UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Geometrická místa v rovině řešené úlohy

Katedra algebry a geometrie
Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Jiří Mikeš**
Studijní program: B1101 Matematika
Studijní obor Matematika - deskriptivní geometrie se zaměřením na vzdělávání
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2020

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Jiří Mikeš

Název práce: Geometrická místa v rovině řešené úlohy

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra algebry a geometrie

Vedoucí práce: RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2020

Abstrakt: Tématem této bakalářské práce je sbírka příkladů na geometrické místa v rovině. Geometrická místa v rovině si můžeme představit jako geometrický útvar neboli množina bodů pro které platí určité podmínky. Tato práce obsahuje řešené příklady množin bodů stejně vzdálených od dvou geometrických útvarů, množin bodů využívající úhly, kinematickou geometrii a množiny zadané rovnicí prvního stupně.

Klíčová slova: Geometrická místa v rovině

Počet stran: 45

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Jiří Mikeš

Title: Loci in the plane geometry solved exercises

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Algebra and Geometry

Supervisor: RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.

The year of presentation: 2020

Abstract: This bachelor's thesis consist of a problem loci in the plane geometry. Loci in the plane geometry can be imagined as a geometric shape or adherence determined by specified conditions. This thesis comprises of solved problems adherence with equal distance from two geometric figures, furthermore problems of adherence determined by angles or kinematic geometry in coordinate plane and finally adherence defined by first degree equation.

Key words: Loci in the plane geometry

Number of pages: 45

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně pod vedením paní RNDr. Lenky Juklové, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedl v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Poděkování

Rád bych poděkoval své vedoucí bakalářské práce RNDr. Lence Juklové, Ph.D. za odborné vedení, věcné připomínky a vstřícnost při konzultacích této práce.

Úvod

Pojem geometrická místa v rovině je často používám jako pojem množina bodů daných vlastností. Proto i v této bakalářské práci budu nadále používat pojem množina bodů daných vlastností (ve zkratce m.b.d.v.) S pojmem m.b.d.v. se setkáme již i na základní škole např. při definici kružnice nebo kruhu. Na střední škole se pak často využívají m.b.d.v. při řešení některých konstrukčních úloh. Cílem této bakalářské práce bylo vytvořit sbírku příkladů na geometrická místa v rovině využitím pouze středoškolských znalostí. Text je rozdělen do pěti podkapitol. V první kapitole jsou uvedeny základní pojmy a m.b.d.v., které budou potřebné k řešení příkladů, druhá podkapitola obsahuje příklady zaměřené na množiny bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou geometrických útvarů v rovině. V následující kapitole jsou příklady zaměřené na podobnost trojúhelníků, využití úhlů a cykly. V poslední kapitole jsou příklady zadané rovnicí prvního stupně.

Kapitola 1

Množiny bodů

Geometrická místa v rovině si můžeme představit jako geometrický útvar (množina bodů) pro který platí určité podmínky

Definice 1.0.1

Množina $\mathcal{M}$ všech bodů dané vlastnosti v rovině ρ je množina (rovinný geometrický útvar) $\mathcal{M} \in \rho$ splňující tyto dvě podmínky:

1) Každý bod množiny $\mathcal{M}$ má danou vlastnost V.

2) Každý bod roviny ρ, který má danou vlastnost V, patří do množiny $\mathcal{M}$.

1.1. Základní pojmy

Při konstrukci úloh používáme pojmy vzdálenost bodů, vzdálenost, bodu od množiny apod., připomeňme si jejich definice. Vzdáleností bodů A, B rozumíme velikost úsečky AB.

Vzdálenost bodu A od přímky p v rovině je definována jako velikost úsečky AP, kde P je pata kolmice vedené bodem A k přímce p (tj. v rovině sestrojujeme bodem A přímku q kolmou přímce p.)

Při konstrukci některých úloh budeme také uvažovat např. vzdálenost bodu od úsečky, od kružnice, připomeneme si tedy nejprve obecnou definici vzdálenosti bodu od množiny, kterou poté aplikujeme na konkrétní množiny.

Definice 1.1.2

Vzdáleností ρ bodu A od množiny M nazýváme číslo $\rho(A, M) = \inf_{X \in M} \rho(A, X)$.

Aplikujeme-li definici 1.1.2 na uzavřenou úsečku, je zřejmé, že platí:
Vzdálenost bod A od úsečky BC je pak rovna

$$\rho(A, \overleftrightarrow{BC}) = \begin{cases} |AP|, & \text{pro } P \in \overleftrightarrow{BC} \\ \min\{|AB|, |AC|\}, & \text{pro } P \notin \overleftrightarrow{BC}, \end{cases}$$

kde P je (v rovině) pata kolmice sestrojené z bodu A na přímku BC.
Pro kružnici pak zřejmě platí:
Vzdálenost bodu A od kružnice $k = (O, r)$, $r \in R^+$, je rovna menšímu z čísel $|AX|, |AY|$, kde X, Y jsou průsečíky přímky AO s kružnicí k.

V příkladech často používáme základní množiny bodů dané vlastnosti, se kterými se běžně pracuje v konstrukčních úlohách. Uvedeme zde pouze jejich přehled

- Kružnice $k = (O, r)$, je množina bodů X v rovině, pro něž platí $|OX| = r$, $r \in R^+$.
- Osa úsečky AB je množina bodů X v rovině, pro něž platí $|AX| = |BX|$
- Osy úhlu AVB jsou množinou bodů X v rovině, pro něž platí $\rho(X, AV) = \rho(X, BV)$
- Osa pásu p, q je množina bodů X v rovině, pro něž platí $\rho(X, p) = \rho(X, q)$
- Parabola je množina bodů X v rovině, pro něž platí $\rho(X, p) = \rho(X, F)$, $\rho(X, F)$, kde F je daný pevný bod a p daná pevná přímka
- Elipsa je množina bodů X v rovině, pro něž platí $\rho(X, E) + \rho(X, F) = r$, kde $r \in R^+$, $r > \rho(E, F) > 0$, kde E, F jsou dané pevné body

• Hyperbola je množina bodů X v rovině, pro něž platí $\rho(X,E) - \rho(X,F) = r$, kde $r \in R^+$, $0 < r < \rho(E,F)$, kde E, F jsou dané pevné body

• Sjednocení rovnoběžek p, q je množina bodů X v rovině, pro něž platí $\rho(X,a) = r$, $a \parallel p, a \parallel q$, kde $r \in R^+$, a je daná pevná přímka

• Sjednocení soustředných kružnice l, m je množina bodů X v rovině, pro něž platí $\rho(X,k) = r$, $r < r_k$ kde $r, r_k \in R^+$, k je daná pevná kružnice

1.2. Množiny bodů stejně vzdálených od dvou daných geometrických útvarů

V této kapitole se budeme zabývat množinami bodů, jež jsou stejně vzdálené od dvou daných geometrických útvarů.

1.2.1. Příklady

Příklad 1.2.1

Nechť je dána kružnice k se středem S a poloměrem r a bod A. Určete množinu všech bodů, jež mají stejnou vzdálenost od bodu A a kružnice k.

Rozlišme možnosti, kdy bod leží uvnitř kružnice (zde ještě rozlišíme možnost, kdy bod A je středem kružnice k), vně kružnice anebo na kružnici.

a) Bod A leží uvnitř kružnice k a platí $A \neq S$ (obr. 1.1)

Uvažujme kružnice $k'_1, k'_2, \ldots$, které se dotýkají kružnice k a procházejí bodem A. Sestrojíme přímky $q_1, q_2, \ldots$, které prochází středem kružnice k, jejichž průsečíky s kružnicí k označíme $X_1, X_2, \ldots$. Na přímkách $q_1, q_2, \ldots$ hledáme středy kružnic $k'_1, k'_2, \ldots$, jež se dotýkají kružnice k v bodech $X_1, X_2, \ldots$ a zároveň prochází bodem A (řešení Pappovy úlohy). Vzhledem k tomu, že kružnice $k'_1, k'_2, \ldots$ mají procházet body $X_1, X_2, \ldots$ a zároveň bodem A tak jsou jejich středy stejně vzdálené od těchto bodů, proto jejich středy leží na osách úseček AX_1, AX'_1, AX_2, $AX'_2, \ldots$. Středy kružnic $k'_1, k'_2, \ldots$ jsou tak průsečíky přímek $q_1, q_2, \ldots$ s osami úseček $AX_1, AX'_1, AX_2, AX'_2, \ldots$. Z rovnoramenných trojúhelníků AX_iS_i, kde $i = 1, 2, ...$ platí $r = |SX_i| = |SS_i| + |S_iX_i| \Rightarrow r = |SS_i| + |S_iX_i| = |SS_i| + |AS_i|$, kde i =1, 2, ... Pro všechny středy kružnic $k'_1, k'_2, \ldots$ pak platí, že mají konstantní součet vzdáleností od' středu kružnice k a bodu A, body S a A jsou tak ohnisky elipsy s hlavní osou na přímce SA. Pro každý bod Y, který neleží na elipse platí $\rho(Y, A) \neq \rho(Y, k)$, proto každý bod roviny ρ, který má danou vlastnost, patří do výsledné množiny. Tato druhá podmínka definice množiny bodů daných vlastností bude platit i pro následující příklady.

Konstrukce:

1) o_1 ... osa elipsy, $o_1 = \overleftrightarrow{AS}$

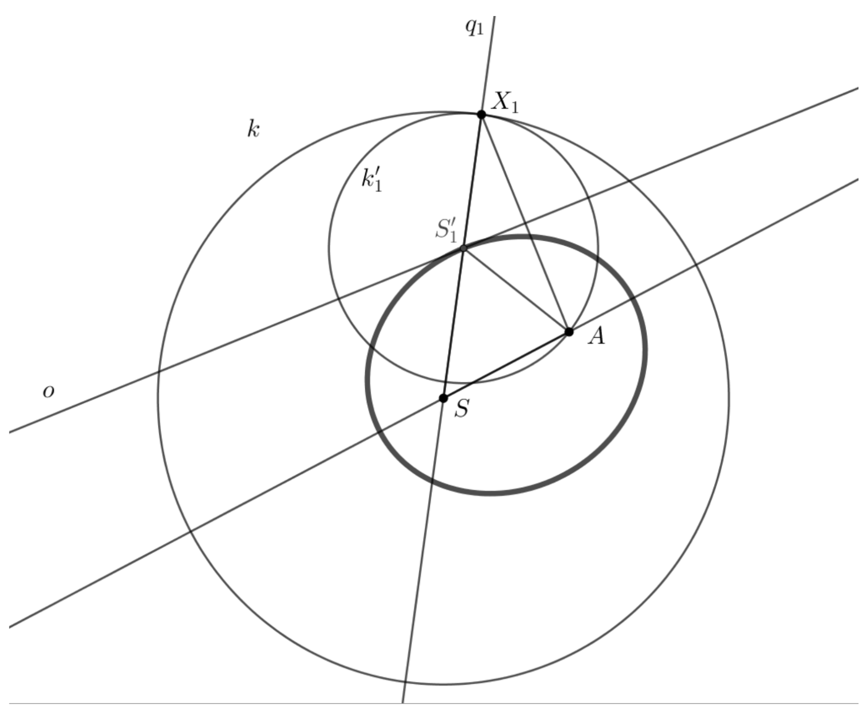
2) o_2, o_2 ... osa úsečky AS

3) S' ... střed elipsy, $S' = o_1 \cap o_2$

4) $v, v(S', \frac{r}{2})$

5) $A', B', A', B' = o_1 \cap v$

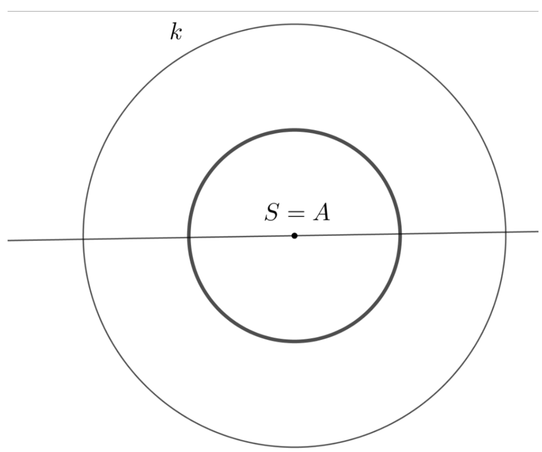
6) Elipsa



Obrázek 1.1

b) Bod A leží uvnitř kružnice k a platí $A = S$ (obr. 1.2)
Postup je stejný jako v případě a), kde na rozdíl od předchozího případu ohniska elipsy splynou v jeden bod (střed kružnice k) a výsledná množina bodů je kružnice se středem v bodě S o poloměru $\frac{r}{2}$.

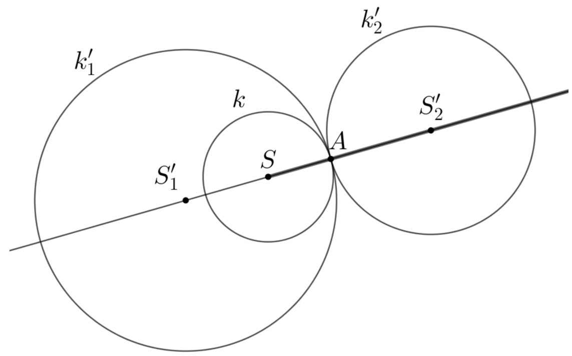
Konstrukce:
1) $k', k'(S, \frac{r}{2})$



Obrázek 1.2

c) Bod A leží na kružnici k (obr. 1.3)
Vzhledem k tomu, že bod A leží na kružnici k tak kružnice $k'_1, k'_2, \ldots$ se dotýkají kružnice k v bodě A a proto jejich středy leží na přímce SA. Pro středy kružnic $k'_1, k'_2, \ldots$, které neleží na polopřímce SA platí, že jejich vzdálenost od kružnice k je menší než vzdálenost od bodu A (z definice vzdálenosti bodu od kružnice), $\rho(S', k) \neq \rho(S', A)$, proto hledaná množina bodů je polopřímka SA.

Konstrukce:
1) SA, polopřímka SA



Obrázek 1.3

d) Bod A leží vně kružnice k (obr. 1.4)

Při hledání této množiny postupujeme stejně jako v případě a). Na rozdíl od případu a) platí $r = |SX_i| = ||SS_i| - |S_iX_i|| \Rightarrow r = ||SS_i| - |S_iX_i|| = ||SS_i| - |AS_i||$, kde $i = 1, 2, ...$ Pro všechny středy kružnic $k_1', k_2', \ldots$ pak platí, že mají konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností od středu kružnice k a bodu A, body S a A jsou tak ohnisky hyperboly s hlavní osou na přímce SA. Pro středy kružnic, které tvoří část hyperboly, pro něž platí, že jsou blíže ke kružnici k, $\rho(S', k) < \rho(S', A)$, tak budou tyto středy z množiny hledaných bodů vyloučeny. Hledanou množinou bude jedna větev hyperboly, která je blíže k bodu A.

Konstrukce:

1) o_1 ... osa elipsy, $o_1 = \overleftrightarrow{AS}$

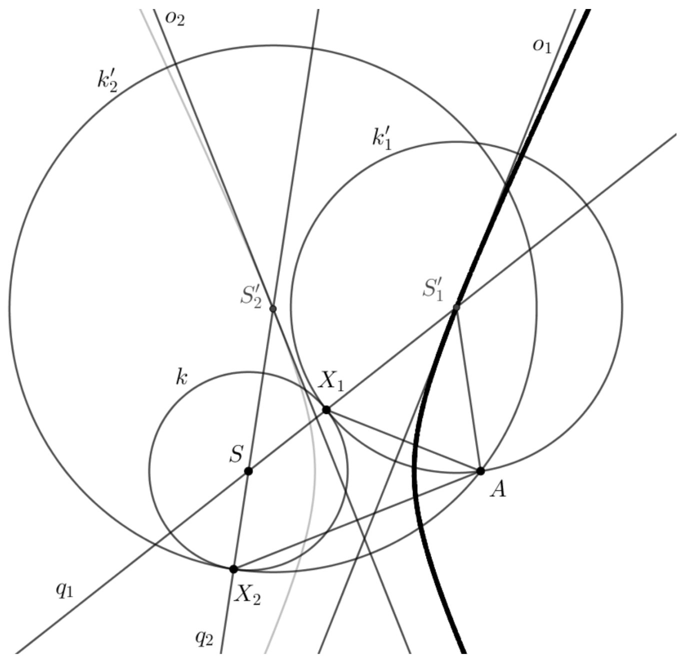
2) o_2, o_2 ... osa úsečky AS

3) S' ... střed hyperboly, $S' = o_1 \cap o_2$

4) $v, v(S', \frac{r}{2})$

5) $A', B', A', B' = o_1 \cap v$

6) Hyperbola

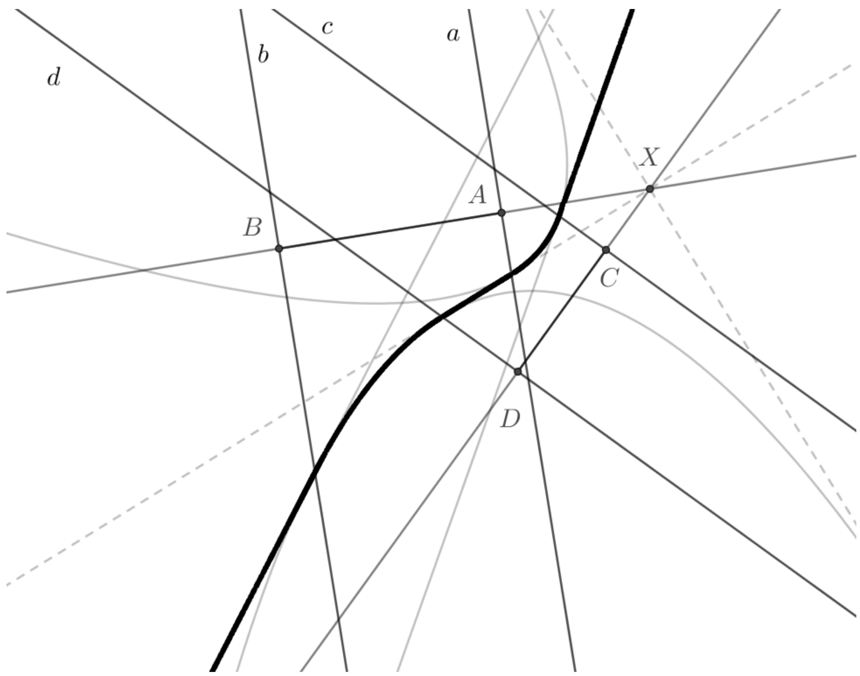


Obrázek 1.4

Příklad 1.2.2

Určete množinu všech bodů, jež jsou stejně vzdálené od dvou úseček AB a CD, kde přímky AB a CD svírají úhel 45°. Platí $|XA| = 10\ cm$, $|XB| = 25\ cm$, $|XC| = 5\ cm$, $|XD| = 15\ cm$, kde $X = AB \cap CD$.

Pro řešení toho příkladu uvažujme ke každé úsečce množiny bodů, pro které platí, že vzdálenost bodů od úseček je rovna vzdálenosti bodů od krajních bodů úseček a množiny bodů, pro které platí, že jejich vzdálenost od daných úseček je rovna vzdálenosti bodů od pat kolmic vedených z těchto bodů k daným úsečkám. Průniky těchto množin pak rozdělí řešení příkladu na množinu všech bodů stejně vzdálených od dvou bodů, od dvou přímek a od bodu a přímky. Řešení příkladu si tak rozdělme na části ohraničené přímkami kolmými k úsečkám a zároveň procházející krajními body těchto úseček. Označme si tyto přímky a, b, c, d, kde $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ a $D \in d$. V části ohraničené přímkami a a d hledáme množinu všech bodů, jež jsou stejně vzdálené od přímek AB a CD, z definice pak plyne, že výsledná množina je v této části osa úhlu, jež svírají přímky AB a CD. V části ohraničené přímkami a a c je pak hledanou množinou množina všech bodů, jež mají stejnou vzdálenost od bodu A a přímky CD což je z definice parabola s ohniskem v bodě A a řídící přímkou CD. Obdobně v části ohraničené přímkami b a d je výsledná množina parabola s ohniskem v bodě D a řídící přímkou AB. Ve zbylých částech ohraničených přímkami b, c přejde řešení na množinu všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od obou krajních bodů a řešením tak budou osy úseček AC a BD.



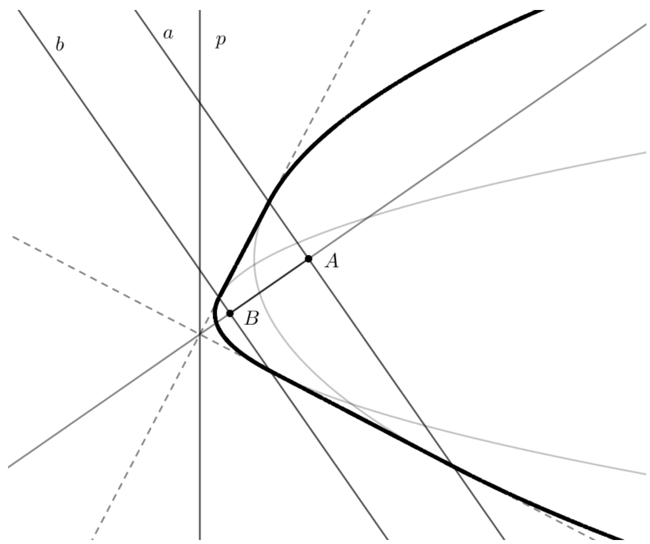
Obrázek 1.5

Příklad 1.2.3 Určete množinu všech bodů, jež jsou stejně vzdálené od přímky p a úsečky AB

Uvažujme možnosti:

a) $p \nparallel \overleftrightarrow{AB}$, $p \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$ (obr. 1.6)

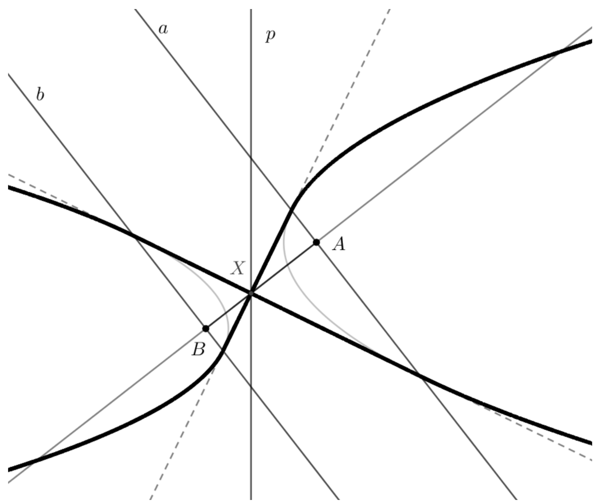
V tomto případě si řešení rozdělíme na části ohraničené přímkami a, b, které jsou kolmé k úsečce AB a zároveň platí $A \in a$, $B \in b$. Přímky a, b tak rozdělí případ na část, kde hledáme množinu všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od přímky p a přímky AB a na dvě části, kde hledáme množinu všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od přímky p a bodů A, B. Protože přímka p leží v obou polorovinách určených přímkou AB jsou řešením v prostřední části ohraničené přímkami a a b části os úhlů, které svírá přímka p s přímkou AB a ve zbilých částech jsou tak řešením části parabol s ohnisky v bodech A, B s řídící přímkou p.



Obrázek 1.6

b) $p \nparallel \overleftrightarrow{AB}$, $p \cap \overleftrightarrow{AB} = X$ (obr. 1.7)

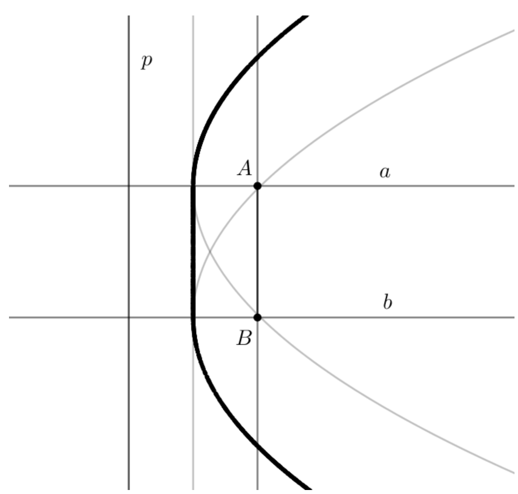
V téhle variantě postupujeme obdobně jako v předešlém případě a opět si řešení rozdělíme na tři části oddělené přímkami a, b v případě, že $X \neq A$, $X \neq B$. Řešením jsou tak části parabol s ohnisky v bodech A, B a řídící přímkou p a části os úhlů svírající přímka p s přímkou AB. Pokud $X = A$ $(X = B)$ je řešením v opačné polorovině určené přímkou p, pololopřímka kolmá na přímku p procházející bodem A (B).



Obrázek 1.7

c) $p \parallel \overleftrightarrow{AB}$, $p \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$ (obr. 1.8)

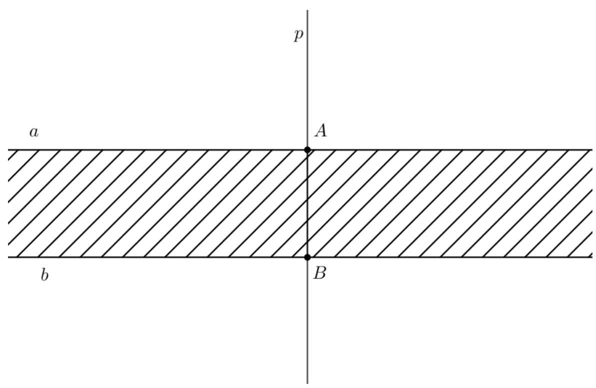
Na rozdíl od předešlých případů je v tomto případě přímka p rovnoběžná s přímkou AB a proto v část řešení ohraničená přímkami a a b bude osa pásu (plyne z definice osy pásu). Výslednou množinou bodů tak budou části parabol s ohnisky v bodech A, B a řídící přímkou p a část osy pásu určeného přímkami p, AB.



Obrázek 1.8

d) $p \parallel \overleftrightarrow{AB}$, $p \cap \overleftrightarrow{AB} = X$ (obr. 1.9)

Úsečka je podmnožinou přímky p, hledaná množina je pak množina všech středů kružnic (plyne z definice kružnice) pro které platí, že přímka p je jejich tečnou a tečný bod $T \in \overleftrightarrow{AB}$. Všechny středy takových kružnic tedy leží na kolmicích k úsečce AB a množina všech takových přímek vyplní pás určený přímkami a, b, kde $A \in a$, $B \in b$.



Obrázek 1.9

Příklad 1.2.4 Nechť je dána kružnice k se středem S a poloměrem $r \in R$ a přímka p. Určete množinu všech bodů, jež mají od kružnice k a přímky p stejnou vzdálenost.

Uvažujme možnosti:

a) přímka p je vnější přímkou kružnice (obr. 1.10)

Hledané body množiny mají mít stejnou vzdálenost od přímky i kružnice, tj. Uvažujme kružnice $k'_1, k'_2, \ldots$, které se dotýkají jak kružnice k, tak přímky p. Středy kružnic k'_i, kde $i = 1, 2, ...$, mají zřejmě stejnou vzdálenost od kružnice k i od přímky p a patří tedy hledané množině. Středy kružnic k'_i leží na přímce $q = \overleftrightarrow{SX}$, kde X je libovolný bod přímky p. Uvažujme tedy všechny takové přímky, které označme $q_i = \overleftrightarrow{SX_i}, X_i \in p$, kde $i = 1, 2, ...$, a zároveň uvažujme přímku p', která je rovnoběžná s přímkou p a prochází středem kružnice k. Středy kružnic

$k_1', k_2', \ldots$ budou ležet na přímkách $p', q_1, q_2, \ldots$. Dále označme $P_1', P_2', Q_1, Q_1', Q_2, Q_2', \ldots$ průsečíky přímek $p', q_1, q_2, \ldots$ s kružnicí k. Na přímkách $p', q_1, q_2, \ldots$ hledáme body jež mají stejnou vzdálenost od přímky p a průsečíků přímek $p', q_1, q_2, \ldots$ s kružnicí k. Převedeme tak řešení příkladu z množiny všech bodů stejně vzdálených od přímky a kružnice na množinu všech bodů stejně vzdálených od přímky a bodu. Body $P_1', P_2', Q_1, Q_1', Q_2, Q_2', \ldots$ se tak stanou ohnisky parabol s řídící přímkou p (plyne z definice paraboly). Průsečíky těchto parabol se všemi přímkami q_i (X_i proběhne celou přímku p) a přímkou p' ($p' \parallel p, S \in p'$) jsou středy kružnic $k_1', k_2', \ldots$. Všimněme si však, že ne všechny tyto středy jsou stejně vzdálené od kružnice k a přímky p. V případě, kdy všechny body kružnice k mají mocnost ke kružnici $k_1', k_2', ... \leq 0$ středy těchto kružnic nepatří hledané množině bodů, protože středy těchto kružnic mají menší vzdálenost od kružnice k než je jejich poloměr a proto mají i menší vzdálenost od kružnice k než od přímky p. Zvětšíme-li poloměr kružnic $k_1', k_2', \ldots$ o poloměr kružnice k, pak takto sestrojené kružnice budou procházet středem kružnice k a budou se dotýkat přímky p'', která je rovnoběžná s přímkou p a je od ní vzdálená o poloměr kružnice k. Hledaná množina bodů je tedy parabola, která má řídící přímku p'' ($p'' \parallel p, |p''p| = r$) a ohnisko S.

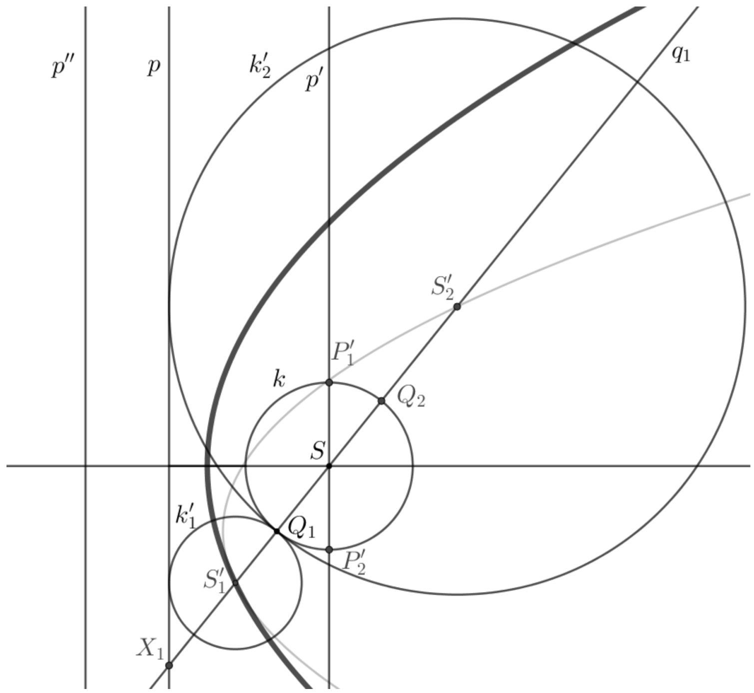
Konstrukce:

1) o_1 ... osa paraboly, $o_1 \perp p$, $S \in o_1$

2) $p'', p'' \parallel p, \rho(p, p'') = r$, $p'' \notin \overrightarrow{pS}$

3) V ... vrchol paraboly, $|VS| = |Vp''|$, $V \in o_1$

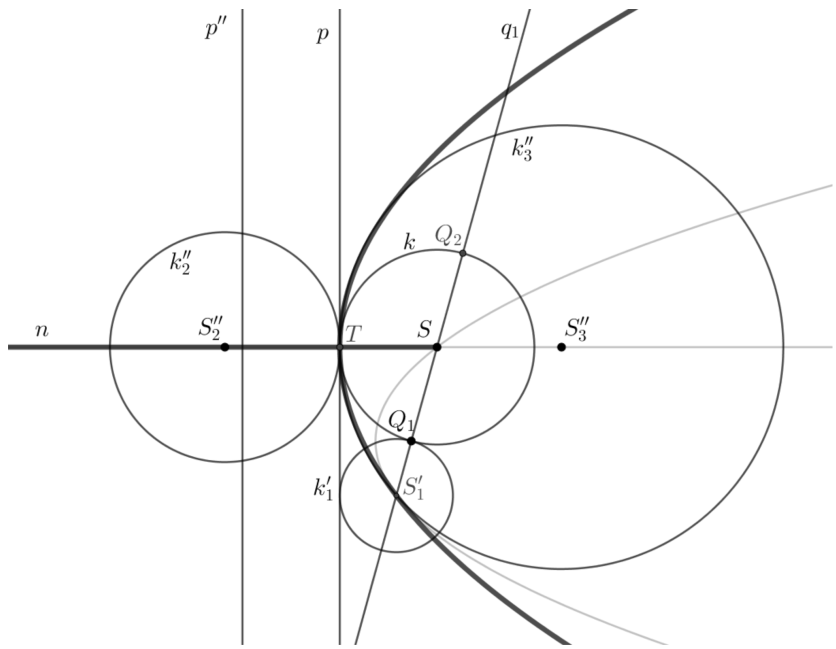
4) Parabola



Obrázek 1.10

b) přímka je tečnou (obr. 1.11)

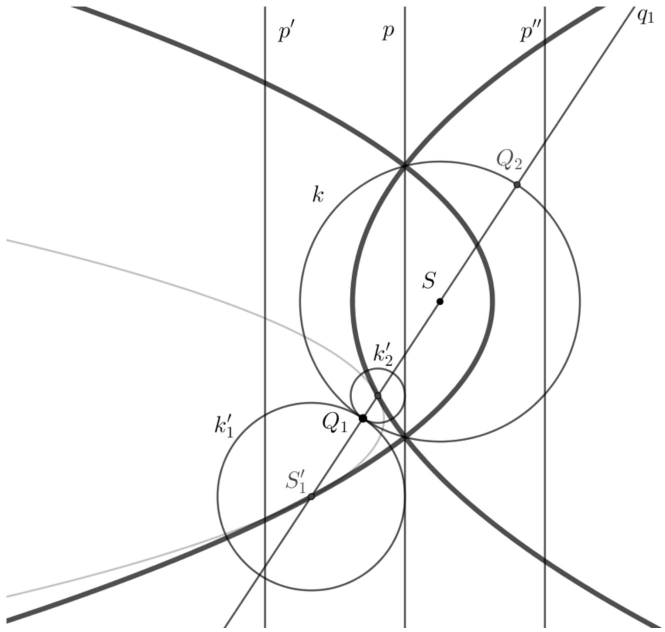
Při hledání bodů množiny, jež mají od kružnice k a přímky p stejnou vzdálenost postupujeme stejně jako v případě a). Musíme navíc zjistit, zda bod T dotyku přímky p s kružnicí k hledané množině patří. Vzhledem k tomu, že bod T je bodem přímky i kružnice a má tedy od obou útvarů vzdálenost rovnu nule, je zřejmé, že je součástí této množiny. Uvažujme kružnice $k_1'', k_2'', \ldots$ které se dotýkají jak kružnice k, tak přímky p v bodě dotyku T. Středy kružnic k'' mají zřejmě stejnou vzdálenost od kružnice k i od přímky p a jejich středy leží na přímce n. Opět (stejně jako v případě a)) musíme vyloučit z množiny řešení takové středy kružnic $k_1'', k_2'', \ldots$, pro která platí, že střed neleží na polopřímce ST, protože středy těchto kružnic mají od kružnice k menší vzdálenost, než je poloměr kružnice.



Obrázek 1.11

c) přímka je sečnou kružnice (obr. 1.12)

Při hledání bodů množiny, jež mají od kružnice k a přímky p stejnou vzdálenost postupujeme stejně jako v případě a). Na rozdíl od případu a) se rozšíří množina hledaných bodů o množinu kružnic, které se dotýkají kružnice k z vnitřní strany a přímky p, tj. hledanou množinou jsou dvě paraboly s ohniskem S a řídícími přímkami p', p'' pro které platí $p' \parallel p$, $p'' \parallel p$ a zároveň $|p'p| = |p''p| = r$.



Obrázek 1.12

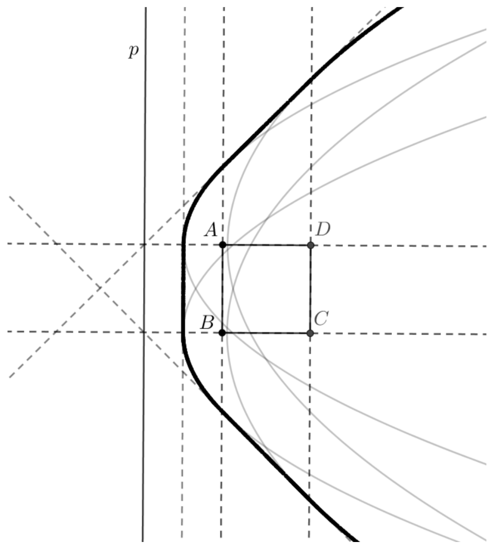
Příklad 1.2.5

Je dán čtverec $ABCD$ a přímka p. Určete množinu všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od čtverce a přímky.

Uvažujme možnosti:

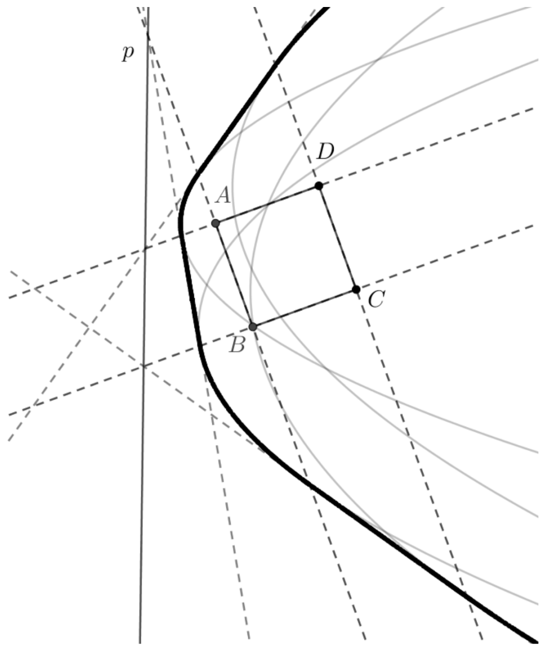
a) dvě strany čtverce $ABCD$ jsou rovnoběžné s přímkou p a přímka p nemá žádný společný bod se čtvercem $ABCD$ (obr. 1.13)

Pro hledání této množiny bodů si řešení rozdělíme do dvou skupin na množinu všech bodů stejně vzdálených od dvou přímek a na množinu všech bodů stejně vzdálených od přímky a od bodu. Body vně čtverce si tak rozdělíme do osmi částí ohraničenými přímkami AB, CD, BC a AD. V jednotlivých částech postupujeme obdobně jako v příkladu 1.2.3. V částech ohraničenými dvojicemi přímek AB, CD a BC, AD jsou tak řešením části os úhlů, které svírají přímky AB, CD, BC a AD s přímkou p a ve zbychlých částech jsou řešením části parabol s ohnisky ve vrcholech čtverce a řídící přímkou p. Vzhledem k tomu, že u vzdálenější rovnoběžné strany čtverce CD neexistuje taková kružnice, která by se jí dotýkala z vnější strany a zároveň přímka p byla tečnou této kružnice, tak z tohoto důvodu neexistují ani body, které by byly stejně vzdáleny od přímky p a strany CD. Výsledkem je tedy sjednocení množin, které na sebe navazují.



Obrázek 1.13

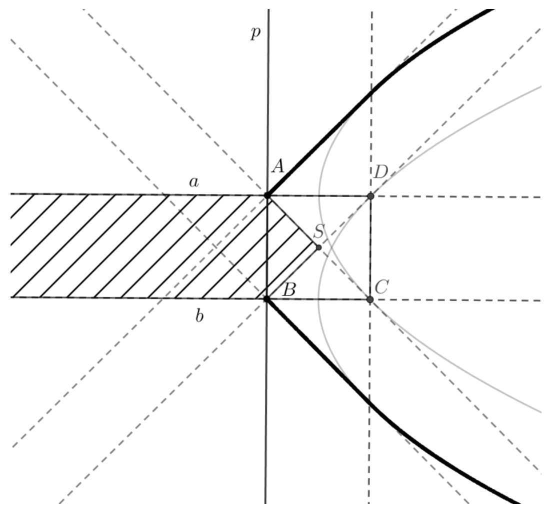
b) žádná strana čtverce $ABCD$ není rovnoběžná s přímkou p a přímka p nemá žádný společný bod se čtvercem $ABCD$ (obr. 1.14)
Při řešení budeme postupovat obdobně jako v předchozí variantě. Na rozdíl od varianty a) v tomto případě existují body, které mají stejnou vzdálenost od každé strany čtverce $ABCD$ a od přímky p. V částech ohraničených přímkami AB, CD a BC, AD je řešení stejné jako v příkladu 1.2.3 a řešním v těchto částech jsou tak osy úhlů, které svírají přímky AB, CD, BC a AD s přímkou p. Řešením je pak množina bodů, které přechází z části os úhlů na části parabol s ohnisky ve vrcholech čtverce s řídící přímkou p v místech kde protínají prodloužené přímky AB, BC a CD a AD .



Obrázek 1.14

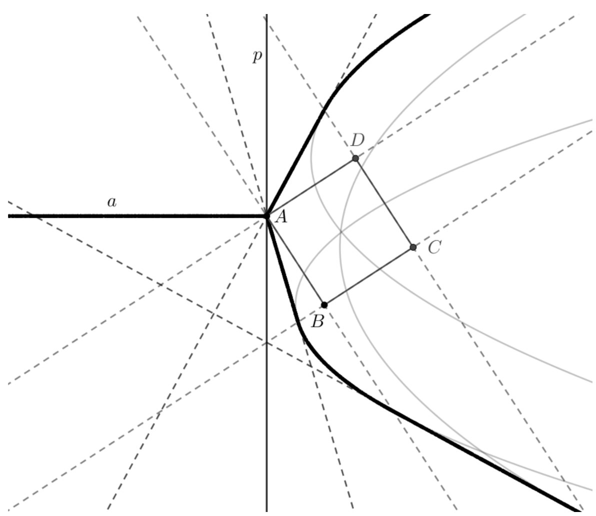
c) přímka p obsahuje stranu AB čtverce $ABCD$ (obr. 1.15)

V tomto případě, kdy strana AB je součástí přímky p je strana AB částí řešení a části parabol s ohnisky v bodech A, B nejsou součástí řešení jako ve variantě a). Sestrojené osy úhlu, které svírají strany BC a AD s přímkou p a paraboly s ohnisky v bodech C, D ohraničené přímkami, které obsahují strany čtverce $ABCD$ jsou opět součástí řešení jako v případě a). Uvažujme zde navíc body v opačné polorovině určené přímkou p. V této polorovině je řešení stejné jako v příkladu 1.2.3 a řešením je tedy množina všech bodů ležících uvnitř pásu ohraničeného přímkami a, b, kde $A \in a$, $B \in b$, $a \perp p$, $b \perp p$. Zároveň hledaná množina obsahuje body, jež se nachází uvnitř čtverce. Množinu všech bodů uvnitř čtverce si rozdělíme na množiny ohraničené úhlopříčkami čtverce a jejich průsečík označíme S. V jednotilvých množinách postupujeme při řešení obdobně jako v příkladu 1.2.3. Pro množinu bodů uvnitř čtverce tak bude řešením trojúhelník ABS a množina všech bodů uvnitř trojúhelníku ABS.



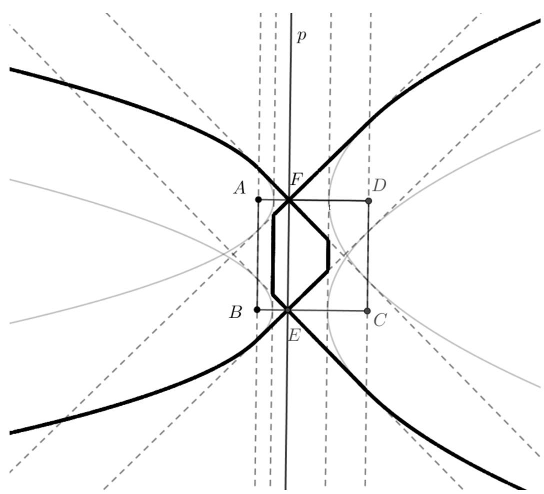
Obrázek 1.15

d) přímka p prochází vrcholem A čtverce $ABCD$ (obr. 1.16)
Řešení získáme obdobným způsobem jako z předešlých případů. Bod A není ohniskem paraboly jako ve variantě b) a na rozdíl od varianty c) v polorovnině neobsahující všechny vrcholy čtverce ohraničené přímkou p bodem A prochází polopřímka kolmá na přímku p a všechny body na této polopřímce budou součástí řešení spolu s řešením z varianty b).



Obrázek 1.16

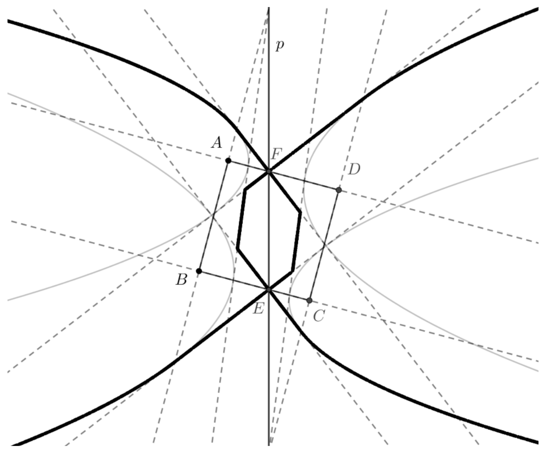
e) přímka p protíná čtverec $ABCD$ a je rovnoběžná se stranou AB (obr. 1.17)
Řešení si zde rozdělíme na body ležící vně čtverce $ABCD$ a na body ležící uvnitř čtverce $ABCD$. Pro body ležící vně použijeme postup z varianty a). Pro nalezení bodů ležících uvnitř čtverce využijeme obdobný postup jako ve variantě c). Označme si nejprve průsečíky přímky p se čtvercem E, F. Zde si množinu všech bodů uvnitř čtverce rozdělíme na dva obdélníky $ABEF$ a $ECDF$. Každý obdélník rozdělíme na tři množiny $\mathcal{M} = \{X; (|X\overleftrightarrow{ED}| \leq |X\overleftrightarrow{FD}|) \wedge (|X\overleftrightarrow{ED}| \leq |X\overleftrightarrow{CD}|)\}$, $\mathcal{N} = \{X; (|X\overleftrightarrow{FD}| \leq |X\overleftrightarrow{CD}|) \wedge (|X\overleftrightarrow{FD}| \leq |X\overleftrightarrow{EC}|)\}$ a $\mathcal{O} = \{X; (|X\overleftrightarrow{CD}| \leq |X\overleftrightarrow{FD}|) \wedge (|X\overleftrightarrow{CD}| \leq |X\overleftrightarrow{EC}|)\}$. Pro množiny $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{O}$ využijeme podobně jako ve variantě c) definici osy úhlu a řešením pak budou části os úhlů a os pásů. Výsledkem je pak jak množina bodů, které postupně navazují z části os úhlů na části osy pásů tak množina bodů obdobných ve variantě a), kde přechází části os úhlů na části parabol.



Obrázek 1.17

f) přímka p protíná čtverec $ABCD$ a není rovnoběžná s žádnou stranou čtverce (obr. 1.18)
Jako ve variantě e) si rozdělíme řešení na body ležící vně čtverce $ABCD$ a na body ležící uvnitř čtverce $ABCD$. Pro body ležící vně použijeme postup z varianty b). Pro nalezení bodů ležících uvnitř čtverce postupojeme jako ve variantě e) a

vytvoříme části os úhlů, které získáme prodloužením všech stran čtverce $ABCD$. Řešením jsou jak části os úhlů, které postupně na sebe navazují tak i množina bodů obdobných ve variantě b), kde přechází části os úhlů na části parabol.



Obrázek 1.18

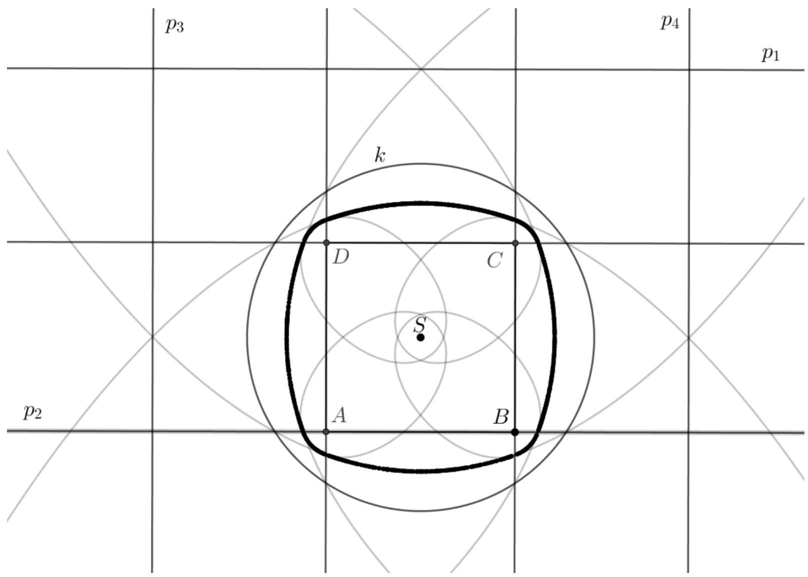
Příklad 1.2.6

Je dán čtverec $ABCD$ se středem S a kružnice k se středem S a poloměrem r. Určete množinu všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od čtverce a kružnice.

Uvažujme možnosti:

a) $|SA| < r$ (obr. 1.19)

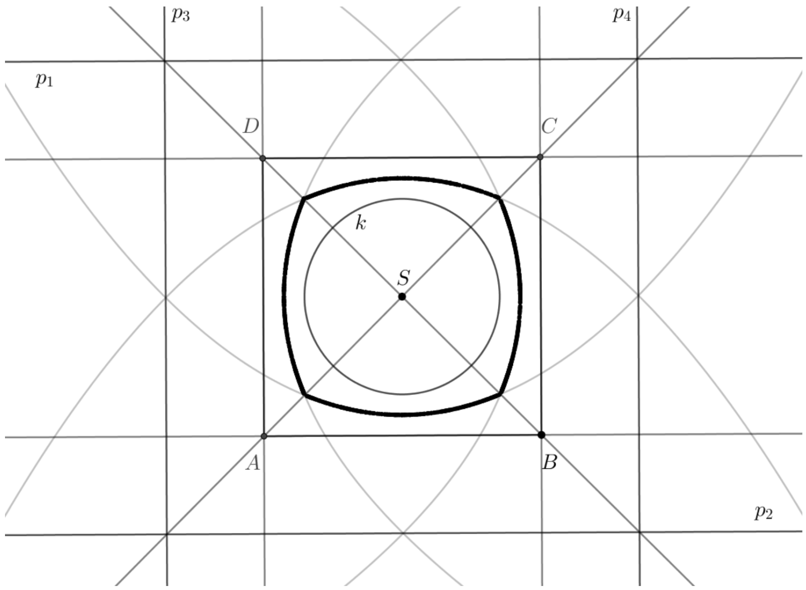
Pro hledání množiny bodů budeme využívat množiny všech bodů stejně vzdálených od přímky a od kružnice a množiny všech bodů stejně vzdálených od bodu a od kružnice. Řešení si rozdělíme na části ohraničené přímkami AB, BC, CD a AD. V částech ohraničených dvojicemi přímek AB, BC a CD a AD hledáme množinu všech bodů, které budou stejně vzdálené od stran čtverce a kružnice k. Řešením v těchto částech tak budou části parabol s ohniskem v bodě S (podrobněji popsáno v příkladu č. 1.2.4). Ve zbylých částech se bude jednat o případ množiny všech bodů stejně vzdálených od bodu a kružnice. Řešením v těchto částech jsou tak části elips s jedním ohniskem ve středu kružnice k a druhým ve vrcholech čtverce $ABCD$ (podrobněji popsáno v příkladu 1.2.1.) Výsledná množina hledaných bodů se tak skládat z částí parabol a elips ohraničených přímkami AB, CD, BC a AD.



Obrázek 1.19

b) $\frac{1}{2}|AB| > r$ (obr. 1.20)

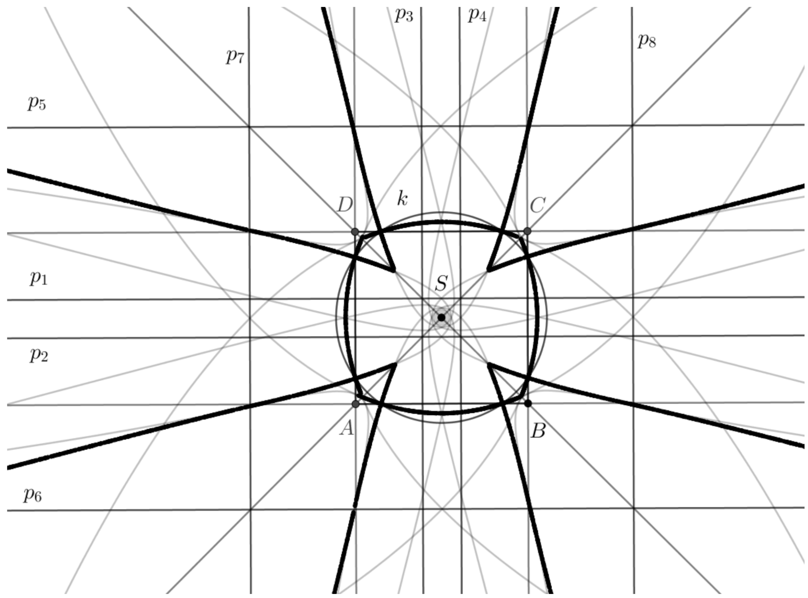
V tomto případě si řešení rozdělíme na množiny ohraničené přímkami AC a BD. $\mathcal{M} = \{X; \rho(X, \overleftrightarrow{AB}) \leq \rho(X, \overleftrightarrow{BC}) \wedge \rho(X, \overleftrightarrow{AB}) \leq \rho(X, \overleftrightarrow{CD}) \wedge \rho(X, \overleftrightarrow{AB}) \leq \rho(X, \overleftrightarrow{AD})\}, \mathcal{N} = \{X; \rho(X, \overleftrightarrow{BC}) \leq \rho(X, \overleftrightarrow{CD}) \wedge \rho(X, \overleftrightarrow{BC}) \leq \rho(X, \overleftrightarrow{AD}) \wedge \rho(X, \overleftrightarrow{BC}) \leq \rho(X, \overleftrightarrow{AB})\}$ a $\mathcal{O} = \{X; \rho(X, \overleftrightarrow{CD}) \leq \rho(X, \overleftrightarrow{AD}) \wedge \rho(X, \overleftrightarrow{CD}) \leq \rho(X, \overleftrightarrow{AB}) \wedge \rho(X, \overleftrightarrow{CD}) \leq \rho(X, \overleftrightarrow{BC})\}$ a $\mathcal{P} = \{X; \rho(X, \overleftrightarrow{AD}) \leq \rho(X, \overleftrightarrow{BC}) \wedge \rho(X, \overleftrightarrow{AD}) \leq \rho(X, \overleftrightarrow{CD}) \wedge \rho(X, \overleftrightarrow{AD}) \leq \rho(X, \overleftrightarrow{AB})\}$. Pro množinu $\mathcal{M}$ řešíme množinu všech bodů, které jsou stejně vzdálené od přímky AB a kružnice k. Obdobně postupujeme u množin $\mathcal{N}, \mathcal{O}$ a $\mathcal{P}$, kde řešíme množinu všech bodů, které jsou stejně vzdálené od přímek BC, CD, AD a kružnice k. Ve všech těchto případech využijeme postup z příkladu 1.2.4 a). Řešením jsou tak části parabol ohraničenými přímkami AC a BD s ohnisky ve středu kružnice k.



Obrázek 1.20

c) $\rho(S, A) > r \wedge \frac{1}{2}|AB| < r$ (obr. 1.21)

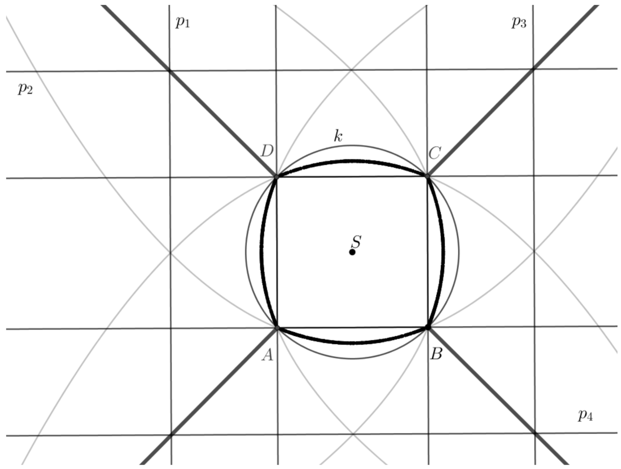
Postupujeme stejně jako v předešlé variantě b) a rozdělíme si množinu opět na části ohraničené přímkami AC a BD. Na rozdíl od varianty b) čtverec protíná kružnic k a proto využijeme pro hledání množiny všech bodů stejně vzdálených od jednotlivých stran čtverce a kružnice k příkladu 1.2.4 c). Navíc v tomto případě si body vně čtverce rozdělíme na části ohraničené přímkami AB, BC, CD a AD. Řešíme tak množinu všech bodů, jež mají stejnou vzdálenost od vrcholů čtverce a kružnice k. Protože vrcholy čtverce leží vně kružnice k bude řešení v těchto částech rameno hyperboly, které je blíže k vrcholům čtverce (podrobněji popsáno v příkladu 1.2.1 d)). Řešením jsou tak části parabol ohraničené přímkami AC a BD s ohnisky ve středu kružnice k a části hyperbol s ohnisky ve vrcholech čtverce a kružnice k.



Obrázek 1.21

d) $\rho(S, A) = r$ (obr. 1.22)

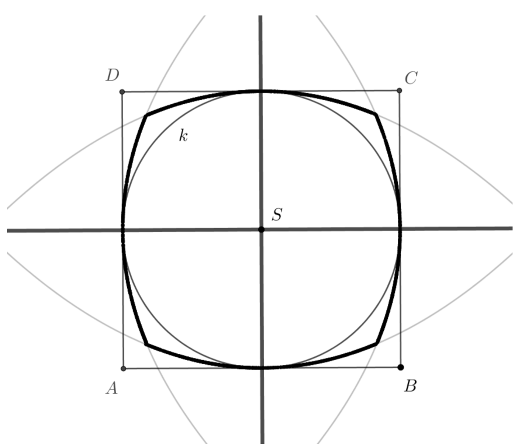
Tuto variantu řešíme obdobně jako v případě a). Řešení si rozdělíme na části ohraničené přímkami AB, BC, CD a AD. V částech ohraničených dvojicemi rovnoběžných přímek AB, CD a BC, AD řešíme množinu všech bodů stejně vzdálených od přímek AB, BC, CD, AD a kružnice k, a proto jsou v těchto částech řešením části parabol (viz. příklad 1.2.4). Ve zbylých částech řešíme množinu všech bodů stejně vzdálených od vrcholů čtverce a kružnice k a využijeme postup z příkladu č. 1 c), kde musíme zohlednit, že strany čtverce leží uvnitř kružnice, a protože svírají úhel 90° tak nebude existovat kružnice, jež by se dotýkala kružnice k ve vrcholech čtverce z vnitřní strany. Řešení v těchto částech se tak zredukuje na polopřímky od vrcholů čtverce. Hledaná množina je pak sjednocení částí parabol s polopřímkami.



Obrázek 1.22

e) $\frac{1}{2}|AB| = r$ (obr. 1.23)

V tomto řešení postupujeme podobně jako v případu b). Zde ovšem vezměme v úvahu body dotyku kružnice k se stranami čtverce. V těchto bodech budeme řešit množinu všech bodů, jež jsou vzdálené od bodů dotyku a kružnice k jako v příkladě 1. c). Dostáváme tak polopřímky vedené ze středu kružnice k procházející body dotyku kružnice k se stranami čtverce. Sjednocením těchto polopřímek získáme dvě na sebe kolmé přímky a po sjednocení s částmi parabol získáme hledanou množinu.



Obrázek 1.23

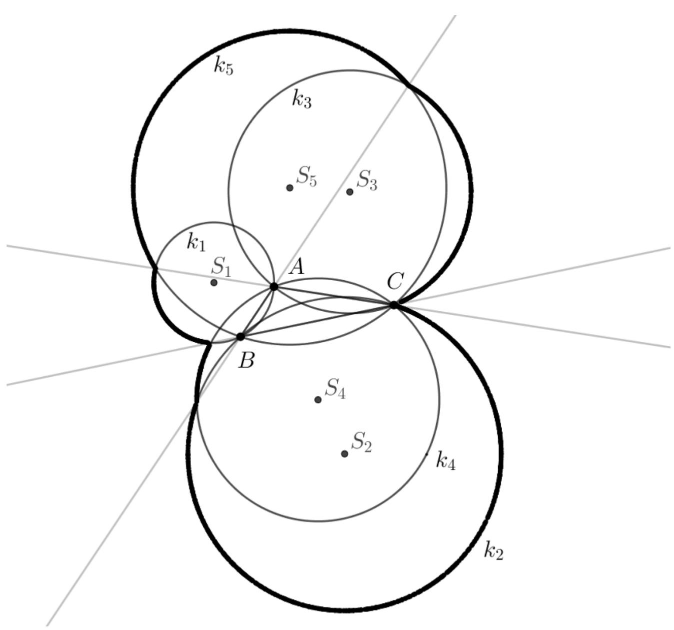
1.3. Množiny bodů s využitím podobnosti, obvodové úhlu, cyklu

1.3.1. Příklady

Příklad 1.3.7

Určete množinu všech bodů, ze kterých lze vidět trojúhelník ABC pod úhlem α

Uvažujme nejprve kružnicové oblouky k_1, k_2, k_3, pod kterými lze vidět jednotlivé strany trojúhelníku pod daným úhlem α (využijeme zobecněnou Thaletovu větu o obvodových úhlech). Sestrojíme přímky p_1, p_2, p_3, kde $p_1 = \overleftrightarrow{AB}, p_2 = \overleftrightarrow{BC}$ $, p_3 = \overleftrightarrow{AC}$. Protnou-li tyto přímky kružnicový oblouk přechází řešení v bodě průniku na kružnicový oblouk sestrojený nad protilehlou stranou trojúhelníku.

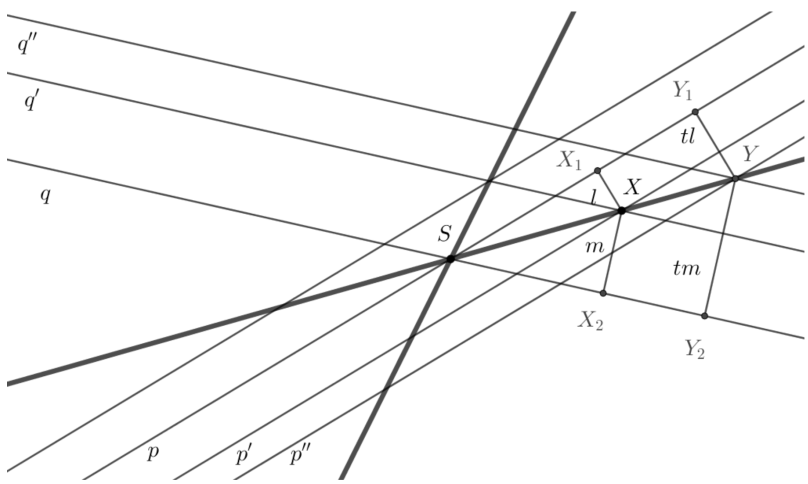


Obrázek 1.24

Příklad 1.3.8 Nechť jsou dány přímky p, q určete množinu všech bodů X pro kterou platí $\rho(X,p) = k\rho(X,q)$, kde $k \in R^+$

a) Přímky p, q jsou různoběžné (obr. 1.25)

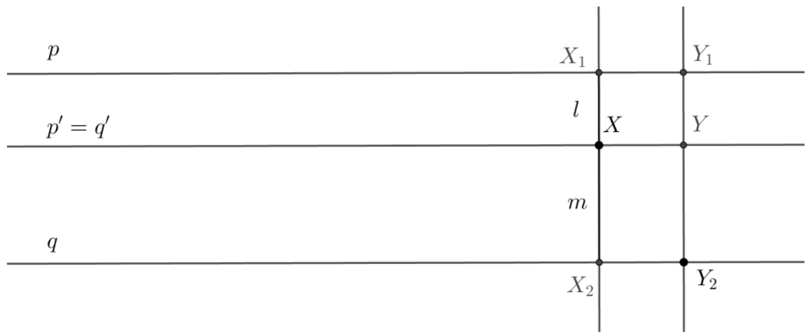
Uvažujme libovolné přímky p', p" pro které bude platit $p' \parallel p$, $p'' \parallel p$, $\rho(p', p) = l$, $\rho(p'', p) = m$, kde $l, m > 0$, $l \neq m$ a $l, m \in R$. Dále pak uvažujme přímky q', q'' pro které platí $q' \parallel q$, $q'' \parallel q$, $\rho(q', q) = tl$ $\rho(q'', q) = tm$, kde $t \in R^+$ a označme si X průsečík přímek q' a p' a Y průsečík přímek p'' a q''. Označme si body X_1, X_2 paty kolmic vedených po řadě k přímkám p, q procházející bodem X a Y_1, Y_2 paty kolmic vedených po řadě k přímkám p, q procházející bodem Y. Z podobnosti trojúhelníků SXX_1 a SYY_1 a z podobnosti trojúhelníků SXX_2 a SYY_2 plyne $\frac{|XX_1|}{|XX_2|} = \frac{|YY_1|}{|YY_2|} = k$. Řešením je množina všech průsečíků takto sestrojených rovnoběžných přímek s p s rovnoběžnými přímkami s q



Obrázek 1.25

b) Přímky p, q jsou rovnoběžné (obr. 1.26)

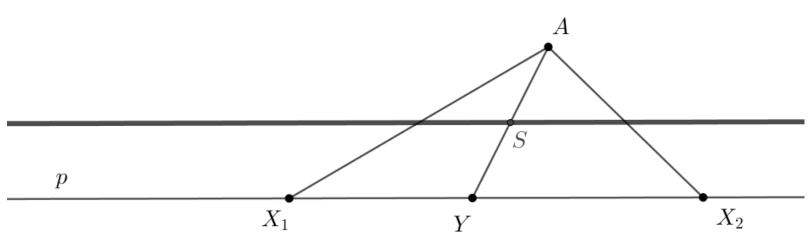
Stejně jako v předešlém případě uvažujme libovolné rovnoběžky s přímkami p, q. Zde na rozdíl od předešlého případu existuje pouze jedna dvojice přímek, které budou mít alespoň jeden společný bod a platí $\rho(p, p') = k\rho(q, q')$ a tato dvojice přímek jsou totožné přímky. Řešením je tak jedna přímka rovnoběžná s přímkami p, q.



Obrázek 1.26

Příklad 1.3.9 Je dána přímka p a bod A, který na ní neleží. Po přímce p se pohybuje bod X. Určete množinu všech středů úseček AX.

Uvažujme body $X_1, X_2 \in p, X_1 \neq X_2$. Střední příčka trojúhelníků AX_1X_2 je množina středů úseček AY, kde $Y \in \overleftrightarrow{X_1X_2}$, které leží na přímce rovnoběžné s přímkou p Proběhnou-li body X_1, X_2 přímku p, pak zřejmě platí, že všechny středy úseček AY leží na střední příčce. Množinou všech středů úseček AX je tak přímka rovnoběžná s přímkou p ve vzdálenosti $\frac{1}{2}\rho(A,p)$ od přímky p a bodu A.



Obrázek 1.27

1.4. Příklady na procvičení

1. Nechť jsou dány dvě soustředné kružnice k, k' o poloměrech $r, r' \in R, r > r'$ se středy v bodech S, S'. Určete množinu všech bodů X, pro které platí $\rho(X, k) = \rho(X, k')$

[Soustředná kružnice l s k a k', která má poloměr $2r - r'$.]

2. Nechť je dán trojúhelník ABC a přímka p. Určete množinu všech bodů, jež jsou stejně vzdálené od trojúhelníku a přímky.

[Trojúhelník rozdělíme na části přímek a vrcholy trojúhelníku, řešením tak budou části os úhlů (případně osa pásu, pokud bude daná strana trojúhelníku rovnoběžná s přímkou) a části parabol s ohnisky ve vrcholech trojúhelníku ohraničené přímkami AB, BC, AC.]

3. Nechť je dán čtverec $ABCD$ a bod E. Určete, pod jakým úhlem lze vidět čtverec z bodu E.

[max $\{|\sphericalangle AEB|, |\sphericalangle AEC|, |\sphericalangle AED|, |\sphericalangle BEC|, |\sphericalangle BED|, |\sphericalangle CED|\}$]

4. Je dána úsečka AB, $|AB| = 8\ cm$. Určete množinu všech bodů X, pro které platí $\rho(X, AB) = 5\ cm$

[Dvě rovnoběžné úsečky s AB o velikosti 8 cm s dvěma půlkružnicemi se středy v bodech A, B]

5. Určete množinu všech bodů, jež jsou stejně vzdálené od dvou úseček AB a CD, kde přímky AB a CD jsou rovnoběžné. Body A, B, C, D tvoří kosočtverec o délce strany 5 cm. $|AD| > |BC|$

[Sjednocení části osy pásu určeného přímkami AB a CD s částmi parabol s ohnisky v bodech B, C s řídícími přímkami CD, AB a s částmi os úseček AC, BD]

6. Nechť je dán kosodélník $ABCD$, kde $a = 5\ cm$, $b = 3\ cm$

a $|\sphericalangle DAB| = 30°$. Najděte množinu všech bodů, pod kterými lze vidět kosodélník pod úhlem menším než $50°$.

[Sjednocení částí kružnicových oblouků, pod kterými lze vidět dané strany kosodélníku pod úhlem menším než $50°$ ohraničené prodlouženými stranami kosodélníku]

7. Nechť je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$, kde $a = 6\ cm$, $c = 3\ cm$, $d = 2\ cm$. Najděte množinu všech bodů, pod kterými lze vidět lichoběžník pod úhlem větším než $120°$.

[Sjednocení částí kružnicových oblouků, pod kterými lze vidět dané strany lichoběžníku pod úhlem větším než $120°$ ohraničené prodlouženými stranami lichoběžníku]

8. Nechť je dána přímka p a bod A. Určete množinu všech bodů, jež mají od přímky p vzdálenost menší než $3\ cm$ a od bodu A větší než $3\ cm$, kde platí $\rho(A, p) = 4\ cm$.

[průnik množiny všech bodů ohraničenou přímkami rovnoběžnými s přímkou p s množinou všech bodů ohraničenou kružnicí se středem v bodě A o poloměru $3\ cm$]

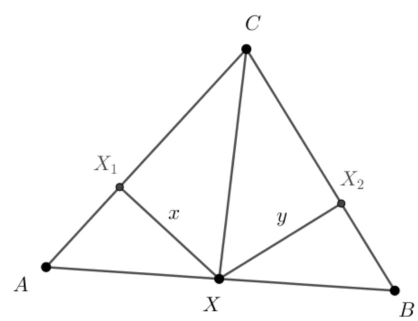
9. Nechť je dán rovnostranný trojúhelník ABC o délce strany, určete množinu všech bodů X, jež mají od trojúhelníku vzdálenost menší než $\frac{1}{4}|AB|$

[množina bodů vyplní části pásů určených přímkami, jež jsou rovnoběžné se stranami trojúhelníku ohraničených prodlouženými stranami trojúhelníku a zároveň část kruhů se středy ve vrcholech trojúhelníku.]

1.5. Množiny bodů zadané lineární rovnicí

Věta 1.5.1

Je dán libovolný trojúhelník ABC. Zvolíme libovolný bod X strany AB a označíme po řadě x, y jeho vzdálenosti od přímek AC, BC. Potom součet $ax + by$, kde a, b jsou délky stran trojúhelníku ABC, má stejnou hodnotu pro všechny body X a je roven dvojnásobnému obsahu trojúhelníku ABC.



Obrázek 1.28

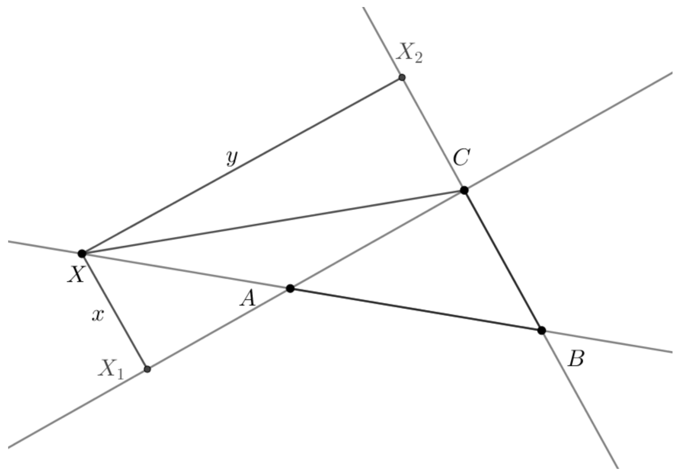
Důkaz

Pro vnitřní bod X úsečky AB platí $|XX_1| = x, |XX_2| = y$, kde X_1, X_2 jsou paty kolmic vedené z bodu X k přímkám a, b a x, y jsou jeho vzdálenosti od přímek AC, BC. Spojnice CX rozdělí trojúhelník ABC na dva trojúhelníky ACX, BCX a pro jejich obsahy platí:

$2.S_{BCX} + 2.S_{ACX} = 2.S_{ABC}$, proto $ax + by = 2.S_{ABC}$, což jsme chtěli dokázat

Věta 1.5.2

Je dán libovolný trojúhelník ABC. Zvolíme libovolný bod X na prodlouženích strany AB a označíme x, y jeho vzdálenosti od přímek AC, BC. Potom výraz $|ax - by|$, kde a, b jsou délky stran trojúhelníku ABC, má stejnou hodnotu pro všechny body X a je roven dvojnásobnému obsahu trojúhelníku ABC.



Obrázek 1.29

Důkaz

Pro bod X na prodlouženích úsečky AB platí $|XX_1| = x, |XX_2| = y$, kde X_1, X_2 jsou paty kolmic vedené z bodu X k přímkám AC, BC a x, y jsou jeho vzdálenosti od přímek AC, BC. Spojnice CX rozdělí trojúhelník ABC na dva trojúhelníky ACX, BCX a pro jejich obsahy platí:

$|2.S_{BCX} - 2.S_{ACX}| = 2.S_{ABC}$, proto $|ax - by| = 2.S_{ABC}$, což jsme chtěli dokázat

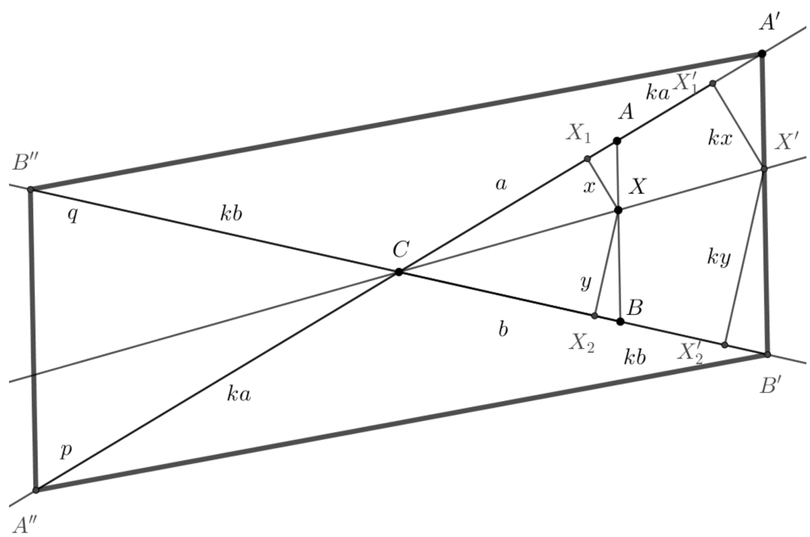
Příklad 1.5.10

Jsou dány různoběžky $p, q, p \cap q = C$ a reálná čísla $a \neq 0, b \neq 0, c > 0$. Určete množinu všech bodů, které mají po řadě od přímek p, q vzdálenosti x, y, přičemž platí $ax + by = c$

Uvažujme možnosti:

a) $a > 0, b > 0$ (obr. 1.30)

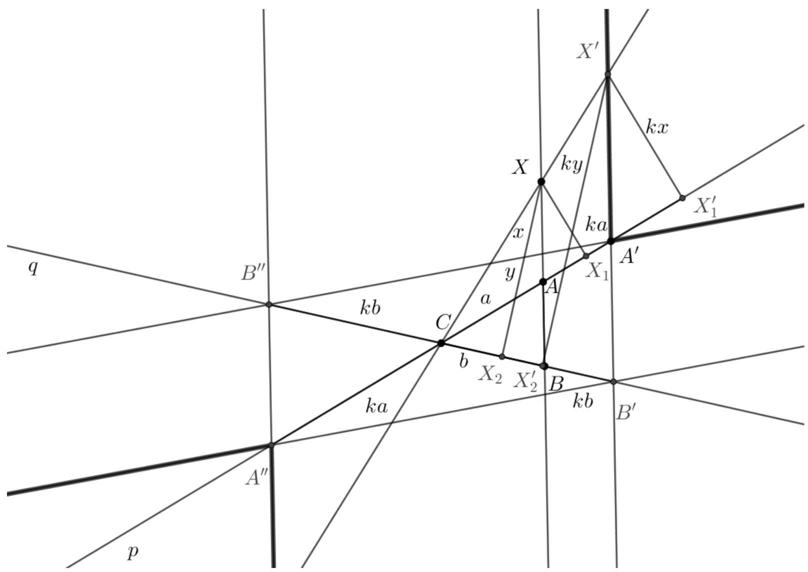
Řešení ukážeme pro jeden z úhlů, které svírají přímky p, q a u ostatních úhlů budeme postupovat stejně. Sestrojíme-li trojúhelník ABC, kde $A \in p, B \in q$ a zároveň platí $|AC| = a$, $|BC| = b$, pak z věty 1.5.1 plyne pro každý bod X úsečky AB rovnice $xa+by = 2S$, kde S je obsah trojúhelníku ABC. Sestrojíme-li trojúhelník $A'B'C$ kde $A' \in p, B' \in q$ a zároveň platí $|A'C| = ka$, $|B'C| = kb$, pak z věty 1.5.1 plyne, že pro každý bod X úsečky AB rovnice $kxa + kby = 2S'$, kde S' je obsah trojúhelníku $A'B'C$. Z podobnosti trojúhelníků ABC a $A'B'C$ pak plyne $2S' = |CA'|.|B'V_{B'}| = k|CA|.k|BV_B| = k^2 2S$. Dosazením $k^2 2S$ za $2S'$ zpět do rovnice a následném vykrácení pak dostáváme rovnici $xa + by = 2kS$. Z této rovnice nám pak vyplývá $c = 2kS \Rightarrow k = \frac{c}{2S}$. Hledanou množinou bodů pro zvolený úhel je tak úsečka $A'B'$. Výsledná množina je pak sjednocení takto sestrojených úseček v každém úhlu, které svírá přímka p s přímkou q, a tyto úsečky tvoří rovnoběžník.



Obrázek 1.30

b) $a > 0, b < 0$ (obr. 1.31)

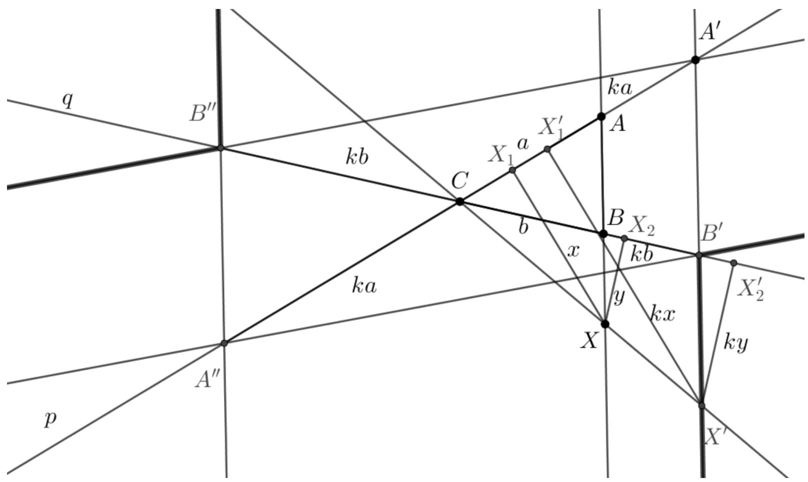
V tomto případě postupujeme obdobně jako případě a). Na rozdíl od případu a) využijeme větu 1.5.2 a v rovnicích se tak změní znaménko u b na záporné a dostaneme tak výslednou množinu čtyř polopřímek, které jsou prodloužením stran rovnoběžníku v protějších vrcholech z případu a)



Obrázek 1.31

c) $a < 0, b > 0$ (obr. 1.32)

V tomto případě opět postupujeme obdobně jako případě a). Na rozdíl od případu a) využijeme větu 1.5.2 a v rovnicích se tak změní znaménko u a na záporné a dostaneme tak výslednou množinu čtyř polopřímek, které jsou prodloužením stran rovnoběžníku z případu a)



Obrázek 1.32

d) $a < 0, b < 0$

V tomto případě by platilo, že levá část rovnice $ax + by \leq 0$, a protože platí $ax + by = c > 0$ proto daná rovnice nebude mít řešení.

Seznam použitých matematických značek

A	bod A
p	přímka p
k	kružnice k
$\overleftrightarrow{AB}$	přímka určená body A, B
$\overline{AB}$	úsečka určená body A, B
$\overrightarrow{pA}$	polorovina určená přímkou p a bodem A
$\lvert AB \rvert$	délka úsečkyAB
$p \parallel q$	přímka p je rovnoběžná s přímkou q
$p \perp \mathrm{q}$	přímka p je kolmá k přímce q
$\sphericalangle AVB$	úhel AVB
$\lvert \sphericalangle AVB \rvert$	velikost úhlu AVB

Závěr

Snahou této bakalářské práce bylo prohloubit znalosti středoškolského učiva a zároveň ukázat pojem geometrické místa různými pohledy. Uvedené příklady se na středních školách příliš často neobjevují a mohly by zaujmout studenty svými různými řešeními. Zároveň bylo snahou ukázat pestrost typů příkladů na množiny bodů daných vlastností. Obrázky v této bakalářské práci byly vytvořeny v programu Geogebra, který je volně dostupný na www.geogebra.org . V tomto programu lze poměrně snadno zobrazit některé typy množin, které by bylo jinak těžké si představit či narýsovat.

Literatura

[1] J. Vyšín: *Geometrická místa*, JČMF Praha, 1950.

[2] J. Vyšín a kol.: *Geometrie II*, SPN Bratislava, 1970.

[3] J. Vyšín a kol.: *Geometrie I*, SPN Praha, 1965.

[4] F. Machala, M. Sedlářová, J. Srovnal: *Konstrukční geometrie*, UP Olomouc, 1989.

[5] M. Jukl: *Analytická geometrie*, UP Olomouc, 2014.