UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Štěpán Dufek

Nestandardní úlohy pro rozvoj matematické gramotnosti žáků 2. stupně základních škol, zejména žáků s poruchami autistického spektra

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.

Olomouc 2023

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma: „Nestandardní úlohy pro rozvoj matematické gramotnosti žáků 2. stupně základních škol, zejména žáků s poruchami autistického spektra“ vypracoval samostatně pod odborným vedením doc. RNDr. Jitky Laitochové, CSc., pomocí svých znalostí získaných během studia a s použitím zdrojů uvedených v seznamu literatury.

V Olomouci dne .... Podpis ....

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval doc. RNDr. Jitce Laitochové, CSc. za inspiraci, cenné rady a vstřícný přístup při vedení mé bakalářské práce. Dále bych také rád poděkoval své rodině a přátelům za jejich podporu a motivaci po celou dobu psaní mé práce a celého mého studia.

Obsah

Úvod

Pojem nestandardní úlohy je pevně začleněn do RVP ZV již od roku 2004, avšak se samotnými úlohami se setkáváme již dříve. Jejich definice a klasifikace je i přesto nejednoznačná, což může být hlavním důvodem, proč je jejich použití v běžné výuce matematiky spíše sporadické.

Hlavním cílem bakalářské práce je vytvořit několik nestandardních matematických úloh s jejich řešením a návrhem případných změn, které by mohly být nápomocny při zadávání těchto úloh žákům s poruchami autistického spektra (dále PAS). Mezi další cíle patří vytvoření jednotné klasifikace nestandardních úloh a dále pak také osvojení informací z dostupné literatury věnující se dané problematice a z toho pak vyvozená sumarizace poznatků z oblasti nestandardních úloh v matematice, matematické gramotnosti a poruch autistického spektra.

Bakalářská práce bude dále rozebírat teoretické poznatky z oblasti nestandardních úloh, matematické gramotnosti a poruch autistického spektra. Detailně se také zaměří na sbírku nestandardních úloh, jejich řešení a návrh změn zadávání žákům s PAS. Poslední kapitola nabídne několik reálných řešení vypracovaných úloh studenty 2. stupně ZŠ.

Teoretická část je rozdělena do třech kapitol, které se postupně zabývají matematickou gramotností, nestandardními úlohami a poruchami autistického spektra. Každá z kapitol poskytuje vhled do jednotlivých okruhů z několika úhlů pohledu. V každé kapitole je zahrnuta komplexní definice dané problematiky a další informace, které poté poskytují ucelený pohled na vymezený problém. V kapitole o matematické gramotnosti jsou nejprve rozebrány její složky, způsoby jejího rozvíjení a na závěr pak testování gramotnosti. V kapitole o nestandardních úlohách jsou navíc zařazeny informace o jejich klasifikaci, zdrojích a možných způsobech řešení. Poslední kapitola řeší také informace o etiologii PAS, autistické triádě a specificích ve vzdělání osob s PAS.

V praktické části jsou zařazeny jednotlivé úlohy, jejich řešení a návrh změn pro zadávání úloh osobám s PAS. Jednotlivé úlohy typově odpovídají klasifikaci uvedené v teoretické části. U jednotlivých úloh jsou zařazeny všechny možné způsoby řešení a možné úpravy pro žáky s PAS. Poslední část obsahuje popis několika řešení skutečných žáků 2. stupně ZŠ jako ověření navržených řešení.

1. Matematická gramotnost

1.1 Definice matematické gramotnosti

Tato kapitola se bude zaměřovat na matematickou gramotnost obecně. Nejdříve budou rozebrány aspekty matematické gramotnosti v kontextu jejich základních definic. Vymezení bude vycházet především z pedagogického slovníku podle profesora Františka Kuřiny a z mezinárodního šetření PISA, jehož aspekty budou rovněž podrobně vysvětleny. Následovat bude popis částí matematické gramotnosti a způsobů jejich rozvíjení.

Matematická gramotnost je jednou ze složek tzv. základních dovedností. Na ty se v dnešním světě klade značný důraz nejen ve vzdělávacím systému, ale také ve společnosti. Mají totiž zásadní vliv na životní úroveň a jsou součástí celoživotního vzdělávání. Má-li být mladý člověk připraven na život ve společnosti a má-li být jejím platným a užitečným členem, musí alespoň v minimální míře rozumět matematice a jejím zákonitostem. Spousta problémů a životních situací, do kterých se dostanou, tuto znalost totiž vyžadují a bez ní může být problematické tyto situace zvládat. S rychle postupujícím rozvojem digitalizace a neustálým vývojem společnosti se počet takových problémů jen zvyšuje. Matematická gramotnost by tedy neměla být chápána pouze jako určitý soubor vědomostí, které člověk nabude ve škole, ale jak říká koncepční rámec PISA 2012, měla by být chápána jako: „schopnost jednotlivce formulovat, používat a interpretovat matematiku v různých kontextech.“[1] Mnohem důležitější, než samotné osvojení těchto znalostí je schopnost rozpoznat, v jakém případě dané matematické postupy použít v reálném světě. Na tuto skutečnost se v mnohých hodinách matematiky bohužel zapomíná. Matematickou gramotnost také nesmíme chápat jako vlastnost, která je vlastní jen určitým jedincům a jiným nikoliv, ale jako vlastnost, kterou mají všichni jedinci, ale u každého je rozvinuta v odlišné míře. Každý ovšem má potenciál matematickou gramotnost dále rozvíjet a pracovat na ní.

Samotné vymezení termínu matematické gramotnosti je obtížné. Jednu z nejvýstižnějších definic nabízí pedagogický slovník: *„(…) schopnost jednotlivce identifikovat a pochopit úlohu, kterou matematika hraje ve světě, dělat dobře podložené*

[1] *PISA 2012 Matematický koncepční rámec* [online]. Praha: Česká školní inspekce, 2013, 3 [cit. 2023-02-19]. Dostupné z: https://www.csicr.cz/CSICR/media/Prilohy/PDF_el._publikace/Mezin%C3%A1rodn%C3%AD%20%C5%A1et%C5%99en%C3%AD/PISA_2012_koncepcni_ramec_mat.pdf S

matematické soudy a zabývat se matematikou způsobem, který bude splňovat potřeby současného a budoucího života jednotlivce jako konstruktivního zainteresovaného a přemýšlivého občana.“[2] Definice profesora Františka Kuřiny vychází z faktu, že této gramotnosti může docílit pouze absolvent určitého stupně vzdělávání. Konkrétně ji Kuřina vymezuje následovně: *„Matematickou gramotností na úrovni n-té třídy k-tého stupně školy rozumíme schopnost porozumět matematickému textu (slovnímu, symbolickému nebo obrázkovému), schopnost vybavovat si potřebné matematické pojmy, postupy a teorie a dovednost řešit úlohy, které nemají problémový charakter. K řešení úloh problémového charakteru je třeba určitá míra tvořivosti, která představuje vyšší úroveň matematické gramotnosti. Tato úroveň patrně nemůže být požadována od celé populace. Základní matematickou gramotnost by ovšem měl dosáhnout každý absolvent příslušného typu školy. Pěstování matematické gramotnosti je nejdůležitější úkol každého stupně školy.“*[3]

V rámci testování matematické gramotnosti mezinárodního výzkumu 2022 PISA definuje v Matematickém koncepčním rámci matematickou gramotnost takto: *„Matematická gramotnost je schopnost jedince matematicky uvažovat a formulovat, používat a interpretovat matematiku při řešení problémů v různých kontextech každodenního života. Zahrnuje používání matematických pojmů, postupů, faktů a nástrojů k popisu, vysvětlování a předpovídání jevů. Pomáhá jedinci uvědomit si úlohu matematiky ve světě a díky tomu odpovědně usuzovat a rozhodovat se jako tvořivý, angažovaný a přemýšlivý občan 21. století.“*[4]

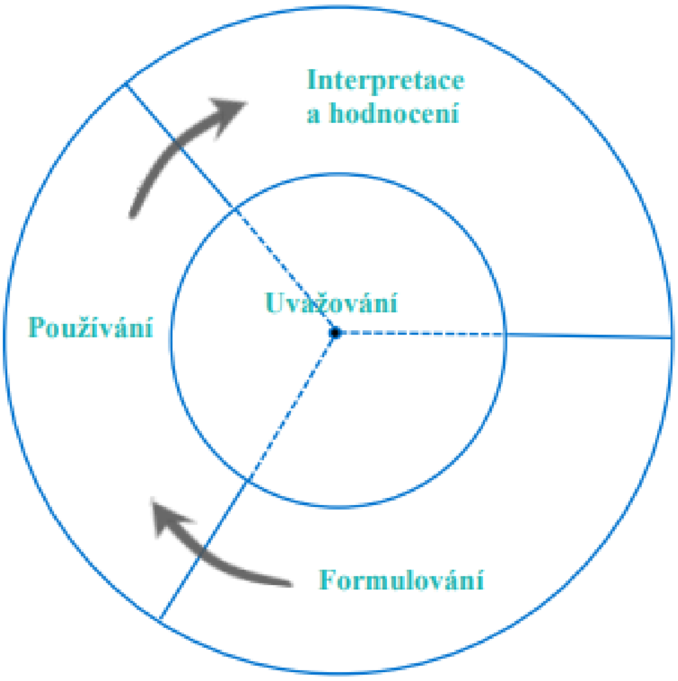
Z těchto definic vyplývá, že hlavní aspektem matematické gramotnosti je to, že aby si žák tuto gramotnost osvojil, musí umět používat matematické znalosti k řešení problémů v běžném každodenním životě. To se realizuje vždy ve třech jednoduchých krocích, které nám také udává výše zmíněná definice matematické gramotnosti. Jde o formulování, použití a interpretaci. V prvním kroku tedy jedinec musí nejprve odhalit matematickou podstatu problému, a přeformulovat jej pomocí matematických pojmů. V tomto okamžiku se z nejednoznačné a mnohdy až chaotické situace každodenního

[2] PRŮCHA, Jan, Eliška WALTEROVÁ a Jiří MAREŠ. *Pedagogický slovník*. 6.,aktualiz. a rozš. vyd. Praha: Portál, 2009, 147, ISBN 978-80-7367-647-6.

[3] *O škole a vzdělání* [online]. Praha: MATFYZPRESS vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, 2007, 41, [cit. 2023-02-19]. ISBN 978-80-7378-029-6. Dostupné z: https://kdm.karlin.mff.cuni.cz/konf-cd2/data/sborniky/o_skole_a_vzdelavani.pdf

[4] BOUDOVÁ, Simona, Vladislav, TOMÁŠEK a Libor KLEMENT. *Mezinárodní šetření PISA 2022 – koncepční rámec* [online]. Praha: Česká školní inspekce, 2022, 10, [cit. 2023-02-19]. ISBN 978-80-88492-04-7. Dostupné z: https://www.csicr.cz/CSICR/media/Prilohy/2022_p%c5%99%c3%adlohy/Mezin%c3%a1rodn%c3%ad%20%c5%a1et%c5%99en%c3%ad/PISA_2022_koncepcni_ramec_24-9-22_FINAL.pdf

života stává definovaný matematický problém. Další krokem je tento matematický problém vyřešit pomocí postupů a s využitím technik, které se získávají ve škole. Posledním krokem je pak zhodnocení vlastních matematických výsledků pomocí aplikace na reálný problém. Pro přehlednost a orientaci je níže přiloženo schéma znázorňující všechny kroky vedoucí k vyřešení problému a jejich vzájemné propojení.



Obr.1: Vztah matematického uvažování a cyklu řešení problému (https://www.csicr.cz/CSICR/media/Prilohy/2022_p%c5%99%c3%adlohy/Mezin%c3%a1rodn%c3%ad%20%c5%a1et%c5%99en%c3%ad/PISA_2022_koncepcni_ramec_24-9-22_FINAL.pdf)

1.2 Složky matematické gramotnosti

Základní matematické schopnosti ve formě početních operací využívá člověk neustále při řešení problémů běžného života. Jak je zmíněno výše, v kontextu matematické gramotnosti se vždy zmiňují problémy reálného světa. Ty se musí skládat ze tří hlavních složek, kterými jsou situace a kontexty, matematické obsahy a kompetence. Z toho vyplývá, že každý problém se vyskytuje v určité situaci a kontextu. Následně můžeme při řešení daného problému použít druhou složku matematické gramotnosti, kterou je právě matematický obsah. Obsah je tvořený několika tematickými okruhy, kterým říkáme kategorie. Nejznámější dělení do těchto kategorií vzniklo pro OECD/PISA a rozlišuje čtyři základní kategorie, jmenovitě kvantitu, prostor a tvar, změnu a vztahy a jako poslední neurčitost.

Kategorie kvantita v sobě zahrnuje různé matematické představy o číslech, jejich vlastnostech a operacích, které jsou s nimi prováděny. Prostor a tvar pak obsahuje schopnosti spojené s prostorovou orientací a prací s obrazci v rovině a prostoru. Kategorie změna a tvary nám slouží hlavně k popisu závislostí a proměnných, základních funkcí a grafů. V neurčitosti pak uplatňujeme pravidla kombinatoriky, pravděpodobnosti a také sběru dat. Poslední složkou všech problémů jsou kompetence, které znázorňují postupy, které žáci při řešení problémů využívají.

1.3 Rozvoj matematické gramotnosti

Jak je patrné z předchozí části, pro život v dnešní společnosti je skoro až nutností mít takovou úroveň matematické gramotnosti, aby byl člověk schopen samostatně řešit problémy a situace, do kterých se dostane, za využití příslušného matematického aparátu. V největší míře lidé získávají matematickou gramotnost při výuce ve školách. Ta by měla vytvářet podnětné a inspirující prostředí, ve kterém se žáci budou chtít učit novým věcem, ať už v oblasti matematiky, nebo jiných, neméně důležitých oblastí vzdělávání. Učitel by měl být ten, který bude dětem předkládat znalosti matematiky a zdůrazňovat důležitost matematické gramotnosti. V hodinách matematiky je klíčovým faktorem vytvoření prostředí, které žákům bude simulovat běžné životní situace, při kterých budou muset zapojit svou matematickou gramotnost. Díky tomu mohou dospět k pochopení významu a důležitosti matematické gramotnosti. V roce 2019/2020 bylo Českou školní inspekcí provedeno šetření, které mělo za cíl zjistit podmínky a proces rozvoje matematické gramotnosti. V tomto celorepublikovém šetření bylo zapojeno 11 961 žáků 6. tříd z 296 základních škol a odpovídajících tříd víceletých gymnázií. Toto šetření přineslo mimo jiné závěr, že rapidně roste zájem ředitelů škol a učitelů o uskutečňování změn ve výuce matematiky. Zejména se jedná o změnu směrem k praktičtěji orientované výuce, a dále také zvyšování a zlepšování materiálních a personálních podmínek škol. Zavádění těchto změn v sobě nese samozřejmě i řadu výhod. Jednou z nich může být například zlepšení atmosféry třídy, která úzce souvisí s metodickou rozmanitostí výuky a četností komunikace mezi učitelem a žákem.

1.4 Testování matematické gramotnosti

Hlavní způsob, jak je matematická gramotnost testována, jsou mezinárodní šetření. Těch je po celém světě prováděno velké množství, hlavní roli však mají zejména testování PISA (Programme for International Student Assessment) a testování TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study).

1.4.1 Testování PISA

Mezinárodní testování PISA je jedním z největších vzdělávacích výzkumů zjišťujících vzdělávací výsledky u žáků starších patnácti let, a to zejména v oblasti čtenářské, matematické a přírodovědecké gramotnosti. Toto testování spadá pod Organizaci pro hospodářskou spolupráci (OECD) a zároveň je jejím největším projektem. Celý průběh tohoto testování na území České republiky spravuje a následně vyhodnocuje Česká školní inspekce. Ta na základě každého šetření vydává zprávu, ve které shrnuje výsledky žáků na českých školách a nabízí porovnání s žáky z ostatních zemí.

Samotné testování probíhá v pravidelných tříletých intervalech. Každý cyklus má danou jednu hlavní oblast, na kterou se zaměřuje, zatímco zbylé dvě jsou vedlejší. Pro hlavní oblast je vytvářen koncepční rámec, na jehož základě jsou tvořeny také nové úlohy pro tuto oblast. Koncepční rámec je vždy zaměřen na přínos aktuálních a nových poznatků a názorů z hlavní oblasti, což rovněž dává vzniknout novému pohledu na danou oblast gramotnosti. Kromě nových úloh, které vznikají jen pro hlavní oblast, jsou do samotného testu zahrnuty i tzv. trendové úlohy. Jsou to úlohy, které byly použity již v minulých letech a slouží hlavně k porovnávání výsledků v čase. V rámci vedlejších oblastí jsou do testování zařazeny vždy jen trendové úlohy. Kromě třech výše zmíněných oblastí gramotnosti se šetření PISA snaží zaměřit od roku 2012 i na další, tzv. inovativní doménu, kterou je finanční gramotnost. Další nedílnou součástí PISA testování je dotazníkové šetření, které vyplňují jak žáci po skočení samotného testu, tak ředitelé. Ti vyplňují tzv. školní dotazník, který slouží k porovnávání podmínek pro výuku testovaných žáků mezi jednotlivými školami.

Do mezinárodního šetření se každoročně hlásí čím dál tím větší počet zájemců. Tento nárůst jde ruku v ruce s přechodem od papírové formy testování k elektronické formě testování. Tento přechod také umožňuje změnu ve formě testování. Žáci, kteří se účastnili šetření v roce 2022, které bylo zatím poslední, se již setkali s tzv. adaptivním testem. V zprávě ČŠI se o adaptivním testu píše následující: *„Adaptivní testování přináší* *přesnější měření dovedností žáků, neboť reflektuje úroveň jejich dovedností a přizpůsobuje jí obtížnost úloh, s nimiž se žáci během testu setkají. Test tak dokáže lépe rozlišit mezi slabšími a zdatnějšími žáky a přesněji zprostředkovat vzdělávací výsledky žáků na obou koncích výkonnostního spektra. Zavádění adaptivního testování do šetření PISA jde ruku v ruce s přechodem od papírové formy testování na formu elektronickou, bez níž by nebylo možné adaptivní test provést.“*[5]

Co se týče testování matematické gramotnosti, na tu bylo zaměřeno šetření v roce 2003, 2012 a 2022. V roce 2003, kdy byla poprvé testována matematická gramotnost, žáci českých škol dosáhli nadprůměrných výsledků. Z celkového počtu 40 zemí, které se šetření zúčastnily, se žáci České republiky umístili na 13. místě. Zajímavé na tomto testování je také měření matematické gramotnosti, ve kterém byla její úroveň určována pomocí šesti úrovňové škály, jejíž jednotlivé úrovně značily kompetence, které žáci při řešení úloh používali. Při srovnání výsledků testování z roku 2003 a 2012 lze spatřit velký propad českých žáků. Z nadprůměrného výsledku předchozích let se Česká republika zařadila spíše do průměru a skončila na celkovém 16. místě. Poslední testování se konalo v roce 2022 a jeho výsledky doposud nebyly zveřejněny.

1.4.2 Testování TIMSS

Testování TIMSS probíhá pod záštitou Mezinárodní asociace pro hodnocení výsledků vzdělávání (IEA) a první testování proběhlo v roce 1995. V pravidelných čtyřletých intervalech se monitorují získané znalosti v oblasti matematiky a přírodních věd žáků čtvrtých a osmých tříd. Česká republika se zúčastnila již prvního šetření v roce 1995 a s výjimkou roku 2003 i všech dalších. Za přípravu, realizaci a zpracování výsledků, stejně jako u testování PISA, v České republice zodpovídá Česká školní inspekce, která ke každému testování vydává národní zprávu i koncepční rámec.

Pro účely testování se každá z oblastí dělí do několika obsahových a kognitivních domén, které poté slouží jako hodnotící nástroj. Kognitivní domény jsou společné pro obě oblasti a jedná se o prokazování znalostí, používání znalostí a uvažování. Obsahové domény již shodné nejsou. Pro matematiku máme celkem tři a to čísla, měření a geometrie, data.

---

[5] BOUDOVÁ, Simona. PISA 2022. In: *Česká školní inspekce* [online]. Praha: Česká školní inspekce, 2022 [cit. 2023-02-19]. Dostupné z: https://www.csicr.cz/cz/Mezinarodni-setreni/PISA/Archiv/PISA-2022

Co se týče samotného testování, je prováděno formou testu, který v roce 2023 plně přechází do elektronické formy. To nabízí široké možnosti využití nových typů testových úloh, jako například úlohy PSI (Problem Solving and Inquiry tasks). Národní zpráva ČŠI o testování TIMSS tyto úlohy definuje takto: *„Jedná se o úlohy, při kterých žáci řeší problémy a provádějí badatelskou činnost – experimentují, hledají souvislosti, mají možnost nastavovat určité parametry a sledovat důsledky těchto změn. PSI úlohy mohou využívat pohyblivé animace, zapojují žákovu interaktivitu, ukazují vývoj určitého jevu v čase nebo simulují žákem nastavený proces.* "[6] Podobně, jako při testování PISA, také v tomto případě je k samotnému testu přidán i dotazník, který má za úkol shromáždit celou řadu důležitých informací o škole a také o samotných žácích. Dotazník je určený nejen pro ředitelé škol, ale také pro žáky či rodiče. Na výsledky testování navazuje ČŠI svými zprávami, ve kterých mimo jiné vydává doporučení pro zlepšení výuky matematiky a přírodních věd na konkrétních školách.

[6] O šetření TIMSS. *Česká školní inspekce* [online]. 2023. [cit. 2023-03-08]. Dostupné z: https://www.csicr.cz/cz/Mezinarodni-setreni/TIMSS/O-setreni-TIMSS

2. Nestandardní úlohy v matematice

2.1 Vymezení pojmu nestandardní úlohy

Následující kapitola se bude věnovat vymezení pojmu nestandardní úlohy. Budou zde předloženy různá pojetí tohoto pojmu se snahou o vyvracení mylného úsudku že vše, co je nestandardní, nemusí být neobvyklé. Bude představeno několik typů nestandardních úloh a způsobů, jak tyto úlohy řešit.

Když se řekne slovo nestandardní, mnoho lidí si jej spojí se synonymy, jako je neobvyklý nebo zajímavý. To je ovšem jen jedna část problematiky. Jako nestandardní úlohy totiž můžeme označit také úlohy, které děti motivují, probouzí v nich kreativitu a podněcují je k hledání své vlastní cesty, tedy něco, co by mělo být během vyučování ve školách naprosto přirozené. Proto je také pojem nestandardní úloha zakomponovaný do tematického okruhu s názvem nestandardní aplikační úlohy dle RVP ZV z roku 2021, který poskytuje souhrnný pohled na jejich řešení: *„(…) jejichž řešení může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení. Tyto úlohy by měly prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání.“*[7]

Mezi nejvýznamnější autory, zabývající se tématikou nestandardních úloh patří Milan Trch a Eva Zapotilová. Ti ve své publikaci nestandardní úlohy definují jako úlohy, kde student:

„a) nezná způsob řešení, ale může ho objevit v daném čase

b) zná způsob řešení, ale nepřijde mu pro tento typ úloh vhodná.“[8]

Výstižná je také charakteristika od Rezka a Liškové, kteří tyto úlohy definuje, jako úlohy, které: „(…) mají mnohdy širší kontext, který navozuje konkrétní problémovou situaci. Při zpracování zadaných údajů musí žáci analyzovat více informací, musí hledat souvislosti a informace dále zpracovávat.“[9]

---

[7] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. Praha: Ministerstvo školství a tělovýchovy, 2021, 31 [cit. 2023-02-19]. Dostupné z: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/

[8] TRCH, Milan a Eva ZAPOTILOVÁ. Non-traditional mathematical tasks as a means of developing mathematical thinking of younger children a problems with their evaluation. In: HEJNÝ, Milan a Jarmila NOVOTNÁ. *International Symposium Elementary Maths Teaching*. Praha: Karlova univerzita, Pedagogická fakulta, 1997, s. 74-78, 75, ISBN 80-7196-077-2.

[9] *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělání* [online]. Praha: NÚV, 2015, 101, [cit. 2023-02-19]. ISBN 978-80-7481-140-1. Dostupné z: chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/http://home.pf.jcu.cz/~lsamkova/mpp_metodicke_komentare.pdf

Ať už jde o české, nebo zahraniční autory, všichni se shodují na nutnosti zařadit tyto úlohy do výuky školské matematiky a také na jejich pozitivním vlivu na motivaci žáka.

2.2 Klasifikace nestandardních úloh

Stejně jako definice nestandardních úloh, i jejich klasifikace není zcela jednoznačná. Existuje značné množství různých klasifikací, které se navzájem doplňují. Z tohoto důvodu bude vybráno jen několik z nich, které jsou klíčové pro další části této práce.

Jak již bylo uvedeno výše, RVP ZV vymezuje tři typy nestandartních úloh: číselné a logické řady, číselné a obrázkové analogie a logické a netradiční geometrické úlohy. Lišková a Rezek pak v knize *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělání* k těmto typům připojují ještě další druhy, mezi které zařazují: *„problémy diofantovského typu, úlohy, kde žáci „sesazují“ a doplňují známé informace tak, aby výsledná sdělení byla pravdivá, úlohy kombinatorické, kde žáci hledají různé varianty pořadí, hledají různé dvojice apod., úlohy s využitím „šedesátkového“ převodu, kde žáci zpracovávají časové údaje, popř. pracují s mírou úhlovou, úlohy grafické.“*[10] Jako konkrétní příklad lze uvést úlohy, se kterými se žáci setkávají mimo školu, hlavně v oblasti rekreační a zábavné matematiky jako jsou kvízy v časopisech pro děti, doplňovačky, hlavolamy, sudoku, kakuro, a další.

Další velmi zajímavou klasifikaci můžeme najít v diplomové práci od J. Horkela. Ten klasifikuje nestandardní úlohy podle způsobu zadání a množství a druhu informací, které z něj můžeme získat, na kapitánské úlohy, úlohy nedourčené, přeurčené, úlohy s antisignálem, úlohy kombinatorické a úlohy s vyšší obtížností. [11]

Přestože u klasifikací nestandardních úloh nepanuje jednoznačná shoda, jsou patrné některé společné rysy. Na základě těchto společných rysů můžeme nestandardní úlohy klasifikovat do několika kategorií jako jsou úlohy spojené s geometrickými tvary, číselné a logické řady, úlohy kombinatorické, úlohy s nestandardním zadáním a úlohy

[10] *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělání* [online]. Praha: NÚV, 2015, 102, [cit. 2023-02-19]. ISBN 978-80-7481-140-1. Dostupné z: chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/http://home.pf.jcu.cz/~lsamkova/mpp_metodicke_komentare.pdf

[11] HORKEL, Jan. *Nestandardní úlohy v matematice* [online]. Praha, 2005 [cit. 2023-04-18]. Dostupné z: chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/2644/DPTX_2005_2_11410_OSZD001_60800_0_20579.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Vedoucí práce Mgr. Marie Tichá, CSc., odb. as. KMDM.

diofantovského typu.

2.2.1 Úlohy s nestandardním zadáním

První skupinou jsou úlohy s nestandardním zadáním. Mezi tyto úlohy můžeme zařadit tzv. přeurčené úlohy, nedourčené úlohy a úlohy s antisignálem.

Přeurčené úlohy jsou ty úlohy, které v zadání obsahují nepotřebné informace, nebo ve kterých žáci hledají výsledek, který je buď již zahrnut v samotném zadání nebo je zjistitelný základní početní operací. Otázky takového typu pak na děti mají matoucí účinek. Zpravidla to mohou být úlohy typu:

V akváriu máme šest neonek a tři závojnatky. Dvě neonky po čase zemřely. Kolik závojnatek nám zbylo v akváriu?

Nedourčené úlohy jsou pak úlohy, ve kterých nám chybí informace, pomocí které bychom úlohy vypočítaly. Takové úlohy pak nemají řešení. Ve většině případů sice zadání řešitele nabádá k určité početní operaci, ale k té ovšem nemá potřebné informace. Klasickou nedourčenou úlohou může být úloha typu:

Jana pořádá narozeninovou oslavu. Pozvání přijaly tři kamarádky, dva kamarádi a příbuzní. Kolik lidí bude na oslavě?

Posledním typem úloh s nestandardním zadáním jsou úlohy s antisignálem. Jsou to úlohy, jejichž zadání obsahuje slovo (antisignál), které vede řešitele k použití opačné operace. Jsou to úlohy, se kterými se děti v učebnicích nesetkávají tak často, ale v přijímacích testech na střední školy se vyskytují poměrně často. Úlohy s antisignálem mohou vypadat například takto:

Pavel měří 185 cm. Pavel je o třetinu menší než Petr a o 15 cm vyšší než Honza. Kolik cm měří Honza a Petr.

Antisignálem v této úloze je slovo menší a vyšší.

2.2.2 Úlohy spojené s geometrickými tvary

Jsou to úlohy, které mají vždy nějakou spojitost s geometrickými tvary. V těchto úlohách žáci nejvíce zapojí prostorovou představivost. Takových úloh existuje mnoho druhů a nejrozšířenějším jsou polymina. Polymina jsou geometrické obrazce, které vzniknou spojením několika stejných čtverečků k sobě. Paleta úloh, které můžeme dětem ve spojení s těmito obrazci zadat je velmi pestrá. Děti mohou například obrazce rozdělovat podle společných znaků do skupin, nebo pomocí nich stavět větší obrazce.

Dalším typem úloh spojených s geometrickými útvary mohou být úlohy se sirkami. V těch mají děti za úkol přesunutím jedné nebo více sirek z obrazce, který mají v zadání, vytvořit obrazec jiný.

2.2.3 Číselné a logické řady

Obecně můžeme tyto úlohy rozdělit do dvou kategorií. První z nich budou číselné řady. Číselné řady jsou řady čísel, které se rozvíjí podle daného kritéria, které není řešiteli známo, a musí na něj přijít. Číselné řady mohou obsahovat i více těchto principů. Typickou úlohou může být doplnění posledního členu uvedené řady. Žák tedy musí nejprve přijít na princip, podle kterého je řada utvořena a pomocí něj spočítat poslední neznámý člen.

Druhým typem úloh může být sudoku a některé jeho alternativy. Sudoku, někdy též nazývané jako magický čtverec, je hra s číslicemi, jejímž principem je doplnit číslice 1-9 do částečně vyplněné čtvercové sítě. Ta má v základní variantě rozměry 9x9 a celá je ještě rozdělena na 9 čtverců. Úkol žáka je doplnit do prázdných políček čísla tak, aby se v žádném ze sloupců, řádků ani čtverců číslice neopakovaly, tedy aby v každém z nich byly pouze jednou. Pro zpestření můžeme místo čísel použít i symboly, nebo obrázky. Princip však zůstává úplně stejný.

2.2.4 Kombinatorické úlohy

Jedním z nejčastějších typů nestandardních úloh pro žáky na druhém stupni jsou kombinatorické úlohy. Jsou to úlohy, které žáka navedou nejen na použití kombinatorických vzorců, které se učí ve škole, ale také probouzí v dětech kombinatorické myšlení trochu jiného, nestandardního, typu.

Takové úlohy mohou vypadat například takto:

Jsou dána města Ondřejov, Tomášov, Janov a Jirkov. Mezi těmito městy chceme zavést tři silnice tak, abychom se z každého města dostali do všech ostatních měst. Kolik možností pro stavbu máme?

Z číslic 5,7,0,6 vytvoříme taková trojciferná čísla, která jsou dělitelná číslem 5. Kolik takových možností máme?

2.2.5 Úlohy „diofantovského“ typu

Úlohy tohoto typu jsou na rozdíl od předchozího typu asi nejméně časté ze všech druhů. Žáky mají navést k sestavení a výpočtu diofantovských rovnic, což jsou lineární rovnice o dvou neznámých. Ty nejsou zakotveny v kurikulu základní školy a možná proto se s nimi žáci tak často nesetkávají. Jelikož žáci neznají způsob, jak řešit takové rovnice, většinou volí alternativní způsoby výpočtu, nejčastěji pomocí tabulky. Typickým diofantovským příklad může být:

Farmář nakoupil několik ovcí a koz. Jedna ovce stála 350 Kč, jedna koza pak 420 Kč. Celkově farmář zaplatil 3780 Kč. Kolik si koupil koz a kolik ovcí?

2.3 Řešení nestandardních úloh

Řešení nestandardních úloh se vesměs neliší od řešení úloh klasických. Rozdíl je jen v použitých metodách, ale postup zůstává stejný. Každá úloha má několik kroků, které musíme dodržovat, abychom dospěli k výsledku.

Tématem řešení slovních úloh se zabývá několik autorů**.** Dle Budínové a kol. by řešení slovních úloh u všech žáků mělo být systematické a mít několik kroků. Ty by se daly shrnout do těchto kroků: pochopení a znázornění zadání úlohy, matematický zápis úlohy a na jeho základě i její vyřešení, závěrečná zkouška správnosti, a nakonec sepsání odpovědi.[12] Pólya pak popisuje čtyři kroky, které se dají interpretovat jako: pochopení úlohy, navržení způsobu řešení, realizace plánu a závěrečná kontrola.[13] První krok,

[12] BUDÍNOVÁ, Irena, Růžena BLAŽKOVÁ, Milena VAŇUROVÁ a Helena DURNOVÁ. *Matematika pro bystré a nadané žáky: úlohy pro žáky 1. stupně ZŠ, jejich rodiče a učitele*. 3. vydání. V Brně: Edika, 2022, 32, ISBN 978-80-266-1706-8.

[13] PÓLYA, György. *Jak to řešit?: překvapivé aspekty (nejen) matematických metod.* Přeložil Oldřich KOWALSKI. Praha: Matfyz-Press, 2016. Popularizace, 7-8 ISBN 978-80-7378-325-9.

pochopení úlohy, spočívá v porozumění zadání celé úlohy, a také ve znázornění vztahů, které ze zadání plynou. Toto znázornění může mít rozličný charakter podle prostředků, jaké zvolíme. V druhém kroku je zásadní vymyslet strategii a také mechanismus, kterým se bude daná úloha řešit. Podle Pólyi se o plánu lze bavit v případě „(…) jestliže víme alespoň v hrubých rysech, jaké výpočty (symbolické nebo rutinní) nebo jaké konstrukce musíme provést, abychom určili neznámou.“[14] Následuje třetí krok, kterým je realizace plánu. U obecného náčrtu, který byl vytvořen v předchozím kroku, tedy stačí jen ověřit, zda platí ve všech svých bodech. Realizace plánu je tak mnohem jednodušší než jeho vytvoření. Posledním krokem je závěrečná kontrola, ve které se žáci musejí ohlédnout zpět a překontrolovat si všechny své kroky. To žáci dělají nejen pro ověření správnosti výsledku, ale také pro upevnění nově nabytých vědomostí a dovedností, které získali během řešení dané úlohy.

Dalšími autory, kteří se zabývají řešením slovních úloh jsou Novák a Stopenová. Ti proces řešení dělí také na čtyři fáze: rozbor úloh, vyjádření struktury úlohy matematickou symbolikou, řešení úloh matematickým aparátem, kontrola správnosti a formulace odpovědi.[15]

Lze si tedy povšimnout, že nepanuje úplná shoda v názorech na řešení nestandardních slovních úloh. I přesto v nich ale najdeme některé rysy, které mají společné. První kroky zpravidla souvisí se zamyšlením nad zadáním a plánováním řešení. V závěru by pak měl řešitel provést zpětnou kontrolu správnosti výsledku a sepsat odpovědi.

Kroky, které dovedou řešitele k výsledku, byly již uvedeny. Ve všech případech zůstanou stejné, ovšem rozdíl může nastat v použitých metodách, pomocí kterých budeme jednotlivé kroky plnit. Celkem existují tři metody, které lze k řešení slovních úloh použít, tj. aritmetické řešení, grafické řešení a logický úsudek. Každá z těchto metod je založena na jiných principech a používá jiné prostředky, pomocí kterých můžeme dospět k výsledku.

[14] PÓLYA, György. *Jak to řešit?: překvapivé aspekty (nejen) matematických metod*. Přeložil Oldřich KOWALSKI. Praha: MatfyzPress, 2016. Popularizace, 10 ISBN 978-80-7378-325-9.

[15] NOVÁK, Bohumil a Anna STOPENOVÁ. *Slovní úlohy ve vyučování matematice na 1. stupni ZŠ*. Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého v Olomouci, 1993, 21 ISBN 80-7067-294-3.

Řešení logickým úsudkem

Řešení úlohy logickým úsudkem je nejrychlejší způsob, jak daný příklad vyřešit. Je založen na tom, že odpověď žák zjistí hned ze zadání, nebo k jejímu nalezení nevyužije žádné matematické operace ani vzorce. Tento způsob řešení volí ti, kteří se s úlohou setkávají poprvé, nebo ještě nemají potřebné matematické znalosti, které by mohli využít k řešení dané úlohy jiným způsobem. Ne všechny úlohy se dají vyřešit logickým úsudkem.

Aritmetické řešení

Aritmetickým řešením rozumíme takový způsob, při kterém používáme matematické vzorce a operace, jak při samotných výpočtech, tak při sestavování zápisu. Nejprve se tedy snažíme samotné zadání přepsat pomocí matematického jazyka do zápisu, který nám pomůže při sestavování dalšího postupu. Použité matematické vzorce se liší v závislosti na typu a charakteru úlohy. Podle toho si tedy žák vybírá, který vzoreček, nebo kterou operaci bude dále využívat.

Grafické řešení

Grafické řešení je způsob, v rámci kterého řešitel pro výpočet dané úlohy zvolí tzv. obrázkovou legendu. Pojem obrázková legenda můžeme definovat následujícím způsobem: „*O obrázkové legendě hovoříme tehdy, jestliže řešitel zachytí informace uvedené v zadání do formy schématu nebo obrázků, které s různou mírou věrnosti odpovídají kontextu úlohy.*“[16] Obrázkové legendy mohou být obrázky, tabulky, grafy, schémata apod., mohou také obsahovat slovní poznámky. Grafický způsob řešení si vybírají většinou ti žáci, kteří mají větší představivost a úlohu si dovedou ihned převést do reálné situace a znázornit si ji.

---

[16] NOVOTNÁ, Jarmila. *Analýza řešení slovních úloh: [kapitoly z didaktiky matematiky]*. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2000, 28, ISBN 80-7290-011-0.

2.4 Zdroje nestandardních úloh

S nestandardními úlohami se žáci setkávají v různých situacích a podobách. Nejčastěji s nimi žáci přijdou do kontaktu při plnění různých matematických soutěžích. Na území České republiky se jich objevuje hned několik. Mezi ty nejznámější můžeme zařadit Matematickou olympiádu, Matematického klokana nebo Pythagoriádu. Každá ze soutěží má svá specifika, kterými se od sebe odlišují.

Historicky nejstarší soutěží je Matematická olympiáda, která se na českém území poprvé uskutečnila v roce 1951. První kolo, které žáci absolvují, plní z domova a k řešení mohou využít konzultaci s učitelem. Další odlišností, kterou se matematická olympiáda odlišuje od ostatních soutěží, je fakt, že kromě správného výsledku je vyžadován také správný postup řešení a jeho vysvětlení. Soutěž je určena pro žáky základních škol, středních škol a víceletých gymnázií a je členěna do několika kategorií. Ty se dělí na základě příslušného ročníku daného žáka. Na vytváření úloh se podílejí odborníci z českých i zahraničních univerzit ve spolupráci se středoškolskými učiteli.

Další oblíbenou soutěží je Matematický klokan. Historicky tato soutěž vznikla v Austrálii, a v České republice se poprvé konala v roce 1995. Stejně jako v předchozím případě žáci řeší test, který rozvíjí jejich početní, analytické a logické myšlení. Rozdíl od Matematické olympiády ale spočívá v tom, že žáci mají u každé úlohy na výběr pět odpovědí, z nichž je pouze jedna správná. Úlohy jsou rozděleny do tří kategorií a žáci za správnou odpověď mohou získat postupně tři, čtyři nebo pět bodů, naopak za nesprávnou odpověď jeden bod ztrácejí. Dalším specifickým rysem Matematického klokana jsou jeho kategorie. Celkem jich je šest a jsou vytvořeny podle ročníků, do kterých žáci chodí. Každé kategorii odpovídají vždy dva po době jdoucí ročníky s tím, že první kategorie odpovídá 2. a 3. třídě ZŠ.

Poslední a také nejmladší matematickou soutěží je Pythagoriáda. Každý žák z šestých až devátých tříd je postaven před řešení patnácti úloh, které mají za cíl otestovat jeho prostorovou představivost spolu s logickým uvažováním. Hranice úspěchu je stanovena získáním minimálního počtu bodů, tj. deset. Úlohy jsou rozděleny do třech kategorií podle obtížnosti. Velkou změnou oproti jiným soutěžím je to, že úlohy zde netvoří akademičtí pracovníci univerzit, ale jsou tvořeny kolektivem učitelů ZŠ, středních škol a víceletých gymnázií.

Kromě matematických soutěží se žáci s nestandardními úlohami mohou v menší míře setkat také v některých učebnicích, nebo třeba u přijímacích testů.

3. Poruchy autistického spektra

3.1 Historický přehled

Přestože pojem autismus jako takový poprvé použil švýcarský psychiatr Eugen Bleuer v roce 1911 pro popis jednoho ze syndromů u schizofrenních pacientů, lidé s tímto postižením tu žili mnohem dříve. Jako jeden z příkladů lze uvést chlapce Viktora z Aveyronu. Jde o divokého chlapce, který byl již od útlého věku vychováván vlky, a to do doby, než jej nalezl francouzský lékař Jean Marc Gaspard Itard. Ten se poté jeho výchovy ujal a jeho příběh v roce 1801 také literárně zpracoval. Jako další lze zmínit dívky Amalu a Kambalu. Tyto děti byly dříve pro své chování, které se vymykalo běžným zvyklostem, opovrhovány a v některých případech až zatracovány. V knize *Poruchy autistického spektra* Kateřina Thorová shrnuje fenomén těchto dětí: „Děti, které by dnes s největší pravděpodobností byly považovány za autistické, byly v Hippokratově době označovány za svaté děti, ve středověku naopak za děti posedlé ďáblem či uhranuté.“[17]

Za průkopníka v oblasti PAS je považován americký psycholog Leo Kanner a jeho dílo *Autistické poruchy afektivního kontaktu* z roku 1943. V této práci se Kanner zabýval popisem jedenácti dětských pacientů, kteří vykazovali podobně abnormální chování, které neodpovídalo žádné z do té doby známých nemocí. Samotné zkoumané děti lze dle Hrdličky a Komárka popsat takto: *„(...) 11 pacientů, kteří byli charakterizováni deficitem schopnosti vytvářet vztahy s lidmi, narušenou řečí abnormální odpovědí na některé běžné podněty z okolí a obsedantní touhou po neměnnosti (...).“*[18] Pro poruchu charakterizovanou těmito projevy se Kanner rozhodl užit termín časný dětský autismus. Tento pojem si vybral především kvůli řeckému slovu „autos“, které by se dalo přeložit jako „sám, uzavřený do sebe, odtržený od světa“. Z dnešního pohledu víme, že výběr tohoto označení nebyl úplně šťastný a na několik desítek let dopředu určil nesprávné zaměření výzkumu.

Prvním důvodem, proč bychom použití slova autismus Kannerem mohli považovat za chybné, bylo spojení s dříve užitým výrazem Bleuera, který jej užil k popisu syndromu schizofrenie. I když Kanner nezamýšlel spojovat jeho termín s Bleuerovým, i tak

[17] THOROVÁ, Kateřina. *Poruchy autistického spektra*. Rozšířené a přepracované vydání. Praha: Portál, 2016, 32, ISBN 978-80-262-0768-9.
[18] HRDLIČKA, Michal a Vladimír KOMÁREK, ed. *Dětský autismus: přehled současných poznatků*. 2., dopl. vyd. Praha: Portál, 2014, 11, ISBN 978-80-262-0686-6.

spojení vzniklo a pojem časný dětský autismus byl na dlouhou dobu spojen se schizofrenií. Druhý důvod je pak Kannerova zmínka o emocionální nepřístupnosti a odtažitosti rodičů dětí s autismem.

Nezávisle na Kannerovi o rok později rakouský doktor Hans Asperger publikoval výzkum týkající se čtyř dětí s podobným typem chování jako dětí v Kannerově výzkumu. Asperger u nich vypozoroval specifické znaky chování: „(…) potíže v sociálním chování, zvláštnosti v komunikaci při bohatě rozvinuté řeči, vysokou míru intelektu, motorickou neobratnost a ulpívavé, omezené zájmy."[19] Na svou dobu velmi prozíravě odhalil, že příčina autismu stojí také na genetickém základě. Z důvodu většího dosahu Kannerovy teorie se však většina z autorů tehdejší doby přiklonila k názoru, že autismus musí mít etiologii na psychogenní bázi. Z tohoto názorového proudu také vznikl chybný názor, že za autismus může emocionálně a citově chladná a odtažitá výchova. Po celou dekádu tak rodiče dětí s autismem museli žít v tom, že za jejich postižení mohou z velké části oni a jejich výchova.

Tyto názory se pozvolna začaly měnit až v 70. letech 20. století v souvislosti se vznikem spousty výzkumných prací, které se vymezovaly vůči některých závěrům plynoucích z práce Kannera a jeho následovníků. Jednalo se především o spojení autismu se schizofrenií a nesprávného určení jeho etiologie. V osmdesátých letech už byl názor o etiologii na genetickém základě všeobecně přijatý. Objevovala se spousta publikací a teorií, které se na pojem autismus snažily dívat z pohledu biologického, lékařského či genetického. Jako hlavní představitele tohoto směru lze považovat psychiatry Edwarda Ornitze a Edwarda Ritva, kteří jako hlavní problém u dětí s autismem viděli potíže v oblasti percepce. Thorová tento problém v oblasti percepce popisuje následovně „signály přicházející zvenčí jsou podle jejich teorie zpracovány „hluchým způsobem", takže dítě si z nich nemůže utvořit žádnou smysluplnou informaci."[20] Všechny tyto názory vygradovaly v devadesátých letech, kdy britský gastroenterolog Andrew Wakefield na základě svého výzkumu vznesl hypotézu, že existuje spojitost mezi poruchami autistického spektra a potížemi trávicího traktu. Svou teorii založil na tom, že zánět střeva měl být způsoben očkováním. Jeho teorie nikdy nebyla potvrzena, ale i přesto mělo zveřejnění této hypotézy za následek obrovskou protiočkovací kampaň. Samotnému Wakefieldovi byla odebrána

---

[19] THOROVÁ, Kateřina. *Poruchy autistického spektra*. Rozšířené a přepracované vydání. Praha: Portál, 2016, 35 ISBN 978-80-262-0768-9.

[20] THOROVÁ, Kateřina. *Poruchy autistického spektra*. Rozšířené a přepracované vydání. Praha: Portál, 2016, 44 ISBN 978-80-262-0768-9

lékařská licence a roku 2010 byla nakonec stažena i jeho práce. V současné době je autismus považován za „polygenetickou vývojovou poruchu, která postihuje vývoj centrální nervové soustavy, což má dopad na kognitivní, neurologické a interaktivní fungování člověka.“[21]

3.2 Etiologie poruchy autistického spektra

Přestože bylo v předchozí kapitole uvedeno, jaké názory o autismu v minulosti převládaly, je stále poměrně složité představit si, jak se člověk s poruchou autistického spektra cítí, a jak vnímá celý svět. Pro porozumění je důležité podrobněji vymezit poruchy autistického spektra a také rozebrat některé z možných příčin jejího vzniku.

Jako poruchy autistického spektra označujeme soubor poruch nervového systému. Dříve byly poruchy klasifikovány odděleně s vlastními typickými znaky, ale dnes spadají pod jednotný název pervazivní vývojové poruchy. Tyto poruchy detailně popisuje Mezinárodní klasifikace nemocí: „(…) kvalitativním porušením reciproční sociální interakce na úrovni komunikace a omezeným stereotypním a opakujícím se souborem zájmů a činností.“[22] Thorová také uvádí, že „pervazivní vývojové poruchy patří k nejzávažnějším poruchám dětského mentálního vývoje. Slovo všepronikající značí vývoj dítěte narušen do hloubky a v mnoha směrech.“[23]

Z výše uvedených definic tedy vyplývá, proč jsou PAS považovány za jedno z nejvíce závažných mentálních postižení u dětí. Děti s PAS mají narušené vnímání a prožívání. Z toho důvodu se nám může zdát že se člověk s tímto postižením vykazuje přinejmenším zvláštní chování. Miroslava Jelínková ve své publikaci *Vzdělání a výchova dětí s autismem* také uvádí: „neexistuje žádný typický jedinec s autismem. Každé dítě, osoba s tímto typem postižení je svým způsobem jedinečná a mezi lidmi s PAS převažují spíše rozdíly než podobnosti. Lidé s PAS se liší osobností, mírou a charakterem postižení, intelektuální úrovní a přidruženými poruchami.“[24]

[21] THOROVÁ, Kateřina. *Poruchy autistického spektra*. Rozšířené a přepracované vydání. Praha: Portál, 2016, 46,. ISBN 978-80-262-0768-9.
[22] *Mezinárodní statistická klasifikace nemocí a přidružených zdravotních problémů*. 10. Praha: Ústav zdravotnických informací a statistiky ČR, 2019, 249, ISBN 978-80-7472-168-7
[23]THOROVÁ, Kateřina. *Poruchy autistického spektra*. Rozšířené a přepracované vydání. Praha: Portál, 2016, 59 ISBN 978-80-262-0768-9.
[24] JELÍNKOVÁ, M. 2001. Vzdělávání a výchova dětí s autismem. 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova. ISBN 80-7290-042-0.

3.3 Triáda autistických poruch

V momentě, kdy je dětský mozek mentálně poškozen, dochází k narušení běžné funkce v oblasti komunikace, sociální interakce a představivosti. Zastřešující termín triáda postižení byl zaveden v 70. letech 20. století britskou psychiatričkou Lornou Wingovou. Tato triáda postižení se do určité míry vyskytuje u každého dítěte, které má PAS, ať už je jeho stupeň postižení jakýkoliv. Také ohledně této triády existují rozličné názory. Hlavní představitelkou tohoto směru je Irena Opekarová. Ta zastává názor, že místo tří oblastí existují pouze dvě, a to narušení v oblasti komunikace a myšlení a imaginace. Třetí oblast, kterou uvádí Wingová, tedy narušení v oblasti sociální integrace, považuje pouze za důsledek obou výše uvedených oblastí.

3.3.2 Problémy v oblasti sociální interakce

První symptom triády se projevuje zejména v oblasti sociálního chování. Děti s PAS vykazují extrémní protikladné chování. Toto chování lze popsat pomocí dvou distinktivních pólů: *„Pól osamělý, kdy se dítě při každé snaze o sociální kontakt odvrátí, protestuje, stáhne se do koutka nebo zaleze pod stůl, zakrývá si oči nebo uši, hučí a třepe rukama před tváří nebo se věnuje manipulaci s nějakým předmětem. Protikladem je pól extrémní, nepřiměřené sociální aktivity, kdy se dítě s autismem snaží navázat sociální kontakt všude a s každým, nectí vůbec sociální normu, dotýká se lidí, upřeně jim hledí do tváře a hodiny jim dokáže vyprávět o věcech, které je nezajímají nebo obtěžují.“*[25] Lze tedy říci, že pro jedince s PAS je sociální kontakt klíčový. Bohužel však nemají prostředky a vybavení k tomu, aby jej započali. Jedním z důvodů může být to, že tito lidé mají problémy odlišit, co je vhodné a co ne vůči jejich okolí. Nedokáží posoudit, co se v dané situaci sluší a co naopak nikoli. Kvůli tomu tak mohou být lidé s PAS snadnými oběťmi různých podvodů. Další oblastí spojenou se sociální interakcí, se kterou mají lidé s PAS problémy, je rozpoznání emocí a jejich následná reakce. Zároveň však nemůžeme tvrdit, že lidé s PAS nemají emoce. Právě naopak, jejich život je spjatý s velmi silnými emocemi, ovšem problém spočívá ve sdílení niterních pocitů s jinými lidmi.

[25] THOROVÁ, Kateřina. *Poruchy autistického spektra*. Rozšířené a přepracované vydání. Praha: Portál, 2016, 65, ISBN 978-80-262-0768-9.

3.3.2 Problémy v oblasti komunikace

Pod druhou část triády spadají problémy v oblasti komunikace, mezi které řadíme jak řeč, tak i celkovou kompetenci komunikace. Ta může být realizována skrze neverbální prostředky typu symbolů, znaků, nebo činů. U jedinců s PSA se tato porucha projevuje zejména v receptivní, expresivní nebo verbální oblasti. Komunikace autistických osob bude narušená vždy, otázkou pouze je, do jaké míry je tato komunikace narušená a jaké projevy ji doprovází. Tyto problémy navíc lze těžko nahradit jinými suplujícími metodami a způsoby. Typické jsou rovněž silné habituální návyky vykazující velkou míru opakovatelnosti, díky čemuž jedinci s PAS nejsou schopní spontánní komunikace**.**

3.3.3 Problémy v oblasti imaginace a představivosti

Problémy v oblasti imaginace ovlivňuje velké množství aspektů v životě osoby s PAS: „způsobuje, že se u dítěte nerozvíjí hra; dítě upřednostňuje činnosti a aktivity, které obvykle preferují podstatně mladší děti; vyhledává předvídatelnost, a upíná se tak na jednoduché stereotypní činnosti.“[26] Typickým znakem je také stereotypnost koníčků a zájmových aktivit. Zájmy jsou totožné jako u zdravých jedinců, ale u lidí s PAS se objevuje mnohem větší míra zaujetí. Zmíněné zaujetí a nadšení ale nemusí mít vůbec nic společného se zájmy vrstevníků nebo společenskými zájmy. Náš svět je pro lidi s autismem až příliš složitý a toto stereotypní chování je pro ně jeden ze způsobů, jak všechny tyto, pro ně neznámé věci zvládat. V případě omezení činností, které jedincům s PAS způsobují radost a naplňují je, může docházet k prohlubování úzkostí a depresí.

3.4 Specifika ve vzdělávání u dětí s poruchami autistického spektra

Stejně jako u všech ostatních dětí, výchova a vzdělávání začíná již v rodině. Matka, která si dítě z porodnice přiveze, si zprvu abnormalit ani nemusí všimnout. Období, ve kterém je možné pozorovat největší množství abnormalit, je batolecí období. Dítě v tomto období začíná mít čím dál tím větší problémy v oblasti jak verbální, tak i neverbální komunikace.

Co se týče školního prostředí, největší problémy u lidí s PAS vyvstávají v oblasti adaptability a sociálních vazeb. M. Vosmik a L. Bělohlávková tvrdí, že: „Obecná schopnost přizpůsobovat se změnám je u studentů s AS vždy narušena (i když v různé

---

[26] PASTIERIKOVÁ, Lucia. *Poruchy autistického spektra* [online]. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2013, 23, [cit. 2023-03-02]. ISBN 978-80-244-3732-3. Dostupné z: https://uss.upol.cz/wp-content/uploads/2015/01/Poruchy-autistickeho-spektra_Pastierikova.pdf

míře). Míra narušení souvisí s výší intelektuálních schopností, s úrovní komunikace a emoční reaktivitou.“[27] Reakce na změnu je vždy individuální. Některé děti reagují více agresivněji, mohou se rozzlobit, v některých případech pak rovnou přecházejí do afektu. Někteří jsou naopak zase pasivnější, jsou také situace, kdy mohou být až v tenzi. Ve školním prostředí je velmi důležité s touto sníženou schopností adaptability počítat a tím pádem tak lze předejít problémům. To znamená minimalizovat počet změn. V případě, že jsou tyto změny nevyhnutelné, je třeba na ně žáky řádně připravit.

Dalším velkým specifikem jsou u dětí s PAS vztahy se spolužáky. Již v předchozí kapitole je zmíněno, že jedna z oblastí, která je u lidé s PAS narušená, je oblast sociálních vztahů. Ne snad, že by vztahy navazovat nechtěli, ve většině případů ale jen neví, jak na to. Lidé s PAS totiž často nechápou nepsaná pravidla chování, a proto občas mohou říct nebo udělat něco, co ostatním přijde nevhodné, nebo neslušné. Nedělají to proto, že by snad chtěli vypadat jako drzí a nevychovaní, jen neví, jak v dané situaci zareagovat. Určitým záchytným bodem mohou být pro žáky s PAS pravidla, ve škole tedy existuje možnost opřít se o školní řád. Ten jim musí být v dostatečné míře, a hlavně srozumitelně vysvětlen. Učitelé musí být připraveni na to, že žák ke školnímu řádu bude mít spousty otázek, na které bude vyžadovat odpovědi. Vše tedy musí být sděleno co nejjasněji a jednoznačně, aby se eliminovala možnost odlišené interpretace.

V knize od L. Bělohlávkové a M. Vosmika se můžeme také dočíst, že lidé s PAS při kontaktu s vrstevníky: *„bývají velmi egocentričtí a orientovaní na sebe a svůj svět. S vrstevníky se kontaktují jen do té míry, pokud tito lidé respektují jejich pravidla. Často nechtějí dělat to, co ostatní, protože je to nezajímá. Pokud se však jedná o ‚jejich‘ téma, projevují se jako ‚diktátoři‘, řídí práci a vadí jim, když ji někdo ‚narušuje‘.“*[28] Interakce nebo dokonce součinnost se stejně starými spolužáky v situacích vybočujících z běžných norem, je pro ně značně komplikovaná. Upřednostňují tak spíše kontakt s pedagogem. Ovšem přílišná míra izolace dětí s PAS od spolužáků nepřináší nic dobrého. Musíme mít totiž na paměti, že zlepšení v oblasti sociálních vztahů a komunikace je jeden z hlavních důvodů, proč žáci chodí na běžné školy. Učí se od nich zejména to, jak mezi s sebou komunikovat a jak se lidé k sobě chovají.

---

[27] VOSMIK, Miroslav a Lucie BĚLOHLÁVKOVÁ. *Žáci s poruchou autistického spektra v běžné škole: možnosti integrace na ZŠ a SŠ.* Praha: Portál, 2010. Speciální pedagogika, 25, ISBN 978-80-7367-687-2.

[28] VOSMIK, Miroslav a Lucie BĚLOHLÁVKOVÁ. *Žáci s poruchou autistického spektra v běžné škole: možnosti integrace na ZŠ a SŠ.* Praha: Portál, 2010. Speciální pedagogika, 20, ISBN 978-80-7367-687-2.

Také samotná výuka matematiky se výše uvedeným potřebám musí přizpůsobit, a proto je tato výuka specifická a vykazuje několik odlišností oproti běžnému způsobu výuky. Jak pro děti intaktní, tak i pro děti s PAS, je matematika jeden z nejdůležitějších předmětů pro reálný život. Pro žáky s autismem je však ale také jeden z těch nejsložitějších předmětů, které ve škole mají. Je pro ně totiž komplikované si pod čísly a dalšími abstraktními pojmy představit něco reálného a konkrétního. Nejlepším způsobem, jak vést vyučování matematiky, je vytvoření vizuálních podmínek pro každé učivo. Žáci si tak matematické zákonitosti lépe spojí s věcmi, které znají a v životě se s nimi již setkali. Další velký problém pro tyto žáky může být počítání slovních úloh. Ty pro ně musí být zadány srozumitelně, jednoznačně a musí obsahovat reálnou situaci. Zadání by také mělo být stručné. Většina dětí s PAS má přidružené narušení komunikačních schopností a čím je zadání delší, tím mají žáci větší problém ho vůbec pochopit, natož odpovědět na uvedenou otázku.

4 Praktická část

4.1 Úvod

Praktická část této bakalářské práce je založená na ukázce konkrétních nestandardních úloh. U každé z nich jsou uvedeny všechny způsoby řešení, jaké by mohli žáci použít a následně také změny, které by mohly být provedeny, aby úlohy byly vhodné i pro žáky s PAS. Výběr úloh je v souladu s výše uvedenou klasifikací. Na konci této kapitoly je uvedeno řešení od žáků s PAS a žáka intaktního.

4.2 Úloha 1 – Úloha s nestandardním zadáním – přeurčená

Ve třídě VII.B uvádí jako svůj oblíbený předmět každý třetí žák matematiku, každý čtvrtý žák český jazyk a zbytek žáků uvedlo, že mají oblíbené oba předměty. Svůj oblíbený předmět uvedlo všech 60 žáků. Kolik žáků studuje ve třídě VII.B?

Přeurčené úlohy jsou typ úloh, se kterými se žáci ve škole často nesetkávají. Důvodem je zejména jejich jednoduchost a také intuitivnost výpočtu. Na úlohy přeurčené již ze své definice nemusíme aplikovat žádný výpočet, jelikož jejich odpověď se zpravidla skrývá již v zadání. K výsledku tak lze nejrychleji dospět pomocí logického úsudku. Můžeme však použít také aritmetické či grafické řešení.

Logický úsudek

Úlohy přeurčené se nejčastěji řeší logickým úsudkem. V případě, že někdo tuto odpověď nespatří přímo v zadání, je možné udělat si jednoduchý zápis, ve kterém odpověď již určitě najde. Zápis by mohl vypadat následujícím způsobem:

Žáků celkem..………………………60

Oblíbená matematika …..…………. $\frac{1}{3}$ z 60

Oblíbený český jazyk……………… $\frac{1}{4}$ z 60

Oblíbené oba dva………………......60-($\frac{1}{3}$ z 60 + $\frac{1}{4}$ z 60)

Žáků dohromady…………………..?

Z tohoto zápisu lze vydedukovat, že výsledek je napsán již v prvním řádku a žádný výpočet tak není nutný. Posledním krokem je tedy zapsaní výsledku a příklad je vyřešený.

Aritmetické řešení

Uvedenou úlohu lze také řešit aritmeticky a jako nejpřijatelnější řešení se nabízí vypočítat, kolik žáků má jako oblíbený předmět matematiku, kolik český jazyk a kolik jich má oblíbené oba dva předměty. Jejich součet je tedy celkový počet žáků. Stejně jako v předchozím typu řešení je třeba vycházet ze zápisu. Ten bude vypadat obdobně:

Žáků celkem............................ 60

Oblíbená matematika …................ $\frac{1}{3}$ z 60

Oblíbený předmět český jazyk……..$\frac{1}{4}$ z 60

Oblíbené oba dva……. …............. 60-($\frac{1}{3}$ z 60 + $\frac{1}{4}$ z 60)

Žáků dohromady……………..…… ?

Nejprve je potřeba spočítat, kolik žáků má jako oblíbený předmět matematiku:

$\frac{1}{3}$ z 60 = 20 žáků

Stejně lze vypočítat také počet žáků s oblíbeným předmětem český jazyk.

$\frac{1}{4}$ z 60 = 15 žáků

Nyní již zbývá spočítat jen počet žáků, kteří jako oblíbený předmět uvedli matematiku i český jazyk dohromady. Musí to být doplněk k počtu žáků, kteří mají oblíbený předmět matematiku a kteří mají oblíbený předmět český jazyk.

60-(20+15)=25

Po sečtení všech výsledků uvedených výše, je tedy zřejmé, že celkem je ve třídě VII.B 60 žáků.

Grafické řešení

Řešit tuto úlohu graficky není úplně běžné. Pokud by tak ale někdo chtěl učinit, musel by nakreslit všechny žáky, u každého třetího zaznamenat, že má oblíbený předmět matematiku, u každého čtvrtého, že oblíbeným předmětem je český jazyk, a nakonec u všech ostatních zaznamenat, že jejich oblíbené předměty jsou oba dva zároveň. Z toho lze odvodit, kolik žáků považuje konkrétní předmět za oblíbený. Jejich součet dokáže, že celkový počet žáků bude 60. Tento způsob řešení je však pro tuto úlohu zcela nevhodný.

Změny pro žáky s PAS

Tato úloha je pro osoby s PAS asi nejlépe zadána. Co se týče formální stránky zadání, neměl by s ním být problém. Všechny věty jsou přiměřeně dlouhé a úloha postrádá jakékoli abstraktní informace. Jediný problém, který by snad mohl nastat, je spojený s formulací každý třetí a každý čtvrtý. S uvedenou formulací se žáci ve školní matematice moc často nesetkávají. Mnohem častější je formulace obsahující zlomky, tedy jedna třetina a jedna čtvrtina. S tou se více setkávají ve škole a jsou na ni zvyklí. Jednou z možností, jak tento problém vyřešit, by mohlo být přeformulování slovního tvaru každý třetí a každý čtvrtý a nahradit jej uvedenými zlomky: jedna třetina a jedna čtvrtina. Druhou možností by mohlo být grafické znázornění uvedených počtů žáků podle zadání. Znázornění by tak pomohlo studentům uvědomit si podstatu úlohy. Mohlo by je to však navést na řešení této úlohy graficky, což je, jak už bylo zmíněno výše, velmi nevýhodné.

4.3 Úloha 2 – Úloha s nestandardním zadáním – s antisignálem

Tři kamarádi Karel, Honza a Milan zametali chodník dlouhý 1,6 km. Kolik metrů zametl Honza, když víme, že dohromady s Milanem zametli třikrát větší část než Karel a zároveň, že Honza zametl o 400 m více než Milan?

S tímto typem úloh se mohou žáci setkat v klasické výuce matematiky, ale mnohem častěji se takové úlohy vyskytují v přijímacích testech od společnosti CERMAT nebo v různých matematických soutěžích.

Nejjistější a také nejintuitivnější způsob řešení je grafický. Nejlépe a nejpřehledněji totiž vyjadřuje všechny vztahy, které jsou uvedeny v zadání. Dále lze úlohu řešit také aritmeticky či pomocí logického úsudku.

Řešení logickým úsudkem

Tento způsob řešení si většinou vyberou jen ti, kteří si jsou v matematice opravdu jistí a dokáží počítat abstraktně. Řešení logickým způsobem je založené, podobně jako zbylé dvě řešení, na představě částí, které každý z kamarádů zametl. V každém ze způsobů však budou tyto části vypadat odlišně. V tomto případě bude důležité si uvědomit, že v případě, kdy Milan s Honzou dohromady zametli třikrát více než Karel, Karel vlastně zametl jednu čtvrtinu a Milan s Honzou zbytek, tedy tři čtvrtiny.

Jednoduchým výpočtem zjistíme, kolik zametl Milan s Honzou a kolik Karel.

$\frac{1}{4}$ z 1600 = 400 m

$\frac{3}{4}$ z 1600 = 1200 m

Je dané, že Honza zametl o 400 m více. Dalším krokem je tedy rozdělit 1200 m na dvě čísla, které nám v součtu dají 1200 a jejich rozdíl bude 400.

1200= 800+400 m

Jestliže má Honza zamést o 400 m více, musí mu patřit větší z obou čísel, tedy 800 m a na Milana tak zůstane 400 m. Je tedy jasné, že odpověď na otázku bude, že Honza zametl 800 m dlouhou část.

Aritmetické řešení

Aritmetické řešení v tomto případě bude založené na výpočtu jednotlivých částí, které každý z kamarádů zametl. Na základě této úvahy pak musí řešitel užít aritmetické operace, které jej dovedou k výsledku. Stejně, jako v předchozích úlohách, tak i zde je třeba začít zápisem. Ten by v tomto případě mohl vypadat následovně:

Chodník celkem …………....1,6 [km] = 1600 [m]

Karel ………………………x [m]

Honza + Milan…………….. 3x [m]

Honza ………………………y [m]

Milan ……………………....(y-400) [m]

Již při tvorbě zápisu pracujeme s úvahou o částech, které každý zametl. Aby žáci nemuseli počítat s desetinnými čísly, je vhodné si celkovou délku chodníku převést z kilometrů na metry. Tento převod lze také realizovat až na konci celého příkladu, ale při počítání s desetinným číslem by žáci mohli udělat mnohem více chyb. Vhodnější je tedy převést jednotky už na začátku. Ze zápisu žákům vzniknou dvě lineární rovnice, které postupně vypočítají. Nejprve musí pomocí první rovnice vypočítat část, kterou zametl Honza s Milanem dohromady, aby poté bylo možné pomocí druhé rovnice dopočítat, kolik zametl Honza. Na výpočet společné části Milana a Honzy se použije rovnice ve tvaru:

$x+3x=1600$

$4x=1600$

$x=400$ m $\rightarrow 3x = 1200$ m

Z vyřešené rovnice vyplívá, že Karel zametl 400 m, zatímco Milan s Honzou 1200 m. Ze zbývajících informací v zápise lze odvodit druhou rovnici, která by měla mít tvar:

$$y+y-400=1200$$

$$2y-400=1200$$

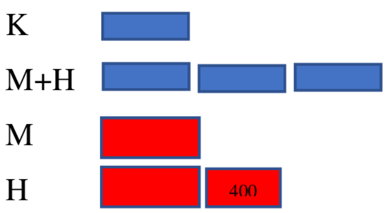
$$2y=1600$$

$$y=800\text{ m} \rightarrow y-400=800-400=400\text{ m}$$

Je tedy zřejmé, že Milan zametl 400 m, zatímco Honza zametl část dlouhou 800 m. Na základě těchto zjištění řešitel tedy může sestavit odpověď, která bude obsahovat informaci, že Honzova část měřila 800 m.

Grafické řešení

Je založené na stejných principech jako aritmetické řešení, ovšem zápis i výpočet budou vypadat odlišně. Zápis se netvoří pomocí čísel, ale pomocí obrázků. Ze zadání lze vyčíst, že Milan s Honzou zametli třikrát větší část než Karel. Pokud si tedy řešitel znázorní, že Karel zametl určitou část, je jasné, že u Milana s Honzou se tato část bude vyskytovat třikrát. Ze zadání je také zřejmé, že Honza zametl o 400 metrů více než Milan. Pokud tedy řešitel opět znázorní, že Milan zametl určitou část, Honza zametl tu stejnou část a k ní přidal ještě malou část o velikosti 400 m. Zadání by tak mohlo vypadat přibližně takto:



První dva obrázky zachycují čtyři úplně stejné části, které musí dohromady dát 1600 m. Jedna část tedy musí mít:

$$1600:4=400\text{ m}$$

U Milana s Honzou se vyskytují tři takové části, což odpovídá:

$$400*3=1200\text{ m}$$

Je tedy zřejmé, že Milan spolu s Honzou zametli přesně 1200 m. Z druhých dvou obrázků lze vyčíst, že obsahují dvě skoro stejné části, jen jedna má 400 m navíc.

$$1200-400=800\text{ m}$$

Je evidentní, že obě dvě zbylé části jsou identické, každá tedy bude mít velikost:

$$800:2=400\text{ m}$$

Ze zápisu je patrné, že Honza, jehož část potřebujeme zjistit, má k těmto 400 m ještě dalších 400 m navíc.

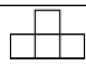
400+400=800 m

Je tedy jasné, že Honza zametl část o velikosti 800 m.

Změny pro žáky s PAS

Největším problémem pro žáky s autismem by u této úlohy mohlo být příliš abstraktní zadání. V teoretické části je zmínka o tom, že jedna z problémových oblastí lidí s autismem, je oblast imaginace. Je tedy pro ně těžké si představit části, které zametli jednotliví kamarádi. I proto je pro ně obtížnější sestavení aritmetického nebo grafického zápisu. Nápomocný by mohl být přiložený obrázek, který celé zadání znázorňuje. Žáci by si tak situaci mohli představit a celá úloha by se jim tím pádem lépe počítala. Dalším místem, kde by u žáků mohl nastat problém, je druhá věta. Mohla by pro ně být příliš dlouhá a lehce by se v ní mohli ztratit. Tato věta je nejdůležitější také proto, že obsahuje i klíčovou otázku, kterou žáci potřebují pochopit. Řešením by mohlo být rozdělení věty na dvě samostatné. První by obsahovala informaci, kdo zametl jakou část a druhá pak samotnou otázku. Věty by mohly vypadat následovně: Milan s Honzou dohromady zametli třikrát větší část než Karel a Honza zase zametl o 400 m více než Milan. Jak velkou část chodníku zametl Milan? V tomto rozložení je jasně daná otázka a veškeré informace jsou u sebe v jedné větě. Zadání je tak přehlednější a pro žáky s PAS i srozumitelnější. Je pravda, že s tímto by mohli bojovat i někteří intaktní žáci. Bylo by tak pro příště možná lepší druhou větu lépe naformulovat, aby se předcházelo nejasnostem a omylům.

4.4 Úloha 3 – Geometrické zadání

Najdi všechny pentamina, které vzniknou přiložením monomina  k tetraminu  a která jsou sítí krychle „bez víka“.

Úlohy s využitím polymin bohužel nepatří k úplně rozšířeným v běžné výuce matematiky. Přitom lze však polymina jednoduše vyrobit a děti tak tyto úlohy mohou řešit i prakticky. Dále také žáci tyto tvary znají, a to především z různých mobilních či počítačových her na principu tetris. Jako zpestření tak polymina fungují naprosto skvěle.

Už ze samotné povahy úlohy by většina volila grafické řešení. Řešení logickým úsudkem, které je také možné, by volili především žáci s opravdu velkou prostorovou představivostí.

Logický úsudek

Řešit tuto úlohu logickým úsudkem není úplně snadné, ale zato lze rychle dojít k výsledku. Podstata tohoto řešení spočívá v tom, že krychle s víkem, tzn. s horní podstavou, nám vznikne vždy, pokud budou ležet dvě kostky v řadě ve stejném směru jako je spodní podstava. V momentě, kdy si tohle řešitel uvědomí, rychle zjistí, že podstavou mohou být jen dva prostřední čtverečky. Nejprve si tedy za podstavu zvolí spodní z prostředních čtverečků. Jediná místa, kam se další čtvereček může přidat, aby nevznikly dva čtverečky v řadě, je pod levý, pravý a prostřední čtvereček. Na ostatních místech by vzniklo tzv. víko. V případě, že si za spodní podstavu řešitel zvolí horní z prostředních čtverečků, zjistí, že jediná místa, kam může dát zbývající čtvereček, jsou nalevo od levého čtverečku a napravo od pravého čtverečku. Na zbylých místech by zůstaly dva čtverečky v řadě. Teď už je potřeba pouze sečíst všechny možnosti. Součtem zjistíme, že jejich celkový počet je pět.

Grafické řešení

Již se samotné povahy úlohy si převážná část řešitelů pro řešení této úlohy zvolí nejspíše grafický způsob. Zejména proto, že už v zadání se totiž objevují grafické prvky a pro řešitele je tedy nejintuitivnější tuto úlohu řešit taktéž graficky. Jednou z možností je znázornění všech variant, které mohou vzniknout a poté si z nich vybrat ty, které odpovídají podmínce v zadání. Celkový počet krychlí, které mohou, ale nemusejí odpovídat zadání, je čtyřicet. K tomu, aby se řešitel vůbec dostal k samotným krychlím, musí vytvořit jejich sítě. Ty dostane z osmi pentamin, které vzniknou připojením monomina k tetraminu ze zadání. U těchto pentamin si pak za spodní podstavu můžeme zvolit jednu z pěti krychliček a dostaneme tak všech čtyřicet krychlí. V posledním kroku stačí jen zvýraznit ty krychle, které odpovídají zadání, tedy krychle „bez víka“ a jejich počet by byl celkový výsledek.

Změny pro žáky s PAS

Tato úloha, stejně jako většina úloh zaměřených na konstrukci geometrických útvarů, dělá žákům s PAS největší problémy. Je totiž ze všech uvedených úloh nejabstraktnější a u tohoto typu úloh žáci musejí představivost uplatňovat nejvíce. Problematický je již samotný typ úlohy. Co se týče této úlohy, nejsložitější pro žáky s PAS, ale možná i pro žáky intaktní, může být konec celého zadání. Je v něm zmínka o krychli „bez víka“. To není úplně standardní označení a žákům by mohlo dělat problémy. Bylo by tak vhodné žákům tento pojem vysvětlit a pro žáky s PAS přidat zobrazení krychle „bez víka“ k zadání. Žáci by tak měli z čeho vycházet a bylo by pro ně snadnější tuto úlohu vyřešit. K výše zmíněnému obrázku by se mohl přidat i obrázek její sítě. Žáci by tak měli představu jak o samotné krychli, tak o vzhledu pentaminia, které je zmíněno v zadání. Jak je uvedeno výše, u řešitelů se předpokládá znalost pojmů pentaminum, monominum a tetraminum, případně jim jsou před samotným řešením vysvětleny.

4.5 Úloha 4 – Číselné a logické řady

Mějme zadáno $-4<c<b<a<4$; a, b, c $\in \mathbb{Z}$. Platí $c*(b+b+b+b)*a<c*(a+a+a+a)*b$?

a) Ano, vždy

b) Ne, výrazy se vždy rovnají

c) Ne, výraz na levé straně je větší

d) Obecně nelze rozhodnout

Také tento typ úlohy není pro žáky snadný. V případě výskytu rovnice či nerovnice v zadání mají tendence ji vypočítat. Je pro ně těžko pochopitelné, že smyslem této úlohy není nerovnici vypočítat, nýbrž jen ověřit, zda platí pro všechna a, b a c, která odpovídají podmínkám v zadání. Číselné řady jsou častým typem úloh v matematických olympiádách či jiných soutěžích.

Převážná většina řešitelů zvolí pro tuto úlohu dosazovací metodu. Další možné způsoby řešení, tedy logický úsudek a aritmetický způsob, pak zvolí spíše žáci, kteří mají matematické schopnosti na vyšší úrovni.

Logický úsudek

Logické řešení u tohoto typu úloh si vybírají spíše žáci, kteří jsou v matematice nadaní. Zároveň je tento způsob nejrychlejší. Podstatou je, aby si žák uvědomil, že nezáleží na tom, jestli a, b a c budou záporná nebo kladná čísla, protože výsledné znaménko pravé či levé strany nerovnice bude vždy stejné. Žák si tedy může vzít některou z variant a do nerovnice ji dosadit. Jestliže si žák vybere: a=3, b=2 a c=1, výsledkem je:

1*(2+2+2+2)*3<1*(3+3+3+3)*2

1*8*3<1*12*2

24<24

Na levé i pravé straně vyšlo stejné číslo, je tedy jasné, že správná odpověď musí být b).

Aritmetické řešení

Aritmetické řešení bude v tomto příkladě spočívat v práci s nerovnicí. Jedná se o úpravu celé nerovnice, do které lze poté dosazovat konkrétní čísla. Ze zadání je patrné, že nerovnice má tvar c*(b+b+b+b)*a<c*(a+a+a+a)*b. Jednotlivé úpravy budou vypadat následovně:

c*(b+b+b+b)*a<c*(a+a+a+a)*b

c*4*b*a<c*4*a*b

c*4*a*b<c*4*a*b

c*4*a*b-c*4*a*b<0

0<0

Lze si všimnout, že po všech úpravách má nerovnice podobu 0<0. To nám značí, že ať si řešitel vybere jakákoli čísla, která odpovídají podmínce v zadání, vždy dostane stejné výrazy. Díky tomuto zjištění lze konstatovat, že správná odpověď je b).

Grafické řešení

Co se týče grafického řešení u tohoto typu úloh, nejlepší a asi jediný možný způsob je pomocí tabulky. Opět je potřeba pracovat s úvahou, že čísla, která budeme dosazovat do levé strany rovnice, budou stejná jako ta, která budeme dosazovat do pravé strany a jediný rozdíl by tak mohl vzniknout u znamének těchto čísel. Do tabulky si tak řešitel zapíše všechny možné kombinace znamének, které mohou vzniknout.

Tabulka by mohla vypadat následovně:

Znaménka	a	b	c	L(c*(b+b+b+b+*a)	P(c*(a+a+a+a)*b)
+,+,+	3	2	1	1*(2+2+2+2)*3=24	1*(3+3+3+3)*2=24
+,+.-	3	2	-1	-1*(2+2+2+2)*3=-24	-1*(3+3+3+3)*2=-24
+,-,-	3	-1	-2	-2*(-1-1-1-1)*3=24	-2*(3+3+3+3)*-1=24
-,-.-	-1	-2	-3	-3*(-2-2-2-2)*-1=-24	-3*(-1-1-1-1)*-2=-24

Z tabulky lze vyčíst, že ať už řešitel zvolí jakoukoli kombinaci, vždy vyjde levá i pravá strana stejná, a správná odpověď tedy bude b).

Změny pro žáky s PAS

I tento typ úloh, stejně jako předchozí, není pro žáky s PAS ideální. Těžko si totiž pod uvedenou nerovnicí představí konkrétní čísla. Bohužel však uvedené zadání nelze do větší míry upravovat. Žákům s PAS by tak mohlo pomoci jedině přiložení číselné osy, na které by bylo číslo 4, číslo -4 a mezi nimi čísla a, b a c. Žáci by tak alespoň vizuálně viděli, jaké čísla mohou využít na dosazení do nerovnice. Největší problém pro žáky s PAS, ale i pro některé intaktní žáky je ten, že si budou muset zvolit vhodnou metodu k řešení tohoto úkolu. V tomto konkrétním případě by se tomuto problému dalo předejít přeformulováním otázky. Před slovem *platí* by mohlo stát *dosazením ověřte*.

4.6 Úloha 5 – Kombinatorické úlohy

Jsou dána města Ondřejov, Tomášov, Janov a Jirkov. Mezi těmito městy chceme vybudovat nejmenší počet silnic tak, abychom se z každého města dostali do všech ostatních měst. Kolik možností pro stavbu máme?

S kombinatorickými úlohami se žáci velmi často setkávají jak při běžných hodinách matematiky, tak během matematických soutěží. Z nich asi nejvíce u Matematického klokana. Žáci jsou tak na řešení těchto úloh zvyklí a nečiní jim problém.

Úlohy kombinatorického charakteru jsou zvláštní tím, že žáci se s nimi mohou setkat jak na 2. stupni ZŠ, tak na středních školách. Jejich způsoby řešení se však budou zásadně lišit. Žáci na středních školách jsou již obeznámeni s kombinatorickými pravidly a vzorci a při řešení této úloh tak většina požije některý z nich. Naproti tomu žáci 2. stupně ZŠ by úlohu v naprosté většině řešili graficky nebo logickým úsudkem.

Řešení logickým úsudkem

Prvním ze způsobů, jakým lze získat správný výsledek, je řešení logickým úsudkem. Klíčová je otázka, kolik cest z jednotlivých měst může existovat. V případě, že z prvního města povedou tři cesty, na druhé město zbývají už jen cesty dvě (s prvním je spojené cestou použitou v minulém kroku) a na třetí město v pořadí už jen jedna cesta. Na poslední, čtvrté město, už nezbývá žádná cesta, jelikož s každým dalším městem je již spojeno. Celkově tedy existuje:

3+2+1=6 cest

Aritmetické řešení

U této úlohy by aritmetické řešení mohlo být realizováno skrze kombinatorické pravidlo součtu. Samozřejmě předpokládáme, že žáci, kteří tento způsob zvolí, mají potřebné znalosti. Stěžejní je, uvědomit si, že jsou-li dána čtyři města, tak z každého povedou maximálně tři cesty. Řešitel může počítat z každého města tři cesty, některé by v tom případě ale byly započítány vícekrát. Musí tedy použít vzorec pro kombinatorické pravidlo součtu, který vypadá následovně:

$|A \cup N| = |A| + |N| - |A \cap N|$

V tomto konkrétním příkladu by kombinatorické pravidlo součtu vypadalo následovně:

O + T + Ja + Ji – OT – OJa – OJi – TJa – TJI – JaJi = 3+3+3+3-1-1-1-1-1-1 = 6.

Z výsledku je tedy patrné, že celkově se musí postavit 6 cest.

Grafické řešení

Ve většině případů by žáci ale volili místo aritmetického řešení, řešení grafické. To je založené na překreslení zadání do grafické podoby. V prvním kroku by si tedy přenesli na papír všechna čtyři města, která jsou dána v zadání. Dalším krokem bude zakreslit si mezi nimi všechny cesty, tak aby každé město bylo spojené se zbývajícími městy, a to pouze jednou. Pak už stačí jen všechny cesty spočítat a zapsat na základě tohoto zjištění odpověď. Jedním z úskalí tohoto typu řešení je vytvoření ne úplně přehledného obrázku, ve kterém nakonec řešitel nakreslí málo, nebo naopak více cest. Nakonec z něj tak může vyčíst nesprávný výsledek. Při tomto řešení si žáci musejí dávat pozor na nakreslení přehledného obrazce, ze kterého vyčtou správný výsledek.

4.7 Úloha 6 – Kombinatorické úlohy

Čtyři kamarádky, Jana, Pavla, Iva a Petra bydlí v jedné ulici. Domky, ve kterých kamarádky bydlí, mají žlutou, bílou, červenou a modrou barvu a v každém z domu bydlí vždy jen jedna z děvčat. Víme, že Jana bydlí mezi červeným a modrým domkem a barva jejího domu není žlutá. Petra bydlí vedle Jany a Pavly. Zároveň víme, že dům Ivy leží na jednom z konců ulice a jeho barva není ani žlutá ani červená a dům Pavly leží na druhém konci ulice a leží vedle červeného domku. Jaké barvy mají domy, ve kterých jednotlivá děvčata bydlí?

Toto je jedna z nejtypičtějších nestandardních úloh pro žáky 2. stupně ZŠ. Je to úloha kombinatorického typu, ke které ovšem řešitel nemusí znát žádné kombinatorické vzorce, a i tak může úlohu jednoduše vyřešit. Žáci jsou k řešení této úlohy dobře motivovaní. Zejména tím, že se jedná o reálnou situaci a mohou si ji tak jednodušeji představit. Jako možné způsoby řešení se nabízejí logický úsudek a grafické řešení. Aritmeticky je tato úloha prakticky neřešitelná.

Řešení logickým úsudkem

Řešení logickým úsudkem je v tomto případě založené na práci se zadáním a výčtem informací. Obsahuje několik informací o každé z kamarádek: Na jejich základě můžeme rozhodnout a barvě každého domu. O první z kamarádek, Janě, jsou dány informace, že bydlí mezi červeným a modrým domkem a že její dům není žlutý. Je tedy jasné, že jedinou barvou, kterou Janin domek může mít, je barva bílá. Pro domy ostatních tří kamarádek tak zbývají jen tři barvy: žlutá, modrá a červená. Další, o kom lze rozhodnout bez většího rozmýšlení, je Iva. Víme, že barva jejího domu není žlutá ani červená. Je tedy jasné, že ze zbývajících tří barev musí Ivin dům mít barvu modrou. Na poslední dva domy kamarádek tak zbývají žlutá a červená barva. Od tohoto místa může řešitel pokračovat dál pomocí dvou odlišných myšlenek a je na něm, kterou si vybere. První myšlenka je založená na tom, že pokud je dáno, že Pavlin dům leží vedle červeného, je jasné, že musí mít jinou barvu a jediná, která jí zbývá je tak žlutá. Na Petřin dům zbývá barva červená. Druhá cesta je založena na myšlence, že pokud Petra z jedné strany sousedila s Janou, její dům musel mít červenou nebo modrou barvu. Modrou barvu už má dům Ivy, je tedy jasné, že Petra bydlí v červeném domě. Na Pavlin dům zbývá žlutá barva.

Grafické řešení

U této úlohy existují dva způsoby přepisu zadání do grafické podoby a oba budou níže podrobněji popsány. V prvním způsobu je pro zápis zadání do grafického tvaru zvolena forma tabulky, v druhém je využit nákres čtyř domů, ke kterým se postupně podle zadání přiřazují jednotlivé barvy. U prvního způsobu je nejlepší začít vytvořením samotné tabulky. Ta by měla mít pět řádků i sloupců s tím, že v prvním políčku každého řádku budou jednotlivá jména kamarádek, a naopak v prvním políčku každého sloupce budou zase potenciální bary jejich domů. Samotná tabulka tak bude mít následující podobu:

Jméno	Červené	Modrá	Žlutá	Bílá
Jana				
Petra				
Iva				
Pavla				

Podle zadání si postupně některá políčka v tabulce řešitel může zaškrtávat. Například hned u Jany si může napsat křížek u barev: červená, modrá a žlutá, jelikož ze zadání ví, že Jana musí bydlet vedle červeného a modrého domu a žlutou barvu její dům mít nemůže. Jediná další možná barva pro Janin dům je tedy bílá. Žádné dva domy nesmějí mít stejnou barvu, je tedy jasné, že žádný další bílý dům už v ulici není. Bílou barvu si tak řešitel může zaškrtat i u všech ostatních domů. Další věta uvádí, že Petřinými sousedkami jsou Jana a Pavla. Pokud má Petra za sousedku Janu, z předchozí věty je jasné, že barva jejího domu může být jen červená nebo modrá a v žádném případě žlutá. Žlutou barvu si tak v Petřiném řádku můžeme škrtnout. Ve třetí větě je uvedeno, že Ivin dům nemá ani červenou, ani žlutou barvu. Když si tyto dvě barvy v příslušném řádku škrtneme, zjistíme, že jediná možná barva pro Ivin dům je modrá. Tuto barvu si tak můžeme zakřížkovat u všech ostatních kamarádek. U Petry tak zůstane jediná barva, a to červená a na Pavlin dům žlutá barva.

Vyplněná tabulka může vypadat následovně:

Jméno	Červené	Modrá	Žlutá	Bílá
Jana	X	X	X	A
Petra	A	X	X	X
Iva	X	X	A	X
Pavla	X	A	X	X

Další možností grafického řešení je znázornění všech čtyř kamarádek, kterým se postupně přiřazují barvy jejich domů. Postup a jednotlivé kroky jsou však úplně stejné jako v předchozím způsobu. Problémem řešení úlohy podobného typu tímto způsobem může být to, že se řešitel automaticky snaží přijít i na polohu jednotlivých domů, tzn. na sousedky všech kamarádek, i když to není vůbec nutné. Řešitel si tak nechtěně ztěžuje práci. K výsledku může dojít i touto cestou, jen je o dost složitější.

Změny pro žáky s PAS

V této úloze by největší potíže mohla činit délka zadání. Žáci s PAS ve velké míře mají problémy s udržením koncentrace a když by došli k závěru zadání, nevěděli by, co bylo na začátku a v celém zadání by se tak nejspíše ztratili. Nápomocná by mohla být změna struktury zadání. Existuje mnoho možností, jak zadání upravit. Všechny informace o kamarádkách by mohly být zapsány v bodech. Zadání by tak vypadalo následovně:

Čtyři kamarádky, Jana, Pavla, Iva a Petra bydlí v jedné ulici. Domky, ve kterých kamarádky bydlí, mají žlutou, bílou, červenou a modrou barvu a v každém z domů bydlí vždy jen jedna z děvčat.

Jana: bydlí mezi červeným a modrým domkem a barva jejího domu není žlutá

Petra: bydlí vedle Jany a Pavly

Iva: barva není ani žlutá ani červená a bydlí na konci ulice

Pavla: bydlí vedle červeného domku a na druhém konci ulice

Celé zadání by se tak rozdělilo do přehledných bodů a žáci by se v něm snáze orientovali. Jednotlivé informace lze případně také zapsat do tabulky.

4.8 Úloha 7 – Diofantovského typu

Farmář koupil na trhu krmivo pro své kozy a slepice. Krmivo se prodávalo po pytlech s tím, že jeden pytel krmiva pro kozy stojí 250 kč a jeden pytel krmiva pro slepice stojí 235 kč. Kolik pytlů krmiva pro slepice koupil farmář, pokud víme, že celkově zaplatil 3600 kč?

Učivo diofantovských rovnic se nevyskytuje v osnovách základních škol ani víceletých gymnázií, proto žáci s tímto typem úlohy do kontaktu běžně nepřijdou. Je tedy jasné, že žádné dítě by takovouto úlohu neřešilo přes diofantovské rovnice.

Aritmetické řešení

Ideální žákovské řešení by mělo začít krátkým a jednoduchým zápisem zadání. V tomto konkrétním příkladě by mohlo vypadat následovně:

1 pytel krmiva pro kozy…………………… 250 kč
1 pytel krmiva pro slepice ………………... 190 kč
Dohromady ……………………………….. 3600 kč
Pytlů krmiva pro slepice ………………….. ?

Ze zadání žáci mohou vytvořit jednoduchou rovnici ve tvaru:

250*x + 235*y = 3600.

Poté by mohli začít dosazovat za x nebo y a dospět ke správnému výsledku. Jestliže by za x dosadili například číslo 2, vyšlo by:

235*y= 3100.

Jelikož ze zadání víme, že proměnné x a y označují počet pytlů, je jasné, že x i y musí vyjít jako celá čísla. V tomto případě by y jaké celé číslo nevyšlo, a je tedy jasné, že výsledek bude jiný. Dalším postupným dosazováním by žáci přišli na to, že jediné správné řešení vyjde pro x=5 a y=10. V posledním kroku pak z výsledku, který žáci vypočítají, získají jednoduchou odpověď.

Grafické řešení

První a poslední krok zůstává u obou způsobů řešení stejný. Žáci si opět na začátku udělají jednoduchý zápis zadání a na konci pak z výsledku, který dostanou, sestaví odpověď. Lišit se budou pouze v tom, jakým způsobem pak dospějí k výsledku. Ne všichni žáci totiž zvládnou vytvořit ze zadání tu správnou rovnici, které by je dovedla k cíli. Existuje však řada jiných cest, jak se k němu dostat. Jendou z nich je například vytvoření tabulky, ze které později výsledek vyčteme. Tato tabulka by měla vypadat následovně:

Počet pytlů krmiva pro kozy	Cena krmiva pro kozy	Cena krmiva pro slepice	Počet pytlů krmiva pro slepice
1	1*250=250	3600-250=3350	3350/235=14,26
2	2*250=500	3600-500=3100	3100/235=13,19
3	3*250=750	3600-750= 2850	2850/235=12,13
4	4*250=1000	3600-1000=2600	2600/235=11,06
5	5*250=1250	3600-1250=2350	2350/235=**10**

Dalším způsobem, jak by si danou úlohu mohli žáci znázornit, je zakreslení jednotlivých pytlů s krmením. Samotný výpočet pak probíhá stejně jako v předchozích případech.

Změny pro žáky s PAS:

Pro žáky s PAS není problematické zadání, ale již samotná povaha úlohy. Jak je zmíněno v úvodu řešení, není to typ úlohy, se kterým se žáci běžně setkávají ve škole. S úlohami tohoto typu se žáci seznámí nejdříve na vysoké škole. Je pro ně složité vůbec vymyslet mechanismus, pomocí kterého by úloha šla vypočítat. Pokud by se na konci zadání objevila zmínka, že danou úlohu mají žáci řešit za pomocí rovnice, věděli by, z čeho mohou vycházet a tím pádem by došlo k vyšší úspěšnosti vyřešení úlohy. Je pravda, že tento problém nebudou mít jen žáci s PAS, ale také ostatní, intaktní žáci. I pro ně je toto učivo neznámé a mohou z tohoto typu úloh být zaskočeni.

4.9 Žákovská řešení

Tato kapitola zahrnuje popis řešení žáků, kteří se snažili vypočítat výše uvedené úlohy. Úlohy řešili celkem tři žáci, všichni navštěvují 2. stupeň ZŠ a dva z nich mají některou z PAS. Při sledování byl kladen důraz na pochopení zadání, na způsob, který si každý z chlapců zvolil, a také na samotné řešení. Všichni chlapci řešili samostatně všechny úlohy.

První žák

První z nich, jediný, který nemá žádnou z PAS, vypočítal všechny úlohy, až na poslední sedmou. S první úlohou žák neměl sebemenší problém a vypočítal ji logickým úsudkem. Zprvu si myslel, že v úloze je chyba v otázce a několikrát se ujišťoval, co má vypočítat. Poté ale smysl úlohy pochopil a odpověď našel. V druhé úloze zvolil řešení logickým úsudkem, kdy si udělal podobné zadání, jako je uvedeno u aritmetického způsobu řešení výše a úlohu poté dopočítal logicky. U třetí úlohy žák volil grafický způsob řešení. U úlohy s polyminy si žák jen potřeboval ujasnit, zda dobře chápe pojem pentaminum, jelikož jej zatím nikdy neslyšel. Úlohu spočítal graficky tím způsobem, že si vypsal všechny možné pentamina, která mohou vzniknout a z nich si vybral ty, které odpovídají zadání. Se čtvrtou úlohou žák trochu bojoval, ovšem nakonec dospěl ke správnému výsledku. Chvíli mu totiž trvalo, než přišel na způsob řešení. Poté již úlohu řešil spíše aritmeticky, kdy začal dosazovat jednotlivá čísla do nerovnice. Když mu pokaždé vyšly stejné hodnoty na obou stranách, začal kombinovat znaménka u čísel, až se nakonec rozhodl zvolit odpověď b. Pátou úlohu vyřešil žák okamžitě, a to graficky načrtnutím čtyř měst a všech možných cest. Šestou úlohu žák taktéž spočítal, i když s jejím řešením měl potíže. Místo toho, aby přišel jen na barvu jednotlivých domků, snažil se najít i jejich přesné pořadí. Úlohu nakonec vypočítal, ovšem v mnohem delším čase než ostatní dva řešitelé. Poslední úlohu pak žák bohužel spočítat nezvládl. Nejtěžší pro něj bylo přijít na samotný mechanismus výpočtu dané úlohy. Říkal, že to bylo zejména proto, že daný typ úlohy viděl poprvé. Tušil, že ji má počítat za použití rovnice, ovšem na to, jak ji sestavit, už nepřišel.

Druhý žák

Druhý z žáků, který řešil stejné úlohy, již měl PAS. S příklady si taktéž poradil obstojně. Rovněž nevypočítal poslední příklad a neporadil si ani se třetí úlohou, zaměřenou na geometrii. S prvním příkladem neměl žák žádný problém a úlohu vyřešil ihned po přečtení zadání. Druhou úlohu pak žák řešil graficky. Nakreslil si celý chodník, který si nejprve rozdělil na čtyři stejné části a poté na dvě, kdy jedna část byla o 400 m delší. Největší problém u této úlohy bylo přijít na to, jak velkou část si má žák ke každému z kamarádů nakreslit. Zadání si musel číst několikrát a bylo vidět, že z toho byl značně rozrušen. Třetí úloha byla pro žáka jednou z nejsložitějších, a to zejména pro svou imaginární povahu. Nebyl si schopný představit, jak vypadá „krychle bez víka" a jakou by tedy měla mít síť. I když jsme si ji poté ukázali, stejně úlohu nedokázal vyřešit. Následující, tedy pátá úloha nečinila žákovi sebemenší problém. Stejně jako předchozí řešitel si města nakreslil na papír a poté si vyznačil všechny možné cesty. Šestou úlohu žák řešil graficky, a to pomocí tabulky. Bylo vidět, že podobný typ úloh ve škole počítají častěji a ví tedy, jak dané úlohy řešit. Co se týče poslední úlohy, tu žák nedokázal vyřešit. Zprvu nevěděl, jak má danou úlohu začít počítat. Když dostal informaci, že k řešení má použít rovnici, zvládl ji napsat, ovšem dvě neznámé mu činily takový problém, že nebyl schopný pokračovat až k výsledku.

Třetí žák

Třetí řešitel měl rovněž jednu z PAS. Podobně jako předchozí řešitel si poradil skoro se všemi úlohami, až na dvě. Jako jediný dokázal vypočítat poslední úlohu, nepřišel však na úlohu číslo tři a šest. První úlohu, podobně jako ostatní dva řešitelé, vypočítal správně ihned ze zadání. Na druhou úlohu pak zvolil grafický způsob řešení. Jeho obrázky vypadaly jako ty, které byly vytvořeny v této práci. S úlohou tři měl žák velké problémy. Zejména proto, že nevěděl, jak fungují polymina a také mu nebyl jasný pojem krychle bez víka. I když jsme si ji ukázali, nebyl z toho moudrý. Čtvrtou úlohu, stejně jako předchozí řešitel, počítal metodou dosazování. Pátou úlohu žák vyřešil úplně stejně, jako oba řešitelé předtím, tedy graficky. S šestou úlohou měl žák obrovské problémy. Ty pramenily hlavně z nepochopení zadání. Bylo zřejmé, že na něj bylo moc dlouhé a také obsahovalo až moc textu. Když jsem mu zadání přepsal do přehlednější formy, která je ukázána výše, žák úlohu pochopil a dopočítal. Se sedmou úlohou měl, stejně jako oba zbývající řešitelé, problémy. S nápovědou však rovnici později správně napsal a příklad dopočítal.

Hodnocení

Z uvedených řešení můžeme vyvodit několik zajímavých závěrů. Prakticky u všech řešitelů se potvrdil závěr, který jsem vyvodil u poslední sedmé úlohy. Tedy že úloha pro žáky bude nejtěžší, a že nejvíce bude žákům dělat problém zjištění samotného mechanismu řešení. U prvního řešitele se nám pak taky potvrdilo tvrzení, že u první úlohy je jeden z možných problémů její zadání, které je svým způsobem atypické a žáky může zmást. U dalších dvou řešitelů jsme si pak například nepotvrdili to, že užití změny zadání u úlohy třetí, tedy seznámení řešitele s pojmem „krychle bez víka“ a její následná ukázka pomůže řešitelům k výsledku. Co jsme si ale naopak potvrdili u třetího řešitele je, že užití změny zadání u šesté úlohy pomůže řešiteli v lepší orientaci v zadání a žák tak dospěje k vyřešení celé úlohy.

5. Závěr

Tato bakalářská práce se zabývala tématem nestandardních úloh pro rozvoj matematické gramotnosti žáků 2. stupně ZŠ, zejména žáků s poruchami autistického spektra. Hlavním cílem bylo vytvoření několika nestandardních úloh i s jejich řešením a návrhem případných změn, které by mohly pomoci při zadávání těchto úloh osobám s PAS. Tento cíl byl splněn v praktické části. V té bylo představeno 7 nestandardních úloh a každá z nich byla doplněna o všechny možné způsoby řešení a návrh změn pro případ zadání úloh žákům s PAS. Poslední část obsahovala popis žákovských řešení. V nich byly potvrzeny a také vyvráceny některé teze, na kterých byla postavena praktická část.

Dílčí cíle, jimiž bylo vytvoření klasifikace nestandardních úloh a orientace v literatuře a sumarizace poznatků z oblasti nestandardních úloh v matematice, matematické gramotnosti a poruch autistického spektra, byly splněny v teoretické části. Klasifikace byla vytvořena na základě společných rysů klasifikací uvedených autorů. Orientace v literatuře a sumarizace poznatků byly splněny na detailní a srozumitelné úrovni. Díky dostatečnému počtu prozkoumaných zdrojů bylo možné vytvořit si ucelený názor na danou problematiku z několika různých směrů a díky tomu bylo snazší vypracovat teoretickou část celé práce.

Přínosem této bakalářské práce je vytvoření několika nestandardních úloh, které jsou vhodné i pro žáky s PAS. Těch bude na běžných základních školách přibývat a je tedy důležité s nimi umět pracovat a vytvořit prostor pro jejich rozvoj. Přínos práce takové spočívá v otevření a upozornění na téma spojení matematiky a výuky žáků s PAS a nastolení potencionálních témat pro další výzkum.

Anotace/Annotation

Jméno a přijmení	Štěpán Dufek
Katedra	Katedra matematiky
Vedoucí práce	doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc
Rok obhajoby	2023

Název práce	Nestandardní úlohy pro rozvoj matematické gramotnosti žáků 2. stupně základních škol, zejména žáků s poruchami autistického spektra
Název práce v angličtině	Non-standard Math Problems for Developing Mathematical Literacy of Students of Lower Secondary Schools, with the Focus on Students with Autism Spectrum Disorders
Anotace práce	Tématem této bakalářské práce je spojení oblastí nestandardních matematických úloh a vzdělávání osob s PAS. Cílem práce je vytvoření souboru nestandardních úloh i s jejich řešením a návrhy pro změny při zadání úloh osobám s PAS.
Klíčová slova	Nestandardní úlohy, matematická gramotnost, poruchy autistického spektra
Anotace práce v angličtině	This thesis links non-standard math problems with education of people with ASD. The main goal is to create a collection of non-standard math problems with their solutions. The adjustmens of the assigments of the problems for people with ADS are also suggested.
Klíčová slova v angličtině	Non-standard Problems, Mathematical Literacy, Autism Spectrum Disorders.
Přílohy vázané k práci	-
Rozsah práce	93 565 znaků
Jazyk práce	Čeština

Seznam literatury

(1) *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělání*. 1. Praha: NÚV, 2015.

(2) *Mezinárodní statistická klasifikace nemocí a přidružených zdravotních problémů*. 10. Praha: Ústav zdravotnických informací a statistiky ČR, 2019.

(3) *O šetření TIMSS*. 1. Praha: Česká školní inspekce, 2023.

(4) *PISA 2012 Matematický koncepční rámec*. 1. Praha: Česká školní inspekce, 2013.

(5) *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. 1. Praha: Ministerstvo školství a tělovýchovy, 2021.

(6) BAČVÁŘOVÁ, Martina. *O škole a vzdělání*. 1. Praha: MATFYZPRESS vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, 2007.

(7) BĚLOHLÁVKOVÁ, Miroslav. *Žáci s poruchou autistického spektra v běžné škole*. 1. Praha: Portál, 2010.

(8) BOHUMIL NOVÁK, Anna. *Slovní úlohy ve vyučování matematice na 1. stupni ZŠ*. 1. Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého v Olomouci, 1993.

(9) BOUDOVÁ, Simona. *PISA 2022*. Praha: Česká školní inspekce, 2021.

(10) HRDLIČKA, Michal a Komárek VLADIMÍR. *Dětský autismus: přehled současných poznatků*. 2. upravené vydání. Praha: Portál, 2014.

(11) JELÍNKOVÁ, Miroslava. *Vzdělávání a výchova dětí s autismem*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2008.

(12) MILAN TRCH, Eva. Non-traditional mathematical tasks as a means of developing mathematical thinking of younger children a problems with their evaluation. In: *International Symposium Elementary Maths Teaching*. Praha: Karlova univerzita, Pedagogická fakulta, 1997, s. 74-78.

(13) NOVOTNÁ, Jarmila. *Analýza řešení slovních úloh*. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2000.

(14) PASTIERIKOVÁ, Lucie. *Poruchy autistického spektra*. 1. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2013.

(15) PÓLYA, György. *Jak to řešit?*. 1. verze českého překladu. Praha: MatfyzPress, 2016.

(16) PRŮCHA, Jan, Eliška WALTEROVÁ a Jiří MAREŠ. *Pedagogický slovník*. 6.,aktualiz. a rozš. vyd. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-647-6.

(17) THOROVÁ, Kateřina. *Poruchy autistického spektra*. Rozšířené a přepracované vydání. Praha: Portál, 2016. ISBN 978-80-262-0768-9.

(18) HORKEL, Jan. *Nestandardní úlohy v matematice*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky, 2005.