Univerzita Palackého v Olomouci

Pedagogická fakulta

Řešení matematických učebních úloh jako příležitost k rozvíjení osobnosti žáka primární školy

Rigorózní práce

Mgr. Eva Nováková, Ph.D.

2020

Prohlašuji, že jsem rigorózní práci zpracovala samostatně a použila jen uvedené literatury.

V Brně dne 28. 11. 2020 ……………………………………….

Děkuji všem učitelům, učitelkám, žákům a žákyním ze škol v Brně, Přerově a Tanvaldu, na nichž jsem uskutečnila jednotlivé výzkumy, a bez jejichž spolupráce by tato práce nemohla vzniknout.

Zvláštní dík patří Mgr. Janě Duňkové, Mgr. Blance Blažkové a Mgr. Zdeňce Jónové za kolegiální reflexe uskutečněné v rámci pohospitačních rozhovorů.

Obsah

Úvod

Řešení učebních úloh má významné místo v procesu postupného vytváření částí žákova matematického světa, v matematickém vzdělávání na všech stupních a typech škol.

Cílem rigorózní práce je přispět k prohloubení dosavadních poznatků o řešení učebních úloh žákem primární školy v teoretické rovině i na základě vlastních výzkumných zjištění. Je shrnutím a výstupem mého dlouhodobého studijního, výzkumného i pedagogického zájmu o problematiku učebních úloh a jejich řešení v prostředí 1. stupně ZŠ. V průběhu patnáctileté praxe na základních školách a svého působení na Pedagogické fakultě MU v Brně jsem využila teoretických poznatků získaných v rámci magisterského a doktorského studia při přípravě a realizaci několika výzkumných šetření. Jejich výsledky jsou shrnuty ve výzkumné části práce. Dílčí výstupy byly prezentovány na setkáních pedagogů a didaktiků matematiky na vědeckých a odborných konferencích a publikovány ve sbornících z těchto konferencí a v pedagogických časopisech.

V předložené práci se zaměřuji na vybrané typy matematických úloh a jejich žákovských řešení. V souladu s názvem je zdůrazněna jedna významná stránka potenciálu využití úloh ve výuce, která je předmětem výzkumného zájmu i pedagogické praxe: práce s úlohami a jejich řešením jako jeden z nástrojů pro rozvoj kognitivní stránky osobnosti žáka.

Úvodní část je věnována teoretickému ukotvení problematiky matematických úloh a jejich řešení žákem v celkových pedagogických souvislostech. Zohledňuje novější poznatky o úlohách a strategiích jejich řešení, jak je přinášejí teoretické studie i výzkumné práce z pedagogiky i didaktiky matematiky.

Cílem výzkumné části je charakterizovat nestandardní úlohy, především slovní, a žákovské strategie jejich řešení ve světle vlastních výzkumných šetření. Vycházela jsem z předpokladu, potvrzovaného svou praxí výuky na 1. stupni základní školy, že takové úlohy mohou pomoci rozbourávat naučené mechanické postupy žáků. Jejich smyslem je, aby donutily žáky přemýšlet, aby četli zadání slovních úloh s porozuměním, posoudili reálnost řešení a výsledku, uměli ho interpretovat a vhodně argumentovat ve prospěch svého prezentovaného názoru na vlastní řešení.

V práci jsou uvedeny výstupy pěti relativně autonomních výzkumů, realizovaných v prostředí 1. stupně základní školy v letech 2015 – 2020. Společným jmenovatelem výzkumů je to, že objektem jejich zájmu a předmětem výzkumu jsou matematické úlohy a jejich řešení žákem.

Tři z provedených výzkumů byly inspirovány zkušenostmi, které jsem získala za období téměř dvaceti let při přípravě a analýze výsledků řešení úloh v soutěži Matematický klokan nejen v České republice, ale i v zahraničí.

Na vzorku 680 žáků 4. a 5. třídy byl proveden výzkum, jehož cílem bylo kvantitativními výzkumnými metodami zjistit a interpretovat údaje o úspěšnosti žákovských řešení jednotlivých úloh v kategorii Klokánek. Současně identifikovat, na kterých faktorech úspěšnost řešení úloh závisí. V rigorózní práci jsou uvedena pouze hlavní zjištění, zpráva o výzkumu byla reportována v odborné monografii.

Dvě další, tentokrát kvalitativně orientovaná výzkumná šetření reflektující poznatky ze soutěže, byla zaměřena

- na zjišťování reálné míry predikce a úrovně sebehodnocení žákova výkonu jako součásti řešení vybraných soutěžních úloh,
- na soutěžní úlohy z hlediska jejich potencionálního využití při dosahování klíčových kompetencí, především kompetence k řešení problémů.

Zkušenosti, získané při spolupráci na projektu SUMA JČMF a Národního ústavu pro vzdělávání s názvem „Matematika v médiích" jsem využila při přípravě a realizaci dalšího kvalitativně orientovaného výzkumu. Jeho tématem byla tvorba a následná reflexe řešení tzv. autentických slovních úloh, inspirovaných publikacemi v tištěných i elektronických médiích. Vybrané úlohy a jejich reflexe tvoří další kapitolu výzkumné části práce.

Poslední výzkum cílil na žákovská řešení jednoho z typů nestandardních slovních úloh, tzv. „kapitánských", které mají potenciál k rozvíjení kritického myšlení žáků (k rozvíjení postřehu, pozornosti a úsudku žáků).

Poznatky, získávané při zpracování rigorózní práce, průběžně využívám v rámci vysokoškolské výuky budoucích učitelů 1. stupně ZŠ. Umožňují mi zakládat výuku na reflektivním pojetí přípravy budoucích učitelů, které vychází z konstruktivistické epistemologie. Osvojování znalostí studentů je zde zpravidla spojeno s reflexí praktické zkušenosti v reálném prostředí školské výuky. Problematika řešení úloh žáky poskytuje k takovému pojetí reflexe velmi dobrou příležitost.

Teoretická část

1 Učební úlohy v primárním matematickém vzdělávání

1.1 Charakteristika a typologie učebních úloh

Rigorózní práce je zaměřena především na dvě dominanty edukace: učební úlohy a žáka primární školy. Slavík a kol. (2017) považují učební úlohu za „ústřední prototyp“, který je charakteristický pro všechny varianty edukačních praktik a určuje jejich specifický edukační ráz, za „praktiku všech praktik“ či za „královnu“ všech praktik. Učební úloha[1] je „intencionální fenomén, implicitní či explicitní příkaz…současně je podnětem ke zlepšení, nápravě či odstranění nějakého nedostatku. V nejobecnějším smyslu jsou učební úlohy přirozenou a nutnou součástí života, ve kterém je každý jedinec neustále konfrontován s nezbytností řešit problémové situace, které mu současně přinášení poučení; jsou to tedy svého druhu učební úlohy“ (Slavík et al., 2017, s. 149). Jako významná kategorie pedagogiky jsou častým objektem teoretických i empirických studií. Knecht a Lokajíčková (2013) uvádějí, že je možné v současnosti zaznamenat oživený zájem o zkoumání učebních úloh především v souvislosti s etablováním nové kultury vyučování a učení.

Jak zdůrazňují Kalhous a kol. (2002), je problematika učebních úloh velmi široká a lze k ní přistupovat z různých hledisek a pozic. V nejobecnější rovině - a z hlediska žáka, řešitele úlohy - lze vymezit učební úlohy jako "širokou škálu všech učebních zadání, a to od úkolů vyžadujících pamětní reprodukci poznatků až po úkoly vyžadující tvořivé myšlení" (Kalhous et al., 2002, s. 329). V pedagogice bývá přijímána definice učební úlohy jako „každé pedagogická situace, která se vytváří proto, aby zajistila u žáků dosažení určitého učebního cíle a je zaměřena na všechny tři aspekty učení - obsahový, operační a motivační“ *(*Průcha et al., 2003, s. 240). Podobně slovenský pedagog Zelina charakterizuje učební úlohy jako „všechny situace, které subjekt stimulují k činnosti, jež vede k řešení situace“ (Zelina, 1990, s. 34).

V novější pedagogické literatuře se učební úloha vymezuje jako „mentální a komunikační konstrukt, který

- vyzývá žáka k aktivní činnosti s obsahem,
- vychází z oboru a funkčně spojuje učitelovo vyučování s učením žáků,
- ve výuce podmiňuje transformaci obsahu a prostřednictvím žákovské činnosti směřuje k cíli učení,
- zakládá edukativní situaci a podmiňuje její formu, organizaci, průběh“. (Slavík, Dytrtová & Fulková, 2010, s. 229).

[1]Místo slova „učební“ se mnohdy v pedagogické praxi i teorii užívá pojmenování příslušného oborového obsahu, například matematická úloha. Toto označení budeme v dalším textu obvykle používat.

Cílem úlohy je, aby se žák dopracoval k zvládání a porozumění tomu obsahu, který mu má úloha zprostředkovat. Úlohu jako celek (včetně postupu řešení) „je nutné chápat jako proceduru a praktiku, tj. jako více či méně tvořivý postup, který má svou rutinní reproduktivní a inovativní složku, probíhá v čase a má na sebe navazující fáze, rozpjaté mezi zadáním úlohy a jejím vyřešením (Slavík et al., 2017, s. 150).

Významné je místo učebních úloh a jejich řešení v didaktice matematiky a ve výuce matematiky. Ani didaktika matematiky však nedisponuje úplnou a obecně přijímanou definicí matematické úlohy - přístupy k uvedené problematice akcentují jednak matematicko-teoretickou, jednak didaktickou stránku.

První z uvedených přístupů lze dokumentovat na klasickém Vyšínově vymezení matematické úlohy. Autor učinil východiskem základní pojmy teorie množin a predikátové logiky: "Je dána neprázdná množina **Ω** matematických objektů a výroková forma ***f*** o jedné nebo více proměnných. Matematickou úlohou rozumíme určení oboru pravdivosti **P** predikátu ***f*** v množině **Ω**, tj. množinu **P** všech objektů z **Ω**, pro něž ***f*** dává pravdivý výrok“ (Vyšín, 1962, s. 19). Termín "řešení úlohy" používá autor ve dvou významech: jednak jako název pro prvky množiny **P**, jednak jako název pro přechod od dané úlohy k úlohám jiným (postupné přetváření daného predikátu ***f***).

Kuřina (2011) považuje učební úlohu obecně za výzvu k činnosti. Matematická úloha je pak výzvou k matematické činnosti. Matematickou úlohou je například lineární algebraická rovnice o jedné neznámé, numerický příklad na písemné sčítání dvouciferných čísel, složená slovní úloha s námětem z oblasti finanční matematiky, konstrukční geometrická úloha na sestrojení trojúhelníku, jsou li dány jeho dvě strany a úhel jimi sevřený, nestandardní (problémová) úloha, vyžadující od řešitele objevení strategie řešení aj.

Při terminologické nejednotnosti jednotlivých autorů lze přesto vyčlenit některé společné vlastnosti úloh:

- objektivní stránku úlohy na logické úrovni charakterizuje otázka nebo požadavek řešení (na rozdíl od např. textové informace, za kterou bývá úloha někdy řešitelem, žákem, zaměňována),
- východiskem řešení úlohy je problém subjektu ("problémová situace"),
- úloha je vždy svázána s jazykem, ve kterém je vyjádřena (Fridman, 1977).

Učitel ze své pedagogické zkušenosti ví, že úlohy a jejich řešení jsou nedílnou součástí výuky, uplatňují se ve všech etapách vyučovacího procesu při dosahován výukových cílů (Novák, 2013):

- motivovat pomocí úlohy znamená vyvolat zájem žáků, zdůvodnit užitečnost nově probíraného poznatku, zajistit pozornost žáků a vytvořit žádoucí tvůrčí pracovní klima. Motivační hodnota úlohy je významná pro její přijetí žákem (a tedy i pro její úspěšné řešení) a závisí nejen na obsahu a tématu úlohy, ale také na subjektivních faktorech, jako jsou schopnosti a vlastnosti osobnosti řešitele,

- úloha může být využita při výkladu nového učiva – při objasňování nového pojmu nebo vytváření nové dovednosti. Umožňuje názorně objasnit podstatu vytvářeného pojmu a zařadit jej do didaktického systému učiva. Obsah, námět a obtížnost úlohy užité při výkladu nového učiva je třeba volit přiměřené, reálné, odpovídající skutečnosti a zkušenostem žáků, srozumitelné a jednoznačně formulované,
- řešení úloh je jedním z důležitých způsobů aplikace získaných poznatků a jejich procvičování a upevňování. Uvedená funkce úloh poskytuje žákům příležitost využít osvojené znalosti při řešení praktických, reálných problémů. Úlohy k procvičování tvoří obvykle didakticky promyšlenou řadu, poskytující možnost diferencovat počtem i obtížností řešených úloh,
- úlohy mají funkci kontrolní a diagnostickou. Jsou nezastupitelným prostředkem kontroly dosažené úrovně vědomostí, dovedností a vlastností osobnosti žáka, nástrojem pro zjišťování výsledků učení obvykle formou písemných zkoušek, testů.

V literatuře najdeme několik typologií matematických úloh. Polya (1945*)* rozlišuje dva základní typy: úlohy na zjištění hledaného ("určovací úlohy") jsou zadány otázkou "co platí?" a úlohy důkazové odpovídají na otázku "platí to?"

Úlohy, které lze řešit pomocí matematického aparátu, třídí Fridman a Tureckij (1984) podle povahy objektů v nich obsažených na úlohy praktické (reálné) a matematické; podle vztahu k teorii na úlohy standardní a nestandardní a podle charakteru požadavků na řešení rozlišuje úlohy na zjištění hledaného, konstrukční (transformační) a důkazové.

Významný představitel tzv. realistického vyučování matematice Freudenthal (1991) uvádí jinou typologii a rozlišuje úlohy realistické, „pararealistické“ a čistě matematické (numerické příklady). Podobně polská autorka Siwek (2005) v návaznosti na koncept činnostního vyučování Krygowské (1977) klasifikuje učební úlohy využívané v matematickém vyučování na realistické, „pseudorealistické“ a čistě matematické. Zdůrazňuje přitom význam realistických úloh jako významného nástroje žádoucího překonávání předmětové izolovanosti, směřujícího k integrálnímu konceptu vzdělávání.

Jirotková (2010, s. 213) uvádí typologii matematických učebních úloh z kognitivního a metakognitivního hlediska, současně zdůrazňuje sociální kontext úlohy a jejího řešení a některé další aspekty. Její typologie obsahuje 11 typů učebních úloh:

- seznamovací (žák získává první zkušenosti s pojmem);
- objevné (řešení úlohy vede žáka k odhalení objektu, vztahu, …);
- komunikační (úloha, která vyvolává komunikační problém při porozumění úloze, v průběhu řešení nebo při formulování výsledku);
- konstrukční (žák hledá konstrukci známého objektu);
- mapovací (žák hledá objekty či procesy dané vlastnosti);
- optimalizační (žák hledá optimální objekt, proces, vztah, vlastnost v daném kontextu);

- vyhledávací (žák hledá prvek daných vlastností v předloženém souboru
- revizní (žák prověřuje, zda daný objekt, vztah, … splňuje předepsané kritérium; každá úloha vyžadující kontrolu);
- argumentační (žák zdůvodňuje či vyvrací předepsané tvrzení);
- na hledání strategie; nácvikové (žák si automatizuje známou proceduru)
- nácvikové (žák si automatizuje známou proceduru).

Ve školské praxi se mohou matematické úlohy posuzovat a třídit podle dalších kritérií.

Všímáme-li si toho, které matematické jevy, poznatky, vědomosti, znalosti, dovednosti aj. se v úloze vyskytují či jsou potřebné k řešení, můžeme rozlišovat například úlohy aritmetické, geometrické, algebraické, kombinatorické, z oblasti pravděpodobnosti a statistiky aj.

Kritériem pro třídění úloh může být míra tvořivosti řešitele při řešení. Pak můžeme s určitým zjednodušením rozlišit úlohy rutinní, „standardní“, receptuální, které k řešení využívají známého vzorce, pravidla nebo postupu (receptu, algoritmu) a „nestandardní“ (problémové) úlohy, k jejichž vyřešení známé postupy a algoritmy nestačí. Žák musí řešit problém, hledat a objevovat metodu, postup řešení, protože jeho dosavadní zkušenost řešení úlohy neumožňuje (Novák, 2010).

Podle toho, jaký je charakter objektů, o nichž se v úloze jedná, můžeme rozlišit úlohy, v nichž vystupují pouze matematické výrazy, vyjádřené adekvátní matematickou symbolikou - nazveme je úlohy "čistě matematické", a úlohy, jejichž předmětnou komponentu tvoří reálné objekty z nematematické oblasti, popisující reálnou situaci přirozeným jazykem. Označují se jako slovní (kontextové, praktické, textové, námětové).

Z hlediska zaměření práce se koncentrujeme na dvě skupiny úloh: nestandardní (podle míry tvořivosti řešitele) a slovní (popisující reálnou situaci). Ve většině případů se při analýze výzkumných aktivit jedná o slovní nestandardní úlohy.

1.2 Nestandardní matematické úlohy a jejich řešení

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (2017) obsahuje jako jeden z tematických okruhů vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace okruh s názvem „Nestandardní aplikační úlohy a problémy“. Považuje je za důležitou součást matematického vzdělávání a charakterizuje je jako takové úlohy, v nchž žák „řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky“ (RVP ZV, 2017, s. 34).

Přestože uvedené vymezení je velmi vágní, pedagogika ani oborové didaktiky pojem nestandardní úloha přesněji nevymezují, lze najít v literatuře několik charakteristik, které obvyklé představě učitelů o nestandardní úloze odpovídají.

Lišková a Rezek (2015) zdůrazňují, že nestandardními úlohami a problémy na prvním stupni základní školy nerozumíme úlohy složité, ale takové, které jsou pro žáky neobvyklé (jak zadáním, tak způsobem řešení) a jsou vhodné i pro badatelské aktivity. Při řešení takových úloh se snažíme respektovat a ocenit osobitá řešení žáků, pokud jsou správná, a vhodně, například doplňujícími otázkami, korigovat u žáků postupy, které nejsou správné nebo přesné. Nestandardní charakter mají také komplexní úlohy z praktického života, ve kterých jsou provázány různé oblasti matematiky. Při řešení úloh z praxe využíváme konkrétních zkušeností žáků z běžného života i z různých oblastí jejich zájmů (sport, technika, příroda, umění apod.), které zvyšují motivační hodnotu úloh. Autoři zdůrazňují, že v edukační praxi mají své místo také kaskády, řetězce gradovaných úloh, v nichž je obtížnost zvyšována postupně.

Také další autoři, například Kopka (2007) považují nestandardní úlohy za zajímavější, i když obtížnější než rutinní úlohy: vedou k objevování, domýšlení, nacházení nacházení nových cest při řešení a tím rozvíjejí myšlení a poznávací schopnosti žáků. Podobně Boero (2006) požaduje, aby se odhadování, dokazování, modelování – sloužící například k interpretaci přírodních jevů a předvídání jejich vývoje – stát jádrem matematického vzdělávání již na základní škole.

Hejný (2001) jednotlivé etapy řešení nestandardní úlohy pojmenoval „úrovně“. Uvádí jich pět: úroveň uchopení situace, úroveň nabývání vhledu do situace úlohy, úroveň hledání a stanovení strategie řešení, úroveň realizace řešení (výpočtu), úroveň interpretace výsledku.

Nestandardní učební úlohy mají často divergentní („rozbíhavý“) charakter, na rozdíl od úloh konvergentních, které v tradičních učebnicích výrazně převládají. Zelina a Zelinová (1990) uvádějí, že je jich v učebnicích 90 - 95 %. Konvergentní úlohy vyžadují myšlenkové procesy, jež využívají zejména vnímání, diferenciaci, poznávání věcí, paměť, analýzu a syntézu, indukci a dedukci na úrovni konkrétních vztahů, aplikaci poznatku v konkrétní situaci, je pro ně charakteristický logický a algoritmický postup vedoucí ke správnému závěru.

Řešení divergentních úloh vyžaduje divergentní myšlení, které nevede k jedné správné odpovědi, ale vyžaduje vygenerovat co nejvíce návrhů, alternativ či možných strategií řešení. Divergentní myšlení kromě produkce více alternativ vyžaduje zvažování důsledků návrhů, jejich hodnoty, správnosti. Při řešení divergentních úloh se významně uplatňují také hodnotící a rozhodovací procesy (Zelina & Zelinová, 1990). Uvedení autoři v této souvislosti upozorňují na paradox, kdy velmi mnoho úkolů a situací, které řešíme v praktickém životě - od vytváření vztahů, přes řešení pracovních úloh až po každodenní úkoly jako je oblékání, využívání volného času, apod. - má divergentní charakter; naproti tomu ve školním vzdělávání výrazně převažují právě úlohy konvergentní.

V pojetí divergentního charakteru úlohy se autoři odborných textů poněkud liší. V obecném pojetí obvykle chápou divergentní úlohu jako úlohu, kde ke správnému řešení vede více cest, případně má úloha více řešení. Malinová (2014) uvádí příklad úlohy, která může být považována za konvergentní, ale také za divergentní:

- *Tatínek chtěl mamince koupit kytici růží. V květinářství mají jen bílé růže po 9 Kč a rudé po 11 Kč. Kolik kterých růží mohl tatínek koupit, když chtěl za kytici utratit 100 Kč.*[2]

Pokud žák pochopí zadání tak, že tatínek chce utratit přesně 100 Kč, k řešení využívá konvergentní myšlení. Úlohu by bylo možno řešit užitím diofantovské rovnice $9x + 11y = 100$, což ovšem přesahuje poznatkovou výbavu žáka primární školy. Žák na 1. stupni ZŠ může řešit úlohu zkoumáním, experimentováním - například úvahou a využitím tabulky, do které si vypíše násobky jedenácti, dopočítá rozdíl do 100 a posoudí, zda je rozdíl dělitelný devíti.[3] Úloha má právě jedno řešení: *Tatínek mohl koupit 5 rudých a 5 bílých růží.*

Počet rudých růží (**y**)	1	2	3	4	$\boxed{5}$	6	7	8	9
Celková cena za rudé růže (c)	11	22	33	44	$\boxed{55}$	66	77	88	99
Zbývá Kč (100 - c)	89	78	67	56	$\boxed{45}$	34	23	12	1

Žák, který vidí v zadání úlohy více možností, používá divergentní myšlení, může klást následující otázky: *Chtěl tatínek utratit přesně 100 Kč? Chtěl koupit růže jen jedné barvy nebo obou barev? Dostal nějaké peníze nazpět? Mohl koupit jen jednu růži?* V druhém případě žák může nalézt celou řadu odlišných řešení, úlohu lze považovat za divergentní (Malinová, 2014, s. 59).

Typickými nestandardními úlohami bývají úlohy kombinatorické (Scholtzová, 2006). Směřují k rozvíjení klíčových kompetencí, především kompetence k řešení problémů tím, že vedou žáka k rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů.[4] Scholtzová (2004) na základě analýzy žákovských řešení kombinatorických úloh rozpracovala jednotlivé aspekty řešení do podoby 13 „elementů“, charakterizujících proces řešení od „analýzy textu a nabytí vhledu do situace úlohy“, až po „samostatné vytvoření kombinatorické úlohy“.

Podle Dvořákové (2010) lze využít kombinatorické úlohy i k uvědomění si a rozvíjení mezipředmětových souvislostí. Uveďme alespoň několik příkladů: sestavování rytmu dle zadaných délek not, při tvoření akordů (kombinace určitého počtu různých tónů tvoří akord) v hudební výchově, různé kombinace barev, tvarů či vzorů (mandala) jako rozvoj estetického cítění a vnímání žáků, sportovní utkání družstev či pořadí na stupních vítězů, skládání slov ze zadaných písmen či vět ze slov (tvarosloví, syntax), hledání cest, kterými lze dojet či dojít do určitého místa, plánování rozvrhu či jídelníčku (přísady na sendvič či pizzu, kopečky zmrzliny), oblékání, rozesazení dětí

[2] Ceny růží v naší úloze dokumentují velmi ošidnou a problematickou kontextovou stránku úloh z oblasti finanční matematiky, obsahující často nereálné, rychle se měnící údaje.

[3] Nebo do které vypíše násobky devíti, dopočítá rozdíl do 100 a posoudí, zda je rozdíl dělitelný jedenácti.

[4] https://www.msmt.cz/file/43792/

ve třídě, rozměňování mincí, barevnost vlajek nebo Morseova abeceda, Braillovo písmo a tvoření šifer. Řadu dalších inspirací aplikovatelných v prostředí primární školy uvádí rovněž Příhonská (2014); Scholtzová (2007); Engel, Varga a Walser (1974).

Makrides (2006) v této souvislosti používá termín „otevřené“ úlohy a zdůrazňuje význam jejich využití v práci se žáky nadanými na matematiku (jejich typickým znakem je podle tohoto autora nadprůměrná schopnost rozumět matematice a matematicky myslet, nikoli nadprůměrná schopnost provádět matematické výpočty a dostávat dobré známky z matematiky). Pojem „otevřená úloha“ vymezují ovšem různé teoretické rámce rozdílně. Například Pehkonen (1997) a Nohda (2000, cit. podle Samková, 2020) považují za otevřenou úlohu takovou, která splňuje aspoň jedno z kritérií:

- „má otevřenou vstupní situaci, tj. existuje více způsobů jak úlohu uchopit, jak interpretovat její zadání
- má otevřený postup řešení, tj. existuje více způsobů, jak úlohu řešit,
- má otevřenou výslednou situaci, tj. existuje více řešení (výsledků) úlohy nebo jejich interpretací,
- má otevřenou další cestu, tj. existuje více způsobů, jak úlohu rozvinout v úlohu novou“ (Samková, 2020).

Typickými otevřenými úlohami bývají tzv. badatelské úlohy, tedy úlohy, které se využívají při badatelsky orientované výuce matematiky. Badatelsky orientovanou výukou se rozumí taková výuka, která obsahuje aktivity zaměřené na zkoumání a objevování. Je zřejmé, že bádání vyžaduje určité znalosti a specifické výukové prostředí, které pro bádání vytváří potřebné podmínky. Podrobněji o této metodě informují Stuchlíková (2010), Dostál (2013), v českém vzdělávacím kontextu primární školy Hošpesová (2014), Samková, Hošpesová a Tichá (2016), kteří ve svých studiích uvádějí i relevantní zahraniční prameny (Jaworski, 2006).

Žilková (2013), Nocar a Novák (2015) i další autoři naznačují potencionál objevitelských aktivit při řešení nestandardní geometrické úlohy prostřednictvím manipulativních činností, také s využitím počítačového programu dynamické geometrie Cabri II Plus. Další podněty pro edukační praxi lze čerpat také z publikací našich i zahraničních autorů, například Prídavkové (2003), Manna (2006), Scholtzové (2007), Pavlovičové a kol. (2012); Blažkové a Vaňurové (2013), Swobody (2014).

Podnětné jsou výstupy výzkumného šetření Budínové (2015), která v případových studiích řešení úloh několika nadanými žáky analyzovala „vývojové linie“ vybraných geometrických pojmů. Autorka uvádí domněnku, že „poznávací proces nadaných žáků postupuje rychleji než u jejich vrstevníků. To může znamenat i to, že nadaný žák 5. ročníku ZŠ se nachází na úrovni konceptuálních generických modelů a je schopen útvary charakterizovat pomocí základních vlastností, pracuje s abstrakty a nikoli s konkrétními objekty“ (s. 21).

Speciálnímu typu otevřených úloh se věnoval Hellmig (2010) a pojmenoval je polyvalentní úlohy. V jeho pojetí jsou to úlohy s více řešeními (výsledky) o různé obtížnosti. Samková (2019) podrobným rozborem různých typů otevřených úloh pojem polyvalentní úlohy rozšířila. Polyvalentní úlohou rozumí „úlohu, která má více různě obtížných správných postupů řešení nebo více různě obtížných výsledků (řešení)“ (s.16).

Jednou z podob práce s nestandardními učebními úlohami především u nadaných žáků je obměňování a samostatná tvorba úloh. Přitom je možné využít různých způsobů, jak žákům specifikovat zadání pro vytváření úloh. Žáci mohou například tvořit úlohy, v jejichž zadání se vyskytují předem daná čísla (úlohy s daným matematickým modelem), mohou tvořit úlohy související s daným tématem (Bureš & Novotná, 2008), úlohy ke konkrétnímu příběhu, k zadanému obrázku nebo k reálné situaci (Palková & Prídavková, 2011).

K samostatné tvorbě úloh žáky primární školy směřuje v aktuálním kurikulu – Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání – jeden z očekávaných výstupů tematického okruhu „Číslo a početní operace“, který je formulován takto: „Žák řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel“ (RVP ZV, 2017, s. 32). Standardy vzdělávání na výstupu primárního matematického vzdělávání[5] uvádějí k danému očekávanému výstupu dva indikátory:

- žák přiřadí k zadanému jednoduchému matematickému vyjádření smysluplnou slovní úlohu (situaci ze života),
- žák tvoří slovní úlohu k matematickému vyjádření.

V tomto smyslu nejde tedy o sestavování či formulaci úloh s vágním zadáním („sestavte slovní úlohu na sčítání, na násobení,…“), ale o postižení významu explicitně zadaného matematického modelu – v terminologii vzdělávacích standardů „matematického vyjádření“, např. aritmetickou operací s danými (přirozenými) čísly - a jeho ukotvení ve smysluplném věcném kontextu, obsahujícím jednotlivé parametry úlohy (podmínky, operátor, otázka). Indikátory jsou vždy konkretizovány ilustrační úlohou (Nováková, 2016):

Přiřaď k jednotlivým úlohám odpovídající matematické vyjádření a úlohy vyřeš:

36 + 4 = ***36 – 4=*** ***36 × 4 =*** ***36: 4 =***

- *Mamince je 36 let. Její dcera je čtyřikrát mladší. Kolik let je dceři?*
- Matematické vyjádření $\boxed{}$

Odpověď: Dceři je _______ roků.

- *Pavel měl ve sbírce 36 modelů letadel. Od dědečka dostal 4 nové modely. Kolik modelů letadel má nyní celkem?*

$\boxed{}$

[5] https://www.msmt.cz/file/43792/

Matematické vyjádření

Odpověď: Pavel má nyní celkem ______ modelů.

- *V počítačové učebně bylo původně 36 počítačů. 4 počítače však již byly zastaralé a poruchové, proto byly z učebny odstraněny. Kolik počítačů v učebně zůstalo?*

  Matematické vyjádření $\boxed{}$

  Odpověď: V učebně zůstalo ______ počítačů.

- *Ve školní jídelně připravovala kuchařka 4 mísy s jablky. V každé míse bylo 36 jablek. Kolik jablek měla kuchařka celkem?*

  Matematické vyjádření $\boxed{}$

  Odpověď: Kuchařka měla celkem ______ jablek.

Školská praxe potvrzuje, že tvorba či obměna úloh je jednou z aktivit, kterými lze významně obohatit matematické vyučování. Sarrazy (2011) v této souvislosti uvádí, že „víra v kreativitu žáka je pro učitele zásadní, ale tato pedagogická humanistická víra je často zanechává bezradné, když se jedná o vytvoření podmínek pro matematickou tvorbu: pouhá vůle je neúčinnou zbraní v boji s ignorancí a s nepochopením ze strany žáků“ (s. 35). Domníváme se spolu s Novotnou (2000*),* že při samostatné tvorbě úloh se žáci dostávají do nové role, kdy se z pasivního příjemce úloh zadaných učitelem nebo učebnicí stávají jejich samostatnými tvůrci a blíží se tak samotné podstatě matematické aktivity. „Matematické zkušenosti studenta nejsou úplné, pokud nikdy neměl možnost řešit problém, který si sám vymyslel“ (Polya, 2016).

1.3 Matematické úlohy jako nástroj hodnocení

Matematické úlohy, které ve vyučovacím procesu jakoby "vstupovaly" mezi učitele a žáka, se stávají významným instrumentem řízení učební činnosti žáků. Dovednost řešit úlohy se obvykle považuje také za jeden z hlavních indikátorů úrovně zvládnutí matematického učiva i matematických schopností žáků; úlohy mají funkci kontrolní a diagnostickou. Uvedený aspekt učebních úloh je zkoumán z různých teoretických východisek a s využitím rozmanitých metod a technik.

Specifickým druhem kontroly a prověrky učební činnosti a současně jedním z diagnostických prostředků zaměřených na hodnocení (evaluaci) vzdělávacích výsledků, kterým rozumíme v obvyklé pedagogické komunikaci každé sdělení učitelů určené žákům o jejich úspěšnosti, chybách, projevech (Slavík, 1999), jsou zkoušky.

Zvláštním typem zkoušky, jako jedné z procedur získávání údajů pro hodnocení (Kalhous et al., 2002*)*, je test. Test je zkouška, která má stejnou podobu pro zkoumané osoby a jejich výsledky jsou posuzovány podle pravidel a převáděny do číselného vyjádření. V pedagogickém výzkumu, ale i v edukační praxi, je využíván zejména test výkonu, test didaktický (achievement test). Nejčastěji se didaktický test vymezuje jako systematický postup (nástroj) měření vzorku výsledků výuky (Byčkovský, 1980), který má řadu podob a variant. V uvedené definici jsou pod pojmem „výsledky výuky“ míněny změny v osobnostech žáků, způsobené výukou. „Vzorkem výsledků výuky“ se rozumějí výsledky dosažené pomocí reprezentativního výběru učiva, který rovnoměrně pokrývá celé učivo, jež je předmětem měření (zkoušení). „Systematičnost postupu“ je zajišťována tím, že didaktický test je navrhován, ověřován, skórován a interpretován podle určitých, předem stanovených pravidel. Jedná se tedy o „nástroj zjišťování výsledků výuky, který se orientuje na objektivní zjišťování úrovně zvládnutí učiva u určité skupiny osob“ (Chráska, 2007, s. 184).

V testech (nejen) z matematiky se používají s přihlédnutím k charakteru testu, věku žáků a dalším okolnostem obvykle některé z následujících typů matematických úloh (testových položek).

Úlohy uzavřené (s výběrem ze dvou nebo častěji z více, čtyř až pěti alternativ, s vícenásobnou volbou - „multiple choice“). Respondent vybírá z nabízených možností vyjádřených písmeny nebo čísly, případně slovy, grafickými symboly nebo obrázky, obvykle právě jednu správnou odpověď. Jsou často používány ve standardizovaných testech. I když lze zaznamenat, že v českých učebnicích a dalších didaktických materiálech (internet) se v posledním období vyskytují častěji, v běžné výuce je to pro žáka 1. stupně ZŠ typ úlohy stále ještě neobvyklý. Uzavřené úlohy jsou využity například v testech soutěže Matematický klokan nebo ve srovnávacích testech mezinárodních výzkumu.

- *Dva vlaky jedou proti sobě. Každý má 31 vagónů. V jednu chvíli jsou v obou vlacích proti sobě vagóny číslo 19. Který vagón je ve stejnou chvíli naproti vagónu 12?*
  A) 7　B) 12　C) 21　D) 26　E) 31

- *Vašík má v koši jablka a 8 hrušek. Hrušky i jablka jsou zelené a žluté. Jablek má o 3 více než zeleného ovoce. V košíku je 6 žlutých hrušek. Kolik žlutých jablek má Vašík v košíku?*
  A) 4　B) 5　C) 6　D) 7　E) 8

Uzavřené úlohy mohou mít i podobu dichotomické volby mezi pravdivou či nepravdivou odpovědí.

- *Rozhodni, která věta je pravdivá:*

a) 15 je třikrát více než 5	*Ano - ne*
b) 18 je o tři více než 6	*Ano - ne*
c) činitel je výsledkem při násobeni	*Ano - ne*
d) dělitel dělíme dělencem a dostaneme podíl	*Ano - ne*
e) polovinu získáme tak, že číslo násobíme dvěma	*Ano - ne*

f) nulou se nedá dělit *Ano – ne*

Úlohy otevřené (s tvorbou odpovědi)[6] jsou častější v nestandardizovaných didaktických testech (písemkách, prověrkách), které obvykle vytváří učitel „ad hoc“, podle konkrétní potřeby a situace ve třídě. Mohou být různého typu a zaměření. Nejfrekventovanějším typem jsou otevřené úlohy „se širokou odpovědí“. Jsou to například běžné učebnicové slovní úlohy.

- *Záhon ve tvaru čtverce o délce strany 10 metrů se má opatřit plotem. Proto bude do země zasazen určitý počet sloupků ve vzdálenosti 2 metry od sebe. Kolik sloupků bude třeba?*

- *Ježek Marek si stěžoval svým kamarádům:“Kdybych sesbíral dvakrát více jablek, než jsem opravdu sesbíral, měl bych nyní o 24 jablek více“. Kolik jablek Marek sesbíral?*

- *Pan Dvořák je řidičem autobusu. V pondělí ujel 246 km, v úterý o 25 km méně. Kolik kilometrů ujel za oba dny?*

Řešení otevřených úloh se širokou odpovědí umožňuje zjistit, do jaké míry je žák schopen porozumět úloze a jakým způsobem dokáže prezentovat svá řešení. Proces tvorby odpovědi většinou obsahuje kognitivní činnosti vyššího řádu.

Otevřené úlohy „se stručnou odpovědí“ vyžadují, aby žák zformuloval a napsal vlastní odpověď (číslo, slovo, krátkou větu, vzorec ap.). Žák nevybírá z nabídnutých odpovědí, ale sám odpověď - řešení úlohy – produkuje.

- *Jedna čokoláda stojí 36 Kč. Dvě stejné čokolády stojí ..... Kč, pět stejných čokolád stojí..... Kč.*

- *Obdélník o rozměrech 6 cm a 3 cm má obvod……cm a obsah .... cm²*.

Podobný formát mají otevřené úlohy doplňovací. Obvykle obsahují tvrzení, ve kterém musí žák doplnit slovo, frázi, číslo. Zjišťují aktivní znalost faktů a termínů.

- *Jeden metr má..... centimetrů,..... milimetrů.*

- *Doplňte chybějící čísla v řadě:*
  1, 3, 6, 10, x , y, 28,…

Hejný a Kuřina (2001), akcentující konstruktivistický přístup, považují za významné uplatnění různého typu úloh jako instrumentu „diferencovaného“

[6] Termín „otevřená úloha“ ve smyslu testové položky jako protikladu k pojmu „uzavřená úloha“ v didaktickém testu je používán v jiném významu, než v kapitole 1.2.

hodnocení, které umožňuje proniknout hlouběji do subtilních mechanismů učení matematice, co nejpřesněji objevovat a lokalizovat případné nedostatky, případně pokrok v učení a osvojování pojmů. Burjan (2003) zdůrazňuje požadavek využít řešení úloh k posílení formativní funkce hodnocení zaměřené na podporu dalšího efektivního učení žáků: nabízí radu, vedení a poučení orientované na zlepšování budoucích výkonů, poskytuje hodnotící informaci (zpětnou vazbu) ve chvíli, kdy se určitý výkon nebo činnost dá ještě zlepšit. Jde tedy nejen o hodnocení výkonu žáka v testu, ale také jeho potencí, schopností, vlastností osobnosti (úplnost a samostatnost řešení, sebekontrola,…), kultury výpočtů, kvality rýsování, grafické úpravy, kultury výpočtů, originality řešení (řešení různými způsoby).

2 Řešení úloh jako oblast výzkumů v didaktice matematiky

2.1 Poznatky z výsledků českých žáků primární školy v šetření TIMSS

Široce koncipovaná mezinárodní srovnávací měření výsledků matematického a přírodovědného vzdělávání TIMSS[7] pravidelně reportuje výsledky českých žáků při řešení souboru matematických úloh různého typu (Janoušková & Tomášek, 2013; Dvořák 2010)). Úlohy lze dělit podle typu odpovědi, a to na úlohy s výběrem odpovědi a na úlohy s otevřenou odpovědí. Koncepce matematické části se skládá ze dvou složek: obsahové a operační. Obsahová a operační složka tvoří v šetření TIMSS základ pro hodnocení žáků. Obsahová složka vymezuje tematické okruhy, které jsou v šetření sledovány (čísla, geometrické tvary a měření, znázornění dat). Operační složka určuje sledované oblasti nebo procesy myšlení (tj. prokazování znalostí, používání znalostí a uvažování) ve čtyřech úrovních. Jsou v ní popsány kognitivní dovednosti, které jsou při řešení matematických úloh od žáků očekávány. Žák

a) na první úrovni prokazuje určité základní matematické znalosti. Sčítá a odčítá přirozená čísla, zná trojúhelníky, používá neformální soustavy souřadnic a jednoduché tabulky,
b) na druhé úrovni používá, aplikuje znalosti v jednoduchých situacích,
c) na třetí úrovni využívá znalosti a dovednosti k řešení problémů. Řeší složité slovní úlohy s přirozenými čísly, chápe jednoduché zlomky, určí chybějící člen řady nebo vztah mezi dvojicemi členů, využívá data z tabulek a diagramů aj.,
d) na nejvyšší, čtvrté úrovni prokazuje dovednost uvažování - řeší složité situace a vysvětluje své úvahy. Aplikuje logické myšlení, chápe zlomky a desetinná čísla, zná dvojrozměrné a trojrozměrné útvary, umí uspořádat a interpretovat data. Jedná se tedy o úlohy vyžadující nejen pamětní reprodukci poznatků a jednoduché myšlenkové operace, ale také vyžadující složité myšlenkové operace a tvořivé myšlení, které poskytují respondentům možnost prokázat vyšší kognitivní kompetence – porovnávat, verifikovat, dokazovat, argumentovat.

Jak vyplývá ze zveřejněných údajů (například Hejný et al., 2013), Česká republika dosáhla v roce 2011 poměrně netypického výsledku, kdy výkon našich žáků v úlohách na uvažování převýšil jejich výkon na celkové škále. V případě zemí na prvních

[7] TIMSS („Trends in International Mathematics and Science Study") je mezinárodním šetřením matematického a přírodovědného vzdělávání. Jedná se o projekt Mezinárodní asociace pro hodnocení výsledků vzdělávání IEA. Šetření TIMSS je zaměřeno na školní vědomosti a dovednosti rozvíjené ve výuce a vychází z učebních osnov matematiky a přírodovědných předmětů zúčastněných zemí. Vědomosti a dovednosti se zjišťují pomocí písemných testů, které obsahují úlohy z matematiky a přírodních věd. V roce 2011 se šetření v České republice účastnili jen žáci 4. ročníku základních škol. Bylo to více než 4500 žáků ze 177 základních škol a téměř 500 učitelů a ředitelů. Celkově se do šetření TIMSS 2011 v této věkové kategorii zapojilo 52 zemí.

místech žebříčku celkového výkonu zaostává výsledek na škále uvažování za celkovým výkonem – jedná se o některé asijské země (Singapur, Korea, Japonsko), ale i Severní Irsko, Anglii, Finsko nebo vlámskou část Belgie. České děti tedy byly obecněji znevýhodněny spíše slabými znalostmi než úlohami, které vyžadují „přemýšlení“. Autoři studie upozorňují, že tato skutečnost by si zasloužila další rozbor. Usuzují, že je možné, že výsledek ukazuje na specifickou a nezastupitelnou úlohu matematického školního vzdělávání. Na jednu stranu i děti nadané a z podnětného prostředí potřebují školu, aby si osvojily důležité matematické pojmy a postupy, bez nichž nemohou dosáhnout výborného celkového výsledku. Na druhou stranu země na špičce žebříčku uspívají mimo jiné proto, že jednodušší úlohy tam dokáže vyřešit větší podíl žáků, to znamená, že dokážou dovést na jistou minimální úroveň znalostí a dovedností větší část dětí. Otázka kvality výuky matematiky se někdy zjednodušuje na dilema, kde proti sobě stojí nácvik hbitého numerického počítání a proti nim slovní či problémové úlohy „z praktického života“. Úlohy TIMSS ukazují, že pro rozvoj matematických dovedností jsou důležité i jiné přístupy, zejména zaměření na důkladné porozumění základním pojmům a vztahům a schopnost nalézat v datech pravidelnosti či zákonitosti a těch využívat k řešení obtížnějších úloh.

Hejný a kol. (2013) při analýze zaměřující se na porovnání úspěšnosti českých žáků při řešení jednotlivých úloh spadajících do různých okruhů učiva nebo vyžadujících různé typy operací (kognitivních dovedností) označili deset úloh, u kterých se nejvíce lišila průměrná úspěšnost českých žáků od průměrné úspěšnosti žáků všech zemí účastnících se téhož šetření. Z nich blo sedm úloh z tématu zlomky a desetinná čísla (z toho šest z nejnižší úrovně kognitivních dovedností - na prokazování znalostí, jedna na používání znalostí). Tak například úloha:

- *Které tvrzení vyjadřuje, že Honza snědl* $\frac{2}{4}$ *pizzy?*

A) Honza snědl $\frac{1}{5}$ *pizzy.*

B) Honza snědl $\frac{1}{4}$ *pizzy.*

C) Honza snědl $\frac{1}{3}$ *pizzy.*

D) Honza snědl $\frac{1}{2}$ *pizzy.*

byla českými žáky řešena s úspěšností pouhých 31,5% oproti mezinárodnímu průměru 46,5 %.

Autoři studie upozorňují v této souvislosti na další úskalí mezinárodních srovnání. Testy TIMSS jsou konstruovány tak, aby odrážely pojetí kurikula účastnických zemí či jejich průměrnou představu o tom, co by měl umět žák určitého ročníku školy[8]. Přes snahu

[8] Tento problém se objevuje také při tvorbě mezinárodní verze testů v soutěži Matematický klokan. Na každoročních setkáních asociace Kangourou sans frontieres, na nichž se úlohy vybírají, nejsou neobvyklé

o určitou „spravedlnost“ z hlediska obsahu testu může nastat rozdíl mezi testem a kurikulem konkrétní země, a ten pak má velmi závažné dopady na výsledek této země (například téma zlomky a desetinná čísla nebylo v době testování učivem primární školy, do RVP ZV bylo opět zařazeno až v roce 2013).

Čeští žáci byli výrazně neúspěšní i při řešení následující úlohy, označované v anglosaských zemích „number sentence“. Jde o jednoduchou rovnici řešenou v oboru přirozených čísel, v níž je neznámá vyjádřena jinak než písmenem *x*. Autoři si kladou otázku, zda neobeznámenost českých dětí s tímto typem úloh je pouze důsledkem neznalosti konkrétního způsobu zápisu nebo zda hlubší příčinou obtížnosti uvedené úlohy pro žáky je nedostatečné konceptuální porozumění rovnosti a rovnicím:

- *Pro kterou hodnotu bude zápis pravdivý?*
  $6 + 15 = \square + 10$

  A) 11
  B) 21
  C) 25
  D) 31

Cílem úlohy bylo určení chybějícího čísla nebo znaménka v číselném zápisu. Úloha ověřuje, zda žáci správně chápou pojem rovnice, resp. rovnost. Při vlastním výpočtu pak žáci uplatňují znalost sčítání přirozených čísel, resp. znalost určení jednoho ze sčítanců, jsou-li známy druhý sčítanec a součet ($x + 10 = 21$). V úspěšnosti řešení čeští žáci výrazně zaostali za mezinárodním průměrem (dosáhli hodnoty 26,5 % oproti mezinárodnímu průměru 45,4 %). Vysoká četnost nesprávné odpovědi *D)* nasvědčuje tomu, že žáci nepochopili zadání úlohy a že nesprávně chápou pojem rovnost, resp. že „velmi volně“ nakládají se znaménkem rovnosti. Volba nesprávné odpovědi *D)* je důsledkem tohoto nesprávného postupu: $6 + 15 = 21 + 10 = 31$. Rovněž volba nesprávné odpovědi *B)*, která měla také vysokou četnost, je důsledkem nesprávného pochopení pojmu rovnost a „volného zacházení“ se znaménkem rovná se. Ukazuje na chápání znaku „rovná se“ jako pokynu k výpočtu směrem doprava bez ohledu na výraz na pravé straně. Žákům mohlo činit potíže to, že operace sčítání je na obou stranách rovnice a navíc je proměnná („zástupný symbol“) na její pravé straně.

Z nízké úspěšnosti řešení uvedené úlohy autoři rovněž vyvozují, že testy s uzavřenými úlohami jako forma ověřování znalostí žáků jsou u nás neprávem podceňovány. Úloha ukazuje, že i „jednoduchá“ úloha s výběrem odpovědi, někdy hanlivě označovaná jako „zaškrtávačka“, umožňuje ověření porozumění látce, a ne jen kontrolu zapamatovaných faktů. Promyšlená volba nabídnutých nesprávných odpovědí (distraktorů) navíc umožňuje odhadnout příčiny žákova neúspěchu při řešení úlohy.

ostré názorové střety mezi zástupci různých států, jejichž pohled na vhodnost soutěžních úloh se liší i podle vzdělávacího kurikula těchto zemí.

Uvedené problematice uplatnění aritmetických postupů v algebraických úlohách byl věnován také výzkum Budínové (2016).

- *Karlovi je 24 let. Je o □ let starší než Jana. Jak vypočítáš, kolik let je Janě?*

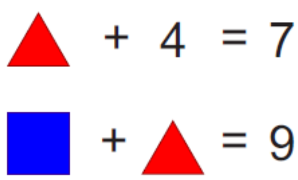
  A) 24 – □
  B) □ + 24
  C) □ – 24
  D) 24 • □

Úloha je zaměřena na používání znalostí při rozpoznání nebo zapsání výrazů nebo číselných zápisů, které vyjadřují problémové situace včetně neznámých. Jednoduchá slovní úloha, ve které nebylo požadováno její číselné vyřešení, ale výběr odpovídajícího způsobu výpočtu, tj. odpovídající početní operace. Správným vyřešením úlohy žáci prokazují, že umí matematizovat reálnou situaci a rozumí významu základních početních operací. Čeští žáci dosáhli v roce 2015 úspěšnosti 57,1 % oproti mezinárodnímu průměru 55,5 %). Přestože se úspěšnost řešení českých žáků zvýšila o 10 % oproti roku 2011, téměř jedna pětina jich zvolila opačnou početní operaci v odpovědi *B)*.

Z průběžného porovnání výsledků českých žáků (Janoušková, V. et al., 2019, s. 4) vyplývá, že od roku 1995 do roku 2007 byl v ČR zaznamenán významný pokles průměrného výsledku českých žáků 4. tříd v matematice. Od roku 2007 se tento výsledek systematicky zlepšoval a v cyklech šetření 2011 i 2015 byl výsledek českých žáků již nad průměrem škály TIMSS. Platí nicméně, že ani v roce 2011, ani v roce 2015 nedosáhli čeští žáci úrovně výsledku z roku 1995.

Pro ilustraci úloh z mezinárodního šetření TIMSS jsme zvolili úlohy z tematického okruhu „Čísla – výrazy, jednoduché rovnice a vztahy". Chtěli jsme tím dokumentovat, že přestože korektní řešení rovnic pomocí ekvivalentních není jako vzdělávací cíl explicitně uvedeno v českém kurikulu, jsou úlohy uvedeného typu v prostředí 1. stupně ZŠ řešitelné a mají značný význam pro rozvíjení kognitivní stránky žáka. Lze to ukázat také na analýze následující otevřené úlohy:

- *Které číslo se skrývá za čtvercem?*



Úloha má podobu soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými - neznámé jsou ovšem vyjádřeny takovým způsobem, aby jim děti porozuměly - *„číslo, které se skrývá za čtvercem - hidden behind the square"* (Carraher et al., 2006).

V praxi matematické výuky v české primární škole se úlohy uvedeného typu řeší metodou „pokus - omyl“, resp. systematickým experimentováním, založeném na postupném dosazování čísel za neznámé. Řešení lze popsat ve dvou krocích: z první rovnice se určí číslo, kterým lze nahradit trojúhelník (7 - 4 = 3), po dosazení do druhé rovnice: □ + 3 = 9 se vypočítá 9 - 3 = 6.

Zadání lze modifikovat různými způsoby, například „oddělit“ jednotlivé rovnice a přeformulovat zadání, například:

- *Myslím si číslo. Když k němu přičtu 4, dostanu 7. Které číslo si myslím*?
- *Která dvě čísla dávají součet 9? Mohou to být stejná čísla?*
- *Změní se skrytá čísla, pokud zvětšíme nebo zmenšíme některé ze zadaných čísel třeba o 1? Například* $\Delta + 5 = 7$ *nebo* $\Delta + 5 = 8$*, případně* $\Delta + 3 = 7$ *nebo* $\Delta + 5 = 6$*. Změní se vždy obě skrytá čísla?*

Uvedené formulace zadání poskytují možnost využití úlohy již od nejnižších ročníků ZŠ.

2.2 Matematické úlohy v šetření PISA

Rovněž publikované výstupy studie OECD/PISA[9] prostřednictvím analýzy výsledků didaktických testů zřetelně potvrzují, že školská matematika hraje významnou roli v rozvoji komplexu osobnostních charakteristik žáka. Matematická gramotnost je zde vymezena jako „schopnost použít nástroje matematiky v reálném světě a použít je pro vlastní potřebu člověka, jako schopnost poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana“. (Straková, 2002, s. 11)[10] Je zaměřena na tři dimenze: matematické postupy, matematický obsah, situace a kontexty. Úroveň matematické gramotnosti se projeví, když jsou matematické znalosti a dovednosti používány k vymezení, formulování a řešení problémů z různých oblastí a kontextů a k interpretaci jejich řešení s užitím matematiky. Tyto kontexty sahají od čistě matematických až k takovým, ve kterých není

[9] PISA („Programme for International Student Assessment“), výzkum probíhá periodicky od roku 2000, v roce 2015 byl realizován již pošesté, tentokrát v 73 zemích. Zjišťuje připravenost mladých lidí na konci povinné školní docházky vypořádat se s požadavky současné informační společnosti.

[10] Matematickou gramotnost lze ovšem charakterizovat i jinak. Například:
„Matematickou gramotností na úrovni n-té třídy k-tého stupně školy rozumíme schopnost porozumět matematickému textu (slovnímu, symbolickému nebo obrázkovému), schopnost vybavovat si potřebné matematické pojmy, postupy a teorie, dovednost řešit úlohy, jak z matematiky, tak i z jejích aplikací, které jsou (obvykle bezprostředním) užitím probraného učiva.“ (Hošpesová et al., 2011, s. 26).
„Matematická gramotnost je schopnost jedince poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby.“ (Fuchs & Zelendová, 2015, s. 10).

matematický obsah zpočátku zřejmý, a je na řešiteli, aby ho v nich rozpoznal. Je třeba zdůraznit, že uvedené vymezení se netýká pouze matematických znalostí na určité minimální úrovni, ale jde v něm o používání matematiky v celé řadě situací, od každodenních a jednoduchých až po neobvyklé a složité.

Úlohy „PISA matematiky" tvořily skupiny, které vycházely z jednoho matematického problému, s nímž se žáci mohli setkat v běžném životě. Každá z úloh v testu byla zaměřena na používání a uplatňování matematiky v rozmanitých situacích (např. osobní, vzdělávací/pracovní, veřejné a vědecké) a kontextech (autentický, hypotetický) při rozvíjení kompetencí zaměřených na matematické uvažování, matematickou argumentaci, matematickou komunikaci, modelování, vymezování problémů a jejich řešení, užívání matematického jazyka, užívání pomůcek a nástrojů. (Fuchs & Zelendová, 2015).

Matematický obsah byl seskupen kolem čtyř nosných myšlenek, jimž odpovídaly jednotlivé oblasti školské matematiky:

a) kvantita (algebra, diskrétní matematika a teorie čísel - význam čísel, různé reprezentace čísel, operace s čísly, představa velikosti čísel, počítání zpaměti a odhady, míra),
b) prostor a tvar (geometrie - orientace v prostoru, rovinné a prostorové útvary, jejich metrické a polohové vlastnosti, konstrukce a zobrazování útvarů, geometrická zobrazení),
c) změna, vztahy a závislosti (funkce - závislost, proměnná, základní typy funkcí, rovnice a nerovnice, ekvivalence, dělitelnost, inkluze; vyjádření vztahů symboly, grafy, tabulkou,
d) neurčitost (pravděpodobnost a statistika - sběr dat, analýza dat, prezentace a znázorňování dat, pravděpodobnost a kombinatorika, vyvozování závěrů).

2. 3 Inspirace z dalších výzkumů

V rigorózní práci jsme se zaměřili na úlohy, se kterými pracuje žák primární školy a jeho učitel/ka. Úlohy jsou však uplatněny i ve výzkumech, mapujících znalosti, schopnosti či matematické zkušenosti dětí již na počátku systematického školního vzdělávání, ještě před nebo po vstupu do 1. ročníku ZŠ.

2.3.1 Řešení úloh dětmi na počátku školní docházky

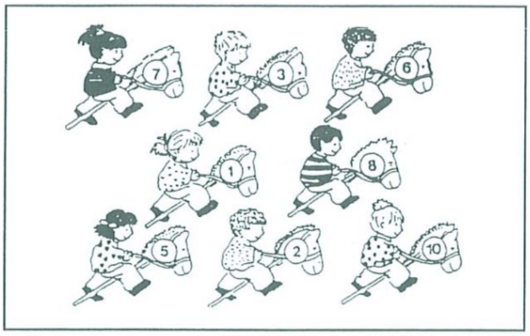
Na začátku školního roku 1994/95 byl realizován mezinárodní výzkum v pěti evropských zemích - v České republice, Německu, Nizozemí, Švýcarsku a Slovensku. Jeho cílem bylo zjistit, jaké jsou matematické znalosti dětí při vstupu do základní školy, porovnat výsledky dětí z uvedených států a současně ověřit, zda představy expertů (učitelů 1. ročníku) o znalostech žáků odpovídají skutečnosti.

Dětem byl na začátku 1. ročníku základní školy zadán test, obsahující šest úloh (Tichá, Hošpesová, & Kuřina, 1995). S výjimkou první úlohy se jednalo o úlohy aritmetické, zjišťovaly tedy aritmetické zkušenosti.

1. *Na obrázku je několik domů. Najdi nejvyšší dům a nakresli pod něj křížek.*

2. Na dalším obrázku jsou děti na dřevěných konících. Jeden koník má číslo 5. Vybarvi kroužek s číslem 5.

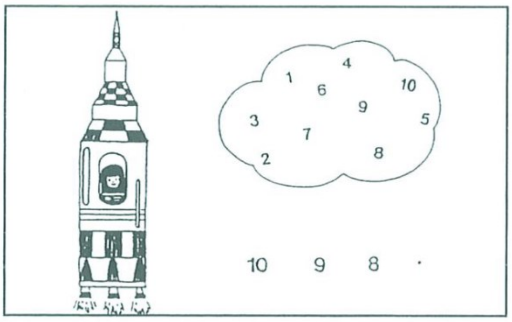
Obrázek 1: K testové úloze A/1



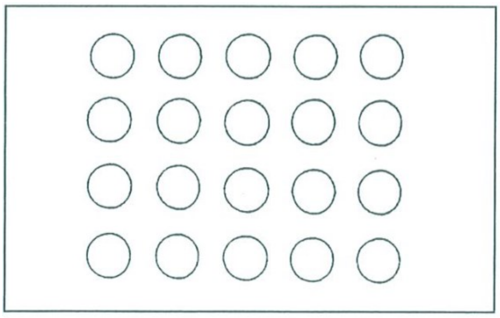
0brázek 2: K testové úloze A/2

3. *Když startuje raketa, odpočítává se okamžik startu pozpátku. Třeba 5, 4, 3, 2, 1, start. Vedle obrázku rakety jsou v obláčku čísla. Dej do kroužku další číslo, které řeknu při tomto odpočítávání: 10, 9, 8, .. .*

4. *Vybarvi 9 koleček.*



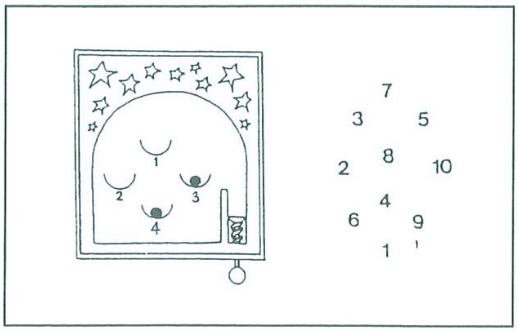
Obrázek 3: K testové úloze A/3



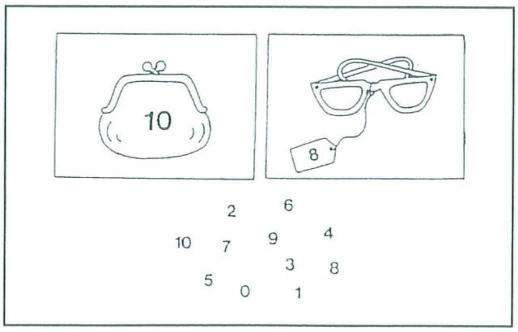
Obrázek 4: K testové úloze A/4

5. Máme hrací automat (doplnit demonstraci na obrázku nakreslením na tabuli nebo využít projektor; některé děti znají tuto hračku pod názvem TIVOLI). Vystřelují se kuličky, které zapadají do misek. Tomáš získal 3 body a 4 body. Kolik je to dohromady? Dej do kroužku číslo.

6. Eva měla 10 Kč. Koupila si papírové brýle na karneval za 8 Kč. Kolik korun jí zbylo? Dej do kroužku číslo.



Obrázek 5: K testové úloze A/5



Obrázek 6: K testové úloze A/6

Úlohy byly zadány s obrázky, komentář k nim uváděli a dětem zprostředkovávali učitelé.

Tabulka 1. Výsledky žáků a odhad učitelů - expertů.

Úloha	*A/1*	*A/2*	*A/3*	*A/4*	*A/5*	*A/6*
Výsledky žáků (% správných řešení)	98,8	97,9	43,5	87,8	58,7	48,3
Odhad expertů (%)	93,1	73,4	41,5	70,1	39,5	31,9

Ze zjištěných dat je zřejmé, že

- téměř všechny děti správně označily na obrázku nejvyšší dům a číslici 5. Nejmenší procento správných odpovědí vykazuje úloha č. 3 (číselná řada sestupně) a úloha č. 6 (jednoduchá slovní úloha na odčítání),

- u všech úloh byly odhady učitelů nižší, než skutečné výsledky dětí, projevila se tendence podceňovat výsledky dětí. Tento jev bylo možné pozorovat nejen u nás, ale i Německu, Švýcarsku, Nizozemí a na Slovensku.

2.3.2 Úlohy zjišťující úroveň předmatematických dovedností u předškoláků

Úroveň matematické pregramotnosti dětí před vstupem do základního vzdělávání byla zkoumána v projektu CLoSE[11] ve výzkumu Chvála, Felcmanové a Kaslové (Greger, Simonová & Straková, 2015) v souvislosti s úrovní zrakového vnímáni. Dostatečně rozvinuté zrakové vnímání je mimo jiné předpokladem úspěšného

[11] Longitudinálni studie CLoSE (*Czech Longitudinal Study of Education*) je zaměřena na studium vzdělanostních nerovnosti na reprezentativním výběru mateřských škol a mezi dětmi, které měly podle data narozeni nastoupit v následujícím školním roce do základní školy a jejich rodiči. Cílem šetřeni bylo zjistit, jaké jsou rozdíly v podmínkách vzdělávání v jednotlivých mateřských školách a jak je volba mateřské a základní školy podmíněna rodinným zázemím, kognitivními schopnostmi dítěte a dalšími faktory, které ji mohou ovlivňovat (Greger, Simonová, & Straková, 2015).

osvojování čtení, psaní a počítání. Vedle obecných dovedností, pro rozvoj matematických představ však důležitých (motorika, prostorové vnímání, vnímání času a časové posloupnosti, řeč, zrak, sluch, rytmus, koncentrace, paměť) jsou důležité specifické předmatematické dovednosti: porovnávání podle velikosti, množství; třídění a tvoření skupin podle druhu, barvy, velikosti a tvaru; řazení, určování množství předmětů; pojmenování tvarů (Bednářová & Šmardová, 2015; Nováková 2019).

Diagnostika předmatematických dovedností a zrakové percepce byla provedena u 795 dětí v období květen - červen 2014. Test byl vyvinut cíleně pro šetření CLoSE. Autorkou úloh je Michaela Kaslová z Katedry matematiky a didaktiky matematiky Pedagogické fakulty UK v Praze, koncepci testu vytvářel Martin Chvál z Ústavu výzkumu a rozvoje vzdělávání Pedagogické fakulty UK. Test nese název „test předmatematických dovedností“; autoři uvádějí (Greger et al., 2015, s. 78), že vychází vstříc laickému pohledu na testové úlohy - zaměřuje se na utváření vybraných předmatematických představ předškolních dětí. Test byl dominantně zaměřen na zjištění úrovně porozumění číslu ve vybraných rolích (srv. Hejný & Stehlíková, 1999).

V úloze na „počet“ bylo dítěti zadáno několik úkolů, které zjišťovaly, zda dítě ovládá číslo v roli počtu. Pro počet byly zvoleny 3 varianty:

1) stejně velké i stejně barevné kostky - dítě mělo dát na stranu určený počet kostek (maximálně 17 kostek). Správný počet kostek vybralo 77 % dětí,

2) různě barevné velké a různě velké vystřižené rovinné obrazce - děti byly vybídnuty, aby nejprve daly na stranu „4 lístečky“ a později „6 lístečků“. Pouze 4 % dětí nedala na stranu správně 4 obrazce a 2 % nedala na stranu správně 6 obrazců,

3) zvuky viditelným tlesknutím, čtyřikrát nepozorovatelným ťukáním v pravidelném i nepravidelném rytmu. Úspěšnost řešení byla 91 %, resp. 80 %.

Úloha na „porovnání“ byla zaměřena na zjištění, zda děti dokážou porovnat dvě početně různé množiny shodných předmětů (kostky, použité i v předcházející úloze). Na jednu hromádku bylo dáno 12 kostek, na druhou 13. Tento počet byl zvolen záměrně tak, aby byl co nejmenší, ale přitom větší než 10 a dítě nemohlo spolehlivě řešit úlohu pouze odhadem. Dětem v instrukci bylo nabídnuto, že mohou s kostkami hýbat. Předpokladem úspěšného řešení bylo též porozumění slovním vazbám „stejně jako“, „více než“, „méně než“. Úlohu správně vyřešilo 63 % dětí, 22 % jen tipovalo bez zdůvodnění či se vymlouvalo, že „do tolika neumí počítat“. Nejčastější strategií řešení bylo samostatné spočítání kostek na obou hromádkách (volilo ji 85 % dětí, přičemž některé děti po sobě provedly kontrolu, i opakovaně), některé děti počítaly jen zrakem, bez ukazování či hýbání s kostkami. 5 % volilo párové dávání stranou, 7 % volilo strategii buď tvorbou řad, tvorbou samostatných dvojic či tvorbou sloupců. 18 dětí ze souboru volilo nějako vlastní „originální“ strategii (kostky z menší hromádky umístilo jako vrchní vrstvu na vyrovnané kostky z větší hromádky, složilo kostky do útvarů 3 × 4, přičemž jedna kostka přebývala, stavělo věže po 5 kostkách).

Úloha „bez zraku“zjišťovala dovednost dítěte „odčítat“ (určit počet po úbytku předmětů) aniž by mělo zrakovou oporu. Záměrně byla vybrána čísla nepřesahující 10; byly zvoleny situace odpovídající výpočtům: 5 - 2; 7 - 4; 6 - 2. První dva úkoly byly realizovány s již užívanými kostkami. U prvního úkolu se nechalo dítě dostatečně přesvědčit, že má před sebou 5 kostek tak, že si je samo spočítalo. Dále zazněla instrukce: „Za chvíli zavřeš oči, já některé kostky schovám a ty mi řekneš, kolik jsem jich schovala. Zavři oči.“ Po chvilce zazněla nápověda, že si to může spočítat na prstech. Další úkoly byly zadány jen těm dětem, které první úkol zvládly. Druhý úkol byl zadán stejně, ale bez dodatečné nápovědy s prsty, třetí úkol byl zadán takto: „Představ si, že máš 6 bonbónů. Dva jsi snědl. Kolik ti jich zbývá?“ Po chvilce mohla zaznít nápověda, že může využít buď prsty nebo kostky na stole.

Úkol *5 - 2* zvládlo 63 % dětí bez nápovědy, 7 % s nápovědou, 30 % úlohu nezvládlo,

úkol *7 - 4* zvládlo 53 % z těch, kterým byla úloha zadána (tj. 37 % všech),

úkol *6 - 2* zvládlo 54 % dětí bez nápovědy a 25 % s nápovědou z těch, kterým byla úloha zadána (tj. 38 %, resp. 17 % všech).

Cílem zařazení úlohy „číslice“ do testu bylo zjištění znalosti číslic. Byla zařazena záměrně z toho důvodu, že se u ní více než u ostatních předpokládá cílený vliv prostředí - rodiny nebo mateřské školy. Dětem byly předloženy na kartičkách čísla 0 - 10 napsaná číslicemi náhodně rozprostřená po stole. Úkolem dítěte bylo číslice uspořádat do pořadí. Následně administrátorka ukázala na jedno z čísel (8) s dotazem: „Co je tohle za číslo?“ Pokud měla tazatelka pocit, že dítě jen tipovalo, ukázala ještě na jedno číslo (6). Cílem bylo zjistit, zda dítě kromě uspořádání zná i samostatné přiřazení číslic slovům. Čísla od 1 do 10 správně uspořádalo celkem 68 % dětí, číslici 8, resp. 6 neumělo pojmenovat 21 % dětí.

Z uvedených výsledků autoři výzkumu vyvozují, že do první třídy přicházejí děti z hlediska jejich matematických dovedností velmi různé. Z regresní analýzy výsledků v testech podle rodinného zázemí, provedené v rámci výzkumu přitom vyplynulo, že výsledky testu matematických dovedností jsou silně závislé na sociokulturním zázemí rodiny a na vzdělání rodičů.

V uvedených ukázkách výzkumných šetření vystupují úlohy jako diagnostický nástroj. Dokumentovali jsme jejich široké použití: od diagnostiky předmatematické gramotnosti dětí na vstupu do školy přes rozvíjení kompetence k učení a k řešení problémů v prostředí 1. stupně ZŠ až k uplatnění v mezinárodním výzkumu PISA na 2. stupni základní školy.

3. Žák primární školy jako řešitel učebních úloh

3.1 Žák ve vzdělávání

Učební úlohy, kterým byly věnovány předcházející kapitoly, zabezpečují součinnost mezi učitelem a žáky a jejím prostřednictvím dochází k uskutečňování vzdělávacích cílů. Proto není funkce učebních úloh ve vzdělávacím systému ničím nahraditelná, studium a výzkum učebních úloh s řadou jeho dalších souvislostí je hlavním bodem didaktického výzkumu. Prostřednictvím studia matematických učebních úloh odhalili Vondrová, Rendl a kol. (2013; 2015) „kritická místa matematiky na základní škole“, vnímaná očima učitelů a žáků. „Vzdělávání bez učebních úloh by přestalo být vzděláváním nebo výchovou, učitelé by nebyli učiteli a žáci by přestali být žáky… Didakticky vhodné navržení a realizování učební úlohy v odpovídající kvalitě pro zamýšlený okruh adresátů-žáků je atributem učitelské praxe (Slavík et al., 217, s. 151). Pro učitelství jsou nejtypičtější záměrně koncipované a záměrně zadávané úlohy, které mají žáci řešit, „aby se něčemu naučili“.

Často se uvádí, že východiskem a středem pozornosti školy a vzdělávacího systému má být žák. Pojetí žáka jako subjektu, který se aktivně staví k tomu, jak jej škola vymezuje, který toto vymezování zvládá a překonává a tím se rozvíjí, znamená orientaci na žákovy životní potence a jejich realizaci, naznačuje jeho osobnostní perspektivy (Helus, 2009). Klasický Herbartův trojúhelník učitel – učivo (obsah) – žák je v moderní didaktice (Slavík et al., 2017) obohacen rozlišením žáka-tvůrce od role jeho partnera v dialogu[12]. Vstupem do úlohy a snahou dorozumět se během jejího řešení své role střídají, poskytují si zpětnou vazbu a podněcují se tím k hlubšímu poznání.

V období vymezeném pro primární vzdělávání se žákův kognitivní rozvoj odehrává v etapě vývoje, které Piaget (1999) označuje jako stádium konkrétních operací (od 7 do 12 let): dítě dokáže logicky přemýšlet o konkrétních událostech, chápe stálost/invarianci počtu, množství a hmotnosti. Vytváří se tím nezbytné předpoklady k uplatnění nových strategií řešení matematických úloh. Při výuce matematiky se učitelé setkávají s nejrůznějšími přístupy žáků k řešení úloh a problémů. Žáci se rovněž odlišují způsobem komunikace s učitelem a se spolužáky. Každé dítě je jedinečné. Vzdělávání ve školách je však organizováno hromadnou formou, třída představuje heterogenní, nestejnorodou skupinu žáků, zahrnuje jedince s různými vlastnostmi, předpoklady pro učení, s různými zájmy a s odlišným sociokulturním zázemím. Pro pedagogickou teorii i praxi je nastolena otázka, jak nastavit úroveň hromadné výuky, jsou-li ve třídě žáci s odlišným aktuálním potenciálem k učení. Podle Sarrazyho (2003) lze se zjednodušením říci, že učitel hledá ve školním vzdělávání způsob, jak u co největšího počtu žáků zvýšit (zlepšit) znalosti a dovednosti v omezeném čase; přičemž žáci

[12] Že vzdělávání je plné paradoxů může dokumentovat kritický názor francouzského filozofa Maritaina na pedocentrismus, který metaforicky vyjádřil takto: „Učitel prý nemůže naučit Petra matematiku, dokud sám nepozná Petra. Poznává tedy Petra lépe a lépe, až nakonec učitel zná dokonale Petra, ale Petr nezná vůbec matematiku“ (podle Kalhous et al., 2002, s. 65).

z hromadného vyučování netěží stejně. Dokládá to na výsledcích výzkumu, kde 112 žáků ve věku 9-10 let z prvního stupně základní školy v rámci experimentu absolvovalo pre-test, výuku matematiky a post-test. Žáci byli podle výsledků v pre-testu rozděleni do čtyř skupin (nadaní, dobří, průměrní, slabí). Největší zisk z výuky byl zaznamenán u žáků ze skupiny dobrých a průměrných žáků, z této skupiny vytěžili nejvíce ti, kteří měli nejslabší výsledky v pre-testu. Oproti zmíněné skupině dobrých a průměrných žáků byl menší posun ve znalostech u žáků slabých a nejmenší přínos měla výuka pro skupinu nadaných. Odtud dovozuje, že pokud je výuka efektivní a optimálně rozvíjí všechny jedince ve třídě, pak tím narůstá heterogenita třídy a rozdíly v úrovni jednotlivých žáků se zvyšují. Není-li obtížnost dost vysoká, heterogenita skupiny je redukována a rozvrstvení žáků je jiné než v případě vysoké obtížnosti, kde jakýkoliv posun zvyšuje heterogenitu.

V žákovské populaci je řada žáků se speciálními vzdělávacími potřebami. Tento v praxi používaný termín zahrnuje skupiny žáků definované Vyhláškou č. 147/2011 Sb. V § 1 této vyhlášky se uvádí, že „Vzdělávání dětí, žáků a studentů se speciálními vzdělávacími potřebami a vzdělávání žáků mimořádně nadaných se uskutečňuje s využitím vyrovnávacích a podpůrných opatření. Podpůrnými opatřeními při vzdělávání mimořádně nadaných žáků se pro účely této vyhlášky rozumí využití speciálních metod, postupů, forem a prostředků vzdělávání, didaktických materiálů, poskytování pedagogicko-psychologických služeb, nebo jiná úprava organizace vzdělávání zohledňující vzdělávací potřeby těchto žáků“. Každá tato skupina žáků vyžaduje specifický přístup. Přitom je třeba se v běžné výuce věnovat všem žákům ve třídě, i těm, kteří speciální vzdělávací potřeby neuplatňují. Tak zvaní „běžní“ žáci si rovněž zaslouží plnou pozornost, aby maximálně naplňovali svůj potenciál. K vytvoření optimálních podmínek pro vzdělávání žáků vzhledem k jejich zvláštnostem se využívá diferencovaná a individualizovaná výuka. Vnitřní diferenciace se uplatňuje tam, kdy se v jedné třídě vzdělávají žáci s různými předpoklady, schopnostmi, s různým tempem práce aj. Pod pojmem individualizovaná výuka se rozumí výuka žáků v běžné třídě, kdy se zaměřujeme na obsah učiva, styl výuky, metody práce a specifické zvláštnosti žáka. Celý proces výuky přizpůsobujeme vzdělávacím potřebám konkrétního žáka. Zaměřujeme se na výběr vhodných metod práce, které podporují rozvoj tvořivých schopností a zvyšování jeho samostatnosti (Průcha et al., 1998). Jedním z faktorů, které je třeba při vzdělávání konkrétního žáka zohlednit, je edukační nabídka. Termínem edukační nabídka rozumí Hříbková (2009) specifický, ucelený vzdělávací postup po stránce obsahové i organizační, který může mít podobu speciálního nebo diferencovaného kurikula. Bortland (2005) uvádí, že bychom se měli více zaměřovat na diferenciaci kurikula, aby všechny skupiny žáků byly ve výuce uspokojeny. Kritizuje výuku v homogenním prostředí. Jako vhodné způsoby individualizace výuky matematiky navrhuje například zadávání kvalitativně náročnějších úloh s následnou diskusí nad řešením v souboru gradovaných úloh. Úloha bývá považována za základní stavební prvek edukační nabídky.

Jsme si vědomi, že v reálné výuce v praxi základní školy pracují učitelé se žáky s rozdílnými předpoklady, schopnostmi, z různého sociálního prostředí, často se speciálními vzdělávacími potřebami. Blíže se zaměříme na žáky s nadáním na matematiku.

3.1.1 Nadaný žák

Podle starších koncepcí nadání, které jsou spojeny s tradičním testováním inteligence, jež nejčastěji označuje za nadané jedince s IQ nad 130, zaujímají tito lidé 2-3 % populace (Hříbková, 2007). Novější přístupy zdůrazňují multidimenzionální povahu nadání. Nadání se v současné době chápe jako „komplex charakteristik osobnosti zahrnujících zejména rozvinuté kognitivní procesy (intelekt, vnímání, tvořivost aj.), znalosti (z určité oblasti vědění), zvláštní rysy chování (vytrvalost, píle), vysokou motivaci a sebehodnocení aj.“ (Průcha, 2002, s. 167). Ani vymezení pojmu nadání však není v literatuře jednoznačné. Některé přístupy chápou nadání jako projev vynikajícího, nadprůměrného výkonu, jiné jako potenciál podávat nadprůměrný výkon, případně jako potenciál rozvíjet svou kreativitu (Havigerová, 2011).

Pro zachycení faktorů, které nadání ovlivňují, byla vytvořena celá řada modelů, včetně jejich grafického vyjádření. Výchozím pro mnohé z nich se stal Renzulliho triadický model („model tří kruhů“), který pomocí průniku tří množin Vennova diagramu názorně vyjádřil nadání jako souběh nadprůměrných schopností, motivace (zaujetí pro úkol) a tvořivosti (Renzulli, 2008). Renzulli rozlišuje dva typy nadání – školní a produktivně kreativní, přičemž akcentuje kreativně produktivní nadání. Školní nadání koreluje se schopností získat ve škole dobré známky, je snadno měřitelné standardizovanými testy, v modelu tří kruhů jej Renzulli vztahuje ke komponentě nadprůměrných schopností a je v čase poměrně stabilní. Kreativně produktivní nadání má podle Renzulliho situační a kontextuální povahu, je vztahováno ke zbývajícím komponentám modelu tří kruhů – ke kreativitě a k pracovnímu úsilí (které kolísá v závislosti na okolnostech).

Žáci s matematickým nadáním tvoří v populaci rozumově nadaných žáků specifickou a různorodou skupinu. V souladu s Renzulliho modelem označuje Malinová (2014) jako žáka s matematickým nadáním rozumově nadaného žáka, u něhož se projevuje souběh nadprůměrných matematických schopností, vyšší míry tvořivosti při řešení matematických úloh a angažovanosti v úkolu; žáka, který je vnitřně motivován k řešení matematických úloh – matematika jej přitahuje.

Gruszczyk-Kolczynská (2013)[13] uvádí, že tyto děti již ve velmi raném věku

- rychle se učí matematickému myšlení,
- mají rozvinutou vnímavost počtu a míry,
- nalézají chyby a absurdity,
- jsou tvořivé, hledají si samy příležitosti k počítání,

[13] Podle názoru této přední polské psycholožky lze v předškolním věku a na počátku školní docházky považovat za nadané více než polovinu dětí.

- jsou tvrdohlaví – když jedna metoda nefunguje, zkouší jinou,
- potřebují pozornost – pokud vidí, že se jim dospělý nevěnuje, samy ztrácejí zájem,
- umějí kriticky myslet a jsou odvážné, dokud se nedostanou pod tlak školní rutiny.

3.1.2 Řešení matematických úloh žákem s nadáním na matematiku

Ve škole obvykle předkládá úlohu žákovi učitel. Při samostatném řešení úlohy žákem však jde o interakci mezi žákem a úlohou. Samostatné řešení úlohy žákem lze pojmout jako proces, který je ovlivněn vlastnostmi žáka i vlastnostmi úlohy. Protože probíhá v rámci integrované výuky, může být významně ovlivněn také edukačním prostředím třídy, či zásahem učitele nebo spolužáků. Pro nadaného žáka může být úloha velmi přitažlivá, pokud je propojena s jeho reálným životem a pokud nějak souvisí s tématem, o které se intenzivně zajímá. V návaznosti na požadavek na vyšší kognitivní náročnost úloh mají učitelé v praxi tendenci přebírat a nabízet nadanému žákovi úlohy se sémantickým pozadím pro starší žáky. Malinová (2014) ve svém výzkumu ale zaznamenala, že nadaný žák žádal úlohy s hravým, dětským kontextem, řešil se zaujetím úlohy, jež měly nereálné sémantické pozadí - pohádkové, z oblasti sci-fi, umožňující uplatnit kreativitu a humor. Pro nadaného žáka je typická „láska k abstrakci“, žáka i v mladším školním věku dokáže upoutat i úloha bez sémantického pozadí, ve které se zabývá pouze matematickými objekty a vztahy mezi nimi úlohy, kde pracuje s čísly, různými číselnými schématy. Autorka uvádí následující příklady z jedné kazuistiky svého výzkumu.

Martin[14] rád vytváří úlohy početního charakteru, „hraje si s čísly“. Ve vyučování na výzvu učitelky své vybrané úlohy předkládá spolužákům, některé úlohy vytváří speciálně pro ně, ve chvílích, kdy má volný čas, například:

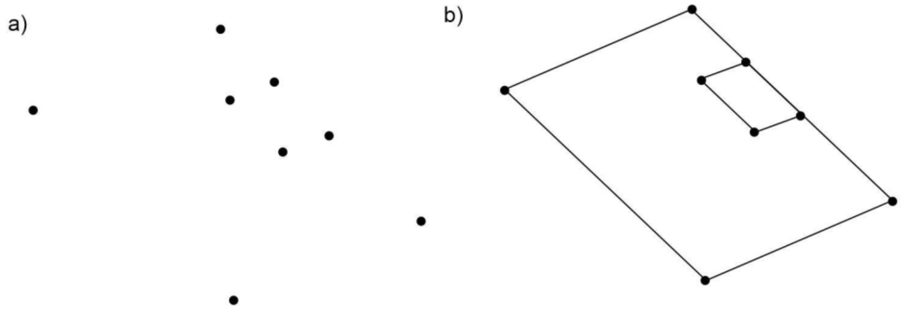
- *Doplň znaménka tak, aby platila rovnost: 1000 1000 1000 1000 = 1000*

  Martinovo řešení: (1000 – 1000) : 1000 + 1000 = 1000

- *Spojením teček vyznač dva různě velké geometrické útvary, které mají stejný tvar.*

  Martinovo řešení:

[14] Martin (jméno změněno), žák 5. třídy základní školy vykazuje mimořádné matematické schopnosti už na 1. stupni základní školy, avšak jeho výkony v jiných oblastech (kromě hudby) jsou srovnatelné s běžnou populací.

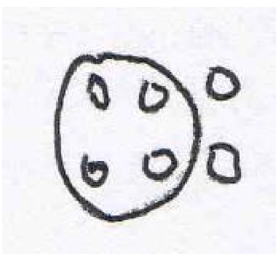


Obrázek 7. Obrázek Martinova autorského řešení.

Další moment, na který autorka v souvislosti s řešením úlohy mimořádně nadaným žákem upozorňuje, je potřeba precizní formulace zadání úlohy a přesného vyjadřování. Upozornila na něj paradoxní situace, kdy měl Martin velké potíže s úlohou, kterou jiní žáci vyřešili bez potíží. Úloha byla díky nepřesné formulaci zadání, které obsahovalo protimluv, pro nadaného žáka neřešitelná a celá situace byla pro něj neurotizující. Při řešení matematických úloh si běžní žáci uvědomují, že v úlohách, které se váží k realistické situaci, učitel zkoumá dovednost žáků aplikovat početní operaci, apod., ale reálnost kontextu pro ně není důležitá (Rendl & Vondrová et al., 2013). Zdá se, že žák s matematickým nadáním v některých situacích hůře (než vrstevníci) odhaduje očekávání učitele a drží se přesně zadání úlohy.

- *Rozdělujeme koláče na talíře. Jestliže dáváme na talíř 6 koláčů, dva koláče zbudou. Kdybychom dávali na talíř 8 koláčů, zůstane jeden talíř prázdný. Kolik je koláčů a kolik talířů?*
  Zdroj úlohy: (Blažková, Vaňurová, 2010).

Martin si opakovaně pročítal zadání úlohy, udělal si nákres (obrázek 8), ze kterého je zřejmé, jak přemýšlel, a znovu se vracel k zadání úlohy. Obrázek je velmi malý a i z jeho vnějších projevů byla patrná neurotizace. Za předpokladu, že by byla úloha formulována precizně, by ji Martin pravděpodobně vyřešil rychle, zpaměti, bez potřeby si něco zapisovat. Protože byl bezradný, pokusil se řešit úlohu graficky s využitím obrázku:


:

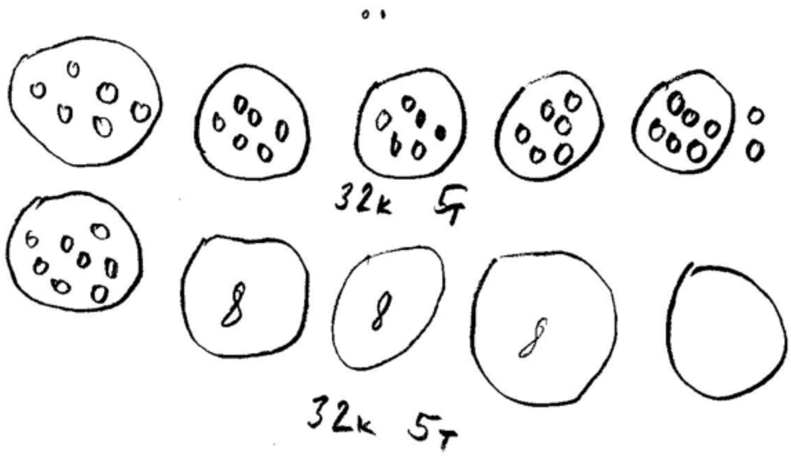
Obrázek 8. Martinův pokus o řešení nepřesně formulované úlohy.

Nejprve zakreslil 6 malých kruhů (v konfiguraci jako na hrací kostce) znázorňujících koláče. Poté dokreslil větší kruh znázorňující talíř tak, aby 2 koláče ležely mimo talíř. Držel se striktně informací z druhé věty zadání, že má k dispozici

6 koláčů a v situaci, kdy dává na talíř 6 koláčů, mu 2 koláče zbudou. To je ale protimluv, protože, když dá ze 6 koláčů 6 koláčů na talíř, nezbude mu žádný. Když mu 2 zbudou, na talíři musí být jen 4. Může zvažovat situaci, že na talíř dá 6 koláčů a 2 mu zůstanou, z čehož plyne, že jich původně bylo 8, ale na talíř položil jen 6 a 2 zbyly. Což je ale v rozporu s třetí větou zadání, ze které plyne, že když dá na talíř 8 koláčů, zůstane mu prázdný talíř. Znovu zkusil řešit úlohu s využitím obrázku, zakreslil si doprostřed stránky dva velmi malé kruhy (dva koláče, které zbyly) a opakovaně a bezradně si četl zadání. Úlohu jsme přeformulovali:

- *Kdybychom dávali na talíře po 6 koláčích, dva koláče zbudou. Kdybychom dávali na talíře po 8 koláčích…*

Žák poté vyřešil úlohu bez potíží, bylo ale patrné pomalu opadávající napětí z řešení předchozí neřešitelné úlohy. Přestože již výsledek zřejmě zjistil, kreslil precizně obrázek – zaznamenával rovnou správný počet koláčů i talířů. Z toho plyne, že výsledek s pomocí obrázku již nehledal.



Obrázek 9. Martinovo grafické řešení přeformulované úlohy.

Budínová a kol. (2018) se v pěti případových studiích zabývali otázkou, jak provádět prvotní identifikaci nadaného a „slabého“ žáka v matematice a jak je systematicky vzdělávat. Popisují situaci, kdy byly žákům 3. ročníku ZŠ zadány soubory diagnostických slovních úloh. Slabý žák řešil úlohy, které vycházely ze základního učiva, například:

- *Učitel dával sešity na hromádky po pěti sešitech. Měl celkem 20 sešitů. Kolik hromádek vytvořil?*

V jeho řešeních se projevily problémy s porozuměním textu (byl slabý také v českém jazyce – neúplně čtení nebo nesprávné porozumění), neupevněné násobilkové spoje, malá orientace v tabulce násobků, kterou mohl při řešení úlohy používat. Při řešení úloh pracoval bez nadšení, zřetelně mu chyběla motivace.

Žák s nadáním na matematiku řešil úlohy, které nevycházely ze základního učiva, například:

- *Maminka a tatínek mají dohromady 69 roků, tatínek je o 3 roky starší než maminka. Kolik je každému z nich roků?*

Všechny úlohy řešil experimentem, některé úlohy řešil vhledem. U řešení kombinatorických úloh měl problém se systematickým vypisováním možností. Geometrické úlohy řešil bez problémů.

Mimořádně nadaný žák Radek (jméno bylo změněno) je žákem 4. ročníku ZŠ[15]. Má perfektní vhled do číselných oborů, výborně počítá zpaměti i písemně se zlomky a desetinnými čísly. Projevuje výbornou geometrickou představivost. Většinu problémových úloh promýšlí zpaměti, nepotřebuje zápisy, vše řeší „v hlavě“. Zvládá počítání ve dvojkové číselné soustavě. Dává přednost logickým úlohám, které bere jako výzvu (často používá pokyn „neradit!), velmi snadno a přehledně řeší úlohy typu „zebra“. Má problémy se zápisem čehokoliv, zpravidla začíná psát uprostřed papíru. Často odbíhá od tématu („víte, že…“) a uvede nějakou zajímavost třeba z astronomie.

Autorka případové studie však zjistila, že se vzděláváním tohoto žáka se ukázal značný problém. Přestože se rodiče snažili najít školu, která by žáka rozvíjela na úrovni jeho schopností, bylo obtížné ji najít. Škola s rozšířenou výukou matematiky mu nevyhovovala proto, že učitelka vyžadovala plnění základních úloh, a až je splní, dostane úkoly navíc. Radek nebyl schopen se zaujetím stále počítat to, co už dávno umí, a další podněty ke svému rozvoji nedostával. Jako optimální se v dané situaci osvědčila výuka na malotřídní škole blízko místa bydliště, která mu vyhovuje i po stránce sociální. Učitelka je empatická, spolužáci kamarádští, výuka matematiky je zajišťována individuálním vzděláváním dalším pedagogem a posilována individuálními konzultacemi na vysoké škole. Pro individuální konzultace jsou úlohy voleny tak, aby v jiném, širším kontextu postihovaly základní učivo a postupně rozšiřovaly další témata mimo učivo 1. stupně základní školy (posloupnosti, funkce aj.).

Na několika případových studiích citovaná studie naznačila, s jak různými typy žáků se učitelé prostřednictvím individualizované výuky setkali (kromě žáků s nadáním na matematiku také se žáky se speciálními vzdělávacími potřebami – dyslexií, autismem, ADHD) při řešení konkrétních úloh. Současně přesvědčivě ukázala základní předpoklad efektivního vzdělávání širokého spektra žáků: rozvinuté profesní kompetence učitele a zaujetí učitelskou profesí.

[15] Radek má mimořádné znalosti v různých vědních oborech, zajímá se o astronomii, programování. Nejraději čte návody k nejrůznějším zakoupeným předmětům (jeho vyjádření: dospělí nečtou návody pořádně, nedočtou je do konce).

Výzkumná část

Studium teoretických pramenů k tématu práce, tj. k problematice učebních úloh a jejich řešení žákem primární školy, se stalo východiskem pro přípravu a vlastní realizaci jednotlivých výzkumných šetření. Poznatky a zkušenosti získané autorkou při přípravě soutěžních testů v kategoriích Cvrček a Klokánek a jejich vyhodnocení potvrzují, že analýza učebních úloh ze soutěže a jejich řešení žákem se může stát zdrojem užitečných informací pro edukační praxi v řadě oblastí.

Skutečnost, že této soutěže se účastní také žáci, kteří nepatří mezi žáky s nadáním na matematiku, otevírá podle našeho názoru prostor pro zdůraznění motivační stránky soutěže. Nejde přitom o absolutní dosažené výsledky žáků, například ve smyslu „motivace k vítězství" - individuálního úspěchu žáka či reprezentace třídy nebo školy, i když je zřejmé, že zejména v posledních letech právě akcent na vítězství či úspěch ve třídě nebo ve škole značně sílí vzhledem ke vzrůstající popularitě soutěže, rostoucímu počtu účastníků a prestiži úspěšných řešitelů.

4. Nestandardní úlohy, žákovské strategie jejich řešení ve světle vlastních výzkumných šetření

4.1 Úlohy v matematických soutěžích

4.1.1 Matematické soutěže

Vnímání určitého souboru úloh se mění jeho uvedením v kontextu slova „soutěž". Asociace spojované s tímto slovem jsou v mnohém shodné s obvyklým významem – soutěž o nejlepšího, závodění, závod, utkání, boj, také konkurenční boj. Výstižné jsou také vazby k tomuto slovu – s kým, oč, proti komu, v čem. Do jisté míry mohou být zarážející některé přívlastky vážící se k soutěži. Soutěž může být dravá, nekalá, ostrá, volná, ale také zdravá soutěž. Ve výkladovém slovníku nalezneme dvě roviny významu slova „soutěž": 1. Situace, ve které dva nebo více lidí nebo skupin se snaží dostat něco, co nemůže mít každý. 2. Událost, které se lidé účastní, aby zjistili, kdo je nejlepší v určité činnosti. Termín „soutěž" však může nabývat ještě jiné významové dimenze. Jedním z těchto rozměrů je hravost, kterou lze uplatnit i ve významu soutěže v matematickém vyučování. Pro soutěž i hru můžeme nalézt mnohé společné atributy: obě aktivity jsou motivovány prožitky, mají závazná pravidla, jsou provázeny pocity napětí a radosti. Hartl, Hartlová (2000) takové soutěže dělí do dvou kategorií. V první z nich je dominantní prvek náhody. Ve druhé situaci je vše založeno na úporném úsilí jednotlivce či skupiny. I v pojetí Průchy (2002) má hra řadu aspektů společných se soutěží: poznávací, procvičovací, emociální, pohybový, motivační, tvořivostní, pro mnohé i rekreační a snad pro všechny učitele také diagnostický aspekt.

Uvedené přístupy jsou reflektovány také školskou praxí. Učitelé obvykle znají a využívají soutěží ve dvou odlišných významech s různými didaktickými cíli, záměry a přístupy:

- "uvnitř" vyučovací hodiny jako krátké "pětiminutovky", "denní cviky" či "početní rozcvičky" obvykle k procvičení a fixaci základních počtářských dovedností, často realizované formou jednorázové nebo etapovité didaktické hry. Takto koncipované soutěžení jednotlivců nebo skupin žáků je organickou součástí vyučovacího procesu (může vést ke krátkodobému nebo střednědobému školnímu projektu), metodou řízení učební činnosti žáků a prostředkem (nástrojem) učení žáků,
- "vně" výukového procesu, i když ve škole realizované celé nebo zčásti. Celostátními soutěžemi zaměřenými k předmětu jsou například Matematická olympiáda, Pythagoriáda a Matematický klokan. V tomto významu budeme matematickou soutěž vnímat v dalším textu práce.

Pravděpodobně nejznámější soutěží uvedeného typu s nejdelší tradicí je Matematická olympiáda. Ve školním roce 2019/20 proběhl pod odbornou garancí Jednoty českých matematiků a fyziků již 70. ročník. Soutěží se v několika věkových kategoriích: kategorie A, B, C pro studenty středních škol, kategorie Z9 – Z6 pro žáky jednotlivých ročníků 2. stupně ZŠ, kategorie Z5 je určena pro žáky 5. ročníku ZŠ. Zejména vyšší kola Matematické olympiády lze označit jako soutěže výkonové. Jejich smyslem je podnítit nadané studenty k hlubšímu poznání a většímu nasazení pro matematiku. Zde úlohy jen volně navazují na školní učivo matematiky, obvykle vyžadují hlubší prostudování některého matematického tématu, mohou využívat vedle nadání a znalostí také zkušenosti řešitelů s určitým typem soutěžních úloh. Slouží k vytipování žáků nadaných pro matematiku s cílem získat je pro další studium, pomáhají udržovat zájem žáků o matematiku a rozvíjet matematické schopnosti talentovaných dětí. Soutěž na konkrétní škole může přispět vytváření vhodného klimatu a ke zvyšování popularity matematiky jako školního předmětu.

Význam matematických soutěží nelze ovšem spatřovat pouze ve vyhledávání a rozvíjení matematických talentů nebo v absolutizaci výsledků žáků ve smyslu reprezentace školy jako prostředku zvyšování její prestiže. Soutěžní úlohy umožňují i mnohem širší bezprostřední využití ve vyučovacím procesu. Společná analýza řešení úloh po skončení soutěže nebo zařazování úloh ze starších ročníků do vyučování mohou vytvářet prostor pro diskusi, hledání i obhajování žákovských řešení, používání argumentů vlastních i přijímání argumentů jiných. Výsledky žáků v soutěžích se mohou v některých případech lišit i od jejich hodnocení a klasifikace v matematice. Tím může řešení soutěžních úloh přispívat ke zpřesnění a objektivizaci hodnocení: pomoci učiteli diagnostikovat dosud neodhalené schopnosti a potence žáků, korigovat dosavadní představy učitelů. K tomu mohou přispět i spontánní rozhovory a besedy se žáky po skončení soutěže. Žákovské reflexe vlastního výkonu (*Kolik myslíš, že máš správně vyřešených úloh? Čemu jsi v zadání nerozuměl? Které úlohy byly pro tebe nejtěžší a které nejlehčí?)* mohou poskytovat učiteli cennou zpětnou vazbu a řadu dalších pedagogicky využitelných podnětů.

Soutěžní úlohy nabízejí možnost potencionálního využití interdisciplinárních vztahů a souvislostí, například matematiky s výchovou dětského čtenáře. Pohádkové náměty nebo v úloze vystupující pohádkové či literární postavy vytvářejí prostor pro dosahování formativních cílů často efektivněji než klasické vyučování, např. s využitím dramatizace známého pohádkového příběhu, diskuse nad literárním či jinak ztvárněným dílem na základě vlastní četby nebo sledování filmu či televizního programu:

- *Pinocchio měl nos dlouhý 9 cm. Pokaždé když zalhal, prodloužil se mu nos o 6 cm. Když řekl pravdu, nos se mu zkrátil o 2 cm. Pinocchio třikrát zalhal a dvakrát řekl pravdu. Jak dlouhý nos měl potom?*
- *Prófa se jednou zeptal Sněhurky, kolik je jí let. Ta odpověděla: „Jestliže k mému věku přičteš číslo 3, od tohoto součtu odečteš 6 a vzniklý výsledek dělíš 5, obdržíš číslo, které je ciferným součtem čísla 111.“ Prófovi to stačilo. Umíš určit Sněhurčin věk také?*
- *V Zemi obrů musel Gulliver chodit rychleji, než byl zvyklý, jestliže chtěl s obry udržet krok. Zatímco obr udělal 3 kroky, Gulliver jich musel udělat 12. Při cestě z tržiště do královského paláce udělal obr 42 kroků. Kolik kroků udělal Gulliver při stejné cestě?*

4.1.2 Úlohy v soutěži Matematický klokan

Nepřebernou zásobu úloh svým matematickým obsahem, námětem či způsobem prezentace neobvyklých, často vyžadujících od řešitele spíše než matematické vědomosti a dovednosti „pouze“ správný úsudek, postřeh, vhled do problému nebo experiment, poskytuje mezinárodní soutěž Matematický klokan[16]. Typicky "klokanské" úlohy vyžadují spíše postřeh, vtip, nápad než jen zvládnutí algoritmů, na něž je někdy obsah matematického učiva zjednodušován. Řešení úloh z této soutěže považujeme za jeden z možných způsobů pokusit se zbavit matematiku vžité nálepky nudné, nezáživné vědy, určené pouze pro pár vyvolených. Jsou pokusem motivovat široký okruh dětí a přesvědčit je o tom, že při řešení matematických úloh (a v matematickém vyučování vůbec) lze – byť se to mnohým zdá zcela překvapivé – objevit krásu nebo alespoň zajímavost matematiky, zažít pocit radosti a uspokojení z řešení úloh a ze zaslouženého úspěchu, který je výsledkem přemýšlení a uplatnění matematických znalostí a tvořivých schopností. Nezanedbatelný je přitom „faktor vyniknutí“ – ať již „před sebou samým“ nebo vzhledem k učiteli, spolužákům a svému okolí.

V testech jednotlivých kategorií soutěže Matematický klokan jsou uplatněny uzavřené úlohy s vícenásobnou volbou (multiple-choice). Úlohy pro jednotlivé kategorie soutěže se vybírají na každoročním setkání zástupců pořadatelských zemí. Účastníci setkání mají k dispozici množinu úloh nabídnutých jednotlivými účastnickými zeměmi. Výběr nejvhodnějším úloh je velmi náročnou činností. Úkolem účastníků je rovněž

[16] Podrobnosti o české verzi soutěže, aktuální data i historie minulých ročníků v ČR jsou na webové stránce www.matematickyklokan.net. Zde jsou také sborníky obsahující soubory všech úloh z jednotlivých kategorií soutěže včetně správných řešení. Aktuální údaje o mezinárodních souvislostech soutěže lze nalézt na webových stránkách http://www.mathkang.org; http://www.aksf.org./

hledání vhodného pořadí úloh v testu související s odhadováním jejich obtížnosti, distribuce správných odpovědí a stanovení distraktorů, ale také zajištění jazykově přesné formulace úloh v jednotlivých mateřských jazycích[17]. Úlohy ze soutěže Matematický klokan jsou zcela unikátní v tom, že prakticky stejné úlohy řeší ve stejném čase několik milionů účastníků soutěže v několika desítkách zemí celého světa.

Řešiteli je nabídnuto pět odpovědí, z nichž je vždy správná pouze jedna. Pokus o analýzu distraktorů při řešení uzavřených nestandardních úloh, které žáci použili, a chyb, kterých se dopustili, může podle našeho názoru inspirovat učitele k další práci s učebními úlohami při jejich dlouhodobějším edukačním působení. Současně je příležitostí ke konfrontaci řešitelských postupů účastníka soutěže s očekáváním učitelů, která může korigovat někdy zjednodušené soudy učitele o schopnostech, vědomostech a dovednostech žáků. Úlohy jsou ovšem obvykle obtížnější, náročnější na matematické znalosti žáků i jejich abstraktní matematické myšlení. Žák, který nechce pouze „hádat“, ale skutečně úlohu vyřešit, a teprve následně své řešení konfrontovat s nabídkou odpovědí, se obvykle neobejde bez pomocných výpočtů, poznámek, nákresů, jejichž prostřednictvím se pokouší získat vhled do úlohy a jejího řešení. Tyto materiály považujeme za velmi cenný materiál pro učitele - lze je využít k rekonstrukci žákovských postupů a k přesnějšímu pochopení toho, co je z pouhého „vyplnění“ testu patrné třeba jen v náznaku nebo vůbec ne.

V uplynulých letech jsme analyzovali soutěžní úlohy a jejich řešení žáky 1. stupně základní školy z různých pohledů. Dílčí poznatky z kvantitativního i kvalitativního výzkumu jsme publikovali v několika statích (Nováková, 2015; 2016; 2017). V rigorózní práci jsme si položili otázku, zda může řešení soutěžních úloh přispívat k postupnému rozvíjení matematického, tj. abstraktního, formálního myšlení žáků a otevírání prostoru pro budování jejich porozumění realitě okolního světa skrze symbolický jazyk matematiky. Předpokladem je přitom širší využití soutěžních úloh ve výuce, přesahující horizont jednorázové matematické soutěže - například když učitel vhodně zařazuje soutěžní úlohy do výuky, společně řeší se žáky vybrané úlohy, využívá možnosti řešení soutěžních úloh při systematické individuální práci jako součást vzdělávání a rozvoje osobnosti žáků.

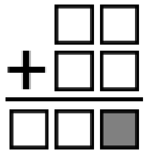
V odborné monografii (Nováková, 2016) jsme uvedli několik námětů pro práci se soutěžními úlohami ve školní edukaci. Jsou koncipovány tak, aby umožnily přiřadit jednotlivé úlohy k tematickým okruhům a očekávaným výstupům Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání a nabídly možný - v textu uvedený - způsob řešení úloh k vlastnímu posouzení učitelem. Zadání všech je možné najít ve sbornících minulých ročníků na webové stránce soutěže Matematický klokan.[18]

[17] Každoročně v lednu se setkávají garanti jednotlivých kategorií se skupinou zkušených učitelů různých stupňů a typů škol, na kterém společně připravují českou verzi soutěžních úloh.
[18] Zadání jsme upravili do podoby otevřených úloh.

Úloha 1:

Tematický okruh: Číslo a početní operace, očekávaný výstup: žák řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace. Úlohu je možno ovšem považovat za nestandardní a zařadit ji do tematického okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy.

- *Napiš každou z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 do čtverečků, aby bylo sčítání správné. Která číslice bude v šedém čtverečku?*

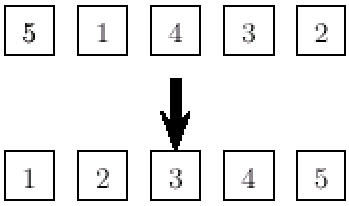


Úlohu typu jednoduchého algebrogramu lze zadat jako uzavřenou v podobě, která je uvedena v soutěži Matematický klokan. Učitel nemusí ovšem nabídku odpovědí uvést a může převést úlohu na otevřenou, resp. divergentní (je zřejmé, že ke správnému součtu 105 lze dospět ze sčítanců 42 + 63, 43 + 62, 62 + 43, 73 + 42). Strategie řešení je založena na experimentu, při kterém se využije znalosti zápisu čísel v desítkové soustavě, vlastností početních operací sčítání a odčítání a dovednosti počítání zpaměti (na místě stovek musí být 1, číslice 0 nemůže být u sčítanců na pozici desítek).

Úloha 2:

Tematický okruh: Nestandardní aplikační úlohy a problémy, očekávaný výstup: žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací.

- *Na stole leží pět karet označených čísly 5, 1, 4, 3, 2. Tvým úkolem je seřadit je do následujícího pořadí: 1, 2, 3, 4, 5 (prohlédni si obrázek). Vyměnit můžeš kterékoliv dvě karty. Jaký nejmenší počet výměn musíš udělat?*



Řešení úlohy je založeno na (myšlenkovém) experimentu, který může být doprovázen písemným záznamem jednotlivých kroků záměny karet. Charakteristická je absence matematických pojmů a známých numerických postupů, ale také zde přítomné „aranžmá“ úlohy s grafickým znázorněním výchozí situace. Ke správnému řešení vedou tři výměny karet, které mohou být postupně zapsány například takto:

5 1 4 3 2 → 2 1 4 3 5 → 1 2 4 3 5 → 1 2 3 4 5, nebo takto

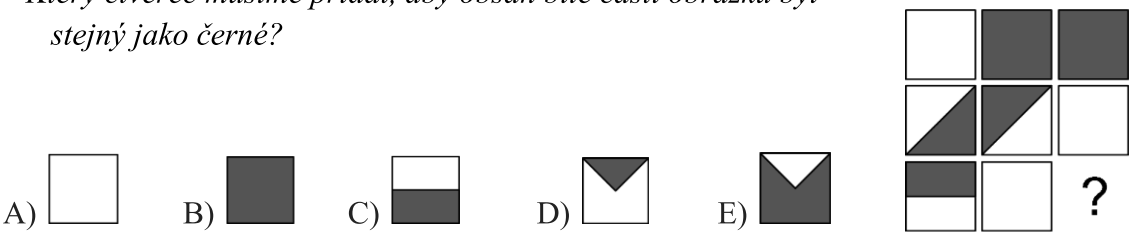
5 1 4 3 2 → 1 4 3 2 5 → 1 3 2 4 5 → 1 2 3 4 5.

Divergentní charakter úlohy poskytuje příležitost pro hledání a objevování, následnou diskusi a argumentaci žáků (je možno najít ještě další způsoby řešení?)

Úloha 3:

Tematický okruh: Geometrie v rovině a v prostoru, očekávaný výstup: žák odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů.

- *Který čtverec musíme přidat, aby obsah bílé části obrázku byl stejný jako černé?*

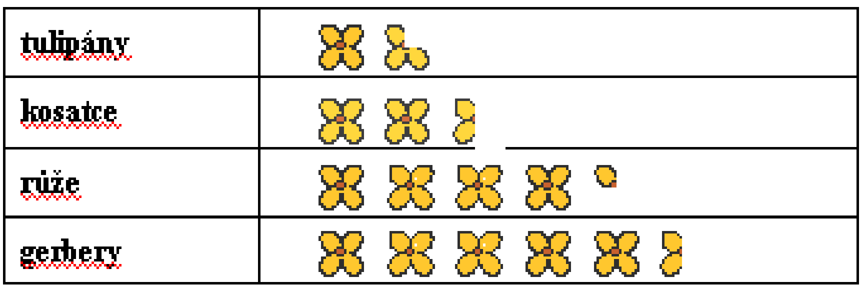


Uzavřená úloha s výběrem z 5 odpovědí. Správná odpověď *B)* je založena na porovnání obsahu černých a bílých čtverečků - ke třem bílým je třeba doplnit třetí černý čtvereček. Zbývající tři čtverce jsou již rozděleny na dvě stejné části, bílou a černou. Řešení úlohy rozvíjí geometrickou představivost v rovině, využívá mentální manipulaci (přemisťování čtverců).

Úloha 4:

Tematický okruh: Závislosti, vztahy a práce s daty, očekávaný výstup: žák čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy.

- *Tabulka nás informuje, kolik květin roste v botanické zahradě. Když se Tomáš zeptal zahradníka, zjistil, že v zahradě je 35 tulipánů, 50 kosatců a 85 růží. Kolik roste v zahradě gerber?*



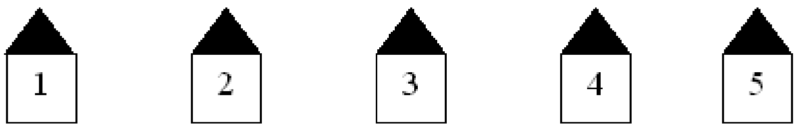
Podmínkou úspěšného řešení je dovednost číst a interpretovat údaje v diagramu Zadání úlohy poskytuje informaci o tom, že jeden okvětní lístek na obrázku květiny v diagramu vyjadřuje 5 květin: tulipánů je 35, proto v diagramu je 7 okvětních lístků, atd. Odtud vyplývá správné řešení - gerber je 110.

Úloha 5:

Tematický okruh: Nestandardní aplikační úlohy a problémy, očekávaný výstup: žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací.

- *Ulice na obrázku se jmenuje Barevná. Najdete tam modrý, červený, žlutý, růžový a zelený dům. Domy jsou očíslovány od 1 do 5. Víme, že:*
- ➢ *modrý a žlutý dům jsou označeny sudými čísly,*
- ➢ *červený dům sousedí pouze s modrým domem,*
- ➢ *modrý dům stojí mezi zeleným a červeným domem.*

Jakou barvu má dům číslo 3?



Řešení logické úlohy typu „zebra“[19] vyžaduje logickou úvahu, založenou na analýze jednotlivých podmínek (Uhlířová, 2004). Nepředpokládá prakticky žádné předběžné matematické poznatky (kromě pojmu sudé číslo, intuitivně chápaného vztahu „mezi“ a výrazu „pouze“). Dům číslo 3 musí být zelený, ale jsou dvě různé možnosti umístění zbývajících domů: Č M Z Ž R nebo R Ž Z M Č.

Zde se otvírá prostor pro společné řešení řízené učitelem po skončení soutěže, založené na aktivitě žáků, objevování, argumentaci a zdůvodňování. Naznačený přístup vyžaduje ze strany učitele rozvinuté oborově didaktické profesní kompetence ve smyslu Shulmanova konceptu didaktické znalosti obsahu (Shulman, 1986; Janík et al., 2013)[20].

Úloha 6:

Tematický okruh: Číslo a početní operace, očekávaný výstup: žák modeluje a určí část celku, používá zápis ve formě zlomku.

- *V misce ležely bonbóny. Filip vzal z misky polovinu bonbónů. Ze zbytku pak Radka odebrala polovinu. Poté vzal ještě Jonáš polovinu zbylých bonbónů. Nakonec zůstalo v misce 6 bonbónů. Kolik bonbónů bylo v misce na začátku?*

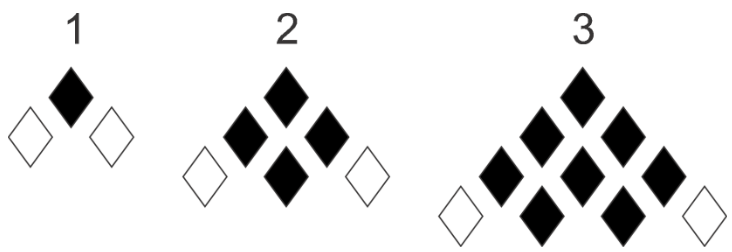
[19] Označují se tak zajímavé logické kombinatorické úlohy různé obtížnosti, které vyžadují správně k sobě přiřadit prvky na základě několika (zdánlivě nepostačujících) informací.
[20] „Výuka nemůže být kvalitní, pokud učitel nezvládá své znalosti obsahu didakticky. Tj. tak, aby mohl vycházet ze zkušeností, představ a způsobu myšlení žáků, aby mohl spojit obsah s činností žáků takovým způsobem, že jeho žáci porozumí obsahu co nejlépe a budou motivováni k učení, aby rozuměl obtížím žáků při učení a mohl inspirovat a podporovat žáky při jejich zvládání.“ (Janík et al., 2013, s. 164).

Řešení úlohy předpokládá porozumění zlomku jako části celku a zlomku „jedna polovina“ jako naznačené dělení dvěma. Celek je v tomto případě prezentován pomocí „oddělitelných“ prvků, bonbónů na misce, ze které se postupně odebíralo. Formulace „Filip vzal polovinu bonbónů“ znamená, že původní počet je třeba dělit dvěma. Tento postup se opakuje ještě dvakrát (Radka, Jonáš). Efektivní řešení úlohy může být tedy založeno na inverzní operaci násobení dvěma k číslu 6: kdyby Jonáš „vrátil“ odebrané bonbóny, bylo by jich $2 \cdot 6=12$, kdyby je vrátila Radka, bylo by $2 \cdot 12= 24$, kdyby je vrátil i Filip, byl by bonbónů původní počet, tj. $2 \cdot 24=48$. V misce bylo původně 48 bonbónů.

Úloha 7:

Tematický okruh: Závislosti, vztahy a práce s daty, očekávaný výstup: žák doplňuje tabulky, schémata, posloupnosti čísel.

- *Na obrázku jsou bílé a černé kosočtverce, sestavené do „trojúhelníků“. V každém dalším trojúhelníku je přidána řada kosočtverců. Krajní kosočtverce každé spodní řady jsou bílé, všechny ostatní jsou černé. Kolik černých kosočtverců má šestý trojúhelník v řadě vytvořené podle stejného pravidla?*



Úloha vychází z motivu Pythagorových figurálních (trojúhelníkových) čísel[21]. Řešení úlohy může být založeno na objevení číselné posloupnosti: 3, 6, 10, 15, 21, 28, … Každé další číslo lze znázornit „trojúhelníkem“, v němž je počet prvků ve spodní řadě o 1 větší než ve spodní řadě trojúhelníka předchozího: 6=3+**3**, 10=6+**4**, 15=10+**5,** 21=15+**6,**… Z podmínky úlohy však plyne, že je od každého následujícího čísla nutno odečíst 2 („krajní kosočtverce každé spodní řady jsou bílé“). Proto bude počet černých kosočtverců 1, 4, 8, 13, 19, **26**. Šestý trojúhelník bude tedy mít 26 černých kosočtverců. Pravděpodobně častější bude řešení grafické: bude se odvíjet od postupného zakreslování obrázků trojúhelníků s černými a bílými kosočtverci podle obrázku v zadání. Ze šestého takového trojúhelníku lze vyčíst hledaný počet černých kosočtverců.

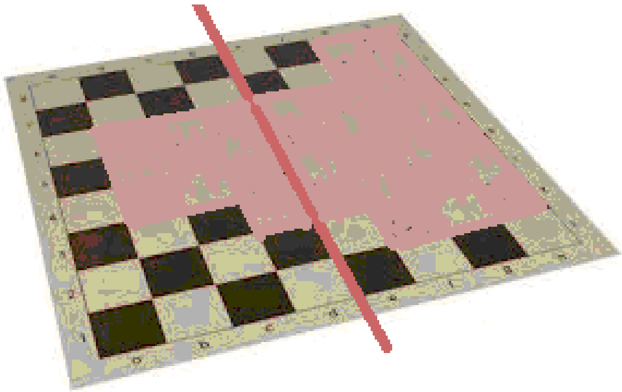
[21] Idea znázorňování přirozených čísel pomocí vhodně uspořádaných předmětů (figur, odtud figurální čísla) se přisuzuje řeckému matematikovi Pythagorovi ze Samu. Trojúhelníková čísla vzniknou tehdy, jsou-li prvky souboru uspořádány do tvaru trojúhelníka. Jeden z námětů na didaktické využití práce s figurálními čísly v prostředí primární školy uvádí Dofková (2008).

Objevování rytmu a pravidelností jako jeden ze způsobů, jak rozvíjet matematické myšlení, je jedním z trendů výuky u nás (Budínová, 2016) i v zahraničí. (Carraher, Martinez, & Schliemann, 2008).

Úloha 8:

Tematický okruh: Geometrie v rovině a v prostoru, očekávaný výstup: žák odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů.

- *Šachovnice je poškozená. Kolik černých čtverců chybí na pravé polovině šachovnice?*



Nedílnou součástí zadání úlohy je obrázek. Předpokládá se uplatnění poznatku, že šachovnice obsahuje 8×8 = 64 polí (32 černých a 32 bílých), na každé polovině šachovnice je 16 černých a 16 bílých polí. Protože na „pravé polovině" jsou na obrázku pouze 4 černé čtverce, chybí jich 12.

Úloha 9:

Tematický okruh: Číslo a početní operace, očekávaný výstup: žák řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace; čte, zapisuje a porovnává přirozená čísla do 1 000, užívá a zapisuje vztah rovnosti a nerovnosti.

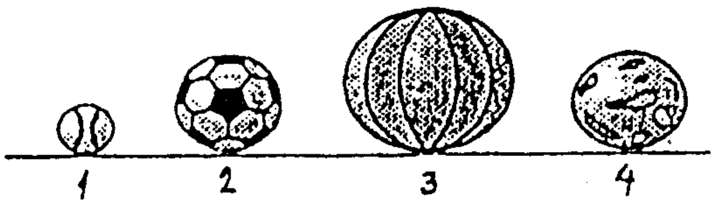
Kolik žabek tito tři pelikáni dohromady chytili?[22]

[22] Zadání úlohy využívá podoby jednoduchého kresleného obrázku, znázorňující „bublinový" rozhovor obvykle několika osob/dětí (v naší úloze ovšem pelikánů), označovaný jako „Concept Cartoon". Texty v bublinách jsou stručné a používají jednoduchý jazyk (Samková, 2020). Jako výuková pomůcka jsou obvykle nabízeny žákům s otázkami „Co si myslíš ty?", „Které děti na obrázku mají pravdu?", „Proč?" Pro podporu přírodovědného, ale i matematického vzdělávání je využívána především ve Velké Británii (Dabell, Keogh, & Naylor, 2008).

Řešení úlohy předpokládá pozorné čtení podmínek, vyjádřených na obrázku (nejméně, méně než, více než) a logický úsudek. Pelikán Peli mohl chytit 2, 3, … žab, pelikán Kanu 1, 2, 3 nebo 4 žáby. Prostřední pelikán musel tedy ke splnění podmínek chytit 3 žáby (to je více než Peli, který chytil 2 žáby, méně než Kanu, který chytil 4 žáby). Součet všech tří úlovků: 2 + 3 + 4 = 9. Úloha má jediné řešení.

Úloha 10:

- *Na polici leží čtyři míče, které patří Adamovi, Michalovi, Ondrovi a Dušanovi. Adamův míč není nejmenší. Míče Michala a Dušana mají stejnou velikost. Dušanův míč sousedí jen s jedním míčem. Urči, který míč patří Ondrovi.*



Analýza podmínek vede postupně k řešení: z toho, že Adamův míč není nejmenší, vyplývá, že Adam může mít míč číslo 2, 3 nebo 4. Z toho, že míče Michala a Dušana mají stejnou velikost je zřejmé, že jejich míče mají číslo 2 a 4, protože však Dušanův míč sousedí jen s jedním míčem, musí mít Dušanův míč číslo 4. Zbývající míč označený číslem 1 je tedy Ondrův. Úloha je poněkud obtížnější. Při společném řešení učitele se žáky podpořila učitelka jejich kreativitu výzvou, aby zdůvodnili význam jednotlivých podmínek a uvedli argumenty podporující své řešení. Pro některé žáky se situace rozjasnila ve chvíli, kdy učitelka dětem poskytla čtyři míče odpovídajících velikostí. Aktivita byla zakončena dramatizací s využitím míčů a dětí jako herců. Čtyři děti představovaly chlapce v úloze a společně se třídou analyzovaly zadání.

4.1.3 Související výzkumy

S kategoriemi Klokánek a Cvrček jsem získala dlouhodobé zkušenosti jako jejich garant, jehož úkolem je připravit českou verzi úloh. Získané podněty bylo možné zohlednit při přípravě, realizaci a interpretaci výzkumných šetření.

4.1.3.1 Výzkum úspěšnosti žákovských řešení úloh z kategorie Klokánek

4.1.3.1.1 Metodologie

Cílem kvantitativního výzkumu bylo stanovit míru úspěšnosti řešení jednotlivých učebních úloh a celkového výsledku žáků 4. a 5. ročníků ZŠ v soutěžním testu kategorie Klokánek v roce 2015. Zjistit, zda výsledek žáků je ovlivněn intervenujícími faktory, vztahujícími se k osobnosti žáků a k charakteru učebních úloh.

Řešení soutěžních úloh žákem lze považovat za pedagogický jev, který má charakter krátkodobé události, probíhající v daných podmínkách a v daném časově vymezeném úseku. Ve struktuře tohoto jevu jsme vyčlenili tři komponenty, které umožnily následnou analýzu směřující k dosažení stanovených cílů výzkumu:

- osobnost žáka primární školy, popsanou množinou identifikačních znaků (pohlaví, navštěvovaný ročník ZŠ, školní klasifikace z matematiky), považujeme za nezávisle proměnnou,
- výkon žáka v soutěžním testu, jehož projevem je reálný výsledek dosažený při řešení souboru úloh, považujeme za závisle proměnnou,
- soubor matematických učebních úloh zadaných k řešení v soutěžním testu.

Byly formulovány následující výzkumné otázky:

1) Jakých výsledků vyjádřených absolutním bodovým ziskem dosáhli žáci v soutěžním testu?
2) Závisí výsledek žáků na typu a charakteru úloh v soutěžním testu?
3) Jsou výsledky žáků v testu ovlivněny jejich osobnostními charakteristikami?

Výzkum se uskutečnil na vzorku žáků, kteří na 15 školách České republiky absolvovali soutěžní test v roce 2015. Celkový počet činil 680 žáků.

4.1.3.1.2 Výzkumná zjištění

Výsledky výzkumu byly podrobně prezentovány v odborné monografii (Nováková, 2016). Uvedeme pouze souhrn hlavních výzkumných zjištění[23].

Závěry k výzkumné otázce 1)

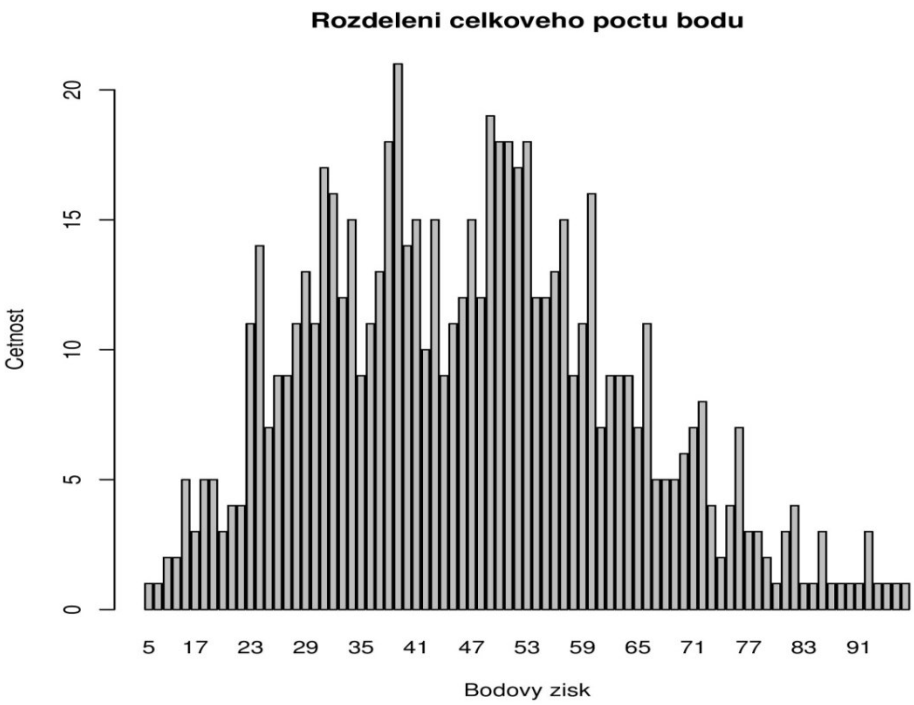
[23] Soubor testových úloh s jejich charakteristikou byl převzat z publikace Nováková, E. (2016). *Analýza úloh ze soutěže Matematický klokan a jejich řešení žáky primární školy.*

Soutěžní úlohy jsou v testu uspořádány podle gradující obtížnosti. Za správné řešení jednotlivých úloh lze získat 3 body (8 úloh), 4 body (8 úloh) nebo 5 bodů (8 úloh). Maximální možný bodový zisk je 120 bodů.

Jestliže účastník nezvolí žádnou odpověď, nezíská žádný bod, odpoví-li nesprávně na kteroukoli úlohu, 1 bod ztrácí. Každý účastník vstupuje do soutěže s bonusem 24 bodů – v případě, že všechny úlohy vyřeší nesprávně, dosáhne celkem 0 bodů.

Celkové výsledky žáků v soutěžním testu (hrubé skóre žáků) byly evidovány a statisticky vyhodnoceny. Očekávali jsme, že celkové výsledky dosažené jednotlivými řešiteli se budou významně lišit. Náš výzkum přinesl zjištění, vyjádřená následujícími charakteristikami popisné statistiky. Průměrný bodový zisk v souboru 680 řešitelů činil 46,96 bodů (modus 39, medián 47, rozptyl 288,10, směrodatná odchylka 16,97).

Zjištěné výsledky potvrdily naše očekávání, že celkové výsledky dosažené jednotlivými řešiteli se významně liší. Bodový zisk řešitelů v našem souboru se pohyboval od minimální hodnoty 5 bodů po maximum 114 bodů.



Obrázek 10. Graf rozdělení celkového počtu získaných bodů u respondentů výzkumu

Závěry k výzkumné otázce 2)

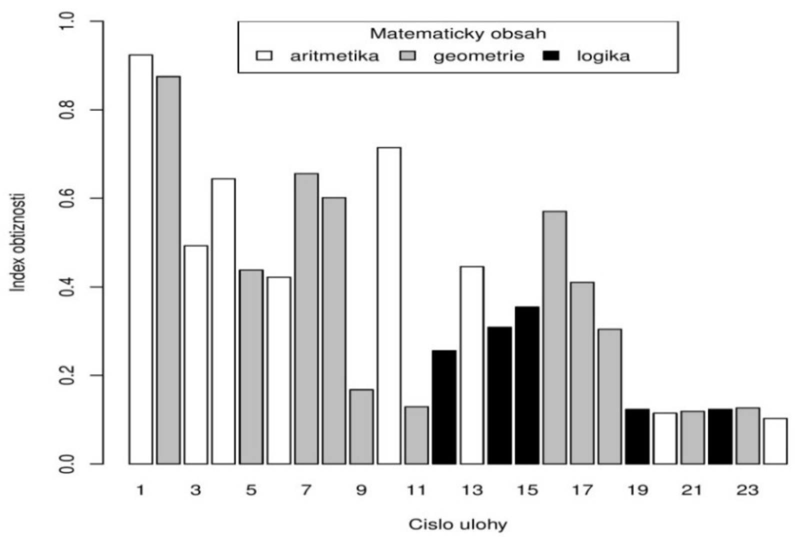
Analýza souboru úloh zadaných v soutěžním testu poskytla řadu údajů popisujících úlohy z různých stránek, v různých rovinách a majících různou poznávací hodnotu. Obsahová („jevová“) analýza odpovídá na otázku, které matematické jevy (pojmy, algoritmy, pravidla,…) jsou obsahem učebních úloh – sleduje se tedy odborně předmětové kritérium.

Při sestavování mezinárodní verze soutěžních testů se úlohy tradičně zařazují do tří základních matematických oblastí:

- aritmetika, teorie čísel a algebra,
- geometrie (planimetrie, stereometrie a další skupina úloh, obtížně zařaditelných, označovaných jako úlohy na rozvoj prostorové představivosti),
- úlohy „logické", často z oblasti kombinatoriky.

Uvedené třídění úloh - které nemusí být a také není disjunktní (některá z úloh může vykazovat znaky, umožňující zařazení do dvou nebo i několika matematických oblastí a témat učiva), jsme použili i v našem výzkumu[24].

Posouzení úspěšnosti řešení jednotlivých soutěžních úloh vzhledem k jejich matematickému obsahu či tématu učiva lze vyčíst z následujícího grafu. Z osmi úloh s nejnižší úspěšností řešení jsou dvě úlohy aritmetické, čtyři úlohy geometrické a dvě úlohy logické. Současně se ukázalo, že ze čtyř geometrických úloh s velmi nízkou úspěšností řešení jsou úlohy vyžadující nikoliv prokázání znalosti konkrétního geometrického učiva, dovednost geometrických konstrukcí nebo výpočtů, ale schopnost „geometrické inteligence", představivosti v rovině nebo prostoru. Výsledek se zdá naznačovat, že v primárním matematickém vzdělávání stále přetrvává v rámci geometrické komponenty učiva malá pozornost právě rozvíjení obecnějších geometricky zaměřených schopností. Přestože je rozvoj prostorové představivosti obecně považován za jeden ze stěžejních cílů geometrického vzdělávání, není této významné schopnosti a jejímu rozvíjení stále ještě věnován dostatečný prostor. Uvedenou skutečnost potvrzují rovněž výstupy jiných výzkumných šetření i teoretických studií (Molnár, 2004; Rendl, Vondrová et al., 2013).

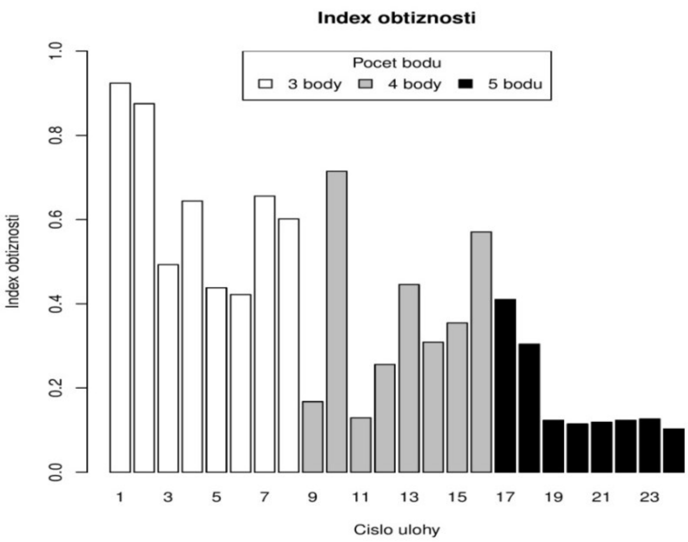


[24] Jsme si vědomi určité subjektivity při posuzování charakteru úloh a z ní vyplývajícího zařazení do jednotlivých tříd, rozhodovali jsme se vždy podle převažujících znaků.

Obrázek 11. Graf úspěšnosti řešení úloh podle jejich matematického obsahu

Předchozí kritérium pro třídění testových úloh do značné míry souvisí i s posledním hlediskem, které jsme ovšem v naší analýze již dále nezohlednili. Rozlišili jsme úlohy, které jsou prezentovány s využitím obrázku nebo jiného grafického znázornění a úlohy bez tohoto znaku (zadané matematickou symbolikou nebo pouze textem). Zadání úlohy prostřednictvím obrázku významně převažuje - je použito v 19 úlohách (79,2 %), zadání prostým textem nebo pouze matematickou symbolikou je užito v pěti úlohách.

Z následujícího grafu jsou zřejmé rozdíly mezi úspěšností skupin tříbodových, čtyřbodových a pětibodových úloh; „pětibodové“ (nejobtížnější) úlohy byly řešeny s nejmenší mírou úspěšnosti.



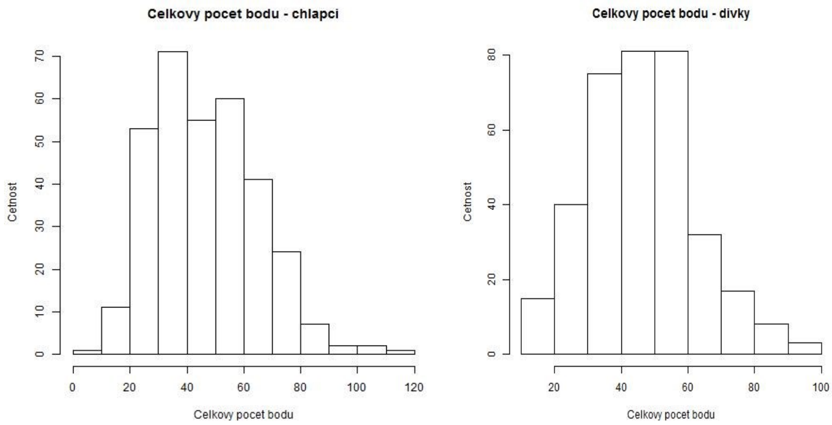
Obrázek 12. Graf úspěšnosti řešení úloh podle jejich bodové hodnoty.

Závěry k výzkumné otázce 3)

Výsledky statistické analýzy zjištěných dat umožnily posoudit vliv předpokládaných faktorů intervenujících do celkového výsledku respondentů. Těmito faktory, v našem výzkumu nezávisle proměnné, které mají charakter osobnostních předpokladů žáků, byly v souladu s cíli výzkumu definovány tři: pohlaví, navštěvovaný ročník základní školy, známka z matematiky.

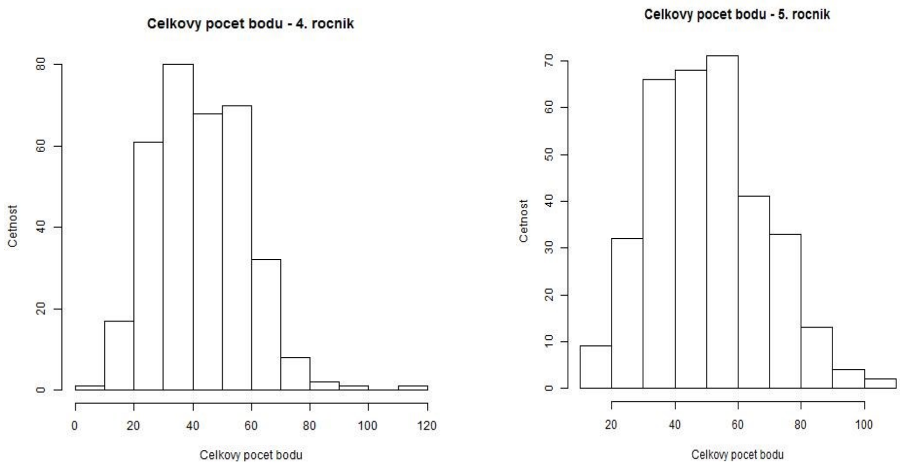
Průměrný bodový zisk získaný chlapci byl 47,20, dívkami 46,73. Na základě testování hypotézy o vlivu pohlaví respondentů na výsledky testu dvouvýběrovým Wilcoxonovým testem[25] (Nováková, 2016, s. 121) byla nulová hypotéza přijata – mezi výsledky chlapců a děvčat nebyl zjištěn statisticky významný rozdíl.

[25] Dvouvýběrový Wilcoxonův test se používá pro porovnání dvou souborů v situaci, kdy je alespoň v jedné ze skupin porušen předpoklad normality a nemůže být tedy použit standardní t-test. K ověření nulové hypotézy, že oba soubory pocházejí z rozdělení se stejnou distribuční funkcí, se využívá uspořádání hodnot a následného přiřazení pořadí. Jedná se tedy o zástupce skupiny tzv. pořadových testů.



Obrázek 13. Celkové počty bodů získané chlapci a dívkami

Průměrný zisk dosažený žáky 4. ročníku byl 43,23, průměrný zisk dosažený žáky 5. ročníku byl 50,71. Na základě testování hypotézy o vlivu navštěvovaného ročníku na výsledky testu dvouvýběrovým Wilcoxonovým testem (Nováková, 2016, s. 119) byla nulová hypotéza zamítnuta - navštěvovaný ročník má statisticky významný vliv na celkový počet dosažených bodů, žáci 5. ročníku jsou v soutěžním testu úspěšnější.

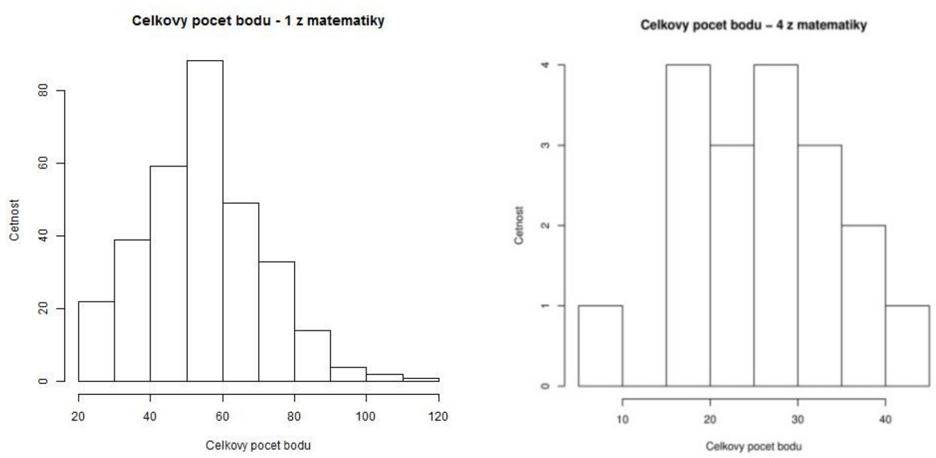


Obrázek 14. Počet bodů získaný žáky 4. a 5. ročníku.

Počty získaných bodů se u žáků klasifikovaných výborně pohybují od 22 do 114 (nejvíce bodů získal jedničkář), průměrný zisk byl 55,00; průměrný zisk žáků klasifikovaných chvalitebně byl 43,48; žáků s klasifikací dobře byl 32,85; žáků s klasifikací dostatečně byl průměrný zisk 26,50. K testování hypotézy o vlivu prospěchu z matematiky vyjádřeného školní klasifikací žáka na celkový výsledek testu byl použit neparametrický Kruskal-Wallisův test (pro více než 2 nezávislé výběry)[26], který zamítl

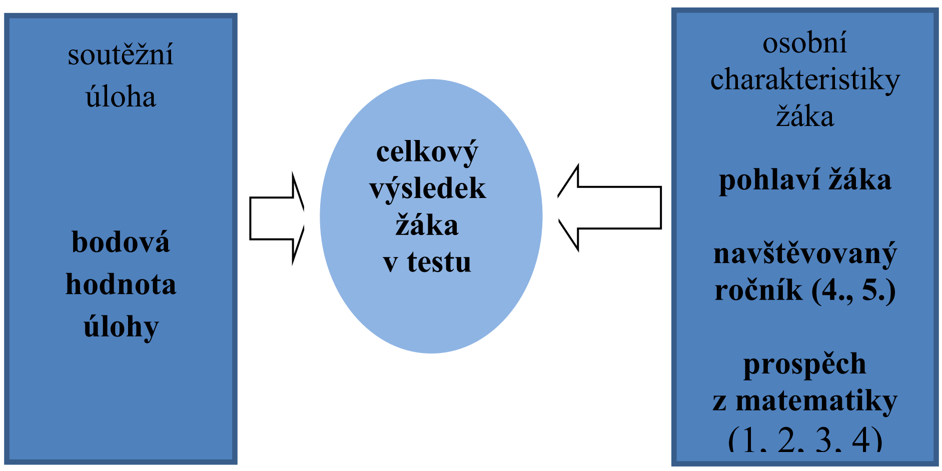
[26] Kruskal-Wallisův test je dalším ze skupiny tzv. pořadových testů, který představuje neparametrickou alternativu jednofaktorové ANOVY a zobecnění dvouvýběrového Wilcoxonova testu pro případ, kdy testujeme shodu distribučních funkcí ve více než dvou skupinách. Tento test se využívá v situaci, kdy data v jednotlivých skupinách nejsou normálně rozdělena, příp. není dodržen předpoklad shody rozptylů.

hypotézu, že známka nemá na výsledek v testu vliv (Nováková, 2016, s. 123). Statisticky významně lepších hodnot dosahují žáci klasifikovaní výborně a chvalitebně oproti žákům klasifikovaným dobře a dostatečně. Klasifikace žáků z matematiky má vliv na celkový počet získaných bodů.



Obrázek 13. Počet bodů získaný žáky s klasifikací výborně a dostatečně.

Empirický výzkum, jehož hlavní zjištění jsme uvedli, byl realizován metodami kvantitativní analýzy s využitím statistických procedur (Nováková, 2016). Nepřinesl žádné zásadně neočekávané závěry. Přesto jeho uskutečnění považujeme za užitečné, protože exaktními výzkumnými procedurami nebylo řešení úloh ze soutěže Matematický klokan v žádné ze soutěžních kategorií v našich podmínkách dosud zjišťováno a posuzováno. Statistickými daty bylo potvrzeno naše - z dosavadních zkušeností vyplývající - intuitivní očekávání, že úspěšnost řešení soutěžních úloh žáky je rozdílná, pohybuje se ve velmi širokém spektru. Svědčí o tom potvrzení hypotéz vztahujících se k vlivu objektivně měřitelných osobnostních charakteristik žáků, za něž považujeme navštěvovaný ročník, pohlaví, školní klasifikaci z matematiky a sídlo školy, na celkový dosažený výsledek.



Obrázek 14. Faktory intervenující do výsledku žáků.

4.1.3.2 Predikce a sebehodnocení jako součást řešení soutěžních úloh

4.1.3.2.1 Teoretická východiska

V jednom dílčím samostatném výzkumném šetření jsme se zaměřili na predikci a sebehodnocení úspěšnosti řešení učebních úloh žáky primární školy (Nováková, 2015). Vedla nás k tomu dosavadní zkušenost, získaná při práci se soutěžními úlohami. V našem výzkumu jsme spojili řešení matematických úloh s obecnější problematikou metakognice, tedy „schopnosti uvažovat o vlastních procesech myšlení a způsobech, jak své myšlení zdokonalit“ (Sternberg 2002, s. 215), neboť se domníváme, že tato spojitost má své odborné ukotvení (Schoenfeld, 1992). Zaměříme se na predikci a sebehodnocení žákova výkonu ve smyslu „reflexe na akci“ a označíme je jako „off-line“ metakognici (Desoete, 2001). Při řešení úloh dochází k řadě kognitivních procesů, které je potřeba pro úspěšné vyřešení úlohy zvládnout.

Souhlasíme se Schoenfeldem (1992), že žáci, kteří umějí promýšlet své strategie učení a řešení úloh, disponují dobrým metakognitivním řízením vlastní činnosti, dokážou predikovat úspěšnost svého řešení a disponují také vyšší úrovní sebehodnocení. Při potížích s řešením nestandardní úlohy přicházejí na řadu metakognitivní procesy. Fisher (1997) v této souvislosti mluví o „metakognitivních žácích“, kteří přemýšlejí o svém myšlení, soustředí se na úkol, vědí, co dělat, když uváznou, a jsou v používání svých strategií úspěšní. Názory na zjištění úrovně metakognice u žáků mladšího školního věku a na možnosti rozvoje jejich metakognitivních procesů se různí. Výzkumy metakognice a autoregulace u tak malých dětí zaznamenáváme jen zřídka, jejich výskyt není příliš rozpracovaný, i když někteří zahraniční autoři, Perry a Drummond (2002) nebo Larkinová (2000) uvádějí, že již žáci mladšího školního věku mohou dosahovat určité úrovně metakognice, že dovedou plánovat, monitorovat i hodnotit své vlastní učení.

Obecně se predikcí rozumí předpověď či prognóza tvrzení o tom, co se stane nebo nestane v budoucnosti (Petráčková & Kraus, 1995). Predikce je závislá na smýšlení žáka o vlastní zdatnosti. Žáci, kteří jsou přesvědčení o svých schopnostech, jsou také úspěšnější ve svých predikcích. Obtížné úkoly pak žáci vnímají jako výzvy, nikoli jako hrozby a přistupují k nim s důvěrou. Stanovují si vyšší cíle a nevyhýbají se náročným úkolům. Žáci, kteří vnímají sami sebe jako kompetentní, jsou úspěšnější a dosahují lepších výsledků než ostatní žáci (Pajers, 2007). S rozvojem metakognice a autoregulace dochází u žáků k rozvoji jejich schopnosti odhadnout sebe sama, což se promítá i do jejich učebních výsledků.

Žák si přirozeně vybere úkol, o kterém věří, že je v jeho schopnostech ho vyřešit, a vyhýbá se těm, které považuje za příliš náročné a podle jeho mínění či odhadu nad jeho síly. Někteří žáci mají ve škole problémy ne proto, že by nebyli schopni uspět, ale protože nezvládnou odhadnout, že na to mají. Naučili se vidět sami sebe jako neschopné zvládnout nároky učiva nebo nevidí jeho smysluplnost. V důsledku toho jsou příčiny možného neúspěchu např. ve čtení nebo matematice přisuzovány přesvědčení žáků a jejich neobjektivní predikci, i když tyto odhady nejsou pravdivé.

V našem šetření jsme se nechali inspirovat výzkumem Zgarbové (2011). Zaměřili jsme se na pokus o zjišťování míry predikce a úrovně sebehodnocení jako součást řešení nestandardních matematických úloh. Rezervoárem nestandardních úloh je soutěž Matematický klokan. Právě úlohy ze soutěže Matematický klokan se zdají být vhodným nástrojem pro zjišťování míry predikce, ale i sebehodnocení žáků. Specifický způsob hodnocení v soutěži Matematický klokan (penalizace za nesprávné řešení úlohy, ale žádná penalizace za neřešení úlohy) vede řešitele k obezřetnosti a ke zvážení míry rizika při tipování záznamu do karty odpovědí v případě, že si není správnou odpovědí jistý. Soutěž tak poskytuje žákům i možnost

a) predikovat svou úspěšnost řešení. Mám na to, abych úlohu vyřešil, pustím se tedy do řešení nebo vyhodnotím úlohu jako příliš obtížnou, časově náročnou, neřeším ji a pokračuji řešením jiné úlohy. Je třeba také vzít v úvahu, že doba vlastní soutěže je časově limitována, proto musím zhodnotit, které úlohy si k řešení vyberu,

b) vlastní řešení úlohy evaluovat. Jsem si jistý, že mé řešení je správné a proto svou odpověď zaznamenám. Nejsem si jistý, mám možnost výsledek nezaznamenat, v konečném důsledku ji tak vynechat a tím do celkového výsledku bodově nepromítnout.

4.1.3.2.2 Metodologie

Cílem výzkumu bylo zjistit, jaká je úroveň „off-line“ metakognice (tj. míra predikce a úroveň sebehodnocení) žáků 4. a 5. ročníku základní školy, a zda se liší podle toho, s jakým úspěchem úlohu vyřeší. Předpokládali jsme, že žáci, kteří budou v řešení úloh úspěšní, dosáhnou významně vyšší míry predikce než žáci neúspěšní. Při formulaci výzkumné otázky jsme operacionalizovali proměnné výzkumného šetření:

a) výkon žáka, který se projevuje mírou úspěšnosti řešení úloh: celkový počet (součet) bodů z testu (max. 20 bodů) z celkového počtu 10 úloh. Správná odpověď byla hodnocena 2 body, částečná 1 bodem, za nesprávnou nebo chybějící nezískal řešitel žádný bod. Každý respondent mohl získat 20 bodů. Podle úspěšnosti řešení úloh jsme řešitele rozdělili na úspěšné se ziskem 20 - 10 bodů a neúspěšné (9 - 0),
b) míra predikce žáků vztahující se k řešení soutěžních úloh, tj. porovnání mezi vnímanou osobní zdatností žáků a jejich skutečným výkonem (max. 20 bodů),
c) úroveň sebehodnocení žáků vztahující se k řešení úloh, tj. porovnání mezi vnímáním úspěšnosti po vyřešení úloh a jejich reálným výkonem (max. 20 bodů).

Byly formulovány dvě výzkumné otázky:

1) Jaká je míra predikce a úroveň sebehodnocení žáků 4. a 5. ročníku základní školy při řešení nestandardních slovních matematických úloh?
2) Jak se liší míra úspěšnosti řešení nestandardních slovních matematických úloh žáků 4. a 5. ročníku základní školy v závislosti na různé míře predikce a úrovni sebehodnocení?

Jako základní výzkumnou techniku jsme použili didaktický test tvořený 10 soutěžními úlohami, který zahrnoval také otázky zaměřené na zjištění míry predikce žáků a jejich úrovně sebehodnocení. Úlohy byly vybrány ze soutěžních testů minulých ročníků kategorie Klokánek a následně upraveny do podoby otevřených testových položek. Každá z úloh má jediné správné řešení. Byly zvoleny úlohy nižší obtížnosti: 8 úloh, které jsou v soutěži ohodnoceny třemi body a 2 úlohy čtyřbodové. Jednotícím faktorem, který „zastřešoval" rozmanitost obsahové stránky úloh (úlohy vyžadující aritmetické výpočty, představa zlomku jako části celku, úlohy vyžadující prostorovou představivost) i způsobu jejich prezentace (zadané slovy nebo textem doplněným obrázkem, kontextové - jako výsledek matematizace reálné situace) byl nestandardní charakter učebních úloh. Test byl shodný pro žáky 4. a 5. ročníku základních škol.

Pokyny pro žáky:

- V testu najdeš zadání matematických úloh. Přečti si postupně všechny úlohy od 1 až po 10, ale zatím je nezkoušej řešit.
- Nejprve zkus odhadnout, jak dokážeš každou úlohu vyřešit. Zakřížkuj u každé úlohy tvoji předpověď. Postupuj od úlohy 1 až po úlohu 10.
- Nyní zkus postupně všechny úlohy vyřešit. Pod zadání každé úlohy napiš své řešení. Můžeš si vzít prázdný papír na pomocné výpočty.
- Nakonec zakřížkuj v tabulce odpověď, jak myslíš, že jsi každou úlohu dokázal(a) vyřešit. Postupuj opět od úlohy 1 až po úlohu 10.

Testové úlohy:

1. *Soňa čtyřikrát hodila hrací kostkou. Celkový počet hozených bodů byl 23. Kolikrát padla šestka?*

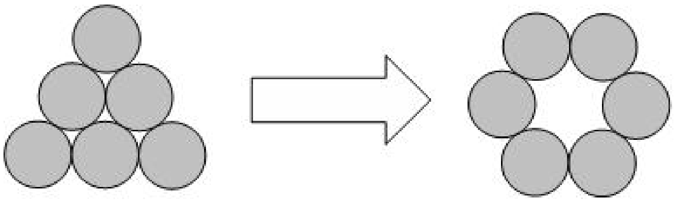
2. *Tři veverky Zrzečka, Rozárka a Pizizubka nasbíraly 7 ořechů. Každá z nich nasbírala jiný počet ořechů, ale každá našla aspoň jeden. Zrzečka nasbírala nejméně ořechů a Rozárka nejvíce. Kolik ořechů našla Pizizubka?*

3. *Vyučovací hodina matematiky začala v 11:50 a trvá čtyřicet minut. Přesně v polovině vyučovací hodiny vletěl do třídy pták. V kolik hodin to bylo?*

4. *Janek, Petr a Lukáš hrají hru. Janek násobí třemi, Petr přičítá 2 a Lukáš odčítá 1. V jakém pořadí kluci počítali, když se od čísla 3 dostali k číslu 14?*

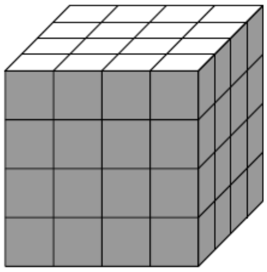
5. *Na oslavě byl každý ze dvou stejných dortů rozdělen na 4 stejné části. Poté byla každá část ještě rozdělena na 3 stejné dílky. Takový dílek dostal každý z účastníků oslavy a 3 dílky ještě zbyly. Kolik lidí bylo na oslavě?*

6. *Karel položil 6 stejných mincí do tvaru trojúhelníka (jako na obrázku vlevo). Jaký nejmenší počet mincí musel přemístit, aby mince tvořily kruh jako na druhém obrázku?*

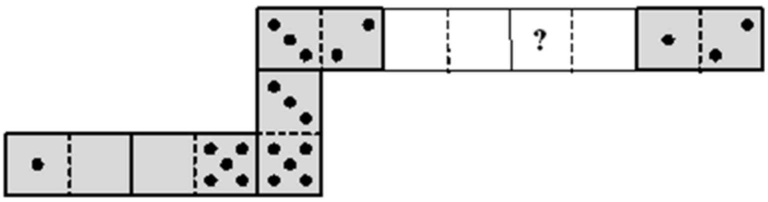


7. *Toník, Kája, Cyril, Zdenda, Eda a František házeli kostkou. Každému z nich padlo jiné číslo. Toníkovo číslo je dvakrát větší než Kájovo, Toníkovo číslo je třikrát větší než Cyrilovo, Zdendovo číslo je čtyřikrát větší než Edovo. Kolik hodil František?*

8. *Velká krychle (podívej se na obrázek) byla sestavena ze 64 malých stejně velkých bílých krychliček. Tomáš natřel 5 stěn velké krychle zelenou barvou. Kolik malých krychliček má 3 stěny zelené?*



9. *Franta sestavil „hada“ ze 7 dílků domina. Přiložil vedle sebe vždy dílky se stejným počtem teček. Na všech dílcích hada bylo celkem 33 teček. Jeho bratr Jirka odstranil dva dílky (podívej se na obrázek). Kolik teček bylo původně na místě označeném otazníkem?*



10. *Jirka zapsal dvě čísla pomocí číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6. Obě zapsaná čísla jsou trojciferná a každou z číslic použil právě jednou. Nakonec obě čísla sečetl. Urči největší možný součet.*

Ke každé úloze v testu byla přiřazena jedna otázka na predikci a jedna otázka na sebehodnocení, tj. celkem 10 otázek zkoumajících míru predikce a 10 otázek zkoumajících úroveň sebehodnocení.

Při vyhodnocování míry predikce a úrovně sebehodnocení jsme nebrali v úvahu souhrnnou hodnotu, kterou žáci zakřížkovali na škále (tj. jejich subjektivně vnímanou hodnotu), ale skutečnou míru jejich predikce a sebehodnocení. To znamená, že jsme jimi vnímanou míru srovnali s jejich skutečným výkonem při řešení testových úloh (v každé úloze zvlášť). Predikoval-li například respondent, že úlohu jistě vyřeší správně a skutečně ji správně vyřešil, byl hodnocen 2 body. Jestliže si nebyl jistý, ale předpokládal, že úlohu správně vyřeší a vyřešil ji správně, získal 1 bod. Pokud predikoval, že úlohu vyřeší správně a nevyřešil ji, nezískal žádný bod. Vztah mezi předpovědí žáka a skutečnou úspěšností řešení úlohy (bodové hodnocení míry predikce) je zachycen v tabulce 2:

Tabulka 2 : Vztah mezi předpovědí žáka a úspěšností řešení úlohy.

předpověď (predikce) žáka	úspěšnost řešení úlohy	
	vyřešil správně	nevyřešil správně nebo neřešil
vím jistě, že úlohu vyřeším správně	2	0
asi úlohu vyřeším správně	1	0
asi úlohu nevyřeším správně	0	1
vím jistě, že úlohu nevyřeším správně	0	2

Zcela analogicky jsme postupovali při vyjádření vztahu mezi sebehodnocením žáka, provedeným následně po vyřešení úlohy, a skutečnou úspěšností řešení - bodové hodnocení úrovně sebehodnocení uvádí tabulka 3:

Tabulka 3: Vztah mezi sebehodnocením žáka a úspěšností řešení úlohy

sebehodnocení žáka	úspěšnost řešení úlohy	
	vyřešil správně	nevyřešil správně nebo neřešil
vím jistě, že jsem úlohu vyřešil(a) správně	2	0
asi jsem úlohu vyřešil(a) správně	1	0
asi jsem úlohu nevyřešil(a) správně	0	1
vím jistě, že jsem úlohu nevyřešil(a) správně	0	2

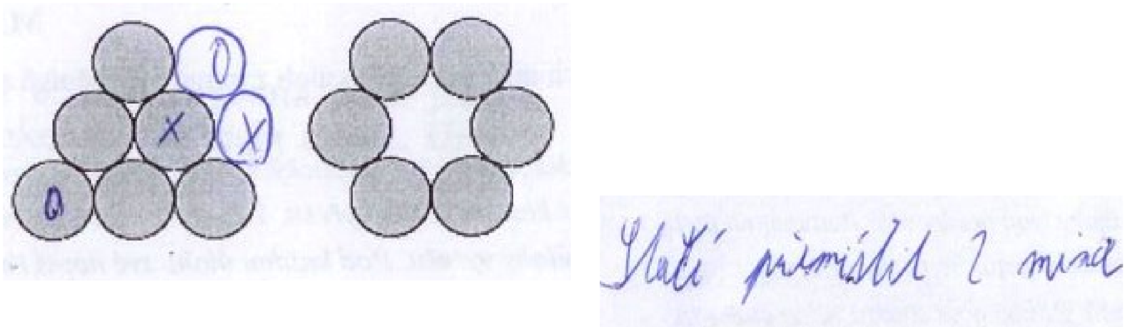
Šetření bylo realizováno v souboru 204 žáků 16 základních škol ve čtyřech krajích České republiky v listopadu 2014. Výzkumný vzorek tvořilo 54 žáků ve věku 9 let (26,9 %), 109 žáků ve věku 10 let (53,4 %) a 41 žáků ve věku 11 let (20,1 %). Získaná data jsme zpracovali v intencích kvantitativního metodologického přístupu, ale také jsme se pokusili o analýzu řešitelských postupů některých respondentů.

4.1.3.2.3 Zjištění z výzkumu. Diskuse a závěry

Sledovali jsme výkon, predikci i sebehodnocení z pohledu jednotlivých úloh i celého žákovského souboru.

Uvedeme dvě žákovská řešení jedné úlohy (zadání viz výše):

Vojtovo řešení



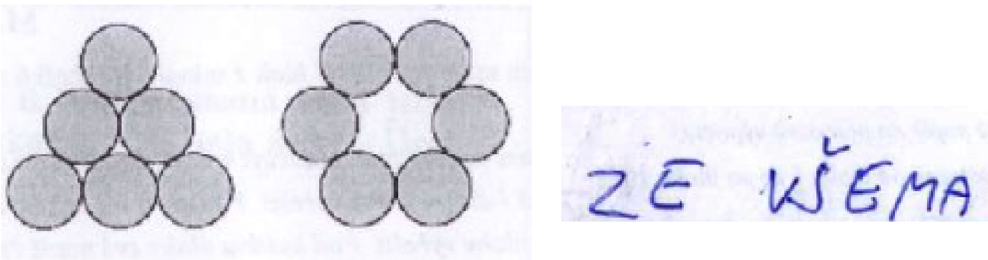
Obrázek 15. Úspěšné grafické řešení úlohy o mincích.

V této úloze Vojta získal 2 body za predikci a 2 body za sebehodnocení. Při predikci vybral možnost "Vím jistě, že úlohu vyřeším správně.", pro sebehodnocení vybral: "Vím jistě, že jsem úlohu vyřešil správně." Úlohu správně vyřešil, což je důvod, proč získal 2 body za predikci i 2 body za sebehodnocení. V celkovém hodnocení Vojta získal 10 bodů za predikci, 11 bodů za sebehodnocení a 14 bodů za samotné řešení úloh.

Nyní se lze zamyslet nad interpretací takové situace. Můžeme se zaměřit na osobnost řešitele či úlohu samotnou, vyjít z písemného řešení nebo z rozhovoru s řešitelem.

Vojtovo grafické řešení je jasné, komentáře jsou správné. Byl si jistý svým řešením. Řešením bylo poměrně malé číslo. Menší je už jen číslo 0 (to nedává smysl volit, protože by mince již musely být v požadované poloze) a číslo 1 (přesunem jedné mince kruh zjevně nevznikne). Vzhledem k malému počtu přesouvaných mincí bylo pro žáky možné řešit úlohu mentální manipulací. Tedy již po přečtení zadání úlohy Vojta řešení "viděl", řešil úlohu vhledem. Úspěšná predikce byla zapříčiněna též skutečností, že úloha byla zadána obrázkem. Přesnost predikce i sebehodnocení však může ovlivnit řada dalších okolností.

Janino řešení



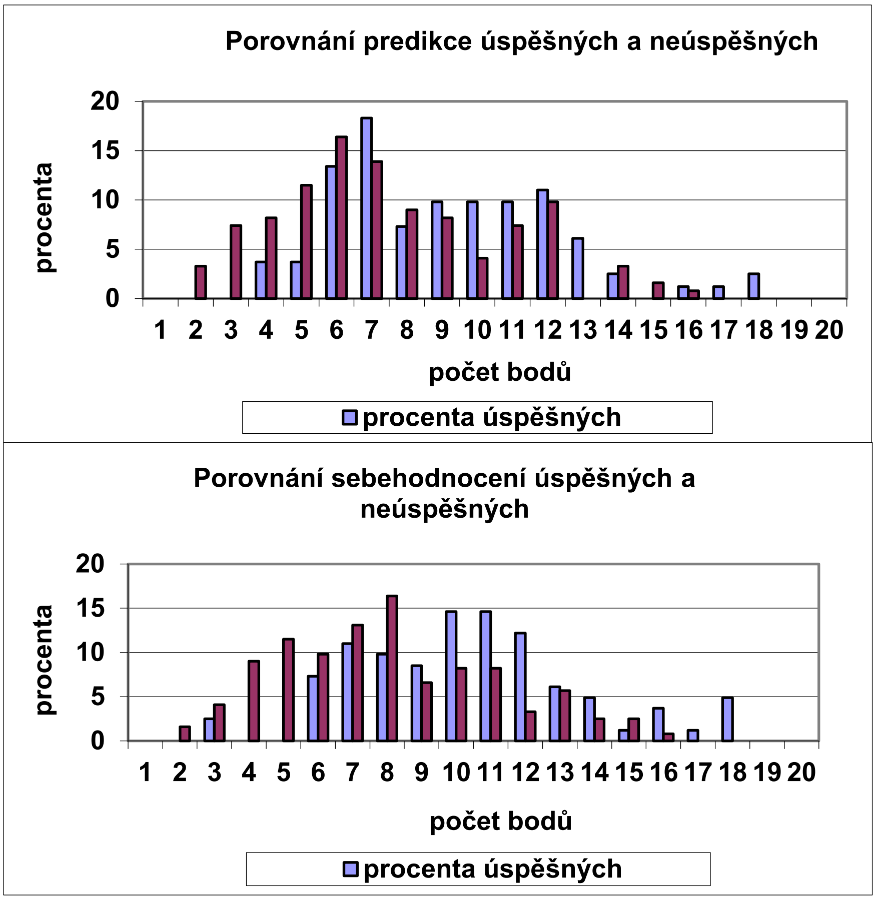
Obrázek 16. Nesprávné řešení – neporozumění úloze.

V této úloze získala Jana 0 bodů za predikci a 0 bodů za sebehodnocení. Predikovala možnost: "Asi úlohu vyřeším správně." Při sebehodnocení zvolila: "Asi jsem úlohu vyřešila správně." V obou případech se mýlila, protože úlohu správně nevyřešila. V celém testu získala 7 bodů za predikci, 10 bodů za sebehodnocení a 2 body za řešení úloh. Řešení Jany je chybné, ale „pouze“ proto, že nevzala v úvahu část otázky v zadání ("...nejmenší počet"). Zajímavé je, že pokud bychom tuto skutečnost pominuli, bylo by Janino řešení správné. Na prvním obrázku je 6 mincí (ve tvaru trojúhelníka), stejně tak jako na druhém (ve tvaru kruhu).

Shrneme-li celkové výsledky, můžeme konstatovat, že se potvrdil náš předpoklad: žáci, kteří budou v řešení úloh úspěšní, dosáhnou významně vyšší míry predikce než žáci neúspěšní. Výzkumem byla ovšem zjištěna celkově nízká úroveň úspěšnosti řešení nestandardních úloh - průměrná úspěšnost 8,39 bodu (tj. 4 úspěšně vyřešené úlohy z 10). Pouze 6 řešitelů (2,9 %) vyřešilo správně všech 10 úloh, 9 řešitelů (4,4 %) nevyřešilo správně žádnou úlohu. Jednu z příčin uvedeného zjištění, které považujeme za znepokojivé, spatřujeme do značné míry v tom, že úlohy nemají charakter typických “školských” úloh, standardně řešených ve výuce matematiky a na které jsou žáci zvyklí. Řešení vyžadovalo porozumění slovně formulovanému zadání v otevřených testových úlohách. Správné řešení není založeno na rutinním výpočtu, vyžaduje spíše vhled do úlohové situace, uplatnění matematických schopností. Jak vyplývá z některých zahraničních výzkumů (Swoboda, 2014), má ovšem zjištění našeho šetření obecnější platnost a není typické pouze pro české školství.

Když se podíváme na míru predikce a úroveň sebehodnocení na vzorku všech respondentů, zjišťujeme, že jsou hodnoty vyrovnané a dosahují poměrně nízkého skóre. Celková míra predikce dosahovala průměrné hodnoty 8,04 bodu z celkového počtu 20 bodů a celková úroveň sebehodnocení dosahovala hodnoty 8,85 bodu z celkového počtu 20 bodů. Zgarbová (2011, s. 128) uvádí hodnoty ještě nižší: celkovou úroveň sebehodnocení průměrně 7,01 bodu z celkového počtu 20 bodů a celkovou míru predikce průměrně 6,68 bodu z celkového počtu 20 bodů.

Mezi úspěšnými řešiteli (10 a více získaných bodů) byly zjištěny průměrné hodnoty výkonu 13,80, predikce 9,16 a sebehodnocení 10,38, mezi neúspěšnými řešiteli byly dosaženy průměrné hodnoty podstatně nižší: výkon 4,92, predikce 7,23 a sebehodnocení 7,89. Úspěšní řešitelé dosahovali významně vyšší úrovně míry predikce i úrovně sebehodnocení než žáci v řešení úloh neúspěšní. Usuzujeme, že žáci v matematice úspěšní, kteří disponují vyšší úrovní matematických schopností a prokazují to výsledky řešení nestandardních úloh, jsou rovněž schopni objektivněji predikovat i hodnotit svůj výkon.



Obrázek 17. Grafy porovnávající predikci a sebehodnocení úspěšných a neúspěšných.

I další srovnání s výzkumem Zgarbové (2011) jsou zajímavá. Stejně jako v našem šetření bylo zadáno 10 úloh, ale 5 z nich bylo „rutinních“ slovních úloh, 5 „nerutinních“ (nestandardních) slovních úloh. Z celkového počtu bodů dosahovali žáci při řešení rutinních slovních úloh 5,4 bodu a při řešení nerutinních slovních úloh 2,9 bodu. Nerutinní slovní úlohy činily žákům poměrně velké problémy, jejich míra úspěšnosti řešení byla nízká. Autorka vyvozuje, že míra neúspěšnosti žáků při řešení nerutinních slovních úloh ukazuje, že žáci nejsou schopni matematické myšlení aplikovat v praktickém životě. Tento výsledek může také indikovat to, že žáci nemají s tímto typem úloh ve škole žádné zkušenosti, ačkoliv jsou blízké jejich reálnému životu (Zgarbová, 2011, s. 126). Při řešení slovních úloh ve škole používají početní operace automaticky bez ohledu na skutečnou logiku problému, se kterou se setkávají v reálném životě, což potvrzují také některé další zahraniční výzkumy (De Corte, Verschaffel & Greer, 2000).

Znamená to, že metakognitivní procesy využívají žáci na prvním stupni základních škol pouze ve velmi omezené míře, nemají s nimi příliš zkušeností. Můžeme nepřímo usuzovat, že škola příliš nerozvíjí metakognitivní procesy žáků a nezaměřuje se na to, jak učit žáky myslet a učit se. Plánování, monitorování a sebehodnocení jako součást metakognitivního procesu však může mít velký vliv na úspěšnost žáka ve škole (Fisher, 1997; Kalinowska, 2012).

4.1.3.3 Úloha s výběrem odpovědi - příležitost pro rozvíjení kompetencí žáka

4.1.3.3.1Teoretická východiska

Řešení úloh je činnost, která má ve výuce řadu rolí, proniká celým výukovým procesem. Je jednou z jeho podstatných složek, má instrumentální charakter. Má nejen funkci vzdělávací, ale také formativní, vyvolává celou škálu poznávacích aktivit. Zvláštní místo úloh a jejich řešení v didaktice matematiky a ve výuce matematiky dokumentuje výrok George Polyi: „Matematiku umí ten, kdo umí řešit úlohy“ (Polya, 1945). Učební úlohy jako „jádro výukové situace, zasazené do různých sociálních, geografických, historických, uměleckých nebo technických kontextů, vyzývají žáka k řešení určitého problému, které by vedlo k jeho učení, k rozvoji jeho kompetencí a motivovalo jej k poznávání“ (Janík et al., 2013, s. 377).

Termín kompetence je ve vzdělávacím diskurzu poměrně často frekventován. Diskuse o kompetencích žáka jsou ovšem zatíženy řadou nejasností: poukazuje se zejména na obsahovou přesycenost a nepřesnost tohoto pojmu. Slavík a kol. (2017, s. 192) kompetenci uvádějí do vztahu ke gramotnosti: zatímco v kategorii gramotnost je zdůrazněna reproduktivní složka řešení úloh, v kategorii kompetence je kladen důraz na složku inovativní a tedy i performativní (dispoziční materiál pro užití v aktuální situaci). V českých kurikulárních materiálech se užívá speciální termín „klíčové kompetence“. Nelze však zapomínat na to, že jednání řazené k určité klíčové kompetenci musí být intencionální – musí být obsažné a nemůže se vymykat zasazení do určitého kulturního kontextu, jehož profilujícím centrem jsou příslušné obory.

4.1.3.3.2 Klíčové kompetence v aktuálním kurikulu

Klíčové kompetence chápou Belz a Siegrist (2001) jako souhrn schopností, vědomostí, dovedností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění každého člena společnosti. Jejich výběr a pojetí vychází z hodnot obecně přijímaných ve společnosti a z obecně sdílených představ o tom, které kompetence jedince přispívají k jeho vzdělávání, spokojenému a úspěšnému životu ve společnosti. Klíčové kompetence nestojí vedle sebe izolovaně, různými způsoby se prolínají, jsou multifunkční, mají nadpředmětovou podobu a lze je získat vždy jen jako celkový výsledek vzdělávání (Molnár, 2007). Ve výuce matematiky se jedná o obecněji pojaté rozvíjení matematického, logického, abstraktního, formálního, funkčního myšlení a osobnostního potenciálu žáků. Ve vzdělávacím obsahu je učivo chápáno jako prostředek k osvojení činnostně zaměřených očekávaných výstupů učení (Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, 2017). V etapě základního vzdělávání jsou považovány za klíčové kompetence k učení; k řešení problémů; komunikativní; sociální a personální; občanské a pracovní. Vzhledem k zaměření rigorózní práce na řešení nestandardních úloh lze považovat za podstatnou především klíčovou kompetenci k řešení problémů. Soupis očekávaných výstupů učení taxativně (a poněkud proklamativně) v RVP ZV uvádí, že žák:

- vnímá nejrůznější problémové situace ve škole i mimo ni, rozpozná a pochopí problém, přemýšlí o nesrovnalostech a jejich příčinách, promyslí a naplánuje způsob řešení problémů a využívá k tomu vlastního úsudku a zkušeností,
- vyhledává informace vhodné k řešení problémů, nachází jejich shodné, odlišné a podobné znaky, využívá získané vědomosti a dovednosti k objevování různých variant řešení problémů, nenechá se odradit případným nezdarem a vytrvale hledá konečné řešení,
- samostatně řeší problémy, volí vhodné způsoby řešení, sleduje vlastní pokrok při zdolávání problémů, přezkoumává řešení a osvědčené postupy aplikuje při řešení obdobných nebo nových problémových situací,
- kriticky myslí, činí uvážlivá rozhodnutí, je schopen je obhájit, uvědomuje si zodpovědnost za svá rozhodnutí a výsledky svých činů zhodnotí.
-

Fuchs a Zelendová (2015) se pokusili popsat, které kompetence se uplatňují při řešení problémů (tj. dosahování klíčové kompetence k řešení problémů). Uvádějí tyto:

- Matematické uvažování, které zahrnuje schopnost klást otázky charakteristické pro matematiku, znát možné odpovědi, které matematika na tyto otázky nabízí, schopnost rozlišovat příčinu a důsledek, chápat rozsah a omezeni daných matematických pojmů a zacházet s nimi.
- Matematická argumentace zahrnuje schopnost rozlišovat předpoklady a závěry, sledovat a hodnotit řetězce matematických argumentů různého typu, cit pro heuristiku, schopnost vytvářet a posuzovat matematické argumenty.
- Matematická komunikace zahrnuje schopnost rozumět písemným i ústním matematickým sdělením a vyjadřovat se jednoznačně a srozumitelně k matematickým otázkám a problémům, a to ústně i písemně.
- Modelování zahrnuje schopnost porozumět matematickým modelům reálných situaci, používat, vytvářet a kriticky je hodnotit; získané výsledky interpretovat a ověřovat jejich platnost v reálném kontextu.
- Vymezování problémů a jejich řešení zahrnuje schopnost rozpoznat a formulovat matematické problémy a řešit je různými způsoby.
- Užívání matematického jazyka zahrnuje schopnost rozlišovat různé formy reprezentace matematických objektů a situací, volit formy reprezentace vhodné pro danou situaci a účel;
- Užívání pomůcek a nástrojů zahrnuje znalost různých pomůcek a nástrojů (včetně prostředků výpočetní techniky), které mohou pomoci při matematické činnosti, a dovednost používat je s vědomím hranic jejich možnosti.

4.1.3.3.3 Metodologie

Cílem šetření bylo

1) analyzovat soubor vybraných úloh a žákovských řešení těchto úloh po odevzdání soutěžního testu žáky. Zaměřili jsme se především na úlohy z kategorie Klokánek soutěže Matematický klokan, určené pro žáky 4. a 5. ročníku,

2) spolu s učiteli a žáky reflektovat použité způsoby řešení úloh, zasadit je do aktuálního rámce klíčových kompetencí a očekávaných výstupů RVP ZV.

Domníváme se, že vzhledem k charakteru úloh (nestandardní, případně divergentní úlohy) předpokládá úspěšné řešení všech uvedených úloh, že žák:

- dovedl s porozuměním číst text úlohy, rozlišil informace důležité pro řešení úlohy,
- rozpoznal a pochopil podstatu problému, promyslil a naplánoval způsob řešení problému a využil k tomu vlastního úsudku a zkušeností,
- využil k řešení problému osvojené vědomosti a dovednosti a zvolil vhodné způsoby řešení,
- ověřil správnost řešení problémů, kriticky myslil, činil podložená rozhodnutí.

Výzkum proběhl ve dvou čtvrtých a dvou pátých třídách základních škol v Brně v březnu 2016.

4.1.3.3.4 Výzkumná zjištění: úlohy a analýza řešení, ukázky žákovských řešení

Úloha 1:

- *U lyžařského vleku čekalo v řadě 10 lyžařů. Před Tomášem jich stálo o 3 méně než za ním. Kolikátý v řadě byl Tomáš?*

  A) první B) třetí C) čtvrtý D) šestý E) sedmý

K určení správného řešení (Tomáš stál v řadě jako čtvrtý, před ním čekali tři, za ním šest lyžařů), je možné využít grafického znázornění, resp. grafického řešení. Postupně lze vyznačovat možné pořadí při dodržení podmínky „…před ním o 3 méně než za ním“, tzn., že za ním stálo o 3 více lyžařů než před ním. V řadě čísel 1, 2, 3, **4**, 5, 6, 7, 8, 9, 10 pouze číslo 4 splňuje podmínku zadání.

Z ukázek autentických žákovských grafických záznamů (obrázek 17) je zřejmé, že ke zpracování informací v zadání a z něj vyplývajícího grafického řešení není pro žáka důležitá orientace řady lyžařů. Na obrázku vlevo je nejblíže vleku osoba (kroužek) první zleva. Písmeno C vyjadřuje pozici Tomáše. Stojí 4. v řadě, což je správná odpověď. Na prostředním obrázku je nejblíže vleku postava vpravo (s vyznačením množiny lyžařů stojících za Tomášem čárkou).

Obrázek 18: Grafické znázornění podmínek úlohy 1.

Uzavřená úloha umožňuje „vyzkoušet“ jednotlivá nabídnutá řešení a postupně vyloučit ta, která nesplňují podmínku zadání: kdyby stál například první, bylo by za ním 9 osob, před ním žádná; kdyby stál třetí, byli by před ním 2, za ním 7, atd. - v těchto případech ovšem není splněna podmínka zadání. Nabídku výsledků je v tomto případě možné chápat jako určitou pomoc při řešení úlohy. Jedna z učitelek upozornila na možnost „náhodného uhádnutí“, pokud by si žák nepomohl grafickým záznamem. Chráska (2005) připomíná, že odpověď v uzavřené úloze neumožňuje odhalit aktivní znalost testovaného jevu, pouze jeho znovupoznání - žák by správnou odpověď nevyprodukoval, ale v nabídce odpovědí ji rozezná. Je tedy třeba nabídku výsledků chápat jako pomoc při řešení úlohy.

Správným řešením úlohy žák prokáže, že

- dovede transformovat sdělení v přirozeném jazyce do symbolického jazyka,
- při řešení úlohy umí graficky znázornit vztahy mezi danými a hledanými údaji,
- při řešení využívá polohové vztahy (před, za) v oboru přirozených čísel.

Úloha 2:

- *Sněhurka rozdělila trpaslíkům 77 hřibů. Napřed dostal nejmenší trpaslík, každý další dostal o jeden hřib více než předchozí. Kolik dostal největší trpaslík?*

A) 8 *B) 10* *C)12* *D) 14* *E) 16*

Řešení slovní úlohy s pohádkovým námětem, s málo reálným, ale pro žáky „realistickým“ sémantickým pozadím, předpokládá, že řešitel ví, že trpaslíků v pohádce bylo sedm. V zadání se explicitně uvádí, že hřiby rozdělila trpaslíkům, což poněkud odporuje čtenářské zkušenosti žáků - Sněhurka se v pohádce spolu s trpaslíky dělila. Pokusme se sledovat tři různé přístupy k řešení na základě možné úvahy žáků.

Petr: „Zkusil jsem vyzkoušet jednotlivá nabídnutá řešení. *A), B), C), E*) jsou zřejmě nesprávná: v případě *A)* by Sněhurka rozdělila pouze 35 hřibů, v případě *B)* pouze 49 hřibů, v případě *C)* pouze 63, v případě *E)* 91. Jediné správné řešení je *D*): 14+13+12+11+10+9+8 = 77“. (Nabídka výsledků se opět využije jako pomoc při řešení úlohy).

Eliška: „Kdyby dostali všichni trpaslíci stejný počet hřibů, bylo by to 77:7 = 11. Tolik by dostal prostřední trpaslík. Další by dostali 10 a 12, 9 a 13, 8 a 14. Nejmenší by dostal 8 hřibů, největší 14 hřibů“.

Je zřejmé, že uvedená úvaha nevyužije k řešení nabídku odpovědí, vypočtený výsledek řešitel s nabídkou pouze konfrontuje k potvrzení správnosti řešení. Pro učitele to může být výzva, aby úlohu zadal jako otevřenou s požadavkem určit počet hřibů pro každého trpaslíka.

Alžbětka[27] : „Sestavím si rovnici a vyřeším ji:

x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) + (x+5) + (x+6) = 77, odtud x = 8 (tolik dostal nejmenší, proto největší dostal 14 hřibů). Neznámá vyjadřuje počet hřibů, které dostal nejmenší trpaslík."

Pokud bychom neznámou *x* vyjádřili počet hřibů pro největšího trpaslíka:

x + (x-1) + (x-2) + (x-3) + (x-4) + (x-5) + (x-6) = 77, odtud x = 14. Žákovi, který si (obvykle až na 2. stupni ZŠ) osvojil proceduru řešení lineárních rovnic, může využít k řešení algebraický způsob.

Řešením úlohy žák prokáže, že

- umí vyjádřit situaci „ze životní praxe" pomocí matematického aparátu, matematizovat reálnou situaci,
- dovede realizovat jednoduchý experiment, experiment zaměřit k získání řešení úlohy,
- dovede k řešení úlohy využít nástroj, kterým disponuje (početní operace, řešení rovnice),
- dovede ověřit správnost řešení problému (porovnat své řešení s nabídkou odpovědí).

V běžné výuce matematiky na základní škole lze využít úlohy o jednu až dvě kategorie nižší, než je určena, např. úlohy z Klokánka na 2. stupni ZŠ. Obtížnost úlohy může modifikovat učitel sám například změnou zadaných čísel, doplněním nebo vynecháním některých podmínek nebo změnou celkového kontextu úlohy. Je však možné nahlédnout i do zadání úloh pro jiné soutěžní kategorie a přímo zde najít vhodnou úlohu se stejným nebo obdobným námětem. Uvedeme alespoň jeden příklad.

Úloha 3 (kategorie Klokánek):

- *Králík Ušák má nejraději zelí a mrkev. Každý den sní buď 1 hlávku zelí a 4 mrkve, nebo jen 9 mrkví, nebo jen 2 hlávky zelí. Během jednoho týdne Ušák snědl 30 mrkví. Kolik hlávek zelí snědl v tomto týdnu?*

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

Typická „klokanská" úloha vyžaduje úsudek, opírající se o respektování podmínek úlohy, vyjádřené ve druhé a třetí větě zadání. Vyjádření „buď - nebo" lze vnímat ve významu vylučovacím (pak ovšem úloha nemá řešení) nebo nevylučovacím. Smysluplné řešení předpokládá, že v různých dnech měl králík různé chutě případně dostal různé krmivo. Nabídka odpovědí bude zřejmě využita až pro kontrolu správnosti vlastního řešení/výpočtu. Uveďme opět ukázku možného žákovského myšlenkového experimentu:

[27] Nadaná na matematiku, pravidelně se účastní matematických soutěží, , v minulém roce se umístila na 4. místě v krajském kole Logické olympiády.

Týden má 7 dní. Z první podmínky: kdyby jedl denně *1 hlávku zelí + 4 mrkve,* snědl by za
1 den: 1 zelí (z) + 4 mrkve (m)
2 dny: 2 z + 8 m
3 dny: 3 z + 12 m
4 dny: 4 z + 16 m
5 dní: 5 z + 20 m
6 dní: 6 z + 24 m
7 dní: 7 z + 28 m (podmínka *„během jednoho týdne snědl 30 mrkví“* není v žádném případě splněna).

Z druhé podmínky vyplývá: kdyby jedl denně *9 mrkví,* snědl by za
1 den: 9 m
2 dny: 2 × 9 m =18 m

3 dny: 3 × 9 m = 27 m

Více než 3 dny nemohl sníst po 9 mrkvích, protože za týden jich snědl pouze 30, ani v tomto případě není podmínka splněna.

Ze třetí podmínky vyplývá: kdyby jedl denně *2 hlávky zelí,* snědl by za
1 den: 2 z
2 dny: 2 × 2 = 4 z
3 dny: 3 × 2 = 6 z, atd.

Porovnáním získáme řešení, které všem třem podmínkám vyhovuje:
3 dny jedl po 1 hlávce zelí a 4 mrkve (celkem 3 hlávky zelí a 12 mrkví), 2 dny pouze mrkev (2 × 9 =18), 2 dny pouze zelí (2 × 2 = 4). Celkem za 7 dní *7 hlávek zelí a 30 mrkví*.

Zatímco předchozí úloha byla zařazena v roce 2014 do kategorie Klokánek v soutěžním testu jako 17. v pořadí (tj. s možným ziskem 5 bodů), byly následující úlohy zadány v témže roce v kategoriích Cvrček (za 5 bodů) a v kategorii Benjamin (rovněž za 5 bodů).

Úloha 4 (kategorie Cvrček):

- *Králík Dupík jí zelí a mrkev. Každý den sní buď 10 mrkví nebo 2 hlávky zelí. Minulý týden snědl 6 hlávek zelí. Kolik snědl za týden mrkví?*

  A) 20 B) 30 C) 34 D) 40 E) 50

Úloha 5 (kategorie Benjamín):

- *Králík Vasja má nejraději zelí a mrkev. Za jeden den sní buď 1 hlávku zelí a 4 mrkve, nebo 9 mrkví, nebo 2 hlávky zelí. Některé dny však jí pouze trávu.*

Za posledních 10 dní snědl Vasja celkem 30 mrkví a 9 hlávek zelí. Kolik z těchto dní jedl pouze trávu?

(A) 0 *(B) 1* *(C) 2* *(D) 3* *(E) 4*

Při porovnání s původní úlohou 3 se změnily některé podmínky. V úloze z kategorie Cvrček měl králík jen dvě možnosti: denně snědl buď pouze 10 mrkví nebo pouze 2 hlávky zelí; víme, že za týden snědl celkem 6 hlávek zelí. Úloha je méně obtížná než původní. V úloze z Benjamína jsou dvě změny oproti původní úloze: místo týdne je v zadání 10 dní a přibyla další podmínka - některé dny jedl pouze trávu. Tím se zvýšila její obtížnost. Řešení a rozbor obou úloh jsme provedli společně s učitelkami. Porovnáním zadání tří uvedených úloh chceme naznačit, že tvořivý učitel může sám podle podmínek ve třídě a svého didaktického záměru vhodně úlohu obměnit tak, aby optimálně využil myšlenkový potenciál žáků.

Ukázkou konfrontace úloh 3, 4 a 5 se stejným námětem jsme se pokusili dokumentovat skutečnost, která je pro soutěž Matematický klokan charakteristická: v různých soutěžních kategoriích jsou zařazovány obdobné úlohy (nejen slovní) tak, aby ve vyšších kategoriích byla vždy úloha obtížnější. Současně se na setkáních autorů úloh pro jednotnou mezinárodní verzi požaduje, aby byly úlohy „vtipné“, což ovšem může vést k určitému rozporu s realitou (králíkova pravidelná konzumace mrkve a zelí).

Řešením úloh 3, 4 a 5 žák prokáže, že

- dovede samostatně řešit problém; volí vhodné způsoby řešení,
- užívá při řešení problémů logické, matematické a empirické postupy,
- dovede realizovat jednoduchý experiment; experiment zaměřit k získání řešení úlohy.

Úloha 6:

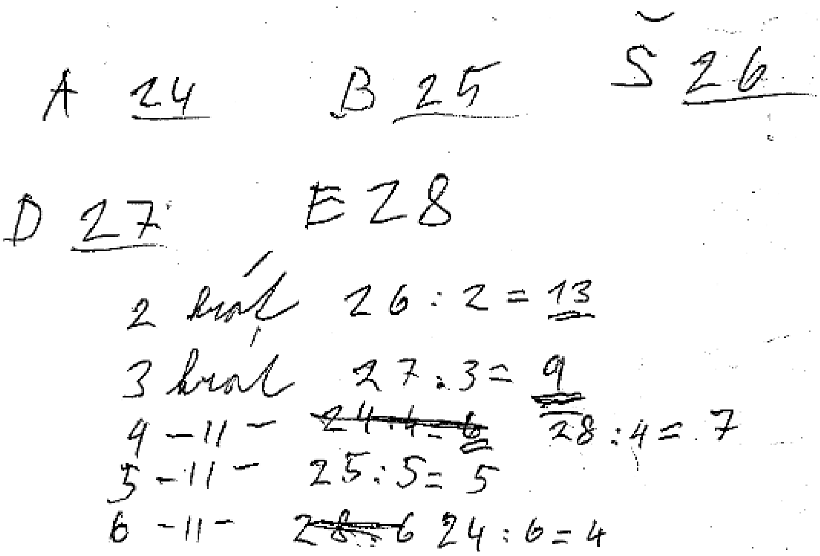
- *Kamarádi Alenka, Bohunka, Šárka, David a Eliška o víkendu pekli sušenky. Během celého víkendu upekla Alenka 24 sušenek, Bohunka 25, Šárka 26, David 27 a Eliška 28. Na konci víkendu měl jeden z kamarádů dvakrát více sušenek než po sobotě, jiný měl třikrát více, další čtyřikrát více, další pětkrát více a poslední šestkrát více. Kdo upekl v sobotu nejvíc sušenek?*

  A) Alenka *B) Bohunka* *C) Šárka* *D) David* *E) Eliška*

Úloha realistická, týkající se konkrétní událostí, která by se mohla stát v běžném životě. Řešení vyžaduje jazykové porozumění a přesah do životní zkušenosti. Do soutěžního testu kategorie Klokánek byla zařazena jako poslední pětibodová úloha ze skupiny nejobtížnějších. Nabídka řešení je zřejmá - jména všech účastníků pečení. V našem výzkumu na vzorku 680 žáků (Nováková, 2016) vykázala nejnižší počet správných řešení, pouze 6,9 % - nejméně ze všech úloh v testu; 27,5 % respondentů úlohu vůbec neřešilo - rovněž nejvíce ze všech úloh v testu. Řešení této slovní úlohy klade nároky na pozorné čtení poněkud komplikovaného zadání, pozorné vnímání jednotlivých podmínek a úsudek, založený na inverzním vztahu „n krát více“, „n krát méně“. Jak uvádějí Blažková a Vaňurová (2013, s. 39), „děti mají problémy s přečtením celého textu, s porozuměním textu, se zvládnutím délky textu. Často nejsou schopny odpovědět na otázku úlohy v souvislosti se čteným zadáním a často odpovídají na otázku jinou, která nebyla v textu uvedena a třeba ani nesouvisí s řešením úlohy“. To se zřetelně projevilo v řešení uvedené úlohy - tady nabídka odpovědí nijak nepomohla. Úloha může být bez zvýšení její obtížnosti formulována jako otevřená.

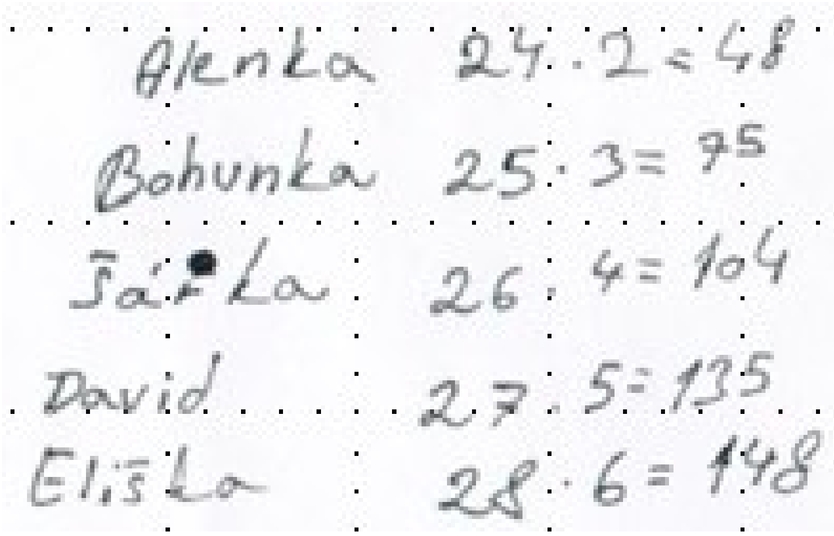
Pokus o možnou interpretaci žákova úsudku: „Úlohu přeformuluji takto: v sobotu upekl jeden z kamarádů dvakrát méně než na konci víkendu, jiný třikrát méně, další čtyřikrát méně, další pětkrát méně a poslední šestkrát méně. Hledám, která čísla v zadání jsou dělitelná dvěma (24, 26, 28), třemi (24, 27), čtyřmi (24, 28), pěti (25) a šesti (24). V sobotu upekla Alenka 4 sušenky (v neděli jich měla šestkrát více, tj. 24), Bohunka upekla v sobotu 5 (v neděli měla pětkrát více, tj. 25). Ještě musím zohlednit skutečnost, že některá čísla jsou zároveň beze zbytku dělitelná více děliteli. Největší počet dělitelů má číslo 24 - ale šesti je dělitelné toto jediné. Proto měla v sobotu Alenka 24:6 = 4, Bohunka 25:5 = 5, Šárka 26:2 = 13, David 27:3 = 9, Eliška 28:4 = 7 sušenek. Nejvíce sušenek upekla v sobotu Šárka.“

Řešení Terezky:



Obrázek 19: Záznam směřující ke správnému řešení (včetně opravy chyb).

Řešení Filipa:



Obrázek 20: Nesprávné řešení úlohy.

Zajímavá je analýza distraktorů, které žáci v soutěžním testu označili. Významně největší počet nesprávných odpovědí je řešení *E)* (Eliška) - 55, 6 % všech řešení. Uvedenou skutečnost interpretujeme takto: v zadání je uvedeno, že Eliška napekla *nejvíc za celý víkend*, odtud zřejmě úvaha, že napekla *nejvíc také v sobotu*. Další podmínky už řešitelé nezohlednili. Výběr zbývajících distraktorů (méně než 7 % žáků) podle našeho názoru spíše vypovídá o pokusech uhádnout správné řešení, aniž by žák úlohu skutečně řešil.

Řešením úlohy žák prokáže, že dovede

- transformovat sdělení v přirozeném jazyce do symbolického jazyka,
- vyhledat v textu úlohy údaje a vztahy potřebné k řešení úlohy,
- k řešení úlohy využít nástroj, kterým disponuje (určit počet dělitelů přirozeného čísla)
- přehledně zaznamenat postup řešení úlohy.

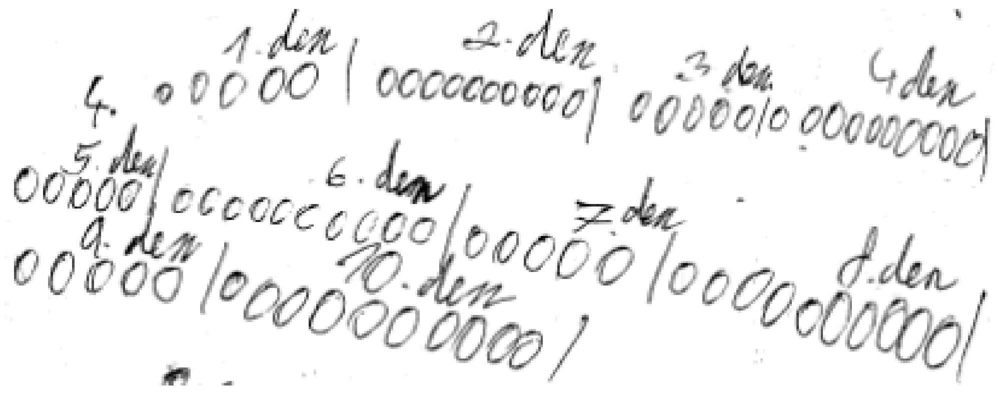
Úloha 7:

- *Pan Zahradník má 10 slepic. 5 slepic snáší vejce každý den a dalších 5 slepic snáší vejce každý druhý den. Kolik vajec snesou všechny slepice za 10 dní?*

  A) 75 *B) 60* *C) 50* *D) 25* *E) 10*

Správné řešení složené slovní úlohy předpokládá orientaci v zadání a porozumění jednotlivým zde obsaženým informacím: některá slepice snáší vejce každý den (tj. za 10 dní snese 10 vajec), některá snáší každý druhý den (tj. za 10 dní snese 5 vajec). Ty, která snášejí denně, snesou za 10 dní 5 × 10 = 50, ty, které snášejí každý druhý den, snesou 5 × 5 = 25. Celkem snesou slepice 50 vajec + 25 vajec = 75 vajec.

Řešení může být podporováno různou podobou grafického znázornění. Na následující ukázce se jedná o grafické řešení. Počet snesených vajec určil Jakub ze znázornění:



Obrázek 21: Grafické řešení úlohy 7.

Vlastní výpočet není obtížný, vyžaduje pouze znalost sčítání a násobení v oboru do 100. Obtížnost úlohy lze zvýšit zadáním bez nabídky odpovědí, transformací na otevřenou úlohu do podoby na 1. stupni ZŠ obvyklejší. Kontextová stránka úlohy poskytuje prostor pro uplatnění mezipředmětových vztahů s přírodovědou a vlastivědou (oblast RVP „Člověk a jeho svět“) v různých souvislostech, například posuzovat reálnost úlohové situace (snůška vajec u slepic chovaných v přirozeném venkovském prostředí v různých obdobích roku, „výroba“ vajec ve velkochovech, cena vajec v obchodech,…).

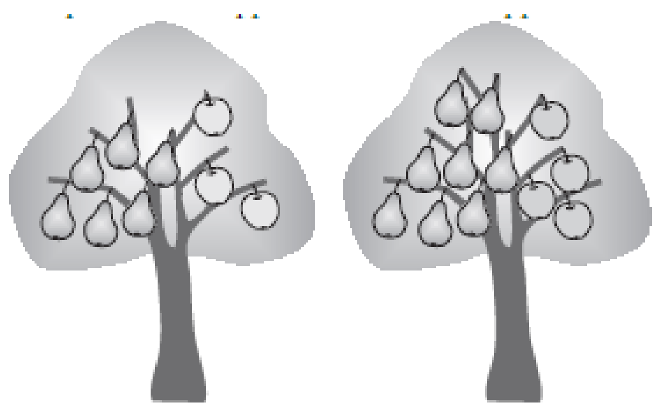
Z nesprávných řešení se vyskytovalo nejčastěji *C)* 50 vajec. K výsledku zřejmě dospěli vynásobením dvou číselných údajů v zadání úlohy (10 slepic × 5 vajec denně). To platí rovněž pro další nejpočetnější nesprávnou odpověď *D)* 25 vajec. Za příčinu těchto nesprávných odpovědí považujeme povrchní řešitelské strategie, které se soustřeďují spíše na čísla v úloze než na pečlivou analýzu textu.

Řešením úlohy žák prokáže, že dovede

- vyhledat v textu úlohy údaje a vztahy potřebné k řešení úlohy,
- při řešení úlohy graficky znázornit vztahy mezi danými a hledanými údaji,
- uplatnit při řešení problému logické, matematické a empirické postupy.

Úloha 8:

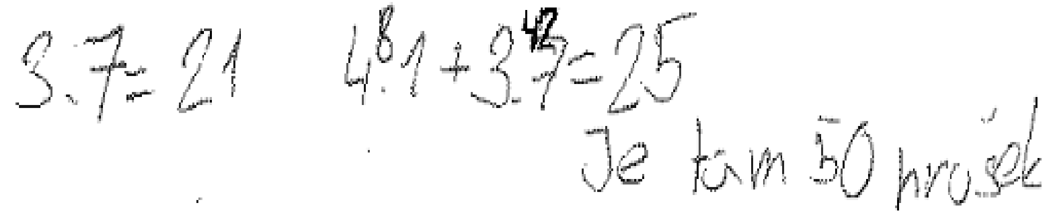
- *V kouzelné zahradě rostou kouzelné stromy. Na každém stromě je buď 6 hrušek a 3 jablka nebo 8 hrušek a 4 jablka. Na stromech v zahradě je celkem 25 jablek. Kolik hrušek je na těchto stromech?*



(A) 35 (B) 40 (C) 45 (D) 50 (E) 56

Opět typická „klokanská“ úloha vyžaduje úsudek, opírající se o respektování podmínek úlohy, vyjádřené ve druhé větě zadání („na každém stromě“; „buď - nebo“). K porozumění zadání napomáhá ilustrační obrázek, na kterém jsou představeny oba druhy stromů. Řešení vychází z intuitivního porozumění vztahu přímé úměrnosti. Na každém kouzelném stromě je vždy dvakrát více hrušek než jablek, musí být tedy dvakrát více hrušek na všech stromech v celé zahradě, tj. 50.

Ondra: „Je tam 50 hrušek, protože jablek je dvakrát méně."



Obrázek 22: Písemný záznam žákovského řešení úlohy.

Úlohu jsme s učitelkami upravili převedením na úlohu otevřenou a také vhodně doplnili otázkou „Kolik je v zahradě stromů?“ Tím se významně zvýšila obtížnost úlohy.

Řešením úlohy žák prokáže, že dovede

- rozlišit rutinní úlohu a reálný problém,
- vyhledat v textu úlohy údaje a vztahy potřebné k řešení úlohy,
- k řešení úlohy využít nástroj, kterým disponuje (přímá úměrnost),
- uplatnit při řešení problému logické, matematické a empirické postupy.

4.1.3.3.5 Shrnutí a závěry

Prezentované úlohy a zamyšlení nad různými souvislostmi jejich řešení žákem základní školy vedou k přesvědčení, že pravidelné zařazování nestandardních úloh, třeba ze soutěže Matematický klokan, do výuky matematiky již na primárním stupni vzdělávání lze oprávněně považovat za vhodný instrument k rozvíjení kognitivní stránky osobnosti žáků. Ve sbornících jednotlivých ročníků soutěže je možné najít stovky různých úloh. Úlohy jsou zadány buď v matematickém jazyce, s převažujícím uplatněním matematických termínů a symbolů, nebo jako úlohy slovní (kontextové), které jsou zejména v kategoriích určených pro 1. stupeň základní školy velmi často zastoupeny a které jsme v našem výzkumu reflektovali.

Opět zdůrazněme, že úlohy ze soutěže Matematický klokan jsou poněkud jiné, než úlohy, se kterými se obvykle setkávají žáci v učebnicích matematiky (Molnár, 2007). Uvedenou stránku úloh zdůrazňovaly učitelky v našem výzkumu při výčtu faktorů, které ovlivňují vztah žáků k soutěži. Připomínaly také, že úlohy jsou pro žáky neobvyklé rovněž způsobem prezentace (často ilustrací, obrazem, schématem nebo jiným způsobem grafické reprezentace). Poskytují žákům prostor nejen k uplatnění vlastních matematických znalostí a rutinních výpočtů, ale jsou pro žáky zajímavé svým neobvyklým obsahem či námětem. Řeší (matematický) problém, hledají a objevují způsob, metodu řešení, protože jejich dosavadní zkušenost řešení úlohy neumožňuje. Postup řešení úlohy obvykle není znám, řešitel hledá cestu k výsledku originálním způsobem. Takové úlohy jsou obvykle považovány za vhodné pro práci s nadanými, resp. mimořádně nadanými žáky. Smyslem soutěže je ovšem získávat pro matematiku také žáky s průměrnými výukovými výsledky. Těmto žákům může účast v soutěži pomoci zvýšit sebevědomí, přesvědčit je o jejich dosud nenaplněných možnostech a také jim dokázat prostřednictvím úspěšného řešení soutěžních úloh, že matematika nemusí být vždy nudný, nezáživný a obávaný školní předmět (Uhlířová, 2020).

Podle názoru většiny učitelů (Rendl, Vondrová et al. 2013, s. 51) jsou „slovní úlohy neoblíbené a problematické učivo a to od 1. až po 5. ročník. Problémy žáků, které učitelé v souvislosti se slovními úlohami zmínili, jsou především chybějící logické myšlení, nedostatečná čtenářská gramotnost - porozumění textu i porozumění některým slovům, nesprávné provedení zápisu úlohy nebo jejího znázornění a chybějící nebo špatná formulace odpovědi“. Rozmanitost „klokanských“ úloh snad může poněkud zpochybnit další argument učitelů, že „neochota přemýšlet může být způsobena i tím, že úlohy, které mají žáci řešit, jsou stejného typu, takže nemají pocit, že je nutné se textem vůbec zabývat“[28].

Uvědomujeme si, že naše vymezení žákovských kompetencí potřebných k řešení, které k jednotlivým úlohám uvádíme (a které se někdy opakuje), je značně subjektivní, v žádném případě je nelze chápat jako vyčerpávající. Učitelé na základě vlastních zkušeností jistě dokážou přesněji a výstižněji popsat, které znalosti a schopnosti řešitel

[28] Rendl, &Vondrová et al. 2013, s. 53.

úloh uplatnil. Předpokladem využití uvedených stránek řešení úloh jsou ovšem osvojené profesní kompetence učitele, pro kterého není smyslem soutěže pouhé povinné, formální zapojení žáků jeho třídy.

Přestože jsme se v textu zaměřili na kompetence k řešení problémů, je zřejmé, že se při řešení soutěžních úloh nabízejí i dopady do oblasti rozvíjení dalších klíčových kompetencí. Uvedeme alespoň některé:

- kompetence k učení, například když žák operuje s obecně užívanými termíny, znaky a symboly, uvádí věci do souvislostí, propojuje do širších celků poznatky z různých vzdělávacích oblastí a na základě toho si vytváří komplexnější pohled na matematické, přírodní, společenské a kulturní jevy,
- kompetence komunikativní, například tím, že žák v procesu řešení formuluje a vyjadřuje své myšlenky a názory v logickém sledu, vyjadřuje se výstižně, souvisle a kultivovaně; prokazuje, že rozumí různým typům textů a záznamů, přemýšlí o nich, reaguje na ně a tvořivě je využívá ke svému rozvoji; tvoří podobné úlohy,
- kompetence sociální a personální - při společném řešení úloh přispívá k diskusi v malé skupině i k debatě celé třídy, chápe potřebu efektivně spolupracovat s druhými při řešení daného úkolu, respektuje různá hlediska.

Podmínkou smysluplného pedagogického využití soutěžních úloh je ovšem zařazovat tyto úlohy do výuky pravidelně a průběžně – ve sbornících na webové stránce soutěže jsou jich stovky. Přístup, který jsme v naší reflexi naznačili, vyžaduje ze strany učitele rozvinuté oborově didaktické profesní kompetence ve smyslu Shulmanova konceptu didaktické znalosti obsahu (Shulman, 1986; Janík et al., 2013), který postihuje specifickou učitelskou schopnost konstruovat obsah oboru do žákům srozumitelného výkladu a do učebních úloh, v nichž žáci obsah ve své činnosti a komunikaci realizují.

4.2. Úlohy inspirované médii, možnosti jejich využití ve výuce

4.2.1 Teoretická východiska

Obecným teoretickým východiskem realizovaného výzkumu je koncept realistického vyučování matematiky - "realistic mathematics education" (Freudenthal, 1991). Pracuje s pojmem realistická slovní úloha, která je převzata přímo z reálného života a matematizuje skutečnosti, s nimiž se můžeme běžně setkat. Podobně Toom (1999) hovoří o úlohách z reálného života („real-world problems") a zdůrazňuje jejich význam ve výuce matematiky. Obvykle se v této souvislosti připomíná význam analýzy formulace textu úlohy (Siwek, 2005). Výzkumy Browna, Collinse a Duguida (1989) potvrzují, že myšlení a učení nejsou procesy "uzavřené v mysli", ale mají interaktivní charakter se silným zasazením do autentických a bohatých kontextů. Vliv kontextu na řešení slovních úloh sledoval take výzkum Palma (2008). Byly v něm použity “autentické” úlohy, které musely splňovat alespoň některé z následujících požadavků: týkají se událostí, které by se mohly stát v běžném životě; obsahuji otázky, které by mohly v běžném životě zaznít; jejich účel musí být žákům jasný, stejně jako by tomu bylo v běžném životě; jsou jednoduše formulované; údaje uvedené v úloze musí být k dispozici nebo musí byt snadno dohledatelné; musí být realistické konkrétní (týkají se určité konkrétní události). Při řešení souboru autentických úloh převzatých z vědeckých či odborných článků se u žáků významně uplatnila tendence použít znalosti a zkušenosti z reálného života.

4.2.1.1 Média a jejich význam v edukaci

Soubor úloh, koncipovaný pro účely šetření, byl volen tak, aby dokumentoval vzájemné propojení matematické, čtenářské a mediální gramotnosti jako podmínky a současně předpokladu úspěšného řešení žákem primární školy. Oddělit vliv médií od školy je v dnešní době téměř nemožné. S médii musíme v edukaci počítat jako s významným fenoménem a nemůžeme je přehlížet nebo podceňovat, ale naopak je musíme zapojovat do výukového procesu (Jůva, 1999; Frau-Meigs, 2014). Zejména elektronická média, počítač, tablet, mobilní telefon, se stávají součástí života dnešního dítěte se všemi průvodními jevy. Multimediální encyklopedie a datové servery v prostředí internetu přebírají roli informačního a komunikačního média, slouží jako zdroj dat a informací nejrůznějšího charakteru. Je jistě důležité si uvědomovat také negativní stránku, vnímat ji jako riziko a nebezpečí pro vývoj dítěte, jak důrazně upozorňuje například Spitzer (2014). V současné situaci se však zdá hledání způsobů, jak posilovat pozitivní působení digitálních médií a oslabovat jejich negativní vlivy přínosnější než jejich démonizace. O významu uvedené problematiky svědčí také místo mediální výchovy v inovovaném kurikulu, v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání (2017). Mediální gramotnost se považuje za jednu ze základních dovedností, schopností a vědomostních bází dnešního člověka. Niklesová (2010) ji vymezuje následujícími znaky: dokáže se orientovat v textech a mluvených projevech, rozlišit podstatné informace od nepodstatných; umí rozpoznat skryté významy, manipulační techniky, nepřesné a zcela neúplné informace; je schopen odlišit pravdivý text nebo výpověď od fabulace nebo subjektivního tvrzení, nepodloženého fakty; zvládne jasnou formulaci myšlenek a jejich zaznamenání.

Přitom je zcela zřejmá souvislost mediální gramotnosti s rozvojem čtenářské gramotnosti žáků. Pozornost rozvíjení různých stránek mediální a čtenářské gramotnosti si vyžaduje nejen školská praxe, ale především příprava žáků pro plnohodnotný život v informační společnosti. Právě využití poznatků z okolního světa zprostředkovaného médii je vhodným prostředkem vnitřní motivace, poskytuje k ní zvláště podnětnou příležitost.

4.2.1.2 Autentické úlohy jako motivační činitel

Teorie i praxe vzdělávání se shodují v tom, že podstatným faktorem efektivity vyučování a současně významným předpokladem pro postupnou změnu pohledu na matematiku jako školní předmět jsou otázky spojené s různými aspekty motivace. Z řady klasických psychologických a pedagogických koncepcí a teorií motivace (Madsen, 1979; Pavelková, 2002) vychází i didaktický pohled. Motivace je v didaktice chápána jako činnost, prostřednictvím které vzbuzujeme zájem žáků o učení se, koncentrujeme jejich pozornost a aktivizujeme je k činnostem (Fulier & Šedivý, 2004). Podobně Hejný a Kuřina (2001) zdůrazňují, že motivace je předpokladem zahájení procesu učení, představuje jeho úspěšný start. O vnitřní motivaci se jedná obvykle tehdy, když se žák učí proto, že ho zaujalo téma nebo činnost, aktivně pracuje, aniž by potřeboval slib vnější odměny nebo hrozbu trestu. Vnitřní motivace závisí na tom, zda žák subjektivně vnímá učební činnost nebo zkušenost jako pro něj smysluplnou a na tom, zda má možnost se na výběru cílů, metod, postupů a učebních úloh aktivně podílet. Může mít různé formy: od vhodně vedené diskuse o zajímavé problematice k dobře položené otázce či formulaci problému, k diskusi o životní strategii, až například k zajímavé úloze či podnětné hře. Motivace způsobuje napětí mezi nemám a chtěl bych mít, neumím a potřebuji/chci umět, neznám a potřebuji znát.

V naší práci vycházíme z předpokladu mnohokrát potvrzovaném teoretickými studiemi zaměřenými na didaktiku matematiky (Skalková, 2005), ale také edukační praxí. Značný motivační význam může mít matematická učební úloha nebo soubor úloh. Dokáže vyvolat zájem žáků, vytvářet příznivé pracovní klima, v němž lze plně využít tvořivých potencí žáků. Pro téma práce je podstatné, že podle názoru řady autorů (Kalhous et al., 2002) motivaci zvyšuje kontextualizace učební činnosti - to znamená, když učitel volí učivo, učební úlohy a další aktivity, tak, aby odpovídaly žákovým potřebám a zájmům nebo ukazují spojení učiva s reálným světem. Uvedeným kritériím odpovídá pojem autentická slovní úloha, který byl vymezen výše (Fuchs & Zelendová, 2015). Zaměřili jsme se na tvorbu autentických úloh z výchozího textu, jejich metodické rozpracování pro konkrétní praxi výuky a ukázky žákovských řešení. Inspiraci poskytla spolupráce na realizaci projektu SUMA JČMF Matematika v médiích. Uvádíme výstup výzkumného ověřování námětů na uplatnění mezipředmětových souvislostí matematiky, přírodovědy a vlastivědy v prostředí primární školy (Nováková, 2018; 2019).

4.2.2 Metodologie

V kvalitativně orientovaném výzkumu jsme formulovali dva vzájemně provázané cíle:

1) ověřit, zda lze populárně odborného textu využít ve výuce matematiky v 5. ročníku základní školy jako nástroje k objevování poznatků z různých oborů a přitom aplikovat osvojené matematické znalosti,
2) analyzovat způsoby řešení použité žáky, identifikovat obtíže, se kterými se setkali, a popsat některá úskalí práce s autentickými úlohami z pohledu učitele.

Ke splnění uvedených cílů bylo třeba vytvořit soubor autentických úloh inspirovaných texty ve vybraných digitálních i tištěných médiích, Pro zasazení do celkového kontextu souboru úloh bylo třeba pečlivě zvážit délku textu a jeho zajímavost vzhledem k cílové žákovské skupině. Vybraná témata umožnila významně uplatnit mezipředmětové vztahy matematiky, vlastivědy a přírodovědy. Vyskytují se zde náměty s podtextem přírodopisným, historickým nebo zeměpisným. Žákům jsou poskytovány vstupní informace jiného předmětu, přičemž řešení učebních úloh je založeno na uplatnění matematických znalostí a dovedností žáků.

Metodologický přístup byl volně inspirován metodikou klíčových didaktických událostí (critical didactic incidents - CDI), která spadá do okruhu kvalitativní metodologie. Základní idea: „praxe je východiskem teorie“ je uplatněna v přímém pozorování pracovní činnosti žáků, které je vhodně doplňováno reflexí po akci (Slavík et al., 2014). V našem výzkumu se autorka účastnila přímého pozorování výuky v 5. ročníku základní školy a následné společné kolegiální reflexe s učitelkou formou pohospitačního rozboru. Podmínkou byl komplexní, zřetelný popis pozorované situace, na němž se shodoval učitel i výzkumník. Jednalo se o pedagogicko-psychologický a oborově didaktický pohled, při němž učitel vystupoval jako pozorovatel a koordinátor činností žáků (Slavík, Janík, & Najvar, 2016).

Činnosti jednotlivých žáků, skupin i učitelky byly dokumentovány řadou fotografií a videozáznamem. „Mikroanalýza“ výukových situací vychází z konstruktivistického pohledu na vlastní žákovo utváření znalostí a z cílového požadavku dosáhnout u žáka nejvyšší možné míry porozumění obsahu i kognitivní aktivizace (Rowland, Turner, & Thwaites, 2014). Současně se dozvídáme, jaké konkrétní problémy a epistemologické překážky se objevují při vyučování a učení se specifickému výukovému obsahu (Lech, Ametler & Scott, 2010), v našem případě souvislosti mezi matematickými pojmy a geografickými poznatky.

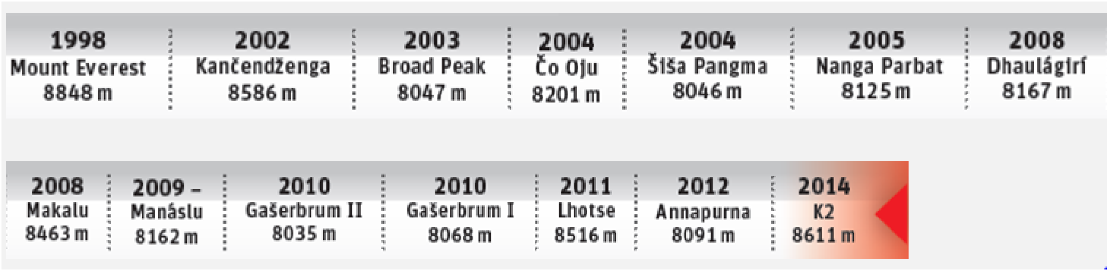
4.2.3 Průběh a výsledky výzkumu

Úvodní texty převzaté z médií se staly východiskem pro analýzu didaktických situací.

Úloha 1:

Po návratu do základního tábora měl tým důvod oslavovat, nejvíce však Jaroš, pro kterého šlo o dvojnásobné vítězství. Nejenže vylezl na K2, ale hlavně výstupem dokončil misi, kterou si vytyčil před 15 lety: dosáhnout všech 14 vrcholů osmitisícovek. Všechny se nacházejí v Himaláji a ten, kdo na nich stane, získá pomyslnou korunu Himaláje. Klub korunovaných osmitisícovkařů má 33 členů. Z toho pouhých 15 zvládlo výstupy bez použití kyslíkové bomby. Oním patnáctým je právě Radek Jaroš, mimo jiné i první Čech, kterému se to podařilo.

Osmitisícovky Radka Jaroše



Výchozí text včetně obrázku převzatý z média pro následné zpracování souboru úloh. Zdroj: http://www.honzatravnicek.cz/layout/images/file/abc20-S20-21_K2.pdf

Žáci jsou prostřednictvím úvodního textu přizváni do specifického sportovního odvětví a seznamují se s novými geografickými pojmy. Porozuměním textu z tištěného média/časopisu prokazují žáci potřebnou úroveň čtenářské gramotnosti, řešením úloh matematickou gramotnost. Tím se prostřednictvím analyzovaného textu propojují mediální, čtenářská a matematické gramotnost.

V textu se setkávají s pohořím Himálaj, nová jsou pro ně pojmenování vrcholků hor. Při řešení úloh vyhledávají žáci odpovědi na otázky jak v souvislém (lineárním) textu, tak v přehledné tabulce (nelineárním zdroji informací).

Charakter textu a z něj odvozených aktivit vytvářejí vhodné prostředí pro práci ve skupinách, které si žáci vytvořili spontánně dle vzájemných sympatií. Každá skupina obdržela pracovní list se zadáním všech úloh pro každého žáka. Úlohy řešili společně nebo si je mezi sebou k řešení rozdělili. V každém případě musela na konci celá skupina řešení projít a společně vzájemně zkontrolovat.

Autorská řešení úloh s komentářem a ukázkami žákovských řešení

1. *Pozorně si přečtěte text a odpovězte na otázky:*

a) *Ve kterém roce se Radek Jaroš rozhodl zdolat všech 14 vrcholů osmitisícovek, jestliže zpráva byla uveřejněna v roce 2014?*

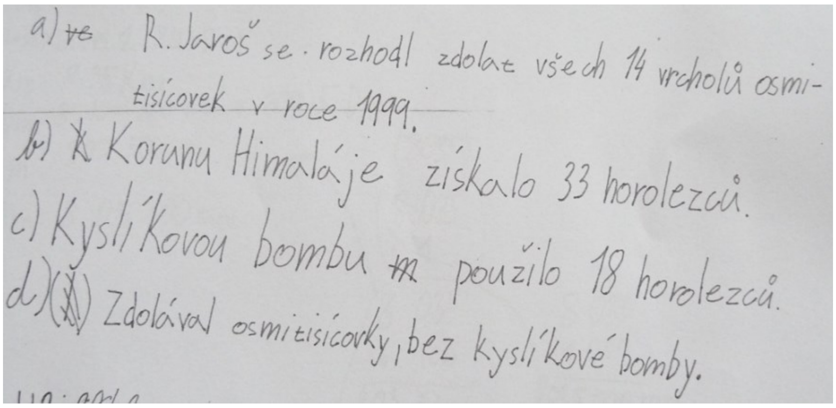
b) *Kolik horolezců již získalo korunu Himaláje?*

c) *Kolik z nich muselo při výstupu použít kyslíkovou bombu?*

d) *Jakým způsobem zdolával osmitisícovky náš horolezec?*

Při hledání odpovědi na první otázku žáci snadno určili, že se Jaroš rozhodl zdolat všech 14 osmitisícovek v roce 1999. Někteří při kontrole správnosti výpočtu zasadili tento letopočet do širšího kontextu úlohy. V tabulce zjistili, že k rozhodnutí dospěl až po zdolání Mount Everestu. V diskusi ve skupině vyslovil jeden žák tento názor: *„Nejdříve vylezl na jednu horu. Zalíbilo se mu to, a tak se rozhodl vylézt na všechny“.* Tento názor skupina přijala. Domníváme se, že tak reagovala na určitý rozpor s vlastní zkušeností (nejprve se pro něco rozhodnu a teprve poté to uskutečním).

Odpovědi na otázky b) a d) jsou snadno dohledatelné přímo v textu. Korunu Himálaje již získalo 33 horolezců (v roce 2014, kdy byl text publikován), náš horolezec zvládl výstupy bez kyslíkové bomby. Řešení žáci komentovali různými výroky, např. *„Věřil, že to dokáže.”“ S vynaložením velkého úsilí“. „Společně se skupinou dalších horolezců“.* Tím se otevírá prostor pro vzájemnou komunikaci mezi žáky, ale i žáků s učitelem při diskusi nad očekávanou správnou odpovědí.



Obrázek 23: Záznam žákovského řešení úlohy.

Odpověď na otázku c) určili odčítáním 33 - 15; osmnáct horolezců využilo při výstupu kyslíkovou bombu.

2. Na kartičky vhodného formátu pozorně pište názvy všech osmitisícovek i s jejich výškou. Zkontrolujte správnost údajů.

Seřaďte kartičky s názvy hor podle jejich výšky nejdříve vzestupně, potom také sestupně. Jednu z řad nalepte na volný list a zapište, o jaké řazení se jedná.

Kartičky s názvy a výškami hor mohou být uspořádány například sestupně: Mount Everest (8 848 m), K2 (8 611 m), Kančendženga (8 586 m), Lhotse (8 516 m), Makalu (8 463 m), Čo Oju (8 201 m), Dhaulágiri (8 167 m), Manáslu (8 162 m), Nanga Parbat (8 125 m), Annapurna (8 091 m), Gašenbrun I (8 068 m), Broad Peak (8 047 m), Šiša Pangma (8 046 m), Gašenbrun II (8 035 m).

V zadání úlohy je uvedeno, že mají žáci jednu z takto vytvořených řad nalepit. Pokud volili vlastní způsob řazení (např. “labuť” na obrázku 23), učitelka s dětmi zhodnotila, zda tento způsob zpracování je vhodnější, praktický, nejvíce využitelný, nejhezčí, funkční. Plnění úkolu se ukázalo snazší pro žáky, kteří si kartičky uspořádali do řady.

Obrázek 24: Seřazení kartiček s názvy hor.

3. Vybírejte si dvojice vrcholů a porovnávejte jejich výšky.

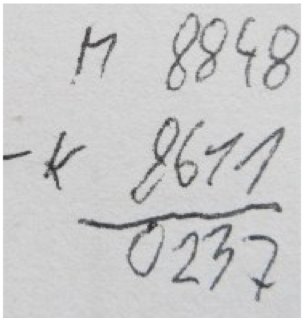
Vyberte si trojici vrcholů. Která hora je nejvyšší a která nejnižší z této trojice vrcholů?

Žáci využili svých znalostí porovnávání dvou (tří) víceciferných čísel s využitím zápisu v dekadické číselné soustavě. V zápisu všech čísel je na pozici tisíců stejná číslice (8), rozhodují číslice na dalších místech. K řešení výhodně využili sestupného uspořádání čísel z předchozí úlohy. Jedna skupina zvolila trojici Makalu, Nanga Parbat a Annapurna: Makalu (8 463 m) je vyšši než Nanga Parbat (8 125 m) a ta je vyšší než Annapurna (8 091 m), nejvyšší z této trojice je Makalu, nejnižší Annapurna.

4. Vypočítejte výškový rozdíl mezi nejvyšší a nejnižší horou.

Vyberte si alespoň dvě další dvojice vrcholů a zjišťujte jejich výškové rozdíly. Zjištěné výpočty zapisujte.

Výškový rozdíl nejvyšší (Mount Everest) a nejnižši hory (Gašenbrun II) určili jako rozdíl jejich výšek 8 848 – 8 035 = 813. Výpočet provedli žáci většinou písemně.



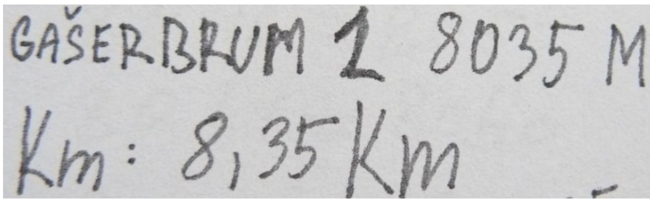
Obrázek 25: Numerický výpočet

Učitelkou byla vhodně využita příležitost ukázat výhody počítání zpaměti: obě hory jsou osmitisícové, může se výpočet zjednodušit na určení rozdílu 848 – 35, resp. pouze 48 – 35 = 13. Výškový rozdíl obou hor je je 813 m. Na obrázku 25 je výpočet rozdílu výšky dvou hor, který si žák zvolil (Mount Everest a K2).

5. Je zajímavé sledovat „hru" s výškovými údaji, pokud do naší aktivity pozveme různé jednotky. Zkuste to také. Převeďte nadmořskou výšku alespoň jedné osmitisícovky na km, dm, cm a mm a sledujte, jak se číslo proměňuje.

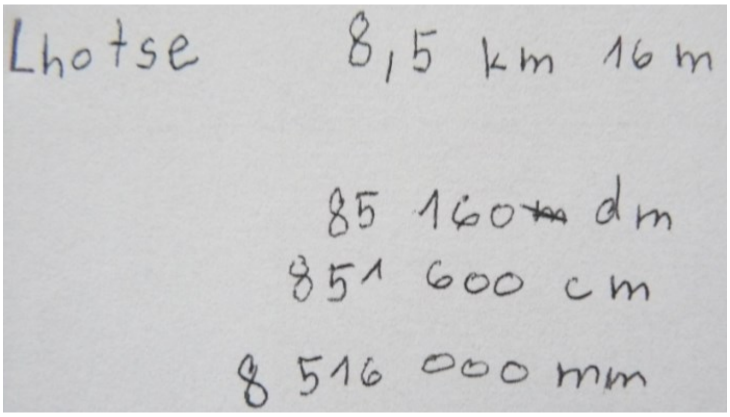
Vyberme například Makalu s výškou 8 463 metrů. Vyjádřeno v kilometrech 8,463 km, po zaokrouhlení na jedno desetinné místo 8,5. Výška hory v decimetrech 84 630, v centimetrech 846 300 a v milimetrech 8 463 000.

Obtížnost úlohy - převedení výšky hory na kilometry - je dána volbou zaokrouhlovaného čísla. Náročnější se ukázala práce s čísly, v jejichž zápise se objevily nuly. V ukázce chybného řešení žák nezohlednil nulu na místě stovek a nesprávně zaokrouhlil na tisíce (km). Chyba byla po upozornění učitelkou odhalena kontrolou, spočívající ve zpětném převedení na metry.



Obrázek 26: Chybné určení výšky hory v kilometrech.

Různé přístupy k řešení se vyskytly při převodu nadmořské výšky na kilometry, kdy řešením je desetinné číslo (s tímto pojmem mají žáci primární školy minimální zkušenosti). Pokud využili zaokrouhlení, dospěli k přibližné výšce 8 km. Někdy jednotky kombinovali (obrázek 27):



Obrázek 27. Vyjádření výšky hory v různých jednotkách.

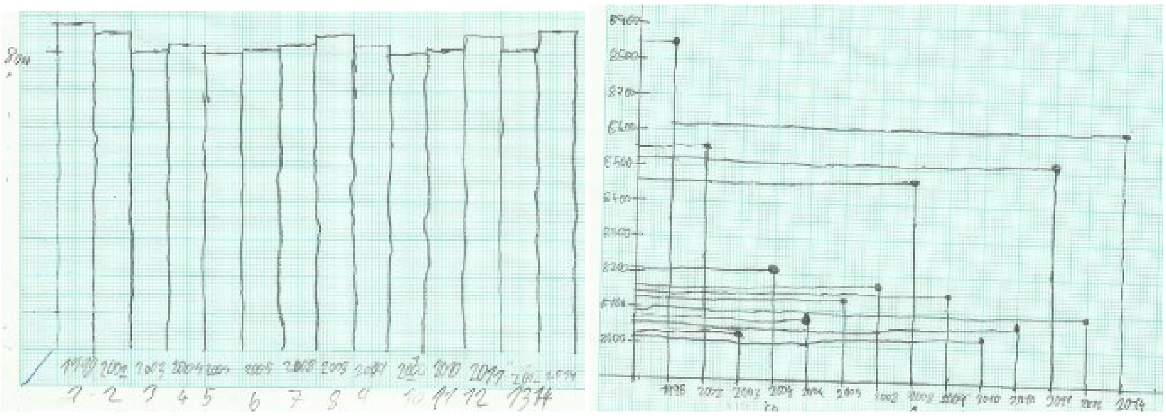
6. Vytvořte si „obraz" putování horolezce Jaroše po vrcholech Himálaje.

a) *Sestavte graf (na milimetrový papír), do kterého budou zaznamenány letopočty a nadmořská výška hor.*

b) *Zvolte vhodné měřítko pro roky a nadmořskou výšku.*

c) *Pozorně vyznačujte na obě osy potřebné údaje.*

d) *Pečlivě rýsujte a vyznačujte vzniklé body.*



Obrázek 28. Vyjádření řešení úlohy různými typy grafu.

Úloha je zaměřena na dovednost žáků vyjádřit údaje v tabulce graficky. Za vhodný graf lze považovat sloupcový nebo bodový. Podstatná je volba vhodného měřítka - tak, aby byly dostatečně zřetelné rozdíly v nadmořské výšce hor. Na první ukázce žákovského řešení - sloupcový graf - je zřetelně vidět, že zvolené měřítko výrazně ovlivnilo přehlednost zpracování. Zaznamenat číselné hodnoty na osu y a tím postihnout a interpretovat informaci o rozdílech mezi výškami hor se ukázalo jako značně obtížné.

Úloha 2:

Přímo pohádkový zámek vznikl na místě staré gotické tvrze, vybudované na skalním útesu již ve 13. století. Když byl přehrazen potok a naplnil se rybník, zůstala skála čnít nad hladinou jako osamocený ostrůvek. V 16. století se tvrz změnila na renesanční zámek. Růtové z Dírného opatřili stavbu červenou omítkou a od té doby se také ujal název - ……. Čtyřkřídlý zámek zabírá prakticky celou skálu, jihozápadní nároží vyrůstá přímo z vody. Kamenný most pochází z roku 1622. Zámek s velmi bohatým zařízením je přístupný v sezóně.

Zdroj: David, P., Soukup, V. *1000 hradů, zámků a tvrzí.* Praha: Knižní klub 2010.

Autorská řešení úloh s komentářem a ukázkami žákovských řešení

1. Pozorně si prohlédni obrázek, přečti text a odpověz na otázky:

a) Víš, jak se toto místo nazývá?
b) Pokud ne, uměl bys to zjistit? Jak?

My Ti nabízíme tyto čtyři názvy a nápovědu: Červená Řečice, Červená Lhota, Červený Dvůr, Červený Hrádek

K napsání druhého slova v názvu zámku bylo použito nejméně 5 písmen, přičemž tři z nich jsou souhlásky a slovo skládá se ze dvou slabik.

Úloha se bezprostředně vztahuje k obrázku a ilustračnímu textu, obsahuje dvě části. Zámek Červená Lhota je velmi populárním turistickým cílem, je možné, že jej žáci navštívili a na obrázku poznali. V záporném případě lze využít nápovědy v podobě jednoduché hádanky, k vyřešení stačí uplatnit základní znalosti gramatiky (písmeno, souhláska, slabika).

Žáci uváděli jako hlavní zdroj internet (zejména pak Google) či knihy o našich památkách. Někteří již pracují s informací z textu a proto by hledali v knize uvedené jako zdroj obrázku "1000 hradů, zámků a tvrzí."

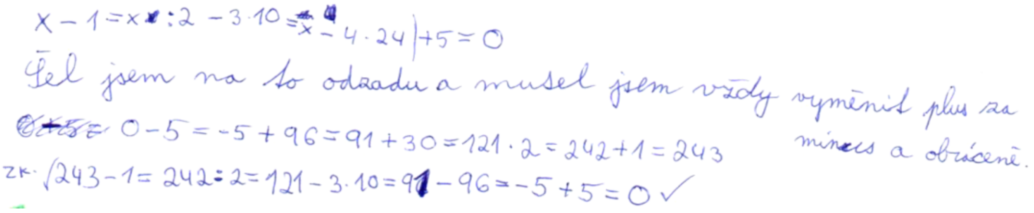
2. Doplň podle skutečnosti následující větu:

Tento obrázek i text najdeš v knize „1000 hradů, zámků a tvrzí“ na straně......

Nápověda: Když od čísla stránky odečteš 1, výsledek vydělíš 2, od něj odečteš 3krát deset, poté ještě 4krát odečteš 24 a přičteš 5, dostaneš číslo 0.

Řešení s využitím nápovědy se opírá o opačný postup operací numerického výpočtu v „řetězci“: 0 - 5 + 4. 24 + 3.10 . 2 + 1 = 243. Obrázek a text je v publikaci na straně 243. Řešení nevyžaduje jiné předběžné matematické znalosti kromě logického úsudku a elementárních počtářských dovedností.

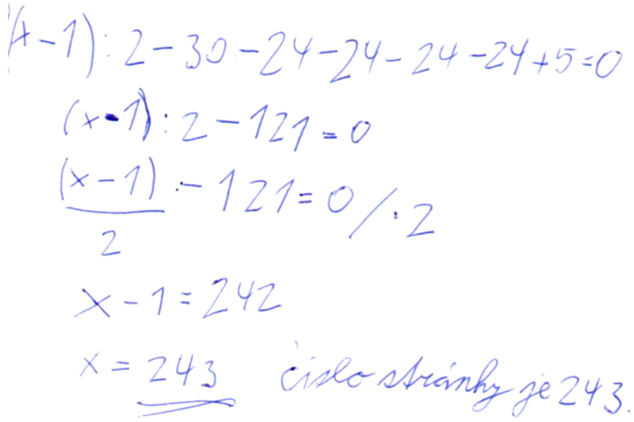
Karlovo řešení



Obrázek 29. Písemný záznam Karlova řešení.

V Karlově řešení vidíme nepřesnosti. Jednotlivé rovnosti nejsou pravdivé. Karel zde věrně zachycuje svůj myšlenkový postup bez správné formy zápisu. Přesto dospěl ke správnému řešení, které ověřil zkouškou.

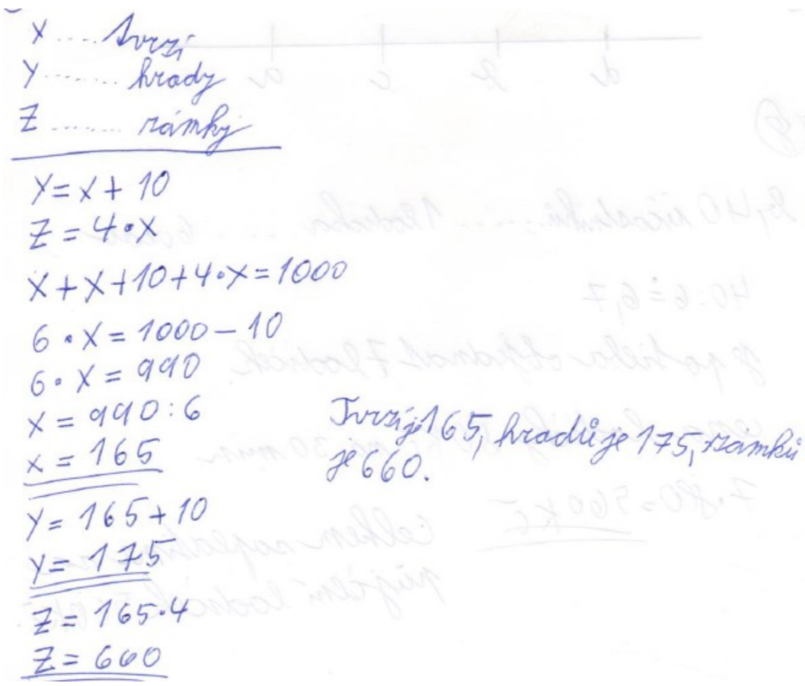
Martinovo řešení



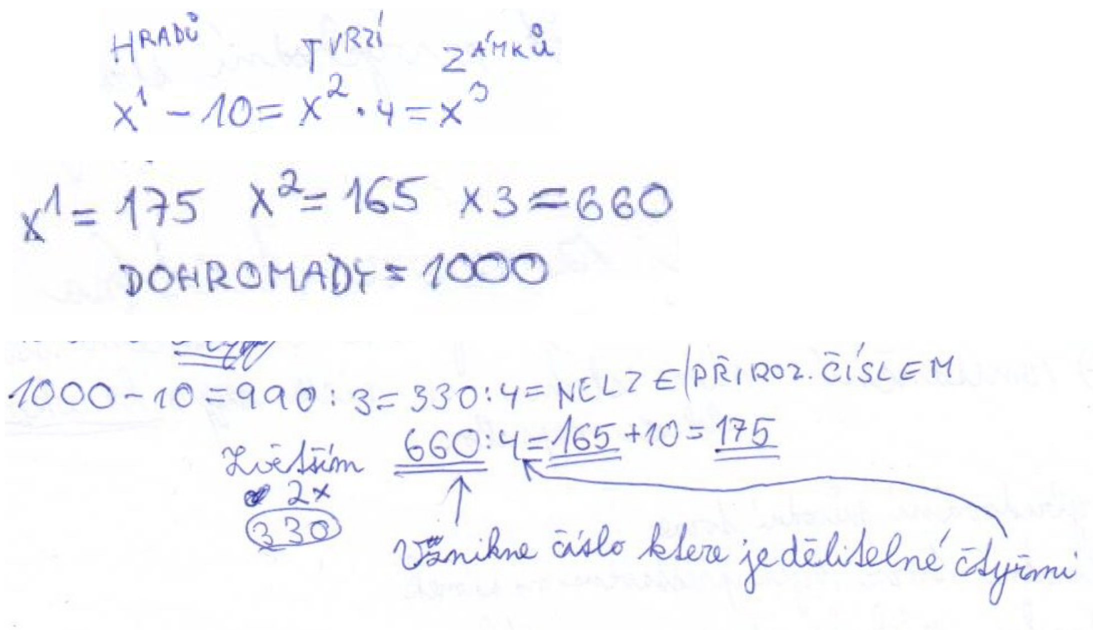
Obrázek 30. Záznam Martinova řešení.

3. *Tomáš zjistil, že je v knize o 10 tvrzí méně než hradů a zámků čtyřnásobně více než tvrzí. Vypočítej, kolik hradů, zámků a tvrzí je podle Tomáše v knize.*

Úloha je typickou „učebnicovou“ slovní úlohou. Z daných údajů lze sestavit rovnici: $t + (t + 10) + 4t = 1000$, ze které $t = 165$. Tvrzí je 165, hradů 175, zámků 660.



Obrázek 31. Řešení zachycující kompletní obvyklý školní zápis řešení slovní úlohy včetně písemné odpovědi.



Obrázek 32. Ukázky jiných záznamů žákovských řešení.

Předpokládá se dovednost analyzovat zadání úlohy, vhodně vyjádřit počty tvrzí, hradů a zámků a následně uplatnit základní algebraické poznatky o výrazech a při řešení lineární rovnice o jedné neznámé.

4. *Rozhodni, kdo má pravdu (na čí sdělení se můžeš spolehnout):*

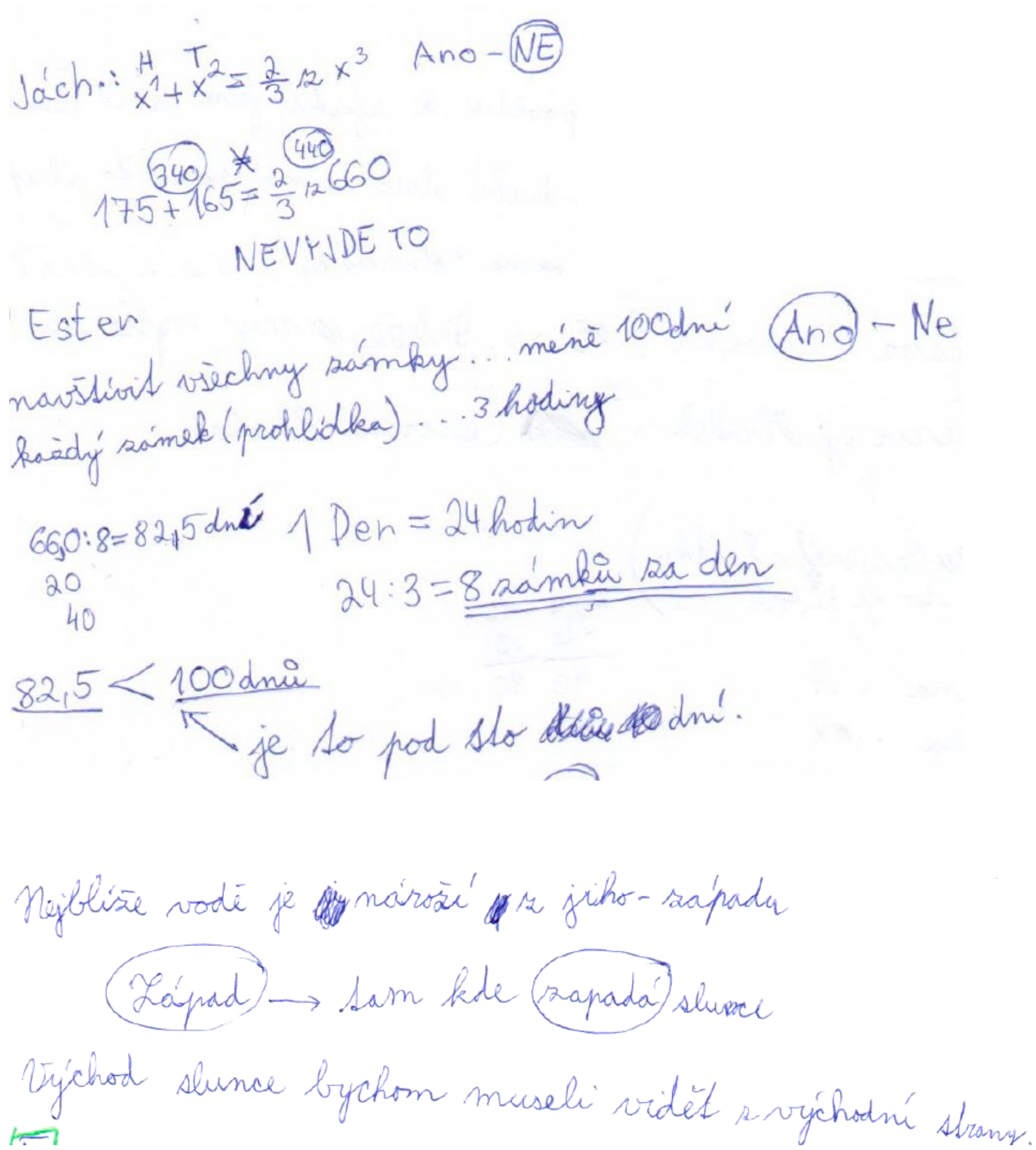
a) Jáchym: Počet hradů a tvrzí v knize je stejný jako $\frac{2}{3}$ počtu zámků. *Ano - ne*

b) Ester: Kdybychom navštívili všechny zámky a prohlídka nám pokaždé trvala 3 hodiny, stihli bychom to za méně než 100 dní. *Ano - ne*

c) Světlana: Z nároží nejblíže vodě můžete sledovat východ slunce. *Ano – ne*

Jáchym pravdu nemá ($\frac{2}{3}$ ze 660 je 440, 165 + 175 = 340); Ester pravdu má (660 . 3 = 1980 hodin, to je 82,5 dne; Světlana pravdu nemá, což vyplývá z informace v textu: „jihozápadní nároží vyrůstá přímo z vody“.

Uzavřená úloha má podobu rozhodnutí o správnosti (pravdivosti) výpovědí jednotlivých dětí s oporou o vlastní řešení. Předpokládají se znalosti jednotek času a jejich převody a využití fyzikálních poznatků (východ - jihozápad).



Obrázek 33. Martinovo správné řešení všech tří částí úlohy.

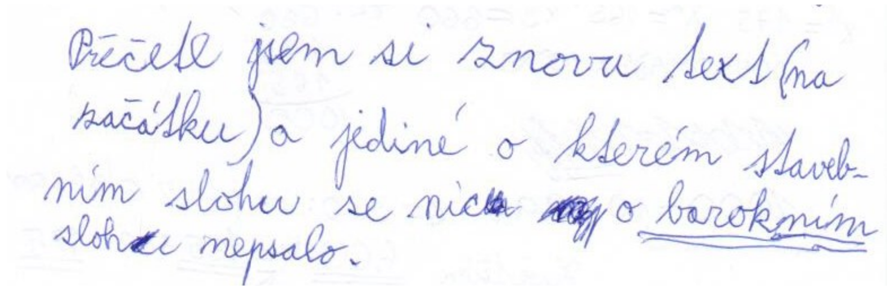
V úloze 4b) vypočítal žák správně "čistý" čas, tj. jak dlouho bychom strávili na prohlídkách všech zámků. Takové řešení by bylo vhodné konfrontovat s realitou (musíme se mezi objekty přemisťovat, zámky nemají otevřeno 24 hodin denně, většinou nenavštívíme více než jeden zámek za den).

V úloze 4c) žák zapsal svou úvahu: „západ - tam, kde zapadá slunce“. Obvykle ale takové úvahy probíhají v mysli žáka bez písemného záznamu.

5. *Který stavební sloh stavbu od jejího vzniku nepoznamenal? Zakroužkuj správnou odpověď:*

a) gotický
b) barokní
c) renesanční

Správná odpověď je b), v gotickém slohu byla postavena původní tvrz, v renesančním byla přestavěna na zámek.



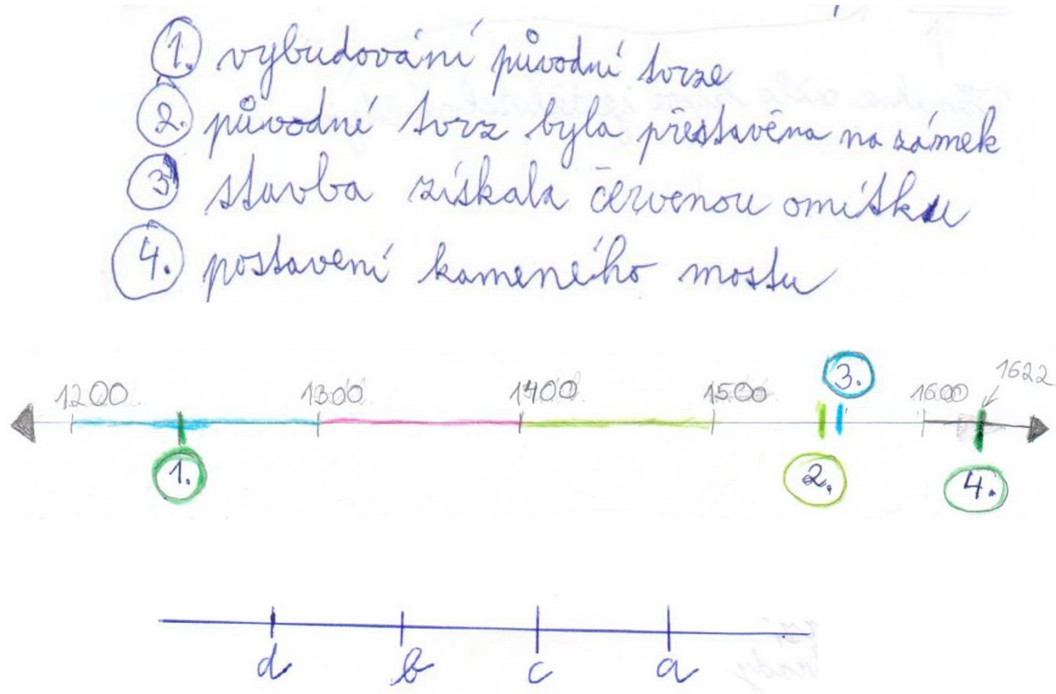
Obrázek 34. Zdůvodnění správné odpovědi.

Úloha nabízí přesah do učiva dějepisu/vlastivědy a výtvarné výchovy (tematický okruh Člověk a společnost). V návaznosti na řešení umožňuje podat charakteristiku jednotlivých stavebních slohů a jejich zasazení do historického kontextu.

6. Seřaď jednotlivé události ve správném časovém pořadí a vyznač na časové přímce:

a) postavení kamenného mostu
b) původní tvrz byla přestavěna na zámek
c) stavba získala červenou omítku
d) vybudování původní tvrze

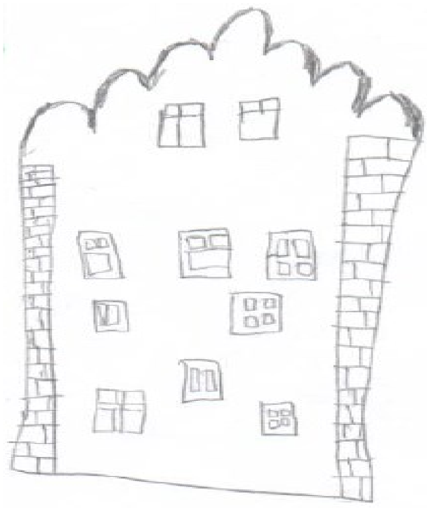
Pořadí podle času: 1. vybudování původní tvrze - 13. století, 2. původní tvrz byla přestavěna na zámek - 16. stol., 3. stavba získala červenou omítku za vlastnictví Růtů z Dírného, 4. postavení kamenného mostu v roce 1622. Řešení vyplývá z jednotlivých informací v textu. Úloha tematicky navazuje na předchozí.



Obrázek 35. Řešení s oporou o správné vyznačení událostí na časové přímce.

Pro určení časové posloupnosti jednotlivých událostí lze též využít zadání ve větší míře (pod odrážkami a)-d) jsou uvedeny jednotlivé události).

7. Narýsuj část stavby se štítem zámku na obrázku.



Požadují se dovednosti rýsování, ale také výtvarná erudice žáků.

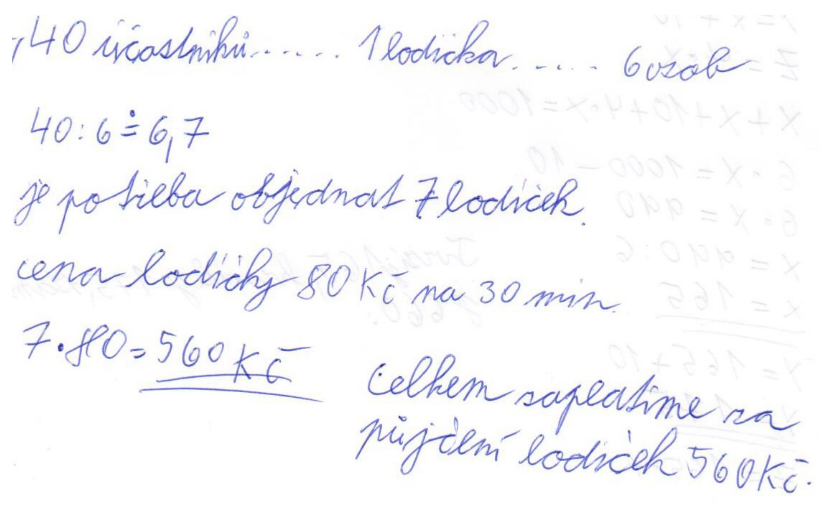
Správné čtení textu s porozuměním je základem správného řešení každé úlohy a to i v případě, kdy se jedná o text zapsaný pomocí matematické symboliky či slovního vyjádření. V řešení na obrázku nebylo použito rýsovacích potřeb ke splnění úkolu, geometrická stránka úlohy tak nebyla naplněna. V našem případě můžeme poukázat na záměnu pokynů „narýsuj“ a „načrtni“.

Obrázek 36. Průčelí zámku bylo pouze načrtnuto.

8. Pokud chce návštěvník vidět zámek z hladiny rybníka, může využít půjčovnu lodiček. Cena za půjčení lodičky je 80 Kč na 30 minut. Kolik celkem zaplatí za půjčení lodiček na 30 minut 40 účastníků zájezdu, když se do každé lodičky vejde 6 osob?

Stačí vypůjčit 7 lodiček, za které zaplatíme 7 × 80 Kč = 560 Kč.

Řešení slovní úlohy umožňuje uplatnit zkušenosti dětí z reálného života – prvky jednoduché finanční matematiky. Úloha vytváří prostor pro zvažování různých obecnějších souvislostí souvisejících s platbami i v jiných oblastech života, které žáky obklopují, například „výhodnost“ slev.



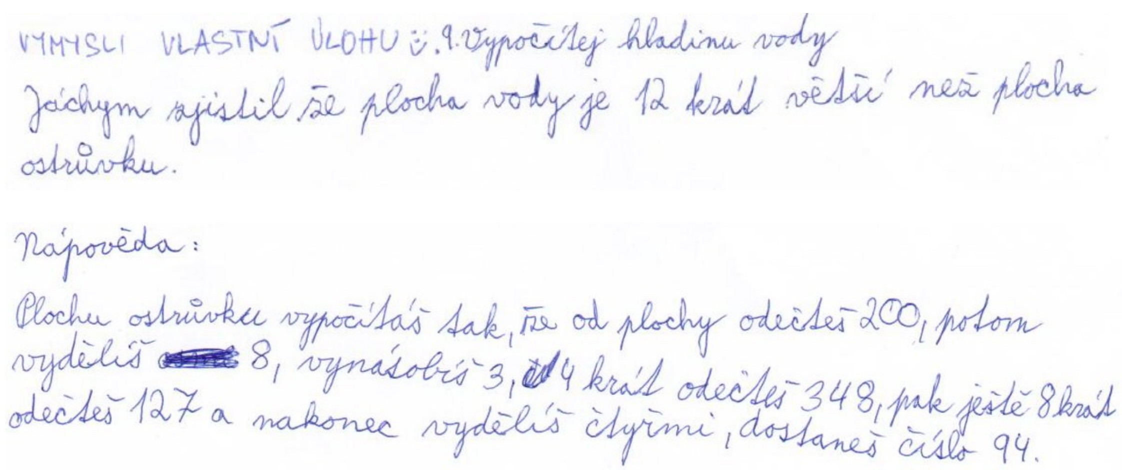
Obrázek 37. Ukázka záznamu správného řešení úlohy.

I když má první řádek tvar obvyklé formy zápisu zadání slovní úlohy, vidíme, že nese znaky spíše soukromé poznámky (40 účastníků, 1 lodička, 6 osob). Bez textu zadání úlohy by byly tyto informace jen těžko interpretovatelné.

Zajímavá je zde práce s desetinným číslem (6,7). Mohlo by se zdát, že žák v tuto chvíli může uplatnit zaokrouhlování desetinných čísel (6,7 se rovná přibližně 7). Důležitý je zde proto slovní komentář, rozhovor nad řešením. Úlohu bychom proto mohli modifikovat tak, aby na místě desetin se objevila číslice 1, 2, 3 nebo 4.

9. *Vytvoř pro spolužáky vlastní úlohu.*

Zadání vytváří prostor pro uplatnění dovednosti samostatné tvorby úloh, ukotvené ve smysluplném věcném kontextu daným tématem aktivity. Ukázka dokumentuje obtížnost zadání - vytvořit srozumitelnou a řešitelnou slovní úlohu je úloha vysoké kognitivní náročnosti.


VYMYSLI VLASTNÍ ÚLOHU :) 9. Vypočítej hladinu vody
Jáchym zjistil že plocha vody je 12 krát větší než plocha ostrůvku.

Nápověda:

Plochu ostrůvku vypočítáš tak, že od plochy odečteš 200, potom vydělíš 8, vynásobíš 3, 4 krát odečteš 348, pak ještě 8 krát odečteš 127 a nakonec vydělíš čtyřmi, dostaneš číslo 94.

Obrázek 38. Zadání bez otázky doplněné pokyny k řešení.

Nápověda zde nemá zcela obvyklou funkci. Jedná se totiž o upřesnění údajů zadání úlohy, bez něhož by úloha nebyla řešitelná. I po doplnění otázky (např. „Jaká je plocha ostrůvku a plocha vody?“) má úloha různá řešení. Z původní divergentní úlohy se nápovědou stává úloha s jediným řešením. I u žáků na 2. stupni ZŠ můžeme v tomto případě shledat jasnou roli nápodoby, kdy je zde zřejmá inspirace úlohou č. 2.

Úloha 3:

Protržená přehrada na Bílé Desné byla prohlášena za kulturní památku v roce 1996. Stalo se tak k 80. výročí protržení přehrady. Byla budovaná od října 1912 do listopadu 1915, takže od dokončení až po její protržení uplynulo pouhých deset měsíců. Zaplavila obec Desnou. V obci zahynulo 62 lidí, 33 domů zničila voda zcela a 69 bylo vážně poškozeno. V Desné je umístěn pamětní kámen, který tehdy přivalila voda. Protržená hráz se šoupátkovou věží dosud stojí. V podzemní štole do sousedního údolí, v současnosti *uzavřené, je významné zimoviště netopýrů. Dosud zde bylo zjištěno 11 druhů. Tato katastrofa na dlouhou dobu zastavila stavbu sypaných hrází ve světě. Přehrada nebyla nikdy obnovena a její trosky jsou dodnes mlčenlivým svědkem této tragédie. Nyní je na místě bývalé přehrady vyznačena krátká naučná stezka s několika zastávkami.*

Zdroj*:* http://protrzena-prehrada-bila-desna.ceskehory.cz/

Ukázka je inspirována internetovou stránkou *www.ceskehory.cz***.** Z ní je převzata informace o tragické události, ke které došlo před více než sto lety v tehdejších Sudetech. Má nesporný motivační potenciál vzhledem k aktuálním zkušenostem z povodní, často se opakujícím záplavám a obecně ke klimatickým změnám.

Autorská řešení úloh s komentářem a ukázkami žákovských řešení

1. Vyhledej v úvodním textu, na internetu a na mapě potřebné údaje a doplň věty:

Přehrada se začala budovat v roce ………na řece ……………………, která se nachází v dnešním Libereckém kraji. Najdeš ji v ……………………… horách, poblíž měst ……. a……. V zaplavené obci bylo zcela zničeno nebo vážně poškozeno celkem ……………domů.

Zakresli přehradu do „slepé mapy" ČR.

Geografické údaje, potřebné k řešení úlohy, je třeba vyhledat v informačních zdrojích, například zadat do vyhledávače heslo „Desná", resp. „Bílá Desná" a najít na mapě Liberecký kraj, Jizerské hory a města Liberec a Jablonec n. N.

2. Odpověz na otázky:

a) Ve kterém století byla přehrada budována?

b) Kolik měsíců trvala výstavba přehrady?

c) Kolik je to dní?

d) Kolik měsíců byla v provozu, než došlo k jejímu protržení?

e) Ve kterém ročním období došlo k protržení přehrady?

f) Kolik dnů má měsíc, kdy byla přehrada protržena?

Vyznač na vhodně zvolené časové přímce: ve kterém roce byla zahájena stavba přehrady, ve kterém byla dokončena, ve kterém roce došlo k jejímu protržení.

Odpovědi na otázky jsou jen zdánlivě snadné, vyžadují logický úsudek, dovednost analyzovat časová období s dobrou orientací v kalendáři, ale i použití početních operací zpaměti nebo písemně k potřebným výpočtům. Zadání vytváří prostor pro diskusi, argumentaci žáků, rozvíjení úvah o reálnosti údajů, např. kolik dní bylo skutečně pracovních aj.

3. Před kolika lety byla přehrada vyhlášena za kulturní památku? Kolik je to let od začátku její výstavby a kolik let od zničení přehrady?

Správná odpověď závisí na datu, kdy byla úloha řešena. V době naší pilotáže, v roce 2019, uplynulo 23 let od vyhlášení za kulturní památku, 107 let od zahájení výstavby a 104 let od dokončení.

První tři úlohy obsahují tvrzení, ve kterém musí žák doplnit čísla nebo slova na základě pozorného čtení úvodní ukázky. Jsou považovány za otevřené úlohy se stručnou odpovědí. Vyžadují, aby žák zformuloval a napsal vlastní odpověď (číslo, slovo, krátkou větu, vzorec apod.) – nevybírá z nabídnutých odpovědí, ale sám odpověď, řešení úlohy, produkuje (Chráska, 2007, s. 189).

4. V dnešní době zde žijí netopýři. Víme o nich, že

a) jsou aktivní v noci nebo za soumraku	*ano – ne*
b) jsou jedinými savci, kteří dokážou létat	*ano – ne*
c) létají rychlostí větší než 100 km/h	*ano – ne*
d) živí se pouze rostlinami	*ano – ne*
e) dovedou vydávat vysoké tóny, které lidské ucho neslyší	*ano – ne*
f) orientují se v prostoru spíše než zrakem podle odrazu zvuku od okolí	*ano – ne*
g) všechny druhy našich netopýrů jsou chráněné	*ano – ne*

Rozhodni o pravdivosti tvrzení na základě informací, které zjistíš na internetu.

Řešení úlohy vyžaduje přírodovědné znalosti. Předpokládá, že žák, který jimi pravděpodobně nedisponuje, dokáže vyhledat potřebné informace v internetovém vyhledávači (případně v tištěné literatuře – učebnici, encyklopedii apod.) a tím prokáže potřebnou míru čtenářské a informační gramotnosti. Tato uzavřená úloha má podobu dichotomické volby mezi pravdivou a nepravdivou odpovědí.

5. *Vypiš všechna čísla uvedená v úvodním textu.*

a) Uspořádej je vzestupně.

b) Sečti všechna sudá čísla.

c) Vynásob největší číslo dvojciferným číslem, které má na místě desítek a jednotek stejnou číslici.

Rovněž v této úloze jde o bezprostřední práci s úvodním textem. K řešení je třeba vypsat všechny čísla zapsaná číslicemi, ale také slovem – číslovka „deset“, a dále uplatnit základní aritmetické znalosti: vzestupné uspořádání přirozených čísel, rozlišení sudého a lichého čísla, znalost dekadické číselné soustavy (jednotky, desítky, dvojciferné číslo), operace sčítání a násobení. Vlastní numerické výpočty nejsou obtížné, vyžadují pouze znalost sčítání a násobení přirozených čísel zpaměti nebo písemně (případně s využitím kalkulátoru).

6. *Zdeněk plánuje výlet do Jizerských hor. Chce navštívit obec Desnou, která byla protrženou přehradou zaplavena. Pojede autobusem z Prahy – Černý Most do Jablonce, přestoupí na vlak a do Desné pojede vlakem. Najdi na internetu*

a) kolik kilometrů urazí, kolik je to metrů,

b) kolik hodin a minut mu potrvá cesta.

Slovní úloha, jejíž řešení vyžaduje informační gramotnost – vyhledávání a zpracování potřebných informací pomocí internetu.

7. *Vytvoř na základě úvodního textu vhodnou úlohu pro spolužáky.*

Žáci se při samostatné formulaci úlohy dostávají do nové role, kdy se z pasivního příjemce úloh zadaných učitelem nebo učebnicí stávají jejich samostatnými tvůrci a blíží se tak samotné podstatě matematické aktivity. Pokusy žáků vedly k rozmanitým výsledkům, někdy spíše k formulaci otázek vycházejících nejen z výchozího textu, ale i zadaných úloh. Vytvořit smysluplné zadání slovní úlohy, obsahující podmínky potřebné k řešení a vhodně formulovanou otázku, se ukázalo jako velmi obtížné. Podle našeho názoru odráží uvedená skutečnost také to, že žáci nejsou na podobnou aktivitu zvyklí.

4.2.4 Shrnutí a závěry

Analýza výstupů našeho výzkumu, který zachytil různá zpracovaná témata vycházející z aktuálních mediálních zdrojů (Nováková et al., 2015)[29] se opírala o participaci na vlastní výuce a následné reflexi. Potvrdila, že využití metodiky klíčových didaktických událostí (critical didactic incidents) klade značné nároky na profesní kompetence učitele, na poznatkovou bázi učitelství (Shulman, 1986). Byla provedena ve spolupráci s učitelkou, zkušenou pedagožkou s téměř dvacetiletou profesní praxí; vycházela ze souboru otevřených dokumentačních záznamů hospitovaných hodin. V našem textu jsme popsali úlohy a písemné žákovské záznamy jejich řešení vždy na jedno téma v průběhu jedné výukové hodiny.

Rozvoj matematické, čtenářské a mediální gramotnosti patří k základním vzdělávacím cílům v základní škole (Doležalová, 2009; Kropáčková, Wildová. & Kucharská, 2014). Obvykle jsou však uvedené gramotnosti rozvíjeny izolovaně, ve výuce matematiky a českého jazyka (Pupala & Zápotočná, 2001). Náš přístup umožňuje učitelům rozvíjet matematickou a čtenářskou gramotnost komplexně, „ruku v ruce“, prostřednictvím aktivit zaměřených na konkrétní témata s vysokým motivačním potenciálem z médií - časopisů, internetu aj. Při práci v malých skupinách pod supervizí

[29] Některé metodické poznámky a ukázky žákovských řešení jsou převzaty z citované literatury.

a s vhodnou dopomocí učitele tak dostávají žáci příležitost ke kooperativnímu učení, ke komunikaci nad vlastním řešením úloh i posuzování řešení spolužáků.

V našem výzkumu jsme potvrdili názor Fuchse a Zelendové (2015), že pro úspěšné řešení autentických úloh vycházejících z textu uveřejněného v médiích je třeba, aby žák dovedl

- dekódovat text z různých oblastí a kontextů (sociálních, geografických, technických, historických aj.);
- číst s porozuměním a se zapojením dosavadních znalostí a zkušeností; vyvozovat z přečteného závěry a vyhledat v textu údaje potřebné k řešení úlohy,
- matematizovat situace a problémy z reálného života vyjádřené textem,
- používat ke znázornění a řešení úlohy náčrtky, grafy, diagramy,
- číst v lineárních a nelineárních zdrojích (tabulky, grafy), informace z nich vyhodnocovat a využívat při řešení úlohy,
- vhodně používat potřebné matematické pojmy, termíny a symboly k výstižnému ústnímu i písemnému vyjadřování.

Naše zkušenost ukázala i některé související obtíže. Ze strany žáka jde podle našeho názoru o malou motivaci a problematické zázemí potřebných matematických znalostí a dovedností, ze strany učitele – kromě již uvedených potřebných profesních kompetencí – značná náročnost na přípravu a organizaci činností, materiální zdroje a s ní omezené možnosti realizace v běžné edukační realitě. I když učitel předem připraví scénář v podobě podrobného rozpracování připravené aktivity, nemůže se vyhnout zřejmému riziku, že jeho realizace nenaplní očekávané předpoklady a stanoveného cíle nebude dosaženo. Z uvedených skutečností je patrný akcent na kreativitu a flexibilitu učitele, aby i takovou situaci dokázal ve výuce využít.

4.3 Žákovská řešení „kapitánských" slovních úloh

4.3.1 Teoretická východiska

Výzkumné ověření žákovských řešení jednoho z typů nestandardních slovních úloh bylo založeno na předpokladu, potvrzovaném školskou praxí: žáci jsou z výuky zvyklí na typy úloh, které jdou vždy vyřešit, a které mají vždy číselné řešení. Žákovská přesvědčení týkajících se řešení slovních úloh lze vyjádřit slovy: „Každá úloha, kterou uvádí učitel nebo učebnice, je řešitelná a má smysl; existuje jedna správná a přesná odpověď, jedno číslo; k řešení úlohy stačí jen to, co je v ní napsáno".

4.3.1.1 Slovní úlohy ve školské matematice

Slovní úlohy a jejich řešení jsou považovány za jednu z nejobtížnějších oblastí školské matematiky. Rendl, Vondrová a kol. (2013, s. 50) je považují za jedno z kritických míst školské matematiky a to očima žáků i učitelů. Ve svém rozsáhlém výzkumu shrnují nejčastější problémy, se kterými je možno se v praxi setkat.

Spojení „slovní úloha“ je tradičním metodickým termínem, v didaktice matematiky je již dlouhou dobu etablováno. Vyšín (1962) za ně považuje „úlohy aritmetické nebo algebraické, formulované slovy, nikoliv matematickými symboly, nebo úlohy z praxe, jejichž řešení vyžaduje rozřešení aritmetické nebo algebraické úlohy. Geometrické úlohy se obvykle nepokládají za slovní úlohy“ (s. 107). Podobně se vyjadřují i Odvárko a kol. (1990), kteří dělí slovní úlohy na slovní úlohy s matematickým a s nematematickým obsahem.

My se spíše přikláníme k názoru jiných autorů. Za slovní úlohu budeme považovat pouze úlohu s praktickým kontextem. Divíšek a kol. (1989, s. 123) jí rozumějí „úlohou z praxe, ve které je popsána určitá reálná situace, která vyúsťuje v problém. Předložený problém je možné řešit buď v realitě, nebo matematicky“. Kuřina (1990, s. 61) charakterizuje slovní úlohu jako úlohu, „… ve které je obvykle popsána určitá reálná situace (např. s ekonomickou přírodní, fyzikální, společenskou a jinou tematikou) a úkolem řešitele je najít odpovědi na položené otázky.“ Greer, Verschaffel a de Corte (2002) považují za slovní úlohu text, který obsahuje kvantitativní informace a popisuje situaci, s níž je čtenář obeznámen. Text pokládá otázku po kvantitě a odpověď na tuto otázku lze odvodit pomocí matematických operací z údajů v textu nebo jinak získaných. Hejný (2003, s. 3) klade důraz na životní zkušenost a slovní úlohu vymezuje takto: „Termínom slovná úloha rozumieme matematickú úlohu, ktorá vyžaduje jazykové porozumenie a presah do životnej skúsenosti.“ Novák a Stopenová (1993, s. 5) ji považují za specifickou formu matematické úlohy. „Úlohy, jejichž předmětovou komponentu tvoří reálné objekty z nematematické oblasti, z životní praxe, popisující reálnou situaci, se označují jako slovní úlohy. Jednotlivé komponenty úlohy jsou formulovány v přirozeném jazyce, slovy, nikoliv matematickou symbolikou. Slovy jsou tedy vyjádřeny vztahy mezi podmínkami úlohy, tj. zadanými údaji, a otázkou úlohy, v níž je obsažen požadavek na řešení.“

Typologie slovních úloh co do obsahu a struktury zohledňuje u různých autorů různá kritéria. Divíšek a kol. (1989) třídí slovní úlohy na jednoduché (k jejich řešení postačuje jeden početní výkon) a složené (na řešení jsou třeba aspoň dva početní výkony).

V jednoduché slovní úloze je obvykle vyjádřena reálná situace se dvěma známými údaji. Otázka úlohy je zaměřena na určení neznámého údaje, který je s údaji danými v určitém vztahu. Obvyklé a žákům známé reálné situace můžeme vyjádřit jednoduchou slovní úlohou spíše ve výjimečných případech. Mnohem častější jsou situace, v nichž jsou objekty v úloze vystupující vzájemně propojeny složitějšími vazbami. Jejich matematickým modelem je obvykle složená slovní úloha. Složená slovní úloha vyžaduje k řešení alespoň dvě početní operace, které ovšem nemusejí být různé, například dvakrát se užije sčítání. Každá početní operace řeší jednu úlohu jednoduchou. Složená úloha není ovšem prostou sumou dvou nebo několika jednoduchých úloh – tyto dílčí úlohy na sebe významově navazují a jsou mezi sebou funkčně propojeny.

Hruša a kol. (1962) přejímají starší typologii Nikitina (1940) a dělí jednoduché slovní úlohy na přímé a nepřímé. U přímých úloh formulace zadání odpovídá operaci, kterou se úloha řeší. U nepřímých úloh tomu tak není, text úlohy naznačuje řešení pomocí operace inverzní. Text úlohy "svádí" žáka k užití nesprávného početního výkonu. Hejný (2014) používá pro nepřímé úlohy jinou terminologii, mluví o slovních úlohách s antisignálem. „Slovo, které ve slovní úloze napovídá, jakou operaci je nutno k řešení použít, nazýváme signálem. V případě, že takové slovo řešitele zavádí, nazveme je antisignálem“ (s. 51).

Pro naše pojetí výzkumu se zdá nejvhodnější charakteristika Hošpesové (2002, s. 39): „Slovní úlohy jsou verbálně formulované matematické problémy. Řešení slovních úloh vyžaduje do značné míry abstraktní myšlení, které se na prvním stupni základní školy teprve rozvíjí. Jedním z hlavních problémů při řešení slovních úloh je pochopení textu úlohy a následné přeložení reálné situace vyjádřené běžným jazykem do jazyka matematického vyučování.“

Blum a Niss (1991) uvádějí následující důvody pro systematické zařazování slovních úloh do výuky matematiky:

- jsou vhodným prostředkem pro rozvíjení obecných kompetencí žáků a jejich postojů k matematice,
- umožňují žákům „vidět a posuzovat“, analyzovat a porozumět užití matematiky,
- rozvíjejí schopnost žáků aktivizovat matematické znalosti v mimomatematických situacích,
- pomáhají žákům při poznávání, porozumění a uchovávání pojmů, metod a osvojených matematických znalostí.

Často diskutovaná "reálnost" situace, kterou slovní učební úloha popisuje, je výstižně popsaná v didaktické literatuře naší (Novotná, 2000, 2004) i zahraniční. Toom (1999) v této souvislosti rozlišuje dva důvody zařazení slovních úloh (word problems) do výuky matematiky: slovní úlohy jako aplikace a slovní úlohy jako „mentální manipulace“. V prvním případě hovoří o úlohách z reálného života („real-world problems“), v případě označovaném autorem jako mentální manipulace řešitel pracuje s fiktivními situacemi, které se v běžném životě nevyskytují („non-real-world problems“). Obvykle se v této souvislosti zdůrazňuje význam analýzy formulace textu slovní učební úlohy (Siwek, 2005). Efektivní četba textu úlohy s porozuměním se považuje za specifický způsob komunikace čtenáře (řešitele úlohy) s úlohou a jejím autorem, vyžadující kognitivní úsilí. Podmínkou jsou lingvistické kompetence (čtenářská gramotnost) řešitele. Orientace v textu, dovednost smysluplně číst a následně přetvořit matematický obsah úlohy do vlastní myšlenkové konstrukce řešitele, je absolutně nutnou podmínkou úspěšného řešení tohoto typu matematických učebních úloh. Vnímání slovní úlohy jako literárního textu, který má svou jazykovou, tj. morfologickou, syntaktickou a stylistickou podobu, je současně jedním z příspěvků k humanizaci matematického vzdělávání.

Podnětné jsou práce polského didaktika matematiky Semadeniho (1995) zaměřené na problematiku studia obtíží při porozumění zadání slovních učebních úloh žákem základní školy. Autor odlišuje složitost slovní úlohy (jako objektivní vlastnost úlohy) a její obtížnost (vyjadřující vztah mezi úlohou a jejím řešitelem). Obě uvedené vlastnosti ve školní výuce postupně gradují a to ve vztahu:

- k matematické struktuře, k matematickému obsahu učební úlohy.

Tato gradace spočívá například v postupném přechodu od „malých“ čísel k „velkým“ úloh při rozšiřování oboru numerace přirozených čísel, později v používání zlomků a desetinných čísel v zadání učebních úloh. Slovní úlohy na sčítání a odčítání jsou obvykle méně obtížné, než úlohy na násobení a dělení. Od úloh, k jejichž řešení stačí jeden úkon, se přechází k úlohám s komplikovanější strukturou, k jejichž řešení je třeba několika kroků,

- k sémantickému pozadí, kontextové stránce slovních učebních úloh, která se rovněž rozvíjí a obohacuje.

Od tematiky úloh čerpající z bezprostředního okolí žáků, s reálným sémantickým pozadím, z jejich denní zkušenosti, ale také s nereálným (ale realistickým) pozadím - například námětů z pohádek, sci-fi, apod., se postupně přechází k úlohám z jednoduché finanční matematiky (nákupy, spoření, slevy,…), úlohám s vlastivědnými, fyzikálními, ekologickými tématy,

- k „formátování“ učební úlohy (ve smyslu jejího prezentování žákům).

Na zadání učební úlohy pohlížíme jako na precizní a správné, pokud neobsahuje chybné informace či nejasné formulace, otázka je věcně i stylisticky správně sestavena. Matematická učební úloha může být zadána žákovi v různé formě. Nejobvyklejší je písemné zadání úlohy obsahující text, případně text s různými symboly, grafická schémata, obrázky; zadání černobílé nebo s dalšími barvami. Ve výuce matematiky na 1. stupni ZŠ se postupuje od úloh zprostředkovaných učitelem (učitel čte text, zadání) nebo srozumitelným obrázkem k úlohám, s jejichž zadáním se seznamují žáci sami nejprve hlasitým, později tichým čtením. Od úloh zadaných i řešených činností s konkrétním, názorným materiálem přes využití grafických znázornění a schémat až k úlohám, v jejichž vyjádření a v postupu řešení se uplatní matematické symboly.

K řešení slovních úloh se vyjadřují Hejný a Kuřina (2001). V intencích konstruktivisticky orientované výuky matematiky zdůrazňují, že „rozumět znamená chápat souvislosti, umět formulovat otázky a problémy a řešit je, umět aplikovat teorii.“ (2001, s. 82). Podle něj nestačí být pouhým divákem situace či reprodukovat bez porozumění, ale důležité je konstruovat si reprezentace, musí docházet k transformaci matematické informace z učitelova výkladu.

Z uvedených předpokladů vycházejí rovněž Blažková a kol. (1992), konkretizují je pro řešení slovních matematických úloh v prostředí primární školy a navrhují metodický postup, který je obvykle zohledňován v praxi:

- porozumění textu,
- analýza podmínek ve vztahu k otázce úlohy,
- matematizace reálné situace vyjádřené textem úlohy,
- provedení odhadu výsledku,
- vlastní řešení,
- zkouška správnosti,
- formulace odpovědi.

4.3.2 „Kapitánské“ slovní úlohy

Předmětem našeho výzkumného zájmu byly slovní úlohy zvláštního typu, s potenciálem rozvíjet kritické myšlení žáků[30]. Takovým úlohám bývá obvykle věnována pozornost pouze marginální (Radatz, 1983). Zaměřili jsme se na slovní úlohy, které nemají obvyklou strukturu: obsahují nadbytečné údaje, které k řešení nejsou třeba („přeurčené“), nebo naopak neobsahují dostatek podmínek k řešení (s chybějícími údaji, „nedourčené“), nebo na položenou otázku nelze z uvedených faktů vůbec odpovědět („nonsensical problems“)[31], v českém prostředí obvykle označovaných jako „kapitánské“. Tyto úlohy pomáhají rozbourávat naučené mechanické postupy a nutí řešitele ke čtení zadání úlohy s porozuměním. Uvedeme několik příkladů (Andresová, 2016):

- *Dědeček měl 40 kuřat a 20 housat. 4 kuřata mu uhynula. Kolik housat mu zůstalo?*
- *Na palubě lodi bylo 26 koz a 17 ovcí. Při bouři se utopily 3 ovce. Kolik zbylo na lodi koz?*
- *Na lodi je 60 pirátů. Každý třetí pirát má skleněné oko, každý čtvrtý má dřevěnou nohu. Zbytek pirátů má místo ruky železný hák. Kolik je na lodi pirátů dohromady?*
- *Jana na oslavu pozvala 2 kamarády, 5 kamarádek a příbuzné. Kolik lidí bylo na oslavě?*
- *Malá dortová svíčka dohoří za 10 minut. Za kolik minut dohoří 10 svíček?*

---

[30] Jedno z vymezení kritického myšlení zdůrazňuje následující znaky: je nezávislé a samostatné; získání informací je jeho východiskem, ne cílem; hledá a předkládá otázky a problémy; hledá promyšlená zdůvodnění; je „myšlením ve společnosti“ – má sociální dimenzi (Kooster, D., 2001, 4, 36-40).
[31] *„There are 26 sheeps and 10 goats on a ship. How old is captain?“* (Institut de Recherche sur l´Enseignement des Mathématiques de Grenoble, 1980; Radatz, 1983).

4.3.2.1 Metodologie

Cílem výzkumu bylo zjistit, zda jsou žáci 4. a 5. ročníku základní školy schopni „řešit“ slovní úlohy, u nichž je nezbytným předpokladem zapojení kritického myšlení. Tedy takové slovní úlohy, které buď nemají řešení, nebo jejich řešení je obsaženo již v zadání úlohy.

Jako výzkumnou metodu jsme použili analýzu žákovských řešení souboru kapitánských slovních úloh. Inspiraci nám poskytl starší výzkum citovaný Verschaffelem, Greerem a de Cortem (2000), jehož výsledky korespondují s často uváděnými názory učitelů v praxi, kteří si stěžují na „neochotu žáků myslet“. Výzkum byl realizován na podzim 2019 v 8 třídách fakultních škol Pedagogické fakulty MU v Brně.

Vybrali jsme úlohy trojího typu:

1) obsahující údaje, které k řešení (hledání odpovědi na otázku) nebude třeba použít: *Třída 4. D, ve které je 12 děvčat a 9 chlapců, jela na výlet vlakem a autobusem. Každé z dětí zaplatilo za jízdenku na vlak 30 Kč a za jízdenku na autobus dvakrát více. Kolik zaplatili všichni chlapci za autobus?*

2) s chybějícími údaji, bez jejichž doplnění nelze úlohu vyřešit: *Kolik zaplatíme za oplocení zahrady o délce 40 metrů a šířce 25 metrů?*

3) „nesmyslné“ úlohy: ptáme se na údaj, který se v zadání vůbec nevyskytuje a na položenou otázku nelze z uvedených faktů odpovědět: *Ve stádě je 125 ovcí a 5 psů. Jak starý je pastýř?*[32]

Úlohy byly zadány 126 žákům 4. a 5. ročníku 1. stupně ZŠ (9 – 10 let). V každé třídě byla řešení úloh věnována jedna vyučovací hodina. Počátečních 10 – 15 minut měli žáci na samostatné řešení. Svá řešení zaznamenali přímo pod zadání úlohy, písemná řešení pak odevzdali a zbývající část hodiny byla věnována společnému rozboru jednotlivých úloh.

Před zahájením práce byli žáci upozorněni, aby pracovali samostatně a v průběhu řešení se na nic neptali, neboť veškeré informace jsou již obsaženy v zadání (aby bystřejší žáci neupozornili ostatní, že v úloze údaje vedoucí k výsledku/řešení chybí nebo jsou naopak již uvedeny).

K žákovským řešením jednotlivých úloh jsme předem formulovali naše očekávání:

[32] Úloha byla převzata z: Verschaffel, L., Greer, B., & de Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*.Lisse (Netherlands): Swets and Zeitlinger B.V.

1) úloha 1. typu: Předpokládáme, že většina žáků ji vypočítá správně, možná jen špatně vynásobí čísla mezi sebou. Najdou se jednotlivci, kteří zapojí do řešení i čísla, která jsou v zadání navíc a která k odpovědi na otázku není třeba použít.

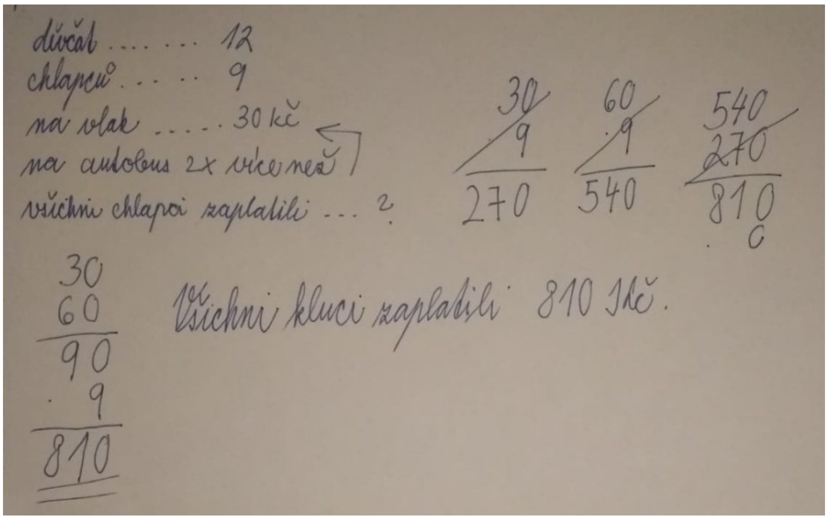
2) úloha 2. typu: Předpokládáme, že někteří žáci se budou snažit úlohu vypočítat, i když nemají všechny potřebné informace. Většina z nich rozměry zahrady pouze sečte nebo vynásobí. Někteří žáci napíší, že se úloha nedá vypočítat, ale asi jich moc nebude.

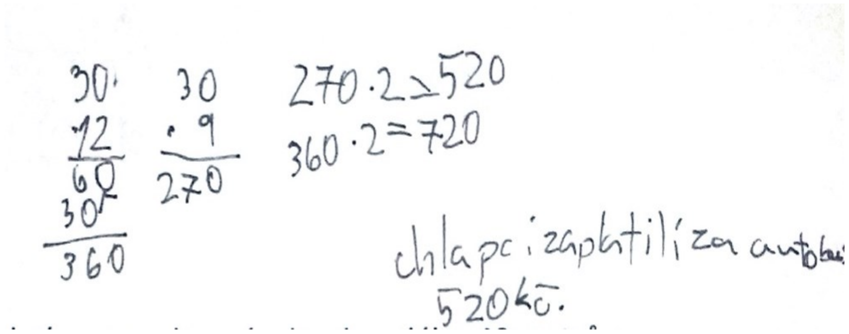
3) úloha 3. typu: Předpokládáme, že žáci uvedou, že úlohu nelze vypočítat, a nebudou ji řešit, aniž by zdůvodnili proč. Ale protože jsou zvyklí na slovní úlohy, které vždy mají nějaké řešení, budou někteří počítat, použijí dělení nebo sčítání. U násobení asi narazí, když zjistí, že výsledek je příliš velké číslo.

4.3.2.2 Výzkumná zjištění

Provedená analýza žákovských řešení směřovala jednak k posouzení „úspěšnosti řešení“ úloh, jednak k interpretaci reakcí žáků na neobvyklý charakter úloh v průběhu výuky i v písemných záznamech řešení.

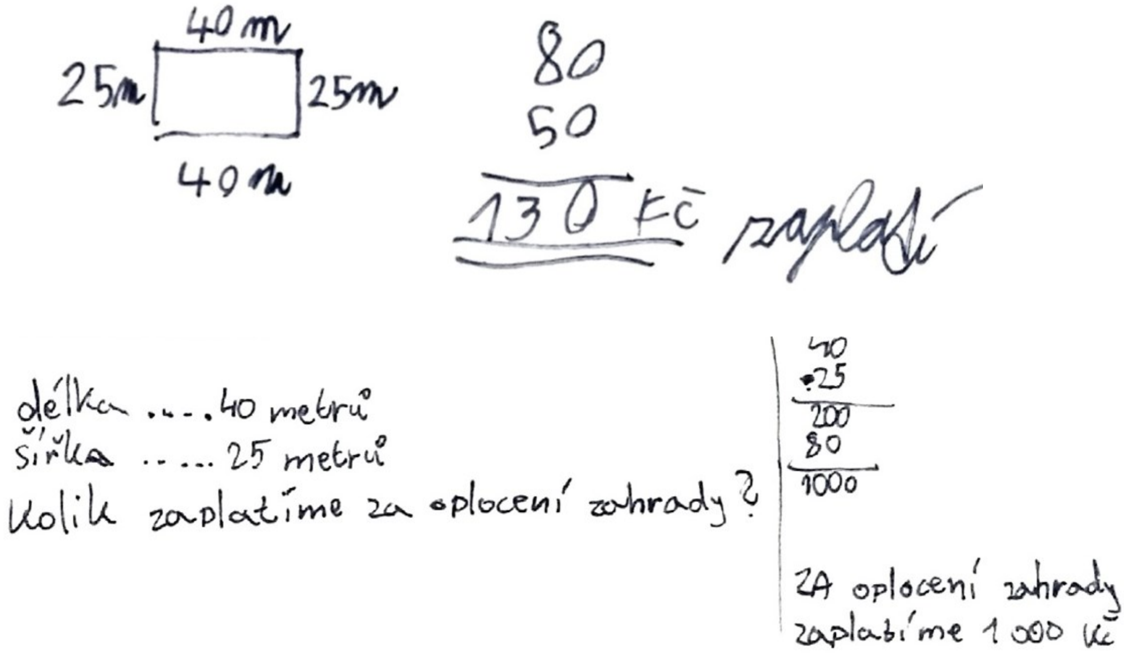
Úloha 1 byla řešena se značnou mírou úspěšnosti (62 %), náš předpoklad se naplnil. Žáci ji okomentovali jako „normální slovní úlohu s více informacemi, než potřebujeme“. Často se objevovala snaha udělat si ze zadání stručný zápis a až následně hledat řešení úlohy. Chyby, kterých se dopouštěli, spočívaly v řešení, které neodpovídalo na položenou otázku úlohy – „všichni chlapci za autobus“ nebo v chybném numerickém výpočtu či v nezřetelně formulované odpovědi:



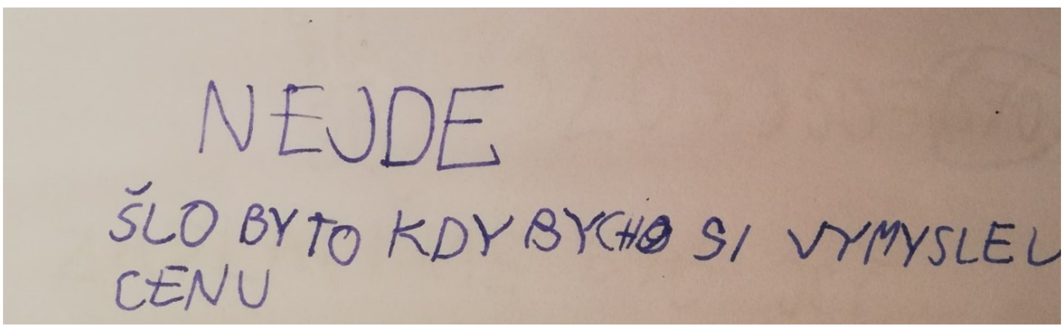


Obrázek 39. Nesprávná řešení úlohy č. 1.

Pokud řešili žáci úlohu 2, pak buď vypočítali obvod obdélníkové zahrady, nebo zadaná čísla pouze sečetli či vynásobili bez dalšího zdůvodnění. Pokud úlohu neřešili, nezdůvodnili, proč ji nelze vyřešit. Chybějící cena metru oplocení jako podmínka řešení byla uvedena jen zcela výjimečně. I zde byla naše očekávání splněna:

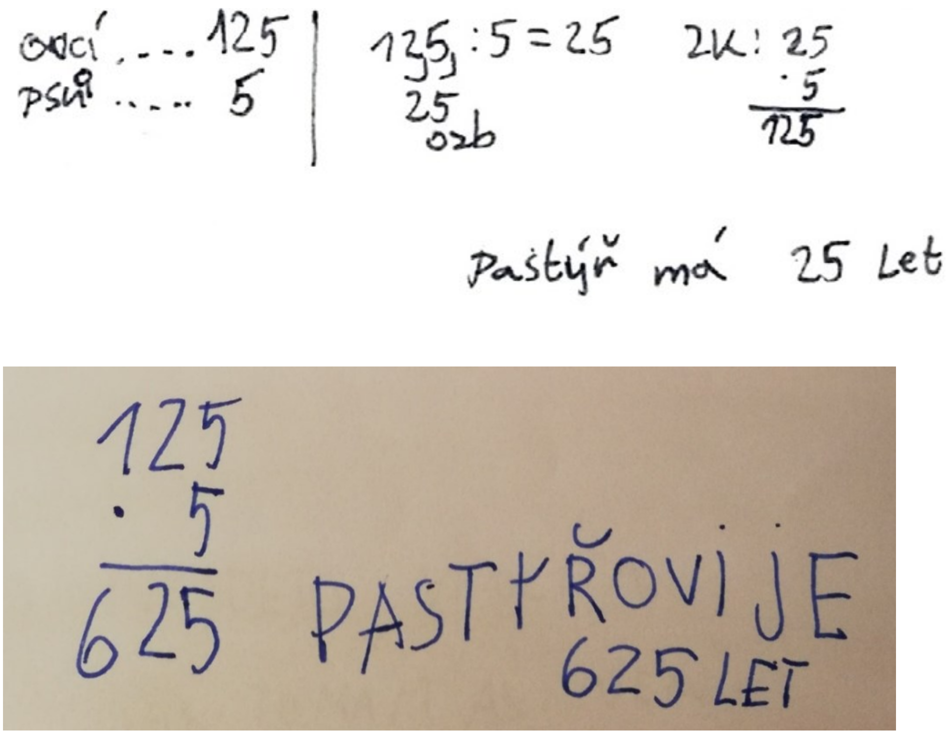


Obrázek 40. Nesprávná řešení úlohy 2 s numerickými výpočty.



Obrázek 41. Zdůvodnění, proč žák úlohu 2 neřešil.

V pokusech o „řešení“ úlohy 3 se objevily prakticky všechny početní operace, nejčastěji dělení (patrně proto, že věk 25 let se zdál řešiteli přiměřený). Pouze minimum žáků bylo schopno na zadanou otázku adekvátně odpovědět (řešením úlohy může být i sousloví „nelze určit“). Výstižně odpověděl například žák, který napsal odpověď: „Ovce a psi s tím nemají nic společného.“ V některých třídách proběhla velmi zajímavá diskuse s těmi několika málo žáky, kteří silně argumentovali, proč druhá a třetí úloha nemá řešení – chybí údaje, věk pastýře nezávisí na počtu psů.



Obrázek 42. Výpočty při řešení „nesmyslné úlohy“.

4.3.2.3 Diskuse a závěry

Závěry, které jsme učinili z písemných řešení i diskusí nad řešením se žáky ve třídě, nás utvrdilo v tom, že žáci jsou zvyklí na takové úlohy, které mají vždy číselné řešení. Typ úloh, který jsme jim zadali, je jim naprosto neznámý, a proto pro ně bylo těžké s nimi pracovat. Právě úlohy, které jsme ve výzkumu využili, však nutí řešitele ke čtení zadání úlohy s porozuměním a kriticky posuzovat vztah mezi podmínkami úlohy a otázkou Potvrdila se zjištění Verschaffela, Greera a de Corteho (2000), kteří uvádějí, že pouze 12 % dětí ve věku 7 – 9 let dokázalo na zadanou otázku správně odpovědět, ostatní se snažily úlohu „vypočítat“[33]. Autoři tento jev vysvětlují pojmem „word problem game“,

[33] V citovaném výzkumu byla zadána úloha: „*There are 26 sheeps and 10 goats on a ship. How old is captain?“ (*Radatz, 1983*).*

který zahrnuje očekávání žáků i učitelů, že pokud je ve výuce matematiky zadaná slovní úloha, bude mít vždy řešení.

Palm (2008) si ve svém výzkumu také kladl otázku, proč žáci při řešení slovních úloh někdy docházejí k řešení, které není konsistentní s reálnou situací popsanou v úloze. Zjistil, že ne všechny „nerealistické“ odpovědi žáků pramení z „absence rozumného uvažování“ – při řešení využívali své osobní porozumění situacím, které jsou v souladu s jejich vlastními zkušenostmi, odlišnými od porozumění těmto situacím učiteli nebo autory učebnic.

Za další nesporný předpoklad úspěšného řešení úloh, který jsme v našem šetření potvrdili, je úroveň čtenářské gramotnosti, práce s textem a s informacemi. Gramotnost však neznamená pouze schopnost identifikovat jednotlivá písmena nebo schopnost napsat jednoduchá slova. Gramotností rozumíme především schopnost porozumět obsahu textu[34].

„Pochopení úlohy“ spočívá v tom, aby žák uměl roztřídit informace z textu slovní úlohy na důležité a nedůležité (nadbytečné). Vliv porozumění textu na kvalitu řešení úlohy zdůrazňuje řada autorů. Polya (1945; 2016) považuje porozumění problému za klíčové při řešení každé úlohy: „It is foolish to answer a question that you do not understand.“

Hejný a Stehlíková (1999) uvádějí, že v situaci nedostatečného porozumění zadání úlohy dochází obvykle k jednomu z následujících způsobu reakce žáka:

- rezignace – žák řešení úlohy vzdá, o řešení se vůbec nepokusí,
- podvádění – žák se snaží řešení získat bez vlastního přičinění, například opsat od spolužáků,
- náhodná kalkulace – žák vezme (někdy jen některá) čísla ze zadání úlohy a „něco s nimi náhodně udělá“ – sečte je, vynásobí apod.,
- náhradní uchopování – žák se při řešení opírá o „vnější poukazy“. Poukazem se rozumí to, že žák dostane určitou dodatečnou informaci, ať už od učitele či ji nalezne v zadání úlohy („signál“, což je slovo nebo slovní spojení mající charakter idiomu, který ve vědomí žáka asociuje jistý kalkulativní postup).

Domníváme se, že úlohy v našem šetření mohou mít také funkci motivační. Žáci mohou být pomocí neobvyklého zadání vtaženi do děje a díky příběhu mohou mít zájem o vyřešení úlohy.

[34] Změny v chápání obsahu gramotnosti vystihuje slovní hříčka v angličtině: čtení směřuje od „word reading“ - čtení slov ke „world reading“- čtení světa. Znamená to, že „umět číst“ a „být gramotný“ dnes už není totéž (Pupala & Zápotočná, 2001, s. 269).

Závěr

Poznatky, získané v průběhu vlastních výzkumných šetření v prostředí 1. stupně základní školy, mohu vhodně uplatnit ve výuce didakticky zaměřených předmětů ve studiu učitelství pro 1. stupeň základní školy. Na mém současném působišti, Katedře matematiky Pedagogické fakulty MU v Brně, je v posledních letech výuka zaměřena na hledání cest, jak změnit akademický přístup založený pouze na osvojování teoretických poznatků studentů. Uplatňuje se model reflektivní praxe jako specifického klinického pojetí profesního vzdělávání budoucích učitelů. V pojetí reflexe, které vychází z konstruktivistické epistemologie (Svojanovský, 2016), je osvojování znalostí zpravidla spojeno s reflexí praktické zkušenosti v reálném prostředí školské výuky (Janík et al., 2013). Učitel jako reflektivní praktik jedná aktivně, samostatně, tvořivě a odpovědně v komplexních pedagogických situacích na základě dostatečně hlubokého a širokého poznání edukačních jevů a souvislostí, svých zkušeností, kritické reflexe a sebereflexe. Reflexi můžeme považovat za „proces učení se prostřednictvím zkušeností a ze zkušeností s cílem získání nového porozumění sobě samému a/nebo praxi“ (Píšová et al., 2011, s. 43). Učení ze zkušenosti chápeme jako celostní učení, které zahrnuje jak kognitivní aspekt (myšlení), tak aspekt konativní (jednání) a afektivní (prožívání), jež jsou vzájemně provázány. V našem pojetí vnímáme uvedený koncept vzdělávání učitelů v souladu s Tomkovou (2018) jako obrat ke studentovi, který mu umožňuje rozvoj celé jeho osobnosti. Reflektování předchozí zkušenosti pomáhá budoucímu učiteli vyhodnocovat efekty vlastních přístupů a objevovat nové cesty jak přistupovat ke vzdělávání konkrétních dětí.

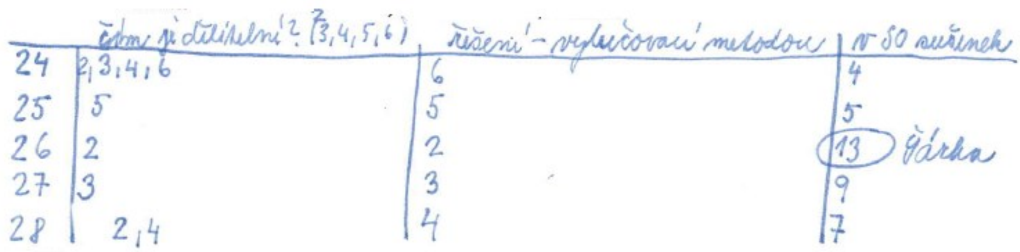
V seminářích předmětu Didaktika matematiky ve studiu učitelství pro 1. stupeň základní školy cíleně vytváříme prostor pro analýzu a následnou společnou reflexi úloh, situací a jevů. Pro naši realizaci reflexe je významné využití hospitačního videozáznamu (Najvar et al., 2011). Studenti zde dostávají příležitost k tomu, aby otevřeně a kriticky vyjádřily svůj názor, uplatnili své dosavadní kompetence diagnostické a komunikativní. Smyslem společné detailní analýzy výukových situací je především to, aby se studenti učili „vidět“ a „pojmenovat“ souvislosti jednotlivých aktivit s osvojováním matematických znalostí. Tím se jim poskytuje určitý „vzor“ pro reflexi vlastní výuky.

Jako vhodná oblast společné reflexe se nabízejí matematické úlohy a jejich řešení žáky. Na počátku didaktické přípravy mají studenti zkušenost s řešením matematických úloh pouze v roli řešitele (žáka): jejich cílem dosud bylo úlohy co nejúspěšněji (správně, rychle, podle požadavků učitele) vyřešit a být za to odpovídajícím způsobem (známkou, pochvalou učitele, vlastním pocitem úspěchu) oceněni. S jinými stránkami práce s úlohami, zejména těmi, kterými mohou regulovat učební činnost žáků a diagnostikovat jejich znalosti, se dosud nesetkali. Neznají typologie úloh, nedovedou kompetentně charakterizovat jejich efektivní využití v různých etapách výuky, například motivační aspekt zejména slovních úloh. Neuvědomují si vliv formulace zadání úloh na strategii a kvalitu žákovských řešení. Nedovedou posoudit obtížnost úloh, identifikovat příčiny chybných žákovských řešení.

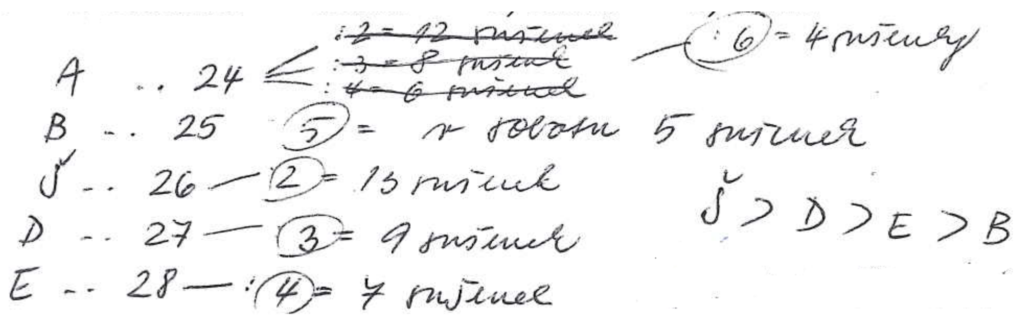
Uvedeme jednu ukázku z reflektivní analýzy studentů[35], v níž jsme si položili otázku, zda budoucí učitelé dovedou na základě vlastního řešení posoudit obtížnost nestandardních úloh pro žáky 5. ročníku ZŠ a další souvislosti využití úlohy. Zvolili jsme úlohu, uvedenou v rigorózní práci v kapitole 4.1.3.3.

- *Kamarádi Alenka, Bohunka, Šárka, David a Eliška o víkendu pekli sušenky. Během celého víkendu upekla Alenka 24 sušenek, Bohunka 25, Šárka 26, David 27 a Eliška 28. Na konci víkendu měl jeden z kamarádů dvakrát více sušenek než po sobotě, jiný měl třikrát více, další čtyřikrát více, další pětkrát více a poslední šestkrát více. Kdo upekl v sobotu nejvíc sušenek?*

Studenty úloha zaujala, ale považovali ji pro žáky 5. třídy za značně obtížnou (45 % studentů ji považovalo za velmi obtížnou, 41 % za středně obtížnou, 14 % za málo obtížnou). Při vlastním řešení obvykle použili postupy, které lze očekávat také od žáků 1. stupně ZŠ, uplatnili však rovněž znalosti z vyšších stupňů vzdělávání (dělitelnost – násobek a dělitel).



Obrázek 43. Řešení využívající dělitele čísel.



Obrázek 44. Postup, který se zřejmě nejvíce blíží úvaze žáka.

Některé názory studentů:

„Úloha mě zaujala. Protože vedla k zamyšlení a prohloubení učiva násobilky. Zadání jsem si musela několikrát přečíst, než mě napadlo řešení."

[35] Zjištění z výzkumu, jehož cílem bylo reflektovat žákovská řešení vybraných nestandardních úloh studenty učitelství pro 1. stupeň ZŠ, byla publikována v článku Nováková, E. (2019). Matematické učební úlohy očima studentů učitelství pro 1. stupeň ZŠ. *Elementary Mathematics Education Journal*, 1(1), 72-82.

„Tato úloha se mi líbila. Nenásilně spojovala dělitelnost s násobením v praktickém příkladě.“

„Tato úloha mi nepřišla dostatečně jasná, já sama jsem si ji musela několikrát přečíst a stejně jsem ze zadání nepochopila, co po mně chtějí“.

„Pokud dítě zvolí jiný postup řešení, než jaký se probíral, ale dává smysl a lze ho aplikovat i na jiné příklady (je „univerzální“), nezáleží mi na tom. Hlavní je, že dítě ví, jak dojít ke správnému řešení a používá mozek.“

„Jak se liší moje řešení od dětí? Hledáme až moc zákeřností a používáme zbytečně těžké operace na místo těch banálních.“

„Od dětí očekávám, že přijdou k výsledku spíš přes kreslení, než přes vzorečky.“

„Nemám ráda tento typ úloh. Jako malé dítě jsem vždy viděla před sebou spoustu práce, protože mi bylo jasné, že se nejedná jen o výpočet, ale že budu muset zkoušet různá řešení a „možná“ na to přijdu.“

Z výpovědí studentů bylo možno zaznamenat různé postoje k analýze matematických úloh. Někteří studenti se zaměřují pouze na správnost řešení bez uvažování o možných strategiích řešení úlohy, o „promítnutí“ se do žákovských řešitelských kompetencí a o dalších didaktických souvislostech využití úlohy ve výukových situacích (setrvávají v roli žáka). Vyžadují jasný a srozumitelný metodický návod: které úlohy jsou vhodné, jak jejich řešení posuzovat a hodnotit. Hlavním vodítkem jsou pro ně úlohy v učebnici, čím je učebnice „modernější“, tím lépe. Reflexe však přinesla i řadu postřehů, vypovídajících o tom, že se mnozí studenti se již dovedou na úlohu a vztah mezi úlohou a žákem podívat očima budoucího učitele.

Pohled na úlohy se tak stal možností angažovat studenty do uvažování o sobě. Domnívám se, že problematika matematických učebních úloh a jejich řešení žáky také v této souvislosti nabývá nového významu – je příležitostí nejen k rozvoji osobnosti žáka, ale je jedním z elementů konstrukce profesní identity budoucíhoučitele.

Použitá literatura

Amade-Escot, C. (2005). Using the critical didactic incidents: Method to analyze the content taught. *Journal of Teaching in Physical Education,* 24 (2).

Andresová, H. (2016). *Kapitánské úlohy v hodinách matematiky na 1. stupni ZŠ.* Závěrečná práce CŽV. České Budějovice, JČU.

Bednářová, J. & Šmardová, V. (2015). *Diagnostika dítěte předškolního věku.* Brno: Edika.

Belz, H. & Siegrist, M. *(2001). Klíčové kompetence a jejich rozvíjení: východiska, metody, cvičení a hry. Praha: Portál.*

Blažková, R. & Vaňurová, M. (2010). Charakteristika nadaného žáka s poruchou učení z hlediska matematických úloh. In M. Uhlířová (Ed.) *Matematické vzdělávání v kontextu proměn primární školy*, (s. 57-61). Olomouc: Univerzita Palackého

Blažková, R. & Vaňurová, M. (2013). Komunikační bariéry žáků při řešení slovních úloh. In B. Tomková & M. Mokriš (Eds.). Matematika v primárnej škole: rôzné cesty, rovnaké ciele (38 - 43). Prešov: Prešovská univerzita.

Blažková, R. & Vaňurová, M. (2013). Intuice a vhled při řešení úloh matematicky nadanými žáky. In *Učitel a nadaný žák.* (17-22). Brno : Masarykova univerzita.

Blažková, R., Vaňurová, M., & Matoušková, K. (2002). Kapitoly z didaktiky matematiky: (slovní úlohy, projekty). Brno: Masarykova univerzita.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications and links to other subjects - state, trends and issues in mathematcs instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37-68.

Boero, P. (2006). Students´everyday experience and teaching and learning of mathematics. In: M. Uhlířová (Ed.). *Acta Univ. Palack. Olom.,* Mathematica V - Matematika 2 (s. 10-12). Olomouc: Univerzita Palackého.

Borland, J. H. (2005). Gifted education without gifted pupils. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.) *Conceptions of Giftedness* (s. 1–19). Cambridge University Press.

Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, 18 (1).

Budínová, I. (2015). Možnosti rozvoje geometrických pojmů u matematicky nadaných žáků na 1. stupni ZŠ. *Svět nadání*, *4*(2), 11-37. Praha: Národní institut dětí a mládeže MŠMT.

Budínová, I. (2016). Aritmetické postupy v algebraických úlohách používané nadanými dětmi na 1. stupni ZŠ. *Svět nadání*, 5 (2), 11 - 42.

Budínová, I., Blažková, R., Cíglová, D., Hrčková, K., Janoušová, I., Lehotská, M., Mutina, P. & Ryglová, J. (2018). Diferencovaná a individualizovaná výuka matematiky na základní škole. *Gramotnost, pregramotnost a vzdělávání*, 2(2), 91-111.

Bureš, J. & Novotná, J. (2008). Žákovská tvorba úloh. In: M. Lávička & B. Bastl (Eds.) *11. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*, (s. 71-75). Plzeň: JČMF

Burjan, V. (2003). Školské testy ako zdroj zaujímavých dát pre žiakov aj učiteľov. *Jak učit matematice žáky ve věku 10-15 let.* Litomyšl: JČMF.

Carraher, D., Martinez, M., & Schliemann A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *The International Journal on Mathematics Education*, 40 (1). s. 3-22.

Dabell, J., Keogh, B., & Naylor, S. (2008). *Concept Cartoons in mathematics education*. (CD-ROM). Sandbach: Millgate House Education.

De Corte, E.,Verschaffel, L., & Greer, B. (2000). *Making sense of word problems.* Swets & Zeitlinger B. V., Lisse The Netherlands.

Desoete, A., Royers, H., & Buysse, A. (2001). Metacognition and mathematical problem solving in grade 3. *Journal of Learning Disabilities*, *34* (5), 435-449.

Divíšek, J., Buřil, Z., Hájek, J., Križalkovič, K., Malinová, E., Zehnalová, J., & Vasilková, E. (1989). *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. Praha: SPN.

Dofková, R. (2008). Heuristické principy při řešení problémových úloh na 1. stupni ZŠ. In M. Uhlířová (Ed.). Acta Univ. *Palack. Olom., Mathematica 6*, (s. 81-84). Olomouc: Univerzita Palackého.

Doležalová, J. (2009). Produkty a efekty edukace. Gramotnost. In J. Průcha (Ed.), *Pedagogická encyklopedie* (s. 223–229). Praha: Portál.

Dostál, J. (2013).Badatelsky orientovaná výuka jako trend soudobého vzdělávání. In: *e-Pedagogium, 13*(3*),* 81 - 93.

Dvořák, D. (2010). Zlomky v matematice, matematika v kurikulu: k příčinám neúspěchu českých žáků ve výzkumu TIMSS 2007. In: N. Stehlíková & L. Tejkalová (Eds.). *Dva dny s didaktikou matematiky, (*s. 7-11). Praha: Univerzita Karlova.

Dvořáková, H. (2010). Propedeutika kombinatoriky na 1. stupni ZŠ. In: Stehlíková, N. & Tejkalová, L. (Eds.). *Dva dny s didaktikou matematiky, (*s. 25-28) Praha: Univerzita Karlova.

Engel, T., Varga, T., & Walser, W.(1974). *Zufall oder Strategie?* Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Fisher, R. (1997). *Učíme děti myslet a učit se*. Praha: Portál.

Frau-Meigs, D. (2014). *Augmented media and information literacy: How can MIL harness the affordances of digital information cultures?* Tampere: Media Education Futures.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Fridman, L. M. & Tureckij, E. N. (1984). *Kak naučiťsja rešiť zadači.* Moskva: Prosveščenije.

Fridman, L. M. (1977). *Logiko - psichologičeskij analiz škoľnych učebnych zadač.* Moskva: Pedagogika.

Fuchs, E. & Zelendová, E. (2015). *Matematika v médiích. Využití slovních úloh při kooperativní výuce na základních a středních školách*. Praha: JČMF.

Fulier, J., & Šedivý, O. (2001). *Motivácia a tvorivosť vo vyučování matemati*ky. Nitra: Univerzita Konstantina Filozofa.

Gardner, H. (1999). *Dimenze myšlení: teorie rozmanitých inteligencí.* Praha: Portál.

Greer, B., Verschaffel, L., & De Corte, E. (2002).“The answer is really 4.5”: Beliefs about word problems. In G.C. Leder, E. Pehkonen, G. Töner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 271-292). Mathematics Education Library, Kluwer Academics Publishers.

Greger, D., Simonová, J., & Straková, J. (2015). *Spravedlivý start? Nerovné šance v předškolním vzdělávání a při přechodu na základní školu.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogicka fakulta.

Hartl, P. & Hartlová, H. (2000). *Psychologický slovník.* Praha: Portál.

Havigerová, J. M. (2011). *Pět pohledů na nadání*. Praha: Grada.

Hejný, M. & Kuřina, F. (2001). *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál.

Hejný, M. & Stehlíková, N. (1999). *Číselné představy dětí*. Praha: Univerzita Karlova.

Hejný, M. (2003). *Anatómia slovnej úlohy o veku*. Ružomberok: Katolická univerzita.

Hejný, M., Houfková, J., Jirotková, D., Laufková, V., Mandíková, D., & Starý, K. (2013). *Čtenářské, matematické a přírodovědné úlohy pro první stupeň základního vzdělávání: náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění šetření TIMSS a PIRLS 2011.* Praha: ČŠI.

Hellmig, l. (2010). Effective „blended“ professional development for teachers of mathematics: design and evalution of the „UPOLA“ – program. In *Proceedings of CERME 6,* Lyon, France INRP.

Helus,Z. (2009). Dítě v osobnostním pojetí. Praha, Portál, 2009

Hošpesová , A., Kuřina, F., Cachová, J., Macháčková, J., Roubíček, F., Tichá, M., & Vaníček, J. (2011). *Matematická gramotnost a vyučování matematice.* České Budějovice: Jihočeská univerzita.
Hošpesová, A. (2002). *Matematika pro všechny děti.* České Budějovice: PF JČU.
Hošpesová, A. (2014) Badatelsky orientovaná výuka matematiky na 1. stupni ZŠ a příprava učitelů. In M.Uhlířová (Ed.) *Matematika 6: Acta Univ. Palack. Olom.* (s. 8-14). Olomouc: Univerzita Palackého.
Hříbková, L. (2007). *Základní témata problematiky nadaných*. Praha: Univerzita Jana Amose Komenského.
Hříbková, L. (2009). *Nadání a nadaní: pedagogicko-psychologické přístupy, modely, výzkumy a jejich vztah ke školské praxi*. Praha: Grada.
Hruša, K., Foltin, M.,Gulová, M., Kittler, J., Konrád, J., Kořínek, M., Lečko, I., Macháček, V., Mencl, J., Skalický, V., Tupý, K., Zelina, L., Zemek, B., & Žilinková, J. (1962). *Metodika počtů pro pedagogické instituty*. *2. díl*. Praha: SPN.
Janík, T. (2017). From content to meaning: Semantics of teaching in the tradition of Bildungs-centred didactics. In Novotná, J. & H. Moraová (Eds.), *International Symposium Elementary Maths Teaching: Equity and diversity in elementary mathematics education* (pp. 31-41). Praha: Charles University, Faculty of Education.
Janík, T., Slavík, J., Mužík, V., Trna, J., Janko, T., Lokajíčková, V., Lukavský, J., Minaříková, E., Sliacky, J., Šalamounová, Z., Šebestová, S., Vondrová, N., & Zlatníček, P. (2013). *Kvalita (ve) vzdělávání: obsahově zaměřený přístup ke zkoumání a zlepšování výuky*. Brno: Masarykova univerzita.
Janoušková, S.& Tomášek, V. (2013) *TIMSS 2011: Úlohy z matematiky a přírodovědy pro 4. ročník.* Praha, ČŠI.
Janoušková, V., Tomášek, V., Peclinovská, S., & Pražáková, D. (2019). *Publikace s uvolněnými úlohami z mezinárodního šetření TIMSS. Úlohy z matematiky a přírodovědy pro 1. stupeň ZŠ.* Praha: ČŠI.
Jaworski, B.(2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, , 9(2), 187-211.
Jirotková, D. (2010). *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie.* Praha: Univerzita Karlova.
Jůva, V. (1999). *Úvod do pedagogiky*. Brno: Paido.
Kalhous, Z., Obst, O., Dvořák, D., Dvořáková, M., Chráska, M., Kurelová, M., Prokešová, L., Václavík, V., Veverková, H., & Vyskočilová, E. (2002). *Školní didaktika*. Praha: Portál.
Kalinowska, A. (2012). Mathematical typical and problem tasks as an educational cognitive context. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *55*, 661-668.
Knecht, P. & Lokajíčková, V. (2013). Učební úlohy jako příležitosti k rozvíjení a dosahování očekávaných výstupů: analýza koherence učebnic a RVP ZV. *Pedagogika,* 63(2), 169-183.
Kooster, D. (2001). *Thinking Classroom*, *4*, 36-40.
Kopka, J. (1999). *Hrozny problémů ve školské matematice.* Ústí n. L.: Univerzita J. E. Purkyně.
Kopka, J. (2004). *Výzkumný přístup při vyučování matematice.* Ústí n.L.: Univerzita J. E. Purkyně.
Kropáčková, J., Wildová, R., & Kucharská, A. (2014). Pojetí a rozvoj čtenářské pregramotnosti v předškolním období. *Pedagogická orientace*, *24*(4), 488–509.
Krygowska, Z. (1977). *Zarys dydaktyki matematyki*. Warszawa: WSiP.
Kuřina, F. (2011). *Matematika a řešení úloh.* České Budějovice: Jihočeská univerzita.
Kuřina, F.(1990). *Umění vidět v matematice*. Praha, SPN.
Larkin, S. (2000). How can we discern metacognition in year one children from interactions between students and teacher. *Paper Presented at ESRC Teaching and Learning*

Research Programme Conference, 9 November 2000, [cit.15.1.2015]. Dostupné z http://www.tlrp.org/pub/acadpub/Larkin2000.pdf

Lech, J., Ametler J., & Scott P. (2010). Establishing and communicating knowledge about teaching and learning scientific content: The role of design briefs. In K. Kortland & K. Klassen (Eds.), *Designing Theory based teaching learning sequences for science education* (pp. 7-23). Utrecht: CD-Press.

Lišková, H. & Rezek, P. (2015). Tematický okruh Nestandardní aplikační úlohy a problémy. In E. Fuchs & E. Zelendová (Eds.). *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání Matematika a její aplikace*, s. 101 - 128. Praha: NÚV.

Madsen, K. B. (1979). *Moderní teorie motivace*. Praha: Academia.

Makrides, G. (2006). *Objevování, motivace a podpora matematických talentů na evropských školách.* Praha: Projekt MATHEU.

Malinová, D. (2014). *Mimořádně nadaný žák v primárním matematickém vzdělávání.* Disertační práce. Olomouc: Univerzita Palackého.

Mann, E. L. (2006). Creativity: the essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted.* 30 (2), 236 – 260.

Molnár, J. (2004). *Prostorová představivost (nejen) ve stereometrii.* Olomouc: Univerzita Palackého.

Molnár, J. (2007). *Učebnice matematiky a klíčové kompetence*. Olomouc: Univerzita Palackého.

MŠMT (2017). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* Dostupne z: https://www.msmt.cz/file/43792/

Najvar, P., Najvarová, V., Janík, T., & Šebestová, S. (2011). *Videostudie v pedagogickém výzkumu.* Brno: Paido.

Nikitin, N. N. (1940). *Rešenije arifmetičeskich zadač v načalnoj škole*. Moskva: Gos. Uč. Ned. Izd. Narkomprosa RSFSR.

Niklesová, E. (2010). *Mediální gramotnost a mediální výchova.* České Budějovice: Vlastimil Johanus.

Nocar, D. & Novák, B. (2015). Objevujeme s Cabri. In: J. Kopáčová, K. Žilková (Eds.). *Studia Scientifica Fac. Paed. Universitas Catholica Ružomberok*. XIV/14, (2), 150-154. Ružomberok, Katolické univerzita.

Nohda, N. (2000). Teaching by open-approach method in Japanese mathematics classroom. In T. Nakahara & M.Koyama (Eds.) *Proceedings of PME 24 (Vol 1), 39 – 54*. Hiroshima: Hiroshima University.

Novák, B. (2010). Nestandardní aplikační úloha, její reflexe a interpretace budoucími učiteli primární školy. In M. Uhlířová (Ed.) *Matematické vzdělávání v kontextu proměn primární školy (EME 2010). Acta Univ. Palack. Olomucensis, Fac. Paed., Mathematica VII – 2010, Matematika 4*, (s. 199 – 204). M. Olomouc: Univerzita Palackého.

Novák, B., Stopenová, A. (1993). *Slovní úlohy ve vyučování matematice na 1. stupni ZŠ.* Olomouc, Univerzita Palackého.

Nováková, E. (2015). Sebehodnocení žáků primární školy jako součást řešení matematické úlohy. *Studia Scientifica Facultatis Paedagogicae Univ. Cathol. Ružomberok*, *14*(2), 160-164.

Nováková, E. (2016). *Analýza úloh ze soutěže Matematický klokan a jejich řešení žáky základní školy.* Brno: Masarykova univerzita.

Nováková, E. (2017).Řešení nestandardních úloh v matematických soutěžích - jedna z cest ke změně vztahu žáků k matematice. In J. Laitochová, K. Bártek, E. Bártková, D. Nocar, B. Novák, E. Nováková, A. Stopenová, J. Šiřická, M. Uhlířová, & T. Zdráhal (Eds.). *Reflexe vzdělávacích potřeb učitelů matematiky jako východisko jejich profesního vývoje* (s. 128-153). Olomouc: Univerzita Palackého.

Nováková, E. (2018). The crown of the himalayas. In B. Maj-Tatsis, K. Tatsis, & E. Swoboda (Eds.). *Mathematics in the real world,* s. 34 - 42. Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.
Nováková, E. (2018). Úloha s výběrem odpovědi v soutěži Matematický klokan - příležitost pro rozvíjení kompetencí žáka? *Učitel matematiky*, *26*(3), 167-183.
Nováková, E. (2019). Protržená přehrada Bílá Desná (matematika v médiích). *Komenský, 144*(1), 34-38.
Nováková, E., Blažková, B., Duňková, J., & Jónová, Z. (2015). Ilustrativní texty a aktivity pro žáky 1. stupně ZŠ. In E. Fuchs & E. Zelendová. (Eds.) *Matematika v médiích. Využiti slovních úloh při kooperativní výuce na základních a středních školách* (s. 16-55). Praha: JČMF.
Novotná, J. (2000). *Analýza řešení slovních úloh*. Praha: Univerzita Karlova.
Novotná, J. (2004). Matematické objevování založené na řešení úloh. In: M. Hejný, J. Novotná & N. Stehlíková (Eds.) *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky,* 357-366. Praha: Univerzita Karlova.
Pajares, F. (2007). Motivational role of self-efficacy beliefs in self-regulated learning. In B. J. Zimmerman, & D. H. Schunk (Eds.), *Motivation and Self-Regulated Learning: Theory, Research, and Applications* (pp. 111-140). New York: Erlbaum.
Palečková, J. & Tomášek, V. (2005). *Učení pro zítřek*. Praha: Tauris.
Palková, V., Prídavková, A., Scholtzová, I., Šimčíková, E., Mokriš, M., Tomková, B., Vašutová, A., Sekelská, K., & Štefková, D. (2011). *Matematika pre život. Zbierka úloh na rozvoj matematickém gramotnosti žiakov primárnej školy.* Prešov: Prešovská univerzita.
Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 67 (1), 37 - 58.
Pavelková, I. (2002). *Motivace žáků k učení: perspektivní orientace žáků a časový faktor v žákovské motivaci.* Praha: Univerzita Karlova.
Pavlovičová, G., Čeretková, S., Rumanová, L., & Sovičová, M.(2012). *Experimentujeme v elementárnej matematike.* Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa.
Pehkonen, E. (1997). *Use of open-ended problems in mathematics classrooms.* Helsinki: University of Helsinky.
Perry, N. E, & Drummond, L. (2002). Helping young students become self-regulated researchers and writers. *The Reading Teacher*, *56*(3), 298-310.
Petráčková, V. & Kraus, J. (1995). *Akademický slovník cizích slov*. Praha: Academia.
Piaget, J. (1999). *Psychologie inteligence*. Praha: Portál.
Píšová, M., Najvar, P., Janík, T., Hanušová, S., Kostková, K., Janíková, V., Tůma, F., & Zerzová, J. (2011). *Teorie a výzkum expertnosti učitelské profese.* Brno: MuniPress.
Polya, G. (1945). *How to Solve It.* New Jersey: Princeton University Press.
Polya, G. (2016). *Jak to řešit?* Praha: MatfyzPress.
Portešová, Š. (2009). Vzdělávání mimořádně nadaných žáků. In J. Průcha (Ed.) *Pedagogická encyklopedie*, (s. 471-477). Praha: Portál.
Prídavková, A. (2003). Analógia, tvorivosť a fantázia v žiackych riešeniach. In: J. Coufalová (Ed.) *Sborník z konference s mezinárodní účastí „Od činnosti k poznatku",* s. 115-119. Plzeň: Západočeská univerzita.
Příhonská, J. (2014) *Kombinatorické problémy: Aplikace a metody řešení.* Liberec: Technická univerzita.
Průcha, J. (2002). *Moderní pedagogika.* Praha: Portál.
Průcha, J., Walterová, E., & Mareš, J. (2003). *Malý pedagogický slovník*. Praha: Portál.

Pupala, B. & Zápotočná, O. (2001). Vzdělávanie ako formovanie kultúrnej gramotnosti. In Z. Kollárikova & B. Pupala (Eds.) *Předškolní a primární pedagogika. Predškolská a elementárna pedagogika.* (s. 261–269). Praha: Portál.
Radatz, H. (1983). Untersuchungen zum Lösen eingekleideter Aufgaben. *Zeitschrift für Mathematik-Didaktik*, *4*(3), 205-217.
Rendl, M., Vondrová, N., Hříbková, L., Jirotková, D., Kloboučková, J., Kvasz, L., Páchová, A., Pavelková, I., Smetáčková, I., Tauchmanová. E., & Žalská, J. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů.* Praha: Univerzita Karlova.
Renzulli, J. S. (2005). The three-ring conception of giftedness. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.) *Conceptions of Giftedness* (246–279). Cambridge University Press.
Rowland, T., Turner, F., & Thwaites, A. (2014). Research into teacher knowledge: a stimulus for development in mathematics teacher education practice. *ZDM Mathematics Education,* 46, 317- 328.
Sak, P. et al. (2007). *Člověk a vzdělání v informační společnosti.* Praha: Portál.
Samková, L. & Hošpesová, A., Roubíček, F., & Tichá, M. (2015). Badatelsky orientované vyučování matematice. *Sciencia in educatione 6* (1), 91-122.
Samková, L. (2019). Polyvalentní úlohy v matematice. *Učitel matematiky*, 27(4), 244-251.
Samková, L. (2020). *Metoda Concept Cartoons.* České Budějovice: Pedagogická fakulta.
Samková, L., Hošpesová, A., & Tichá, M. (2016). Role badatelsky orientované výuky matematiky v přípravě budoucích učitelů 1. stupně ZŠ. *Pedagogika*, 66(5), 549 – 569.
Sarrazy, B. (2003). Nadání v matematice - didaktický pohled: Analýza didaktických regulací rozdílů v poznávacích schopnostech ve vyučování racionálního kalkulu u žáků 9-10letých. In J. Zhouf. (Ed.). *Ani jeden matematický talent nazmar,* (s. 128-133). Hradec Králové: PC Hradec Králové.
Sarrazy, B. (2011). Tvorba v matematice: nezbytná iluze? Překlad M. Kaslová. In: Pěchoučková, Š. (Ed.): *Tvořivost v počátečním vyučování matematiky.* (s. 24 – 37), Plzeň: Západočeská univerzita.
Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 334-370.
Scholtzová, I. (2004). *Integrácia kombinatoriky do vyučovania matematiky na základnej škole.* Prešov: Metodicko-pedagogické centrum. Dostupné z http://www.mcpo.sk/downloads/Publikacie/PrirodPred/PPMAT200502.pdf
Scholtzová, I. (2007). *Inovačné trendy vo vyučovaní matematiky na 1. stupni ZŠ.* Prešov: Metodicko-pedagogické centrum.
Semadeni, Z. (1995). Developing children´s understanding of verbal arithmetical problems. In J. Novotná (Ed.). *Proceedings International Symp. Elem. Math Teaching,* (pp. 27 – 32). Praha: Univerzita Karlova.
Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational reasercher*, *15*(2), 4-14.
Siwek, H. (2005). *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania v matematyce szkolnej*. Warszawa: WSiP.
Skalková, R. (2005). *Motivace v matematice: motivace jako instrument učitele k upoutání žákovy pozornosti.* Disertační práce. Olomouc: Univerzita Palackého.
Slavík, J., Dytrtová, K., & Fulková, M. (2010). Konceptová analýza tvořivých úloh jako nástroj učitelské reflexe. *Pedagogika* 60 (3/4), 223 - 241.
Slavík, J., Janík, T., & Najvar, P. (2016). Producing knowledge for improvement: The 3A procedure as a tool for content-focused research on teaching and learning. *Pedagogika, 66* (6), 672 – 689.

Slavík, J., Janík, T., Jarníková, J., & Tupý, J. (2014). Zkoumání a rozvíjení kvality výuky v oborových didaktikách: metodika 3A mezi teorií a praxí. *Pedagogická orientace, 24 (5),* 721-752.

Slavík, J., Janík, T., Najvar, P., & Knecht, P. (2017). *Transdisciplinární didaktika: o učitelském sdílení znalostí a zvyšování kvality výuky napříč obory.* Brno: Masarykova univerzita.

Spitzer., M. (2014). *Digitální demence: jak připravujeme sami sebe a naše děti o rozum.* Brno: Host.

Sternberg, R. J. (2002) *Kognitivní psychologie.* Praha: Portál.

Straková, J. (2002). *Vědomosti a dovednosti. DECO - PISA.* Praha: ÚIV.

Stuchlíková, I. (2010). O badatelsky orientovaném vyučování. In: M. Papáček (Ed.): *Didaktika biologie v České republice 2010 a badatelsky orientované vyučování*, *DiBi 2010*. Sborník příspěvků semináře. České Budějovice: Jihočeská univerzita.

Svojanovský, P. (2016). Podpora reflexe studentů učitelství perspektivou jejich vzdělavatelů.In V. Švec, P. Svojanovský, & B. Pravdová (Eds.), *Determinanty účinnosti učitelských praxí* (s. 45–76). Brno: Masarykova univerzita.

Swoboda, E. (2014). Ability of building an individual strategy by 8-9 year old students while solving non-typical mathematical tasks. In M. Uhlířová (Ed.). *Matematika 6: Acta Univ. Palack. Olom.* (s. 15-25). Olomouc: Univerzita Palackého.

Tichá, M., Hošpesová, A., & Kuřina, F. (1995). Jaké jsou matematické zkušenosti našich dětí při vstupu do školy? *Obecná/občanská škola*, *1(*4), 6 - 9.

Tomková, A. (2018). *Portfolio v perspektivě reflektivně pojatého vzdělávání učitelů*. Praha: Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy.

Toom, A. (1999). Word problems: Applications or mental manipulatives. *For Learning of Mathematics, 19* (1), 36-38.

Uhlířová, M. (2004). Logické úlohy známé – neznámé. *Matematika, fyzika, informatika,14*(2), 78 – 82.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems.* Lisse (Netherlands): Swets and Zeitlinger B.V.

Vondrová, N., Rendl, M., Havlíčková, R., Hříbková, L., Páchová, A., &. Žalská, J. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků.* Praha: Karolinum

Vyšín, J. (1962). *Metodika řešení matematických úloh.* Praha: SPN.

Zelina, M. & Zelinová, M. (1990). *Rozvoj tvorivosti detí a mládeže.* Bratislava: SlPN.

Zelina, M. (1990). *Tvořivost v matematice.* Olomouc: KPÚ.

Zgarbová, P. (2011). *Metakognice jako součást procesu řešení matematických slovních úloh žáků mladšího školního věku.* Disertační práce. Brno: Masarykova Univerzita.

Žilková, K. (2013). *Teória a prax geometrických manipulácií v primárnom vzdelávaní*. Praha: Powerprint.

Resumé

Řešení učebních úloh má významné místo v procesu postupného vytváření částí žákova matematického světa, v matematickém vzdělávání na všech stupních a typech škol.

Cílem rigorózní práce je přispět k prohloubení dosavadních poznatků o řešení učebních úloh žákem primární školy v teoretické rovině i na základě vlastních výzkumných zjištění. Teoretická část je věnována ukotvení problematiky matematických učebních úloh a jejich řešení žákem v celkových pedagogických souvislostech. Zohledňuje novější poznatky o úlohách a strategiích jejich řešení,

Ve výzkumné části jsou shrnuty výsledky vlastních šetření autorky zaměřených na vybrané typy matematických úloh a žákovská řešení těchto úloh. V souladu s názvem práce chceme zdůraznit jednu z významných stránek úloh ve výuce, jako jednoho z nástrojů pro rozvoj kognitivní stránky osobnosti žáka.

V práci jsou uvedeny výstupy pěti relativně autonomních výzkumů, realizovaných v prostředí 1. stupně ZŠ v letech 2015 – 2020.

Tři z provedených výzkumů byly inspirovány zkušenostmi, které byly získány za období téměř dvaceti let při přípravě a analýze výsledků řešení úloh v soutěži Matematický klokan nejen v České republice, ale i v zahraničí.

Na vzorku 680 žáků 4. a 5. třídy byl proveden výzkum, jehož cílem bylo kvantitativními výzkumnými metodami zjistit a interpretovat údaje o úspěšnosti žákovských řešení jednotlivých úloh v kategorii Klokánek. Současně identifikovat, na kterých faktorech úspěšnost řešení úloh závisí. V rigorózní práci jsou uvedena pouze hlavní zjištění, zpráva o výzkumu byla reportována v odborné monografii.

Dvě další, tentokrát kvalitativně orientovaná výzkumná šetření reflektující poznatky ze soutěže, byla zaměřena

- na zjišťování reálné míry predikce a úrovně sebehodnocení žákova výkonu jako součásti řešení vybraných soutěžních úloh,
- na soutěžní úlohy z hlediska jejich potencionálního využití při dosahování klíčových kompetencí, především kompetence k řešení problémů.

Zkušenosti, získané při spolupráci na projektu SUMA JČMF a Národního ústavu pro vzdělávání s názvem „Matematika v médiích“ byla využita při přípravě a realizaci dalšího kvalitativně orientovaného výzkumu. Jeho tématem byla tvorba a následná reflexe řešení tzv. autentických slovních úloh, inspirovaných publikacemi v tištěných i elektronických médiích.

Poslední výzkum cílil na žákovská řešení jednoho z typů nestandardních slovních úloh, tzv. „kapitánských“, které mají potenciál k rozvíjení kritického myšlení žáků (k rozvíjení postřehu, pozornosti a úsudku žáků).

Resume

Solving mathematical problems is an integral feature of the process of gradual creation of pupil's mathematical world, in the education of mathematics on all types and levels of schools.

The aim of these thesis is to contribute to the better understanding of solution of mathematical problems by the primary school pupil, both theoretically and based on author's research finding and experience. Theoretical part focuses on the complex pedagogical context of mathematical learning tasks and of their pupil's solution. It considers recent findings concerning tasks and their solution strategies.

Research summarises author's research findings relating to several types of mathematical problems and their pupil's solutions. In line with the title of the thesis the author intends to emphasize the important aspect of the learning tasks as a means of development of cognitive abilities of the pupil's personality.

Thesis include outcomes of five relatively autonomous primary school researches in 2015-2020. Three of these were inspired by the experiences of almost twenty years of preparations and analysis of solution of Mathematical Kangaroo tasks. On 680 fourth and fifth grade pupils, quantitative research methods were applied to identify and interpret success rate of pupil's solution of particular Ecolier tasks, further to identify and describe the success rate factors. In the thesis, only the main findings are mentioned, the findings in their entirety have been reported in a monography.

The other two researches used qualitative methods with focus to

- determine the level of prediction and of the self-assessment of pupil as part of the task's solution
- potential of the tasks as learning means of development of key competences, of solution key competence in particular.

Experience gained during taking part in the SUMA JČMF and NUV project "Mathematics in Media" was the background for another qualitative research. It dealt with creation and subsequent reflection of solution of so-called authentic word problems, inspired by publications or articles in printed as well as electronic media.

The last above mentioned research aimed at pupil's solutions of one type of non-standard word problems, quoted as "captain's tasks", with their potential to pupil's critical thinking development (keen perception, attention, judgment).