



TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta mechatroniky, informatiky
a mezioborových studií ■

Navázání nedifraktujícího svazku do optického rezonátoru

Bakalářská práce

Studijní program: B3942 – Nanotechnologie
Studijní obor: 3942R002 – Nanomateriály
Autor práce: **Ondřej Denk**
Vedoucí práce: doc. RNDr. Miroslav Šulc, Ph.D.





TECHNICAL UNIVERSITY OF LIBEREC
Faculty of Mechatronics, Informatics
and Interdisciplinary Studies ■

Mode-matching of nondiffracting beam to optical resonator

Bachelor thesis

Study programme: B3942 – Nanotechnology
Study branch: 3942R002 – Nanomaterials

Author: **Ondřej Denk**
Supervisor: doc. RNDr. Miroslav Šulc, Ph.D.



ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Ondřej Denk**
Osobní číslo: **M13000150**
Studijní program: **B3942 Nanotechnologie**
Studijní obor: **Nanomateriály**
Název tématu: **Navázání nedifraktujícího svazku do optického rezonátoru**
Zadávací katedra: **Ústav nových technologií a aplikované informatiky**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :


1. Prostudujte si problematiku laserových rezonátorů a možnosti jejich stabilizace
2. Seznamte se s generací nedifraktujících optických svazků pomocí tlustých čoček s vysokým indexem lomu
3. Navrhněte a realizujte optickou soustavu pro navázání gaussovského a nedifraktujícího svazku
4. Navažte jak gaussovský, tak nedifraktující svazek a pokuste se stabilizovat rezonátor
5. Porovnejte stabilitu rezonátoru jak s gaussovským, tak nedifraktujícím optickým svazkem

Rozsah grafických prací: **dle potřeby**
Rozsah pracovní zprávy: **cca 40 stran**
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**
Seznam odborné literatury:

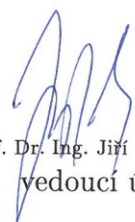
- [1] Saleh, B. E. A. - Teich, M.C.: **Základy fotoniky I,II , MATFYZPRESS, Praha, 1994-95**
[2] Malý P., **Optika, Karolinum, 2008, ISBN: 9788024613420**
[3] Hernández-Figueroa H., Zamboni-Rached M., Recami E., **Non-Diffracting Waves: An Introduction, 2013, ISBN-13: 978-3527411955**
[4] Wenjamin R., **A high finesse optical resonator for cavity QED experiments, diplomová práce Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität, Bonn, 2003**
[5] Hodgson N., Weber H., **Laser Resonators and Beam Propagation, Fundamentals, Advanced Concepts and Applications, Springer Series in Optical Sciences, 108, 2005, ISBN: 978-0-387-40078-5**
[6] D. Z. Anderson, **"Alignment of resonant optical cavities", Appl. Opt., 23, 17, 29442949, 1984.**
Další časopisecká literatura dle zadání vedoucího práce

Vedoucí bakalářské práce: **doc. RNDr. Miroslav Šulc, Ph.D.**
Katedra fyziky

Datum zadání bakalářské práce: **20. října 2015**
Termín odevzdání bakalářské práce: **16. května 2016**


prof. Ing. Václav Kopecký, CSc.
děkan




prof. Dr. Ing. Jiří Maryška, CSc.
vedoucí ústavu

V Liberci dne 20. října 2015

Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé bakalářské práce a konzultantem.

Současně čestně prohlašuji, že tištěná verze práce se shoduje s elektronickou verzí, vloženou do IS STAG.

Datum: 16.5.2016

Podpis: 

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat svému vedoucímu Doc. RNDr. Miroslavu Šulcovi, Ph.D. za vytvoření kvalitních podmínek a předání důležitých podnětů pro vypracování bakalářské práce. Dále bych chtěl poděkovat Ing. Štěpánu Kuncovi za předání zkušeností a cenných rad, které byly při tvorbě mé bakalářské práce více než přínosné. Oběma pak patří velký dík za odborné vedení při vypracovávání bakalářské práce, jakožto i za čas, který mi byl věnován.

Dále bych rád poděkoval své rodině, která mě při psaní práce plně podporovala a věřila ve mě v průběhu celého studia.

Abstrakt

Tématem této bakalářské práce je navazování nedifraktujícího svazku do optického rezonátoru. Jako nedifraktující svazek je v tomto případě uvažován besselovský-gaussovský svazek generovaný pomocí axiconu, do kterého vstupuje svazek vystupující z laseru pracujícího na základním gaussovském módu. Aby bylo vyjasněno, jak gaussovský a besselovský-gaussovský svazek interaguje s prostředím a optickými systémy, je na základě elektromagnetických vlastností námi zkoumaných vlnění vybudována teorie, která předpovídá chování těchto svazků během jejich šíření prostředím. Díky předpovědím, které z této teorie plynou, je pak navržen rezonátor podporující existenci stabilního elektromagnetického pole, které vyhovuje konkrétním požadovaným parametrům těchto svazků.

Navazování svazku (módové přizpůsobování) je nejprve realizováno pro samotný gaussovský svazek, který je vhodný pro seznámení se s tím, jak módové přizpůsobování probíhá. Ze znalosti vlnové délky vstupujícího záření a parametrů vstupujícího svazku je propočtena potřebná geometrie rezonátoru, který bude takovýto svazek stabilizovat. Provedená měření stability pak tuto předpověď ověřují a stanovují kvalitu takto navrženého rezonátoru. Zkoumány jsou i podmínky vzniku vyšších transversálních módů sestaveného rezonátoru, což umožňuje se jejich generaci při módovém přizpůsobování vyvarovat a docílit tak toho, že rezonátor podporuje pouze základní, nejintenzivnější konfiguraci elektromagnetického pole.

V dalším kroku je pak popsán způsob, jakým bylo prováděno navazování nedifraktujícího besselovského-gaussovského svazku. Je uvedeno odvození matice přenosu axiconu, která je klíčová pro určování dosahu Besselova pole. Na základě znalosti délky tohoto pole jsou pak vyzkoušeny hned tři rozdílné metody módového přizpůsobování, z nichž dvě jsou popsány v literatuře. Postup módového přizpůsobování jednotlivých metod je podrobně popsán a je vysvětlen přístup, jakým k návrhu geometrie rezonátoru došlo. V závěru práce jsou zhodnoceny dosažené výsledky a navrženy metody, kterými se dá popsání postupu navazování besselovského-gaussovského svazku dále vylepšit.

Klíčová slova

módové přizpůsobování, optická soustava, elektromagnetické vlnění, gaussovský svazek, besselovský-gaussovský svazek, optický rezonátor, axicon, mód rezonátoru

Abstract

The topic of this bachelor thesis is mode matching of non-diffracting beam to optical resonator. A Bessel-Gaussian beam generated by an axicon is considered a non-diffracting beam. The Gaussian beam which enters the axicon is a beam originating in a laser operating at a basic Gaussian mode. To clarify how the Gaussian and Bessel-Gaussian beams interact with any given medium and with different optical systems a theory is conceived that originates from electromagnetic properties of the investigated beams that predicts a behavior of the beams during their spreading throughout space. Based on prediction resulting from this theory, a resonator that supports the existence of a stable electromagnetic field, satisfying the parameters of these beams, is made.

The mode matching is first realized for the Gaussian beam itself which is fitting as a means to familiarize ourselves with how the procedure works. Geometry of the resonator, that will stabilize the incoming beam, is derived from the knowledge of the wavelength of entering radiation and parameters of an entering beam. The prediction is then confirmed by measured stability and the finesse of this constitution is defined. The conditions supporting higher order transverse modes are investigated so that such conditions can be avoided during the proper mode matching procedure which leads to the resonator configuration in which only the most intense, most basic electromagnetic field configuration occurs.

In further steps the means by which the mode matching of non-diffracting Bessel-Gaussian beam was carried out are described. The derivation of transforming matrix (ABCD law) of an axicon is stated, which is crucial for evaluating the reach of the Bessel field. Based on the knowledge of the length of the field, three different mode matching methods are investigated, two of which are described in literature. The advance of the matching is described in detail and a process of the resonator geometry adjustment is described. In the conclusion section the obtained results are evaluated and methods are proposed, that could further improve the mode matching of Bessel-Gaussian beams.

Key words

mode matching, optical system, electromagnetic wave functions, Gaussian beam, Bessel-Gaussian beam, optical resonator, axicon, resonator mode

Obsah

Abstrakt	5
Seznam obrázků.....	8
Seznam symbolů.....	9
1 Úvod.....	10
2 Definice vlnové funkce	12
2.1 Optická intenzita	12
2.2 Stacionární stav	12
2.3 Parabolické přiblížení sférické vlny	13
2.4 Gaussovský svazek.....	14
2.5 Parametry gaussovského svazku	15
2.6 Fáze svazku	16
2.7 Fyzikální význam parametrů svazku	16
2.8 Parametry nutné k úplnému popisu gaussovského svazku	17
2.9 Transformace svazku.....	17
2.10 Hermitovské-gaussovské svazky.....	18
2.11 Laguerrovské-gaussovské svazky	19
2.12 Matice přenosu paprsku.....	19
2.13 Matice přenosu vlnění (Zákon ABCD)	21
2.14 Besselovský svazek	21
3 Rezonátor	23
3.1 Fázová podmínka	23
3.2 Podélné módy rezonátoru	23
3.3 Ověření fázové podmínky	24
3.4 Ztráty uvnitř rezonátoru.....	25
3.5 Módová hustota	26
3.6 Příčné módy rezonátoru.....	26
3.7 Rozložení módů.....	27
3.8 Rezonátor se sférickými zrcadly	28
3.9 Stabilizace paprsku v rezonátoru.....	28
3.10 Podmínka stability rezonátoru	29
3.11 Nalezení gaussovského módu rezonátoru.....	30
3.12 Dělení rezonátorů	30
3.12.1 Podle tvaru kavity	30
3.12.2 Podle zdroje rezonujícího záření	31
3.12.3 Podle tvaru a uspořádání zrcadel	31
4 Navazování základního gaussovského módu 00	32
4.1 Seznámení se s rezonátorem.....	32
4.2 Módové přizpůsobování	32
4.3 Provedená měření	33
4.4 Zkoumání vyšších módů rezonátoru	37
5 Přenosová matice axiconu	38
6 Navazování Besselovského svazku do rezonátoru	39
6.1 Využití stávající sestavy	39
6.2 Sestava uvažující délku besselovského pole	40
6.3 Sestava simulující generaci aktivním prostředím.....	42
7 Závěr	43
Reference	45

Seznam obrázků

Obrázek 1: Vlna s dostatečně pomalým vývojem vzhledem k vlnové délce	13
Obrázek 2: Gaussovský svazek se středem v $z = 0$, sedlem w_0 , Rayleighovou vzdáleností Z_R a divergencí θ	15
Obrázek 3: Transformace svazku pomocí tenké čočky. Čočka musí být větší, než průřez svazku v místě dopadu.	18
Obrázek 4: Vývoj sférické vlny s poloměrem R_1 při průchodu optickou sestavou. Vystupující vlna má poloměr křivosti R_2	21
Obrázek 5: Schéma besselovského pole s délkou L a vrcholovým úhlem α (Wu et al. 2014)....	22
Obrázek 6: Dvourozměrný rezonátor s $m = 3, q = 1$	27
Obrázek 7: Rozložení módů ve frekvenční charakteristice rezonátoru.....	27
Obrázek 8: Graf znázorňující oblast stability rezonátoru podle vztahu (97).....	29
Obrázek 9: Měřicí sestava. Vpravo dole je laser a v levo nahoře pak rezonátor	33
Obrázek 10: Údaje z osciloskopu pro signál fotodiody (vždy spodní údaj) a piezoelementu (vždy horní údaj)	33
Obrázek 11: Záznam módů na náběžné hraně pieza	34
Obrázek 12: Detail píku 00 gaussovského svazku	34
Obrázek 13: Zachycený základní gaussovský mód.....	35
Obrázek 14: Teoretické předpovědi hermitovských-gaussovských módů (vlevo) a laguerrovských-gaussovských módů (vpravo), (Karimi et al. 2007)	37
Obrázek 15: Vyfocené hermitovské-gaussovské módy	37
Obrázek 16: Vyfocené laguerrovské-gaussovské módy	37
Obrázek 17: Axicon, do nějž vstupuje paprsek pod úhlem θ_1 a vystupuje paprsek pod úhlem θ_2	38
Obrázek 18: Rozšíření sestavy pro gaussovský svazek přidáním expandéru (vlevo uprostřed) a axiconu (vpravo uprostřed)	39
Obrázek 19: Zachycené pseudomódy	39
Obrázek 20: Sestava navržená s ohledem na délku besselovského pole – vstupní zrcadlo hned za aperturou a co nejbližší u něj axicon.....	40
Obrázek 21: Po vložení zrcadla doprostřed Besselova pole dochází u svazku k sebereprodukcí po každých dvou obězích.....	41
Obrázek 22: Nafocené módy mnohonásobného odrazu v rezonátoru se zrcadlem uprostřed Besselova pole.....	41
Obrázek 23: Sestava uvažující zrcadlo v 1,5 násobku délky Besselova pole	41

Seznam symbolů

<p> $A(r)$ – komplexní amplituda vlnové funkce A_m – amplituda Besselovy funkce a, b – příčné rozměry rezonátoru A, B, C, D – složky matice přenosu c – rychlost světla d – délka rezonátoru \mathfrak{F} – jemnost rezonátoru f – ohnisková vzdálenost čočky/zrcadla H_m, H_n – Hermitovy funkce h – vzdálenost paprsku v rovině yz od osy z $I(r, t)$ – intenzita záření v konkrétním místě a čase I_0 – počáteční intenzita/intenzita na vstupu svazku i – imaginární jednotka J_m – Besselovy funkce k – vlnové číslo k_T – transverzální složka vlnového čísla L – délka Besselova pole L_m^n – Laguerrovy funkce M – matice přenosu paprsku/vlnění n – index lomu prostředí q – módové číslo $q(z)$ – komplexní poloměr křivosti q_0 – komplexní poloměr ve zdroji svazku r – vektor polohy/velikost vektoru polohy r_i – reflexivita $R(z)$ – poloměr křivosti vlnoplochy/zrcadla R_0 – poloměr křivosti ve zdroji svazku $Re\{.\}$ – Reálná část funkce s – perioda oběhu t – čas t_i – transmisivita $U(r)$ – komplexní vlnová funkce definovaná v prostoru a nezávislá na čase </p>	<p> $U(r, t)$ – komplexní vlnová funkce definovaná v prostoru a čase U_0 – funkce popisující pole/vstupující hodnota pole $u(r, t)$ – reálná vlnová funkce definovaná v prostoru a čase V – zvětšení čočky/zrcadla $w(z)$ – pološířka svazku w_0 – pološířka sedla svazku x, y – transverzální souřadnice kolmá na optickou osu Z_R – Rayleighova délka z – souřadnice ve směru optické osy α – vrcholový úhel Besselova svazku β – úhel zalomení paprsku od kolmice γ – úhel axiconu δ – parciální derivace Δ – malá změna proměnné $\Delta\varphi(z)$ – gaussovská fáze svazku $\zeta(z)$ – Gouyův posun fáze θ – úhel svíraný paprskem a optickou osou/divergence svazku λ – vlnová délka záření ρ – vzdálenost od optické osy ν – frekvence monochromatického záření ν_q – rezonanční frekvence ν_f – frekvenční vzdálenost podélných módů ν_m – frekvenční vzdálenost transverzálních módů $\varphi(r)$ – fáze vlny ω – úhlová rychlost ∇ – gradient \cdot – absolutní hodnota $\langle \cdot \rangle$ – střední hodnota přes čas </p>
--	--

1 Úvod

Cílem této bakalářské práce je seznámit se s metodikou navazování elektromagnetických svazků do pasivního rezonátoru. Rezonátorem se zde rozumí taková sestava optických prvků, která umožňuje vstup elektromagnetického záření, přičemž dochází k jeho cirkulaci a díky tomu k nasčítání elektromagnetického pole, které rezonátorem probíhá. Porozumění chování elektromagnetických svazků v pasivním rezonátoru je velmi důležité, neboť při znalosti podmínek, za kterých k rezonancím dochází, je možné navrhnout a sestavit rezonátory tak, aby podporovaly existenci svazku požadovaného tvaru a vlastností. Na tomto základě je pak po vložení aktivního prostředí možné zkonstruovat laser, jehož vlastnosti jsou předurčeny pouze parametry rezonátoru a vlnovou délkou produkovanou aktivním prostředím při spontánní emisi.

Další možnosti využití rezonátorů tkví v jejich schopnosti transformovat vstupující svazek dle požadavků uživatele. Při vhodném uspořádání rezonátoru může docházet k rezonanci již tak značně výkonného svazku produkovaného vnějším zdrojem, čímž je jeho intenzita ještě dále umocněna, vlastnosti svazku jsou navíc transformovány podle charakteru rezonátoru a tento rezonátor se pak chová jako nový, dobře definovaný zdroj záření.

Rezonátory s úzkou spektrální čarou se dále dají využít jako Fabryův-Perrotův interferometr a jejich pomocí je pak možné určit šířku spektrální čáry laseru, jehož záření do rezonátoru vstupuje.

Bakalářská práce se skládá ze 3 částí. V první z nich se zabýváme vlastnostmi různých typů elektromagnetických polí daných vlastností, jejich vývojem a možnostmi transformace. Vycházíme přitom z definice vlnové funkce elektromagnetického pole pomocí vlnové rovnice plynoucí z Maxwellových rovnic a chování těchto svazků je odvozeno na základě vývoje této funkce během šíření prostředím. Velká pozornost je v této kapitole věnována gaussovskému svazku a jeho modifikacím, protože právě tento druh svazku je výstupním svazkem laseru, tedy zářením, které je takřka monochromatické a pozvolna divergující. Dalším cílem naší pozornosti je pak Besselovský svazek, jako ten typ vlnění, které je označováno za nedifraktující. Besselovský svazek je interferenčním polem a má tu významnou vlastnost, že během šíření se prostředím nedochází k vývoji amplitudy pole a intenzita v centru svazku zůstává pro celý dosah pole neměnná.

Ve druhé části se zabýváme konfiguracemi pasivních rezonátorů. Je zde dopodrobna rozebrána fázová podmínka, při jejímž splnění dochází k rezonanci, zaveden pojem mód rezonátoru (podélný i tranverzální) jakožto pole, které je při dané konfiguraci rezonátoru stabilní. Dále je zde uvedeno jak volit parametry rezonátoru tak, aby v něm bylo stabilní pole o požadovaných vlastnostech, jakožto i podmínky a mechanismy, díky kterým dochází k náhlému nárůstu intenzity, jenž se velmi jasně projevuje právě při splnění fázové podmínky. Jako

ukazatel kvality rezonátoru je dále zavedena tzv. jemnost rezonátoru, která vypovídá o kvalitě konfigurace zrcadel rezonátoru.

Závěrečná část se pak zaměřuje na vyhodnocení výsledků, které byly při navazování svazků obdrženy. Je zde podrobně popsán a zdokumentován postup, díky kterému se nám podařilo navázat do rezonátoru základní gaussovský svazek a určit vlastnosti rezonátoru popisující jeho kvalitu. V dalším kroku jsou zkoumány vyšší transverzální módy, k jejichž tvorbě dochází jemným rozlaďováním rezonátoru. Všechny pokusy o navázání tohoto svazku jsou v práci zdokumentovány a podrobně popsány. Je zde vysvětlen postup, jakým jsme se o navázání svazku pokoušeli a z jakých literárních zdrojů jsme přitom vycházeli.

Následně je odvozena matice přenosu axiconu, čehož je dále využíváno při pokusech o navázání beselovského-gaussovského svazku generovaného axiconem do rezonátoru. Všechny pokusy o navázání tohoto svazku jsou v práci zdokumentovány a podrobně popsány. Je zde vysvětlen postup, jakým jsme se o navázání svazku pokoušeli a z jakých literárních zdrojů jsme přitom vycházeli.

V závěru je pak zhodnocena úspěšnost navazování pomocí jednotlivých metod a popsán postup, kterým může dojít ke zvýšení této úspěšnosti navazování a k dalšímu zkvalitnění výsledků měření.

2 Definice vlnové funkce

Vlnová funkce je obecné řešení vlnové rovnice typické pro konkrétní fyzikální systém. V našem případě se zabýváme šířením elektromagnetického vlnění, které je popsáno vlnovou rovnicí odvozenou pomocí vektorové identity (Wang 1986) z Maxwellových rovnic:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

kde u popisuje průběh vlnové funkce v prostoru a čase, jakožto i vývoj příslušného elektromagnetického pole. Funkce, která splňuje tuto rovnici, může být zapsána v komplexním tvaru jako:

$$U(r, t) = A(r) \cdot e^{i[\varphi(r) + \omega t]}, \quad (2)$$

kde $A(r)$ je komplexní amplituda funkce a $\exp(f(r), g(t))$ je fáze funkce.

Funkce $U(r, t)$ také splňuje vlnovou rovnici a jejím reálným průběhem je funkce popisující odděleně složky elektrickou a magnetickou.

$$\text{Re}\{U(r, t)\} = u(r, t) = A(r) \cdot \cos[\varphi(r) + \omega t] \quad (3)$$

2.1 Optická intenzita

Intenzita je definována jako optický výkon na jednotku plochy a je závislá na střední hodnotě druhé mocniny pole vlnové funkce:

$$I(r, t) = 2\langle u^2(r, t) \rangle \quad (4)$$

Použijeme-li obecný předpis pro $U(r)$ ze (3) s amplitudou funkce $A(r)$, obdržíme:

$$\begin{aligned} I(r, t) &= \langle 2 A^2(r) \cdot \cos^2(\varphi(r) + \omega t) \rangle = \\ &= \langle A^2(r) \cdot [1 + \cos(2\varphi(r) + 2\omega t)] \rangle = |U(r)|^2 \end{aligned} \quad (5)$$

2.2 Stacionární stav

Z tvaru diferenciální rovnice je zřejmé, že řešením bude vlna

$$U(r, t) = U(r) \cdot e^{i\omega t}, \quad \text{kde} \quad U(r) = A(r) \cdot e^{i\varphi(r)} \quad (6)$$

Protože pro nás je zajímavé pouze rozložení elektromagnetického pole, nikoliv jeho časová proměna (předpokládáme, že pole je prostoupeno celým časoprostorem od okamžiku, kdy jej začneme generovat), je pro nás výhodné separovat jeho časovou složku a vytvořit ekvivalent vlnové rovnice nezávislé na čase. To si můžeme dovolit, protože šíření elektromagnetického pole rychlostí světla způsobí, že dojde k jeho stabilizaci takřka okamžitě po spuštění experimentu.

Zavedeme-li $k = \frac{\omega}{c}$ můžeme vlnovou rovnici značně zjednodušit do tvaru tzv.

Helmholtzovy rovnice:

$$(\nabla^2 + k^2)U(r) = 0 \quad (7)$$

Která je v podstatě identickou podmínkou existence vlnění. Vlnové funkce, které jsou jejichmi řešeními, jsou stejné vlnové funkce, jako ty, co řeší (1), ale tato rovnice je nezávislá na čase. Řešením diferenciální rovnice (7) je například rovinná vlna nebo sférická vlna.

- Rovinná vlna, pro kterou je $\vec{r}_{x,y,z}$ směr šíření:

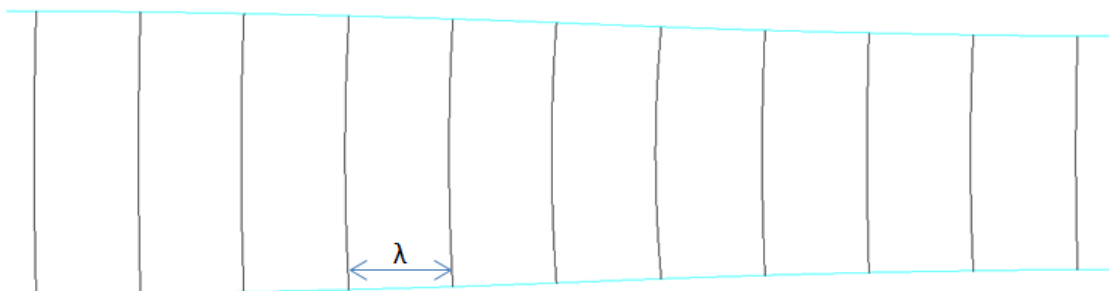
$$U(r) = A \cdot e^{-i \cdot k \cdot r} \quad (8)$$

- Sférická vlna, pro kterou je r pouze vzdálenost od zdroje vlnění:

$$U(r) = \frac{A}{r} \cdot e^{-i \cdot k \cdot r} \quad (9)$$

2.3 Parabolické přiblížení sférické vlny

Aproximací Helmholtzovy rovnice je přiblížení, jehož řešením jsou všechny vlnové funkce, jejichž amplituda se mění dostatečně pomalu. Dostatečně pomalý vývoj je takový, kdy při posunu o λ ve směru šíření vlny je její vývoj takřka nulový a změna amplitudy je oproti λ zanedbatelná. Taková vlnová funkce je na obrázku 1. To má za následek, že vývoj funkce je při posunu o λ v podstatě nulový, což znamená, že $\Delta A \ll A$ při změně z o $\Delta z = \lambda$. Využijeme zde vztahu parciálních derivací jakožto diferenciálu: $\Delta A = \frac{\partial A}{\partial z} \Delta z = \frac{\partial A}{\partial z} \lambda$, proto $\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\Delta A}{\lambda}$, z čehož plyne $\frac{\partial A}{\partial z} \ll A \cdot \frac{k}{2\pi}$. Obdobnou aproximací dostaneme ve druhé derivaci: $\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll \frac{\partial A}{\partial z} \cdot \frac{k}{2\pi}$.



OBRÁZEK 1: VLNA S DOSTATEČNĚ POMALÝM VÝVOJEM VZHEDEM K VLNOVÉ DÉLCE

V případě pomalu se měnící amplitudy vlnové funkce vidíme, že pokud obě nerovnosti spojíme, obdržíme vztah, kdy část Laplaceova operátoru ve směru z lze zanedbat, protože $\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll A \cdot k^2$. To nám umožňuje Helmholtzovu rovnici upravit do tvaru tzv. Paraxiální Helmholtzovy rovnice:

$$\nabla_T^2 U - i2k \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (10)$$

kde ∇_T^2 jsou pouze transverzální složky Laplaceova operátoru. Tato rovnice je parciální, podobá se Schrödingerově rovnici v kvantové mechanice.

Nejjednodušším řešením této nově vzniklé rovnice je takzvaná parabolická vlna. Ztotožníme-li směr, ve kterém se vlna šíří, s osou z , pak je možné využít následujících úprav:

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = z \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} \quad (11)$$

Ted' použijeme Taylorův rozvoj pro $\sqrt{(1+a)} = 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8} + \frac{a^3}{16} + \dots$

$$r \approx z \cdot \left(1 + \frac{x^2+y^2}{z^2}\right) = z + \frac{x^2+y^2}{2z} \quad (12)$$

Toto přiblížení je funkční pouze ve velkých vzdálenostech z od zdroje. Ty musejí být dostačující proto, aby poměry $\frac{x^2+y^2}{z^2}$ byly dostatečně malé a Taylorův rozvoj pro ně fungoval. Pokud tedy nahradíme u sférické vlny v případě amplitudy r za z a v případě fáze r za $z + \frac{x^2+y^2}{2z}$, Obdržíme Fresnelovo přiblížení sférické vlny definované v (Southwell 1981):

$$U(r) \cong \frac{A}{z} \cdot e^{-ik\left(z + \frac{x^2+y^2}{2z}\right)} \quad (13)$$

Ve fázi je zapotřebí přesnějšího vyjádření r , protože právě toto přiblížení nám moduluje rovinnou vlnu na parabolickou, u amplitudy je změna zanedbatelná.

Obdržíme tak v podstatě rovinnou vlnu (8) $A \cdot e^{-i \cdot k \cdot z}$, která je modulována $\frac{1}{z} \cdot e^{-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z}\right)}$, což má za následek zakřivení vlny a se zvyšující se vzdáleností její útlum. Toto přiblížení nazýváme parabolické, protože $\frac{x^2+y^2}{z} = p$ je rovnicí rotačního paraboloidu.

2.4 Gaussovský svazek

Dalším řešením paraxiální Helmholtzovy rovnice je také gaussovský svazek. U tohoto svazku platí, že jeho intenzita je podél osy svazku rozložena v závislosti na průběhu gaussovské funkce. Protože změna amplitudy u tohoto svazku je sice pomalá, ale není nulová, dochází u něj k divergenci. Tato divergence je definována úhlem svíraným normálami vlnoploch s osou svazku (viz 2.7 Fyzikální význam parametrů svazku) a stojí za postupným útlumem výkonu svazku.

Upravený předpis parabolické vlny, který i nadále splňuje paraxiální Helmholtzovu rovnici:

$$U(r) = \frac{A}{z} \cdot e^{-i\left[\Delta\varphi(z) + k\left(\frac{x^2+y^2}{2q(z)}\right)\right]}, \quad (14)$$

kde $\Delta\varphi(z)$ je fáze gaussovského svazku modulovaná (12) do tvaru paraboloidu a $q(z)$ reprezentuje komplexní poloměr křivosti. Tato vlna je nazývána Gaussovský svazek. Liší se od parabolické vlny právě komplexním poloměrem křivosti. Pokud dosadíme tuto funkci do paraxiální Helmholtzovy rovnice (10), obdržíme:

$$\left[\frac{k^2}{q^2}(x^2 + y^2)\left(\frac{dq}{dz} - 1\right) - 2k\left(\frac{d\Delta\varphi}{dz} + \frac{i}{q}\right)\right]U(r) = 0 \quad (15)$$

Nyní je možné z této rovnice vyvodit, že pro libovolné x, y musí platit:

$$\frac{dq}{dz} = 1 \Rightarrow q(z) = q_0 + z \quad (16)$$

$$\frac{d\Delta\varphi}{dz} = -\frac{i}{q} \Rightarrow \Delta\varphi(z) = -i \ln \frac{q_0+z}{q_0} \Rightarrow \Delta\varphi(0) = 0 \quad (17)$$

Pro jednodušší popis paprsku je možné oddělit reálnou a imaginární část komplexního poloměru křivosti:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)}, \quad (18)$$

kde $w(z)$ je pološířka svazku. Ta udává vzdálenost od optické osy, ve které dojde k útlumu pole na $1/e$ síly původního vlnění. w_0 je sedlo svazku, tedy místo, kde je svazek nejúžší, a $R(z)$ je poloměr křivosti.

Pro fázi svazku v bodě $z = 0$ ze (17) obdržíme dosazením z (18):

$$e^{-i\Delta\varphi(z)} = \frac{1}{1 + \frac{z}{q_0}} = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_0} - \frac{iz\lambda}{\pi w_0^2}} \quad (19)$$

Pokud uvažujeme zdroj v bodě, ve kterém je nekonečný poloměr křivosti, jde v tomto místě o rovinnou vlnu a jak je vidět z (18), $q_0 = i \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$

Nyní vyjádříme $\frac{1}{q(z)}$ pomocí (16) jako $\frac{1}{q_0 + z}$ a upravíme do tvaru:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{q_0}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{q_0} - \frac{z}{q_0^2}\right) \quad (20)$$

2.5 Parametry gaussovského svazku

Ze zapojení rovnic (18) a (20) a definování nové konstanty (21) můžeme odvodit následující vlastnosti paprsku, zanesené do obrázku 2:

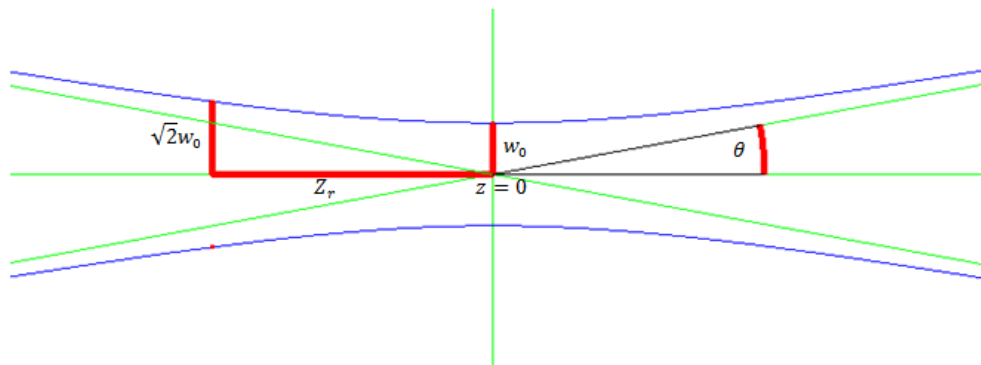
- Rayleighova délka: $Z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{q_0}{i}$ (21)

- Pološířka svazku: $w(z) = w_0 \left[1 + \left(\frac{z}{Z_R}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ (22)

- Poloměr křivosti svazku: $R(z) = z \left[1 + \left(\frac{Z_R}{z}\right)^2 \right]$ (23)

A také je definována fáze gaussovského svazku:

$$e^{-i\Delta\varphi(z)} = \frac{1}{1 - \frac{iz}{Z_R}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{Z_R}\right)^2}} \cdot e^{i\zeta(z)}, \quad \text{kde } \text{tg } \zeta(z) = \frac{z}{Z_R} \quad (24)$$



OBRAZEK 2: GAUSSOVSKÝ SVAZEK SE STŘEDEM V $z = 0$, SEDLEM w_0 , RAYLEIGHOVOU VZDÁLENOSTÍ Z_R A DIVERGENCÍ θ

Z_R je Rayleighova délka, což je vzdálenost, kterou je nutné urazit po optické ose, než dojde ke zdvojnásobení plochy svazku ($w(z)$ je v této vzdálenosti $\sqrt{2}w_0$). Jak je patrné z obrázku, svazek je nejužší v místě $z = 0$. Do vzdálenosti , ve které je $w(z) = \sqrt{2}w_0$, tj. $\pm Z_R$, považujeme paprsek za fokusovaný a oblast $|z| < Z_R$ označujeme jako ohnisková hloubka.

2.6 Fáze svazku

Pokud nyní dáme dohromady rovnice pro rovinnou vlnu, parabolickou vlnu a úpravu fáze způsobenou gaussovskými vlastnostmi, získáme základní rovnici pro popis sférické gaussovské vlny:

$$U(x, y, z) = \frac{K}{w(z)} e^{i \cdot \zeta(z)} e^{-ik \left(\frac{x^2 + y^2}{2q(z)} \right)}, \quad (25)$$

kde $\frac{K}{w(z)}$ je normalizační faktor paprsku. Převedeme-li dále druhý exponenciální člen podle rovnice (18) a užijeme-li $x^2 + y^2 = \rho^2$, upravíme:

$$e^{-ik \left(\frac{\rho^2}{2q(z)} \right)} = e^{-ik \left(\frac{\rho^2}{2R(z)} \right)} e^{\left(\frac{\rho^2}{w(z)} \right)} \quad (26)$$

Protože intenzita svazku je druhou mocninou absolutní hodnoty vlnové funkce a absolutní hodnota $z e^{i\varphi}$ je vždy 1, obdržíme vztah pro intenzitu:

$$I(\rho, z) = I_0 \left[\frac{w_0}{w(z)} \right]^2 \cdot e^{\left[-\frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right]}, \quad \text{kde } I_0 = |U_0|^2 \quad (27)$$

Jak je vidět, se šířícím se svazkem dochází při fixaci ρ ke zvyšování $w(z)$ a tedy ke snižování počáteční hodnoty intenzity. Druhý (exponenciální) člen součinu způsobuje při konstantním $w(z)$ gaussovské rozložení intenzity, podle čehož získal svazek své jméno. Pološířka svazku $w(z)$ udává útlum intenzity o $1/e^2$.

2.7 Fyzikální význam parametrů svazku

Jak je uvedeno výše (22), pološířka svazku je dána $w(z) = w_0 \left[1 + \left(\frac{z}{Z_R} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$.

Tento vztah se dá přepsat do tvaru:

$$\frac{w(z)^2}{w_0^2} - \frac{z^2}{Z_R^2} = 1 \quad (28)$$

Což nám umožňuje chápat průběh pološířky $w(z)$ jako průběh hyperboly, všimněme si tohoto chování na obrázku 2. Díky tomuto závěru budeme nyní schopni předpovědět chování svazku při postupu po optické ose.

Z rovnice (22) vidíme, že se zvyšujícím se z dochází k příčnému rozšiřování svazku, což způsobuje snížení amplitudy, ale gaussovské rozložení intenzity se zachovává. Pološířka paprsku w_0 je v počátku nejmenší a do obou stran dochází k rozšíření svazku. Divergence svazku je dána asymptotami hyperboly, tedy úhlem, který svírají ramena hyperboly s osou z v nekonečnu (viz obrázek 2):

$$\tan \theta = \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \frac{w_0 \left[1 + \left(\frac{z}{Z_R} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{z} = \frac{w_0}{Z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (29)$$

Abychom zachovali malé poměry $\frac{x^2+y^2}{2q(z)}$ z rovnice (14), jak vyžaduje podmínka pro přiblížení parabolickou vlnou v rovnici (12), je zřejmé, že v reálných rezonátorech bude divergence paprsku velmi malá, a proto vztah (29) přejde na:

$$\theta \cong \tan \theta = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (30)$$

2.8 Parametry nutné k úplnému popisu gaussovského svazku

Rovinnou vlnu (8), při znalosti vlnové délky, podle (Saleh a Teich 1991) zcela určuje komplexní amplituda a směr šíření. U sférické vlny (9) stačí znát amplitudu a střed. Pro gaussovský svazek je však k popisu nutné znát více parametrů. Lze jej kompletně určit například ze znalosti komplexní amplitudy ve zdroji, směru šíření, polohy středu a Rayleighovy délky nebo středové šířky svazku. Další možností popisu při znalosti směru optické osy a amplitudy je využití komplexního poloměru křivosti $q(z)$. Jde o komplexní parametr, jehož reálnou částí je přímo poloha na ose z a imaginární část přímo definuje Rayleighovu délku (21).

2.9 Transformace svazku

Při průchodu či odrazu od optických prvků nedochází ke změně charakteristiky svazku, svazek zůstává gaussovský, mění se pouze jeho parametry. Pokud chceme generovaný svazek navázat do specifického rezonátoru, je potřeba jej upravit tak, aby jeho vlastnosti „seděly“ na vlastnosti rezonátoru, do kterého svazek vstupuje. Při interakci svazku s prvkem dojde ke změně fáze. Pro naše účely lze říci, že při průchodu čočkou nebo odrazu od zrcadla dochází k úpravě parabolické složky fáze. Využijeme k tomu zobrazovací rovnice pro tenké čočky a zrcadla:

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} = \frac{1}{f} \quad (31)$$

A tedy u fáze dojde ke změně:

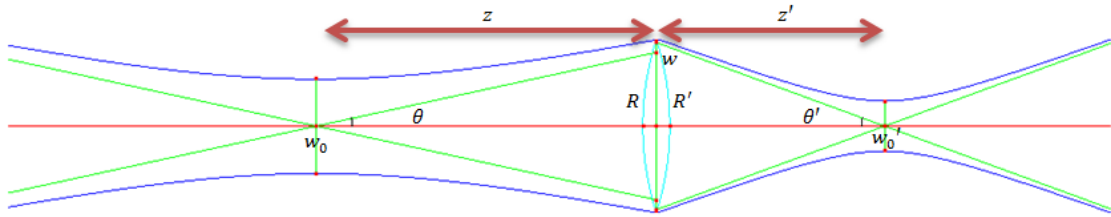
$$\frac{k\rho^2}{2R'} - \zeta = \frac{k\rho^2}{2R} - \zeta - \frac{k\rho^2}{2f} \quad (32)$$

Je tak možné vytvořit z divergentního gaussovského svazku svazek konvergentní, jehož přenesená poloha sedla bude mít jasně danou pozici (obrázek 3). Toho se dá využít při navazování gaussovského svazku do rezonátoru, protože tam znalost polohy a velikosti sedla vyžadujeme. Pro velikost sedla a vzdálenost středu transformovaného svazku od čočky je při znalosti jeho pološířky w a poloměru křivosti R v konkrétním bodě (např. na čočce) možné pomocí (31) odvodit vztahy:

$$z' = \frac{R'}{\left(1 + \left(\frac{\lambda R'}{\pi w^2}\right)^2\right)} \quad (33)$$

$$w_0' = \frac{w}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi w^2}{\lambda R'}\right)^2}} \quad (34)$$

Pokud teď využijeme vztahů (22) a (23), které dosadíme do rovnic (31) a (33), obdržíme závislost parametrů svazku na parametrech optického prvku, konkrétně jeho příčném zvětšení $V = \frac{f}{z-f}$ (u zrcadla platí $f = R/2$), kde f je ohnisková vzdálenost. Sedlo nově vzniklého svazku se oproti předcházejícímu V krát rozšíří, s tím souvisí snížení divergence svazku V krát podle (30) a zvýšení ohniskové hloubky V^2 krát podle (21).



OBRÁZEK 3: TRANSFORMACE SVAZKU POMOCÍ TENKÉ ČOČKY. ČOČKA MUSÍ BÝT VĚTŠÍ, NEŽ PRŮŘEZ SVAZKU V MÍSTĚ DOPADU.

2.10 Hermitovské-gaussovské svazky

Gaussovský svazek je jedním ze základních řešení paraxiální Helmholtzovy rovnice. Lze však uvažovat i o dalších řešeních, která budou splňovat stejné fázové podmínky, avšak rozložení jejich intenzity, které na fázi nezávisí, bude modifikováno vhodnými funkcemi závislými na prostorových souřadnicích tak, aby výsledný předpis svazku i nadále splňoval Helmholtzovu rovnici.

$$U_{HG} = f\left(\frac{x}{w}\right)g\left(\frac{y}{w}\right)e^{-i\varphi z} \cdot U_G, \quad (35)$$

kde U_{H-G} je hermitovský-gaussovský svazek, U_G je gaussovský svazek, f, g jsou normované funkce modulující rozložení intenzity ve směrech x, y a φ je pomalu proměnnou funkcí z . Fáze vlny tak má shodný průběh s parabolickou vlnou a může tak být fokusována pomocí tenké čočky, stejně jako parabolická vlna.

Jak ukazuje (Jones 2008), je pro funkce f, g možné odvodit vztahy:

$$f\left(\frac{x}{w}\right) = H_m\left(\sqrt{2}\frac{x}{w}\right), \quad g\left(\frac{y}{w}\right) = H_n\left(\sqrt{2}\frac{y}{w}\right) \quad a \quad \varphi(z) = -(n+m)\arctg\left(\frac{z}{z_R}\right), \quad (36)$$

kde H_i je tzv. Hermitův polynom i tého řádu definovaný rekurentně jako:

$$H_{l+2}(u) = 2u H_{l+1}(u) - 2l H_l(u), \quad H_0(u) = 1 \quad a \quad H_1(u) = 2u \quad (37)$$

Nyní můžeme napsat kompletní předpis pro hermitovské-gaussovské svazky, které tvoří kompletní systém řešení paraxiální Helmholtzovy rovnice:

$$U_{HG}^{m,n} = A_{HG}^{m,n} \frac{w_0}{w(z)} H_m\left(\sqrt{2}\frac{x}{w}\right) H_n\left(\sqrt{2}\frac{y}{w}\right) \exp\left[i\left((n+m+1)\zeta(z) - k\left(\frac{\rho^2}{2q(z)}\right)\right)\right] \quad (38)$$

Pokud $m = n = 0$, obdržíme podle očekávání předpis gaussovského svazku.

2.11 Laguerrovské-gaussovské svazky

Obdobně jako pro hermitovské-gaussovské svazky lze paraxiální Helmholtzovu rovnici řešit i v polárních souřadnicích např. podle (Tovar 1998), a gaussovská parabolická vlna je zde pak modulována Laguerrovými polynomy a má tvar:

$$U_{LG}^{m,n} = \frac{e^{-in\varphi}}{w(\zeta)} \left(\frac{r}{w(\zeta)}\right)^n L_m^n \left(\frac{2r^2}{w^2(\zeta)}\right) \exp \left[ikz - \frac{r^2}{w_0^2(1+i\zeta)} - i(n+2m+1)\zeta(z) \right], \quad (39)$$

kde $\varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ a $L_m^n(r)$ jsou Laguerrovy polynomy definované následovně:

$$L_m^n(r) = \frac{e^r r^{-n}}{m!} \cdot \frac{d^m(e^{-r} r^{n+m})}{dr^m} \quad (40)$$

Hermitovské-gaussovské a laguerrovské-gaussovské svazky tvoří dva úplné systémy řešení paraxiální Helmholtzovy rovnice. Jelikož jde v obou případech o šíření parabolické vlny, lze oprávněně předpokládat, že tato řešení budou stabilními módy optického rezonátoru (viz kapitola 2).

2.12 Matice přenosu paprsku

Nyní se budeme zabývat propagací paprsku skrze optické prvky. Bude třeba určit vliv jednotlivých prvků na vstupující paprsek, určit jak se bude paprsek po průchodu chovat a jak se změní jeho vlastnosti. Podle (Hodgson a Weber 2005) je pro propagaci paraxiálního paprsku možné vytvořit sestavu tzv. ABCD matic, které jednotlivě reprezentují ať už sám optický prvek, nebo i prostor, kterým se světlo propaguje. Přenásobením vektoru těmito maticemi získáváme vektor popisující výstupní paprsek.

Budeme předpokládat paprsek, který se propaguje v rovině yz , kde z je optická osa. V této rovině je pak vstupní paprsek charakterizován svojí polohou $y = h_1$ (odpovídá vzdálenosti ρ od osy) při $z = 0$ a sklonem θ mezi paprskem a optickou osou. Pro zjednodušení popisu, jak je běžné u paraxiálního paprsku, zavedeme $\sin \theta = \tan \theta = \theta$. Protože je paprsek v této rovině lineární funkcí, lze předpokládat, že poloha a sklon paprsku v každém dalším bodě budou určeny pomocí soustavy lineárních rovnic:

$$h_2 = A \cdot h_1 + B \cdot \theta_1 \quad (41)$$

$$\theta_2 = C \cdot h_1 + D \cdot \theta_1 \quad (42)$$

Odtud pomocí maticového popisu obdržíme matici přenosu ABCD:

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad (43)$$

A a D jsou podle očekávání bez dimenze, zatímco B má rozměr délky a C je převrácený rozměr délky, tedy „na metr“. Nyní budou prvky ABCD matice reprezentující změnu polohy respektive úhlu paprsku odvozeny pro významné optické prvky:

- **Propagace volným prostorem** – Po projití vzdálenosti d platí pro úhel $\theta_2 = \theta_1 \Rightarrow C = 0; D = 1$

A pro vzdálenost $h_2 = h_1 + \operatorname{tg} \theta_1 d = h_1 + \theta_1 d \Rightarrow A = 1; B = d$

$$\text{Obdržíme tak matici přenosu: } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

- **Rozhraní dvou prostředí** – Vzdálenost se nemění $h_2 = h_1 \Rightarrow A = 1; B = 0$

Úhel se mění podle Snellova zákona: $\sin \theta_2 = \sin \theta_1 \cdot \frac{n_1}{n_2} = \theta_1 \cdot \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow C = 0; D = \frac{n_1}{n_2}$

$$\text{Obdržíme matici přenosu: } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \quad (45)$$

- **Propagace uvnitř média** – Po projití vzdálenosti $d - \theta_2 = \theta_1 \Rightarrow C = 0; D = 1$

$h_2 = h_1 + \frac{n_1}{n_2} \operatorname{tg} \theta_1 d = h_1 + \frac{\theta_1 d}{n} \text{ (přechod z a do vzduchu)} \Rightarrow A = 1; B = \frac{d}{n}$

$$\text{Obdržíme matici přenosu: } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (46)$$

- **Tenká čočka s ohniskovou vzdáleností f** – Vzdálenost se nemění

$h_2 = h_1 \Rightarrow A = 1; B = 0$

Dochází k zakřivení – např. vodorovný paprsek se láme do ohniska – $\theta_2 =$

$\theta_1 + \operatorname{arctg} \frac{-h_1}{f} \Rightarrow C = -\frac{1}{f}; D = 1$

$$\text{Obdržíme matici přenosu: } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

- **Zrcadlo s poloměrem křivosti $R = 2f$** – Obdobně jako u tenké čočky

$h_2 = h_1 \Rightarrow A = 1; B = 0$

$\theta_2 = \theta_1 + \operatorname{arctg} \frac{-h_1}{\frac{R}{2}} \Rightarrow C = -\frac{2}{R}; D = 1$

$$\text{Obdržíme matici přenosu: } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \quad (48)$$

Nyní můžeme předpokládat, že vstupující paprsek daný parametry vzdálenosti od osy a úhlu odklonu je při průchodu daným libovolným optickým prvkem výše ovlivněn maticí M_1 tak, jak to popisují ABCD matice příslušné prvku. Dojde tedy k přenásobení vektoru paprsku $\begin{pmatrix} h_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$ maticí M_1 , přičemž se paprsek nadále šíří směrem k dalším optickým prvkům s maticemi přenosu $M_2, M_3, \text{atd.}$ Soustavu těchto optických prvků pak reprezentuje sestava matic, přičemž vektor musí být násoben vždy maticí následujícího optického prvku, tedy matice jsou řazeny odzadu následovně:

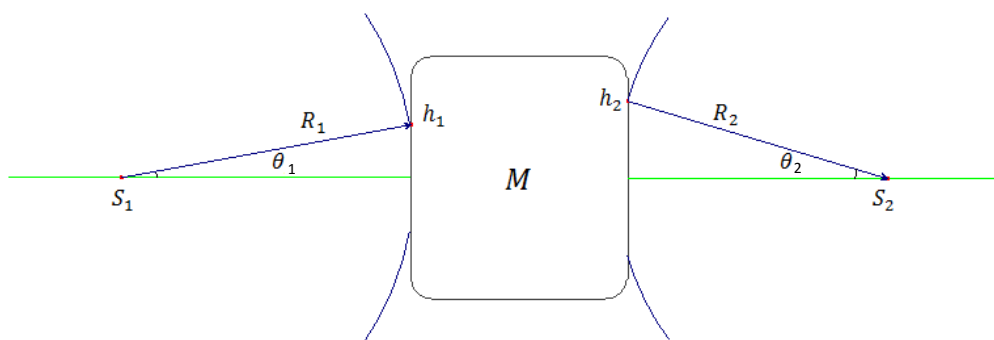
$$M_S = M_n \cdot \dots \cdot M_2 \cdot M_1, \quad (49)$$

kde M_S je matice přenosu celého systému. Při tomto přiblížení jsme vycházeli z šíření paraxiálního paprsku, nyní bude naším cílem zjistit chování vlnění vycházejícího ze zdroje při průchodu podobnými prvky.

2.13 Matice přenosu vlnění (Zákon ABCD)

Pro vlnoplochy se zdrojem v S_1 a poloměrem křivosti R_1 procházející optickou soustavou a vystupující směrem k bodu S_2 s poloměrem křivosti R_2 platí v paraxiálním přiblížení pro každé konkrétní vstupní a výstupní místo vlnoplochy optického systému:

$$h_1 = R_1 \cdot \theta_1 \text{ a } R_2 = \frac{h_2}{\theta_2} \quad (50)$$



OBRÁZEK 4: VÝVOJ SFÉRICKÉ VLNY S POLOMĚREM R_1 PŘI PRŮCHODU OPTICKOU SESTAVOU. VYSTUPUJÍCÍ VLNA MÁ POLOMĚR KŘIVOSTI R_2 .

Uvnitř optické soustavy se paprsek z h_1 do h_2 vyvíjí podle známé matice přenosu M . Do vztahu proto R_2 dosadíme z $h_2 = A \cdot h_1 + B \cdot \theta_1$ a $\theta_2 = C \cdot h_1 + D \cdot \theta_1$:

$$R_2 = \frac{A \cdot h_1 + B \cdot \theta_1}{C \cdot h_1 + D \cdot \theta_1} = \frac{A \cdot R_1 \cdot \theta_1 + B \cdot \theta_1}{C \cdot R_1 \cdot \theta_1 + D \cdot \theta_1} = \frac{A \cdot R_1 + B}{C \cdot R_1 + D} \quad (51)$$

Tento vztah je možné použít i pro vlnění s komplexním poloměrem křivosti, tedy je díky němu možné určit i chování Gaussovského svazku při průchodu optickou soustavou, pouze je nutné nahradit reálný střed křivosti R za komplexní střed křivosti q , který určuje vlastnosti svazku. Chování hermitovských-gaussovských svazků při průchodu optickými prvky je, jak už bylo řečeno, shodné s chováním gaussovských svazků, proto se i tyto svazky budou řídit maticemi přenosu výše.

2.14 Besselovský svazek

Tento svazek je ve své podstatě interferenčním polem. Jak popisuje (Recami et al. 2014) jde o nedifraktující svazek o nekonečné energii. K jeho generování dochází tak, že rovinná vlnoplocha je podélně fázově postupně zpožděována, což ve své podstatě vede ke změně směru šíření paprsku a k překryvu těchto nově vzniklých vlnoploch. Tyto vlnoplochy interferují za vzniku tzv. Besselova pole. Projevy tohoto pole ovšem s konečným množstvím energie můžeme pozorovat i u běžných optických prvků, například ve formě astigmatismu tlustých čoček.

Vlny prostupující besselovským polem vyhovují Helmholtzově paraxiální rovnici a mají předpis:

$$U(r) = A_m J_m(k_T \rho) \cdot e^{i(kz + m\alpha)}, \quad (52)$$

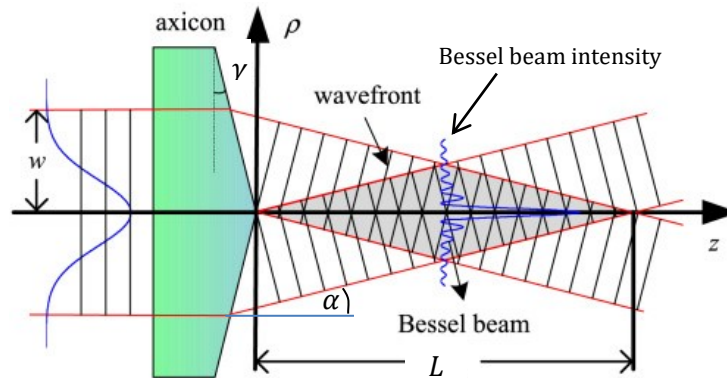
kde J_m je Besselova funkce prvního druhu m -tého řádu, A_m je její amplituda a α je vrcholový úhel svazku.

Posunu fáze může být docíleno hned několika způsoby. Tím nejběžnějším je použití takzvaného axiconu (zobrazen na obrázku 5), což je vlastně čočka kuželovitého tvaru se špičkou o velkém indexu lomu. Paprsky, jež do axiconu vstupují nejdále od optické osy, která prochází špičkou axiconu, z něj vystoupí nejdříve, a protože index lomu vzduchu je nižší než index lomu čočky, dojde podle Snellova zákona k zalomení vlnoplochy pod úhlem α , pod kterým se budou postupně vyvazovat i další části vlnoplochy. Úhel α je definovaný geometricky a vychází ze zpoždování vlny axiconem. Chceme-li určit dosah besselovského pole, musíme pak uvažovat, jak dlouho se budou vlnoplochy o poloměru ρ vychýlené o úhel α protínat. Délka tohoto pole je při vstupu paprsku rovnoběžného s optickou osou odvozena v praktické části:

$$L = \frac{\rho}{(n-1)\gamma}, \quad (53)$$

kde γ je úhel axiconu.

Rozložení intenzity po celé délce Besselova pole je konstantní a je zobrazeno na obrázku 5, na kterém je také vidět, jak ke tvorbě tohoto pole dochází a vidět je také jeho délka.



OBRÁZEK 5: SCHÉMA BESSELOVSKÉHO POLE S DÉLKOU L A VRCHOLOVÝM ÚHLEM α (WU ET AL. 2014)

Protože při vytváření besselovského svazku uvažujeme o rovinných vlnách, které však nesou nekonečnou energii a nejsou pro nás k dispozici, budeme pro naše účely pracovat s besselovskými-gaussovskými svazky, které mají obdobný tvar i rozložení intenzity, avšak jejich fáze se odlišuje od pravého besselovského svazku.

3 Rezonátor

Optický rezonátor je soustava optických prvků, která představuje jakousi analogii elektrického rezonančního obvodu se zpětnou vazbou v oblasti optiky. Světlo uvnitř systému buďto cirkuluje, nebo zde vytváří stojatou vlnu mezi několika (minimálně dvěma) odrazivými prvky. Aby nedošlo k destruktivní interferenci, je zapotřebí, aby byla splněna fázová podmínka rezonátoru. V případě destruktivní interference dochází k odrazu intenzity pole již na prvním zrcadle a uvnitř rezonátoru je intenzita nulová.

Využití pasivních rezonátorů jsou různorodá. Dá se díky nim určovat kvalita laseru nebo například filtrovat nežádoucí vlnové délky. Nastavení rezonátoru ovlivňuje, jaké se v něm ustálí elektromagnetické pole. Při znalosti typu vlny, která do rezonátoru vstupuje, můžeme rezonátor záměrně konfigurovat tak, aby byl udržován právě námi požadovaný typ pole. Při vložení aktivního prostředí do rezonátoru dochází ke generování laserového záření předurčeného právě parametry rezonátoru a vlnovou délkou emitovaných fotonů.

3.1 Fázová podmínka

Jelikož vstupující vlna světla při průchodu rezonátorem mění svoji fázi, je zapotřebí, aby po absolvování jednoho oběhu rezonátorem byla tato fáze totožná s výchozí vlnou. Pokud toto nenastane, dojde k destruktivní interferenci všech vln, které rezonátorem takto obíhají. Vlny, které tuto podmínku splňují, nazýváme módy rezonátoru.

3.2 Podélné módy rezonátoru

Jak je uvedeno ve (3), vlnová funkce splňující vlnovou rovnici má předpis:

$$u(r, t) = \operatorname{Re}\{U(r) \cdot e^{i2\pi vt}\}, \quad (54)$$

kde $v = \frac{\omega}{2\pi}$ je frekvence monochromatického záření.

Módy rezonátoru pak rozumíme vlastní funkce Helmholtzovy rovnice, které vyhovují okrajovým podmínkám daným rezonátorem. Tyto podmínky vyžadují, aby byl průběh amplitudy na povrchu zrcadel vzdálených od sebe d nulový, tedy pro $z = 0$ a $z = d$ platí:

$$u(r) = 0 = A \cdot \sin(k \cdot z), \quad (55)$$

kde A je konstantní amplituda a k je rezonátorem vybrané vztahem, který určuje počet vlnových délek q , které se vejdou do rezonátoru při jednom oběhu, přičemž platí:

$$\frac{2d}{\lambda} = q \implies k2d = \frac{4\pi d}{\lambda} = 2\pi q \quad (56)$$

Odtud můžeme vyjádřit k :

$$k_q = \frac{\pi q}{d} \quad (57)$$

Takže aby se vlna udržela uvnitř rezonátoru, musí její předpis splňovat $U(r) = A_q \cdot \sin(k_q z)$. Protože $k_0 = 0$ a $\sin(k_{-q}z) = -\sin(k_q z)$, což odpovídá vlně propagující se v opačném směru, může q nabývat hodnot $\{1, 2, 3, \dots\}$. q je zde nazýváno módovým číslem.

Vlnění uvnitř rezonátoru je pak superpozicí módů o příslušných módových číslech. Díky vztahu mezi vlnovým číslem a frekvencí:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot \nu}{c} \quad (58)$$

Obdržíme vztah pro rezonanční frekvence rezonátoru:

$$\frac{q \cdot \pi}{d} = \frac{2\pi \cdot \nu_q}{c} \implies \nu_q = \frac{q \cdot c}{2d} \quad (59)$$

Frekvenční vzdálenost dvou módů (FSR) je potom:

$$\nu_f = \nu_q - \nu_{q-1} = \frac{c}{2d} \quad (60)$$

Z podmínek výše je zřejmé, že pokud q určuje celočíselný počet vlnových délek, které se vejdou do rezonátoru, bude se po jednom oběhnutí rezonátorem ($\Delta z = 2d$) fáze vlny shodovat s fází původní:

$$U(r) = A \cdot \sin\left(\varphi(r) + \frac{\pi q}{d} \cdot 2d\right) = A \cdot \sin(\varphi(r)) \quad (61)$$

Z této rovnice je patrné, že pokud chceme, aby nastala konstruktivní interference, je nutné, aby se po oběhu fáze posunula o $\Delta\varphi$, které je celočíselným násobkem 2π :

$$\Delta\varphi = \frac{\pi q}{d} \cdot 2d = q2\pi = 2kd \quad (62)$$

3.3 Ověření fázové podmínky

Zavedeme-li koeficienty t_1, r_1, t_2, r_2 jako koeficienty transmisivity resp. reflexivity elektromagnetického pole prvního resp. druhého zrcadla, obdržíme podle (McLeod, nedatováno) pro průchod prvním zrcadlem a po n obězích rezonátorem vztah pro pole nově vzniklého svazku z původního vstupujícího svazku U_0 uvnitř rezonátoru:

$$U_{u,n} = t_1 (r_1 r_2)^n U_0 e^{i2nkd} \quad (63)$$

Protože do rezonátoru neustále vstupuje světlo, které interferuje s polem uvnitř, je celková velikost pole uvnitř rezonátoru součtem příspěvků všech polí, která spolu interferují:

$$U_u = t_1 U_0 \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^n e^{i2nkd} = \frac{t_1 U_0}{1 - r_1 r_2 e^{i2kd}} \quad (64)$$

Intenzita uvnitř rezonátoru pak je podle (5):

$$I_u = |U_u|^2 = \frac{T_1}{|1 - \sqrt{R_1 R_2} e^{i(2kd + \varphi_0)}|^2} I_0, \quad (65)$$

kde φ_0 je posun fáze vyvolaný zrcadly, $R = |r|^2$ a $T = |t|^2$

Výstupní pole a jeho intenzita se spočítají snadno z (65):

$$U_p = \frac{t_1 t_2 e^{ikd}}{1 - r_1 r_2 e^{i2kd}} U_0 \quad (66)$$

$$I_p = \frac{T_1 T_2}{|1 - \sqrt{R_1 R_2} e^{i(2kd + \varphi_0)}|^2} I_0 \quad (67)$$

Pole odražené rezonátorem zpět má 2 příspěvky – jeden při odrazu od prvního zrcadla již při vstupu a druhý vycházející ze vztahu (64):

$$U_r = \left[r_1 + \frac{r_2 T_1 e^{i2kd}}{1 - r_1 r_2 e^{i2kd}} \right] U_0 \quad (68)$$

A příslušná intenzita:

$$I_r = \frac{\left| -1 + \left(1 + \frac{T_1}{R_1}\right) \sqrt{R_1 R_2} e^{i(2kd + \varphi_0)} \right|^2}{\left| 1 - \sqrt{R_1 R_2} e^{i(2kd + \varphi_0)} \right|^2} R_1 I_0 \quad (69)$$

Při rezonanci, jak bylo zmíněno v úvodu kapitoly o rezonátorech, je splněna fázová podmínka (56) $2kd + \varphi_0 = 2q\pi$, $q \in N$, a proto se jmenovatelé u intenzit v (65) a (67) přibližují nule a vnitřní a prošlá intenzita velmi rychle roste, zatímco odražená intenzita (69) může být velmi malá.

3.4 Ztráty uvnitř rezonátoru

Pokud budeme uvažovat, že uvnitř rezonátoru dochází při oběhu ke ztrátám ve velikosti amplitudy a k posunu fáze na zrcadlech, můžeme uvažovat, že dvě po sobě jsou amplitudy stejné vlny ve stejném místě jsou k sobě vztaženy následovně:

$$U(n) = U(n+1) \cdot q, \quad \text{kde} \quad q = r \cdot e^{-i\varphi}, \quad (70)$$

kdy r je zde součin reflexivit obou zrcadel. Výsledná amplituda pak bude superpozicí všech vln:

$$U = U_0 \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots) = \frac{U_0}{1-q} \quad (71)$$

Ze vztahu pro intenzitu (5) víme, že:

$$\begin{aligned} I &= |U|^2 = \left| \frac{U_0}{1 - r e^{-i\varphi}} \right|^2 = \frac{I_0}{|1 - r(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi))|^2} = \frac{I_0}{(1 - r \cos(\varphi))^2 - (r \sin(\varphi))^2} = \frac{I_0}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi)} = = \\ &= \frac{I_0}{(1-r)^2 + 2r(1-\cos(\varphi))} = \frac{I_0}{(1-r)^2 + 4r \sin^2(\frac{\varphi}{2})} = \frac{I_0}{(1-r)^2 \left(1 + \frac{4r \sin^2(\frac{\varphi}{2})}{(1-r)^2}\right)} = \frac{I_{max}}{1 + 4 \cdot \left(\frac{\mathfrak{F}}{\pi}\right)^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (72)$$

kde I_{max} je intenzita superpozice všech vln ve fázi a $\mathfrak{F} = \frac{\pi \sqrt{r}}{1-r}$ je jemnost rezonátoru, jak ji zavádí (Rosenfeld 2003), která dává do souvislosti šířku pásu intenzity v polovině maxima (FWHM) a periodu fáze 2π :

$$\mathfrak{F} = \frac{2\pi}{\Delta\varphi} \quad (73)$$

Je patrné, že pro $\varphi = q2\pi$ bude $I = I_{max}$, zatímco přesně mezi těmito hodnotami bude minimální hodnota $I = \frac{I_{max}}{1 + 4 \left(\frac{\mathfrak{F}}{\pi}\right)^2}$

Pokud vyjdeme ze vztahu:

$$\varphi = 2kd = 4\pi \cdot \frac{d}{\lambda} = 4\pi \cdot \frac{v \cdot d}{c} \quad (74)$$

Vidíme, že fáze je lineárně úměrná frekvenci, můžeme tedy určit poměr frekvenční vzdálenosti dvou módů vztažené na δv , což je frekvenční šířka pásu v polovině maxima (FWHM) těchto módů:

$$\frac{\delta v}{v_f} = \frac{\Delta \varphi}{2\pi} \Rightarrow \delta v = \frac{2\pi}{\mathfrak{F}} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot v_f = \frac{v_f}{\mathfrak{F}} \Rightarrow \mathfrak{F} = \frac{v_f}{\delta v} \quad (75)$$

3.5 Módová hustota

v_f nám udává interval frekvence mezi jednotlivými módy, hustota módů vztažená na jednotkový interval frekvence a jednu ze dvou ortogonálních polarizací je pak převrácená hodnota:

$$\frac{1}{v_f} = \frac{2d}{c} \quad (76)$$

Jak je vidět, závisí tato hustota pouze na délce rezonátoru. Při zdvojnásobení délky rezonátoru by se měl dvojnásobně zvýšit počet módů, které jsou v rezonátoru stabilní. U každé frekvence nacházející se uprostřed mezi již stabilními módovými frekvencemi původního rezonátoru $v = v_f \left(q + \frac{1}{2}\right)$ dochází při zdvojnásobení délky rezonátoru ke stabilizaci, což potvrzuje správnost vztahu (76).

Vztáhneme-li tuto hustotu na jednotku délky rezonátoru a započítáme-li obě polarizace, je pak hustota rovna:

$$M(v) = \frac{4}{c} \quad (77)$$

Toto nám udává, že v intervalu Δv nalezneme $\frac{4}{c} \cdot \Delta v$ podélných módů.

3.6 Příčné módy rezonátoru

Pokud budeme uvažovat, že je rezonátor tvořen kvádrem, se stranami a, b, d , pak se bude fázová podmínka moci vyjádřit podobně jako v jednorozměrném případě. Bude zde platit, že vlnové číslo

$$\vec{k} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (78)$$

bude splňovat fázovou podmínku (57) a po několika průletech rezonátorem začne světlo kopírovat svou výchozí dráhu, jako na obrázku 6.

Z fázové podmínky (57) obdržíme vztah pro frekvenci:

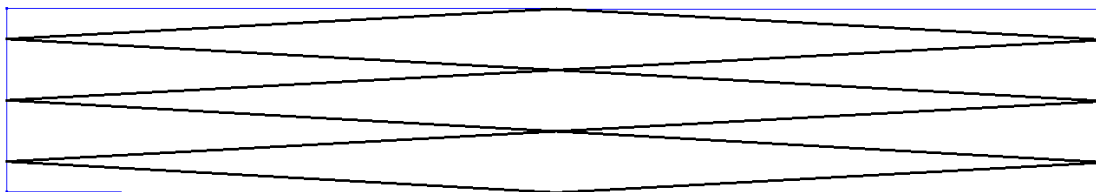
$$v_{mnq} = \frac{c}{2} \cdot \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{q}{d}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (79)$$

kde m, n a q jsou celá kladná čísla a a, b, d jsou rozměry třírozměrného rezonátoru. V případě, že $a = b$ obdržíme:

$$v_{mnq} = \frac{qc}{2d} \left(1 + \frac{n^2 + m^2}{a^2} \cdot \frac{d^2}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (80)$$

A po Taylorově rozvoji, kdy $a = b < d$:

$$v_{mnq} \cong \frac{qc}{2d} + (m^2 + n^2) \cdot \frac{cd}{4qa^2} \quad (81)$$



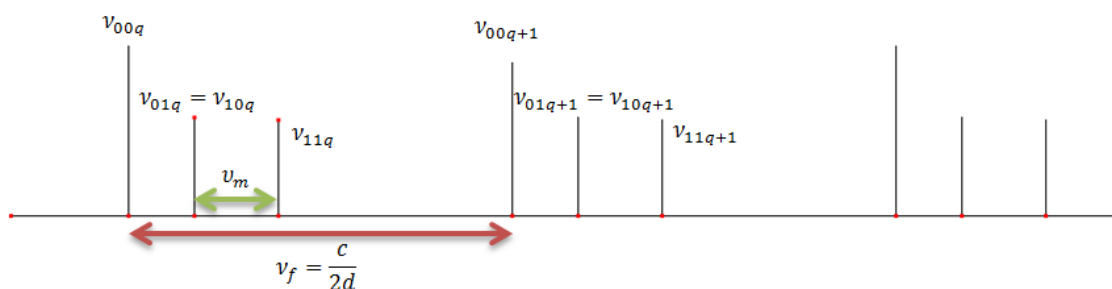
OBRÁZEK 6: DVOUROZMĚRNÝ REZONÁTOR S $m = 3, q = 1$

V tomto vztahu se opět nachází člen podélného módu (první člen součtu), ale také složka odůvodňující vznik příčných módů, které mohou být pro určitá uspořádání rezonátoru také stabilní. Tyto další módy lze pozorovat právě v případě, kdy oběhlý paprsek koinciduje s paprskem vstupujícím až při několikatém oběhu rezonátorem, přičemž až poté dojde k přesnému kopírování dráhy paprsku, výsledná intenzita je pak rozložena středově symetricky podél optické osy za současného vzniku tzv. hermitovských-gaussovských a laguerrovských-gaussovských módů (viz kapitoly 2.7 a 2.8).

Protože je intenzita kolem osy více rozložena, než je tomu u intenzity čistě Gaussovského svazku, dochází za běžných okolností z důvodu velkých ztrát způsobených silnější difrakcí k potlačení vyššího módu, čímž je možno stabilizovat vždy ten nejzákladnější možný mód. Příklady stabilizovaných módů jsou na obrázku 7. Pro frekvenční vzdálenost dvou vyšších transversálních módů s fixovaným n a q lze obdobně jako pro podélný rezonátor odvodit vztah:

$$v_m = \frac{((m+1)^2 + n^2) \cdot cd - (m^2 + n^2) \cdot cd}{4qa^2} = \frac{(2m+1)cd}{4qa^2} \quad (82)$$

3.7 Rozložení módů



OBRÁZEK 7: ROZLOŽENÍ MÓDŮ VE FREKVENČNÍ CHARAKTERISTICE REZONÁTORU

3.8 Rezonátor se sférickými zrcadly

Doposud jsme uvažovali rezonátory s rovinnými zrcadly. Rezonátor s tímto uspořádáním je však vysoce citlivý na geometrické nastavení. Zrcadla musejí být dokonale rovnoběžná, jinak dojde po několika odrazech k tomu, že svazek rezonátor opustí, nehledě na vliv difrakce. Rezonátory s kulovými zrcadly nabízejí stabilnější konfigurace a je snazší docílit toho, aby světelný paprsek zůstal uvnitř rezonátoru, nastavení není tolik citlivé na přesnost. Středů křivosti zrcadel vzdálených od sebe d s poloměry křivosti R_1 a R_2 leží na optické ose. Systém je podél této osy rotačně symetrický.

3.9 Stabilizace paprsku v rezonátoru

Rezonátor je možné popsat pomocí periodicky se opakující soustavy optických prvků, protože po absolvování jednoho oběhu jsou paprsky nuceny projít vždy znovu stejnou cestu. Tato soustava má také svou přenosovou matici. Jak je uvedeno v (36) a (37), můžeme m -tý průběh systémem popsat jako:

$$h_{m+1} = A \cdot h_m + B \cdot \theta_m \quad (83)$$

$$\theta_{m+1} = C \cdot h_m + D \cdot \theta_m \quad (84)$$

Přenosová matice, která popisuje jeden oběh rezonátorem, je:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_2} & d \left(2 - \frac{d}{f_2}\right) \\ -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 f_2} & \left(1 - \frac{d}{f_1}\right) \left(1 - \frac{d}{f_2}\right) - \frac{d}{f_1} \end{pmatrix}, \quad (85)$$

kde 1., 3. matice součinu představují odraz od zrcadel a 2., 4. matice představují šíření světla vakuem.

Z rovnice pro polohu (83) je možné vyjádřit úhlovou složku:

$$\theta_m = \frac{h_{m+1} - A \cdot h_m}{B} \quad \wedge \quad \theta_{m+1} = \frac{h_{m+2} - A \cdot h_{m+1}}{B} \quad (86)$$

Jejíž zasažením do rovnice pro úhel (84):

$$\frac{h_{m+2} - A \cdot h_{m+1}}{B} = C \cdot h_m + D \cdot \frac{h_{m+1} - A \cdot h_m}{B} \quad (87)$$

Získáme rekurentní vztah popisující polohu paprsku:

$$h_{m+2} = h_m \cdot (BC - AD) + h_{m+1} (A + D) \quad (88)$$

Pokud předpokládáme řešení ve tvaru $h_m = h_0 \cdot c^m$, obdržíme dosazením do rovnice výše

$$c^2 - 2bc + F^2 = 0, \quad (89)$$

kde jsme zavedli $F^2 = AD - BC = \det[M]$ a $b = \frac{A+D}{2}$.

Pokud řešíme rovnici jako kvadratickou funkci c , obdržíme výsledek:

$$c = b \pm i(F^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \quad (90)$$

Můžeme dále zavést $\cos \varphi = \frac{b}{F}$, takže $b = F \cdot \cos \varphi$ a $(F^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} = F \cdot \sin \varphi$. Odtud vyjádříme $c = F \cdot \cos \varphi \pm iF \cdot \sin \varphi$, což vede k rovnici pro h_m :

$$h_m = h_0 \cdot F^m \cdot e^{\pm im\varphi} \quad (91)$$

A pro reálnou část funkce h_m platí:

$$\operatorname{Re}\{h_m\} = h_0 \cdot F^m \cdot \cos(m\varphi) \quad (92)$$

Pokud bereme v potaz, že $F^2 = \det[M]$, kde M je matice přenosu, není těžké určit, že tento determinant je pro libovolnou matici přenosu roven $\frac{n_1}{n_2}$, kde n_1 je index lomu prostředí, ze kterého paprsek vstupuje, a n_2 je index lomu prostředí, do kterého paprsek vystupuje. V našem případě paprsek vstupuje, jakožto i vystupuje do vzduchu, tedy platí $F = \sqrt{\det[M]} = 1$ (lze ověřit např i na vztahu (71)). Výsledná rovnice pro polohu paprsku v rezonátoru tedy je:

$$h_m = h_0 \cdot \cos(m\varphi), \quad (93)$$

kde $\varphi = \arccos \frac{b}{F} = \arccos \frac{A+D}{2}$.

Protože je rovnice pro polohu paprsku reálná, je-li rezonátor stabilní, je určující podmínkou stability rezonátoru reálnost úhlu φ , což nám dává podmínku pro b :

$$|b| = \left| \frac{A+D}{2} \right| \leq 1 \quad (94)$$

Pokud tato podmínka není splněna, je řešením hyperbolická funkce, která vždy roste nade všechny meze, čímž rezonátor destabilizuje.

Perioda oběhu s je zavedena jako počet oběhů rezonátorem, který způsobí, že paprsek začne kopírovat svoji původní dráhu:

$$h_{m+s} = h_0 \cdot \sin[(m+s)\varphi] = h_0 \cdot \sin(m\varphi) \quad (95)$$

Aby toto platilo, musí být splněno $s \cdot \varphi = q \cdot 2\pi$

3.10 Podmínka stability rezonátoru

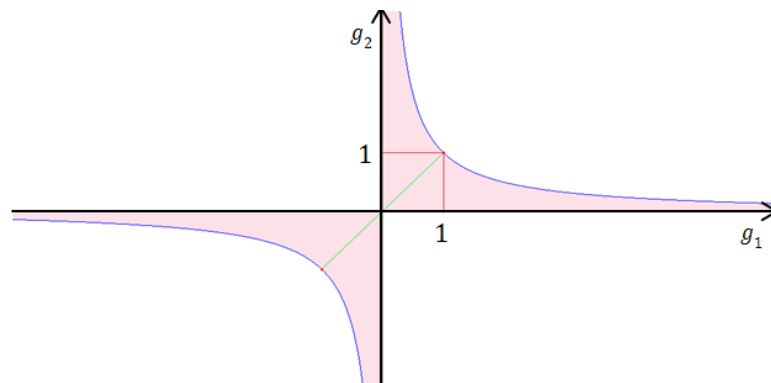
Pokud vyjdeme ze vztahu (85) a budeme zkoumat splnění podmínky stanovené v (94), obdržíme podmínku stability lineárního rezonátoru:

$$0 \leq \frac{A+D+2}{4} = \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) \leq 1 \quad (96)$$

Která se běžně interpretuje pomocí $g_i = \left(1 - \frac{d}{R_i}\right)$ tak, že:

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \quad (97)$$

Nyní můžeme stabilitu vynést graficky, znázornění je pak na obrázku 8.



OBRÁZEK 8: GRAF ZNÁZORŇUJÍCÍ OBLAST STABILITY REZONÁTORU PODLE VZTAHU (97)

3.11 Nalezení gaussovského módu rezonátoru

Aby se gaussovský svazek po odrazu od sférického zrcadla šířil se stejným prostorovým rozložením jako svazek dopadající, musí být jeho poloměr křivosti při odrazu stejný, jako je poloměr křivosti zrcadla. Jestliže jsou dvě zrcadla vzdálena o d ve směru optické osy a poloměr křivosti svazku se na téže vzdálenosti změní tak, že svazek po odrazu na zrcadle kopíruje svou vlastní dráhu, bude tento svazek stabilní. Uvnitř rezonátoru tak bude existovat stabilní svazek, který splňuje Helmholtzovu rovnici a okrajové podmínky dané zrcadly (59). V případě, že je toto vše splněno, hovoříme o gaussovském svazku jako o módu sférického rezonátoru. Optická osa je v tomto případě určena středy zrcadel. Sedlo svazku, jehož parametry chceme určit, leží v $z = 0$. První zrcadlo je umístěno v místě z_1 a druhé v $z_2 = z_1 + d$.

Nyní polohu sedla určíme tak, že ztotožníme poloměry křivosti zrcadel R_1, R_2 s poloměry křivosti svazku vyjádřeného v (23) jako $R(z) = z + \frac{z_R^2}{z}$.

$$R_1 = z_1 + \frac{z_R^2}{z_1} \quad a \quad -R_2 = z_2 + \frac{z_R^2}{z_2} \quad (98)$$

S využitím vztahu (98) a znalostí vztahu mezi z_2 a z_1 jsme schopni nalézt pozice z_1, z_2 a Rayleighovu délku Z_r :

$$z_1 = \frac{-d(R_2+d)}{R_1+R_2+2d}, \quad z_2 = \frac{d(R_1+d)}{R_1+R_2+2d} \quad a \quad Z_r^2 = \frac{w_0^4 \pi^2}{\lambda^2} = \frac{-d(R_1+d)(R_2+d)(R_1+R_2+d)}{(R_1+R_2+2d)^2} \quad (99)$$

Pološírky svazku v místě zrcadel pak podle (22) jsou:

$$w_i = w_0 \left[1 + \left(\frac{z_i}{Z_r} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad kde \quad i = 1, 2 \quad (100)$$

3.12 Dělení rezonátorů

3.12.1 Podle tvaru kavity

- Lineární rezonátor – Světelné vlnění je nuceno pohybovat se po stejné dráze oběma směry, takže vzniká stojaté vlnění. Pokud rezonátor obsahuje další optické prvky, je zajímavé pozorovat chování paprsku při průchodu skrze prvek oběma směry.
- Cirkulární rezonátor – Světlo se pohybuje po uzavřené smyčce pouze v jednom směru, přičemž může v konkrétních bodech docházet ke křížení paprsků. Protože kvanta světla fotony mají celočíselný spin, jde o bosony. Bosony jako takové se mohou vyskytovat všechny ve stejném stavu a přitom se navzájem neovlivňovat, proto při křížení paprsků nedochází k jejich vzájemnému ovlivnění. U cirkulárního rezonátoru nedochází k vracení světla zpět ke zdroji.

3.12.2 Podle zdroje rezonujícího záření

- Pasivní rezonátor – Tento rezonátor vyžaduje vnější zdroj záření. To je pak pomocí optických prvků nasměrováno na vstupní zrcadlo rezonátoru, přičemž uvnitř rezonátoru dochází k superpozici vstupní vlny se všemi vlnami, které se v rezonátoru pohybují a které vznikly již několikanásobným odrazem původní vlny od zrcadel rezonátoru.
- Aktivní rezonátor – Slouží jako zdroj monochromatického záření, kdy dochází k zesílení konkrétního módu při průchodu aktivním prostředím, které je buzeno. Díky tomu může docházet ke stimulované emisi, což má za následek právě zvýšení amplitudy paprsku. Rezonátor má částečně propustné výstupní zrcadlo, kterým může unikat paprsek světla o daných vlastnostech, které jsou definovány rozměry rezonátoru

3.12.3 Podle tvaru a uspořádání zrcadel

- Planární rezonátor – Tento typ má obě zrcadla rovinná, takže $R_1 = R_2 = \infty$ a v grafu stability na obrázku 8 jsou jeho souřadnice $[1; 1]$. Takovýto rezonátor je na samé hraně stability a na konfiguraci zrcadel je extrémě citlivý, proto se pro navazování svazku příliš nehodí
- Konfokální rezonátor – Tento typ má obě zrcadla sférická, kdy $R_1 = R_2 = -d$. Ohnisko zrcadla leží vždy na druhém zrcadle. Toto nastavení je v grafu stability reprezentováno souřadnicemi $[0;0]$. Dá se předpokládat, že navazování svazku do takovéto sestavy je velmi výhodné, rezonanční módy se velmi rychle stabilizují a navíc je velmi snižená citlivost na konfiguraci zrcadel. Sedlo rezonátoru leží uprostřed kavity.
- Koncentrický – Tento typ je na opačném spektru stability, než planární rezonátor. Obě zrcadla mají poloměry křivosti $R_1 = R_2 = -\frac{d}{2}$, což má za následek, že zrcadla odrážejí paprsky skrze společné ohnisko a při nepřesném nastavení dojde k opuštění rezonátoru paprskem. V grafu stability jsou souřadnice tohoto nastavení $[-1;-1]$.
- Konfokálně planární rezonátor – U předchozích tří typů rezonátoru byl uvažován symetrický případ, kdy obě zrcadla jsou shodná a zaměnitelná, a proto body reprezentující jejich sestavu v grafu stability leží na ose grafu také vyznačené na obrázku 8. V tomto posledním případě jsou poloměry zrcadel $R_1 = \infty$ a $R_2 = -d$. Ohnisko sférického zrcadla tak leží na planárním zrcadle, které svazek posílá zpět přesně po shodné dráze. Sedlo pro tuto konfiguraci leží na planárním zrcadle. V grafu stability je tato konfigurace reprezentována souřadnicemi $[1;0]$.

4 Navazování základního gaussovského módu 00

Praktická část bakalářské práce se skládá ze dvou hlavních témat. Postupně bude rozebráno navazání základního módu gaussovského svazku, bude popsán způsob, jakým k navázání došlo, podmínky, které vedou k tvorbě vyšších, nezákladních transverzálních módů a budou uvedeny parametry, které jsme byli schopni měřením určit. V další sekci se pak budeme zabývat pokusy o navazání besselovského-gaussovského nedifrakujícího svazku, přičemž budeme vycházet opět z parametrů svazku a budeme se snažit navrhnout rezonátor, který bude schopen stabilizovat besselovský svazek.

4.1 Seznámení se s rezonátorem

Pro navazání gaussovského svazku jsme volili již připravený rezonátor laseru, ze kterého bylo vyňato aktivní prostředí. Jedná se o lineární pasivní rezonátor s otevřenou kavitou ze slitiny invar, mající velmi nízkou teplotní roztažnost, kterou jsme odizolovali od vlivů vzduchového proudění překrytím. Tento rezonátor má konkávní sférické vstupní zrcadlo o poloměru křivosti $R_1 = 180 \text{ cm}$ a částečně propustné konkávní sférické výstupní zrcadlo s poloměrem křivosti $R_2 = 100 \text{ cm}$, která jsou od sebe vzdálena o $d = 13,3 \text{ cm}$. Podle vztahu (96) jsou parametry stability $g_1 = 0,867$ a $g_2 = 0,926$, rezonátor tedy bude v pásmu stability obrázku 8. Vstupní zrcadlo je dále ovládané pomocí piezoelementu. Díky tomu je možné zrcadla nastavit do takové polohy, aby byla splněna fázová podmínka (56). Do rezonátoru vstupuje laserový svazek vlnové délky $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ produkovaný stabilizovaným HeNe laserem od firmy SIOS typu SL 03

Nejprve jsme se seznámili s tím, jak se v rezonátoru paprsek chová, co jsou to módy rezonátoru a jak tyto módy vypadají na výstupním zrcadle rezonátoru. Zkoušeli jsme rezonátor umisťovat do různých vzdáleností od laseru a jemně jsme jej natáčeli, abychom viděli, jak se změna místa pro vstup paprsku projevuje na rezonujícím módu.

4.2 Módové přizpůsobování

Dalším krokem bylo sestavit měřicí aparaturu tak, aby středy zrcadel rezonátoru ležely na optické ose, po které se paprsek šíří, a zároveň aby sedlo svazku sedlo na sedlo rezonátoru. To je vysoce důležité, protože při nesplnění této podmínky nesleduje světlo přesně svou optickou dráhu, nekoinciduje se vstupním paprskem při každém oběhu rezonátorem, energie nerezonuje pouze v módu 00, ale hlavně ve vyšších transverzálních módech, intenzita základního módu je nízká a rozšiřuje se rozložení intenzity výstupního svazku. Tato procedura hledání shodných módů rezonátoru a svazku se nazývá módové přizpůsobování.

Správné zarovnání rezonátoru a vstupního laserového svazku znamená, že vstupující svazek se ztotožní se základním módem rezonátoru a není tak vůbec přítomen žádný z vyšších prostorových módů. To znamená, že sedlo svazku bude mít stejnou pozici jako sedlo rezonátoru

a komplexní poloměr křivosti svazku bude v místě dopadu shodný s poloměrem křivosti zrcadel. Každé nastavení rezonátoru má svůj soubor módů, které všechny tvoří kompletní set módů, které mohou v rezonátoru existovat, popsanych v kapitolách 2.10 a 2.11. Tyto módy fyzikálně popisují distribuci elektrického pole, které se šíří rezonátorem, aniž by po i několikanásobném oběhu došlo ke změně tvaru pole.

Podle (Anderson 1984) vede už pouhé malé odchýlení osy zrcadel od osy svazku na vstupu do rezonátoru k projevu vyšších hermitovských-gaussovských módů, což jsme také pozorovali. Po zavedení polárních souřadnic ti samí autoři ukazují, že při nastavení, ve kterém není přesně shodné sedlo svazku se sedlem rezonátoru, sedlo svazku se například nachází mimo oblast ohniskové hloubky nebo je jeho velikost značně odlišná od velikosti sedla rezonátoru, dochází k tvorbě laguerrovských-gaussovských módů. Lze také obdržet kombinace těchto modifikací aplikováním obou destabilizujících postupů.

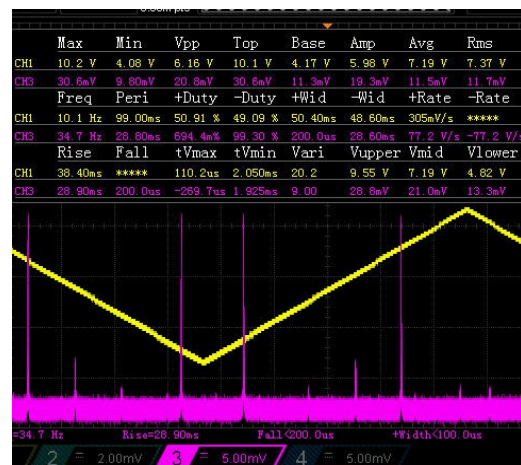
4.3 Provedená měření

Poté, co jsme se seznámili s tím, jak rezonátor funguje, jsme začali s jeho zarovnáváním a hledáním základního gaussovského módu.



OBRÁZEK 9: MĚŘICÍ SESTAVA. VPRAVO DOLE JE LASER A VLEVO NAHOŘE PAK REZONÁTOR

Před a za rezonátorem jsme umístili dělič, který část intenzity vracejícího se resp. vystupujícího pole předával na fotodiodu značky Thorlabs typ PDA 36 A, ze které byl signál přenášen na osciloskop zn. RIGOL model DS 1074 (obrázek 10 spodní signál). Pro měření profilu paprsku jsme použili CCD kameru zn. Edmund typ eo1312M, která byla umístěna těsně za výstupním zrcadlem a děličem. K zarovnávání paprsku tak, aby nedocházelo k tvorbě vyšších



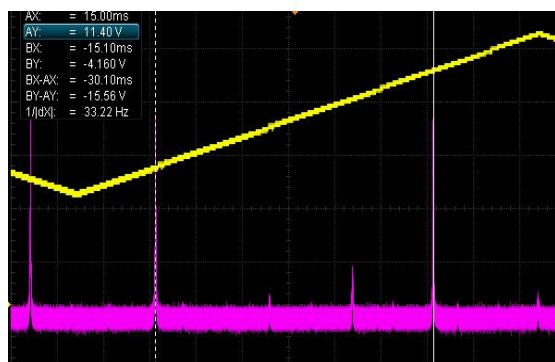
OBRÁZEK 10: ÚDAJE Z OSCILOSKOPU PRO SIGNÁL FOTODIODY (VŽDY SPODNÍ ÚDAJ) A PIEZOELEMENTU (VŽDY HORNÍ ÚDAJ)

hermitovských-gaussovských módů, jsme použili dvě rovinná zrcadla od firmy Thorlabs, která byla nastavitelná a bylo tak možné měnit nejen sklon, ale i pozici paprsku vůči optické ose v rezonátoru.

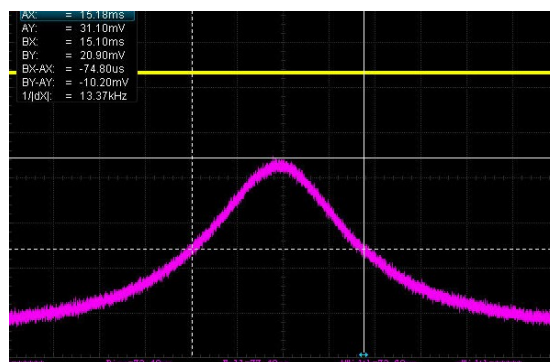
Protože jsme při hledání základního gaussovského módu ještě neznali poloměry křivosti zrcadel (zrcadla byla napevno ukotvena v rezonátoru a abychom dokázali poloměry křivosti změřit, museli jsme po ukončení měření rezonátor rozebrat), neznali jsme ani přesnou polohu sedla rezonátoru. Sedlo jsme tak hledali při zarovnaném rezonátoru tak, že jsme posouvali čočku o dané ohniskové vzdálenosti $f = 20 \text{ cm}$ po optické ose a hledali jsme místo, kde byl záznam projevu gaussovského svazku co nejlepší. Toto místo jsme určili ve vzdálenosti $p = 25 \text{ cm}$ od vstupního zrcadla. Všechna měření týkající se gaussovského svazku jsou pak provedena s touto sestavou zachycenou na obrázku 9.

Při manipulaci s paprskem jsme na CCD kameře zaznamenávali tvary výstupních módů a hledali optimální nastavení pro existenci základního gaussovského módu. Toto uspořádání se nazývá Fabryův-Perrotův skenovací interferometr a při ideálním nastavení, kdy je jemnost rezonátoru vyšší než jemnost dopujícího laseru, je vhodné k určování spektrálního složení laserů, protože je stejně jako v našem případě možné skenovat intenzity v závislosti na délce rezonátoru, a tím určit kvalitu laserování v závislosti na vlnové délce. Pokud by navíc laser nebyl konstruován na základní 00 mód, pozorovali bychom více píků se stejnou, nejvyšší hodnotou intenzity, jak je to popsáno v kapitole 3.6, přičemž nejlépe to demonstruje vztah (81).

Jakmile se nám podařilo optimálně nastavit rezonátor tak, aby podporoval existenci základního gaussovského módu, bylo nutné začít se zaobírat splněním fázové podmínky dané rovnicí (56). K tomu jsme využili piezoelement připevněný na vstupní zrcadlo a to tak, že jsme do něj periodicky pouštěli pilový signál (obr.11 horní signál), přičemž jsme pokračovali se záznamem výstupního signálu pomocí CCD kamery. Hlavně jsme však monitorovali výstupní intenzitu pomocí fotodiody a osciloskopu, což nám pomohlo nastavení zrcadel ještě dále optimalizovat tak, aby byly dosahované píky intenzit co nejvyšší. Jak jsme předpokládali, byly tyto píky projevy základního gaussovského módu rezonátoru patrné na obrázku 12 (měřítka osy x je v porovnání s obr. 11 značně sníženo). Vzhled gaussovského módu, který způsobuje pík, je pak na obrázku 13.



OBRAZEK 11: ZÁZNAM MÓDŮ NA NÁBĚŽNÉ HRANĚ PIEZA



OBRAZEK 12: DETAIL PÍKU 00 GAUSSOVSKÉHO SVAZKU

Jak se nám podařilo zjistit, rezonátor, do kterého jsme umisťovali laserový paprsek, měl sférické vstupní zrcadlo o poloměru křivosti $R_1 = 180 \text{ cm}$, sférické výstupní zrcadlo mělo poloměr křivosti $R_2 = 100 \text{ cm}$ a jejich vzdálenost byla $d = 13,3 \text{ cm}$. Toto bylo zjištěno až po provedení všech měření z toho důvodu, že musel být rezonátor pro změření zrcadel rozebrán. Ze vztahu (98) lze určit, že polohy zrcadel vzhledem k sedlu svazku byly podle (99) $z_1 = -4,91 \text{ cm}$, $z_2 = 8,39 \text{ cm}$ a ohnisková hloubka byla $2 \cdot Z_R = 60,3 \text{ cm}$.

Ideální polohu čočky jsme určili až po ukončení provedených měření. Výrobce laseru udává, že divergence svazku je $\theta = 0,75 \text{ mrad}$, sedlo má velikost $w = 275 \mu\text{m}$ (lze ověřit ze vztahu (29)) a ohnisková hloubka je podle vztahu (21) $2 \cdot Z_R = 75 \text{ cm}$. Využili jsme čočku od firmy Thorlabs o ohniskové vzdálenosti 20 cm a průměru $r = 30 \text{ mm}$. Pomocí (31), (33) a (34) a znalosti velikosti ohniskových hloubek rezonátoru a svazku jsme určili, že zvětšení čočky má být $V = 0,90$ a ideální vzdálenost čočky od vstupního zrcadla rezonátoru by pak měla být $a = 37,3 \text{ cm}$.

Námi určená poloha p se od ideální polohy čočky lehce liší. Protože se čočka ke vstupnímu zrcadlu nacházela blíže, než bylo potřeba, byl svazek v místě sedla rezonátoru širší, což způsobilo splnění rezonanční podmínky pro další laguerrovské-gaussovské píky, které jsou zaznamenány jako nižší píky na obrázku 11. Na obrázku 13 je také velmi dobře patrný vliv difrakce světla způsobený konečnými rozměry zrcadla a právě nedokonalostmi v módovém přizpůsobování, kdy i nepatrné odchylky od ideálního nastavení mají velký vliv na vznikající „halo“ kolem gaussovského módu. Užitečné hodnoty vztahující se k obrázku 10 jsou uvedeny v tabulce 1.

TABULKA 1

Časová vzdálenost píků [ms]	Časová šířka píku [μs]	Frekvence pilového signálu [s^{-1}]	U_{pp} pilového signálu [V]
30,1	74,8	10,1	6,16

Abychom se ujistili, že je zkoumaný rezonátor vhodný pro pozorování chování všech typů gaussovských módů, bylo třeba určit jemnost rezonátoru. V tomto ohledu jsme postupovali podle (Dickmann 1992) Na osciloskopu jsme odečítali závislost intenzity na napětí vstupujícím do piezoelementu. Obě maxima jsou měřena na stejné náběžné hraně signálu, abychom měli jistotu, že došlo ke spojitému protažení rezonátoru. Piezoelement s upevněným zrcadlem se při zvýšení napětí protahuje nebo smršťuje a při změně délky



OBRÁZEK 13: ZACHYCENÝ ZÁKLADNÍ GAUSSOVSKÝ MÓD

rezonátoru o polovinu vlnové délky světla dojde k dalšímu zachycení stejného módu.

Průběh změny napětí je závislý na čase $U = U(t)$. Pokud bereme v potaz pouze náběžnou hranu, je závislost lineární. Stejně tak je lineární i závislost protažení piezoelementu na napětí, tedy i na čase. Pokud nám tedy rezonuje konkrétní frekvence při délce rezonátoru d , pak k další rezonanci stejné frekvence dojde při protažení rezonátoru o $\frac{\lambda}{2}$, tedy při délce $d + \frac{\lambda}{2}$. Pokud se pohybujeme těsně v okolí kolem délky d určující rezonanční frekvenci ν_f ($\delta d \ll \lambda$), přecházíme přes frekvence, jejichž fáze je již lehce posunuta vlivem zrcadel o $\delta\varphi$ a podle vztahu (72) dochází kvůli posunu fáze vlny k útlumu intenzity a ohraničení píku. Protože fáze φ se ve směru osy z mění lineárně a vztahem (74) jsme uvedli její souvislost s frekvencí, je i rezonanční frekvence lineárně závislá na souřadnici z . Z uvedených úvah tedy vyplývá:

$$\nu_f \approx \Delta\varphi(d) \approx d(U) \approx U(t) \approx t$$

Přičemž všechny závislosti ve vztahu jsou lineární.

Tento postup nám umožní vyjádřit jemnost nejen pomocí vzdálenosti rezonančních frekvencí a FWHM píku při dosažení některé z nich, ale stejným způsobem i její závislost na časových intervalech vedoucích k protahování piezoelementu a doby trvání (FWHM) jednoho píku:

$$\mathfrak{F} = \frac{\nu_f}{\delta\nu} = \frac{t_f}{\delta t} = \frac{30,1 \cdot 10^{-3}}{74,8 \cdot 10^{-6}} = 402$$

Povšimněme si přitom, že v našem případě neexistuje souvislost uvažované frekvence světla s převrácenou hodnotou časového intervalu, ten totiž souvisí s náběhem piezoelementu, nikoliv s prodlevou mezi dvěma vlnami stejné fáze. Těchto úvah lze využít, pokud je spektrální šířka laseru mnohem užší, než spektrální šířka rezonátoru. Pokud by tomu tak nebylo, došlo by ke snížení jemnosti vlivem nízké kvality vstupujícího paprsku.

Jak dále uvádí (Ye a Lynn 2003), souvisí námi definovaná jemnost rezonátoru se středním počtem průletů fotonu kavitou N jako:

$$N = \frac{\mathfrak{F}}{2\pi} = 64$$

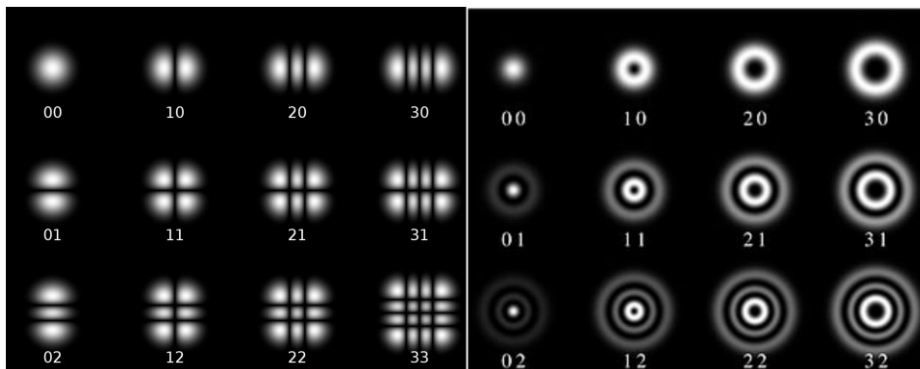
To znamená, že intenzita při rezonanci $I = N \cdot I_0 = 64 I_0$, kde I_0 je intenzita vstupujícího svazku.

Nyní se můžeme pokusit vypočítat citlivost piezoelementu z údajů z tab. 1. Pilový signál měl frekvenci 10,1 Hz, což odpovídá časové délce náběžné hrany trojúhelníkového signálu: $t_n = \frac{1}{10,1 \cdot 2} = 49,5 \text{ ms}$. Na tomto časovém úseku došlo ke změně generovaného napětí o $U_{pp} = 6,16 \text{ V}$. Protože časová vzdálenost dvou maxim intenzity je $t_f = 30,1 \text{ ms}$ a napětí je dále stopadesátkrát zesilováno, bude napětí přivedené na piezoelement u třetího viditelného maxima na obrázku 11 o $\Delta U = \frac{t_f}{t_n} \cdot V_{pp} \cdot 150 = 562 \text{ V}$ vyšší než u maxima druhého.

Vzhledem k tomu, že vlnová délka použitého laseru je $\lambda = 632,8 \text{ nm}$, lze spočítat citlivost piezoelementu, protože mezi píky musí dojít k protažení rezonátoru o polovinu vlnové délky $\lambda/2 = 316,4 \text{ nm}$. Citlivost piezoelementu tedy vychází $C = \frac{\Delta d}{\Delta V} = \frac{316,4}{562} = 563 \frac{\text{pm}}{\text{V}}$.

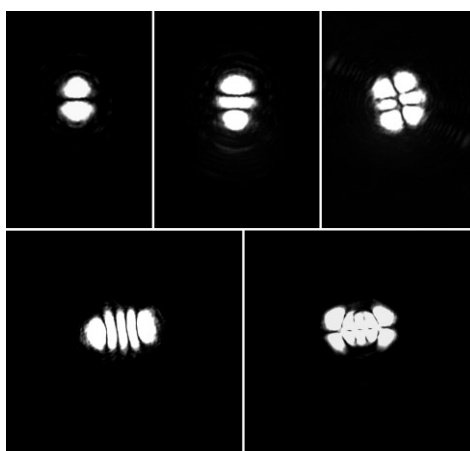
4.4 Zkoumání vyšších módů rezonátoru

V dalším postupu jsme zkoušeli, zda pohybování zrcadly nebo čočkou při zachování soustavy skutečně způsobí tvorbu transverzálních módů vyšších řádů. Podle teorie je tvar transverzálních módů určován gaussovským svazkem rozšířeným o tzv. hermitovské (37) a laguerrovské (40) polynomy. Teoreticky předpovězený vzhled módů je na obrázku 14.

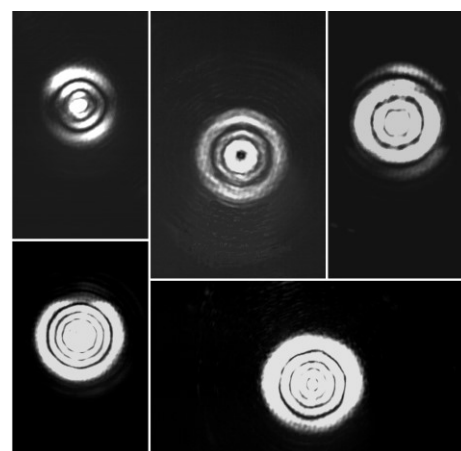


OBRÁZEK 14: TEORETICKÉ PŘEDPOVĚDI HERMITOVSKÝCH-GAUSSOVSKÝCH MÓDŮ (VLEVO) A LAGUERROVSKÝCH-GAUSSOVSKÝCH MÓDŮ (VPRAVO), (KARIMI ET AL. 2007)

Nejprve jsme pomocí zrcadel upravovali polohu a úhel svazku vzhledem k optické ose. Tímto způsobem jsme dosáhli toho, že svazek vstupoval do rezonátoru mimo optickou osu a navíc byl vůči ní vychýlen o úhel θ . To způsobilo snížení píky intenzity na osciloskopu, pokles jemnosti rezonátoru a vytvoření hermitovských-gaussovských módů, jak bylo předpovězeno v práci (Anderson 1984). Výsledné zachycené transverzální hermitovské-gaussovské módy vyšších řádů jsou na obrázku 15.



OBRÁZEK 15: VYFOCENÉ HERMITOVSKÉ-GAUSSOVSKÉ MÓDY



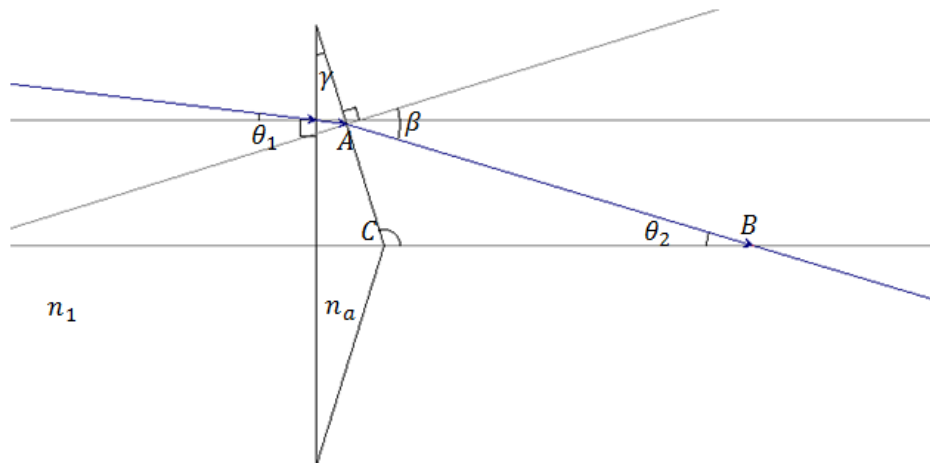
OBRÁZEK 16: VYFOCENÉ LAGUERROVSKÉ-GAUSSOVSKÉ MÓDY

Následně jsme pohybovali polohou sedla svazku, což mělo za následek tvorbu laguerrovských-gaussovských módů. Tyto módy vznikají tak, že světelný svazek není zrcadlem směřován přesně na stejnou dráhu, po které k němu dorazil, ale dojde k jeho jemnému odklonění, a ke sledování výchozí dráhy dojde až po několika obězích.

Výsledné zachycené transversální laguerrovské-gaussovské módy vyšších řádů jsou na obrázku 16. V obou případech pozorujeme poměrně silné projevy difrakce. Je to kvůli tomu, že příčné módy rezonátoru mají intenzitu více rozloženou po příčném průřezu svazku a omezení dané velikostí zrcadel a kvalitou kavity opět způsobuje „halo efekt“ kolem pozorovaných módů.

5 Přenosová matice axiconu

Abychom se nyní mohli plně věnovat navazování besselovského svazku do rezonátoru, odvodíme matici přenosu axiconu, který vytváří besselovské pole. Jak vidíme na obrázku 17, dochází k zalomení paprsku s vektorem o souřadnicích h_1 a θ_1 podle Snellova zákona na vstupní stěně axiconu tak, že $h_n = h_1$ a $\theta_1 = \frac{\theta_n \cdot n_a}{n_1}$, kde θ_n je úhel, pod kterým se paprsek šíří skrze axicon a $n_1 = 1$ je index lomu vzduchu (viz vztah (45)), a na výstupní stěně opět $h_2 \doteq h_n$ a $(\gamma + \theta_n) \cdot n_a = \beta \cdot n_1$. Lomený paprsek pak vytváří trojúhelník s hledaným úhlem θ_2 při styku s optickou osou v bodě B, takže z trojúhelníku ABC vidíme podmínku $180 = 90 - \beta + \theta_2 + 90 + \gamma$, kde γ je úhel axiconu.



OBRÁZEK 17: AXICON, DO NĚJŽ VSTUJUJE PAPERSEK POD ÚHLEM θ_1 A VYSTUJUJE PAPERSEK POD ÚHLEM θ_2

Po dosazení za β a θ_n získáváme vztah pro θ_2 v závislosti na θ_1 :

$$\theta_2 = \left(\gamma + \frac{\theta_1}{n_a} \right) \cdot n_a - \gamma = \theta_1 \cdot \left(1 + \frac{\gamma \cdot (n_a - 1)}{\theta_1} \right)$$

Pro axicon tedy obdržíme matici přenosu: $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\gamma \cdot (n_a - 1)}{\theta_1} \end{pmatrix}$.

Z tvaru přenosové matice je jasně vidět, že pro jakýkoliv paprsek splňující paraxiální přiblížení dojde pouze k jeho zalomení o úhel $\gamma \cdot (n_a - 1)$ směrem k optické ose, přičemž nezáleží ani na velikosti úhlu, pod kterým paprsek vstupuje, ani na vzdálenosti paprsku při vstupu od osy.

Ačkoli se v matici přenosu na pozici D vyskytuje pro nulový vstupní úhel $\theta_1 = 0$ singularita, vztah je naprosto vyhovující, protože po přenásobení vektoru vstupního paprsku maticí dojde k vykrácení jmenovatele s druhou složkou vektoru a výsledek bude plnohodnotný.

6 Navazování besselovského svazku do rezonátoru

Do sestavy zkoumané výše vstupuje gaussovský svazek, u kterého dochází k postupnému zakřivování vlnoploch tak, jak se šíří ze svého zdroje podle (23), označovaného jako sedlo. Pokud jsou parametry rezonátoru nastaveny tak, že je splněna podmínka (96) a zároveň má paprsek vhodné vlastnosti (99), pak dojde ke stabilizaci svazku a uvnitř rezonátoru se kumuluje intenzita.

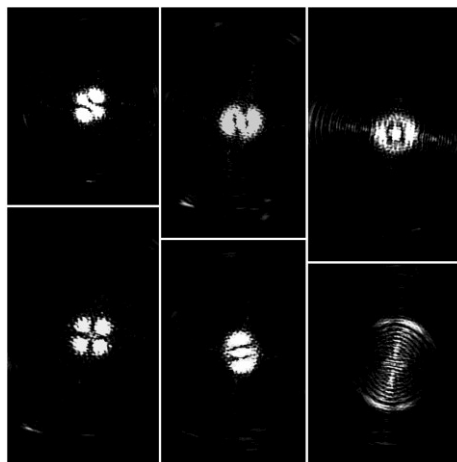
Pro besselovský svazek je postup složitější, jelikož vlnoplochy, které definují jeho pole, jsou rovinné, a proto by měl být rezonátor tvořen rovinnými zrcadly citlivými na geometrii, což v podstatě vede k destabilizaci svazku a nedostatečnému nakumulování intenzity pro rezonanci. Besselovský svazek ve své čisté formě navíc nelze generovat, protože jde o interferenční pole rovinných vln (8) nesoucích nekonečnou energii. V naší práci se zabýváme navazováním besselovského-gaussovského svazku, tedy svazku generovaného ze základního gaussovského svazku pomocí axiconu.

Besselovský-gaussovský svazek je takový svazek, který vznikne vstupem gaussovského svazku do axiconu. Jeho elektromagnetické pole je pak donuceno interagovat samo se sebou, jak je popsáno v (Putnam et al. 2012). Vyzkoušeny byly hned 3 postupy, pomocí kterých jsme se pokusili besselovský-gaussovský svazek navázat do rezonátoru tak, aby došlo k rezonanci.

6.1 Využití stávající sestavy



OBRÁZEK 18: ROZŠÍŘENÍ SESTAVY PRO GAUSSOVSKÝ SVAZEK PŘIDÁNÍM EXPANDÉRU (VLEVO UPROSTŘED) A AXICONU (VPRAVO UPROSTŘED)



OBRÁZEK 19: ZACHYCENÉ PSEUDOMÓDY

Pro jednoduchost jsme nejprve vyzkoušeli, zda nebude svazek stabilní při zachování sestavy z obrázku 9, přičemž byl do sestavy přidán axicon a také expander od firmy Melles Griot, konkrétně typ 02161 se zvětšením 20x, kterým jsme podle kap. 2.9 zvětšili 400krát ohniskovou hloubku a 20krát snížili divergenci. Nová sestava je na obrázku 18. Gaussovský svazek tak byl převeden téměř na rovinnou vlnu, která pak po průchodu axiconem generovala besselovské-gaussovské pole. Toto pole pak vstupovalo do rezonátoru, kde se dále vyvíjelo a ustalovalo. I když se nedá hovořit o úspěchu při stabilizaci svazku, docházelo k občasným ustálením módů vnesených v obrázku 19. Tvorbu těchto pseudomódů však přisuzujeme gaussovským vlastnostem svazku, které se i přes průchod axiconem nadále projevovaly.

6.2 Sestava uvažující délku besselovského pole

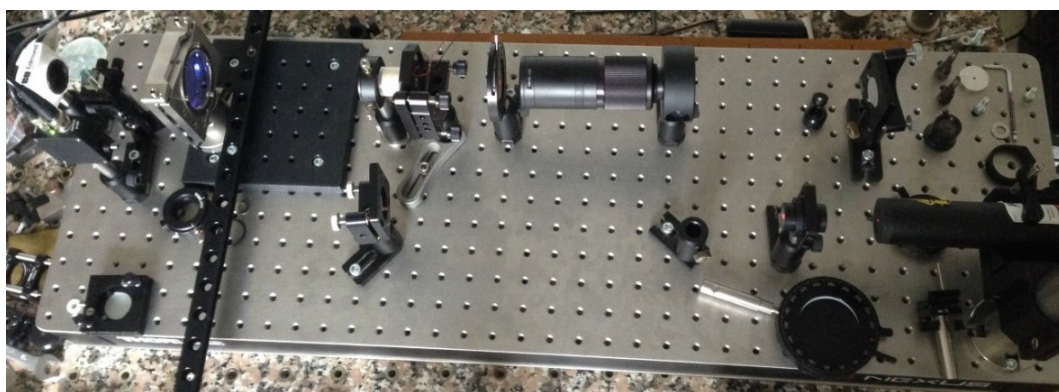
Pro další postup jsme se rozhodli postupovat podle (Muys a Vandamme, nedatováno), kdy byla nejprve určena délka besselovského pole ze znalosti průměru vstupujícího gaussovského svazku pomocí matice přenosu axiconu odvozené výše. Poloměr svazku je $r = 4,9 \text{ mm}$, úhel axiconu je $\gamma = 2^\circ = 0,0349 \text{ rad}$ a jeho index lomu pro naši vlnovou délku je $n_a = 1,455$.

Délku besselovského pole určíme pro rovnoběžný svazek, tedy $h_1 = 4,9 \text{ mm}$ a $\theta_1 = 0$. Paprsek na nejzazším kraji besselovského pole má parametry:

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\gamma \cdot (n_a - 1)}{\theta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{0,0349 \cdot (1,455 - 1)}{\theta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4,9 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,9 \\ 0,01588 \end{pmatrix}$$

Délka besselovského pole je pak snadno spočitatelná z trojúhelníku ABC na obrázku 17 při zavedení $92^\circ \cong \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ a uvažování krajního besselovského paprsku jako toho, který dosáhne nejdál:

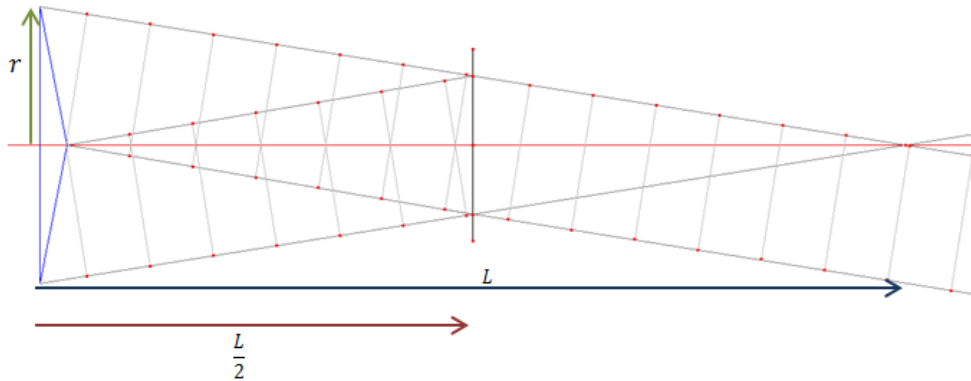
$$L = \frac{r}{\tan \theta_2} \doteq \frac{h_2}{\theta_2} = \frac{4,9}{0,01588} = 308,6 \text{ mm}$$



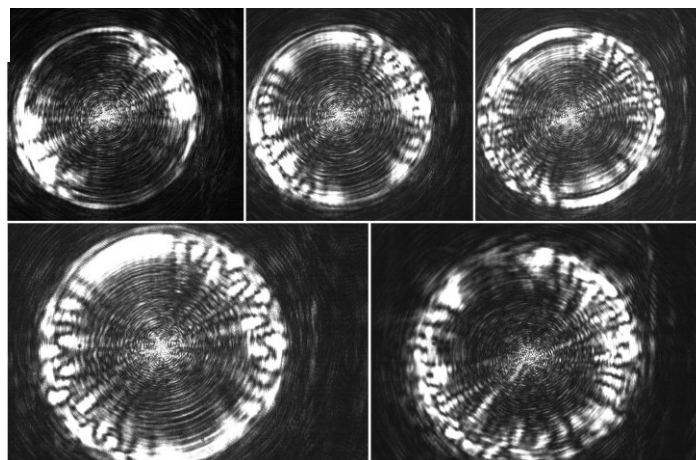
OBRAZEK 20: SESTAVA NAVRŽENÁ S OHLEDEM NA DÉLKU BESSELOVSKÉHO POLE – VSTUPNÍ ZRCADLO HNED ZA APERTUROU A CO NEJBLÍŽE U NĚJ AXICON

Jak navrhuje také (Tsangaris et al. 2003) byl axicon vložen do rezonátoru a výstupní zrcadlo bylo umístěno do vzdálenosti odpovídající polovině délky besselovského pole od axiconu (sestava je na obrázku 20), přičemž výstupní zrcadlo bylo kulové s vysokým

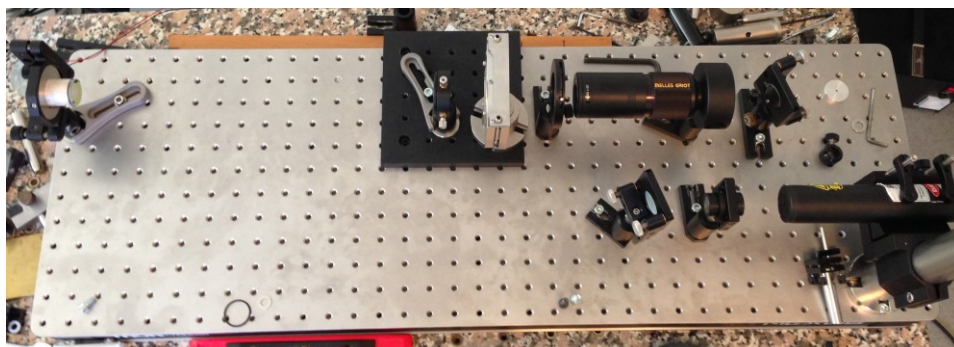
poloměrem křivosti z důvodu lepší stability svazku, což navrhuje (Rogel-Salazar et al. 2001). Geometrický důvod pro tvorbu takovéto sestavy je načrtnut na obrázku 21. Při šíření vlny rezonátorem však bohužel nedošlo ke splnění fázové podmínky, jelikož jsme vývoj její fáze bohužel nebyli schopni určit. I tak se nám podařilo nafotit módy takto sestaveného rezonátoru, jak je vidět na obrázku 22. Tyto módy jsou s největší pravděpodobností takzvané módy mnohonásobného odrazu, které mají podobně jako laguerrovské-gaussovské módy tu vlastnost, že paprsek rezonátorem několikrát oběhne, než u něj dojde ke kopírování vlastní výchozí dráhy. Tyto módy definuje (Khilo et al. 2001).



OBRÁZEK 21: PO VLOŽENÍ ZRCADLA DOPROSTŘED BESSELOVA POLE DOCHÁZÍ U SVAZKU K SEBEREPRODUKCI PO KAŽDÝCH DVOU OBĚŽÍCH REZONÁTOREM



OBRÁZEK 22: NAFOCENÉ MÓDY MNOHONÁSOBNÉHO ODRAZU V REZONÁTORU SE ZRCADLEM UPROSTŘED BESSELOVA POLE



OBRÁZEK 23: SESTAVA UVAŽUJÍCÍ ZRCADLO V 1,5 NÁSOBKU DÉLKY BESSELOVA POLE

6.3 Sestava simulující generaci aktivním prostředím

V posledním případě jsme využili úvahy uvedené v (Khilo et al. 2001), kde se hovoří o generaci besselovského-gaussovského svazku pomocí aktivního prostředí. Stabilitu svazku zde zajišťuje fakt, že fáze, která se v centru besselovského svazku chová skokově, se při dostatečné vzdálenosti od kraje besselovského pole začne chovat lineárně a je možné pro ni definovat fázovou podmínku a tvar zrcadla jako pro gaussovský svazek. Aby byla změna fáze lineární, je podle autorů článku potřeba, aby byl rezonátor alespoň 1,5x delší, než je besselovské pole. V takovém případě již dochází k tomu, že se uprostřed svazku objevuje místo bez interference, což je způsobeno tím, že se pole tvořená axiconem již nadále nepřekrývají a rozcházejí se. Fáze je pak tvořena dvěma složkami, besselovským ohnutím, které je pomocí axiconu převáděno na rovinnou vlnu kolmou k optické ose, a gaussovskou, pro kterou je třeba splnit fázovou podmínku (56). Aktivní prostředí pak umožní zesílení právě takového pole, pro které jsou tyto okrajové podmínky splněny.

V našem případě jsme se rozhodli takto sestavený rezonátor dopovat sférickým zrcadlem zvenčí gaussovským svazkem. Předpokládali jsme, že pokud bude svazek rozšířen a bude se projevovat v podstatě jako rovinná vlna, dojde k selekci vhodné části svazku, která bude brána jako prstencový besselovský svazek, tedy takový besselovský svazek, u kterého již bylo ukončeno protínání a interference (mluvíme o tvaru pole ve vzdálenosti větší než L od axiconu). Takto nově vzniklé pole bude v tomto rezonátoru stabilní a my tak na výstupním rovinném zrcadle uvidíme besselovský-gaussovský svazek.

Nejprve jsme vytvořili sestavu zrcadel vzdálených od sebe $d = 49 \text{ cm}$, mezi něž jsme postupem popsaným v kapitole 4.3 navázali módovým přizpůsobováním vhodný gaussovský svazek. Navázání nebylo dokonalé, měli jsme totiž k dispozici pouze rovinné zrcadlo a zrcadlo s poloměrem křivosti $R = 20 \text{ m}$. Abychom splnili podmínku délky rezonátoru pro paprsek prošlý expandérem, musela by délka rezonátoru být řádově vyšší, než jakou jsme použili my, což by však vedlo k tomu, že besselovský-gaussovský svazek by již byl zcela protnut a rozestoupen do té míry, že by minul výstupní zrcadlo a k rezonanci by nedošlo. Usoudili jsme však, že po vložení axiconu dojde k tak razantní změně pole, že netrefení přesné velikosti sedla nebude hrát tak důležitou roli. Sestava je zachycena na obrázku 23. Do takto sestaveného rezonátoru jsme pak vložili axicon, tak jak uvádí (Khilo et al. 2001) ve svém článku, a zachycovali jsme výstupní obrazce pomocí kamery.

Bohužel vlivem toho, že na vstupu nebyl prstencový průběh, došlo k tvorbě obráceného pole, než bylo potřeba, a prstenec se odrazil od rovinného zrcadla. Po odrazu se tak prstenec dále rozšiřoval a při odrazu od sférického zrcadla za axiconem již neměl dostatečnou intenzitu k zesílení vstupujícího gaussovského svazku. Rezonance výstupního záření jsme u této sestavy vůbec nepozorovali, podařilo se nám zachytit pouze prošlé besselovské-gaussovské pole.

7 Závěr

V této bakalářské práci jsme se zabývali navazováním svazků elektromagnetického vlnění do odpovídajících typů rezonátorů. Na základě elektromagnetického chování těchto vlnění jsme vybudovali rozsáhlou teorii, která nám umožnila sledovat vývoj pole v závislosti na prostředí, kterým toto vlnění prostupuje. Na základě vybudované teorie můžeme prohlásit, že alespoň teoreticky je možné sestavit rezonátor, který bude schopný podporovat libovolný požadovaný tvar elektromagnetického pole splňujícího paraxiální Helmholtzovu rovnici, budeme-li mít k dispozici optické prvky vhodných tvarů, které budou schopny toto pole stabilizovat, a dále zdroj, který bude toto pole pro rezonátor generovat.

Podařilo se nám sestavit rezonátor, který byl co nejlépe nasměrován do dráhy gaussovského svazku vystupujícího z laseru tak, aby docházelo k rezonanci. U tohoto rezonátoru jsme pomocí piezoelementu modulovali délku a došlo-li k tomu, že byla touto délkou splněna fázová podmínka, naakumulovala se uvnitř velmi vysoká hodnota intenzity, kterou jsme zaznamenávali pomocí kamery na výstupním zrcadle. Toto naakumulování intenzity jsme označili jako základní gaussovský mód rezonátoru a na základě šířky píku této intenzity zaznamenané na osciloskopu jsme spočetli jemnost našeho rezonátoru podporujícího gaussovský svazek. Dále jsme drobným rozladěním zkoumali další, vyšší transversální módy rezonátoru označované jako hermitovské-gaussovské a laguerrovské-gaussovské módy a jejich kombinace. Na základě znalosti vlnové délky světla se nám dokonce podařilo určit citlivost piezoelementu pohybujícího zrcadlem.

V paraxiálním přiblížení se nám podařilo odvodit matici přenosu axiconu, což pro nás bylo velkou výhodou při určování délky besselovského pole produkovaného axiconem.

Při prvních pokusech o navazování besselovského-gaussovského svazku jsme využili stejnou sestavu jako v případě navazování gaussovského svazku, pouze s upravením vlastností svazku vložením expandéru. Vytvořené podmínky sice umožnily tvorbu specifických módů, které byly zaznamenány, kvůli jejich podobnosti s gaussovskými módy však jejich vzezření přisuzujeme gaussovským vlastnostem svazku, nikoliv vlastnostem Besselova pole.

Pro další sestavu jsme vycházeli z úvahy, prezentované ve velké míře v odborných člancích, kdy se besselovské pole reprodukuje po dvou průchodech rezonátorem. Tento postup je však vysoce náročný na geometrickou přesnost sestavy, přičemž výstupní zrcadlo musí ležet přesně v polovině Besselova pole. Toho se nám v našich podmínkách bohužel nepodařilo docílit. Výsledné nafocené rezonanční módy tak do značné míry jsou módy besselova-gaussova rezonátoru, ale nejde o základní módy s vysokými píky intenzity, nýbrž o tzv. módy mnohonásobného odrazu, které jsou produkovány při mnohonásobně vyšším počtu průchodů rezonátorem, než kolik požadujeme.

Při posledním uspořádání jsme volili zcela odlišný přístup, kdy jsme uvažovali, že při dostatečné vzdálenosti od konce Besselova pole již bude tvar svazku v podstatě gaussovský, fáze bude mít spojitý průběh, jako u gaussovského svazku, a k produkci besselovského pole bude pouze nutné ohnout rozestoupené části gaussovského svazku tak, aby se po čase opět protnuly. Tento přístup však nebyl bohužel úspěšný, jelikož jsme na vstupu do rezonátoru měli klasický gaussovský svazek s gaussovským rozložením intenzity. To způsobilo, že se uvnitř rezonátoru ustálilo opačné pole, než bylo potřeba, a na rovinné výstupní zrcadlo dopadaly prstencové svazky, které měly tendenci se rozbíhat a opouštět rezonátor. Tyto odražené prstence se pak sice sečetly se vstupujícím gaussovským svazkem, avšak kvůli velkým vlivům difrakce, které na gaussovský svazek působily, došlo k rychlému vymizení vlivu vzniklého prstence.

V případě vložení aktivního prostředí by došlo k ustálení správně orientovaného pole a na vstupní zrcadlo by po průchodu rezonátorem dopadal již protlý besselovský svazek ve formě prstence intenzity. Tento prsteneček by se pak po zahnutí axiconem vracel opět po své dráze k rovinnému výstupnímu zrcadlu, kde by se odrazil a podle zákona o úhlu dopadu a úhlu odrazu by kopíroval dráhu k protější straně prstence. Následně by došlo k zesílení těchto „správných“ polí uvnitř aktivního prostředí a k produkci besselovského-gaussovského svazku na výstupním rovinném zrcadle.

Usuzujeme, že v posledním případě by k rezonanci došlo, kdyby se však už na vstupu nacházel protlý besselovský prsteneček. To by vyžadovalo zapojení dalšího axiconu, který by prsteneček z gaussovského svazku ještě před vstupem do rezonátoru vytvořil. Tento postup bude dalším předmětem našeho zkoumání.

Reference

- ANDERSON, Dana Z., 1984. Alignment of resonant optical cavities. *Applied Optics*. roč. 23, č. 17, s. 2944–2949.
- DICKMANN, 1992. *ENP03.doc - O.5_Fabry Perot Resonator.pdf* [online]. [vid. 2016a-květen-06]. Dostupné z: https://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-12229/O.5_%20Fabry%20Perot%20Resonator.pdf
- HODGSON, Norman a Horst WEBER, 2005. *Laser Resonators and Beam Propagation: Fundamentals, Advanced Concepts, Applications* [online]. B.m.: Springer [vid. 2016-květen-06]. Dostupné z: <https://www.google.com/books?hl=cs&lr=&id=C6gJCAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA2&dq=Laser+Resonators+and+Beam+Propagation,+Fundamentals,+Advanced+Concepts+and+Applications,+Springer+Series+in+Optical+Sciences&ots=af9gII0K0V&sig=ulAhbHqzvoljLKVDhb-Xvj70c8Y>
- JONES, R. V., 2008. *The paraxial wave equation—propagation of gaussian beams in uniform media*.
- KHILO, Anatol N., Eugeny G. KATRANJI a Anatol A. RYZHEVICH, 2001. *Axicon-based Bessel resonator: analytical description and experiment*. *JOSA A*. roč. 18, č. 8, s. 1986–1992.
- MCLEOD, B., nedatováno. *Microsoft Word - Mode Matching and Resonators.doc - Mode Matching and Resonators.pdf* [online]. [vid. 2016b-duben-14]. Dostupné z: <http://ecee.colorado.edu/~mcleod/pdfs/AOL/labs/Mode%20Matching%20and%20Resonators.pdf>
- MUYS, P. a E. VANDAMME, nedatováno. Resonators supporting Bessel beams. *VDM Laser optics NV* [online]. [vid. 2016-květen-06]. Dostupné z: http://www.delmarphotonics.com/BesselBeam_Axicon.pdf
- PUTNAM, William P., Damian N. SCHIMPF, Gilberto ABRAM a Franz X. KÄRTNER, 2012. Bessel-Gauss beam enhancement cavities for high-intensity applications. *Optics express*. roč. 20, č. 22, s. 24429–24443.
- RECAMI, E., M. ZAMBONI-RACHED, H. E. HERNANDEZ-FIGUERA a L. A. AMBROSIO, 2014. *Non-Diffracting Waves: A new introduction* [online]. 27. 8. [vid. 2016-květen-06]. Dostupné z: <http://arxiv.org/abs/1408.6503>
- ROGEL-SALAZAR, J., G. H. C. NEW a S. CHÁVEZ-CERDA, 2001. Bessel–Gauss beam optical resonator. *Optics communications*. roč. 190, č. 1, s. 117–122.
- ROSENFELD, Wenjamin, 2003. A high finesse optical resonator for cavity QED experiments. *Diplom thesis, Universität Bonn*.
- SALEH, Bahaa E. A a Malvin Carl TEICH, 1991. *Fundamentals of photonics*. New York: Wiley. ISBN 978-0-471-83965-1.
- SOUTHWELL, W. H., 1981. Validity of the Fresnel approximation in the near field. *JOSA*. roč. 71, č. 1, s. 7–14.
- TOVAR, Anthony A., 1998. Production and propagation of cylindrically polarized Laguerre–Gaussian laser beams. *JOSA A*. roč. 15, č. 10, s. 2705–2711.

TSANGARIS, C. L., G. H. C. NEW a J. ROGEL-SALAZAR, 2003. Unstable Bessel beam resonator. *Optics communications*. roč. 223, č. 4, s. 233–238.

WANG, Wei-Chih, 1986. *Electromagnetic wave theory* [online]. [vid. 2016-květen-06]. Dostupné z: <http://depts.washington.edu/mictech/optics/me557/week2.pdf>

WU, Pinghui, Chenghua SUI a Wenhua HUANG, 2014. Theoretical analysis of a quasi-Bessel beam for laser ablation. *Photonics Research* [online]. 1. 6., roč. 2, č. 3, s. 82. ISSN 2327-9125. Dostupné z: doi:10.1364/PRJ.2.000082

YE, Jun a Theresa W. LYNN, 2003. Applications of optical cavities in modern atomic, molecular, and optical physics. *Advances in Atomic Molecular and Optical Physics*. roč. 49, s. 2–84.