Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

GEOMETRICKÉ KONSTRUKCE VYTVÁŘENÉ SKLÁDÁNÍM PAPÍRU

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Pavla Stulíková

České Budějovice, duben 2007

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma „Geometrické konstrukce vytvářené skládáním papíru“ zpracovala samostatně a použitou literaturu jsem citovala.

V Českých Budějovicích dne 27. dubna 2007 ....

podpis

Poděkování

Děkuji touto cestou RNDr. Pavlu Leischnerovi, Ph.D. za podnětné a cenné rady, odborný dozor a pomoc při zpracování diplomové práce.

Anotace

Název: Geometrické konstrukce vytvářené skládáním papíru
Vypracovala: Pavla Stulíková
Vedoucí práce: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Klíčová slova: Planimetrie, geometrické konstrukce vytvářené skládáním papíru, rozvíjení geometrického myšlení.

Obsahem této práce je sestavení souboru konstrukčních i důkazových planimetrických úloh, v nichž jsou geometrické konstrukce vytvářeny skládáním papíru. Úlohy by měly sloužit jako doplněk k výuce planimetrie na ZŠ nebo SŠ. Je k nim připojen i metodický návod pro učitele nebo vedoucího zájmového kroužku.

Title: Paperfolding geometric constructions
Author: Pavla Stulíková
Supervisor: RNDr. Pavel Leischner, Ph.D.

Key words: Plane geometry, paperfolding geometric constructions, developing of the geometric conception.

The purpose of this thesis is the construction of a setting constructional and prooval problems in the plane geometry, where the geometric constructions are being formed by paperfolding. These problems should serve as a complement for the instruction of the plane geometry at elementary or high schools. A metodical instructions for the teachers or the leader of a hobby group are added.

OBSAH:

1 Úvod

Skládání papíru ve smyslu geometrických konstrukcí bylo představeno v roce 1893 T. Sundara Row z Indie. Podle Sundary všechny úkoly řešené pravítkem a kružítkem je možné řešit pomocí skládání papíru.

První důsledné zpracování konstrukcí pomocí skládání papíru bylo publikováno R. C. Yatesem v roce 1949, kde jsou jako „pravidla hry“ určeny tři základní operace:

1) přehnout papír tak, abychom umístili jeden ze dvou daných bodů na druhý,
2) vytvořit další přehyb, který vede dvěma danými body,
3) umístit daný bod na danou přímku tak, aby výsledný přehyb procházel jiným daným bodem.

Tyto konstrukce jsou chápány jako axiomy a umožňují provádět všechny konstrukce eukleidovské geometrie skládáním papíru. Plyne z nich dosud neuvedený předpoklad, že papír je průsvitný (např. pauzovací papír) tak, aby bylo při přeložení papíru vidět konstrukce provedené na spodní vrstvě. Nepřipouštíme vícenásobné přeložení a využívání konstrukcí na dalších spodních vrstvách.

Je tedy zajímavé, že geometrické konstrukce nemusíme sestrojovat jen pomocí pravítka a kružítka, ale můžeme je provádět i pomocí skládání papíru. Konstrukce skládáním papíru umožňují řešit některé neeukleidovsky řešené problémy, jako je třeba trisekce úhlu a zdvojení krychle. Umožňuje to jedna ze základních konstrukcí, při které se současně umístí daný bod P na danou přímku p a daný bod Q na danou přímku q.

Diplomová práce je rozdělena do pěti hlavních kapitol: úvod, základní konstrukce, využití konstrukcí skládáním papíru ve výuce, využití konstrukcí skládáním papíru v zájmové práci a závěr.

Úvod obsahuje seznámení s činností skládání papíru. Druhá část je zaměřena na základní konstrukce. Popisuje elementární jednokrokové konstrukce a konstrukce, které se skládají z více kroků. Následuje využití konstrukcí skládáním papíru ve výuce a v zájmové práci, kde jsou uvedeny geometrické konstrukce vytvářené skládáním papíru a metodický návod využití při výuce a zájmové práci. Závěrečná část obsahuje celkové zhodnocení a shrnutí.

2 Základní konstrukce

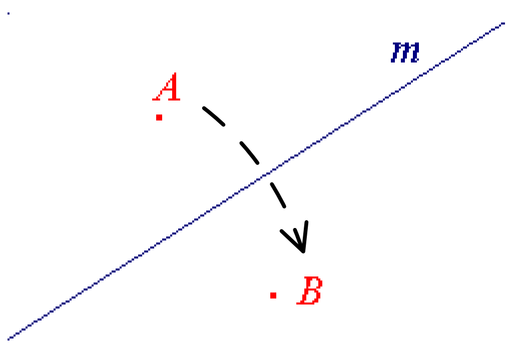
V této kapitole ukážeme, že základní konstrukce, které se dají provádět kružítkem a pravítkem dovede i skládání papíru. Nejprve uvedeme elementární konstrukce, které se skládají pouze z jednoho kroku. Konstrukce Z1, Z2 a Z3 mají podle publikace [1] charakter axiomu (Yatesovy základní operace) a zbylé konstrukce jsou z nich odvozeny.

Dále uvedeme konstrukce, které se skládají z více kroků, ale odpovídají základním eukleidovským konstrukcím: sestrojení rovnoběžky k dané přímce daným bodem, obrazy bodů v souměrnostech, posunutí a otočení, přenesení úsečky a úhlu, průsečík přímky s kružnicí a průsečík dvou kružnic. Tyto konstrukce umožňují řešit všechny eukleidovské úlohy skládáním papíru.

2.1 Jednokrokové základní konstrukce

Z1 – osa úsečky

Jsou-li dány dva body A a B, můžeme přehnout papír tak, abychom umístili jeden ze dvou daných bodů na druhý.



Obr. 2.1

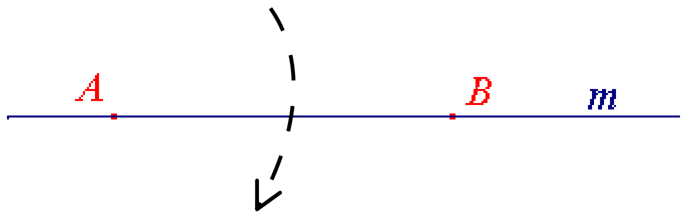
Poznámka

Sestrojíme úsečku AB a vytvoříme přehyb m tak, aby se krajní body úsečky kryly (obr. 2.1). Přehyb m je osa úsečky AB.

Osa úsečky je přímka m, která prochází středem úsečky AB a je kolmá na úsečku AB.

Z2 – přímka procházející dvěma body

Jsou-li dány dva body A a B, můžeme vytvořit přehyb m, který vede dvěma danými body A a B.



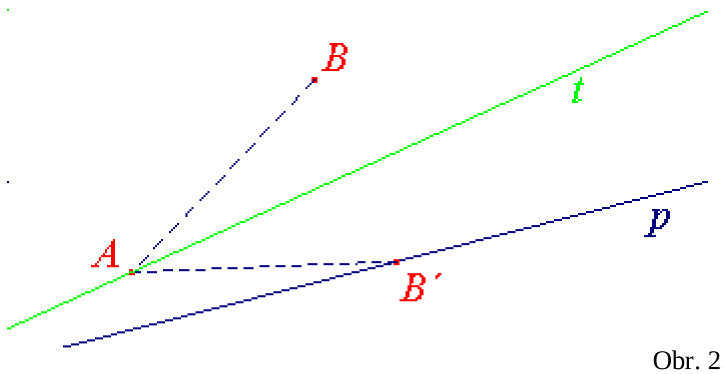
Obr. 2.2

Poznámka

Sestrojíme přímku *m*, na které leží body *A* a *B* (obr. 2.2). Krajní body *A* a *B* vyznačují úsečku *AB*.

Z3 – tečna paraboly

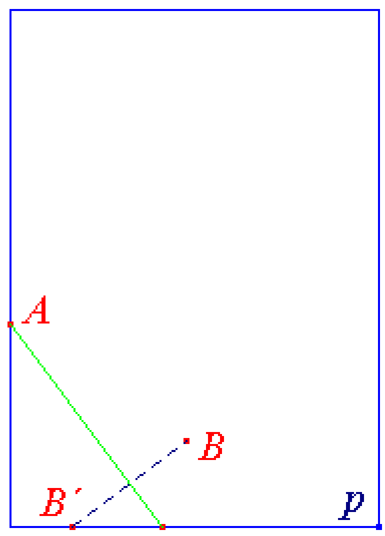
Jsou-li dány dva body A a B a přímka p, můžeme umístit daný bod B na danou přímku p tak, aby výsledný přehyb t procházel druhým daným bodem A.



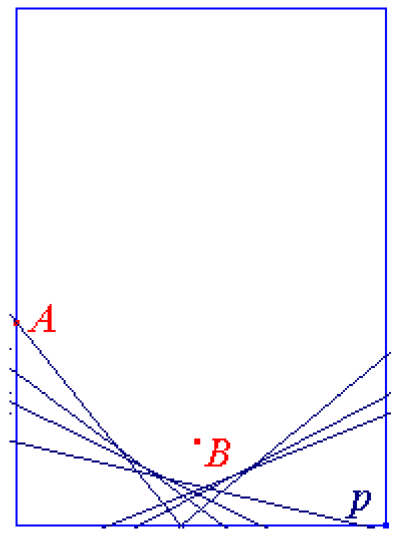
Obr. 2.3

Poznámka 1

Ukážeme, že vzniklá přímka *t* je tečnou paraboly s řídící přímkou *p* a ohniskem *B*. Nechť spodní hrana průsvitného papíru je přímka *p* a bod $B \notin p$ leží na svislé ose tohoto papíru. Bod *A* je libovolný bod ležící na pravé či levé hraně papíru. Papír přeložíme podle konstrukce Z3 (obr. 2.4). Zvolíme jiný bod a opět přeložíme podle konstrukce Z3. Po několikátém opakování těchto kroků vidíme, že vzniklé přímky obalují křivku, o níž chceme ukázat, že je parabola (obr. 2.5).



Obr. 2.4



Obr. 2.5

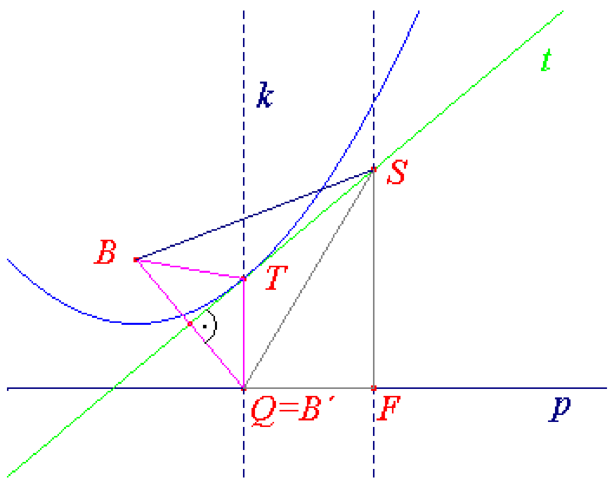
Přesvědčíme se, že tomu tak opravdu je (obr. 2.6).

Vraťme se tedy k bodu $B \notin p$ a označme Q bod souměrný s B podle t.

t je vzniklý přehyb, t a p nejsou kolmé, k je kolmice na přímku p v bodě Q $\Rightarrow$ protíná t v bodě T ($T \in t$).

$|TB| = |TQ| \Rightarrow$ T má stejnou vzdálenost od bodu B a od přímky p (bod T leží na parabole s ohniskem B a řídící přímkou p).

Musíme dokázat, že parabola nemá s přímkou t žádný další společný bod.



Obr. 2.6

Důkaz provedeme sporem:

Nechť S je druhý bod na přímce t, který také náleží této parabole,

F je pata kolmice z bodu S na přímku p , zřejmě $F \neq Q$.

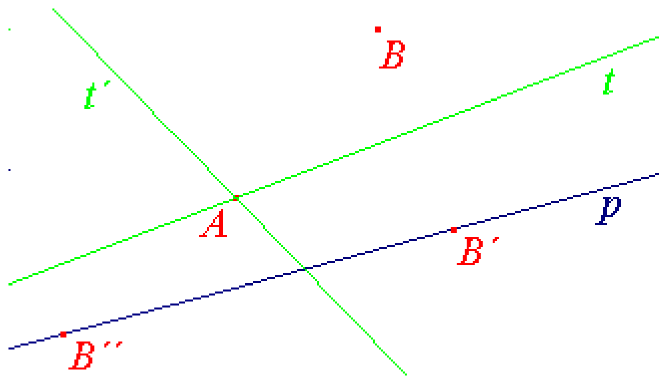
Také $|SB| = |SQ|$, když $S \in t$ (neboť *t* je množina všech bodů stejně vzdálených od bodu *B* a *Q*). Dále $|SB| = |SF|$, když $S \in$ parabole (množina všech bodů stejně vzdálených od *B* a *p*).

Odtud $|SQ| = |SF|$ a to je spor (v pravoúhlém trojúhelníku *SFQ* nemůže být přepona shodná s odvěsnou).

Tedy *t* obsahuje právě jeden bod paraboly a vzniklý přehyb *t* je tečnou paraboly s ohniskem *B* a řídící přímkou *p*.

Poznámka 2

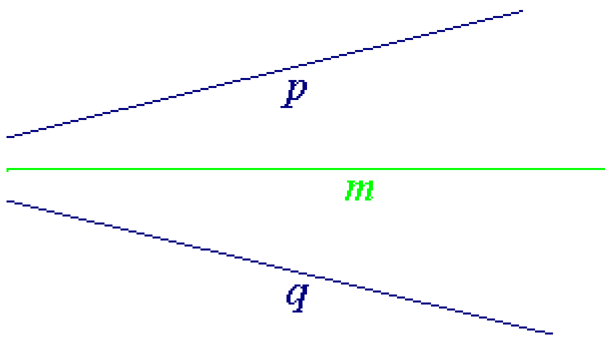
Obecně existují dvě přímky *t, t´* a k ní tečny z vnějšího bodu *A* k parabole (obr. 2.7).



Obr. 2.7

<u>Z4 – osa úhlu přímek</u>

Jsou-li dány dvě přímky (hrany) p a q, můžeme složit přehyb m tak, aby přímka p ležela na přímce q.



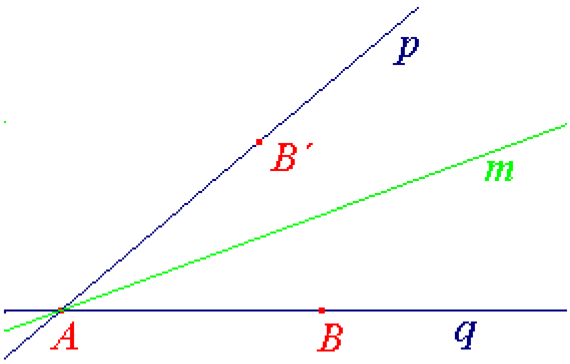
Obr. 2.8

Poznámka

Ukážeme, že tato konstrukce je důsledek axiomatické konstrukce Z3.

Průsečík přímek *p* a *q* označíme bodem *A* a na přímce *q* vyznačíme bod *B* (obr. 2.9). Sestrojíme přehyb *m* tak, aby se po přeložení přímka *AB* (*q*) kryla s přímkou *p* a přehyb procházel bodem *A*.

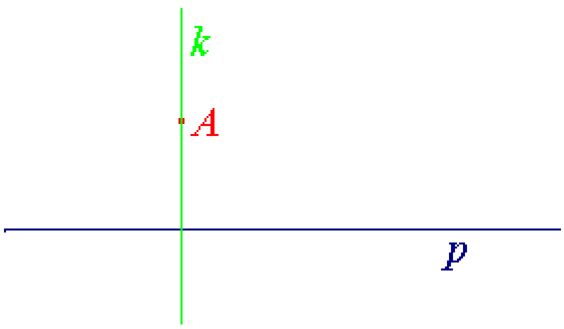
Vzniklý přehyb *m* je <u>osa úhlu</u> přímek *p* a *q*.



Obr. 2.9

<u>Z5 – kolmice z bodu na přímku</u>

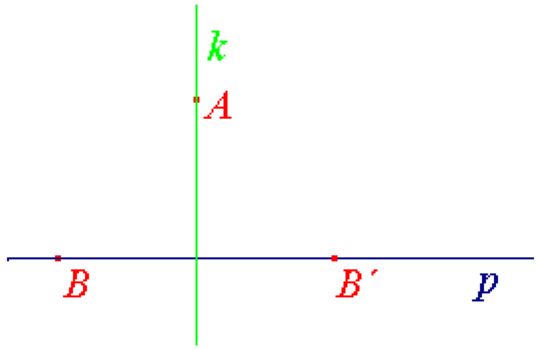
Je-li dán bod A a přímka p, můžeme složit přehyb k, který je kolmý k přímce p a zároveň prochází bodem A.



Obr. 2.10

Poznámka

Jestliže si na přímce *p* libovolně zvolíme bod *B a* sestrojíme přehyb *k*, který vede bodem *A* a bod *B* leží na přímce *p* (obr. 2.11), vidíme, že zniklý přehyb *k* je <u>kolmice</u> na přímku *p*.

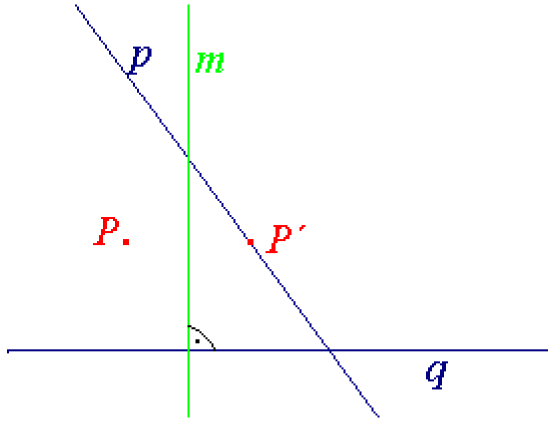


Obr. 2.11

Konstrukce tedy opět nemá funkci axiomu a plyne z konstrukce Z3.

Z6

Jsou-li dány dvě přímky p, q a bod P, můžeme sestrojit přehyb m kolmý na přímku q, při kterém se zobrazí bod P na přímce p.



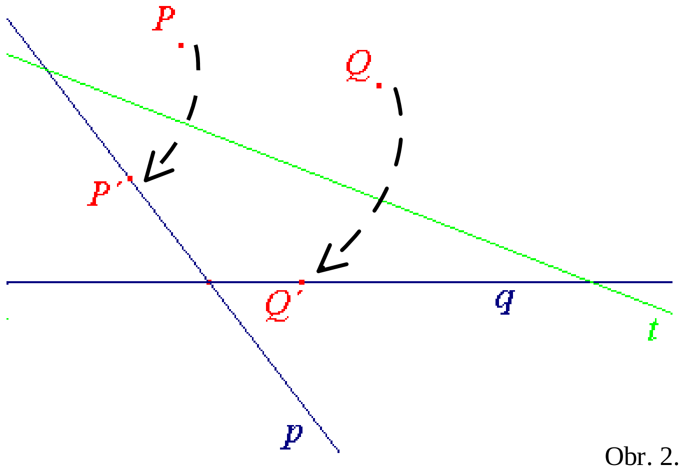
Obr. 2.12

Poznámka

Sestrojíme takový přehyb *m*, aby se přímka *q* překrývala a zároveň bod *P* ležel na přímce *p* (obr. 2.12).

Z7 – společná tečna dvou parabol

Jsou-li dány dva body P a Q a dvě přímky p a q, můžeme složit přehyb t tak, aby bod P ležel na přímce p a bod Q ležel na přímce q.

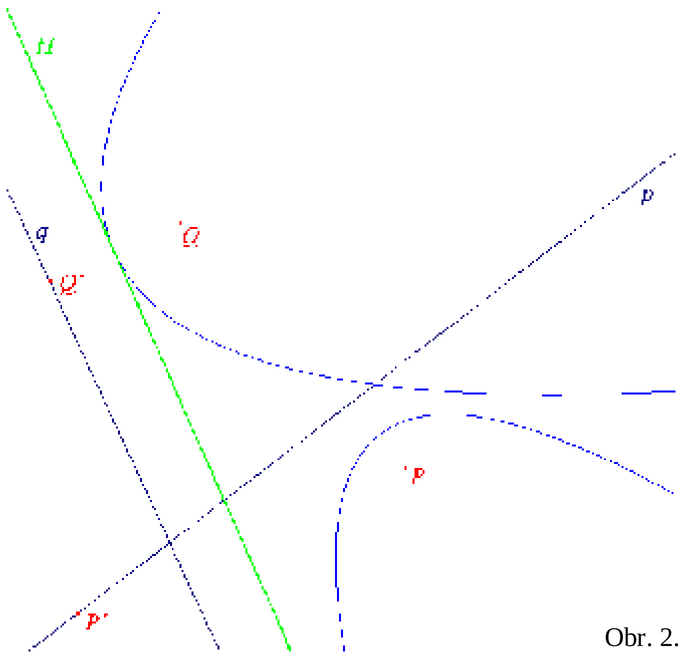


Obr. 2.13

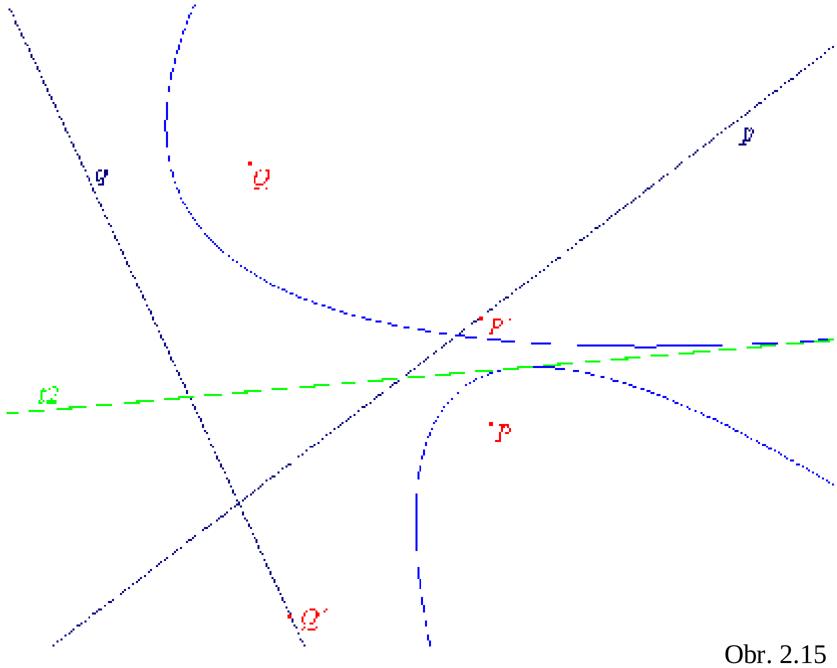
Tato konstrukce je velmi důležitá, protože umožňuje řešit některé problémy eukleidovsky neřešitelné. Například trisekce úhlu a zdvojení krychle, jak si ukážeme v kapitole 4.

Proto si nyní provedeme podrobnější analýzu konstrukce Z7 a zároveň ukážeme, že se jedná o společnou tečnu dvou parabol.

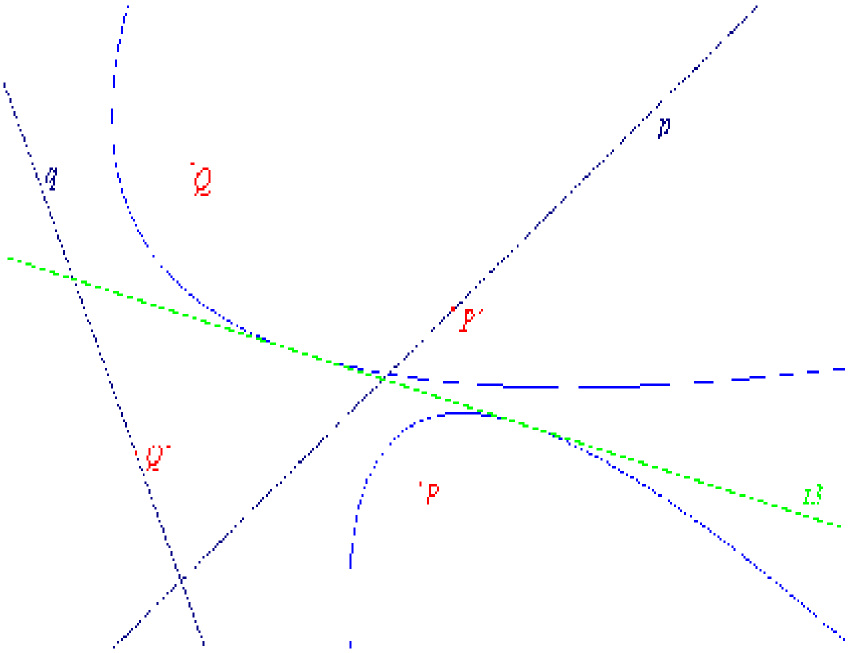
- Předpokládejme, že $P \notin p$, $Q \notin q$ a přímky *p* a *q* jsou různoběžné. Ukážeme, že pro dva dané body *P*, *Q* a dvě dané přímky *p*, *q* je pouze určitý počet přímek *t* takových, že $P' \in p$ a $Q' \in q$: složíme papír podle každé z těchto přímek *t* (obr. 2.14, 2.15, 2.16).



Obr. 2.14



Obr. 2.15

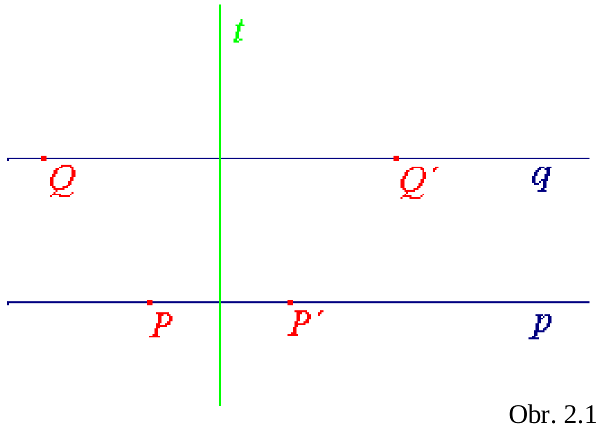


Obr. 2.16

Našli jsme nanejvýš tři přímky *t*.

Rozeberme si podrobněji všechny možné případy vzájemné polohy bodů *P*, *Q* a přímek *p*, *q*.

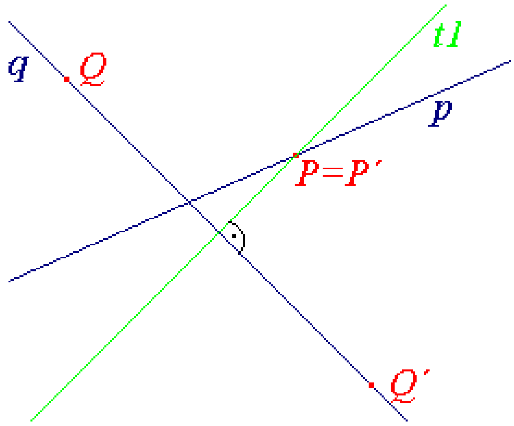
- Předpokládejme, že $P \in p$, $Q \in q$ a přímky p a q jsou rovnoběžné. Pak jako t můžeme zvolit libovolnou kolmici k přímkám p, q (obr. 2.17).



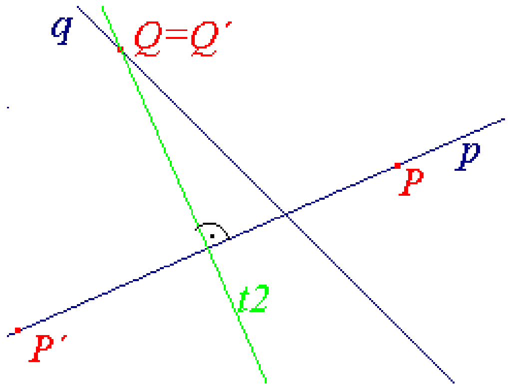
Obr. 2.17

Přímek t jsme našli nekonečně mnoho.

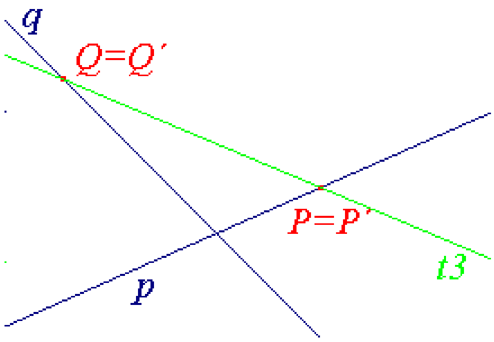
- Předpokládejme, že $P \in p$, $Q \in q$ a přímky p a q jsou různoběžné. Pak vyhovují celkem tři přímky: kolmice t_1 z bodu P na přímku q (obr. 2.18), kolmice t_2 z bodu Q na přímku p (obr. 2.19) a přímka t_3, která prochází body P, Q (obr. 2.20).



Obr. 2.18



Obr. 2.19



Obr. 2.20

- Předpokládejme, že $P \notin p$, a přímky *p* a *q* jsou různoběžné.

Je známo, že všechny paraboly jsou navzájem podobné (viz [1], cvič.10.6). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $P = (0,0)$ a že přímka *p* má rovnici $Y = 2$ a přímka *q* má rovnici $X + rY + s = 0$, neboť *q* a *p* jsou různoběžné.
Nechť $Q = (u,v)$. Protože přímka *t* nemůže být kolmá na *p*, když *P´* by mělo být na *p*, musí mít *t* rovnici tvaru $Y = mX + b$. Podmínku, že *P´* leží na přímce *p* pak vyjadřuje rovnice $y' = y - 2(-1)(mx - y + b)/(m^2 + (-1)^2)$. Dosazením $y' = 2$ a $x = y = 0$ dostaneme $b = m^2 + 1$. Nechť $Q' = (u', v')$, pak *Q´* je na *q* a má rovnici $u' + rv' + s = 0$.
Takže dostaneme:

$$\begin{aligned}&\{u - 2m[mu - v + (m^2+1)]/(m^2+1)\}\\&+ r\{v + 2[mu - v + (m^2+1)]/(m^2+1)\}\\&+ s = 0.\end{aligned}$$

Poslední vztah se redukuje na kubickou rovnici s neznámou *m* a koeficienty s racionálními výrazy *r, s, u, v*. To znamená, že můžeme dostat nejvýš tři řešení pro *m*. Řešení *m* jednoznačně určuje *b* a tedy přímku *t*. V tomto případě přímka *t* je mezi tečnami k parabole s ohniskem *P* a řídící přímkou *p*. Jestliže $Q \notin q$, pak *t* je taktéž mezi tečnami k parabole s ohniskem *Q* a řídící přímkou *q*.

- Předpokládejme, že $P \notin p$, a přímky *p* a *q* jsou rovnoběžné. Zde jsou přímky *t* vymezeny kvadratickými nebo lineárními rovnicemi a existují nanejvýš dvě řešení. Jako v případě $P \notin p$, *p* a *q* jsou různoběžné máme $b = m^2 + 1$. Zde přímka *q* je rovna podobě $Y = w$. Vezměme $Q = (u,v)$. Pak $w = v + 2[mu - v + (m^2 + 1)]/(m^2 + 1)$, odtud dostaneme polynom $[2+v-w]m^2+[2u]m+[2-v-w]=0$. Všechny tři koeficienty nemohou být nula. Polynom má tedy nanejvýš dva kořeny.

Došli jsme k závěru, že kromě toho, když $P \in p$, $Q \in q$ a přímky p a q jsou rovnoběžné, jsou zde nanejvýš tři přímky, které udávají, že $P' \in p$ a $Q' \in q$. Každá z těchto přímek je vymezena v kartézské soustavě polynomickou rovnicí nanejvýš tří intervalů s koeficienty z nejmenších polí obsahujících souřadnice bodu P, Q a vektory přímek p, q se souřadnými osami.

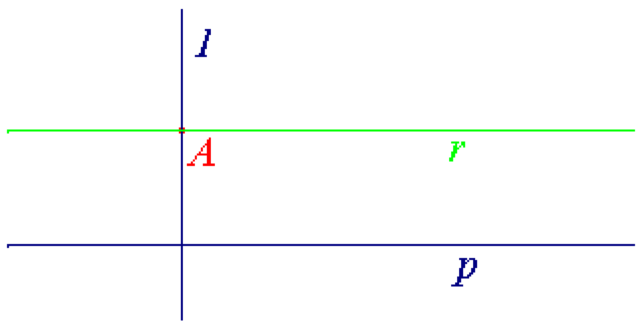
Poznámka

Na závěr tohoto odstavce upozorňuji na nespolehlivost Internetu jako zdroje informací. Na stránkách [6] origamisté uvádí předešlé konstrukce jako origami. Origami je ale něco úplně jiného, tam se používá neprůsvitný papír. Odkazují se na italsko-japonského „matematika“ Humiaki Huzitu, který formuloval základní „axiomy“ jako konstrukce Z1, Z2, Z3, Z4, Z5 a Z7. Avšak z těchto konstrukcí jsou axiomy pouze Z1, Z2 a Z3. Origamisté považují za tvůrce těchto konstrukcí Huzitu, třebaže je již zhruba o čtyřicet let dříve publikoval R. S. Yates [2]. Huzita patrně tyto konstrukce převzal a vydává je za axiomy. Stránky jsou doslova přeloženy z britských stránek (které jsou tedy také chybně) a řada uživatelů bohužel považuje takové informace za neměnnou pravdu.

2.2 Vícekrokové základní konstrukce

Z8 – rovnoběžky

Je-li dán bod A a přímka p, můžeme složit hranu r, která je rovnoběžná s přímkou p a zároveň prochází bodem A.



Obr. 2.21

Postup:

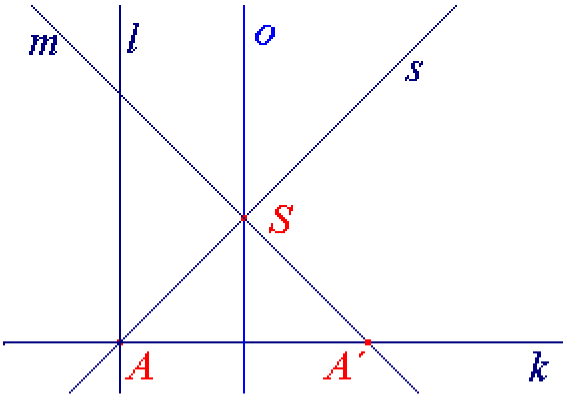
Konstrukce představuje dvojnásobné užití konstrukce Z5.

1) *1*: kolmice na přímku *p* bodem *A*
2) *r*: kolmice na přímku *l* bodem *A*

Vzniklý přehyb *r* je rovnoběžka s přímkou *p*.

Z9 – obraz bodu v osové souměrnosti

Je-li dán bod A a přímka o, můžeme sestrojit bod A´ osově souměrný podle přímky o.



Obr. 2.22

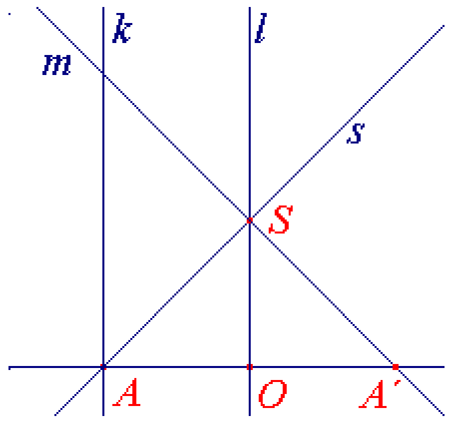
Postup:

S využitím konstrukcí Z4, Z5 a Z8 sestrojíme takto:

1) *k*: kolmice na *o* bodem *A*
2) *l*: kolmice na *k* bodem *A*
3) *s*: osa úhlu při vrcholu *A*
4) *S*: $s \cap o$
5) *m*: kolmice na *s* bodem *S*
6) *A´*: $m \cap k$

Z10 – obraz bodu ve středové souměrnosti

Jsou-li dány dva body A a O, můžeme sestrojit bod A´ středově souměrný podle bodu O.



Obr. 2.23

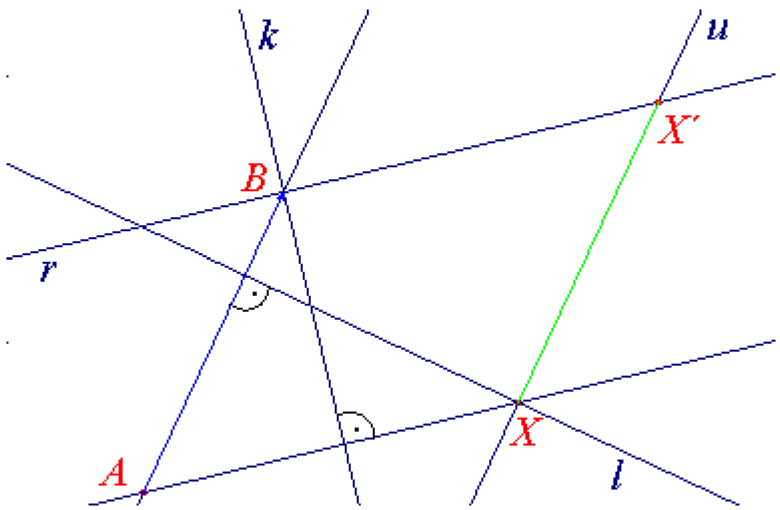
Postup:

S využitím konstrukcí Z2, Z4, Z5 a Z8 sestrojíme takto:

1) přímka AO
2) k: kolmice na AO bodem A
3) l: kolmice na AO bodem O
4) s: osa úhlu při vrcholu A
5) S: $l \cap s$
6) m: kolmice na s bodem S
7) A': $m \cap AO$

Z11 – posunutí bodu

Je-li dán bod X a vektor ***AB****, můžeme bod X posunout o vektor* ***AB****.*



Obr. 2.24

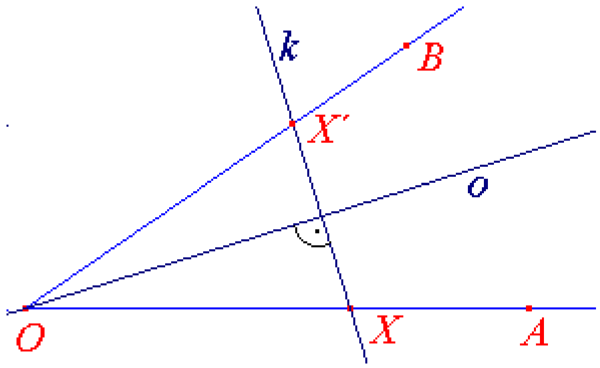
Postup:

S využitím konstrukcí Z2, Z4, Z5 a Z8 sestrojíme rovnoběžník *AXX´B* takto:

1) přímka *AX*
2) *k*: kolmice na *AX* bodem *B*
3) *r*: rovnoběžka s *AX* bodem *B*
4) přímka *AB*
5) *l*: kolmice na *AB* bodem *X*
6) *u*: rovnoběžka s *AB* bodem *X*
7) *X´*: $r \cap u$

Z12 – otočení 1

Je-li dán úhel AOB a bod X na rameni úhlu OA, můžeme sestrojit bod X´ na rameni úhlu OB.



Obr. 2.25

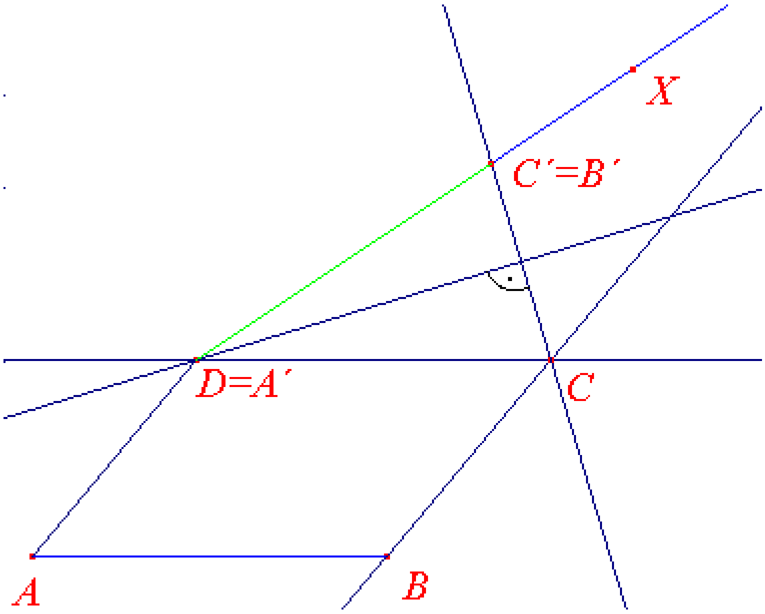
Postup:

S využitím konstrukcí Z4 a Z5 sestrojíme takto:

1) *o*: osa úhlu *AOB*
2) *k*: kolmice na *o* bodem *X*
3) *X´*: $k \cap OB$

Z13 – přenesení úsečky na polopřímku

Je-li dána úsečka AB a polopřímka DX, můžeme sestrojit úsečku A´B´ na polopřímce DX.



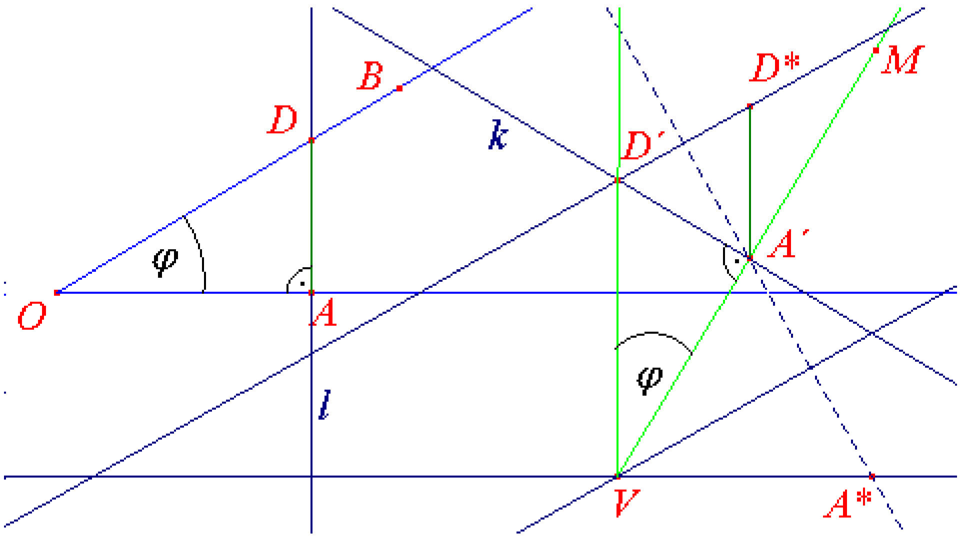
Obr. 2.26

Postup:

S využitím konstrukce Z11 sestrojíme rovnoběžník *ABCD*. Pak sestrojíme úsečku *A´B´* s využitím konstrukce Z12.

Z14 – přenesení úhlu

Je-li dán úhel AOB a polopřímka VM, můžeme sestrojit úhel MVD´ shodný s úhlem AOB.



Obr. 2.27

Postup:

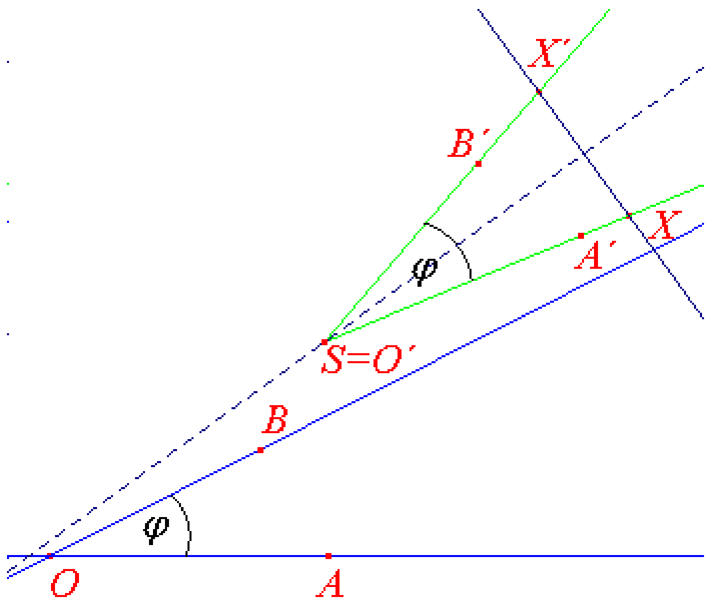
S využitím konstrukcí Z5, Z8, Z11, Z12, Z13 sestrojíme takto:

1) A^*: posunutí úsečky OA o vektor $\boldsymbol{OV}$
2) A': $A^* \rightarrow A'$ (konstrukce Z12)
3) k: kolmice na VM bodem A'
4) l: kolmice na OA bodem A
5) D: $OB \cap l$
6) D^*: posunutí úsečky AD o vektor $\boldsymbol{AA'}$
7) D': $D^* \rightarrow D'$ (konstrukce Z12)

1) 8) $|\angle AOB| = |\angle MVD'|$

Z15 – otočení 2

Je-li dán střed otáčení S, bod X a úhel AOB, můžeme otočit bod X o úhel AOB.



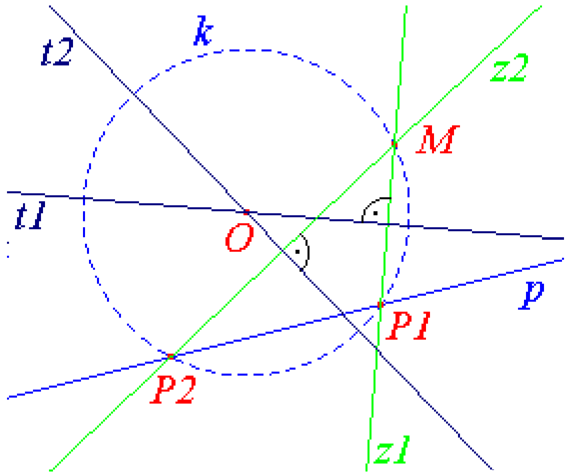
Obr. 2.28

Postup:

Tato konstrukce se skládá z přenesení úhlu a otočení 1, proto nejprve sestrojíme úhel $A'O'B'$ shodný s úhlem AOB (konstrukce Z14) a následně bod X´ (konstrukce Z12).

Z16 – průsečík přímky s kružnicí

Je-li dána přímka p a kružnice k, která je dána středem O a bodem $M \in k$, můžeme sestrojit jejich průsečíky P_1 a P_2 (pokud existují).



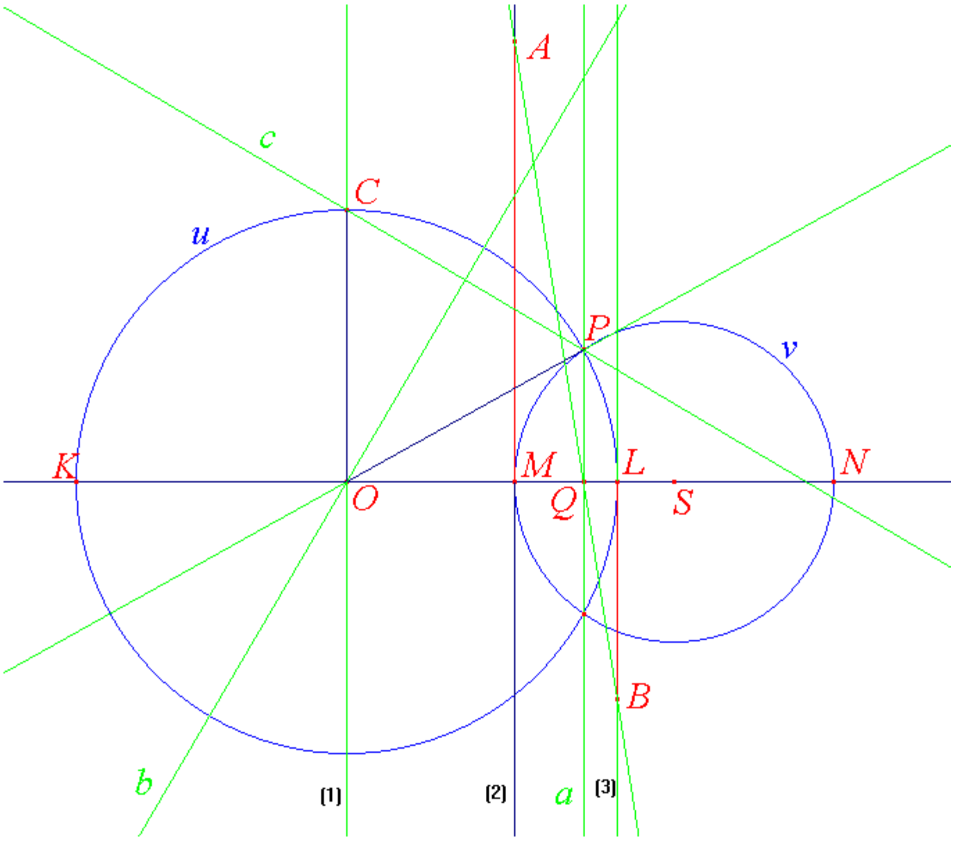
Obr. 2.29

Postup:

1) t_1: M na p a přehyb prochází bodem O (konstrukce Z3)
2) z_1: kolmice na t_1 bodem M
3) P_1: $p \cap z_1$
4) t_2: M na p a přehyb prochází bodem O (konstrukce Z3)
5) z_2: kolmice na t_2 bodem M
6) P_2: $p \cap z_2$

Z17 – průsečík dvou kružnic

Je-li dána kružnice v se středem S a kružnice u se středem O, můžeme sestrojit jejich průsečík P.



Obr. 2.30

Tato konstrukce, která pochází od vedoucího mé diplomové práce, je poměrně náročná. Proto provedeme nejprve rozbor:

a je chordála kružnic *u*, *v* $\Rightarrow Q$ má stejnou mocnost k oběma kružnicím:

$QK \cdot QL = QM \cdot QN$ (orientované vzdálenosti)

$$\frac{QK}{QN} = \frac{QM}{QL} = \frac{QK - QM}{QN - QL} = \frac{KL}{LN}$$

Bez újmy na obecnosti lez předpokládat, že je dána přímka *p*, na ní středy *O*, *S* kružnic *u*, *v* a jejich průsečíky *K*, *L* a *M*, *N* s přímkou *p* (kdyby byly poloměry dány jako úsečky jinde, můžeme je na *p* přenést pomocí konstrukcí Z11, Z13).

Průsečíky tedy sestrojíme podle následujícího postupu:

1) kolmice (1), (2), (3)

2) *A*, *B*: nanesením délek $\left.\begin{array}{l}|AM| = |KM| \\ |BL| = |LN|\end{array}\right\}$ (konstrukce Z12)

3) přímka *AB*

4) *Q*: $AB \cap p$

5) přehyb ***a***: ***a*** je kolmice na ***p*** v bodě *Q*

6) *C*: nanesení délky $|OL| = |OC|$ (konstrukce Z12)

7) přehyb *b*: *C* na ***a*** přes bod *O*

8) přehyb *c*: kolmice na ***b*** bodem *C*

9) *P*: $a \cap c$

3 Využití konstrukcí skládáním papíru ve výuce

V této kapitole ukážeme, jak lze klasické způsoby konstrukcí, které uvádějí učebnice [3], [4], [5] nahradit a provést skládáním papíru. Využijeme k tomu některé základní konstrukce, které předpokládáme, že žáci umějí sestrojit.

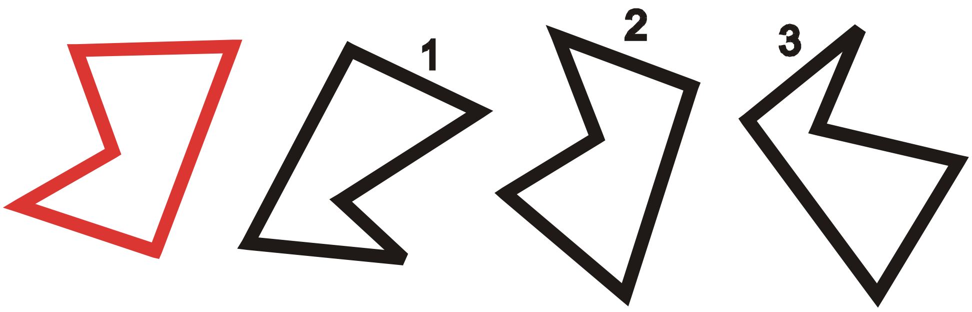
3.1 Osová souměrnost

3.1.1 Shodnost geometrických útvarů

V životě kolem nás nalézáme obrázky nebo předměty, které mají stejný tvar a stejnou velikost. Fotografie na titulních stránkách všech výtisků jednoho čísla časopisu mají stejný tvar i stejnou velikost. Všechny listy téže učebnice mají stejný tvar a stejnou velikost, všechny diskety do počítače, kompaktní disky nebo magnetofonové kazety mají stejný tvar a stejnou velikost. Totéž se týká stejných stolů, židlí, lahví, květináčů, tužek apod. Nebereme přitom v úvahu jejich barvu nebo nápisy na nich. V praxi hovoříme o stejných předmětech, v matematice hovoříme o shodných rovinných nebo prostorových útvarech.

Úloha 1:

Z kreseb útvarů na obr. 3.1 vyberte takový útvar, který má stejný tvar i stejnou velikost s červeným.



Obr. 3.1

Jak poznáme, jestli jsou dva obrazce shodné? Jeden z nich překreslíme na průsvitku a přiložíme ho na druhý. Jestliže se oba obrazce po přemístění kryjí, řekneme, že mají stejný tvar i stejnou velikost. V matematice řekneme, že obrazce jsou *shodné*.

Někdy nestačí s průsvitkou jen posouvat po papíře, ale musíme ji zvednout a překlopit spodní stranou nahoru. Nemusíme-li překlopit průsvitku, hovoříme o *přímo shodných* obrazcích. Jestliže se obrazce kryjí pouze tehdy, když průsvitku překlopíme, hovoříme o *nepřímo shodných* obrazcích.

Rozhodovat o shodnosti obrazců pomocí průsvitky můžeme jenom u rovinných obrazců. Kolem nás je mnoho shodných prostorových útvarů, například kazety do magnetofonu nebo videa, židle stejného typu, automobily Felicie stejného typu, rodinné domky stejného typu aj. Kdyby nebyly všechny osobní automobily Felicie shodné, nemohli bychom vyměňovat vadné součástky za náhradní. O jejich shodnosti přitom nemůžeme rozhodovat pomocí průsvitky. Nemůžeme přemístit dva automobily tak, aby se kryly.

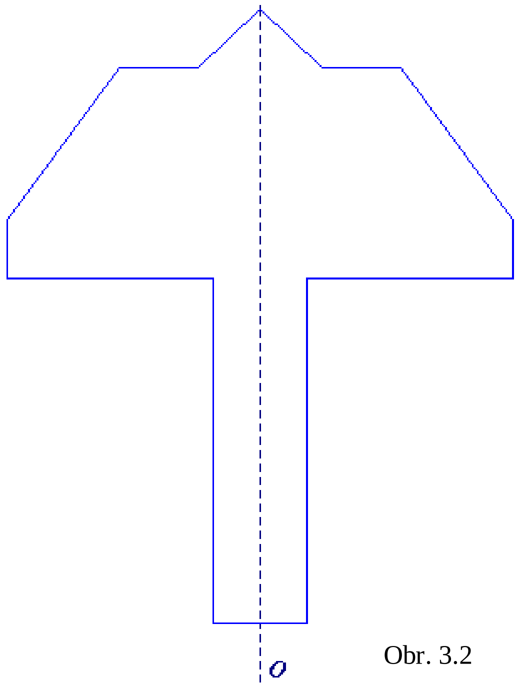
O shodnosti prostorových útvarů (například vyrobených součástek automobilů) se lze přesvědčit měřením.

3.1.2 Osová souměrnost a její vlastnosti

Skládáním papíru vyřešíme několik příkladů a ukážeme vlastnosti osové souměrnosti.

Úloha 1:
Na list průsvitného papíru narýsujte úsečku *AB* a skládáním papíru sestrojte její osu (konstrukce Z1).

Úloha 2:
Dostali jste list průsvitného papíru, na kterém je obrys vlaštovky (obr. 3.2). Přeložte ho podle vyznačené přímky *o* a přesvědčte se, že se obě poloviny obrysu vlaštovky kryjí.

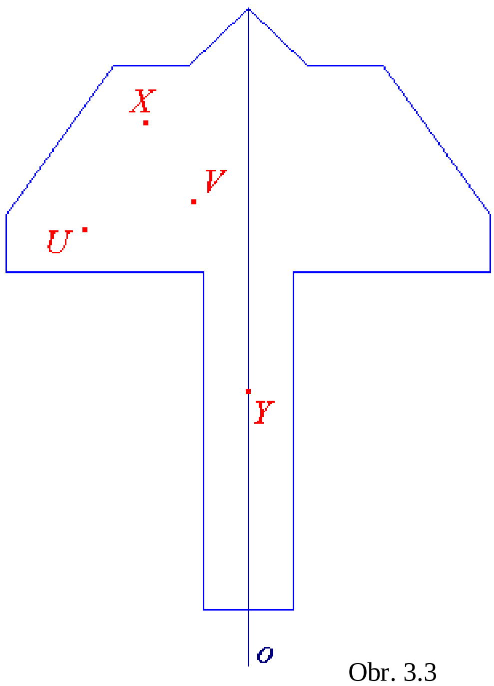


Obr. 3.2

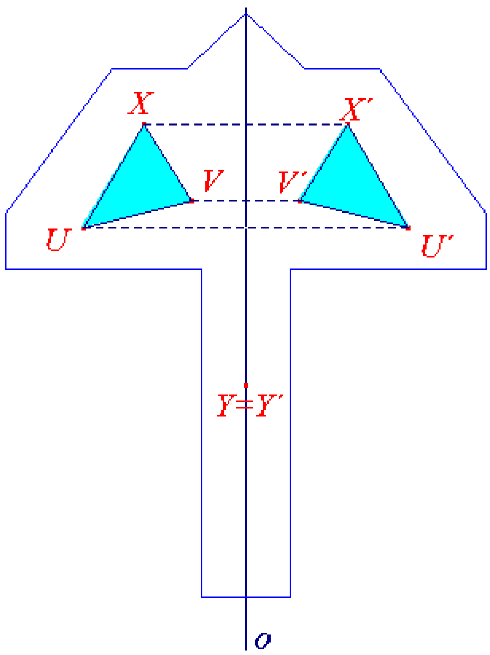
Úloha 3:

Do obrysu vlaštovky vyznačte body *U*, *V*, *X*, *Y* (obr. 3.3) a skládáním papíru sestrojte body U´, V´, X´, Y´. Využijte k tomu konstrukci Z9.

<u>Řešení</u> (viz obr. 3.4)



Obr. 3.3



Obr. 3.4

Body U, V, X jsme zobrazili na body U', V', X'. Body U, V, X nazýváme *vzory* a body U', V', X' nazýváme *obrazy* bodů U, V, X. Zvláštní postavení má bod Y. Na první pohled totiž vidíme, že po přeložení podle přímky o zůstává bod Y na svém místě. Zapíšeme $Y = Y'$.

Body, které se zobrazí samy na sebe a nemění tedy svou polohu, nazýváme *samodružné body*. Jsou to všechny body přímky o.

Zobrazení, které jsme popsali, nazýváme *osová souměrnost*. Přímka o, podle níž překládáme průsvitku je *osa souměrnosti*.

Úloha 4:

Na list průsvitného papíru narýsujte přímku o a vyznačte dva body M, N, které na ní neleží. Dále vyznačte bod O, který leží na přímce o.

a) Skládáním papíru sestrojte obrazy M', N' bodů M, N v osové souměrnosti s osou o.

b) Skládáním papíru sestrojte obraz $M'N'$ úsečky MN v osové souměrnosti s osou o.

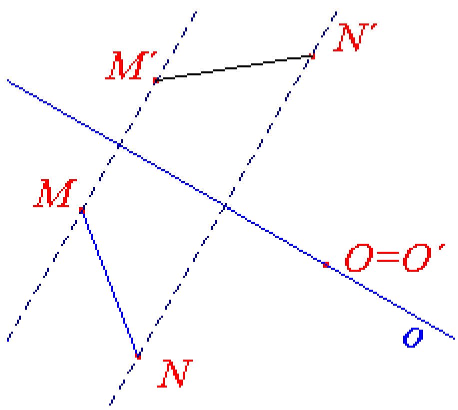
c) Vyznačte obraz bodu O v osové souměrnosti s osou o.

Řešení (viz obr. 3.5)

a) Podle konstrukce Z9 umíme sestrojit.

b) Obrazem úsečky MN v osové souměrnosti s osou o je úsečka $M'N'$. Víme, že je s úsečkou MN shodná $(M'N' \cong MN)$. Jejich délky se proto rovnají $(|MN| = |M'N'|)$.

c) Bod O leží na ose o, je proto samodružný. Platí $O = O'$.

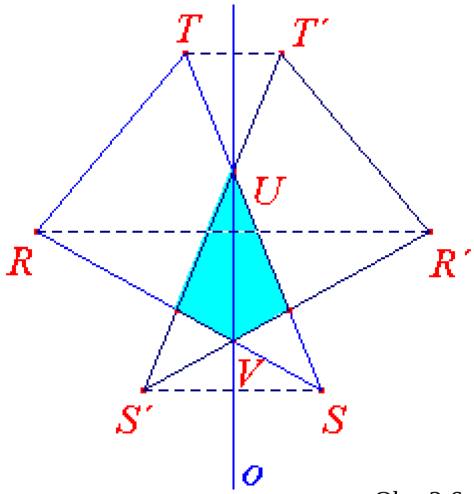


Obr. 3.5

Úloha 5:

Na list průsvitného papíru narýsujte libovolný trojúhelník *RST*. Vyznačte bod *U*, který je bodem strany *ST* a bod *V*, který je bodem strany *RS*. Body *U*, *V* nesplývají se žádným vrcholem trojúhelníku *RST*. Skládáním papíru sestrojte obraz *R´S´T´* trojúhelníku *RST* v osové souměrnosti s osou $o = UV$. Společnou část vzoru a obrazu vybarvěte.

<u>Řešení</u> je na obr. 3.6.



Obr. 3.6

V tomto odstavci jsme si ukázali jen několik příkladů, pomocí nichž můžeme demonstrovat osovou souměrnost skládáním papíru. V učebnici [4] je uvedena celá řada dalších úloh, které lze na úlohy skládáním papíru převést.

3.2 Trojúhelník

Trojúhelníky jsou rovinné obrazce, jimiž se matematika zabývá s velkou pozorností. Patří k nejjednodušším obrazcům s mnohostranným využitím. Některé složitější obrazce můžeme rozložit na nepřekrývající se trojúhelníky a tím si zjednodušit práci s nimi. Například při sestavování map byla rozlehlá území rozdělena na nepřekrývající se trojúhelníky. Jejich vrcholy vyznačené triangulačními kameny tvořily opěrné body při kreslení map a určování vzdáleností na zemském povrchu. Díky tomu mohli na konci 18. století francouzští vědci změřit délku zemského poledníku a stanovit jeden metr jako základní jednotku délky.

3.2.1 Součet vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku

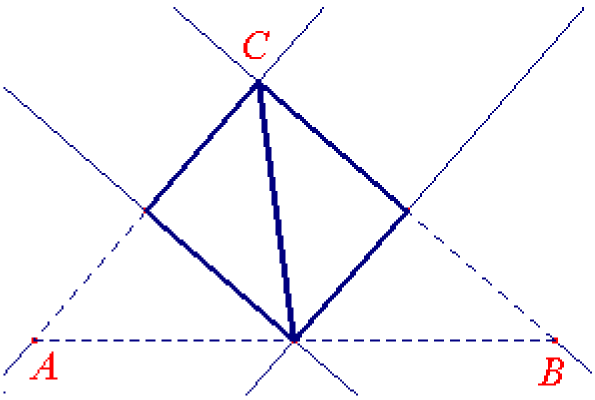
Na začátku této kapitoly v učebnici [5] je žákům zadán úkol, aby narýsovali libovolný trojúhelník *ABC* a změřili velikosti jeho vnitřních úhlů. Budou-li pracovat přesně, zjistí zajímavý výsledek, že součet vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku je 180°. Následně je pak dokázáno, proč toto tvrzení skutečně platí pro každý trojúhelník.

My se o tomto poznatku přesvědčíme na základě experimentu vyřešením následujících úloh skládáním papíru.

Úloha 1:

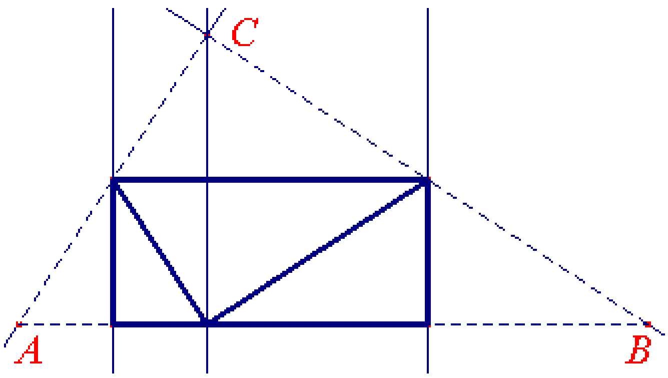
Narýsujte a vystřihněte z papíru pravoúhlý trojúhelník, potom z něj složte pravoúhelník (pravoúhelníky jsou obdélníky a čtverce).

Řešení je na obr. 3.7.



Obr. 3.7

Tato úloha má však ještě jiné řešení, které budeme potřebovat k našemu experimentu. Proto je tedy nutné se s ním také seznámit (obr. 3.8).

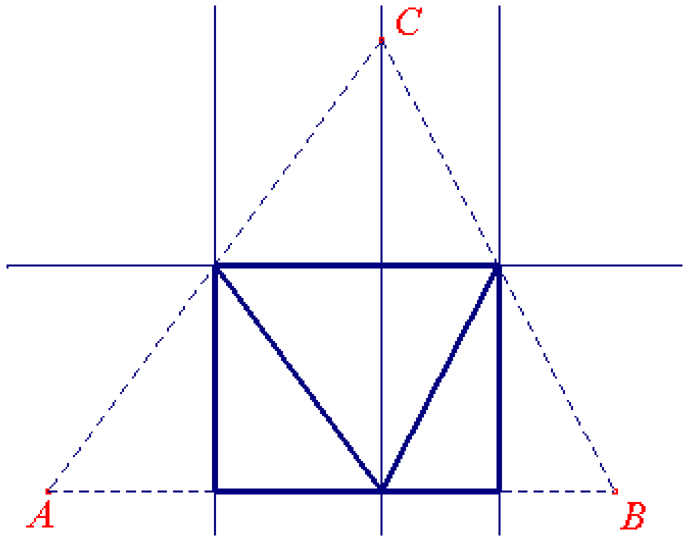


Obr. 3.8

Úloha 2:

Opakujte předchozí úlohu pro ostroúhlý trojúhelník.

<u>Řešení</u> je na obr. 3.9.

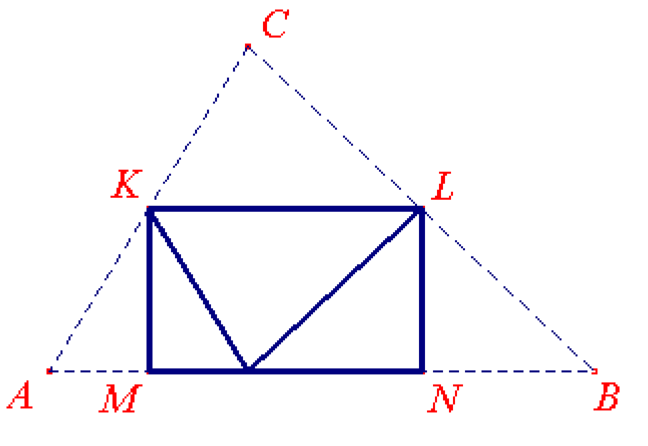


Obr. 3.9

Úloha 3:

Jakou část trojúhelníku tvoří vzniklý pravoúhelník?

<u>Řešení</u> je obr. 3.10.



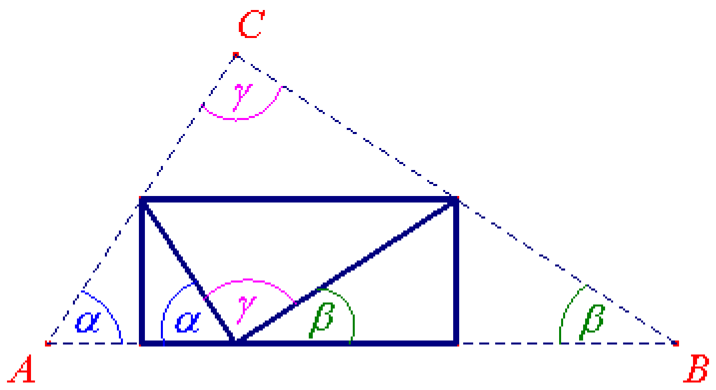
Obr. 3.10

Z obrázku 3.10 vidíme, že vzniklý pravoúhelník *KLMN* tvoří $\frac{1}{2}$ obsahu trojúhelníku *ABC*.

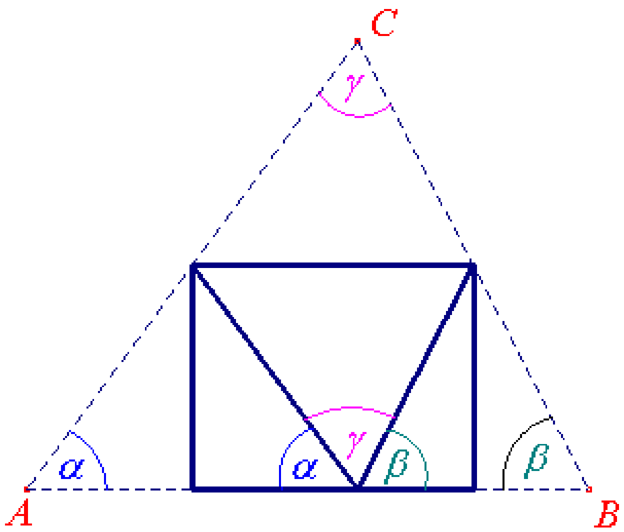
Úloha 4:

Označte si úhly v trojúhelnících z úloh 1) a 2) písmeny α, β, γ tak, aby po složení pravoúhelníku byly vidět. Co platí pro velikosti těchto úhlů?

Řešení je na obr. 3.11 a na obr. 3.12.



Obr. 3.11



Obr. 3.12

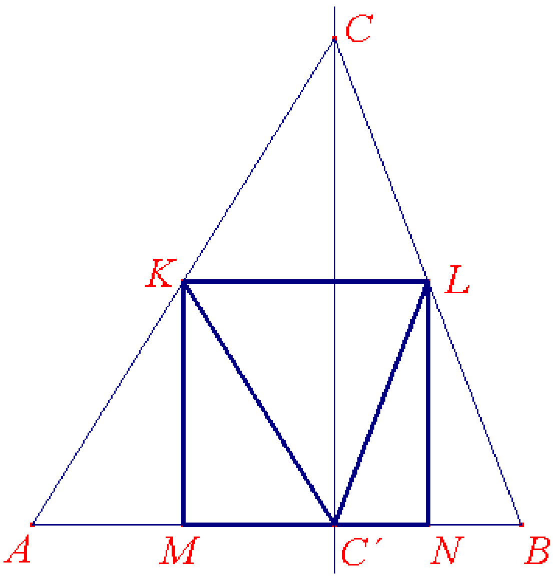
Z obrázků 3.11 a 3.12 vidíme, že součet vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku je $\alpha + \beta + \gamma$ a to je přímý úhel. Proto platí $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Úloha 5:

Najděte takový trojúhelník, aby překládáním vznikl čtverec.

Řešení (viz obr. 3.13)

Z obrázku 3.10 můžeme usoudit, že délka strany *MN* pravoúhelníku *MNKL* je polovinou délky strany *AB* trojúhelníku *ABC* a dále, že délka strany *LN* je polovinou výšky z vrcholu *C* v trojúhelníku *ABC*. Proto bude pravoúhelník *MNKL* čtvercem právě tehdy, když v trojúhelníku *ABC* bude platit, že $|AB| = v_c$.



Obr. 3.13

3.2.2 Střední příčky trojúhelníku

Učebnice [5] uvádí, že ***střední příčka*** trojúhelníku je úsečka, jejíž krajní body jsou středy dvou stran trojúhelníku. Je rovnoběžná s jeho třetí stranou a její délka je rovna polovině délky této strany.

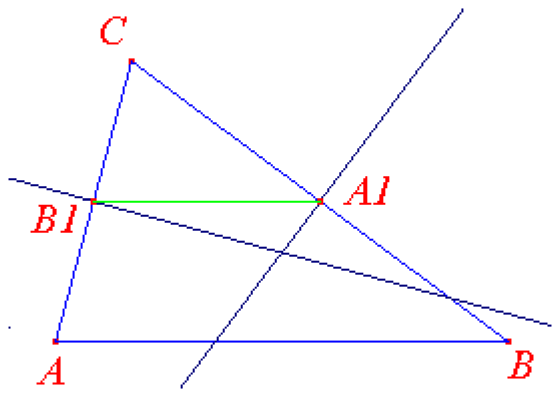
O těchto vlastnostech se přesvědčíme skládáním papíru.

Úloha 1:

Na list průsvitného papíru narýsujte trojúhelník *ABC*. Skládáním papíru sestrojte střed B_1 strany *AC*, střed A_1 strany *BC* (konstrukce Z1) a úsečku A_1B_1 (konstrukce Z2).

Řešení (viz obr. 3.14)

Úsečka A_1B_1 je střední příčka trojúhelníku *ABC*.



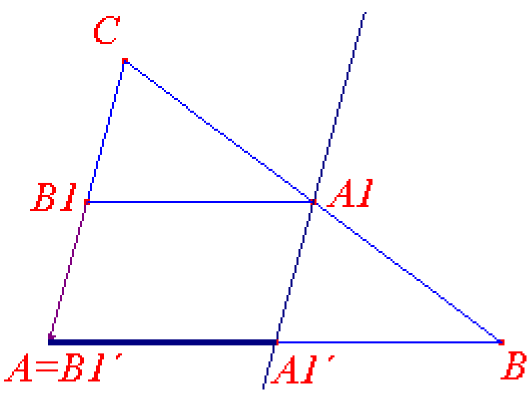
Obr. 3.14

Ukážeme, že střední příčka A_1 B_1 trojúhelníku *ABC* má obě uvedené vlastnosti.

Úloha 2:

Sestrojenou úsečku A_1 B_1 skládáním papíru posuňte o vektor $\boldsymbol{B_1A}$ (konstrukce Z11).

Řešení je na obr. 3.15.



Obr. 3.15

Protože úsečka $A_1´B_1´$ leží na úsečce *AB*, je úsečka A_1B_1 rovnoběžná s úsečkou *AB*. Skládáním papíru zjistíme, že bod $A_1´$ je střed úsečky *AB* a tím jsme se přesvědčili, že střední příčka A_1B_1 trojúhelníku *ABC* má obě uvedené vlastnosti: je rovnoběžná s jeho třetí stranou a její délka je rovna polovině délky této strany.

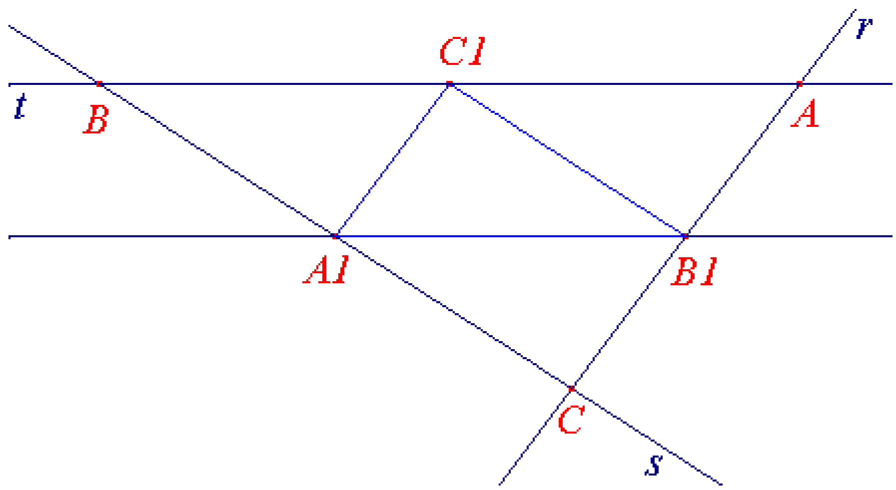
Úloha 3:

Dostali jste list průsvitného papíru, na kterém je narýsován trojúhelník $A_1B_1C_1$. Skládáním papíru sestrojte trojúhelník ABC takový, aby vrcholy trojúhelníku $A_1B_1C_1$ byly středy úseček BC, CA a AB.

<u>Řešení</u> (viz obr. 3.16)

Nyní už známe vlastnosti středních příček trojúhelníku, proto s využitím konstrukce Z8 sestrojíme takto:

1) r: rovnoběžka s A_1C_1 *bodem* B_1
2) s: rovnoběžka s B_1C_1 *bodem* A_1
3) t: rovnoběžka s A_1B_1 *bodem* C_1
4) A: $r \cap t$
5) B: $s \cap t$
6) C: $r \cap s$
7) trojúhelník ABC



Obr. 3.16

3.2.3 Střed kružnice opsané

V této kapitole se budeme zabývat kružnicí, na které leží všechny tři vrcholy trojúhelníku. Taková kružnice se nazývá kružnice *opsaná* tomuto trojúhelníku. Každému trojúhelníku lze opsat jedinou kružnici. Její poloměr je roven vzdálenosti středu od libovolného vrcholu trojúhelníku. A kde je její střed?

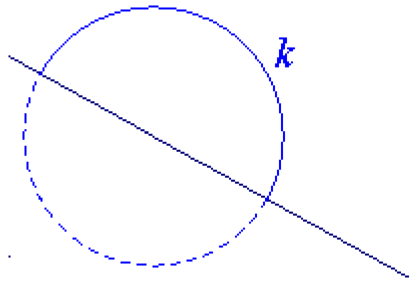
Na základě experimentu ukážeme, jak skládáním papíru sestrojíme střed kružnice opsané trojúhelníku.

Úloha 1:

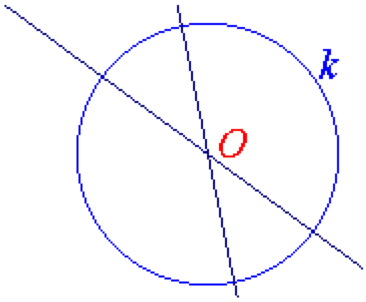
Bez použití kružítka (pomocí šablony) na průsvitný list papíru narýsujte kružnici *k*. Skládáním papíru sestrojte střed *O* kružnice *k*.

Řešení (viz obr. 3.17 a obr. 3.18)

Sestrojíme alespoň dva takové přehyby, aby se po přeložení kružnice překrývala. V jejich průsečíku je střed *O* kružnice *k*.



Obr. 3.17



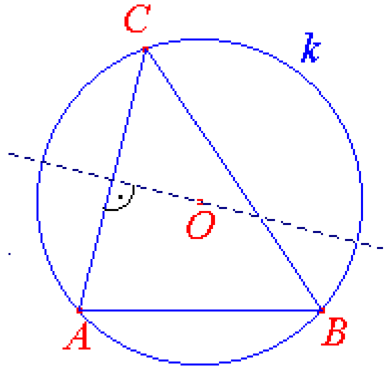
Obr. 3.18

Úloha 2:

Dostali jste průsvitný list papíru, na kterém je narýsovaný trojúhelník *ABC* a kružnice *k* se středem *O* opsaná tomuto trojúhelníku. Skládáním papíru sestrojte osu strany *AC* trojúhelníku *ABC* (konstrukce Z1). Jaká je její poloha vůči středu *O*?

Řešení (viz obr. 3.19)

Vidíme, že osa úsečky *AC* prochází středem *O*.

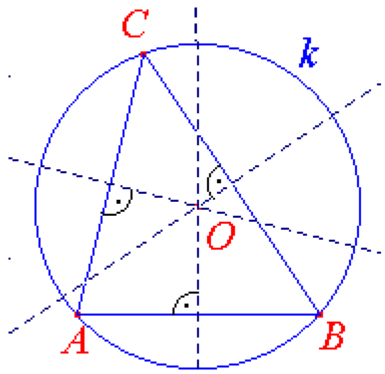


Obr. 3.19

Úloha 3:

Skládáním papíru sestrojte ještě osy stran *AB* a *BC* trojúhelníku *ABC*.

Řešení je na obr. 3.20.



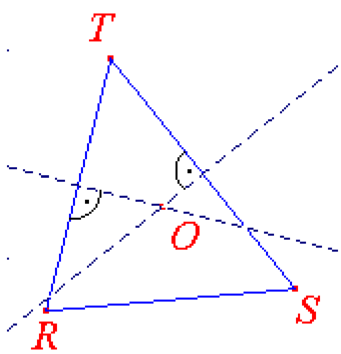
Obr. 3.20

Skládáním papíru jsme zjistili, že střed kružnice opsané trojúhelníku je průsečík os jeho stran. K vyznačení jejich průsečíku stačí však sestrojit jenom dvě z nich.

Úloha 4:

Na průsvitný list papíru narýsujte libovolný trojúhelník *RST*. Skládáním papíru sestrojte střed *O* kružnice *k* opsané trojúhelníku *RST*.

Řešení je na obr. 3.21.



Obr. 3.21

3.2.4 Střed kružnice vepsané

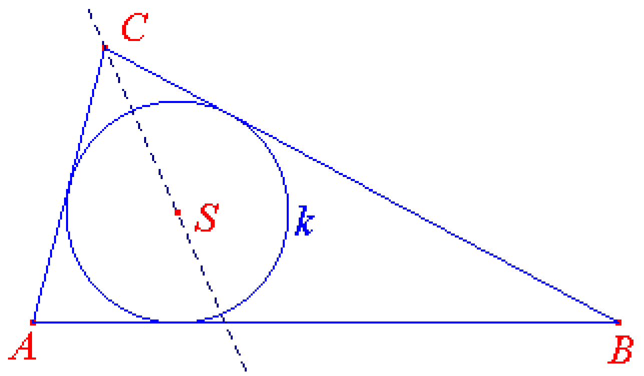
Také v této kapitole se budeme zabývat kružnicí, která souvisí s trojúhelníkem. Kružnice, která se dotýká všech tří stran trojúhelníku, se nazývá kružnice ***vepsaná*** tomuto trojúhelníku. Každému trojúhelníku lze vepsat jedinou kružnici. Její poloměr je roven vzdálenosti jejího středu od libovolné strany trojúhelníku a její střed podobně jako střed kružnice opsané nalezneme skládáním papíru pomocí experimentu.

Úloha 1:

Dostali jste průsvitný list papíru, na kterém je narýsovaný trojúhelník *ABC* a kružnice *k* se středem *S* vepsaná tomuto trojúhelníku. Skládáním papíru sestrojte osu úhlu *ACB* trojúhelníku *ABC* (konstrukce Z4). Jaká je její poloha vůči středu *S*?

Řešení je na obr. 3.22.

Vidíme, že osa úhlu *ACB* prochází středem *S*.

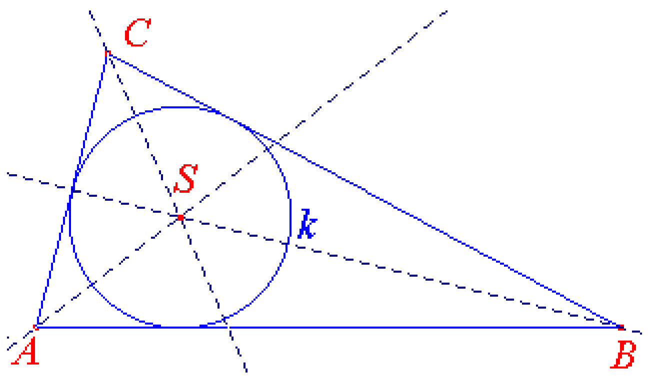


Obr. 3.22

Úloha 2:

Skládáním papíru sestrojte ještě osy úhlů *CAB* a *CBA* trojúhelníku *ABC*.

Řešení je na obr. 3.23.



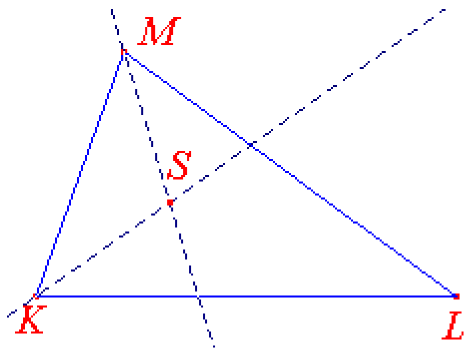
Obr. 3.23

Skládáním papíru jsme zjistili, že střed kružnice vepsané trojúhelníku je průsečík os jeho vnitřních úhlů. K vyznačení jejich průsečíku stačí však sestrojit jenom dvě z nich.

Úloha 3:

Na průsvitný list papíru narýsujte libovolný trojúhelník *KLM*. Skládáním papíru sestrojte střed *S* kružnice *k* vepsané trojúhelníku *KLM*.

Řešení je na obr. 3.24.



Obr. 3.24

3.2.5 Výšky trojúhelníku

Učebnice [4], [5] uvádějí, že ***výškou*** trojúhelníku rozumíme úsečku (či délku této úsečky), která spojuje vrchol trojúhelníku s patou kolmice vedené z tohoto vrcholu k přímce, na které leží protější strana. Každý trojúhelník má tři výšky. Přímky, na kterých tyto výšky leží, se protínají v jediném bodě. Nazýváme ho ***průsečíkem výšek.***

Žáci se o tom přesvědčují rýsováním výšek. Budeme-li přesní, přesvědčíme se o tom skládáním papíru.

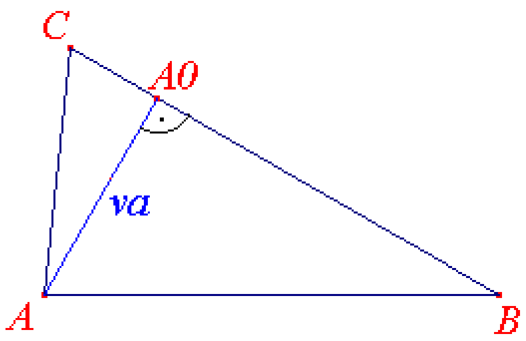
Výšky v ostroúhlém trojúhelníku

Úloha 1:

Na list průsvitného papíru narýsujte ostroúhlý trojúhelník *ABC*. Skládáním papíru sestrojte výšku v_a trojúhelníku *ABC*.

Řešení (viz obr. 3.25)

Bodem *A* vedeme kolmici ke straně *BC* (konstrukce Z5) a její patu označíme A_0. Úsečka AA_0 je výška v_a trojúhelníku *ABC*.



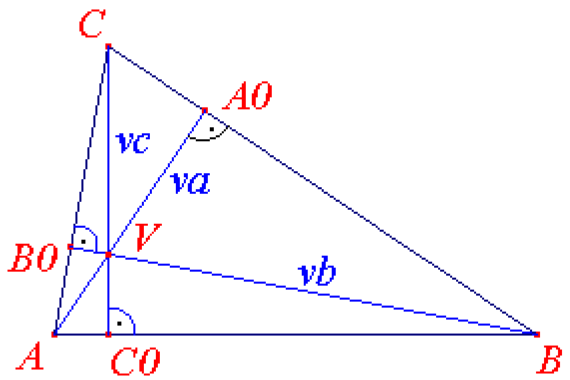
Obr. 3.25

Úloha 2:

Skládáním papíru sestrojte ještě výšky v_b a v_c trojúhelníku *ABC* příslušné ke stranám *b* a *c*.

Řešení je na obr. 3.26.

Stejně jako výšku v_a v předchozí úloze sestrojíme i výšky v_b a v_c.



Obr. 3.26

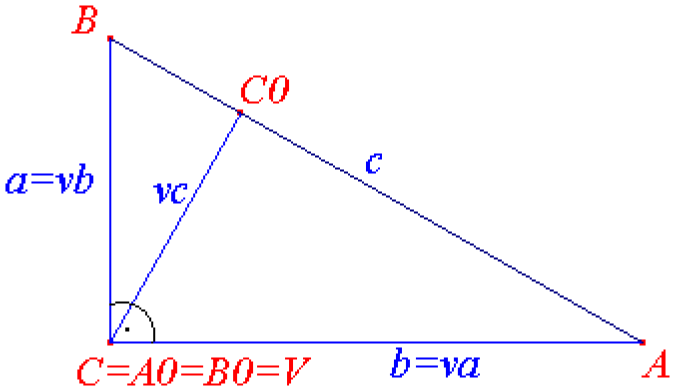
Přesným sestrojením jsme zjistili, že všechny tři výšky se protínají v jednom bodě. Tento bod se nazývá ***průsečík výšek*** trojúhelníku *ABC*. Budeme ho značit písmenem *V*.

Výšky v pravoúhlém trojúhelníku

Úloha 3:

Na list průsvitného papíru narýsujte pravoúhlý trojúhelník *ABC*. Skládáním papíru sestrojte výšky v_a, v_b a v_c trojúhelníku *ABC*.

Řešení je na obr. 3.27.



Obr. 3.27

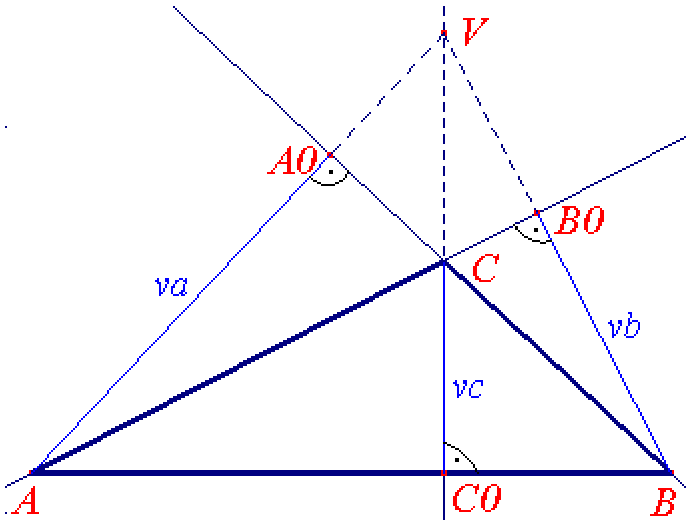
Nyní jsme si všimli, že výška ke straně *BC* splývá s odvěsnou *AC* a výška ke straně *AC* splývá s odvěsnou *BC*. Společným bodem všech tří výšek je bod *C* - vrchol pravého úhlu trojúhelníku *ABC*.

Výšky v tupoúhlém trojúhelníku

Úloha 4:

Na list průsvitného papíru narýsujte tupoúhlý trojúhelník *ABC*. Skládáním papíru sestrojte výšky v_a, v_b a v_c trojúhelníku *ABC*.

Řešení je na obr. 3.28.



Obr. 3.28

Došli jsme k závěru, že dvě z výšek nemůžeme do trojúhelníku vyznačit. Abychom je mohli sestrojit, musíme „prodloužit“ strany *AC* a *BC* trojúhelníku *ABC*.

Vidíme, že v tupoúhlém trojúhelníku tedy leží dvě z jeho výšek vně trojúhelníku. Jeho tři výšky nemají žádný společný bod. Proložíme-li však každou z výšek přímkou, protnou se tyto tři přímky v jediném bodě, který označíme *V*. Také v tomto případě se bod *V* nazývá ***průsečík výšek***.

Skládáním papíru jsme se přesvědčili, že poloha průsečíku výšek *V* vzhledem k trojúhelníku závisí na druhu trojúhelníku:

- V ***ostroúhlém*** trojúhelníku je bod *V* jeho vnitřním bodem.
- V ***pravoúhlém*** trojúhelníku splývá bod *V* s vrcholem pravého úhlu.
- V ***tupoúhlém*** trojúhelníku leží bod *V* vně trojúhelníku.

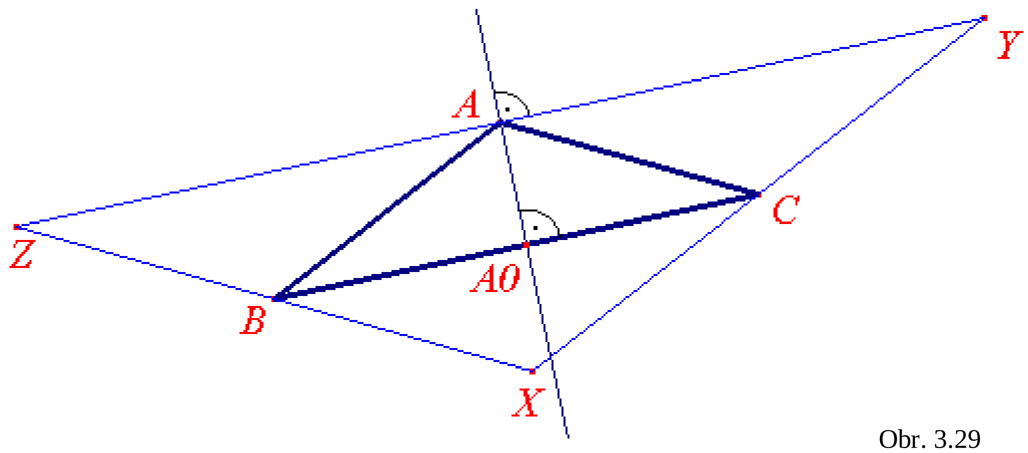
Skládáním papíru dokážeme, že přímky, na kterých leží výšky každého trojúhelníku, se protínají v jednom bodě.

Úloha 5:

Na list průsvitného papíru narýsujte libovolný trojúhelník *ABC* a skládáním papíru sestrojte pomocný trojúhelník *XYZ* tak, aby bod *A* byl středem strany *YZ*, bod *B* středem strany *XZ* a bod *C* středem strany *XY*.

<u>Řešení</u> je na obr. 3.29.

To, že takový trojúhelník existuje jsme zdůvodnili v úloze číslo 2 kapitoly o středních příčkách.



Obr. 3.29

Protože BC je rovnoběžná s YZ, je výška AA_0 trojúhelníku ABC kolmá nejen ke straně BC, ale i k úsečce XZ, jejímž středem je právě bod A. Proto výška AA_0 leží na přímce, která je osou úsečky YZ. Zopakujeme-li předchozí úvahu i pro výšky ke stranám AB a AC, dostanete tento výsledek:

Výšky trojúhelníku ABC leží na přímkách, které jsou osami stran trojúhelníku XYZ. Osy stran trojúhelníku XYZ se protínají v jednom bodě - středu kružnice jemu opsané. Proto přímky, na kterých leží výšky trojúhelníku ABC, se skutečně protínají v jednom bodě.

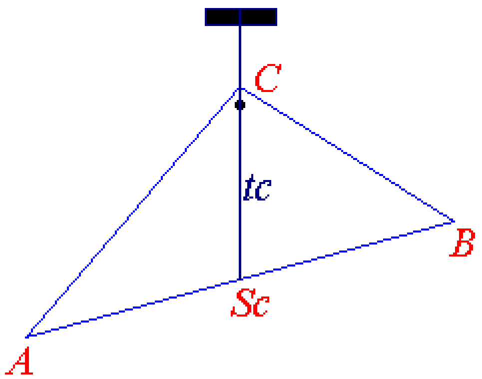
3.2.6 Těžnice a těžiště v trojúhelníku

V této kapitole popíšeme ještě jednu důležitou úsečku, jejíž krajní body leží na stranách trojúhelníku.

Na špičce ukazováku se snažte udržet ve vodorovné poloze bez hnutí učebnici matematiky. Je možné udržet podobným způsobem na špičce ukazováku trojúhelník? Vyřízneme-li z kartonu trojúhelník, zjistíme, že existuje bod, v němž lze podepřít trojúhelník ukazovákem a udržet ho bez hnutí ve vodorovné poloze. Nyní provedeme pokus jak tento bod nalézt. Protože průsvitný papír je příliš lehký, musíme pro tento pokus použít nejprve papír z tvrdšího materiálu.

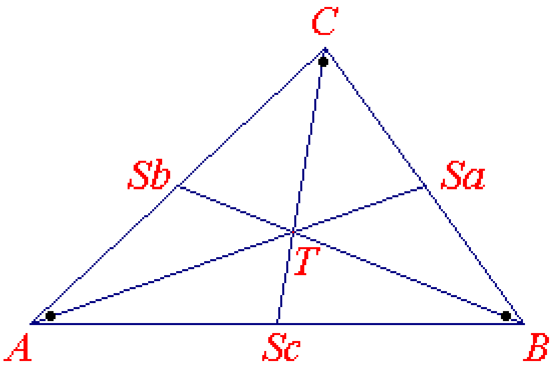
Úloha 1:

Z tuhého papíru nebo kartonu vystřihněte trojúhelník ABC, jehož všechny vnitřní úhly jsou menší než úhel pravý. V blízkosti vrcholů propíchněte hrotem kružítka otvory pro závěsné nitě. Postupně ve všech třech vrcholech zavěste trojúhelník na nit, počkejte, až se ustálí v rovnovážné poloze a zakreslete na trojúhelníku úsečku, která je prodloužením nitě (obr. 3.30).



Obr. 3.30

Vrcholy a průsečíky zakreslených úseček se stranami trojúhelníku označte tak, jako na obr. 3.31.



Obr. 3.31

Úloha 2:

Obkreslete trojúhelník (obr. 3.31) na průsvitný papír a skládáním papíru porovnejte délky úseček:

$|AS_b|$ a $|CS_b|$,

$|AS_c|$ a $|BS_{c,}|$

$|BS_a|$ a $|CS_a|$.

Jestliže je pokus pečlivý, zjistíme, že platí:

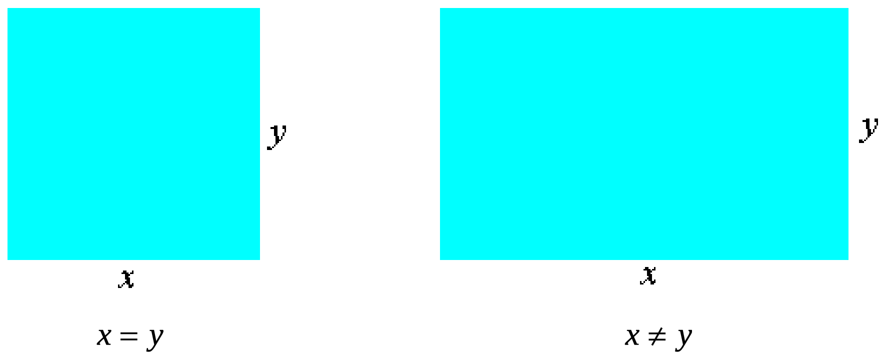
$|AS_b| = |CS_b|,\ |AS_c| = |BS_c|,\ |BS_a| = |CS_a|.$

Body S_a, S_b, S_c jsou tedy středy stran trojúhelníku ABC. Úsečky AS_a, BS_b, CS_c spojující vrcholy se středy protějších stran nazýváme těžnice trojúhelníku ABC. Bod T, který je společným bodem všech tří těžnic, nazýváme těžiště trojúhelníku ABC.

Ukázali jsme, že ***těžnice*** je úsečka, která spojuje vrchol trojúhelníku se středem jeho protější strany. Každý trojúhelník má tři těžnice, které se protínají v jednom bodě - v ***těžišti*** T.

3.3 Pravoúhelníky

Učebnice [5] uvádí, že pravoúhelníky rozlišujeme podle toho, zda jsou jejich sousední strany shodné, nebo nikoli, na čtverce a obdélníky.



Čtyřúhelník, jehož všechny vnitřní úhly jsou pravé, se nazývá ***pravoúhelník***. Pravoúhelník, jehož sousední strany jsou shodné, se nazývá ***čtverec***. Pravoúhelník, jehož sousední strany nejsou shodné, se nazývá ***obdélník***.

3.3.1 Čtverec

Protože víme, že čtverec je čtyřúhelník, jehož všechny strany jsou shodné a všechny vnitřní úhly pravé, můžeme sestrojit následující úlohu.

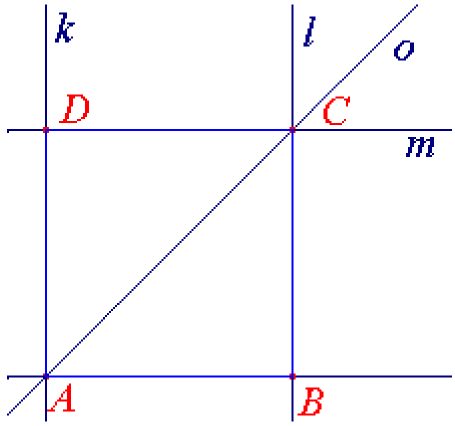
Úloha 1:

Skládáním papíru sestrojte libovolný čtverec *ABCD*.

<u>Řešení</u> (viz obr. 3.32)

S využitím konstrukcí Z4, Z5 a Z8 sestrojíme takto:

1) přímka *AB*
2) *k*: kolmice na *AB* bodem *A*
3) *l*: kolmice na *AB* bodem *B*
4) *o*: osa úhlu při vrcholu *A*
5) C: $l \cap o$
6) *m*: kolmice na *l* bodem *C*
7) D: $k \cap m$
8) čtverec *ABCD*



Obr. 3.32

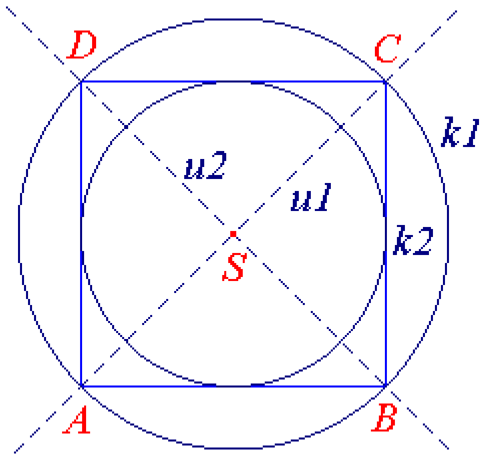
Dále víme a skládáním papíru se snadno můžeme přesvědčit, že každá úhlopříčka ho dělí na dva shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky.

Úloha 2:

Na list průsvitného papíru narýsujete čtverec *ABCD*. Skládáním papíru sestrojte úhlopříčky u_1, u_2 a zdůvodněte, co je jejich průsečíkem *S*.

<u>Řešení</u> (viz obr. 3.33)

Z obrázku vidíme, že bod *S* je středem souměrnosti čtverce *ABCD* a zároveň středem kružnic k_1 a k_2, z nichž k_1 je čtverci opsaná a k_2 čtverci vepsaná. Bod *S* se nazývá střed čtverce.Všechny čtyři pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky *ABS*, *BCS*, *CDS* a *DAS* jsou shodné.



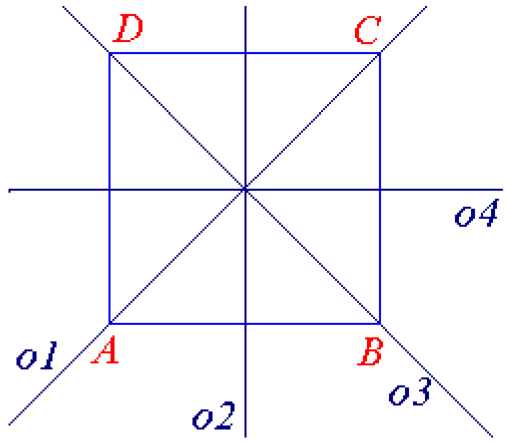
Obr. 3.33

Úloha 3:

Na list průsvitného papíru narýsujte čtverec *ABCD* a skládáním papíru sestrojte všechny jeho osy souměrnosti.

<u>Řešení</u> (viz obr. 3.34)

Čtverec můžeme přeložit čtyřmi způsoby tak, že se obě jeho části kryjí. Všechny osy procházejí středem čtverce, jímž je průsečík úhlopříček. Dvě osy souměrnosti jsou zároveň osami dvojic protilehlých stran. Další dvě osy souměrnosti jsou zároveň osami dvojic protilehlých vnitřních úhlů.



Obr. 3.34

3.3.2 Obdélník

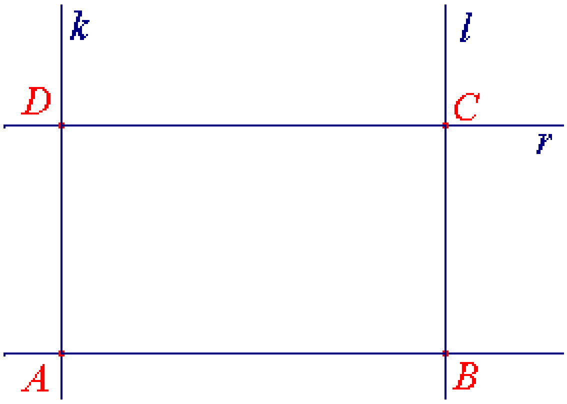
Také o obdélníku víme, že je čtyřúhelník, jehož všechny vnitřní úhly jsou pravé, protější strany jsou shodné a sousední strany shodné nejsou. Každá úhlopříčka ho dělí na dva shodné nerovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky. O těchto vlastnostech se přesvědčíme skládáním papíru.

Úloha 1: Skládáním papíru sestrojte libovolný obdélník *ABCD*.

Řešení (viz obr. 3.35)

S využitím konstrukcí Z4, Z5 a Z8 sestrojíme takto:

1) přímka *AB*
2) *k*: kolmice na *AB* bodem *A*
3) *l*: kolmice na *AB* bodem *B*
4) *r*: rovnoběžka s *AB*
5) *D*: $k \cap r$
6) C: $l \cap r$
7) obdélník *ABCD*



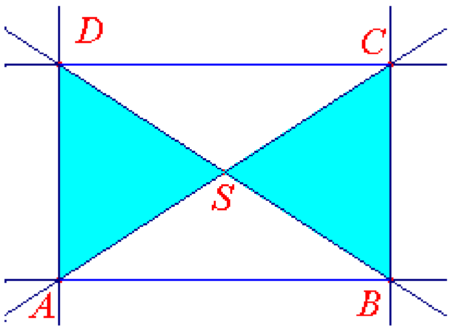
Obr. 3.35

Úloha 2:

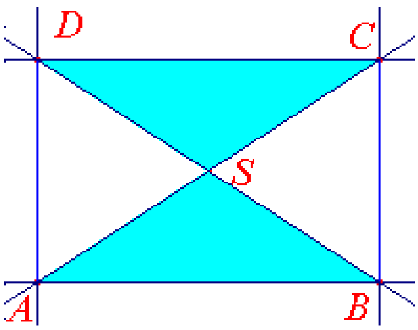
Na list průsvitného papíru narýsujete obdélník *ABCD*. Skládáním papíru sestrojte úhlopříčky u_1, u_2 a zdůvodněte, co je jejich průsečíkem *S*.

Řešení (viz obr. 3.36 a obr. 3.37)

Z obrázků vidíme, že bod *S* je středem souměrnosti obdélníku *ABCD*. Trojúhelníky *ASB* a *DSC* jsou shodné (např. podle věty *sss*), podobně jako trojúhelníky *BSC* a *DSA*.



Obr. 3.36



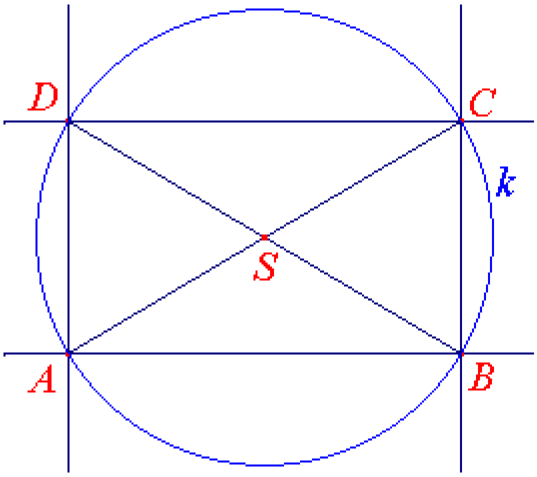
Obr. 3.37

Úloha 3:

Skládáním papíru sestrojte střed kružnice opsané obdélníku *ABCD*. Pokuste se najít také střed kružnice vepsané obdélníku *ABCD*.

Řešení (viz obr. 3.38)

Vidíme, že bod *S* je zároveň středem opsané kružnice *k*. Vepsat obdélníku kružnici nelze.



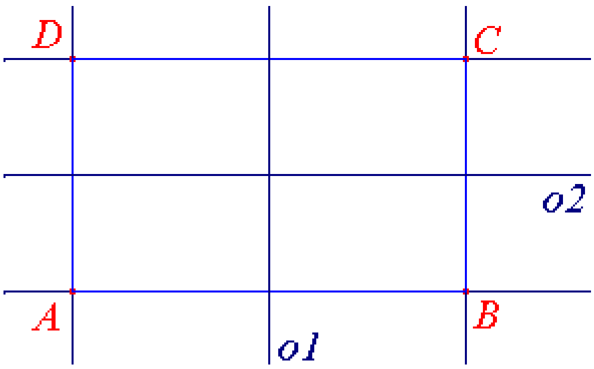
Obr. 3.38

Úloha 4:

Na list průsvitného papíru narýsujete obdélník *ABCD* a skládáním papíru sestrojte všechny jeho osy souměrnosti.

Řešení (viz obr. 3.39)

Obdélník můžeme přeložit dvěma způsoby tak, že se obě jeho části kryjí. Obě osy procházejí průsečíkem jeho úhlopříček. Obě osy souměrnosti jsou zároveň osami dvojic jeho protilehlých stran.



Obr. 3.39

4 Využití konstrukcí skládáním papíru v zájmové práci

V této kapitole si uvedeme některé úlohy vhodné pro zájmovou činnost se žáky. Napřed uvedeme jednodušší úlohy, pak úlohy o kuželosečkách a nakonec některé úlohy eukleidovsky neřešitelné (trisekce úhlu, zdvojení krychle).

4.1 Další úlohy

Nyní vyřešíme několik úloh skládáním papíru pomocí základních konstrukcí.

Úloha 1:

Je dán bod A a přímka o. Skládáním papíru sestrojte obraz bodu A v symetrii podle přímky o.

Řešení (viz konstrukce Z9)

Úloha 2:

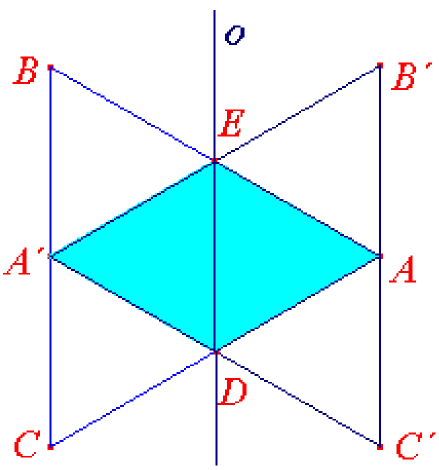
Jsou dány body A, O. Skládáním papíru sestrojte obraz bodu A v symetrii podle bodu O.

Řešení (viz konstrukce Z10)

Úloha 3:

Na list průsvitného papíru narýsujte rovnostranný trojúhelník ABC. Vyznačte bod D, který je středem strany AC a bod E, který je středem strany AB. Skládáním papíru sestrojte obraz $A'B'C'$ trojúhelníku ABC v osové souměrnosti s osou $o = DE$. Společnou část vzoru a obrazu vybarvěte.

Řešení je na obr. 4.1.



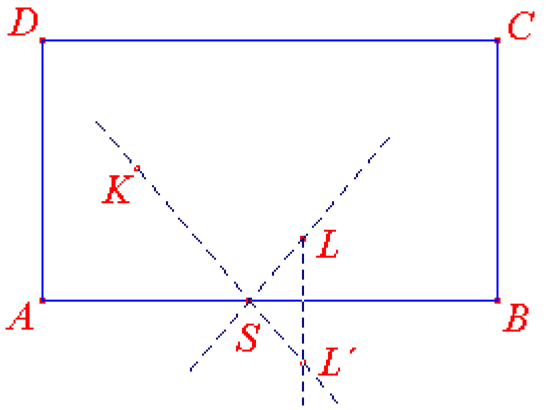
Obr. 4.1

Úloha 4:

Na list průsvitného papíru narýsujte obdélník *ABCD*, který představuje kulečníkový stůl. Vyznačte body *K* a *L*, které určují polohu koulí. Chceme, aby se koule *K* odrazila od okraje stolu a poté narazila do koule *L*. Skládáním papíru najděte bod *S* na hraně *AB* kulečníkového stolu, v němž se koule *K* musí odrazit.

Řešení (viz obr. 4.2)

Ze zkušenosti víme, že úhel odrazu je shodný s úhlem dopadu. Stejně tak úhel odrazu kulečníkové koule je shodný s úhlem jejího dopadu na hranu stolu v bodě S.



Obr. 4.2

Úloha 5:

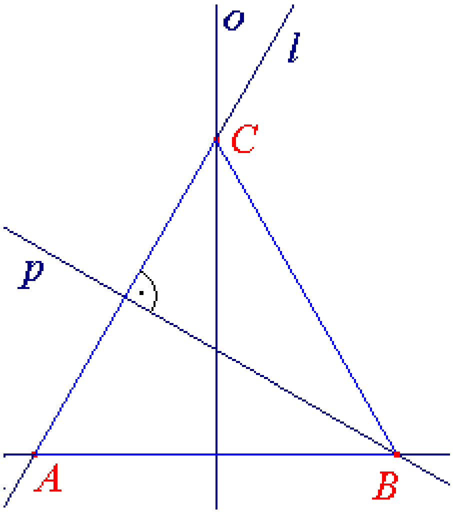
Skládáním papíru sestrojte rovnostranný trojúhelník *ABC*, je-li dána:

a) strana *AB*,

b) výška *CQ*.

Řešení úkolu a) (viz obr. 4.3)

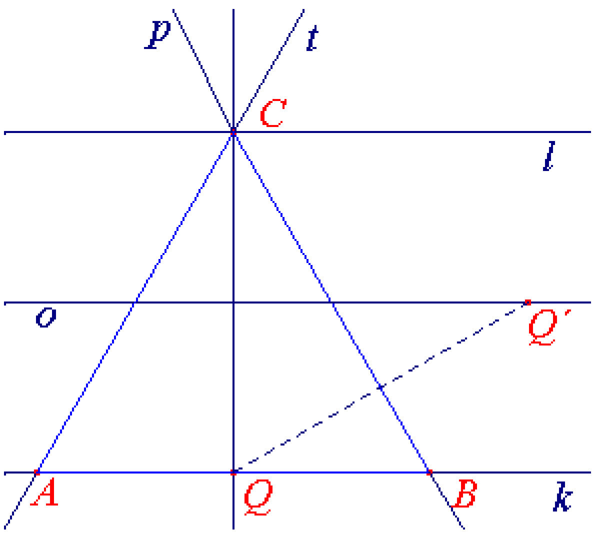
1) přímka *AB*
2) *o*: osa úsečky *AB*
3) přehyb *p*: *A* na *o* a přehyb prochází bodem *B*
4) *l*: kolmice na *p* bodem *A*
5) *C*: $o \cap l$
6) trojúhelník *ABC*



Obr. 4.3

<u>Řešení úkolu b)</u> (viz obr. 4.4)

1) přímka *CQ*
2) *k*: kolmice na *CQ* bodem *Q*
3) *l*: kolmice *CQ* bodem *C*
4) *o*: osa úsečky *CQ*
5) přehyb *p*: *Q* na *o* a přehyb prochází bodem *C*
6) *B*: $k \cap p$
7) přehyb *t*: *Q* na *o* a přehyb prochází bodem *C*
8) *A*: $k \cap t$
9) trojúhelník *ABC*



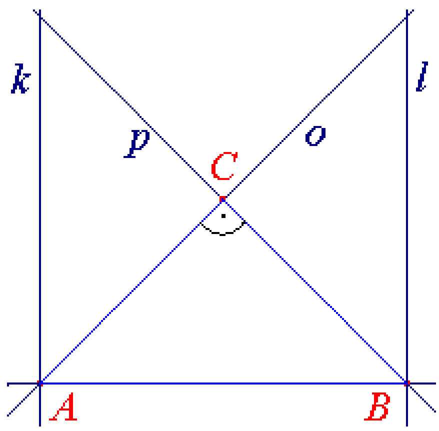
Obr. 4.4

Úloha 6:

Skládáním papíru sestrojte pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník *ABC*, je-li dána přepona *AB*.

<u>Řešení</u> (viz obr. 4.5)

1) přímka *AB*
2) *k*: kolmice na *AB* bodem *A*
3) *l*: kolmice na *AB* bodem *B*
4) *o*: osa úhlu při vrcholu *A*
5) *p*: osa úhlu při vrcholu *B*
6) *C*: $o \cap p$
7) trojúhelník *ABC*



Obr. 4.5

Úloha 7:

Jsou dány body *A, B* a přímka *p*. Skládáním papíru sestrojte pravoúhlý trojúhelník *ABC* s přeponou *AB* tak, aby $C \in p$.

<u>Řešení</u> (viz obr. 4.6)

1) přímka *AB*
2) *o*: osa úsečky *AB*
3) *P*: $AB \cap o$
4) přehyb *m*: *B* na *p* a přehyb prochází bodem *P*
5) *k*: kolmice na *m* bodem *B*
6) přehyb *n*: *A* na *p* a přehyb prochází bodem *P*

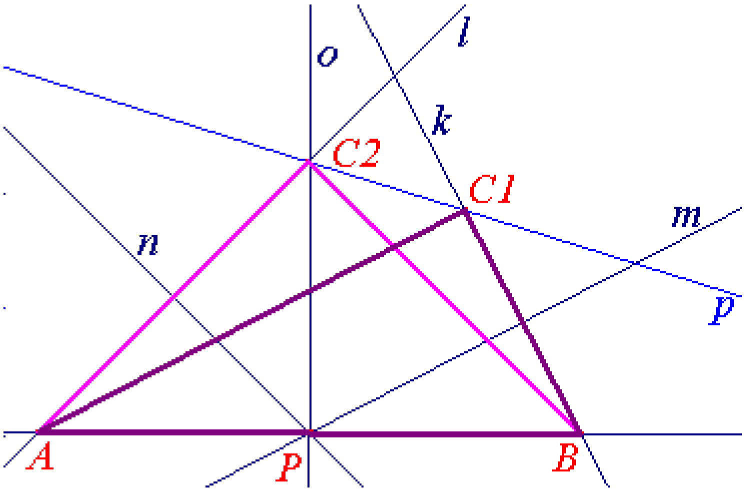
7) l: kolmice na n bodem A

8) C_1: $p \cap k$

9) C_2: $p \cap l$

10) trojúhelník ABC_1

11) trojúhelník ABC_2



Obr. 4.6

Úloha 8:

Je dána úsečka CB a přímka p. Skládáním papíru sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB tak, aby:

a) průsečík osy úhlu ACB a přepony ležel na p,

b) střed přepony ležel na p.

<u>Řešení úkolu a)</u> (viz obr. 4.7)

1) přímka CB

2) k: kolmice na CB bodem C

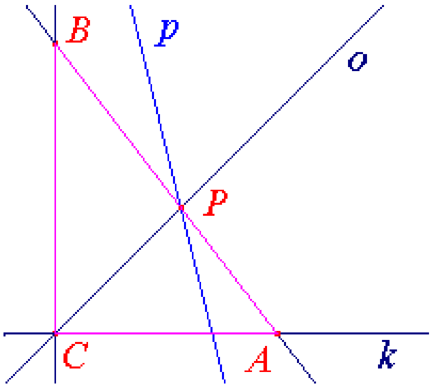
3) o: osa úhlu při vrcholu C

4) P: $p \cap o$

5) přímka BP

6) A: $k \cap BP$

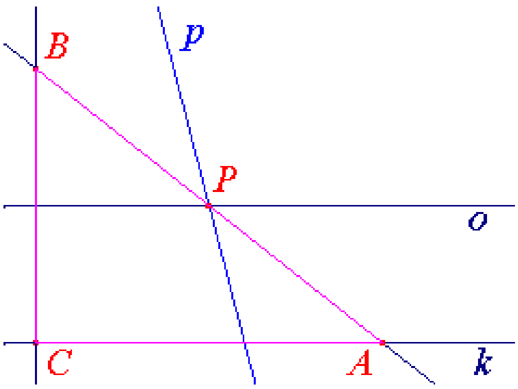
7) trojúhelník ABC



Obr. 4.7

<u>Řešení úkolu b)</u> (viz obr. 4.8)

1) přímka *CB*
2) *k*: kolmice na *CB* bodem *C*
3) *o*: osa úsečky *CB*
4) *P*: $p \cap o$
5) přímka *BP*
6) *A*: $k \cap BP$
7) trojúhelník *ABC*



Obr. 4.8

Úloha 9:

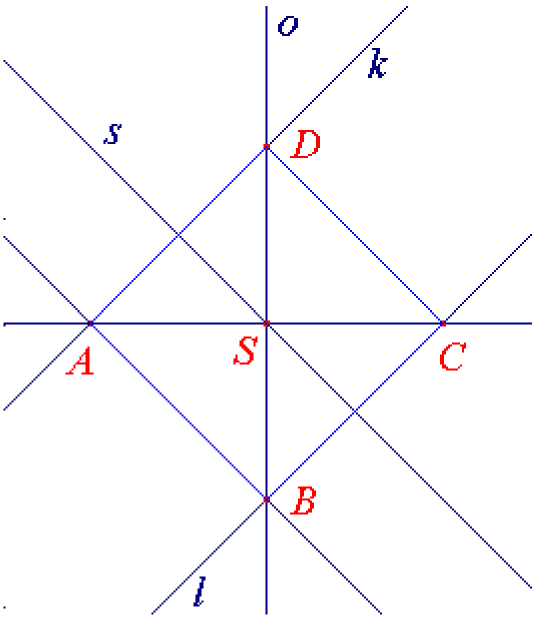
Skládáním papíru sestrojte čtverec *ABCD*, je-li dána:

a) strana *AB*,
b) úhlopříčka *AC*.

<u>Řešení úkolu a)</u> je uvedeno v úloze 1 kapitoly o čtvercích.

Řešení úkolu b) (viz obr. 4.9)

1) přímka AC
2) o: osa úsečky AC
3) S: $AC \cap o$
4) s: osa úhlu při vrcholu S
5) k: kolmice na s bodem A
6) D: $o \cap k$
7) l: kolmice na s bodem B
8) B: $o \cap l$
9) čtverec $ABCD$



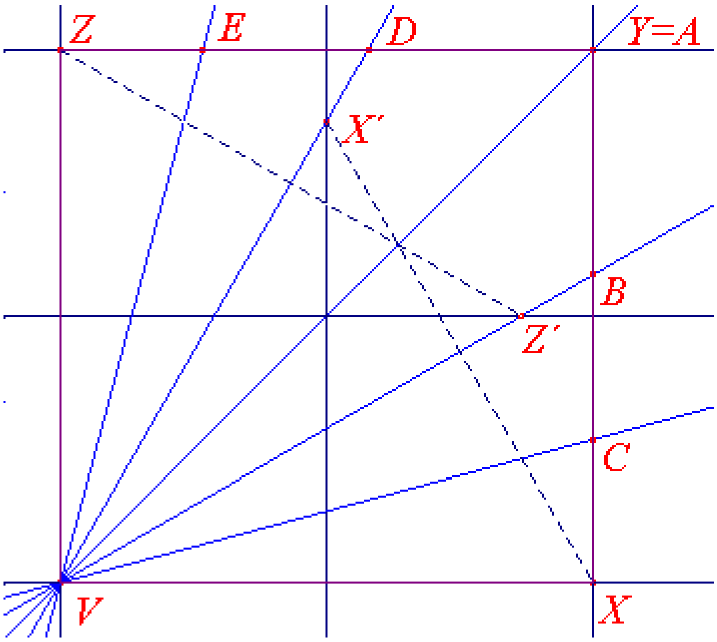
Obr. 4.9

Úloha 10:

Je dána úsečka VX. Skládáním papíru sestrojte:

a) bod A tak, aby velikost úhlu AVX byla 45^0,
b) bod B tak, aby velikost úhlu BVX byla 30^0,
c) bod C tak, aby velikost úhlu CVX byla 15^0,
d) bod D tak, aby velikost úhlu DVX byla 60^0,
e) bod E tak, aby velikost úhlu EVX byla 75^0.

Řešení je na obr. 4.10.



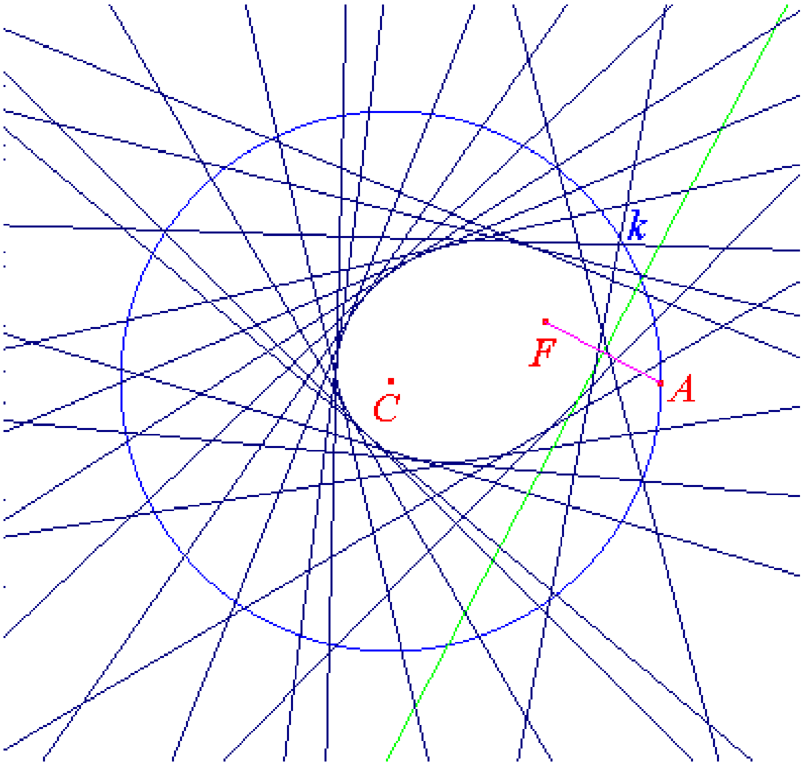
Obr. 4.10

4.2 Konstrukce kuželoseček s kružnicí

4.2.1 Elipsa

Úloha:

Na průsvitném papíře je narýsována kružnice *k* a bod *F* uvnitř této kružnice. Sestrojte takové přehyby *FA*, pro něž je *A* libovolný bod dané kružnice *k*. Určete, co je obalovou křivkou všech těchto přímek.



Obr. 4.11

Po utvoření dostatečného počtu přehybů vytvoříme hypotézu, že sestrojené přímky obalují elipsu.

<u>Důkaz hypotézy</u> (viz obr. 4.12)

Označme vzniklý přehyb *p.*

$D : FA \cap p$ a $B : CA \cap p$

$p \perp FA \Rightarrow \Delta ADB$ a ΔFDB jsou pravoúhlé

ΔADB a ΔFDB :

Trojúhelníky mají společnou stranu *BD*, $|FD| = |FA|$, $|\angle FDB| = |\angle ADB| = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\Delta ADB \cong \Delta FDB$ (podle věty *SUS*).

Protože $\Delta ADB \cong \Delta FDB \Rightarrow |BA| = |BF|$ (odpovídající si strany).

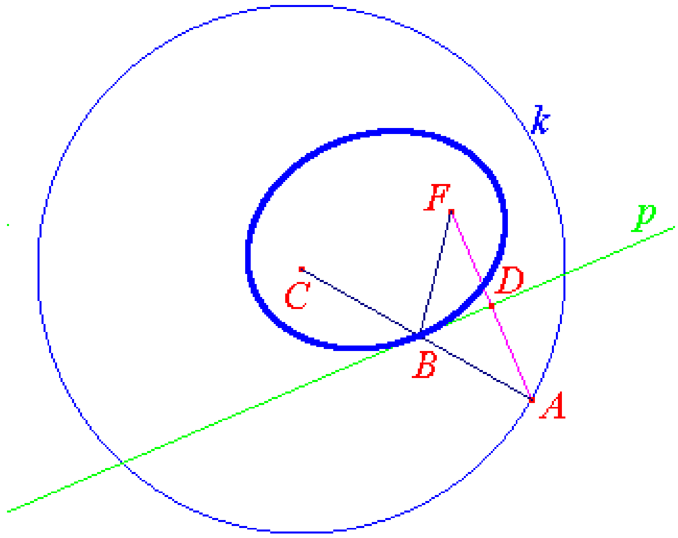
Tudíž $|BC| + |BF| = |BC| + |BA| \Rightarrow |BC| + |BF| = |CA|$.

$|CA| = r$ (je konstantní)

$|CA| \cap$ elipsa$\in B \Rightarrow$ bod B je bod elipsy $\Rightarrow$ vytvořený přehyb je <u>tečnou elipsy</u>.

Poznámka

Z vlastností tečen víme, že přímka *p* žádný jiný bod s elipsou nemá.

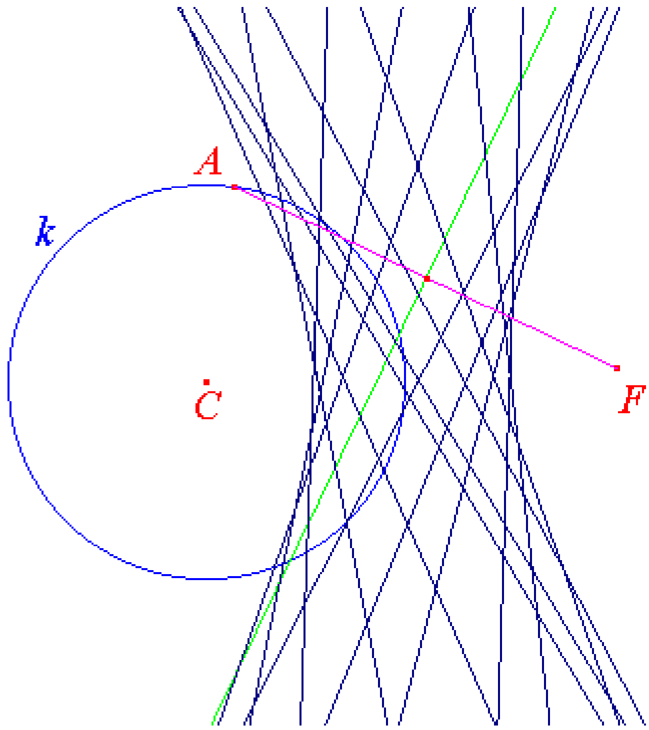


Obr. 4.12

4.2.2 Hyperbola

Úloha:

Na průsvitném papíře je narýsována kružnice *k* a bod *F* vně této kružnice. Sestrojte takové přehyby *FA*, pro něž je *A* libovolný bod dané kružnice *k*. Určete, co je obalovou křivkou všech těchto přímek.



Obr. 4.13

Po utvoření dostatečného počtu přehybů vytvoříme hypotézu, že sestrojené přímky obalují hyperbolu.

Důkaz hypotézy (viz obr. 4.14)

Označme vzniklý přehyb p.

$D : FA \cap p$ a $B : CA \cap p$

$p \perp FA \Rightarrow \Delta ADB$ a ΔFDB jsou pravoúhlé

ΔADB a ΔFDB:

Trojúhelníky mají společnou stranu BD, $|FD| = |FA|$, $|\angle FDB| = |\angle ADB| = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta ADB \cong \Delta FDB$ (podle věty *SUS*).

Protože $\Delta ADB \cong \Delta FDB \Rightarrow |BA| = |BF|$ (odpovídající si strany).

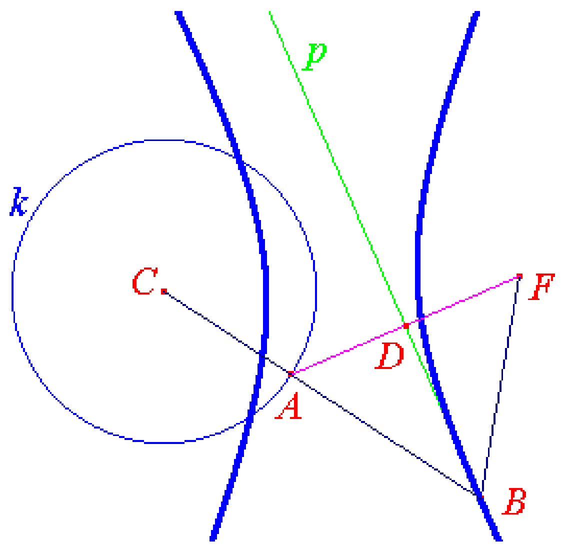
Tudíž $||BC| - |BF|| = ||BC| - |BA|| \Rightarrow ||BC| - |BF|| = |CA|$.

$$|CA| = r \text{ (je konstantní)}$$

$|CA| \cap$ hyperbola$\in B \Rightarrow$ bod B je bod hyperboly $\Rightarrow$ vytvořený přehyb je tečnou hyperboly.

Poznámka

Z vlastností tečen víme, že přímka p žádný jiný bod s hyperbolou nemá.

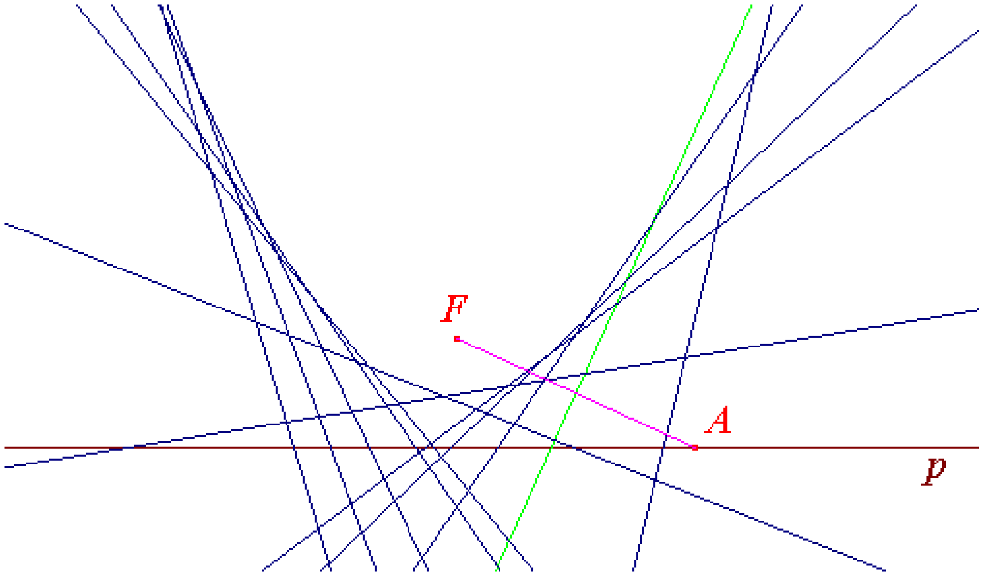


Obr. 4.14

4.2.3 Parabola

Úloha:

Dolní okraj průsvitného papíru znázorňuje přímku *p*. Vyznačte bod *F* a sestrojte takové přehyby *FA*, pro něž je *A* libovolný bod dané přímky *p*. Určete, co je obalovou křivkou všech těchto přímek.



Obr. 4.15

Po utvoření dostatečného počtu přehybů vytvoříme hypotézu, že sestrojené přímky obalují parabolu.

Důkaz hypotézy je uveden v kapitola 2, konstrukce Z3.

4.3 Trisekce úhlu

Tuto konstrukci publikovali Thomas Hull a Humiaki Huzita a oba tvrdí, že pochází od Hishasi Abe. Jako originál byla publikována v japonském díle roku 1980.

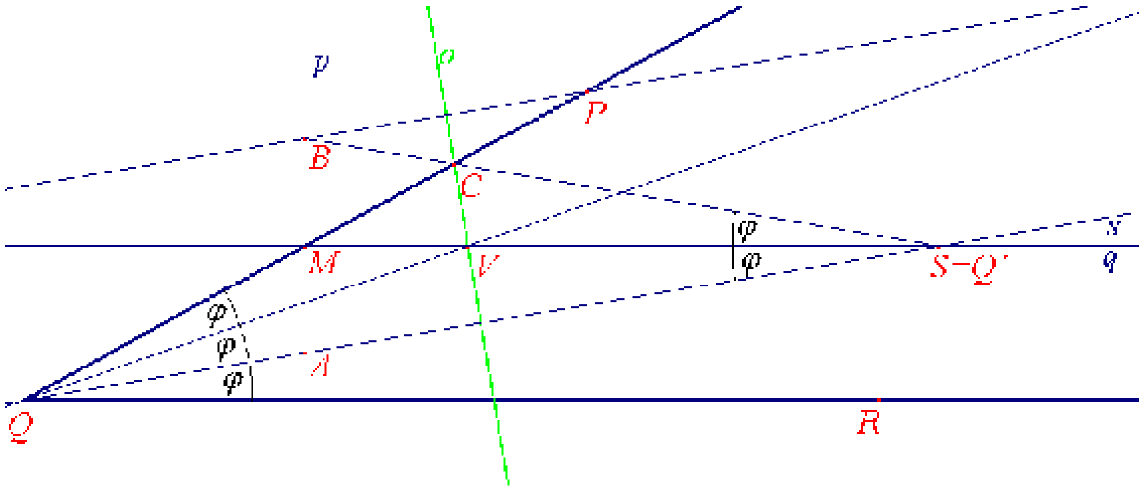
V kapitole 1 bylo řečeno, že provést trisekci úhlu kružítkem a pravítkem nelze. Pokud však použijeme přímé pravítko se stupnicí, trisekci je možné provést. Už Archimédes věděl, že na tuto konstrukci stačí dvě značky (na měření) na přímém pravítku. Je tedy logické, že skládání papíru umožňuje provést trisekci úhlu, protože na okraji papíru snadno vznikne stupnice překládáním - rozdělením strany čtverce na 1/2, 1/4, 1/8, ..

4.3.1 Trisekce úhlu I

Nechť je dán úhel *PQR*.

Postup:

1) M je střed úsečky PQ
2) $p \perp QR, M \in p$
3) $q \perp p, M \in q$
4) o: P na p, Q na q
5) V: $o \cap q$
6) přímka QV
7) s: osa úhlu VQR
8) A: $s \cap p$
9) S: $q \cap s$



Obr. 4.16

<u>Důkaz</u>

Označme $j = |\angle RQS| = |\angle SQV|$

$|\angle QSV| = j$ (střídavé úhly nebo rovnoramenný $\Delta\, QSV$- symetrie podle o)

$BP \perp o \wedge QS \perp o$ (osová souměrnost)

$\Rightarrow BP$ je rovnoběžná s $QS \Rightarrow |\angle BPM| = |\angle AQM|$

navíc $|PM| = |QM|$

$|\angle BMP| = |\angle QMA|$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta PBM \cong \Delta QAM \;\; \Rightarrow |BM| = |AM|$

$$\left.\begin{array}{l} |BM| = |AM| \\ |\angle BMS| = 90° = |\angle AMS| \\ |MS| \text{ společná strana } \Delta BMS \text{ a } \Delta AMS \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Delta BMS \cong \Delta AMS \Rightarrow \\ |\angle BSM| = |\angle ASM| = j \end{array}$$

Ze symetrie podle *o* vidíme, že ΔQSC je rovnoramenný se základnou *QS*

$$\Rightarrow |\angle SQC| = |\angle QSC| = 2j$$

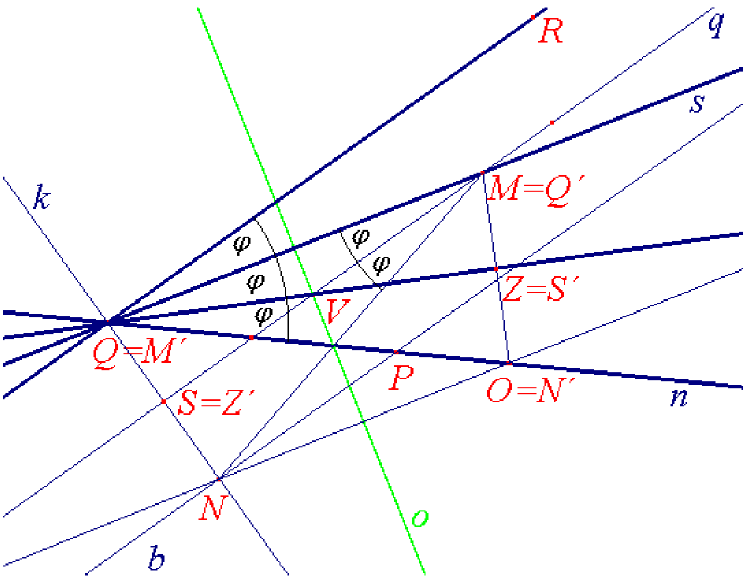
$$\Rightarrow |\angle VQC| = |\angle SQC| - |\angle SQV| = j$$

4.3.2 Trisekce úhlu II

Nechť je dán úhel *PQR*.

Postup:

1) $k \perp QR, Q \in k$
2) $b \perp k, P \in b$
3) *q*: osa rovnoběžek *QR* a *b*
4) *S*: $k \cap q$
5) Nechť $n = QP, N \in k \cap b$
6) *o*: *N* na *n* a *Q* na *q*
7) *V*: $q \cap o$
8) *s*: osa úhlu *RQV*
9) *M*: $q \cap s$



Obr. 4.17

Důkaz

Označme $j = |\angle RQM| = |\angle VQM|$ (s je osa úhlu RQV)

$Q=M'$ a $M=Q' \Rightarrow |\angle QMV| = |\angle Q'M'V|$, $|\angle MQV| = j$

ΔQMN je rovnoramenný $\Rightarrow |\angle SMN| = |\angle SMQ| = j$ (jelikož q je osou QN)

a $\Delta Q'M'N'$ je jeho obraz.

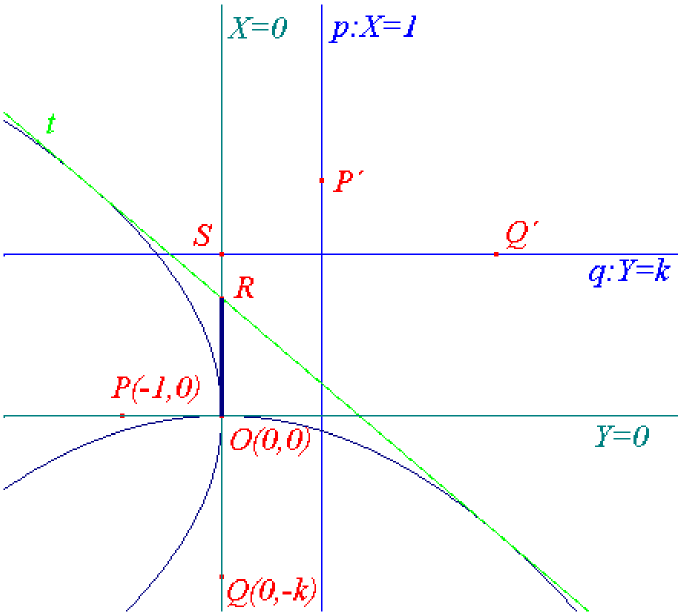
Je to vlastně $\Delta MQO \Rightarrow |\angle ZQO| = |\angle ZQM| = j \Rightarrow 3j = |\angle PQR| = a$

$$j = \frac{a}{3}$$

4.4 Zdvojení krychle

Zdvojením krychle máme na mysli zdvojnásobení objemu dané krychle. V podstatě jde o to, sestrojit úsečku, jejíž délka je rovna třetí odmocnině ze dvou. Toto číslo v euklidovské geometrii nelze zkonstruovat, ale jak už bylo řečeno, skládáním papíru tuto úlohu vyřešit lze.

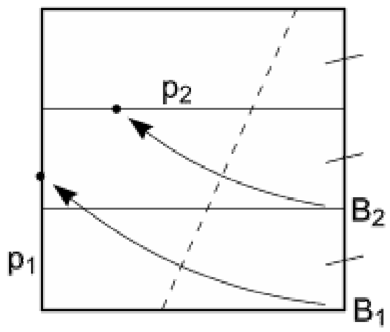
Nechť jsou dány body O, S takové, že $|OS| = k$, pak existuje bod R na OS takový, že $|OR| = \sqrt[3]{k}.$ Pak bez ztráty na obecnosti lze předpokládat, že $O = (0,0)$ a $S = (0, k)$. Jestliže bod $P = (-1,0)$ a bod $Q = (0,-k)$, pak přímka p má rovnici $X = 1$ a přímka q má rovnici $Y = k$ (viz obr. 4.8). Připomeneme si základní konstrukci Z7, při které se současně umístí daný bod P na danou přímku p a daný bod Q na danou přímku q. Vznikne jediná přímka t taková, že bod P' je na přímce p a bod Q' je na přímce q. V průsečíku této přímky t a osy y je hledaný bod R. R je tedy takový bod, že $|OR| = \sqrt[3]{k}$ (obr. 4.18).



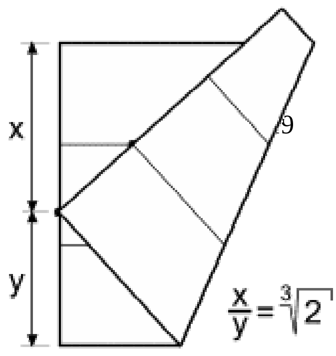
Obr. 4.18

Důkaz založený na společné vlastnosti tečen je uveden v publikaci [1].

Na webových stránkách [6] můžeme nalézt jinou konstrukci zdvojení krychle (důkaz není uveden): z průsvitného papíru vystřihneme čtverec, který následně rozdělíme na třetiny. Nechť jsou dány body B_1, B_2 a hrany p_1, p_2 podle obrázku 4.19. Vytvoříme přehyb podle konstrukce Z7 tak, aby $B_2 \in p_2$ a $B_1 \in p_1$. Délky hrany p_1, které jsou oddělené bodem B_1, označíme x, y. Potom poměr délek $\frac{x}{y}$ je ono hledané číslo $\sqrt[3]{2}$ (obr. 4.20).



Obr. 4.19



Obr. 4.20

5 Závěr

Výuka matematiky by měla být prováděna bez ohledu na praktický život. Matematika by přitom měla být zaměřena spíše na rozvoj obecných schopností - inteligenci a tvořivost. Skládání papíru dokáže tyto požadavky naplnit. Při výuce matematiky může skládání papíru hodiny obohatit a přidat na oblíbenosti. Usnadňuje žákům porozumět důležitým pojmům a jejich vztahům.

Ve své diplomové práci jsem se pokusila uvést přehled geometrických konstrukcí skládáním papíru a metodický návod využití konstrukcí skládání papíru při výuce a v zájmové práci. Zpracovala jsem témata, která se týkají osové souměrnosti, trojúhelníků a pravoúhelníků.

Vzhledem k rozsahu práce jsem jiná témata nerozváděla. Ale jak již víme, základní konstrukce, které lze provádět kružítkem a pravítkem můžeme realizovat skládáním papíru. Uvedla jsem jen několik příkladů z celé řady pěkných úloh, které se skládáním papíru dají vyřešit.

Na závěr bych už jen dodala, že tato práce může sloužit učitelům pro oživení hodin matematiky, studentům na ZŠ a SŠ k mimoškolní činnosti a také k samostudiu. Skládání papíru není jen zábavnější formou výuky, ale rozvíjí i některé dovednosti a volní vlastnosti - zdokonaluje zručnost, přesnost a trpělivost, kterou žáci často v matematice využívají.

6 Seznam použité literatury

[1] Martin, G., E.: *Geometric Constructions*, New York, Berlin, Heidelberg: Springer -Verlag, 1998.

[2] Yates, R., C.: Paper folding In *Multi - Sensori Aids in the Teaching of Mathematics*, Eighteenth Yearbook, pp 154-159, National Couneil of Teachers of Mathematics, 1945.

[3] Trejbal, J., Jirotková, D., Sýkora, V.: *Matematika pro 6. ročník základní školy, 2. díl*, Praha: SPN, 1998.

[4] Doc. RNDr. Odvárko, O., DrSc., Doc. RNDr. Kadleček, J., CSc.: *Matematika pro 6. ročník základní školy, 3. díl*, Praha: Prométheus, 2002.

[5] Hermann, J. a kol.: *Matematika, Prima - Trojúhelníky a čtyřúhelníky*, Praha: Prométheus, 1995.

[6] www.origami.cz