značíme M_{ij}. Číslo

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

nazveme *algebraickým doplňkem* prvku a_{ij}. [9, s. 66]

Definice: *(Rozvoj determinantu)* Je-li čtvercová matice řádu $n \geq 3$, pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ definujeme rozvoj matice A podle i-tého řádku jako výraz

$$a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}$$

a pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$ definujeme rozvoj matice A podle j-tého sloupce

$$a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}. \text{ [9, s. 66]}$$

Tento postup dokážeme na konkrétním příkladě.

Příklad 4 [3, s. 43]

Rozvojem podle řádku určete determinant matice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Řešení:

Uděláme rozvoj podle prvního řádku. Můžeme si samozřejmě zvolit řádek nebo sloupec podle vlastního uvážení. Zvolíme ho ovšem tak, aby výpočet byl co možná nejjednodušší. Nejdříve vytvoříme algebraický doplněk prvního prvku: subdeterminant vznikne vynecháním řádku a sloupce, ve kterém leží daný prvek. Následně subdeterminant vynásobím $(-1)^{1+1}$ a tím získáme první algebraický doplněk, který násobím daným prvkem, v tomto případě 1. To samé uděláme u elementu 2. Členy s nulami vypadnou a můžeme je proto vynechat. Nemají vliv na výslednou hodnotu determinantu.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) - 6 \cdot (-2) = -8 + 12 = 4.$$

GeoGebra

$$\text{Determinant}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\right)$$

$\rightarrow\ 4$

V ideálním případě zvolíme sloupec nebo řádek, kde se vyskytují převážně nuly. Tím se výpočet determinantu pomocí rozvoje významně urychlí. Ideální pro výpočet je, když alespoň v jednom řádku nebo sloupci je pouze jeden nenulový prvek. Do toho tvaru můžeme převést každý determinant pomocí níže uvedených úprav. Přitom je třeba respektovat vliv následujících operací na hodnotu determinantu:

1. vynásobíme-li řádek (sloupec) determinantu číslem k, bude mít nový determinant k-násobnou hodnotu oproti původnímu,
2. vyměníme-li v determinantu vzájemně dva řádky (sloupce) bude mít nový determinant opačnou hodnotu, než měl původní.

Operace, které nám hodnotu determinantu nezmění:

1. determinant matice a matice k ní transponované je stejný,
2. přičteme-li k libovolnému řádku (sloupci) libovolná p-násobek jiného řádku (sloupce), hodnota determinantu se nezmění,
3. přičteme-li k libovolnému řádku (sloupci) lineární kombinaci jiných řádků (sloupců), hodnota determinantu se nezmění.

Případy, kdy je determinant roven nule:

1. pokud determinant obsahuje v řádku (sloupci) samé nuly,
2. jsou-li v determinantu dva řádky (sloupce) stejné.

Na předešlém příkladu si názorně ukážeme, jak se nám výpočet determinantu zjednoduší, když získáme řádek (sloupec) s alespoň jedním nenulovým prvkem. Ovšem po celou dobu musíme mít na paměti pravidla, která jsou spojena s danými úpravami. Pokud bychom tyto změny nerespektovali, determinant by nabýval nesprávné hodnoty.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 = 4.$$

Příklad 5 [3, s. 43]

Pomocí elementárních úprav a rozvoje určete determinant matice:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}.$$

Řešení:

S ohledem na výše zmíněná pravidla upravíme determinant na trojúhelníkový tvar, poté vynásobíme prvky na hlavní diagonále, tím získáme hodnotu determinantu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & 2 & 12 & 56 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & 0 & 12 & 48 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 12 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10) = -120.$$

GeoGebra

$$\text{Determinant}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}\right)$$

$\rightarrow -120$

Toto jsou dva způsoby, jak vypočítat determinant $n \geq 3$.

Příklad k procvičení [2, s. 105, 109]

Vypočtěte hodnotu determinantu:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{b)}\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \text{c)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Příklad 6 [3, s. 43]

Určete determinant matice:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & d \end{vmatrix}.$$

Řešení:

Jedná se o matici $n > 3$, konkrétně 5×5. Máme tedy dvě možnosti, jak daný determinant vypočítat. Buď pomocí rozvoje, anebo užitím Gaussovy eliminace. Volba je na nás. Jakmile se však podíváme na 4. sloupec, zjistíme, že jsou zde převážně nuly. Proto je jednodušší využít metodu rozvoje než Gaussovu eliminaci.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & d \end{vmatrix} = c \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{5+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= c \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & b & 0 \end{vmatrix} + c \cdot d \cdot (-1)^1 4 + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} - (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & b & 0 \end{vmatrix} -$$

$$-(-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = c \cdot (ab+1) + cd \cdot (-a + ab + 1) + (ab+1) - a =$$

$$= -a + ab - +abc - c - acd + abcd + cd + 1.$$

GeoGebra

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & d \end{pmatrix}$$

Determinant(A)

$\rightarrow$ $a\,b\,c\,d - a\,b\,c + a\,b - a\,c\,d - a + c\,d - c + 1$

Příklad k procvičení [2, s. 109]

Vypočtěte hodnotu determinantu:

a) $\begin{vmatrix} 0 & d & 0 & 2 \\ 4 & -5 & c & 6 \\ a & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & f & a \\ g & d & k & h & m \\ 0 & 0 & e & u & n \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 & j & l \end{vmatrix}$.

Příklad 7 [5, s. 15]

Určete, které z následujících matic jsou regulární:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -6 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$.

Řešení:

Zda je matice regulární nebo singulární, můžeme ověřit dvěma způsoby:

1. Pomocí hodnosti matice; pro matici A regulární je $h(A) = n$.

2. Výpočtem determinantu; pro matici A regulární platí $\det A \neq 0$.

Vyzkoušíme si oba způsoby.

Ad a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$; $\quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7.$

Hodnost matice je rovna jejímu řádu, resp. její determinant je nenulový. Matice je regulární.

Ad b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $\quad \det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3.$

Matice je regulární.

Ad c) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 0 & 10 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\quad \det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right| = 0.$

Matice je singulární.

Ad d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; $\quad \det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right| =$
$-25.$

Matice je regulární.

Ad e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -6 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 5 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{bmatrix}$; $\quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -6 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 5 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 45 - 36 + 12 + 18 - 9 - 120 = -90.$$

Matice je regulární.

GeoGebra

$A_b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$A_c = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$A_d = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -6 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

a = Determinant(A_a)

→ 7

b = Determinant(A_b)

→ 3

c = Determinant(A_c)

→ 0

d = Determinant(A_d)

→ -25

e = Determinant(A_e)

→ -90

6 Soustava lineárních rovnic

Lineární rovnicí o n neznámých rozumíme rovnicí prvního stupně, tj. rovnici v níž se všechny neznámé vyskytují v první mocnině. Můžeme ji zapsat v tomto tvaru:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou neznámé a $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ jsou reálná čísla.

Zde se budeme věnovat řešení soustav m lineárních rovnic o n neznámých s reálnými koeficienty

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

tj. hledání všech uspořádaných $n-$tic $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, které jsou řešením všech rovnic soustavy.

Otázkou řešitelnosti soustavy se zabývá Frobeniova věta, která ve stručnosti říká to, že soustava má řešení právě tehdy, když $h(A) = h(A^*)$ a nemá řešení právě tehdy, když tato rovnost neplatí. [5] Úplné znění této věty viz [1].

Soustavy rovnic, které mají na pravé straně samé nuly, nazýváme *homogenní.* Podle Frobeniovy věty má taková soustava vždy řešení - tzv. *"triviální". Triviálním řešením* rozumíme nulový vektor tj. uspořádanou n-tici tvořenou samými nulami.

[5]Maticí A^* rozumíme matici rozšířenou. Jedná se o specifický zápis soustavy m lineárních rovnic o n neznámých:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m_1} & a_{m_2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{array}\right].$$

Příklad 1 [5, s. 4]

Určete koeficienty a, b a c tak, aby řešením soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 3 \\ ax - y + cz &= 1 \\ x + by - cz &= 2 \end{aligned}$$

bylo $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$.

Řešení:

$$\begin{aligned} a + 2b - c &= 3 \\ a - 2 - c &= 1 \\ 1 + 2b + c &= 2. \end{aligned}$$

V druhé rovnici vyjádříme a: $a = 3 + c$ a následně dosadíme do první rovnice. Dopočítáme b a poté c a a.

$$\begin{aligned} 3 + c + 2b - c &= 3 & \qquad 1 + 0 + c &= 2 & \qquad a &= 3 + c \\ 2b &= 0 & c &= 2 - 1 & a &= 3 + 1 \\ b &= 0, & c &= 1, & a &= 4. \end{aligned}$$

Na následujícím příkladu ukážeme možné způsoby řešení soustavy lineárních rovnic.

Příklad 2 [5, s. 52]

Vyřešte následující soustavu lineárních rovnic:

a) pomocí Gaussovy eliminační metody,

b) Gauss-Jordanovy eliminační metody,

c) pomocí inverzní matice.

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 6z &= 6 \\ 3x - 3y + 4z &= -1 \\ -4x + 3y - 4z &= 5. \end{aligned}$$

Řešení:

Nejprve zapíšeme **matici soustavy** A spolu s **rozšířenou maticí** A^*:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 6 \\ 3 & -3 & 4 & -1 \\ -4 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right].$$

Ad a) Jak jsme již uvedli výše, řešení pomocí Gaussovy eliminační metody spočívá ve vytváření posloupnosti navzájem ekvivalentních matic. Soustavy rovnic příslušné těmto maticím mají stejná řešení jako daná soustava. Získáváme je pomocí ekvivalentních úprav - sloupcových nebo řádkových. Úpravy provádíme do doby, než získáme matici schodovitého, tzv. Gaussova tvaru. Jak vidíme z následujícího postupu, soustava rovnic příslušná této matici je díky jejímu tvaru snadno řešitelná:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 6 \\ 3 & -3 & 4 & -1 \\ -4 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 4 & -1 \\ -4 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & 8 & 17 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Získali jsme matici požadovaného tvaru. Vidíme, že $h(A) = h(A^*)$. Podle Frobeniovy věty můžeme říci, že naše soustava má alespoň jedno řešení. Soustavu řešíme metodou dosazovací postupně od posledního řádku:

$$\begin{array}{rrr} -z = 1 & 3y - 5z = -10 & x - 2y + 3z = 3 \\ z = -1, & 3y - 5 \cdot (-1) = -10 & x - 2 \cdot (-5) + 3 \cdot (-1) = 3 \\ & y = -5, & x = -4. \end{array}$$

Řešením soustavy je uspořádaná trojice: $X = [-4, -5, -1]$.

Ad b) V případě, že je matice A regulární, lze pokračovat v ekvivalentních úpravách až do chvíle, kdy je v levé části matice A^* jednotková matice. Potom na pravé straně rozšířené matice A^* získáváme rovnou hodnoty řešení pro jednotlivé neznámé. Tento postup se nazývá Gauss-Jordanova eliminační metoda:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 6 \\ 3 & -3 & 4 & -1 \\ -4 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 4 & -1 \\ -4 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & 8 & 17 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Jak můžeme vidět, řešení je totožné s výsledkem v části a).

Ad c) Aby mělo smysl počítat soustavu rovnic pomocí inverzní matice, je nutné, aby matice byla regulární, tzn. $\det A \neq 0$ nebo $h(A) = n$. Tato podmínka je splněna a potvrzena v části a). Lineární soustavu rovnic můžeme zapsat v maticovém tvaru: $A \cdot X = B$. Definujeme tedy tři matice - A pro levou stranu rovnice, B pro pravou a X pro neznámé:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

K tomu abychom mohli vyřešit maticovou rovnici $A \cdot X = B$ musíme najít inverzní matici k matici A. Tu můžeme získat dvěma způsoby. Buď pomocí Gauss-Jordanovy eliminace, anebo adjungované matice.

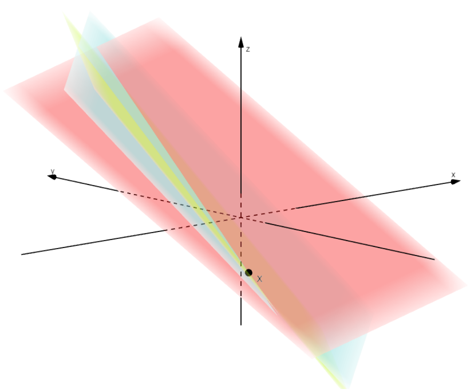
Pro výpočet inverzní matice použijeme *Gauss-Jordanovu eliminaci*:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -5 & -3 \end{array}\right].$$

Jakmile známe inverzní matici, můžeme vyřešit rovnici.

$$
\begin{aligned}
A \cdot X &= B \\
X &= A^{-1} \cdot B \\
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -8 & -5 \\ \frac{3}{2} & -5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Bod X v geometrické interpretaci představíme jako společný bod všech tří rovin.



Obrázek 3: Grafické znázornění bodu X

Viděli jsme, že všechny tři použité způsoby vedly k řešení dané úlohy, který z nich zvolíme závisí na konkrétní situaci.

Příklad 3 [5, s. 66]

Máme rozšířenou matici lineárního systému:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a & 2 & a & b \\ b & 2 & a & a \end{array}\right].$$

Pro jaké a, b má soustava

a) jedno řešení,

b) žádné řešení,

c) nekonečně mnoho řešení?

Řešení: [6]

Ze všeho nejdříve rozšířenou matici převedeme do Gaussova tvaru s podmínkou, že a, $b \neq 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a & 2 & a & b \\ b & 2 & a & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ 0 & 2 & a-b & b-2 \\ 0 & 2 & \frac{a^2-b^2}{a} & \frac{a^2-2b}{a} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ 0 & 2 & a-b & b-2 \\ 0 & 0 & \frac{-b^2+ab}{a} & \frac{a^2+2a-ab-2b}{a} \end{array}\right].$$

Ad a) Má-li mít soustava právě jedno řešení, musí platit: $h(A) = h(A^*) = 3$. Proto:

$$a \neq 0 \quad \wedge \quad -b^2 + ab \neq 0,$$

$$-b^2 + ab \neq 0$$
$$b \cdot (a-b) \neq 0$$
$$b \neq 0 \quad \wedge \quad (a-b) \neq 0.$$

[6] Frobeniova věta poskytuje pouze informaci o tom, zda má soustava řešení či nikoliv. Můžeme ji však rozšířit o kritérium toho, zda má jediné řešení či nekonečně mnoho:

a) $h(A) = h(A^*) = n$ - soustava má jediné řešení (je regulární). Roviny, přímky mají společný jeden bod,

b) $h(A) = h(A^*) < n$ - soustava má nekonečně mnoho řešení. Roviny, přímky mají společnou přímku,

c) $h(A) < h(A^*)$ - soustava nemá řešení. Roviny, přímky se neprotínají.

Za těchto podmínek je soustava regulární a má pouze jedno řešení, které se rovná:

$$\begin{aligned}
\frac{-b^2+ab}{a}\cdot z &= \frac{a^2+2a-ab-2b}{a}\\
z &= \frac{a^2+2a-ab-2b}{b\cdot(a-b)}\\
z &= \frac{a\cdot(a-b)}{b\cdot(a-b)}+\frac{2\cdot(a-b)}{b\cdot(a-b)}\\
z &= \frac{a+2}{b},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2y+(a-b)-\frac{a+2}{b} &= b-2\\
2y+\frac{a^2-ab+2a-2b}{b} &= b-2\\
2y &= \frac{b^2-2b-a^2+ab-2a+2b}{b}\\
y &= \frac{a^2-2a+b^2+ab}{2b},
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
ax+\frac{a+2}{b}\cdot b &= 2\\
ax &= 2-a-2\\
x &= -1.
\end{aligned}$$

Ad b) Pokud by soustava neměla žádné řešení, podle Frobeniova pravidla, musí platit: $h(A)\neq h(A^*)$. Podmínky řešení jsou:

$$a\neq 0 \quad \wedge \quad b=0 \quad \vee \quad (a-b)=0 \quad \wedge \quad \frac{a^2+2a-ab-2b}{a}\neq 0.$$

Ad c) Má-li mít soustava nekonečně mnoho řešení, musí dle Frobeniovy věty být $h(A)=h(A^*)$, přitom ale tyto hodnosti musí být menší než 3, tj. $h(A)=\ h(A^*)<\ 3$. Pro naší úlohu tak dostáváme podmínky:

$$a\neq 0 \quad \wedge \quad b=0 \quad \vee \quad (a-b)=0 \quad \wedge \quad \frac{a^2+2a-ab-2b}{a}=0,$$

potom:

$$z=t; t\in R, \qquad
\begin{aligned}
2y+(a-b)t &= b-2\\
y &= \frac{b-2}{2}-\frac{a-b}{2}t,
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
ax+bt &= 2\\
ax &= 2-bt\\
x &= \frac{2-bt}{a}.
\end{aligned}$$

Příklad 4 [2, s. 91]

Řešte v R danou soustavu homogenních rovnic:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 0, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 &= 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_5 &= 0, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 &= 0, \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Tento příklad je věnován řešení homogenních soustav. I v tomto případě se odkazujeme na Frobeniovu větu. Platí-li $h(A) = n$, soustava má pouze triviální řešení. Pokud je matice singulární, tedy $h(A) < n$, soustava má nekonečně mnoho řešení a triviální je pouze jedno z nich. [8]

Řešení:

Ad a) Provedeme Gaussovu eliminaci matice dané soustavy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Soustavu zapíšeme:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0 \\ -x_2 - 6x_3 + 5x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Získáváme dvě rovnice o čtyřech neznámých, proto dvě proměnné nahradíme parametrem:

$$x_4 = t;\ t \in R, \qquad x_3 = s;\ s \in R, \qquad x_2 = -6s + 5t, \qquad x_1 = 8s - 7t.$$

Množina řešení dané homogenní soustavy:

$$K = [8s - 7t, -6s + 5t, s, t];\ t, s \in R.$$

Množina K je podprostorem vektorového prostoru R^4. Můžeme ji zapsat jako lineární obal dvou nezávislých vektorů:

$$K = [(-7, 5, 0, 1), (8, -6, 1, 0] \subseteq R^4.$$

GeoGebra

$$\mathrm{A_a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}$$

SchodovityTvar(A$_a$)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ad b)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix},$$

$$x_5 = t; t \in R, \quad x_4 = s; s \in R, \quad x_3 = s + 3t, \quad x_2 = v, v \in R, \quad x_1 = -\frac{2v}{3} - \frac{4s}{3} - \frac{8t}{3}.$$

Množina řešení dané homogenní soustavy:

$$K = [-\frac{2v}{3} - \frac{4s}{3} - \frac{8t}{3}, v, s + 3t, s, t]; t, s, v \in R,$$

$$K = [(-\frac{2}{3}, 1, 0, 0, 0), (-\frac{4}{3}, 0, 1, 1, 0), (-\frac{8}{3}, 0, 3, 0, 1)] \subseteq R^5.$$

GeoGebra

$$A_b = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

SchodovityTvar(A_b)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ad c)

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 9 & 6 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -35 \end{bmatrix}.$$

Pro matici platí $h(A) = n$. Proto má pouze triviální řešení: $\vec{r} = (0, 0, 0)$, nemá bázi.

GeoGebra

$$A_c = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

SchodovityTvar(A_c)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ad d)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 17 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$x_5 = t; t \in R, \qquad x_4 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_1 = 0.$$

$$K = [0,0,0,t,t]; t \in R \quad \to \quad K = [(0,0,0,1,1)].$$

GeoGebra

$$A_d = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

SchodovityTvar(A_d)

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Příklad k procvičení [6, s. 104]

1. Soustavu lineárních rovnic vyjádříme pomocí maticového zápisu tak, aby se rovnice rovnala: $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ s koeficienty: $a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\quad a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$.
2. Vyřešte systém lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla.
3. Vyjádřete matici v Gaussově tvaru.
4. Vyřešte soustavu pomocí Gaussovi eliminace a zpětné substituce.
5. Najděte inverzní matici k matici soustavy.

Příklad k procvičení [2, s. 93]

Řešte v R soustavu lineárních rovnic danou maticí:

a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 3 & -2 & -12 \\ 1 & 2 & 9 & -4 & 9 \\ 3 & -3 & 0 & -5 & -20 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right]$, $\qquad$ b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 12 & -16 & 24 & 29 \\ 27 & 24 & -32 & 47 & 55 \\ 50 & 51 & -68 & 95 & 115 \\ 31 & 21 & -28 & 46 & 50 \end{array}\right]$.

Příklad k procvičení [2, s. 93]

Řešte v R homogenní soustavu lineárních rovnic danou maticí:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 10 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 10 & 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

6.1 Cramerovo pravidlo

Pro řešení regulárních soustav můžeme použít tzv. Cramerovo pravidlo: *Nechť $A \cdot x = b$ je soustava lineárních rovnic, kde A je regulární matice stupně n. Pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$ označíme A_j matici, která vznikne z matice A nahrazením j-tého sloupce sloupcovým vektorem b pravých stran rovnic dané soustavy. Následně pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$ platí:*

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}.[8]$$

Pokusme se spočítat *Příklad 2, str. 42* s využitím Cramerova pravidla a ukázat, že řešení bude totožné s výsledky, které nám vyšlo pomocí jiných metod.

Řešení:

Nejdříve musíme spočítat determinant matice A:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -2.$$

Poté nahradíme první sloupec pravou stranou a spočítáme determinant nově vzniklé matice:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 6 & -4 & 6 \\ -1 & -3 & 4 \\ 5 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 8.$$

Dále nahradíme pravou stranou druhý sloupec a opět spočítáme determinant:

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \\ -4 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 10.$$

To samé provedeme s třetím sloupcem:

$$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & -3 & -1 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2.$$

Získali jsme čtyři různé determinanty. Determinant $A \neq 0$, řešení soustavy můžeme napsat ve tvaru:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{8}{-2} = -4, \quad y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{10}{-2} = -5, \quad z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Příklad 5 [5, s. 66]

Rozhodněte, která z následujících soustav má:

1. jedno řešení,
2. nekonečně mnoho řešení,
3. žádné řešení.

a)

$$\begin{aligned} x - 2y \quad &= 1 \\ 3x + 2y \quad &= -3, \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x + y - 2z \quad &= -3 \\ 2x - y + 3z \quad &= 7 \\ x - 2y + 5z \quad &= 1, \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x - 2y + 2z - w \quad &= 3 \\ 3x + y + 6z + 11w \quad &= 16 \\ 2x - y + 4z + w \quad &= 9, \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z \quad &= 4 \\ x + 3y - 4z \quad &= -3 \\ 2x - 3y + 5z \quad &= 7 \\ x - 8y + 9z \quad &= 10. \end{aligned}$$

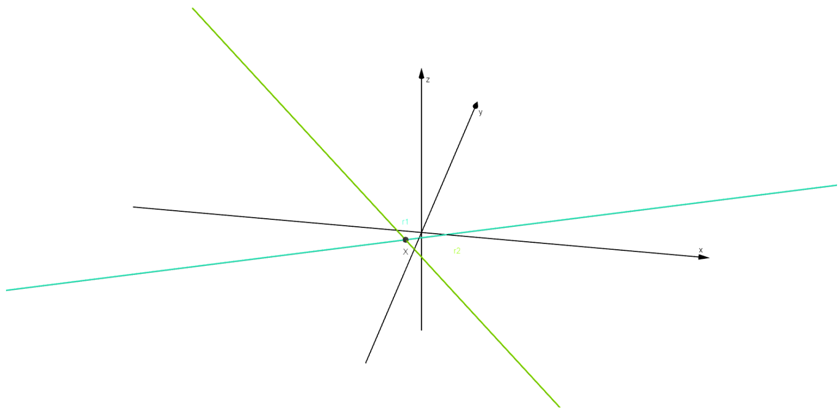
Řešení:

Ad a)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 8 & -6 \end{array}\right],$$

$$x_2 = -\frac{3}{4}, \qquad x_1 = \frac{1}{2}.$$

$h(A) = h(A*) = n$ soustava má jedno řešení.

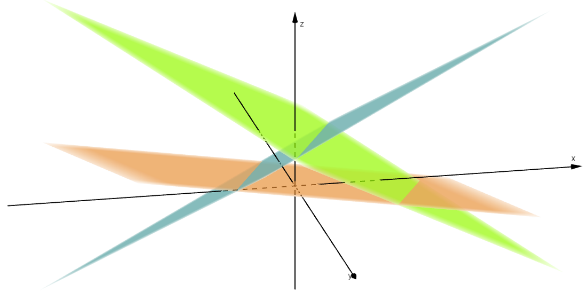


Obrázek 4: Grafické znázornění a)

Ad b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 7 & 13 \\ 0 & -3 & 7 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 7 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right].$$

$h(A) < h(A*)$ podle Frobeniovy věty soustava nemá řešení.



Obrázek 5: Grafické znázornění řešení b)

Ad c)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 11 & 16 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 14 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right],$$

$$x_4 = 0, \qquad x_3 = t; t \in R, \qquad x_2 = 1, \qquad x_1 = 5 - 2t.$$

Platí $h(A) = h(A*) < n$. Proto má soustava nekonečně mnoho řešení.

GeoGebra

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 11 & 16 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

SchodovityTvar(A)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

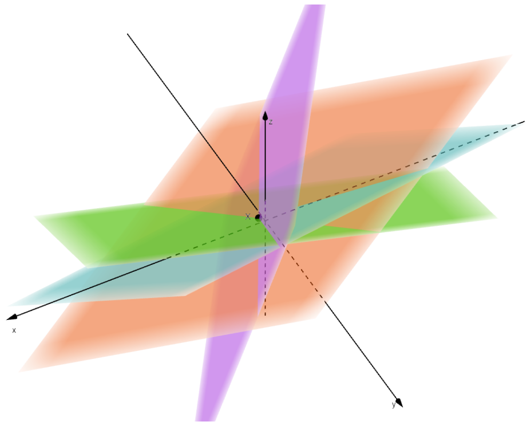
Ad d)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -4 & -3 \\ 2 & -3 & 5 & 7 \\ 1 & -8 & 9 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & -11 & 13 & 13 \\ 0 & -9 & 13 & 13 \\ 0 & -11 & 13 & 13 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & 26 \end{array}\right],$$

$$x_3 = 1, \qquad x_2 = 0, \qquad x_1 = 1.$$

Nacházíme se v prostoru dimenzi 3. Jedná se o 4 různoběžné roviny, které mají jeden společný bod.



Obrázek 6: Grafické znázornění řešení d)

Příklad 6 [7, s. 313]

Následující soustavy vyřešte pomocí Cramerova pravidla:

a)
$$\begin{aligned} x+y+z &= 6\\ 2x-y+2z &= 6\\ 3x+2y-z &= 4, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x-y+z &= -10\\ 2x+3y-2z &= -3\\ x-5y+3z &= -8, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x-3z &= -15\\ x-2y &= 2\\ y+z &= 4. \end{aligned}$$

Řešení:

Již víme, že Cramerovo pravidlo můžeme použít pouze za předpokladu, že daná soustava je regulární. Ukáže se, že tuto podmínku splňují všechny tři zadané soustavy.

Ad a) Nejdříve vypočítáme determinant matice soustavy pomocí Sarrusova pravidla.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 12.$$

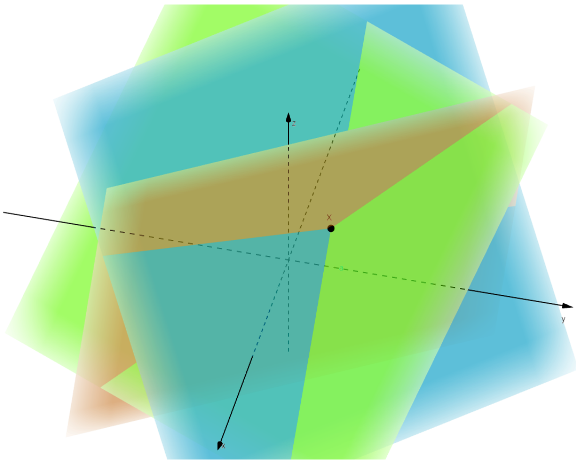
Determinant matice soustavy je různý od nuly. V tom případě lze pokračovat v dalších výpočtech. Nahradíme postupně první, druhý a třetí sloupec maticí $\begin{bmatrix} 6\\ 6\\ 4 \end{bmatrix}$ a vypočítáme nově vzniklé determinanty:

$$\det D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 12, \qquad \det D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 24,$$

$$\det D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 36.$$

Pomocí dříve zmíněného algoritmu dopočítáme hledané neznámé:

$$x = \frac{\det D_x}{\det D} = 1, \qquad y = \frac{\det D_y}{\det D} = 2, \qquad z = \frac{\det D_z}{\det D} = 3.$$



Obrázek 7: Grafické znázornění řešení a)

Analogicky postupujeme u soustav rovnic b) a c).

Ad b)

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -8.$$

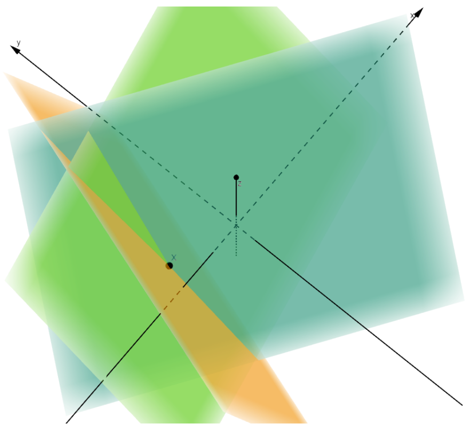
Nahradíme postupně první, druhý a třetí sloupec maticí $\begin{bmatrix} -10 \\ -3 \\ -8 \end{bmatrix}$ a vypočítáme nově vzniklé determinanty:

$$\det D_x = \begin{vmatrix} -10 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ -8 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 24, \qquad \det D_y = \begin{vmatrix} 3 & -10 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -8 & 3 \end{vmatrix} = -8,$$

$$\det D_y = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -10 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -5 & -8 \end{vmatrix} = 0.$$

Dopočítáme hledané neznámé:

$$x = \frac{\det D_x}{\det D} = -3, \qquad y = \frac{\det D_y}{\det D} = 1, \qquad z = \frac{\det D_z}{\det D} = 0.$$



Obrázek 8: Grafické znázornění řešení b)

Ad c)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

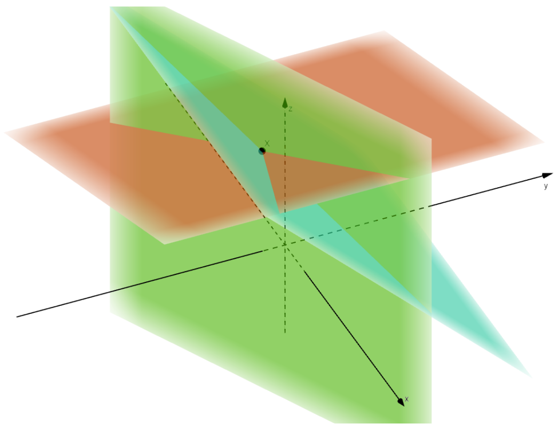
Nahradíme postupně první, druhý a třetí sloupec maticí $\begin{bmatrix} -15 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ a vypočítáme nově vzniklé determinanty:

$$\det D_x = \begin{vmatrix} -15 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \det D_y = \begin{vmatrix} 1 & -15 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$\det D_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -15 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -25.$$

Dopočítáme hledané neznámé:

$$x = \frac{\det D_x}{\det D} = 0, \qquad y = \frac{\det D_y}{\det D} = -1, \qquad z = \frac{\det D_z}{\det D} = 5.$$



Obrázek 9: Grafické řešení příkaldu c)

Příklad k procvičení [1, s. 170]

Užitím Cramerova pravidla řešte soustavu:

a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 &= -4, \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 &= -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 &= 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 5. \end{aligned}$$

7 Lineární kombinace, lineární závislost a nezávislost

Abychom si mohli vysvětlit, jak poznáme, zda jsou vektory lineárně závislé či nikoliv, musíme se nejdříve seznámit s klíčovým pojmem definice závislosti a nezávislosti. Tím je **lineární kombinace vektorů.** Jednoduše řečeno, lineární kombinace je operace, v níž se kombinuje násobení vektoru skalárem se sčítáním vektorů. Přesněji viz následující definice.

Definice: (*Lineární kombinace*) Nechť $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ jsou prvky vektorového prostoru V, potom součet

$$c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \ldots + c_k\vec{v_k} = \sum_{i=1}^{k} c_i\vec{v_i},$$

kde koeficienty $c_1, c_2, \ldots, c_k$ jsou libovolné skaláry, se nazývá *lineární kombinací* vektorů $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$. [5, s. 89]

Pokud jsou všechny koeficienty rovny nule, pak se lineární kombinace nazývá **triviální**. V opačném případě se nazývá **netriviální**. [8]

Množinou všech lineárních kombinací daných vektorů $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ je tzv. **lineární obal** (angl. *span*) množiny těchto vektorů. Zapisujeme $[\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}]$, případně $[W]$, pokud zavedeme označení $W = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}\}$, $W \subseteq V$. Například lineárním obalem jednoho vektoru je množina všech vektorů téhož směru. Lineárním obalem tří lineárně nezávislých vektorů je třírozměrný prostor. Obecně lze říci, že každý lineární obal je vektorovým prostorem. [8]

Příklad 1 [5, s. 93]

Napište vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

Hledáme hodnoty koeficientů x, y lineární kombinace $x\vec{v_1} + y\vec{v_2}$, která je rovna $\vec{u}$, tj. řešíme rovnici $x\vec{v_1} + y\vec{v_2} = \vec{u}$. Není přitom zaručeno, že řešení existuje. Vektor $\vec{u}$ nemusí totiž patřit do lineárního obalu vektorů $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$. To se ale ukáže při řešení soustavy lineárních rovnic, kterou dostaneme rozepsáním rovnice

$$x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Řešíme tedy soustavu:

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= -1 \\ -1x - 4y &= 2 \\ 2x + y &= 3. \end{aligned}$$

Získali jsme soustavu tří rovnic o dvou neznámých. Pro vyřešení využijeme Gaussovu eliminaci:

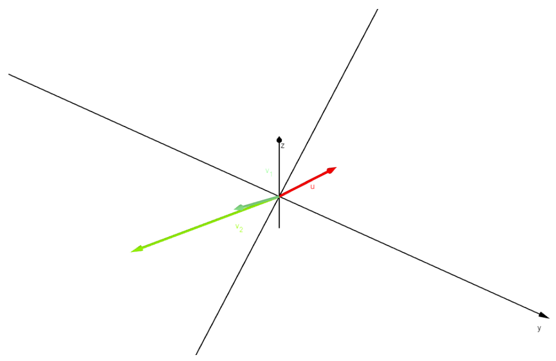
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -7 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right],$$

$$y = -1, \qquad x = 2.$$

Dosadíme do rovnice a získáme zápis lineární kombinace těchto vektorů:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že vektor $\vec{u}$ patří do lineárního obalu množiny vektorů. Geometricky to můžeme interpretovat tak, že vektory leží v jedné rovině, jak vidíme na obrázku.



Obrázek 10: Grafické znázornění vektorů v prostoru

Příklad 2 [2, s. 42]

Pro kterou hodnotu parametru b je vektor $\vec{u} = (7, -2, b)$ lineární kombinací vektorů $\vec{u_1} = (2, 3, 5)$, $\vec{u_2} = (1, -6, 1)$, $\vec{u_3} = (3, 7, 8)$.

Řešení:

To, že je vektor $\vec{u}$ lineární kombinací daných vektorů, zapíšeme takto:

$$\vec{u} = x\vec{u_1} + y\vec{u_2} + z\vec{u_3}.$$

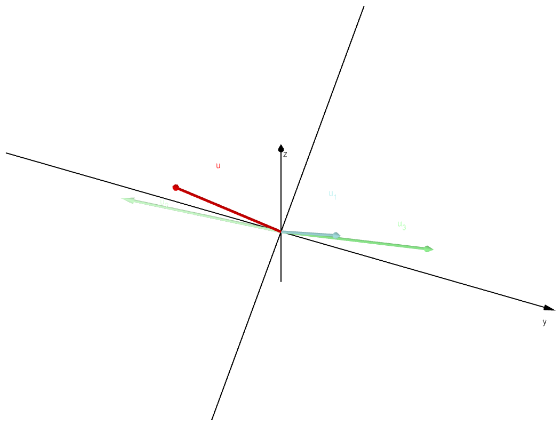
Jak víme z řešení předchozího příkladu, tuto rovnici můžeme rozepsat do podoby soustavy lineárních rovnic, kterou potom řešíme Gaussovou eliminací:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & -6 & 7 & -2 \\ 5 & 1 & 8 & b \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -15 & 5 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & b-15 \end{array}\right].$$

Aby soustava měla řešení, z Frobeniovy věty vyplývá, že poslední řádek musí být roven nule, tj.

$$b - 15 = 0$$
$$b = 15.$$

Z matice v Gaussově tvaru je zřejmé, že lineární obal vektorů $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ je generován pouze dvěma vektory, tzn. po dosazení 15 za b leží všechny 4 vektory v jedné rovině.



Obrázek 11: Znázornění vektorů v prostoru

Příklad k procvičení [2, s. 42]

Jsou dány vektory $\vec{u_1} = (1, 0, 1)$, $\vec{u_2} = (2, 1, 1)$. Ověřte, zda vektor $\vec{u} = (0, -1, 5)$ je jejich lineární kombinací, tj. zda vektor $\vec{u}$ leží ve vektorovém prostoru $V = [\vec{u_1}, \vec{u_2}]$.

Příklad 3 [5, s. 93]

Rozhodněte, zda

a) vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ náleží do lineárního obalu vektorů $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

b) vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ náleží do lineárního obalu vektorů $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

c) vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ náleží do lineárního obalu vektorů $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

Následující příklad budeme řešit stejně jako *Příklad 1, str. 60*. Proto rovnou začneme hledat koeficienty lineární kombinace pomocí Gaussovy eliminace.

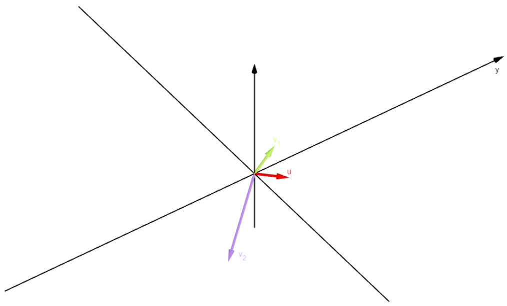
Ad a)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$y = -3, \qquad\qquad x = 1.$$

Vektor $\vec{u}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{v_1}$ a $\vec{v_2}$. Zapíšeme:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$



Obrázek 12: Znázornění lineárního obalu vektorů v_1, v_2

Ad b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{array}\right],$$

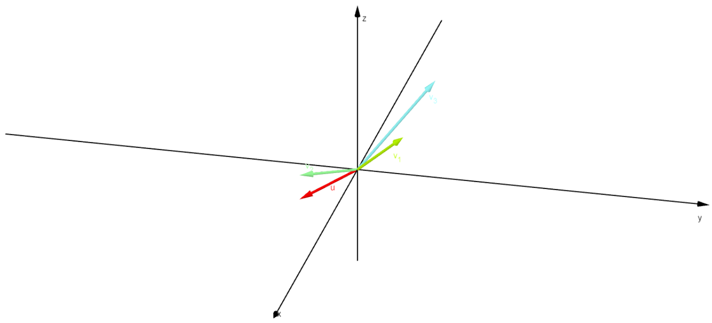
$$z = -\frac{2}{5}, \qquad -4y - \frac{6}{5} = -4 \qquad x = \frac{3}{10}.$$

$$-4y = -4 + \frac{6}{5}$$

$$y = \frac{7}{10},$$

Zápis lineární kombinace:

$$\frac{3}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{7}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



Obrázek 13: Znázornění lineárního obalu vektorů v_1, v_2, v_3

Ad c)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -11 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{10} \end{array}\right].$$

Vektor není lineární kombinací vektorů $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ a $\vec{v_3}$.

GeoGebra

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

SchodovityTvar(A)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teď, když už víme, co je lineární kombinace vektorů, můžeme si vysvětlit, co je *lineární závislost/nezávislost:*

Definice: (*Lineární závislost/ nezávislost*) Vektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$, kde $n > 1$ z vektorového prostoru V nad tělesem T jsou *lineárně závislé* právě tehdy, když aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních. Pokud tomu tak není, vektory se nazývají *lineárně nezávislé.* [8, str. 32]

Výše zmíněnou definici si podrobněji ilustrujeme na následujících příkladech. Ukážeme si, jak se pro určování lineární závislosti a nezávislosti dá využít hodnost matice.

Příklad 4 [5, s. 99]

a) Ukažte, že vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ jsou lineárně nezávislé.

b) Který z následujících vektorů patří do jejich lineárního obalu:
i) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, iii) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, iv) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

c) Předpokládejme, že $\vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ leží v jejich lineárním obalu. Jaké podmínky musí a, b, c, d splňovat?

Řešení:

Ad a) Kdyby byly vektory lineárně závislé, pak alespoň jeden z vektorů $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ a $\vec{v_4}$ lze zapsat jako lineární kombinace vektorů ostatních:

$$\vec{v_1} = a\vec{v_2} + b\vec{v_3}, \qquad \vec{v_2} = c\vec{v_1} + d\vec{v_3}, \qquad \vec{v_3} = e\vec{v_1} + f\vec{v_2}.$$

Koeficienty $a, b, c, d, e, f \in R$. Rovnice převedeme na homogenní tvar:

$$\vec{v_1} - a\vec{v_2} - b\vec{v_3} = \vec{o}, \qquad \vec{v_2} - c\vec{v_1} + d\vec{v_3} = \vec{o}, \qquad \vec{v_3} - e\vec{v_1} - f\vec{v_2} = \vec{o}.$$

Nemusíme řešit tyto tři rovnice zvlášť. Převedeme je do jednoho společného tvaru:

$$x\vec{v_1} + y\vec{v_2} + z\vec{v_3} = \vec{o},$$

kde $x, y, z \in R$. Do rovnice dosadíme vektory:

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A získáváme soustavu homogenních rovnic s maticí:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rovnici vyřešíme pomocí Gaussovy eliminace:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim ... \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že platí $h(A) = n$, kde n je počet uvažovaných vektorů, tj. počet neznámých.

Homogenní soustava rovnic má proto pouze *triviální řešení*: $x = y = z = 0$. Vektory jsou *lineárně nezávislé*. Pokud by však hodnost matice byla menší než počet daných vektorů, tj. počet neznámých, homogenní soustava rovnic by měla nekonečně mnoho řešení, dané vektory by potom byly *lineárně závislé*. Jak vidíme záleží na vztahu hodnosti příslušné matice a počtu daných vektorů. Protože hodnot matice je stejná jako hodnost matice k ní transponované, tak nezáleží, zda vektory napíšeme jako sloupce či řádky příslušné matice.

GeoGebra

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hodnost(A)

$\rightarrow$ 3

Ad b)

i.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

ii.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

iii.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right],$$

iv.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Všechny vektory kromě vektoru $(1, 0, 0, 0)^T$ leží v lineárním obalu zadaných vektorů.

Ad c) Aby $\vec{b}$ patřil do lineárního obalu vektorů, musí platit:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$a = x + y, \qquad b = x + z, \qquad c = 2x, \qquad d = x.$$

GeoGebra

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

SchodovityTvar(A_i)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

SchodovityTvar(A_{ii})

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{iii} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{iv} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

SchodovityTvar(A_{iv})

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 5 [1, s. 118]

Rozhodněte, zda následující vektory z aritmetického vektorového prostoru R^3 nad R jsou lineárně závislé nebo nezávislé:

a) $\vec{u} = (3, 2, 7)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$, $\vec{w} = (2, 0, 3)$,

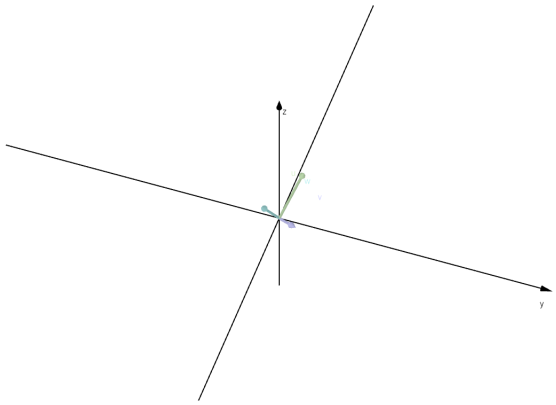
b) $\vec{u} = (3, 2, 0)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$, $\vec{w} = (5, 4, 2)$,

c) $\vec{u} = (3, -8, 1)$, $\vec{v} = (-6, 16, -2)$.

Řešení:

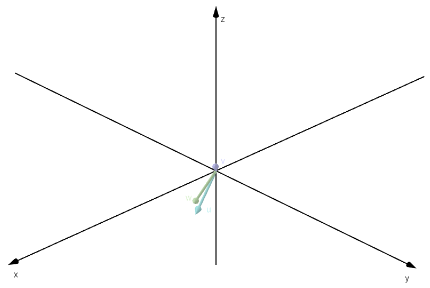
Řešíme analogicky jako *Příklad 4, str. 66*.

Ad a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$; vektory jsou lineárně nezávislé.



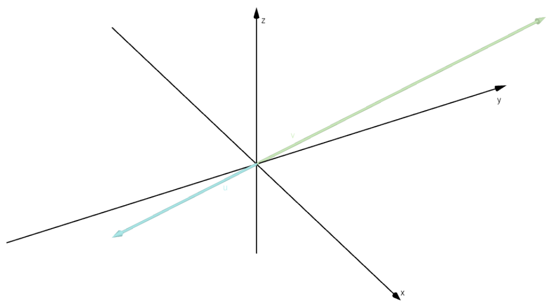
Obrázek 14: Grafické znázornění vektorů a)

Ad b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$; vektory jsou lineárně závislé.



Obrázek 15: Grafické znázornění vektorů b)

Ad c) $\begin{pmatrix} 3 & -8 & 1 \\ -6 & 16 & -2 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 3 & -8 & 1 \end{pmatrix}$; vektory jsou lineárně závislé.



Obrázek 16: Grafické znázornění vektorů c)

Příklad 6 [1, s. 118]

Určete reálné číslo b tak, aby vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ z aritmetického prostoru R^3 nad R byly lineárně závislé.

a) $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 1, 4)$, $\vec{w} = (b, 4, 11)$,

b) $\vec{u} = (-6, b, 5)$, $\vec{v} = (-2, 1, 3)$, $\vec{w} = (2, 3, -1)$.

Řešení:

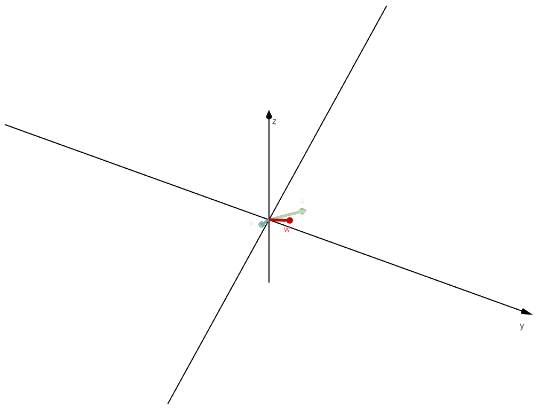
Tento příklad je obdobný jako *Příklad 2, str. 62.*V případě, že jsou vektory lineárně závislé, platí $h(A) < n$.

Ad a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 11 \end{pmatrix} \sim ... \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -b+7 \end{pmatrix}.$$

Musí platit:

$$-b + 7 = 0$$
$$b = 7.$$



Obrázek 17: Grafické znázornění závislosti vektorů a)

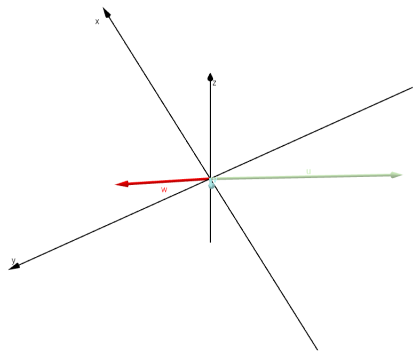
Ad b)

$$\begin{pmatrix} -6 & b & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} -6 & b & 5 \\ 0 & \frac{-b+3}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2b+10}{b-3} \end{pmatrix}.$$

Musí platit:

$$b \neq 3 \quad \wedge \quad 2b + 10 = 0,$$

$$\frac{2b+10}{3-b} = 0$$
$$b = -5.$$



Obrázek 18: Grafické znázornění závislosti vektorů a)

Příklad 7 [5, s. 99]

a) Ukažte, že vektory

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

jsou lineárně nezávislé.

b) Ukažte, že vektory generují lineární obal vektorového prostoru R^4.

c) Napište vektor $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ jako jejich lineární kombinaci.

Řešení:

Ad a)

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & -2 & -1 & -1\\0 & 0 & -2 & -2\\0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}.$$

Pro hodnost matice platí $h(A) = n$, vektory jsou lineárně nezávislé.

Ad b) Jak jsme se již dříve zmiňovali, lineární obal je množina všech lineárních kombinací množiny vektorů daného prostoru. Proto musíme zjistit, zda se každý z vektorů dá vyjádřit jako lineární kombinace ostatních:

$$k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Soustavu vyřešíme Gaussovou eliminací:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & -1 & -1 & y \\ 1 & -1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & -1 & w \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -x+z \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -x+y \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \frac{2w-x+y}{2} \end{array}\right].$$

Podle Frobeniovy věty má soustava pouze jedno řešení. Hodnost matice je 4 (tj. rovnou dimenzi vektorového prostoru R^4). Podmínka je splněna, tedy můžeme prohlásit, že vektory generují lineární obal vektorového prostoru R^4.

Ad c) Opět budeme vycházet z definice. Musí platit:

$$\vec{x} = x \cdot (1,1,1,0) + y \cdot (1,1,-1,0) + z \cdot (1,-1,0,1) + w \cdot (1,-1,0,-1).$$

Vycházíme ze stejné analýzy jako v *Příkladu 1, str. 60*. Pro souřadnice $\vec{x}$ platí:

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 1 \\ x + y - z - w &= 0 \\ x - y &= 0 \\ z - w &= 1. \end{aligned}$$

Získáváme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých, které vyřešíme pomocí matice a elementárních úprav:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right],$$

$$w = -\frac{1}{4}, \qquad z = \frac{3}{4}, \qquad y = \frac{1}{4}, \qquad x = \frac{1}{4}.$$

$$\vec{x} = \frac{1}{4} \cdot (1,1,1,0) + \frac{1}{4} \cdot (1,1,-1,0) + \frac{3}{4} \cdot (1,-1,0,1) - \frac{1}{4} \cdot (1,-1,0,-1).$$

GeoGebra

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

SchodovityTvar(A)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{A}_{\mathsf{lin.kom}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

SchodovityTvar($\mathsf{A}_{\mathsf{lin.kom}}$)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

Příklad k procvičení: [5, s. 99]

Rozhodněte, zda jsou vektory lineárně závislé nebo nezávislé:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$

b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$

8 Báze a dimenze vektorového prostoru:

Definice: (*Báze vektorového prostoru*) Báze vektorového prostoru V je konečná množina vektorů $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n} \in V$, která

1. je množinou generátorů prostoru V
2. a zároveň je **lineárně nezávislá**. [5]

Definice: (*Dimenze vektorového prostoru*) Řekneme, že vektorový prostor V nad tělesem T má konečnou dimenzi, jestliže ve V existuje konečná množina generátorů V. **Dimenzí** vektorového prostoru V rozumíme počet prvků jeho libovolné báze (tj. jeho systémů generátorů tvořeného lineárně nezávislými vektory). Značíme

$$dimV = n \text{ nebo } V_n. \text{ [8, s. 45]}$$

Pro vektorový prostor dimenze n platí:

(a) každá množina vektorů, jejíž počet prvků je větší než n, je *lineárně závislá*,

(b) žádná množina vektorů, jejíž počet prvků je menší než n, není systémem generátorů V,

(c) každá báze V je systémem generátorů V,

(d) vektory tvoří bázi (nějakého vektorového podprostoru) právě tehdy, jsou-li lineárně nezávislé. [5]

Příklad 1 [5, s. 105]

Rozhodněte, které z následujících množin vektorů tvoří bázi vektorového prostoru R^3:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},$ b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix},$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

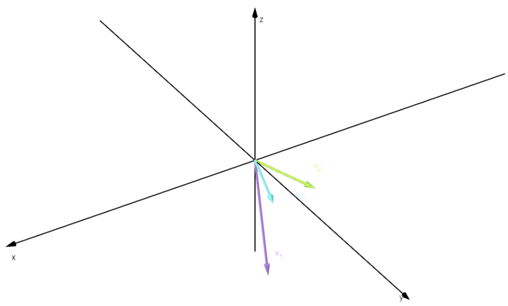
Řešení:

Ad a) Na první pohled vidíme, že vektory nejsou bází vektorového prostoru R^3. Aby vektory byly bází prostoru dimenze 3, musely by být tři a současně být nezávislé.

Ad b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Vektory jsou lineárně nezávislé. Jejich lineární kombinací jsme schopni vygenerovat celý prostor. Proto můžeme říct, že tvoří bázi vektorového prostoru.



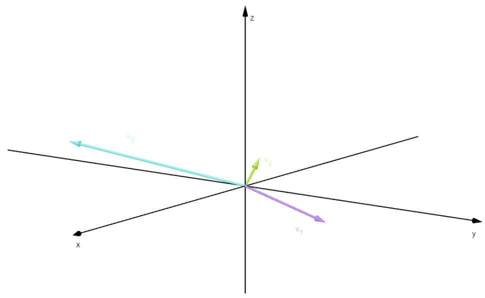
Obrázek 19: Grafické znázornění nezávislosti vektorů b)

Ad c)

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vektory jsou lineárně závislé, netvoří bázi R^3.

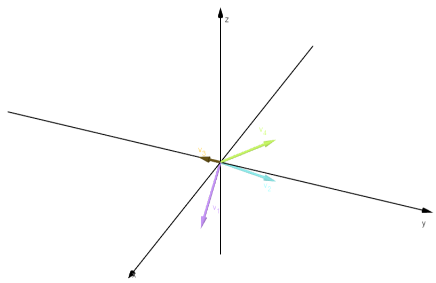
Ad d)



Obrázek 20: Grafické znázornění závislosti vektorů c)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Na první pohled vektory netvoří bázi. Čtyři třísložkové vektory jsou vždy závislé.



Obrázek 21: Grafické znázornění nezávislosti vektorů d)

Příklad 2 [5, s. 105]

Máme vektory

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_4} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Rozhodněte, zda daná množina vektorů $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}$ generuje vektorový prostor R^3?

b) Zjistěte, zda jsou dané vektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}$ lineárně závislé nebo nezávislé? Proč?

c) Tvoří daná množina vektorů $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}$ bázi vektorového prostoru R^3? Proč? Pokud ne, je možné zvolit podmnožinu výše zmíněných vektorů takovou, která by bází byla?

d) Urči dimenzi lineárního obalu vektorů $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}$. Své tvrzení odůvodni.

Řešení:

Ad a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Hodnost matice je 2, tj. dimenze vektorového podprostoru generovaného danými vektory je 2. Daná množina vektorů proto není systémem generátorů vektorová prostor R^3.

Ad b) Maximální možný počet nezávislých uspořádaných trojic je 3. Pokud jich je více jsou lineárně závislé.

Ad c) Z částí a) a b) můžeme vyvodit, že vektory netvoří bázi vektorového prostoru R^3. Z hodnosti matice vidíme, že jsou dva vektory tvořeny lineární kombinací zbylých. Proto neexistuje žádná lineárně nezávislá trojice mezi touto množinou vektorů.

Ad d) Jedná se o dimenzi 2.

Pojďme si toto tvrzení odůvodnit.

Aby vektory generovaly vektorový prostor dimenze R^3, muselo by platit:

$$k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & x \\ 0 & -1 & -1 & -1 & y \\ 2 & 1 & -1 & 3 & z \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & x \\ 0 & -1 & -1 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2x-5y+z \end{array}\right].$$

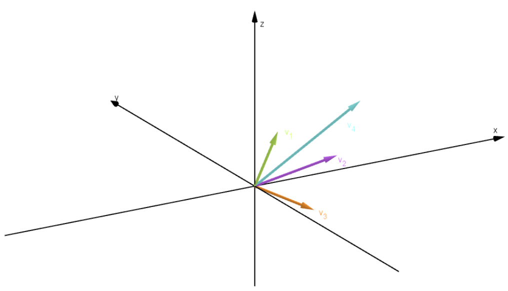
Je zřejmé, že ne všechny vektory lze vyjádřit jako lineární kombinace ostatních vektorů. Proto tyto vektory nemohou generovat vektorový prostor R^3. Podle Frobeniovy věty má tato soustava řešení pouze pro takové vektory, pro které platí: $-2x - 5y + z = 0$. V tomto případě má soustava nekonečně mnoho řešení a vektory generují vektorový prostor R^2. Najdeme si alespoň jedno konkrétní řešení soustavy:

$$x = t; t \in R, \qquad y = s; s \in R, \qquad -2t - 5s + z = 0,$$

$$z = 2t + 5s,$$

$$K = [t, s, 2t + 5s]; t, s \in R \quad \rightarrow \quad \vec{v_1} = (1, 0, 2), \quad \vec{v_2} = (0, 1, 5).$$

Z uvedeného řešení i z obrázku 4 je patrné, že dané vektory leží v jedné rovině.



Obrázek 22: Grafické znázornění nezávislosti vektorů

Příklad k procvičení [5, s. 105]

Máme vektory:

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Odpovězte na stejné otázky jako v *Příkladu 2, str. 79.*

Příklad 3 [2, s. 45]

Určete bázi a dimenzi vektorového prostoru V generovaného vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4} \in R^4$, resp. $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4} \in R^3$, kde

a) $\vec{u_1} = (3, 2, 1, 4)$, $\vec{u_2}(-3, 4, 2, 1)$, $\vec{u_3} = (1, 0, 0, 1)$, $\vec{u_4} = (1, 6, 3, 6)$,

b) $\vec{u_1} = (1, 2, 1, -1)$, $\vec{u_2}(-1, 0, 2, 1)$, $\vec{u_3} = (2, -1, -2, 0)$, $\vec{u_4} = (2, 1, 1, 1)$,

c) $\vec{u_1} = (2, 1, -5)$, $\vec{u_2} = (4, 5, 1)$, $\vec{u_3} = (0, -3, -11)$, $\vec{u_4} = (2, 4, 6)$.

Řešení:

Ad a)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 6 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vektory nejsou bází R^4, dimenze jimi generovaného podprostoru je 3.

Ad b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vektory jsou lineárně nezávislé, tvoří bázi vektorového prostoru dimenze 4.

Ad c)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -11 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 11 \end{bmatrix}.$$

Nemohou tvořit bázi R^4, dimenze podprostoru je 2.

GeoGebra

$$A_a = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Hodnost(A_a)

$\rightarrow$ 3

$$A_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hodnost(A_b)

$\rightarrow$ 4

$$A_c = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -11 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Hodnost(A_c)

$\rightarrow$ 2

Příklad 4 [5, s. 106]

Nechť $P^{(4)}$ představuje vektorový prostor obsahující polynomy $p(x)$ stupně nejvýše 4.

a) Rozhodněte, zda jsou polynomy p_1, p_2, p_3, p_4 lineárně nezávislé?

$$p_1(x) = x^3 - 3x + 1,$$
$$p_2(x) = x^4 - 6x + 3,$$
$$p_3(x) = x^4 - 2x^3 + 1.$$

b) Jaká je dimenze podprostoru prostoru $P^{(4)}$ generovaného polynomy p_1, p_2, p_3, p_4?

Řešení:

Množina polynomů stupně nejvýše n je vektorovým prostorem. Každému polynomu čtvrtého stupně $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ je jednoznačně přiřazen vektor $(a_4, a_3, a_2, a_1, a_0)$. Proto s nimi můžeme počítat a pracovat jako s vektory. V této úloze vystupují jako vektory se souřadnicemi:

$$\vec{p_1(x)} = (0, 1, 0, -3, 1),$$
$$\vec{p_2(x)} = (1, 0, 0, -6, 3),$$
$$\vec{p_3(x)} = (1, -2, 0, 0, 1).$$

Původní zadaní jsme si zjednodušili a nahradili jiným - ekvivalentním. Proto na hledané řešení tato změna nemá vliv.

Ad a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Polynomy jsou lineárně závislé.

Ad b) $\dim V = 2$. Odůvodnění by bylo analogické s *Příkladem 2, str. 79* v části d).

GeoGebra

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hodnost(A)

$\rightarrow$ 2

Příklad k procvičení [1, s. 130]

a) Určete bázi a dimenzi vektorového prostoru generovaného vektory $\vec{u} = (3,0,0,0)$, $\vec{v} = (-1,2,0,1)$, $\vec{w} = (0,6,0,3)$ z aritmetického vektorového prostoru R^4.

b) Určete bázi a dimenzi vektorového prostoru generovaného vektory $\vec{u_1} = (2,0,1,3,-1)$, $\vec{u_2} = (1,1,0,-1,1)$, $\vec{u_3} = (0,-2,1,5,-3)$, $\vec{u_3} = (1,-3,2,9,-5)$ z aritmetického vektorového prostoru R^5.

8.1 Určení souřadnic vektorů vzhledem k bázi

Nechť $M = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_n})$ je báze vektorového prostoru V. Potom každý vektor $\vec{u} \in V$ lze napsat jednoznačně ve tvaru

$$\vec{u} = x_1\vec{u_1} + x_2\vec{u_2} + ... + x_n\vec{u_n}.$$

Vektor $(x_1, x_2, ..., x_n) \in T^n$ nazveme souřadnicemi vektoru $\vec{u}$ vzhledem k bázi M a značíme

$$\vec{u_M} = (x_1, x_2, ..., x_n).$$ [8, str. 50]

Příklad 5 [4, s. 80]

V prostoru R^3 najděte souřadnice vektoru $\vec{u}$ vzhledem k bázi M:

a) $\vec{u} = (-5, 17, -11)$, $M = (1,2,1), (3,-2,7), (11,-2,23)$,

b) $\vec{u} = (29, 12, 5)$, $M = (-3,2,-4), (5,-3,2), (0,6,-3)$,

c) $\vec{u} = (-10, 7, -4)$, $M = (2,1,3,(-3,1,-2),(5,-2,4)$,

Ad a) Podle definice musí platit, že množina vektorů M tvoří bázi vektorového prostoru. Aby vektory tvořily bázi vektorového prostoru, pak musí být lineárně nezávislé:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \\ 11 & -2 & 23 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 0 & -8 & -24 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že vektory jsou lineárně závislé, a tedy netvoří bázi vektorového prostoru R^3. Nelze najít souřadnice vektoru $\vec{u}$ vzhledem k této množině vektorů.

GeoGebra

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \\ 11 & -2 & 23 \end{pmatrix}$$

Hodnost(A_a)

$\rightarrow$ 2

Ad b) Budeme postupovat stejně jako u prvního příkladu. Nejdříve si musíme ověřit, zda vektory tvoří bázi R^3 :

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \\ -4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 6 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix}.$$

Vektory jsou lineárně nezávislé, tvoří bázi vektorového prostoru R^3. První část definice je splněna a vektor $\vec{u}$ můžeme napsat jednoznačně ve tvaru:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Chceme zjistit koeficienty x_1, x_2, x_3. Vektory můžeme zapsat do matice:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 5 & 0 & 29 \\ 2 & -3 & 6 & 12 \\ -4 & 2 & -3 & 5 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 5 & 0 & 29 \\ 0 & \frac{1}{3} & 6 & \frac{94}{3} \\ 0 & 0 & 81 & 405 \end{array}\right],$$

$$x_1 = -3, \qquad x_2 = 4, \qquad x_3 = 5.$$

$(x_1, x_2, x_3) = (-3, 4, 5)$ jsou souřadnice vektoru $\vec{u_M}$ vzhledem k bázi M. Zapíšeme: $\vec{u_M} = (-3, 4, 5)$.

GeoGebra

$$A_b = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Hodnost(A_b)

$\rightarrow$ 3

$$\text{SchodovityTvar}\left(\begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 & 29 \\ 2 & -3 & 6 & 12 \\ -4 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}\right)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Ad c) Postupujeme obdobně jako v části a) a b).

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vektory jsou lineárně nezávislé. Najdeme souřadnice vektoru u_M vzhledem k této bázi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & -10 \\ 1 & 1 & -2 & 7 \\ 3 & -2 & 4 & -4 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & -10 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{9}{2} & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right],$$

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = 3, \qquad x_3 = -1.$$

Pro vektor $\vec{u_M}$ platí: $\vec{u_M} = (2, 3, -1)$.

GeoGebra

$$A_c = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Hodnost(A_c)

$\rightarrow$ 3

$$\text{SchodovityTvar}\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & -10 \\ 1 & 1 & -2 & 7 \\ 3 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}\right)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Kompletní souhrn appletů celé sbírky nalezneme v GeoGebra knize, viz odkaz níže.

Závěr

Smyslem této práce bylo vytvořit doplňující studijní materiál z lineární algebry pro studenty prvního ročníku pedagogické fakulty JU v Českých Budějovicích. Sbírek z této oblasti matematiky existuje mnoho. U novějších, především zahraničních sbírek už existuje jejich elektronické zpracování, případně alespoň obsahují vstupy do matematických programů, které si čtenář v průběhu může zkoušet zadávat do svých zařízení. To mě inspirovalo k vytvoření sbírky, jejímž těžištěm je její zpřístupnění v elektronické podobě prostřednictvím programu GeoGebra. V něm jsem vytvořila *GeoGebra knihu*, applety a 3D obrázky, na které odkazuji pomocí QR kódů a hypertextových odkazů.

U všech cvičení nebylo možné vytvořit prostorový obrázek, protože jsme omezeni na dimenzi 3. Tyto mezery jsem vykompenzovala obrázkem s GeoGebra kódem. Student může s obrázky manipulovat a lépe si představit řešení daných úloh, zkontrolovat si své výsledky, eventuálně ujasnit si vstupy, které se používají při zadávání matic v programu.

Pro mě osobně bylo vytváření této sbírky přínosné. Především proto, že jsem si vyzkoušela psát práci v Overleafu. Pokud jde o matematické prostředí, práce s editorem se ukázala jako mnohem výhodnější a komplexnější než práce s klasickým Wordem.

Domnívám se, že lineární algebra patří mezi ty oblíbenější části matematiky. Přesto si myslím, že studenti používají grafická zobrazení v malé míře. Doufám, že tato sbírka je inspiruje a ukáže jim, že současné vymoženosti jim nabízejí snadnější práci s matematickými úlohami.

Reference

[1] BLAŽEK, Jaroslav, Emil CALDA, Milan KOMAN a Blanka KUSSOVÁ. *Algebra a teoretická aritmetika.* 1. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1983. ISBN 14-514-83.

[2] KRIEG, Jaroslav a Lada VAŇATOVÁ. *Sbírka úloh z Algebry pro 1.semestr.* 1. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 1991. ISBN 80-7040-048-X.

[3] TESKOVÁ, Libuše. *Sbírka příkladů z lineární algebry.* 5. Plzeň: Západočeská univerzita, 2003. ISBN 80-7043-263-2.

[4] TLUSTÝ, Pavel. *Lineární algebra pro učitele.* 1. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2003. ISBN 80-7040-609-7.

[5] OLVER, Peter J. a Chehrzad SHAKIBAN. *Applied linear algebra.* 1. New Jersey: Pearson, 2006. ISBN 0-13-147382-4.

[6] FARIN, Gerald a Dianne HANSFORD. *Practical Linear Algebra: A Geometry Toolbox.* 2. Natick: A K Peters, 2004. ISBN 1-56881-234-5.

[7] TOBEY, JR., John, J. Louis NANNEY a John L. CABLE. *College Algebra.* 2. Newton: Allyn and Bacon, 1986. ISBN 0-205-08312-9.

[8] HAŠEK, Roman. *LINEÁRNÍ ALGEBRA A GEOMETRIE* [online]. In: . 2020, s. 177 [cit. 2022-06-12]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/ hasek/LA2/Linearni_algebra_a_geometrie_studijni_text_2020.pdf

[9] HAŠEK, Roman. *Algebra II.* [online]. In: . 2019, s. 99 [cit. 2022-06-12]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/ hasek/opory/Algebra_II.pdf