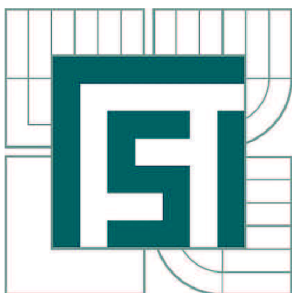


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ENERGETICKÝ ÚSTAV

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
ENERGY INSTITUTE

TRHÁNÍ VODNÍHO SLOUPCE POD OK VODNÍ TURBÍNY PŘI NESTACIONÁRNÍCH STAVECH.

WATER COLUMN SEPARATION UNDER HYDRAULIC TURBINE RUNNER DURING UNSTEADY
OPERATING REGIMES.

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. LUBOMÍR VAŠEK

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. VLADIMÍR HABÁN, Ph.D.

BRNO 2012



DIPLOMOVÁ PRÁCE VUT-EU-ODDI-13303-15-12

ABSTRAKT

V diplomové práci *Trhání vodního sloupce pod OK vodní turbíny při nestacionárních stavech* se řeší tlakové průběhy zpětného hydraulického rázu. V práci jsou odvozeny vztahy pro sestavení matematického modelu zpětného rázu vycházející z rovnic zákonů zachování hmotnosti a silové rovnováhy. Matematický model vytvořený v MS Excel využívá pro výpočet numerické schéma Lax-Wendroff, které nám umožňuje uvažovat proměnnou rychlost zvuku v závislosti na statickém tlaku a dovoluje rozdílný délkový krok ve výpočetní doméně.

Zpětný hydraulický ráz je v práci řešen i s uvažováním rotujícího proudění za uzavíracím členem, kde předpokládáme vznik vírového copu. Tuto situaci lze připodobnit na zavírání vodní turbíny, u které se může vírový cop pod oběžným kolem vyskytovat.

V návaznosti na tuto práci byl proveden experiment zpětného hydraulického rázu. Parametry vstupující do matematického modelu byly optimalizovány dle experimentu a je uvedeno porovnání průběhů tlakových pulzací získaných výpočtem a experimentem.

KLÍČOVÁ SLOVA

zpětný (negativní) hydraulický ráz, Lax-Wendroff, průtokový součinitel, tlak, okrajová podmínka, počáteční podmínka, vírový cop, rychlost zvuku

ABSTRACT

In this diploma thesis called *Water column separation under the hydraulic turbine runner during unsteady operating regimes* are solved the pressure pulsations of the reverse water hammer. In the thesis is deduced a mathematical relationship of elaboration the numerice model which is based on equations of continuity and equations of forces equilibrium. Numerical model is created in MS Excel uses for computation the numerical method Lax-Wendrof that allows consideration of variable sound speed as function of static pressure and allows variable lenght step in computation domain.

Reverse water hammer is in the thesis solved with consideration of rotating flow behind shut-off valve, where we expect forming of vortex rope. This situation can be applied on the closing water turbine which has vertex rope under turbine runner.

Specifically for this thesis was carried out the experiment of the reverse water hammer. Constants going into numerical solution are optimized with using experiment and pressure pulsation are compared between numerical solution and experiment.

KEY WORDS

reverse water hamer, Lax-Wendroff, flow coefficient, pressure, boundary condition, initial condition, vertex rope, sound speed



DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12



DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

VAŠEK, L. *Trhání vodního sloupce pod OK vodní turbíny při nestacionárních stavech.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 60 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D..



DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Energetický ústav

Akademický rok: 2011/2012

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Bc. Lubomír Vašek

který/která studuje v **magisterském navazujícím studijním programu**

obor: **Fluidní inženýrství (2301T036)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Trhání vodního sloupce pod OK vodní turbíny při nestacionárních stavech.

v anglickém jazyce:

Water column separation under hydraulic turbine runner during unsteady operating regimes.

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Při odstavování vodní turbíny je v savce významné rotující proudění s nebezpečím vzniku virového copu. Při tomto odstavování dohladí k významné kavitaci v prostoru savky a po odstavení a dorazu podtlakové vlny od spodní nádrže může dojít v savce k tlakovému impulsu při zpětném tlakovém rázu.

Cíle diplomové práce:

Úkolem diplomanta bude navrhnout matematický model rázu v prostoru s velmi nízkým tlakem, navrhnout experimentální zařízení, provést experiment, výsledky experimentu porovnat s matematickým modelem.

Seznam odborné literatury:

Bude úkolem diplomanta provést literární rešerši problematiky.

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2011/2012.

V Brně, dne 24.11.2011

L.S.

doc. Ing. Zdeněk Skála, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan fakulty



DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D. Vycházel jsem přitom ze svých znalostí, odborných konzultací a literatury, která je uvedena v seznamu.

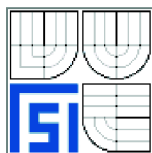
V Brně dne:

.....

Podpis



DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12

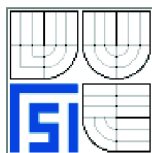


DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji panu doc. Ing. Vladimíru Habánovi, Ph.D. za vždy vstřícný a trpělivý přístup při konzultacích diplomové práce, za odborné rady a doporučení.

Dále děkuji pánům pracovníkům laboratoří fluidního inženýrství za připravenou experimentální trať a panu Ing. Martinu Hudcovi za kalibraci a obsluhu měřicí a vyhodnocovací techniky během experimentu.



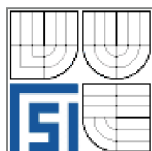
DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12



DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12

Obsah

1	Úvod	9
2	Klasifikace tlakových pulzací v hydraulických systémech s vodní turbínou	11
2.1	Nízkofrekvenční pulzace	11
2.1.1	Nízkofrekvenční pulzace – rotující vírový cop	11
2.1.2	Nízkofrekvenční pulzace – osově symetrický vírový cop	12
2.1.3	Nízkofrekvenční pulzace při přechodových stavech – hydraulický ráz	12
2.2	Vysokofrekvenční pulzace	13
3	Matematický model – Numerické řešení	14
3.1	Numerické schéma Lax-Wendroff	15
3.1.1	Výpočet vnitřních bodů výpočetní sítě	16
3.1.2	Podmínka stability	20
3.2	Výpočet krajních bodů výpočetní sítě	20
3.2.1	Okrajové podmínky	23
3.2.1.1	Průtoková podmínka	23
3.2.1.2	Tlaková podmínka	24
3.2.1.3	Odpor	24
3.2.2	Odpor při řešení krajních bodů	26
4	Rychlost zvuku v kapalině	29
4.1	Rychlost zvuku v čisté vodě	29
4.2	Rychlost zvuku v čisté vodě – vliv potrubí	29
4.3	Rychlost zvuku ve směsi voda-vzduch	30
5	Rychlost zvuku v oblasti vírového copu	33
5.1	Vírový cop v numerickém řešení	37
5.1.1	Zadání vírového copu do numerického modelu	37
6	Experiment	38
6.1	Popis zkušební tratě	38
6.1.1	Technické specifikace měřicí techniky	40
6.2	Experimentální měření trhání vodního sloupce	41
6.2.1	Optimalizace matematického modelu	41
6.2.2	Grafické vyhodnocení výsledků experimentu a matematického modelu	43
7	Matematický model trhání vodního sloupce s vlivem vírového copu	47
7.1	Grafické vyhodnocení výsledků matematického modelu	48
8	Závěr	52
	Použité zdroje	54
	Seznam symbolů	56
	Seznam příloh	58
	Přílohy	60



DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12



1 ÚVOD

K přetržení vodního sloupce dochází v tom místě potrubí, kde tlak dosáhne hodnoty tlaku nasycených par vody. Tento nízký tlak může být vyvolán při negativním (zpětném) vodním rázu.

Představme si tlakové potrubí, ve kterém voda protéká z horní nádrže samospádem do nádrže dolní (gravitační řád). Za horní nádrží, to znamená na začátku potrubí, je umístěn uzavírací člen (ventil). Uzavřeme-li náhle ventil, hmota kapaliny za ním se pohybuje setrvačností dál, a jako prvotní rozruch nastává výrazný pokles tlaku pod hodnotu setrvalého stavu. Tlaková vlna, představující snížení tlaku, se šíří od armatury směrem k dolní nádrži, kde se odrazí. Při tom se snížení tlaku zruší a kapalina se rozběhne proti původnímu směru gravitačního toku, k uzavřenému ventilu. Kapalina bezprostředně před uzávěrem stojí, ale v libovolném místě pohyb stále setrvává. Proto se sloupec vody stlačuje a dochází k vzestupu tlaku. Pohyb ustane teprve tehdy, až se pohybová energie částic vody změní v pružné stlačení sloupce kapaliny. Stlačená kapalina působí pak jako pružina a začíná odpružovat. Odpruží ale víc, než je hodnota setrvalého stavu a opět dochází k poklesu tlaku. Pokles tlaku je vystřídán vzestupem a celý děj se opakuje, než dojde k jeho úplnému zatlumení vlivem viskózních sil kapaliny.

Tyto tlakové kmity se někdy projevují ve zcela neškodném rozsahu, jindy mohou mít za následek poškození nebo úplné vyřazení potrubí, či strojního zařízení z provozu. Vše záleží na provozních, dispozičních i konstrukčních podmínkách. Je proto nutné, aby už v projektových fázích byly uvažovány nestacionární hydraulické pochody a učinila se vhodná opatření zaručující bezpečný provoz vodních děl.

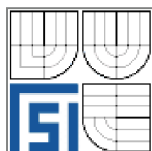
Pokud uvažujeme velice dlouhou sací troubou (odpadním potrubím) u systému s vodní turbínou, mohou být účinky negativního vodního rázu obzvlášť nebezpečné při rychlých odstavování turbíny z provozu. Prvotní pokles tlaku, vyvolaný setrvačností kapaliny v savce, je vystřídán výrazným tlakovým pulzem při zpětném tlakovém rázu. Nelze říci, která z těchto tlakových vln je pro systém nebezpečnější, jelikož jedna s druhou souvisí. Dimenzování potrubí a částí turbosoustrojí na silové účinky zpětného hydraulického rázu je nutno provádět v rámci obou tlakových extrémů.

V diplomové práci bude navržen matematický model zpětného rázu pro horizontální potrubí, ve kterém voda proudí vlivem rozdílných výšek hladin v nádrži akumulární a odpadní. Tento tlakový spád od rozdílu hladin je spotřebován na ztráty třením, ztráty v uzávěrech a k vytvoření rychlostní výšky $\frac{v^2}{2 \cdot g}$.

Součástí diplomové práce je provedené experimentální měření, jehož výsledky poslouží k optimalizaci vstupních parametrů matematického modelu a dále k ověření jeho správnosti, tedy jestli jsme schopni matematickým modelem predikovat tlakové průběhy v potrubí při zpětném rázu.

Dalším problémem v práci uvedeným bude vyšetření účinků záporného rázu při uvažování rotujícího proudění za uzavíracím členem, díky kterému nám vznikne vírový cop. Bude se jednat o připodobnění situace zavírání vodní turbíny, kde se pod oběžným kolem vyskytuje významné rotující proudění se vzniklým vírovým copem. Tato situace je řešena pouze v teoretické rovině, bez experimentu. Výstupem jsou grafická porovnání vlivu poddajného vírového copu na průběh tlaku pro měněné parametry.

Tlakový rozruch se v potrubí šíří určitou rychlostí, která odpovídá rychlosti zvuku v daném prostředí. V matematickém modelu je využito proměnné rychlosti zvuku. Rychlost zvuku v myšleném místě je závislá na hodnotě statického tlaku v daném místě a obsahu nerozpuštěného vzduchu ve směsi voda – vzduch.



DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12

Úvaha vírového copu pod oběžným kolem je omezena na předpoklad, že cop je vyplněn vzduchem. V oblasti s copem nám tak narůstá obsah vzduchu ve směsi voda-vzduch.

Omezení matematického modelu jsou tedy v oblastech s velmi nízkým tlakem, kde kapalina dosahuje tlaku nasycených par – oblasti kavitace. Výpočet tuto skutečnost nerespektuje, není využito žádného kavitačního modelu. Část výpočtu, která následuje po takovém poklesu tlaku, již nemusí plně odpovídat skutečnosti.

2 KLASIFIKACE TLAKOVÝCH PULZACÍ V HYDRAULICKÝCH SYSTÉMECH S VODNÍ TURBÍNOU

Pulzace tlaku vyskytující se v hydraulických systémech vodních strojů můžeme členit dle velikosti jejich frekvence - nízkofrekvenční, vysokofrekvenční. Dále dle charakteru vzniku na vlastní, samobuzené a vynucené. V této kapitole bude okrajově popsáno, co stojí za vznikem konkrétních typů pulzací tlaku.

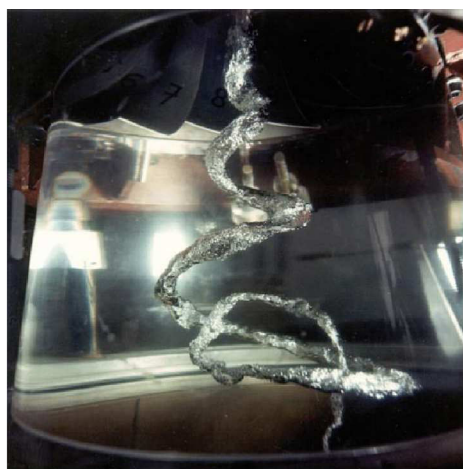
2.1 Nízkofrekvenční pulzace

Do skupiny nízkofrekvenčních pulzací tlaku lze zahrnovat pulzace tlaku s frekvencí srovnatelnou s frekvencí otáčení rotoru. V praxi se jedná o pulzace tlaku s frekvencí přibližně do 10 Hz. Délka tlakové vlny je mnohonásobně větší než průměr přiváděče, takže pro řešení takovýchto tlakových pulzací lze hydraulický systém považovat za jednorozměrný. Z hlediska charakteru lze pulzace tlaku dělit na vynucené a samobuzené.[1]

2.1.1 Nízkofrekvenční pulzace – rotující vírový cop

Jedná se o pulzace tlaku vynucené periodickou změnou průtoku. Typickým příkladem, kdy jev nastává, jsou pulzace vyvolané vírovým provazcem (copem) v savce Francisovy turbíny při provozu mimo optimální turbínový režim, přesněji v pásmu zatížení od 40 do 70% jmenovitého výkonu turbíny.[2]

Při proudění v optimálním provozním pásmu má proudění v savce převážně axiální charakter a nedochází ke vzniku nestabilit. Při neoptimálních provozních režimech turbíny dochází k nedokonalému zpracování tangenciální složky rychlosti oběžným kolem. Proudění v savce má tak výraznou tangenciální složku, která se snaží proud rozrotovat a je náchylné ke vzniku nestability typu vírového copu. Pod oběžným kolem vzniká oblast zpětného proudění, která může zasahovat až daleko do sacího potrubí. Vírový cop rotuje v sací troubě s frekvencí, která přibližně odpovídá od 25 do 40% otáčkové frekvence. Zpětné proudění spolu s rotací copu nám budí periodické změny průtoku.[3]



Obrázek 1. Příklady vírového copu [3], [4]



DIPLOMOVÁ PRÁCE VUT-EU-ODDI-13303-15-12

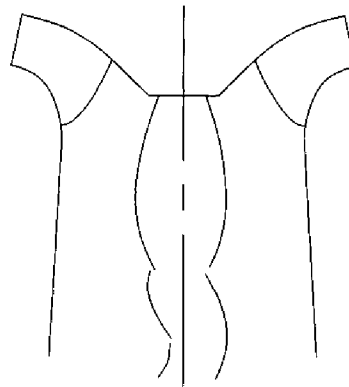
Vírový cop je nesymetrický vír spirálovitého tvaru, který lze zřetelně pozorovat při dostatečném poklesu tlaku v jádru tohoto víru. V případě, že tlak v jádru víru poklesne pod hodnotu tlaku nasycených par, vzniká jev, který se nazývá kavitace (kavitující vírový cop). Při tomto jevu dochází k náhlé přeměně vody na vodní páru, a proto lze vírový cop zřetelně zachytit.[3]

Pulzace tlaku při provozu turbíny v oblasti polovičního výkonu se zpravidla zmírňují zavzdušňováním prostoru savky pod oběžným kolem. Kavitační kaverna pod oběžným kolem však současně působí jako plynový akumulátor a rovněž snižuje vlastní frekvenci celého hydraulického systému. V konkrétním případě tedy může určité množství přisávaného vzduchu dokonce zvýšit amplitudu tlakových pulzací v důsledku rezonance hydraulického systému s vírovým copem. Zavzdušňování prostoru pod oběžným kolem rovněž mírně snižuje frekvenci kroužení vírového copu.[1]

2.1.2 Nízkofrekvenční pulzace – osově symetrický vírový cop

Za určitých podmínek (otevření rozvaděče, nátoková výška) ztratí celý systém dynamickou stabilitu a rozkmitá se. Tvar kmitu odpovídá některému z prvních vlastních tvarů kmitu celého systému.

Do této skupiny patří pulzace tlaku v oblasti plného výkonu, nebo v oblasti přetížení, tzn. nad 100% jmenovitého výkonu turbíny. Vírový provazec je v tomto případě osově symetrický (Obrázek 2) a nerotuje jako v oblasti částečného zatížení (40-70% jmenovitého výkonu). Mechanismus vzniku těchto tlakových pulzací není přesně znám. Předpokládá se, že rozhodující je vazba mezi průtokem a velikostí kavitační kaverny.[1], [2]



Obrázek 2. Osově symetrický vírový cop [1]

2.1.3 Nízkofrekvenční pulzace při přechodových stavech – hydraulický ráz

Typickým příkladem nízkofrekvenčního vlastního kmitání je přechodový děj při vodním rázu. Přechodovým stavem u vodní turbíny rozumíme havarijní odstavení, provozní odstavení, najíždění i regulaci. Při zmíněných přechodových stavech budí turbína pulzace tlaku a průtoku.[1]



DIPLOMOVÁ PRÁCE VUT-EU-ODDI-13303-15-12

2.2 Vysokofrekvenční pulzace

Pro doplnění je uveden i typ vysokofrekvenčních pulzací, ale dále se jimi nebudeme zabývat, protože to nevyplývá z charakteru diplomové práce. Typickým znakem těchto pulzací je buzení harmonickou funkcí a konstantní frekvence odezvy. Jedná se o pulzace tlaku, jejichž základní frekvence je dána otáčkami stroje, nebo jejími násobky. Zdrojem těchto tlakových pulzací je interakce mezi lopatkovými mřížemi oběžného kola a rozvaděče. Jedná se tedy o vynucené pulzace tlaku změnou tlaku i průtoku v kanálech rozvaděče.

V tomto případě je již délka vlny srovnatelná s průměrem přivaděče. Přesto se v prvním přiblížení uvažuje celý hydraulický systém za jednorozměrný.

Rozložení tlakového a rychlostního pole v závislosti na počtu oběžných a rozváděcích lopatek. V savce turbíny jsou vysokofrekvenční pulzace minimální. [1]



3 MATEMATICKÝ MODEL – NUMERICKÉ ŘEŠENÍ

Matematická odvození uvedená v této kapitoly vychází ze závěrečných prací a publikací uvedených v seznamu zdrojů [5], [6], [7], [8].

Matematický popis pro řešení tlakových a průtokových pulzací při řešení zpětného hydraulického rázu v potrubním systému vychází ze základních zákonů a to sice zachování hmoty (1) a zachování energie (2). Příslušné rovnice vyjadřující zákony zachování jsou formulovány ve tvarech popisujících jednodimenzionální proudění 1-D, které lze v potrubních systémech předpokládat.

Daný problém nelze řešit numericky, bez předcházejících úprav. Úpravami je myšlen převod rovnic z diferenciálních tvarů na rovnice diferenční. Pak je možno využít metody sítí, jinak nazývanou jako metoda konečných diferencí.

Obecně nám tedy vzniká na síti 2-D problém řešený v čase t a jeho přírůstků Δt a polohy x s přírůstkem Δx . Souřadnice polohy x a času t nám vytvoří síť bodů, ve které provedeme výpočet užitím vhodného numerického schématu.

Při konstrukci modelu byla uvažována následující zjednodušení:

- Kapalina je Newtonská
- Proudění jednorozměrné 1-D
- Neuvažujeme fázové přeměny transportované kapaliny

Zákon zachování hmoty – rovnice kontinuity:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + K_s \cdot \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Zákon zachování energie – silová rovnováha

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda}{2 \cdot D} \cdot |c| \cdot c = 0 \quad (2)$$

Maticový zápis uvedených rovnic (1) a (2):

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} c \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ K_s & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} c \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2 \cdot D} \cdot |c| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ p \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

Zavedeme dílčí matice s označením \mathbf{w} , \mathbf{K} , \mathbf{B} :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} c \\ p \end{pmatrix}, \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ K_s & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2 \cdot D} \cdot |c| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

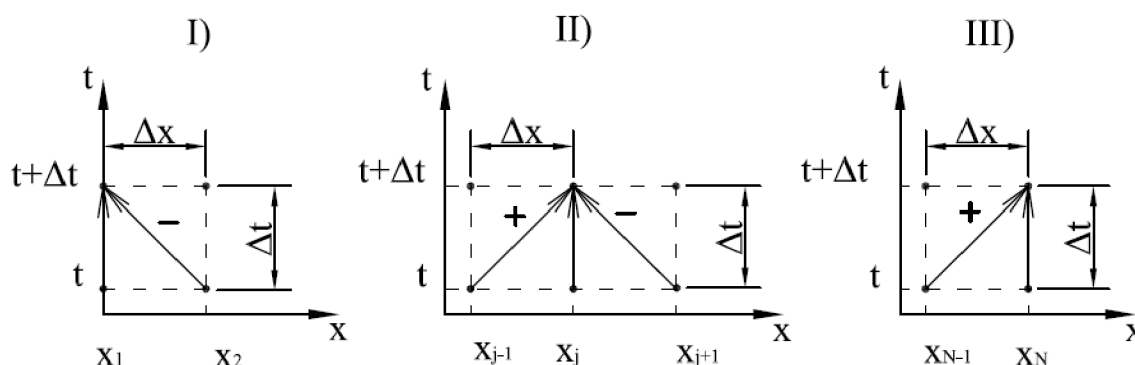
Formální maticový zápis soustavy rovnic kontinuity a silové rovnováhy:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w} + \mathbf{K} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{w} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (4)$$

Jedná se o soustavu parciálních diferenciálních rovnic, na kterou lze aplikovat některou z možných numerických metod řešení (metody řešení a porovnání jejich výsledků jsou uvedeny v [5], [6]). V této diplomové práci bude uplatněno pouze numerické řešení dle schématu Lax-Wendroff.

3.1 Numerické schéma Lax-Wendroff

Metoda Lax-Wendroff využívá rozvoje funkce do zkrácené Taylorovy řady druhého stupně v čase. Časovou derivace poté nahradíme derivacemi prostorovou, kterou převedeme do diferenčních vztahů pomocí věty o centrálních diferencích. Nové hodnoty tlaku a průtok jsou počítány z hodnot nejbližších okolních bodů předchozího časového kroku, a z počátečních a okrajových podmínek.



Obrázek 3. Grafické zobrazení metody Lax-Wendroff

- I) Řešení počátečního uzlového bodu
- II) Řešení vnitřních uzlových bodů
- III) Řešení koncového uzlových bodů

Rozvoj do Taylorovy řady druhého stupně:

$$f_{x_j}^{t+\Delta t} = f_{x_j}^t + \Delta t \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{x_j}^t + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_{x_j}^t \quad (5)$$

Jelikož nás zajímají tlakové a průtokové pulzace, musíme z maticového zápisu soustavy rovnic vyjádřit $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w}$, která tyto veličiny obsahuje. V matici \mathbf{w} se však nevyskytuje přímo průtok Q , ale rychlost c . Vyjádřit rychlost průtokem a naopak není problém, tato úprava bude provedena až v pozdějším kroku odvození.



3.1.1 Výpočet vnitřních bodů výpočetní sítě

Vyjádřením derivací $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ z výrazu (4) dostáváme:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = -\mathbf{K} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{w} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = -\mathbf{K} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x \cdot \partial t} - \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \quad (7)$$

Výraz (7) upravíme na:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = -\mathbf{K} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \quad (8)$$

Do výrazu (8) dosadíme (6):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = -\mathbf{K} \cdot \frac{\partial \left(-\mathbf{K} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{w} \right)}{\partial x} - \mathbf{B} \cdot \left(-\mathbf{K} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{w} \right) \quad (9)$$

Po úpravě dostáváme konečný tvar $\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}$:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x^2} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{w} \quad (10)$$

Po dosazení (6) a (10) do základního schématu (5) dostaneme výraz:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{x_j}^{t+\Delta t} = & \mathbf{w}_{x_j}^t - \Delta t \cdot \left(\mathbf{K} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \Big|_{x_j}^t + \mathbf{B} \cdot \mathbf{w}_{x_j}^t \right) \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\mathbf{K} \cdot \mathbf{K} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x^2} \Big|_{x_j}^t + \mathbf{K} \cdot \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \Big|_{x_j}^t + \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \Big|_{x_j}^t + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{w}_{x_j}^t \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Všechny $\frac{\partial}{\partial x}$; $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ve výrazu (11) nahradíme centrálními diferencemi (12), (13):

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \Big|_{x_j}^t = \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot \left(\mathbf{w}_{x_{j+1}}^t - \mathbf{w}_{x_{j-1}}^t \right) \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x^2} \Big|_{x_j}^t = \frac{1}{\Delta x^2} \cdot \left(\mathbf{w}_{x_{j+1}}^t - 2 \cdot \mathbf{w}_{x_j}^t + \mathbf{w}_{x_{j-1}}^t \right) \quad (13)$$



Dosažením diferencí a po následných estetických úpravách dostáváme výraz (15):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}_{x_j}^{t+\Delta t} = & \mathbf{w}_{x_j}^t - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta X} \cdot \mathbf{K} \cdot (\mathbf{w}_{x_{j+1}}^t - \mathbf{w}_{x_{j-1}}^t) - \Delta t \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{w}_{x_j}^t + \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta X^2} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} \cdot (\mathbf{w}_{x_{j+1}}^t - \\
 & - 2\mathbf{w}_{x_j}^t + \mathbf{w}_{x_{j-1}}^t) + \frac{\Delta t^2}{4 \cdot \Delta X} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{w}_{x_{j+1}}^t - \mathbf{w}_{x_{j-1}}^t) + \frac{\Delta t^2}{4 \cdot \Delta X} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} \cdot (\mathbf{w}_{x_{j+1}}^t - \mathbf{w}_{x_{j-1}}^t) + \\
 & + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{w}_{x_j}^t
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}_{x_j}^{t+\Delta t} = & \mathbf{w}_{x_j}^t - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta X} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{w}_{x_{j+1}}^t + \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta X} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{w}_{x_{j-1}}^t - \Delta t \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{w}_{x_j}^t + \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta X^2} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{w}_{x_{j+1}}^t - \\
 & - \frac{\Delta t^2}{\Delta X^2} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{w}_{x_j}^t + \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta X^2} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{w}_{x_{j-1}}^t + \frac{\Delta t^2}{4 \cdot \Delta X} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{w}_{x_{j+1}}^t - \\
 & - \frac{\Delta t^2}{4 \cdot \Delta X} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{w}_{x_{j-1}}^t + \frac{\Delta t^2}{4 \cdot \Delta X} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{w}_{x_{j+1}}^t - \frac{\Delta t^2}{4 \cdot \Delta X} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{w}_{x_{j-1}}^t + \\
 & + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{w}_{x_j}^t
 \end{aligned} \tag{15}$$

Výraz (15) se zjednoduší vyjádřením součinů matic:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ K_s & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ K_s & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K_s}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{K_s}{\rho} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ K_s & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2 \cdot D} |c| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{K_s \cdot \lambda}{2 \cdot D} |c| & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2 \cdot D} |c| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ K_s & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot D} |c| \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2 \cdot D} |c| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2 \cdot D} |c| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\lambda}{2 \cdot D} |c|\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12

Rozepsáním maticového tvaru do složek již dostáváme konkrétní vztahy pro výpočet tlaku a rychlosti (průtoku) v uzlovém bodě:

Pro tlak:

$$\begin{aligned} p_{x_j}^{t+\Delta t} = & p_{x_j}^t - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot K_s \cdot c_{x_{j+1}}^t + \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot K_s \cdot c_{x_{j-1}}^t + \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta x^2} \cdot \frac{K_s}{\rho} \cdot p_{x_{j+1}}^t - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \cdot \frac{K_s}{\rho} \cdot p_{x_j}^t + \\ & + \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta x^2} \cdot \frac{K_s}{\rho} \cdot p_{j-1}^t + \frac{\Delta t^2}{4 \cdot \Delta x} \cdot \frac{K_s \cdot \lambda}{2 \cdot D} \left| c_{x_{j+1}}^t \right| \cdot c_{x_{j+1}}^t - \\ & - \frac{\Delta t^2}{4 \cdot \Delta x} \cdot \frac{K_s \cdot \lambda}{2 \cdot D} \left| c_{j-1}^t \right| \cdot c_{x_{j-1}}^t \end{aligned} \quad (16)$$

Pro rychlost:

$$\begin{aligned} c_{x_j}^{t+\Delta t} = & c_{x_j}^t - \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot p_{x_{j+1}}^t + \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot p_{x_{j-1}}^t - \Delta t \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot D} \cdot \left| c_{x_j}^t \right| \cdot c_{x_j}^t + \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta x^2} \cdot \frac{K_s}{\rho} \cdot c_{x_{j+1}}^t - \\ & - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \cdot \frac{K_s}{\rho} \cdot c_{x_j}^t + \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta x^2} \cdot \frac{K_s}{\rho} \cdot c_{x_{j-1}}^t + \frac{\Delta t^2}{4 \cdot \Delta x} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot p_{j+1}^t \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot D} \cdot \left| c_{x_{j+1}}^t \right| - \\ & - \frac{\Delta t^2}{4 \cdot \Delta x} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot p_{j-1}^t \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot D} \cdot \left| c_{x_{j-1}}^t \right| + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \frac{\lambda^2}{4 \cdot D^2} \cdot (c_{x_j}^t)^3 \end{aligned} \quad (17)$$

Následně budou vztahy (16) a (17) upraveny, abychom dostali vztahy v závislosti na průtoku:

Zavedením a dosazením za rychlost c :

$$c = \frac{Q}{S} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2}$$

Pro tlak:

$$\begin{aligned} p_{x_j}^{t+\Delta t} = & p_{x_j}^t - \frac{2 \cdot \Delta t}{\Delta x \cdot \pi \cdot D^2} \cdot K_s \cdot Q_{x_{j+1}}^t + \frac{2 \cdot \Delta t}{\Delta x \cdot \pi \cdot D^2} \cdot K_s \cdot Q_{x_{j-1}}^t + \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta x^2 \cdot \rho} \cdot K_s \cdot p_{x_{j+1}}^t - \\ & - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 \cdot \rho} \cdot K_s \cdot p_{x_j}^t + \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta x^2 \cdot \rho} \cdot K_s \cdot p_{x_{j-1}}^t + \frac{2 \cdot \Delta t^2 \cdot \lambda}{\Delta x \cdot \pi \cdot D^5} \cdot K_s \cdot \left| Q_{x_{j+1}}^t \right| \cdot Q_{x_{j+1}}^t - \\ & - \frac{2 \cdot \Delta t^2 \cdot \lambda}{\Delta x \cdot \pi \cdot D^5} \cdot K_s \cdot \left| Q_{x_{j-1}}^t \right| \cdot Q_{x_{j-1}}^t \end{aligned} \quad (18)$$



DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12

Pro průtok:

$$\begin{aligned}
 Q_{x_j}^{t+\Delta t} = & Q_{x_j}^t - \frac{\Delta t \cdot \pi \cdot D^2}{8 \cdot \Delta x \cdot \rho} \cdot p_{x_{j+1}}^t + \frac{\Delta t \cdot \pi \cdot D^2}{8 \cdot \Delta x \cdot \rho} \cdot p_{x_{j-1}}^t - \frac{2 \cdot \Delta t \cdot \lambda}{\pi \cdot D^3} \cdot |Q_{x_j}^t| \cdot Q_{x_j}^t + \\
 & + \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta x^2 \cdot \rho} \cdot K_s \cdot Q_{x_{j+1}}^t - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 \cdot \rho} \cdot K_s \cdot Q_{x_j}^t + \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta x^2 \cdot \rho} \cdot K_s \cdot Q_{x_{j-1}}^t + \\
 & + \frac{\Delta t^2 \cdot \lambda}{8 \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot D} \cdot p_{x_{j+1}}^t \cdot |Q_{x_{j+1}}^t| - \frac{\Delta t^2 \cdot \lambda}{8 \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot D} \cdot p_{x_{j-1}}^t \cdot |Q_{x_{j-1}}^t| + \\
 & + \frac{2 \cdot \Delta t^2 \cdot \lambda^2}{\pi \cdot D^6} \cdot (Q_{x_j}^t)^3
 \end{aligned} \tag{19}$$

Pro zjednodušení zápisu jsou zavedeny konstanty:

Pro průtok Q:

$$a_Q = \frac{\Delta t \cdot \pi \cdot D^2}{8 \cdot \Delta x \cdot \rho}$$

$$b_Q = \frac{2 \cdot \Delta t \cdot \lambda}{\pi \cdot D^3}$$

$$c_Q = \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta x^2 \cdot \rho}$$

$$d_Q = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 \cdot \rho}$$

$$e_Q = \frac{\Delta t^2 \cdot \lambda}{8 \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot D}$$

$$f_Q = \frac{2 \cdot \Delta t^2 \cdot \lambda^2}{\pi \cdot D^6}$$

Pro tlak p:

$$g_p = \frac{2 \cdot \Delta t}{\Delta x \cdot \pi \cdot D^2}$$

$$h_p = \frac{\Delta t^2}{2 \cdot \Delta x^2 \cdot \rho}$$

$$i_p = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 \cdot \rho}$$

$$j_p = \frac{2 \cdot \Delta t^2 \cdot \lambda}{\Delta x \cdot \pi \cdot D^5}$$

Po dosazení konstant dostáváme finální vztahy pro výpočet vnitřních uzlových bodů výpočetní sítě:

Pro tlak:

$$\begin{aligned}
 p_{x_j}^{t+\Delta t} = & p_{x_j}^t - g_p \cdot K_s \cdot Q_{x_{j+1}}^t + g_p \cdot K_s \cdot Q_{x_{j-1}}^t + h_p \cdot K_s \cdot p_{x_{j+1}}^t - i_p \cdot K_s \cdot p_{x_j}^t + \\
 & + h_p \cdot K_s \cdot p_{x_{j-1}}^t + j_p \cdot K_s \cdot |Q_{x_{j+1}}^t| \cdot Q_{x_{j+1}}^t - j_p \cdot K_s \cdot |Q_{x_{j-1}}^t| \cdot Q_{x_{j-1}}^t
 \end{aligned} \tag{20}$$



Pro průtok:

$$Q_{x_j}^{t+\Delta t} = Q_{x_j}^t - a_Q \cdot p_{x_{j+1}}^t + a_Q \cdot p_{x_{j-1}}^t - b_Q \cdot |Q_{x_j}^t| \cdot Q_{x_j}^t + c_Q \cdot K_s \cdot Q_{x_{j+1}}^t - d_Q \cdot K_s \cdot Q_{x_j}^t + c_Q \cdot K_s \cdot Q_{x_{j-1}}^t + e_Q \cdot p_{x_{j+1}}^t \cdot |Q_{x_{j+1}}^t| - e_Q \cdot p_{x_{j-1}}^t \cdot |Q_{x_{j-1}}^t| + f_Q \cdot (Q_{x_j}^t)^3 \quad (21)$$

Numerické řešení ve vnitřních bodech je tímto vyřešené. V obou výrazech (20) a (21) se vyskytuje symbol K_s vyjadřující modul objemové pružnosti směsi voda-vzduch. Nyní pouze předešlu, že se nejedná o hodnotu konstantní. Je v každém uzlovém bodě jiná, jedná se o funkci tlaku. V jistém smyslu ji lze chápat jako vyjádření proměnné rychlosti zvuku. V kapitole 4.3 to bude popsáno blíže.

3.1.2 Podmínka stability

Stabilita metody Lax-Wendroff je zajištěna, pokud je splněna podmínka stability [7]:

$$\Delta t \leq \left| \frac{\Delta x}{v_{0P}} \right| \quad (22)$$

Výraz (22) tedy znamená, že časový krok výpočtu Δt musí být menší nebo roven, než podíl zvoleného délkového kroku Δx a rychlosti zvuku vody v potrubí v_{0P} . V následující kapitole 4.2 bude blíže specifikována rychlost zvuku v potrubí.

Krok výpočtu Δx nemusí být u metody Lax-Wendroff striktně stejný po celé délce výpočetní sítě. V tom případě je ale časový krok výpočtu odvislý od nejmenšího délkového kroku Δx .

3.2 Výpočet krajních bodů výpočetní sítě

Co se počátečního a koncového bodu týče, je nutné je řešit tak, aby byly splněny okrajové podmínky. Doposud jsme měli k dispozici dvě rovnice (1), (2) o dvou neznámých. Nyní přibude ještě rovnice okrajové podmínky. Tak nám vzniká přeuročená soustava rovnic (tří rovnic o dvou neznámých). Metodika řešení v krajním a koncovém bodu je proto jiná. Vyjdeme ze známé (navolené) okrajové podmínky, ke které přidáme rovnici kontinuity, nebo silové rovnováhy. Jelikož řešíme problém numericky, opět musíme vyjádřit zvolenou rovnici v diferenciálním tvaru.

Rovnice kontinuity v diferenciálním tvaru:

$$\frac{p_{x_j}^{t+\Delta t} - p_{x_j}^t}{\Delta t} + \frac{K_s}{S} \cdot \frac{Q_{x_{j+1}}^{t+\Delta t} - Q_{x_j}^{t+\Delta t}}{\Delta x} = 0 \quad (23)$$

a) pro počáteční bod:

$$\frac{p_{x_1}^{t+\Delta t} - p_{x_1}^t}{\Delta t} + \frac{K_s}{S} \cdot \frac{Q_{x_2}^{t+\Delta t} - Q_{x_1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} = 0$$



b) pro koncový bod:

$$\frac{p_{x_N}^{t+\Delta t} - p_{x_N}^t}{\Delta t} + \frac{K_s}{S} \cdot \frac{Q_{x_N}^{t+\Delta t} - Q_{x_{N-1}}^{t+\Delta t}}{\Delta x} = 0$$

Rovnice silové rovnováhy v diferenciálním tvaru:

$$\frac{Q_{x_j}^{t+\Delta t} - Q_{x_j}^t}{\Delta t} + \frac{S}{\rho} \cdot \frac{p_{x_{j+1}}^{t+\Delta t} - p_{x_j}^{t+\Delta t}}{\Delta x} + \frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S} |Q_{x_j}^t| \cdot Q_{x_j}^t = 0 \quad (24)$$

a) pro počáteční bod:

$$\frac{Q_{x_1}^{t+\Delta t} - Q_{x_1}^t}{\Delta t} + \frac{S}{\rho} \cdot \frac{p_{x_2}^{t+\Delta t} - p_{x_1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} + \frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S} |Q_{x_1}^t| \cdot Q_{x_1}^t = 0$$

b) pro koncový bod:

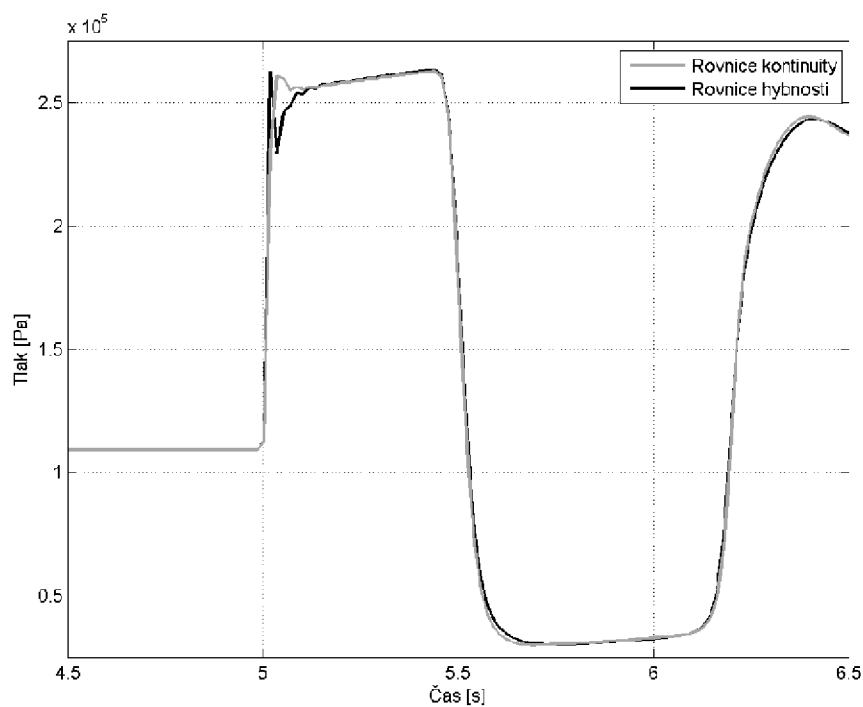
$$\frac{Q_{x_N}^{t+\Delta t} - Q_{x_N}^t}{\Delta t} + \frac{S}{\rho} \cdot \frac{p_{x_N}^{t+\Delta t} - p_{x_{N-1}}^{t+\Delta t}}{\Delta x} + \frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S} |Q_{x_N}^t| \cdot Q_{x_N}^t = 0$$

Otázka, kterou rovnici si vybrat pro řešení okrajových bodů, zda rovnici kontinuity, nebo silové rovnováhy, je zodpovězena v práci (Himr, 2011) [7], kde je proveden ukázkový příklad:

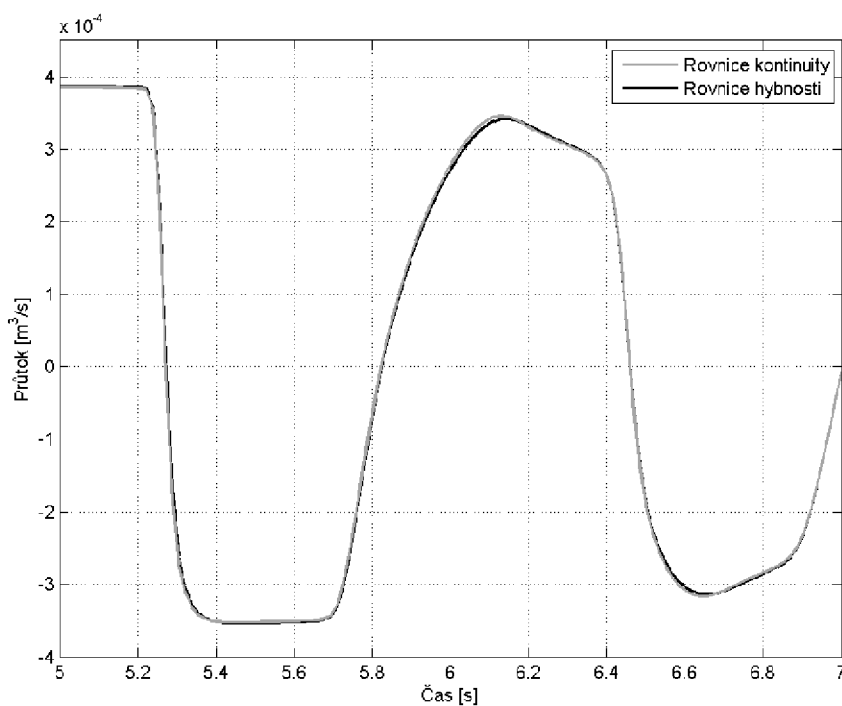
Jednoduché potrubí o délce 58 m, průměru 28 mm má vstupní konec ve výšce 2,25 m. Tlak je v tomto místě konstantní a má hodnotu 100 kPa. Výstupní konec potrubí je ve výšce 0 m a za uzávěrem je opět tlak 100 kPa. Při rychlém zavření uzávěru dojde k vodnímu rázu. Jeho průběh na spodním konci potrubí je znázorněn na *Obrázku 4*. Na počátku trubky, lze sledovat průtokové pulsace, které jsou zobrazeny na *Obrázku 5*.

Z grafů je patrné, že oba přístupy dávají srovnatelné výsledky, takže pravděpodobně nezáleží na tom, která rovnice bude využita pro výpočet okrajových bodů potrubí.

V numerickém modelu diplomové práce bude pro výpočet krajních bodů sítě použita pouze rovnice kontinuity s příslušnou okrajovou podmínkou.



Obrázek 4. Porovnání výpočtu pomocí rovnice kontinuity a hybnosti na výstupu z potrubí (Himr, 2011), [7]



Obrázek 5. Porovnání výpočtu pomocí rovnice kontinuity a hybnosti na vstupu z potrubí (Himr, 2011), [7]



Rovnice kontinuity:

a) pro počáteční krajní bod sítě kde počítáme:

- tlak:

$$p_{x_1}^{t+\Delta t} = p_{x_1}^t - \frac{\Delta t \cdot K_{s_{x_1}}^t}{S \cdot \Delta x} \cdot (Q_{x_2}^{t+\Delta t} - Q_{x_1}^{t+\Delta t}) \quad (25)$$

- průtok

$$Q_{x_1}^{t+\Delta t} = Q_{x_2}^t + \frac{S \cdot \Delta x}{\Delta t \cdot K_{s_{x_1}}^t} \cdot (p_{x_1}^{t+\Delta t} - p_{x_1}^t) \quad (26)$$

b) pro koncový krajní bod sítě kde počítáme:

- tlak:

$$p_{x_N}^{t+\Delta t} = p_{x_N}^t - \frac{\Delta t \cdot K_{s_{x_N}}^t}{S \cdot \Delta x} \cdot (Q_{x_N}^{t+\Delta t} - Q_{x_{N-1}}^{t+\Delta t}) \quad (27)$$

- průtok:

$$Q_{x_N}^{t+\Delta t} = Q_{x_{N-1}}^{t+\Delta t} - \frac{S \cdot \Delta x}{\Delta t \cdot K_{s_{x_N}}^t} \cdot (p_{x_N}^{t+\Delta t} - p_{x_N}^t) \quad (28)$$

3.2.1 Okrajové podmínky

Okrajové podmínky vstupující do výpočtu vyplývají z prvků, které jsou v řešeném systému obsaženy. Mohou být různého charakteru a to například přímo předepsané hodnoty tlaku, průtoku, nebo se může jednat o vzorce popisující vyrovnávací nádrž, čerpadlo, turbínu a jiné další složitější podmínky.

Okrajovou podmínkou rozumíme funkci $h=f(Q)$, která charakterizuje ukončující orgán nebo určité místo v potrubí v případě stacionárního odtoku, tedy nezávisle na rázu. (Haindl, 1963), [9]

Nezbytné pro funkci výpočtu je, aby okrajové podmínky byly definovány v každém okamžiku výpočtu.

3.2.1.1 Průtoková podmínka

Předepsání průtoku, jako okrajové podmínky bylo využito při prvotních numerických návrzích problému trhání vodního sloupce. Průtoková podmínka spočívá v zadání průtoku v každém čase výpočtu a dosazením do některých z rovnic (23), (24) v patřičných tvarech pro koncový, nebo počáteční bod. Dopočítává se tedy tlak.

Náhlá změna průtoku pro vyvolání tlakového rázu na začátku potrubí bude v experimentu realizována kulovým ventilem, jeho rychlým uzavřením. Bylo uvažováno, že při zavírání ventilu klesá průtok z Q_{max} na Q_{min} v závislosti na čase lineárně (Q ubývá rovnoměrně s časem).

Změna průtoku je odvislá od otevření (zavření) ventilu z , kde otevření můžeme považovat za veličinu měnící se s časem lineárně. Kdyby tedy průtok závisel lineárně na otevření ventilu,



byla by tato podmínka správně. U průtoku tomu tak ale není. Popis lineárního zavírání ventilu s využitím průtokové okrajové podmínky proto není vhodný.

Byť je průtoková podmínka nejjednodušší, není moc přirozená a v některých případech může způsobovat nestandardní chování výpočtu, nebo kolaps. (Himr, 2011), [7]

3.2.1.2 Tlaková podmínka

Předepsání tlaku na krajních bodech výpočetní sítě je obdobným případem průtokové okrajové podmínky. Známé hodnoty tlaku v každém čase výpočtu se dosadí do některé z rovnic (23), (24) v patřičných tvarech pro koncový nebo počáteční bod a počítává se průtok.

Volba tlakové podmínky sebou nenese žádná rizika a může se používat bez omezení. S její pomocí lze nahradit rozlehlou nádrž nebo výtok do volného prostoru. (Himr, 2011), [7]

3.2.1.3 Odpor

Odpor je první složitější podmínka. Jeho úvahou můžeme nahradit téměř cokoliv – kolena, ventily, náhlé i pozvolné změny průtoku a jiné další místní ztráty. Vyjdeme ze základní definice pro výpočet tlakové ztráty pomocí odporu R nebo jeho obdoby, ztrátového součinitele ζ .

$$\Delta p = \rho \cdot R \cdot Q \cdot |Q| \quad (29)$$

$$\Delta p = \rho \cdot \zeta \cdot \frac{8}{\pi^2 \cdot D^4} \cdot Q \cdot |Q| \quad (30)$$

Problémem vyjádření (30) je hodnota R , nebo ζ pro zavřený ventil. ζ pro zavřený ventil se limitně blíží k nekonečnu. Z tohoto důvodu byl zaveden průtokový součinitel K_v . Průtokový součinitel lze chápat jako hodnotu inverzní k ζ .

Průtokový součinitel K_v je definován jako průtok kapaliny o hustotě $\rho_{ref} = 1000 \text{ kg/m}^3$ při tlakovém spádu $\Delta p_{ref} = 10^5 \text{ Pa}$. Je to hodnota charakteristická pro příslušné DN a typ ventilu udávaná výrobcem.

$$\frac{\Delta p_{ref}}{\rho_{ref}} = R \cdot K_v^2 \quad (31)$$

Zjednodušeně, po úpravě lze psát:

$$R = \frac{100}{K_v^2} \quad (32)$$

Po dosazení za R z rovnice (31) do (29) a následném vyjádření K_v dostáváme vztah:

$$K_v = Q \cdot \sqrt{\frac{\Delta p_{ref}}{\rho_{ref}} \cdot \frac{\rho}{\Delta p}} \quad (33)$$



DIPLOMOVÁ PRÁCE VUT-EU-ODDI-13303-15-12

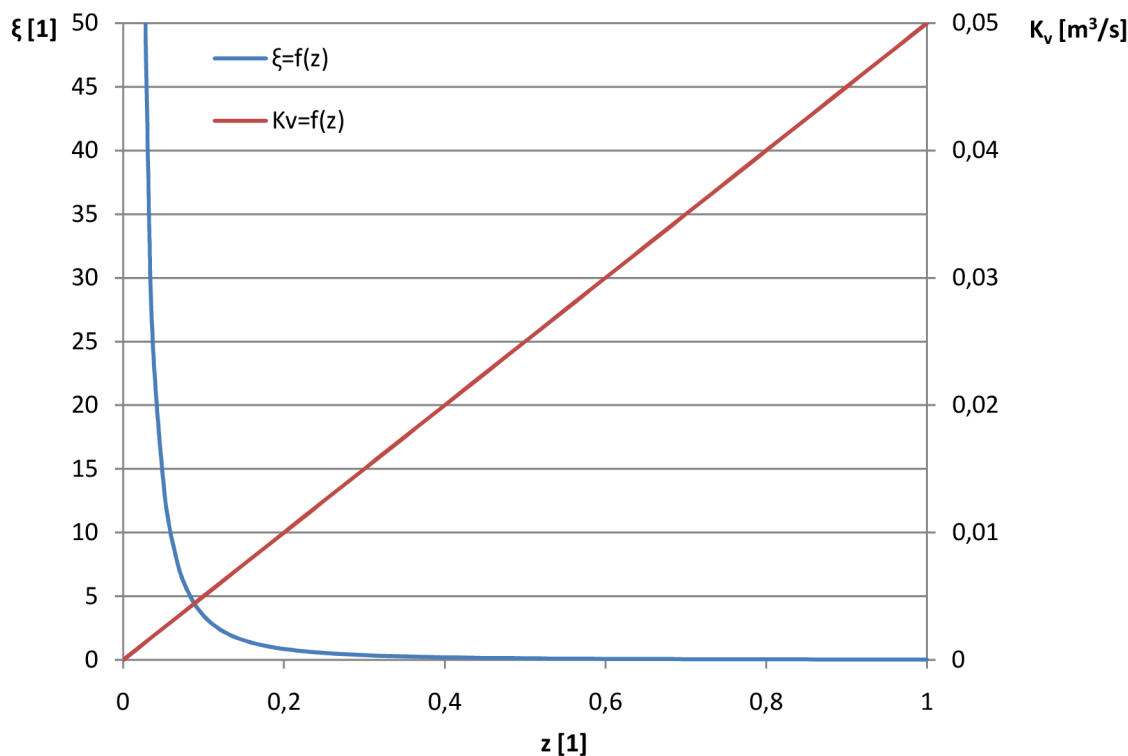
Jednotky ve, kterých nám průtokový součinitel K_v vychází, jsou stejné jako jednotky průtoku m^3/s , l/s . V odborných literaturách a dokumentacích je však průtokový součinitel uváděn v m^3/hod .

Za známých hodnot Δp_{ref} , ρ_{ref} lze vztah (33) zjednodušit na:

$$K_v = 10 \cdot Q \cdot \sqrt{\frac{\rho}{\Delta p}} \quad (34)$$

Obrázek 6 popisuje možnou závislost K_v a ξ na otevření ventilu z . Veličina z nabývá hodnot od 0 do 1, přičemž 0 odpovídá plně zavřenému ventilu a hodnota 1 odpovídá stavu, kdy je ventil plně otevřený.

Při ξ jdoucím k nekonečnu, tedy uzavřeném ventilu je průtokový součinitel K_v roven 0. Naopak pokud je ztrátový součinitel ξ roven 0, tedy ztráty nulové, pak se K_v blíží k nekonečnu.



Obrázek 6. Závislost K_v a ξ na otevření z

Řekli jsme, že průtokový součinitel plně otevřeného ventilu se blíží nekonečnu, označme si ho proto jako $K_{v_{max}}$. Pak průtokový součinitel z části uzavřeného ventilu bude dán výrazem:

$$K_v = K_{v_{max}} \cdot z \quad (35)$$

Kde z je zavření (otevření ventilu) u kterého budeme předpokládat, že se s časem mění lineárně.



Pro úplnost je uveden vztah (36), který vystihuje „inverzní chování“ K_v a ξ :

$$\xi = \frac{\pi^2 \cdot D^4}{8 \cdot K_v^2} \cdot \frac{\Delta p_{\text{ref}}}{\rho_{\text{ref}}} \quad (36)$$

Otázka průměru D , který je uvažován v rovnici (36) je vysvětlena v [7].

V diplomové práci je uvažováno, že uzavírací členy mají shodné vstupní i výstupní průměry, které jsou totožné s průměrem potrubí.

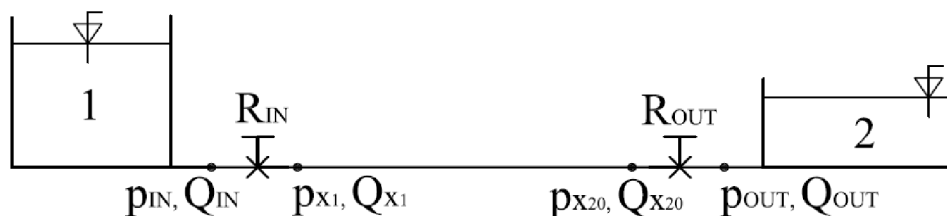
3.2.2 Odpor při řešení krajních bodů

Obecný návod, jak řešit síť pomocí odporů je k nalezení v [7].

Nyní bude uvedeno řešení odporů v systému matematického modelu. *Obrázek 7* je znázorněním odporů v potrubí pro výpočtový model. Uvažujeme akumulční nádrž označenou 1, ze které voda protéká potrubím do odpadní nádrže 2. Potrubí mezi uzavíracími armaturami je rozděleno na $N = 20$ uzlových bodů. Uzavírací armatura na začátku potrubí je označena jako odpor R_{IN} . Tlak a průtok před prvním ventilem jsou označeny p_{IN} , Q_{IN} . Tlak a průtok bezprostředně za ventilem, v prvním výpočtovém bodě, p_{x_1} , Q_{x_1} .

Na konci potrubí je umístěn další ventil označen jako odpor R_{OUT} . Tlak a průtok před ventilem, v posledním výpočtovém bodě sítě jsou označeny $p_{x_{20}}$, $Q_{x_{20}}$ a za ventilem a p_{OUT} , Q_{OUT} .

Uzavírací armatury R_{IN} , R_{OUT} jsou definovány maximálním průtokovým součinitelem K_{VIN} a K_{VOUT} .



Obrázek 7. Schéma tratě pro matematický model

Začátek potrubí:

Tlak p_{IN} odpovídá tlaku u v akumulční nádrži v místě výtoku. Předpokládáme, že ventil je umístěn těsně za ní. Tlaku před ventilem bude konstantní po celou dobu výpočtu.

Vstupní průtok je stejný jako průtok za ventilem, pak platí:

$$Q_{IN}^{t+\Delta t} = Q_{x_1}^{t+\Delta t} \quad (37)$$

Po dosazení do (29) získáme vztah:

$$p_{IN}^{t+\Delta t} - p_{x_1}^{t+\Delta t} = \rho \cdot R_{IN} \cdot Q_{x_1}^{t+\Delta t} \cdot |Q_{x_1}^{t+\Delta t}| \quad (38)$$



DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12

Dosadíme do (38) za tlak rovnici kontinuity (25):

$$p_{IN}^{t+\Delta t} - p_{x_1}^t + \frac{\Delta t \cdot K_{s_{x_1}}^t}{S \cdot \Delta x} \cdot (Q_{x_2}^{t+\Delta t} - Q_{x_1}^{t+\Delta t}) = \rho \cdot R_{IN} \cdot Q_{x_1}^{t+\Delta t} \cdot |Q_{x_1}^{t+\Delta t}| \quad (39)$$

Dále rovnici (39) upravíme a dosadíme za R_{IN} z rovnice (32):

$$\rho \cdot R_{IN} \cdot Q_{x_1}^{t+\Delta t} \cdot |Q_{x_1}^{t+\Delta t}| + \frac{\Delta t \cdot K_{s_{x_1}}^t}{S \cdot \Delta x} \cdot Q_{x_1}^{t+\Delta t} - \frac{\Delta t \cdot K_{s_{x_1}}^t}{S \cdot \Delta x} \cdot Q_{x_2}^{t+\Delta t} - p_{IN}^{t+\Delta t} + p_{x_1}^t = 0 \quad (40)$$

$$Q_{x_1}^{t+\Delta t} \cdot |Q_{x_1}^{t+\Delta t}| + \frac{1}{\rho \cdot R_{IN}} \cdot \frac{\Delta t \cdot K_{s_{x_1}}^t}{S \cdot \Delta x} \cdot Q_{x_1}^{t+\Delta t} - \frac{1}{\rho \cdot R_{IN}} \cdot \left(\frac{\Delta t \cdot K_{s_{x_1}}^t}{S \cdot \Delta x} \cdot Q_{x_2}^{t+\Delta t} + p_{IN}^{t+\Delta t} - p_{x_1}^t \right) = 0$$

$$Q_{x_1}^{t+\Delta t} \cdot |Q_{x_1}^{t+\Delta t}| + \frac{Kv_{IN}^2}{100 \cdot \rho} \cdot \frac{\Delta t \cdot K_{s_{x_1}}^t}{S \cdot \Delta x} \cdot Q_{x_1}^{t+\Delta t} - \frac{Kv_{IN}^2}{100 \cdot \rho} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\Delta t \cdot K_{s_{x_1}}^t}{S \cdot \Delta x} \cdot Q_{x_2}^{t+\Delta t} + p_{IN}^{t+\Delta t} - p_{x_1}^t \right) = 0 \quad (41)$$

Nyní je možno napsat vztah (41) ve zjednodušeném tvaru (42):

$$a \cdot [Q_{x_1}^{t+\Delta t}]^2 + b \cdot Q_{x_1}^{t+\Delta t} + c = 0 \quad (42)$$

$$a = 1 \quad (43)$$

$$b = \frac{Kv_{IN}^2}{100 \cdot \rho} \cdot \frac{\Delta t \cdot K_{s_{x_1}}^t}{S \cdot \Delta x} \quad (44)$$

$$c = -\frac{Kv_{IN}^2}{100 \cdot \rho} \cdot \left(\frac{\Delta t \cdot K_{s_{x_1}}^t}{S \cdot \Delta x} \cdot Q_{x_2}^{t+\Delta t} + p_{IN}^{t+\Delta t} - p_{x_1}^t \right) \quad (45)$$

Tak vznikla kvadratická rovnice, která má jednoznačné řešení ($b > 0$) a díky které je možno vypočítat jedinou neznámou, průtok ventilem $Q_{x_1}^{t+\Delta t}$. Výraz průtoku násobený absolutní hodnotou průtoku byl zjednodušen jako čtverec průtoku. Tuto úpravu si můžeme dovolit, bez vlivu na správnost výsledku.

Konec potrubí:

Tlak p_{OUT} odpovídá tlaku u odpadní nádrže v místě vtoku. Předpokládáme, že ventil je umístěn těsně před ní. Tlak za ventilem bude konstantní po celou dobu výpočtu.



DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12

Průtok před ventilem je stejný jako za ním:

$$Q_{x_{20}}^{t+\Delta t} = Q_{OUT}^{t+\Delta t} \quad (46)$$

Po dosazení do (29) získáme vztah:

$$p_{x_{20}}^{t+\Delta t} - p_{OUT}^{t+\Delta t} = \rho \cdot R_{OUT} \cdot Q_{x_{20}}^{t+\Delta t} \cdot |Q_{x_{20}}^{t+\Delta t}| \quad (47)$$

Dosadíme do (47) za tlak rovnici kontinuity (27):

$$p_{x_{20}}^t - \frac{\Delta t \cdot K_{s_{x_{20}}}^t}{S \cdot \Delta x} \cdot (Q_{x_{20}}^{t+\Delta t} - Q_{x_{19}}^{t+\Delta t}) - p_{OUT}^{t+\Delta t} = \rho \cdot R_{OUT} \cdot Q_{x_{20}}^{t+\Delta t} \cdot |Q_{x_{20}}^{t+\Delta t}| \quad (48)$$

Dále rovnici (48) upravíme, dosadíme za R_{OUT} z rovnice (32):

$$\begin{aligned} \rho \cdot R_{OUT} \cdot Q_{x_{20}}^{t+\Delta t} \cdot |Q_{x_{20}}^{t+\Delta t}| + \frac{\Delta t \cdot K_{s_{x_{20}}}^t}{S \cdot \Delta x} \cdot Q_{x_{20}}^{t+\Delta t} - \frac{\Delta t \cdot K_{s_{x_{20}}}^t}{S \cdot \Delta x} \cdot Q_{x_{19}}^{t+\Delta t} + p_{OUT}^{t+\Delta t} - p_{x_{20}}^t &= 0 \\ Q_{x_{20}}^{t+\Delta t} \cdot |Q_{x_{20}}^{t+\Delta t}| + \frac{1}{\rho \cdot R_{OUT}} \cdot \frac{\Delta t \cdot K_{s_{x_{20}}}^t}{S \cdot \Delta x} \cdot Q_{x_{20}}^{t+\Delta t} - \frac{1}{\rho \cdot R_{OUT}} \cdot \left(\frac{\Delta t \cdot K_{s_{x_{20}}}^t}{S \cdot \Delta x} \cdot Q_{x_{19}}^{t+\Delta t} - p_{OUT}^{t+\Delta t} + p_{x_{20}}^t \right) &= 0 \\ Q_{x_{20}}^{t+\Delta t} \cdot |Q_{x_{20}}^{t+\Delta t}| + \frac{Kv_{OUT}^2}{100 \cdot \rho} \cdot \frac{\Delta t \cdot K_{s_{x_{20}}}^t}{S \cdot \Delta x} \cdot Q_{x_{20}}^{t+\Delta t} - \frac{Kv_{OUT}^2}{100 \cdot \rho} \cdot \\ \cdot \left(\frac{\Delta t \cdot K_{s_{x_{20}}}^t}{S \cdot \Delta x} \cdot Q_{x_{19}}^{t+\Delta t} - p_{OUT}^{t+\Delta t} + p_{x_{20}}^t \right) &= 0 \end{aligned} \quad (49)$$

Nyní je možno napsat vztah (49) ve zjednodušeném tvaru (50):

$$a \cdot (Q_{x_{20}}^{t+\Delta t})^2 + b \cdot Q_{x_{20}}^{t+\Delta t} + c = 0 \quad (50)$$

$$a = 1 \quad (51)$$

$$b = \frac{Kv_{OUT}^2}{100 \cdot \rho} \cdot \frac{\Delta t \cdot K_{s_{x_{20}}}^t}{S \cdot \Delta x} \quad (52)$$

$$c = -\frac{Kv_{OUT}^2}{100 \cdot \rho} \cdot \left(\frac{\Delta t \cdot K_{s_{x_{20}}}^t}{S \cdot \Delta x} \cdot Q_{x_{19}}^{t+\Delta t} - p_{OUT}^{t+\Delta t} + p_{x_{20}}^t \right) \quad (53)$$

Tak vznikla opět kvadratická rovnice s jednoznačným řešením, kterým je průtok na konci potrubí před ventilem $Q_{x_{20}}^{t+\Delta t}$.

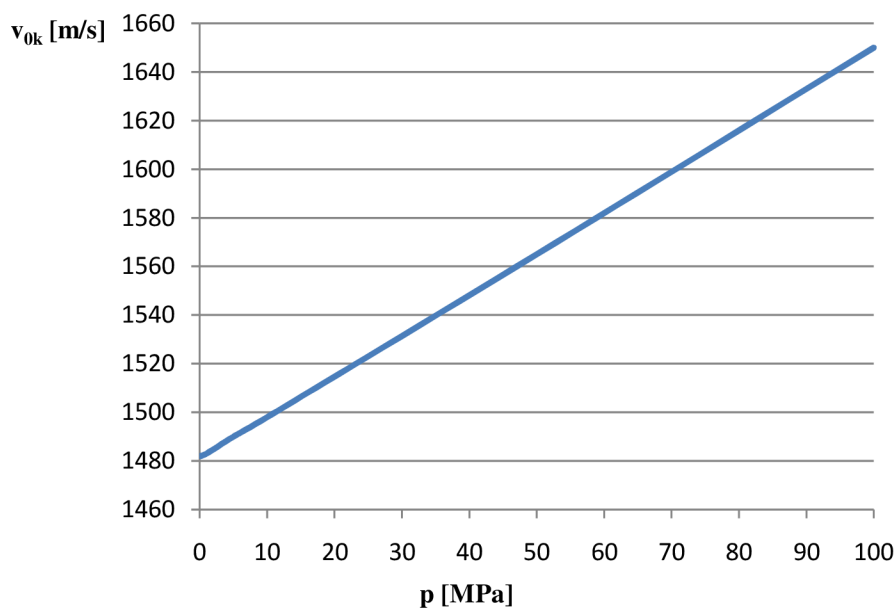
4 RYCHLOST ZVUKU V KAPALINĚ

Rychlost zvuku v kapalině vyjadřuje rychlost šíření tlakového rozruchu, rázové vlny v kapalině. Je tedy zřejmé, že věrohodnost výsledků numerické simulace bude především záviset na dobře určené rychlosti zvuku.

4.1 Rychlost zvuku v čisté vodě

Rychlost zvuku ideální kapaliny je nekonečně vysoká (uvažujeme, že kapalina je nestlačitelná). Reálná kapalina je stlačitelná, tedy musí mít i konečnou rychlost zvuku. Rychlost zvuku čisté vody, tedy bez přítomnosti nerozpuštěného vzduchu ve formě bublinek, v nekonečně velké nádobě je funkcí statického tlaku a teploty. Její změna je popsána přímkovou závislostí na Obrázku 8. Při teplotě vody $t=20^{\circ}\text{C}$ se mění od 1480 m/s do 1650 m/s v tlakovém rozmezí $0,1\text{MPa}$ až 100MPa .

Rychlost zvuku v čisté vodě můžeme považovat za konstantní (Obrázek 9, čárkovaná čára), vzhledem k využívanému rozmezí tlaku.



Obrázek 8. Rychlost zvuku v čisté vodě, $t=20^{\circ}\text{C}$ [10]

4.2 Rychlost zvuku v čisté vodě – vliv potrubí

Rychlost zvuku pro vodu v potrubí bude ve všech technických aplikacích nižší, než je rychlost zvuku v samotné vodě. Klesá vlivem interakce vody s pružnými stěnami potrubí.

Rychlost zvuku vody v potrubí lze vypočítat dle vztahu (54):

$$v_{0P} = \alpha \cdot \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \alpha \cdot v_{0K} \quad (54)$$



Ve vzorci (54) nám součinitel α zahrnuje vliv pružnosti potrubí. Nabývá hodnot menších než 1. Tento součinitel lze vypočítat v závislosti na tloušťce stěny potrubí Δ , vnějším a vnitřním průměru potrubí D_v , D , modulu pružnosti vody K a modulu pružnosti v tahu potrubí E .

Pro tlustostěnná potrubí platí [11]:

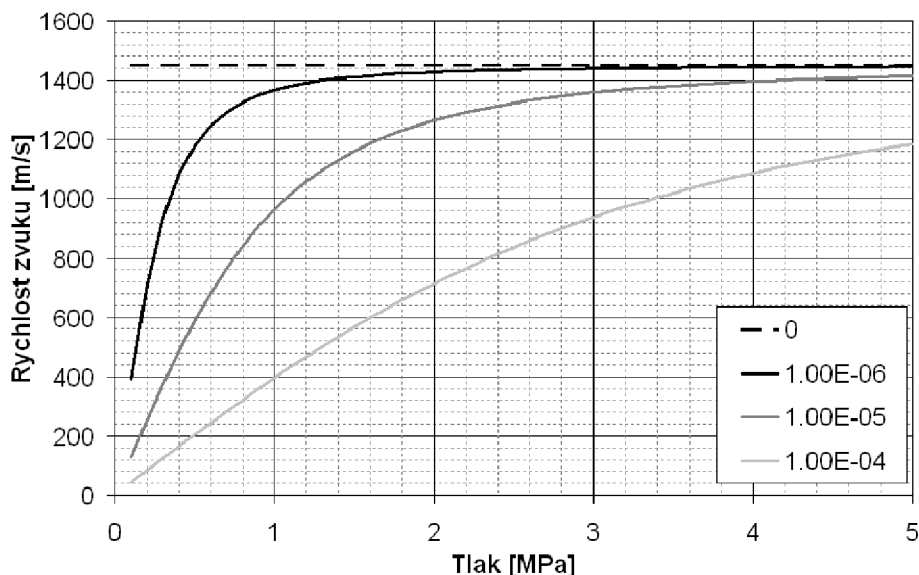
$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \cdot \frac{K}{E} \cdot \frac{D_v^2 + D^2}{D_v^2 - D^2}}} \quad (55)$$

Pro tenkostěnná potrubí platí [11]:

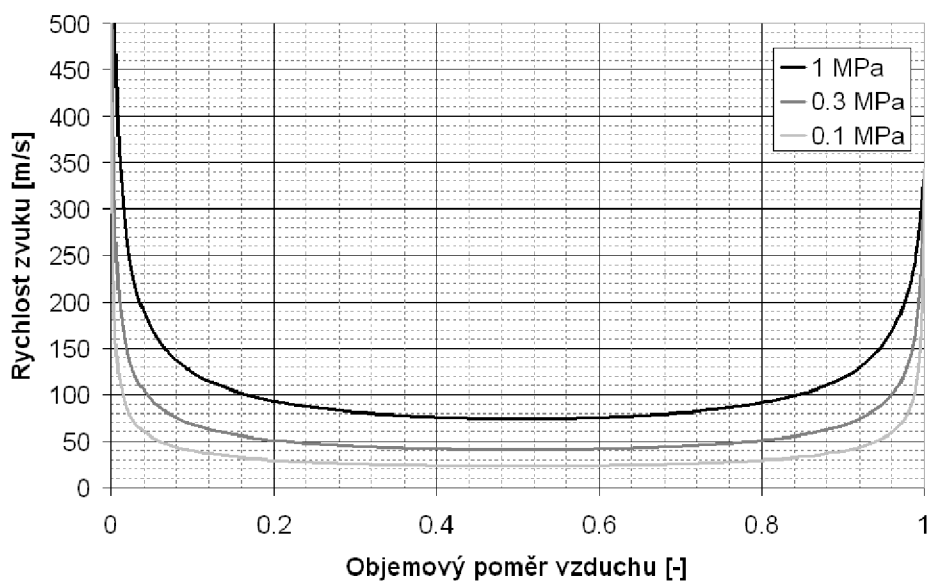
$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{K \cdot D}{E \cdot \Delta}}} \quad (56)$$

4.3 Rychlost zvuku ve směsi voda-vzduch

Když se nám v kapalině objevuje určité množství nerozpuštěného vzduchu, pak se jedná o směs voda-vzduch. Množství vzduchu může být 0-100%. I malé množství vzduchu výrazně ovlivňuje rychlost zvuku. Tento fakt vystihují Obrázky 9, 10.



Obrázek 9. Rychlost zvuku v závislosti na tlaku při hmotnostním poměrném množství vzduchu daném legendou [7]



Obrázek 10. Rychlost zvuku v závislosti na množství vzduchu při tlacích daných legendou [7]

Výsledná rychlost ve vodo-vzdušné směsi v uvažovaném potrubí je dána vztahem (57):

$$v_0 = \sqrt{\frac{K_s}{\rho}} \quad (57)$$

K_s vyjadřuje modul pružnosti směsi voda - vzduch.

Výsledný vztah pro modul pružnosti směsi dle odvození (Himr, 2011), [7]:

$$K_s = \frac{[(1 - M_{vz}) \cdot p + M_{vz} \cdot r \cdot T \cdot \rho] \cdot v_{0P}^2 \cdot \kappa \cdot p \cdot \rho}{v_{0P} \cdot \rho^2 \cdot M_{vz} \cdot r \cdot T + \kappa \cdot p^2 \cdot (1 - M_{vz})} \quad (58)$$

Na závěr podkapitoly 4.3 *Rychlost zvuku ve směsi voda-vzduch* je nutné si uvědomit:

Rovnice pro výpočet rychlosti zvuku ve směsi jsou závislé na hmotnostním obsahu vzduchu M_{vz} . V problematice kapalin má již velmi malý objem plynu značný význam a je třeba jej stanovit. Měření je možné (v omezené míře) v laboratorních podmínkách a je prakticky nemyslitelné pokud se jedná o dílo. Dále je nutné mít na paměti, že záleží na vzduchu v plynné formě (bublínky), nikoliv rozpuštěném. Nicméně, rozpuštěný plyn se při poklesu tlaku z kapaliny vylučuje a náhle vzrůstá hmotnostní poměr. V opačném případě, při zvýšení tlaku, dochází k rozpouštění a hmotnostní poměr vzduch – voda klesá (Himr, 2011), [7].



DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12

Pokud se na proudění vody v potrubí pohlédne jako na proudění směsi voda a vzduch (dvou látek s různou koncentrací vzduchu), tak neustále probíhá koloběh:

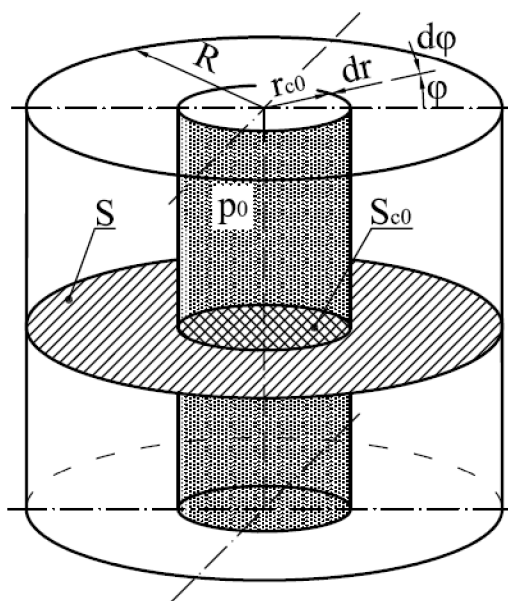
1. Na počátku proudí voda s určitou koncentrací rozpuštěného vzduchu k a hmotnostním poměrem nerozpuštěného vzduchu M_{vz} .
2. Pokud bude tlak narůstat tak se vzduch bude postupně rozpouštět, tzn. M_{vz} klesá a k narůstá s určitou rychlostí.
3. V případě poklesu tlaku se rozpuštěný vzduch vyloučí, takže M_{vz} naroste a k poklesne. Na rozdíl od předchozího bodu se jedná o rychlý děj.

Z uvedeného vyplývá, že odvozená závislost rychlosti zvuku se může značně měnit a tudíž je obtížné ji přesně specifikovat (*Himr, 2011*), [7].

5 RYCHLOST ZVUKU V OBLASTI VÍROVÉHO COPU

V důsledku snížení tlaku vlivem rotace kapaliny vzniká vírová struktura – vírový cop. Vírový cop u vodních turbín je doprovázen kavitací. Ke kavitujícímu vírovému copu v savkách vodních turbín dochází při provozu turbíny mimo optimální provozní pásmo. Popřípadě při přechodových stavech.

Omezíme se na předpoklad, že cop je vyplněn vzduchem o nízkém tlaku. V této kapitole bude uvedeno odvození rychlosti zvuku v trubici (savce vodní turbíny), ve které je plyn (vzduch) soustředěn v okolí osy vlivem rotace (Obrázek 11). Odvození bylo provedeno na základě poznatků z [12], [13].



Obrázek 11. Savka s vírovým copem

Uvažujeme-li izotermickou expansi, lze psát stavovou rovnici pro oblast vzduchu:

$$p \cdot S_c = p_0 \cdot S_{c0} \tag{59}$$

Z rovnice (59) vyjádříme tlak uvnitř copu p :

$$p = p_0 \cdot \frac{S_{c0}}{S_c} = p_0 \cdot \left(\frac{r_{c0}}{r_c}\right)^2 \tag{60}$$

Za předpokladu malé změny poloměru copu, získáme výraz pro změnu tlaku Δp uvnitř copu:

$$\Delta p = p_0 \cdot \left(\frac{r_{c0}}{r_{c0} + \Delta r}\right)^2 \tag{61}$$



Výraz (61) linearizujeme:

$$\Delta p \cong -2 \cdot p_0 \cdot \frac{\Delta r}{r_{c0}} \quad (62)$$

Nyní stanovíme změnu tlaku na hranici vírového copu. Předpokládáme malé změny poloměru. Zjednodušujícím předpokladem je, že obvodová rychlost na povrchu copu, respektive na rozhraní copu a okolní kapaliny je konstantní.

Změnu tlaku na poloměru r_{c0} při změně poloměru r_c vlivem rotace vyjádříme jako:

$$\Delta p = \rho \cdot \int_{r_c}^{r_{c0}} \frac{v^2}{r} dr = \rho \cdot v^2 \int_{r_{c0} + \Delta r}^{r_{c0}} \frac{1}{r} dr \quad (63)$$

Po integraci výrazu (63):

$$\Delta p = \rho \cdot v^2 \cdot (\ln r_{c0} - \ln(r_{c0} + \Delta r)) = \rho \cdot v^2 \cdot \ln \left(\frac{r_{c0}}{r_{c0} + \Delta r} \right) \quad (64)$$

Po linearizaci dostaneme vztah pro změnu tlaku vlivem rotace copu:

$$\Delta p \cong -\rho \cdot v^2 \cdot \frac{\Delta r}{r_{c0}} \quad (65)$$

Nyní sečteme změnu tlaku vlivem rotace (65) se změnou tlaku uvnitř copu (61):

$$\Delta p = -\rho \cdot v^2 \cdot \frac{\Delta r}{r_{c0}} - 2 \cdot p_0 \cdot \frac{\Delta r}{r_{c0}} \quad (66)$$

Abychom zjistili, jak se tlaková diference Δp mění v čase, provedeme úpravu:

$$\Delta p = -\rho \cdot v^2 \cdot \frac{\Delta r}{r_{c0}} - 2 \cdot p_0 \cdot \frac{\Delta r}{r_{c0}} \quad / \frac{d}{dt} \quad (67)$$

Po derivaci podle času a úpravě obdržíme:

$$\frac{dp}{dt} = - \left(\frac{\rho \cdot v^2 + 2 \cdot p_0}{r_{c0}} \right) \cdot \frac{dr}{dt} \quad (68)$$



DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12

Nyní objasnění, co nám vyjadřuje výraz $\frac{dr}{dt}$. Jde o vyjádření rychlosti c_r ve směru vnitřní normály k hranici oblasti copu, která je závislá na rychlosti změny tlaku.

$$c_r = \frac{dr}{dt} \quad (69)$$

S využitím výrazu (69) vyjádříme rychlost c_r z (68):

$$c_r = - \left(\frac{r_{c0}}{\rho \cdot v^2 + 2 \cdot p_0} \right) \cdot \frac{dp}{dt} \quad (70)$$

Pro stanovení rychlosti zvuku musíme vyjádřit integrál:

$$\frac{\int_P c_r \cdot n \cdot dS}{dx} = \int_0^x \int_0^{2\pi} c_r \cdot r_{c0} \cdot d\varphi \cdot dx \Big/ dx = \int_0^{2\pi} c_r \cdot r_{c0} \cdot d\varphi \quad (71)$$

Do vyjádřeného integrálu (71) dosadíme za c_r z rovnice (70):

$$\int_0^{2\pi} c_r \cdot r_{c0} \cdot d\varphi = \frac{r_{c0}}{\rho \cdot v^2 + 2 \cdot p_0} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_{c0} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{c0}^2}{\rho \cdot v^2 + 2 \cdot p_0} \cdot \frac{dp}{dt} \quad (72)$$

Vyjádřeného integrálu využijeme a dosadíme do rovnice kontinuity a upravíme:

$$\frac{1}{v_{0P}^2} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot S + \rho \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\int_P c_r \cdot n \cdot dS}{dx} = 0 \quad (73)$$

$$\frac{1}{v_{0P}^2} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot S + \rho \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + \rho \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{c0}^2}{\rho \cdot v^2 + 2 \cdot p_0} \cdot \frac{dp}{dt} = 0 \quad (74)$$

$$\left(\frac{1}{v_{0P}^2} \cdot S + \rho \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{c0}^2}{\rho \cdot v^2 + 2 \cdot p_0} \right) \cdot \frac{dp}{dt} + \rho \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (75)$$

$$S \cdot \left(\frac{1}{v_{0P}^2} + \frac{1}{S} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{c0}^2}{v^2 + \frac{2 \cdot p_0}{\rho}} \right) \cdot \frac{dp}{dt} + \rho \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (76)$$

$$S \cdot \left(\frac{1}{v_{0P}^2} + \frac{S_{c0}}{S} \cdot \frac{2}{v^2 + \frac{2 \cdot p_0}{\rho}} \right) \cdot \frac{dp}{dt} + \rho \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (77)$$



DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12

V rovnici (77) již vystupuje rychlost zvuku v trubici pro oblast vírovým copem (výraz v závorce), pro kterou platí:

$$\frac{1}{v_{0c}^2} = \frac{1}{v_{0P}^2} + \frac{S_{c0}}{S} \cdot \frac{2}{v^2 + \frac{2 \cdot p_0}{\rho}} \quad (78)$$

Upravením výrazu (78) dostáváme konečný vztah pro rychlost zvuku v části trubice s vírovým copem:

$$\frac{1}{v_{0c}^2} = \frac{1}{v_{0P}^2} + \frac{2}{\frac{S}{S_{c0}} \cdot \left(v^2 + \frac{2 \cdot p_0}{\rho}\right)} \quad (79)$$

$$\frac{1}{v_{0c}^2} = \frac{2 \cdot v_{0P}^2 + \frac{S}{S_{c0}} \cdot \left(v^2 + \frac{2 \cdot p_0}{\rho}\right)}{v_{0P}^2 \cdot \frac{S}{S_{c0}} \cdot \left(v^2 + \frac{2 \cdot p_0}{\rho}\right)} \quad (80)$$

$$v_{0c} = \sqrt{\frac{v_{0P}^2 \cdot \frac{S}{S_{c0}} \cdot \left(v^2 + \frac{2 \cdot p_0}{\rho}\right)}{2 \cdot v_{0P}^2 + \frac{S}{S_{c0}} \cdot \left(v^2 + \frac{2 \cdot p_0}{\rho}\right)}} \quad (81)$$

Výraz (81) upravíme, abychom dostali modul objemové pružnosti směsi voda-vzduch, který bude využíván ve výpočtu matematického modelu rázu v oblasti s vírovým copem:

$$v_{0c} = \sqrt{\frac{K_{sc}}{\rho}} = \sqrt{\frac{v_{0P}^2 \cdot \frac{S}{S_{c0}} \cdot \left(v^2 + \frac{2 \cdot p_0}{\rho}\right)}{2 \cdot v_{0P}^2 + \frac{S}{S_{c0}} \cdot \left(v^2 + \frac{2 \cdot p_0}{\rho}\right)}} \quad (82)$$

$$K_{sc} = \frac{v_{0P}^2 \cdot \frac{S}{S_{c0}} \cdot \left(v^2 + \frac{2 \cdot p_0}{\rho}\right)}{2 \cdot v_{0P}^2 + \frac{S}{S_{c0}} \cdot \left(v^2 + \frac{2 \cdot p_0}{\rho}\right)} \cdot \rho \quad (83)$$



5.1 Vírový cop v numerickém řešení

Pro výpočet hydraulického rázu v oblasti s vírovým copem byla zavedena zjednodušení. Prvním zjednodušením je úvaha obvodové složky rychlosti na povrchu copu za konstantní, $v = konst.$ A dále je uvažován konstantní také tlak uvnitř copu, $p_0 = konst.$ Pokud tato zjednodušení využijeme a dosadíme do výrazu (83) zjistíme, že jedinou neznámou pro výpočet modulu pružnosti v oblasti s vírového copu je S_{c0} . Tedy aktuální příčný průřez copu.

Jak určit aktuální příčný průřez copu v matematickém modelu, respektive jeho poloměr, a dopočítat modul pružnosti v oblasti s copem uvádí následující odvození.

Z rovnice (66) si nejprve vyjádříme Δr :

$$\Delta r = \frac{\Delta p}{(-\rho \cdot v^2 - 2 \cdot p_0)} \cdot r_{c0} \quad (84)$$

(84) doplníme časovými indexi a rozepsáním difference tlaku dostáváme:

$$\Delta r^{t+\Delta t} = \frac{p_{x_1}^{t+\Delta t} - p_{x_1}^t}{(-\rho \cdot v^2 - 2 \cdot p_0)} \cdot r_{c0}^t \quad (85)$$

Pro poloměr copu v novém čase $t+\Delta t$ platí:

$$r_{c0}^{t+\Delta t} = r_{c0}^t + \Delta r^{t+\Delta t} \quad (86)$$

Plochu aktuálního příčného průřezu copu vyjádříme:

$$S_{c0}^{t+\Delta t} = \pi \cdot (r_{c0}^{t+\Delta t})^2 \quad (87)$$

Tak byla vyřešena jediná neznámá ze vzorce (83) a pro výpočet aktuálního modulu pružnosti K_{sc} v oblasti s vírovým copem platí:

$$K_{sc}^{t+\Delta t} = \frac{v_{0P}^2 \cdot \frac{S}{S_{c0}^{t+\Delta t}} \cdot \left(v^2 + \frac{2 \cdot p_0}{\rho}\right)}{2 \cdot v_{0P}^2 + \frac{S}{S_{c0}} \cdot \left(v^2 + \frac{2 \cdot p_0}{\rho}\right)} \cdot \rho \quad (88)$$

5.1.1 Zadání vírového copu do numerického modelu

Vírový cop bude uvažován v prvním (krajním) bodě výpočetní sítě. Délkový krok prvního výpočtového bodu bude odpovídat délce oblasti, ve které vírový cop předpokládáme. Stále však musíme mít na paměti podmínku konvergence metody Lax-Wendroff (*kapitola 3.1.2*).

V případě, že podmínka konvergence není splněna vlivem příliš krátké první oblasti s vírovým copem, musíme zmenšit časový krok výpočtu. To se může projevit na prodloužení výpočtové operace.

6 EXPERIMENT

Experimentální měření je nedílnou součástí nejen výzkumu, ale i technické praxe. Teoretické výsledky matematického modelu mohou být považovány za věrohodné, pokud se výrazně nerozcházejí s reálnými hodnotami získanými měřeními.

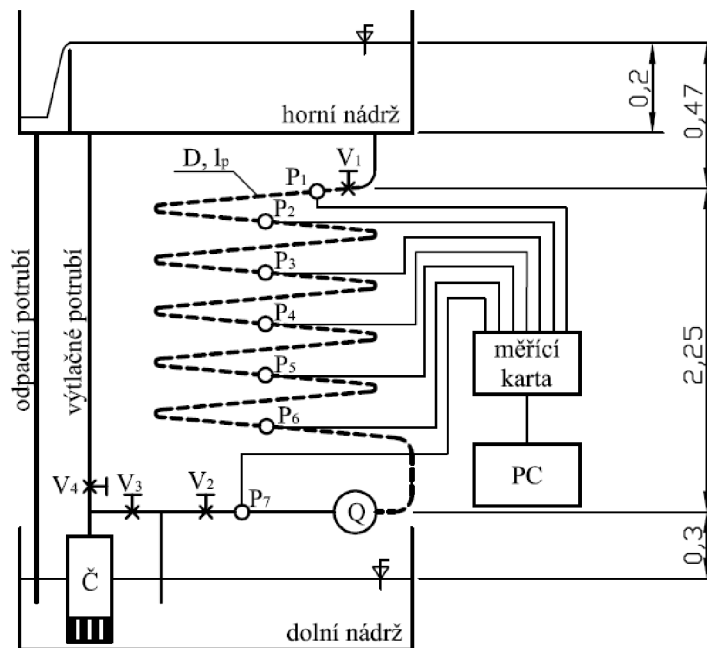
Matematický model, který se skládá z obecně platných zákonů ve tvaru rovnic, je v mnoha případech nutno podrobit optimalizaci, aby model popisoval skutečné, změřené hodnoty. I při sebepečlivějším zadání parametrů matematického modelu nelze model zadat přesně. Pod optimalizací rozumíme zjišťování parametrů, které není možno dohledat, ale lze je změřit, nebo vypočítat z výsledků měření. Některé parametry také můžeme určovat odhadem a v procesu simulace je zpřesňovat. Nejjednodušší řešením, jak výsledky modelu přiblížit realitě, je ruční optimalizace. Ta spočívá v ručním měnění vstupních parametrů modelů tak, aby bylo dosaženo co nejlepší shody mezi měřením a výpočtem.

Pokud je stupeň zjednodušení problému a přístup numerického řešení adekvátní a optimalizací vyladěné řešení se shoduje, pak lze matematický model využít jako simulaci k predikci zkoumaného děje.

6.1 Popis zkušební tratě

Experiment trhání vodního sloupce byl proveden na zkušební trati, používané pro výukové účely, pro demonstraci hydraulického rázu v potrubí. Zkušební trať byla k řešení trhání vodního sloupce modifikována a dovybavena snímací a vyhodnocovací technikou.

Na *Obrázku 12* je uvedeno schéma experimentálního stendu a na následujícím *Obrázku 13* je jeho fotografie.



Obrázek 12. Schéma experimentálního stendu



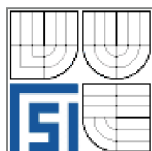
DIPLOMOVÁ PRÁCE VUT-EU-ODDI-13303-15-12

Experimentální stand je tvořen:

- Horní nádrž s přepadem, do které jsou zaústěna potrubí – odpadní, výtlačné a měřené. Přepad nám zajišťuje konstantní výšku hladiny v horní nádrži.
- Dolní nádrž
- Čerpadlem v dolní nádrži (Č)
- Systémem výtlačného a měřeného potrubí s uzavěry ($V_1 - V_4$), které je osazeno snímači tlaku ($P_1 - P_7$) a snímačem průtoku (Q). Ventily označené V_1 a V_2 jsou kulové uzavěry, V_3 a V_4 jsou sedlové ventily. Specifikace snímačů tlaku a průtoku jsou uvedeny v kapitole 7.1.1.
- Vyhodnocovacím zařízením – měřicí karta, *PC*



Obrázek 13. Fotografie experimentálního standu



DIPLOMOVÁ PRÁCE VUT-EU-ODDI-13303-15-12

Měřené potrubí:

Měřené potrubí se stává z polypropylénové hadice délky $58m$ a vnitřního průměru $0,029m$. Na potrubí je připojeno celkem sedm tlakových snímačů $P_1 - P_7$. Snímač průtoku je skrze příruby instalován v části před tlakovým snímačem P_7 .

Tlakové snímače jsou připojeny na potrubí přes mosazné závitové přechodky. Závit v kovu jsou utěsněny teflonovou páskou, v polypropylénovém potrubí těsní samotný plast. Přibližné rozmístění snímačů $P_1 - P_7$ od ventilu V_1 je v *tabulce 1*. Hornímu ventilu V_1 přísluší délková souřadnice $x=0m$.

ventil, snímač	V_1	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	V_2
x [m]	0	0,3	7	17	27	37	47	57,7	58

Tabulka 1. Rozmístění snímačů po délce potrubí

6.1.1 Technické specifikace měřicí techniky

P_1 - snímač tlaku DMP 331, výrobce BD SENZORS s.r.o. Uh. Hradiště, měřicí rozsah 1000 kPa (A), přesnost $\pm 0,25\%$ z rozsahu, proudový výstup 0–20 mA, výr. číslo 320839

P_2 - snímač tlaku DMP 331, výrobce BD SENZORS s.r.o. Uh. Hradiště, měřicí rozsah 600 kPa (A), přesnost $\pm 0,25\%$ z rozsahu, proudový výstup 0–20 mA, výr. číslo 114261197

P_3 - snímač tlaku DMP 331, výrobce BD SENZORS s.r.o. Uh. Hradiště, měřicí rozsah 600 kPa (A), přesnost $\pm 0,25\%$ z rozsahu, proudový výstup 0–20 mA, výr. číslo 360969

P_4 - snímač tlaku DMP 331, výrobce BD SENZORS s.r.o. Uh. Hradiště, měřicí rozsah 600 kPa (A), přesnost $\pm 0,25\%$ z rozsahu, proudový výstup 0–20 mA, výr. číslo 320840

P_5 - snímač tlaku DMP 331, výrobce BD SENZORS s.r.o. Uh. Hradiště, měřicí rozsah 600 kPa (A), přesnost $\pm 0,25\%$ z rozsahu, proudový výstup 0–20 mA, výr. číslo 1249737

P_6 - snímač tlaku DMP 331, výrobce BD SENZORS s.r.o. Uh. Hradiště, měřicí rozsah 600 kPa (A), přesnost $\pm 0,25\%$ z rozsahu, proudový výstup 0–20 mA, výr. číslo 1249736

P_7 - snímač tlaku DMP 331, výrobce BD SENZORS s.r.o. Uh. Hradiště, měřicí rozsah 1000 kPa (A), přesnost $\pm 0,25\%$ z rozsahu, proudový výstup 0–20 mA, výr. číslo 168497

Q - indukční průtokoměr typ MQI 99-C: DN32 / PN 16, ELA Brno, měřicí rozsah 0-4 l/s, přesnost $\pm 0,5\%$ z 10% až 100% Q_{max} , proudový výstup 4-20 mA, výr. č. 98627

T - snímač teploty vody typ HSO-5021A2L HIT s.r.o., rozsah 0-50°C, proudový výstup 4-20mA, přesnost $\pm 0,1\%$

NZ - stejnosměrný stabilizovaný zdroj NZ 224 Rawet, $U_N=24$ V



DIPLOMOVÁ PRÁCE VUT-EU-ODDI-13303-15-12

MU - měřicí ústředna NI 9188, 8-portů, Ethernet komunikace 1 Gb, měřicí karta NI 9203 16-bit proudový převodník, 200 kS/s

PC - PC Intel Core 2 Duo typ LENOVO ThinkPad

6.2 Experimentální měření trhání vodního sloupce

Abychom dosáhli co nejkvalitnějšího zpětného hydraulického rázu je třeba měřené potrubí před měřením zbavit vzduchu ve formě bublinek, které mohou být uvnitř potrubí v různých místech nahromaděny. Nadměrné množství volného vzduchu v potrubí by mohlo výrazným způsobem ovlivnit dynamické chování systému – ovlivnění tlakových špiček, doba zatlumení.

Odvzdušnění měřicího potrubí se provádělo v několika krocích. Nejprve se obrátil průtok v měřicím potrubí pomocí čerpadla. Bylo nutno vždy přestavit příslušné ventily, tzn. V_4 uzavřen, V_3 a V_2 otevřeny, konec měřicího potrubí v dolní nádrži byl zašroubován zátkou. Takto by měl proud vody směřující vzhůru strhávat bublinky ze stěn potrubí a unášet je až do horní nádrže, kde se z vody vyloučí. Poklepaním na různá místa potrubí můžeme také podpořit uvolnění vzduchu. Dále se přestavily ventily, aby voda tekla opět ve smyslu gravitačního potrubí. Pak se několikrát po sobě vyvolal ráz na konci potrubí rychlým uzavřením V_2 , což byla poslední operace odvzdušnění tratě, u které se předpokládalo, že se vlivem tlakových impulzů rázu vzduch vyloučí z posledních míst potrubí.

Jelikož se hydraulický ráz projevuje také akusticky, tak jednou ze známek dobře odvzdušněné tratě byly zvukové projevy při rychlém zavření V_2 .

Situace před uzavřením horního kulového ventilu V_1 vypadala následovně:

Vlivem gravitačního zrychlení proudí voda z horní nádrže připraveným měřicím potrubím do nádrže dolní (uzávěry V_1 , V_2 otevřeny). Čerpadlo dodává vodu do horní nádrže – uzavěr V_3 je uzavřen. Uzávěrem V_4 je škrceno čerpadlo na výtlače, nastavíme tak dostatečný průtok do horní nádrže. Odpadním potrubím se přebytek vody z horní nádrže vrací zpět do nádrže dolní.

Tento stav systému považujeme za ustálený, spustíme zapisování dat ze snímačů do paměti PC a krátce na to vyvoláme v potrubí hydraulický ráz uzavřením ventilu V_1 .

Pro ověření správnosti výsledků měření byl postup měření několikrát opakován.

6.2.1 Optimalizace matematického modelu

Ze série experimentálních zkoušek bylo vybráno jedno měření, které nevykazovalo výrazné odchylky od ostatních. Pro vybrané měření byla provedena optimalizace matematického modelu, která spočívala v hledání konstant vstupujících do výpočtu. Šlo o určení součinitele délkových ztrát potrubí λ , hmotnostní zlomek vyjadřující obsah nerozpuštěného vzduchu ve vodě M_{vz} , o určení rychlosti zvuku v polyetylenovém potrubí v_{op} . Dále byla také zjištěna časová konstanta T_z , která vyjadřuje dobu zavírání ventilu a je nezbytná pro vyřešení okrajové podmínky zavírání na začátku.



DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12

Matematický model byl nastaven na parametry:

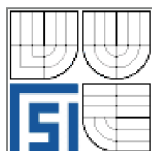
- Délka potrubí:	$l_p = 58 \text{ (m)}$
- Vnitřní průměr potrubí	$D = 0,029 \text{ (m)}$
- Tloušťka stěny potrubí	$\Delta = 0,005 \text{ (m)}$
- Hustota kapaliny	$\rho = 998 \text{ (kg/m}^3\text{)}$
- Součinitel ztrát po délce	$\lambda = 0,028 \text{ (1)}$
- Počet uzlových bodů	$N = 20 \text{ (1)}$
- Délkový krok	$\Delta x = l_p / (20 - 1) = 58 / 19 \approx 3,053 \text{ (m)}$
- Velikost časového kroku výpočtu	$\Delta t = 0,005 \text{ (s)}$
- Rychlost zvuku v polyetylenovém potrubí	$v_{0p} = 250 \text{ (m/s)}$
- Hmotnostní zlomek vzduchu ve vodě	$M_{vz} = 5,5 \cdot 10^{-7} \text{ (1)}$
- Maximální průtokový součinitel ventilu V_1	$K_{vmax1} = 0,05 \text{ (m}^3\text{/s)}$
- Maximální průtokový součinitel ventilu V_2	$K_{vmax2} = 0,05 \text{ (m}^3\text{/s)}$
- Doba zavírání ventilu V_1	$T_z = 0,3 \text{ (s)}$
- Ventil začíná zavírat v čase	$t = 1 \text{ (s)}$

Počáteční podmínky

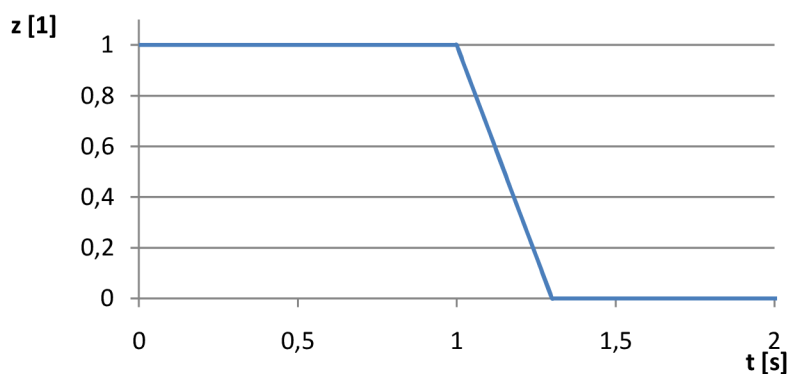
- Počáteční výpočtový bod (uzel 1)	$p_1 = 98\,320 \text{ (Pa)}$ $Q_1 = 0,601 \text{ (l/s)}$
- Koncový výpočtový bod (uzel 20)	$p_{20} = 75\,127 \text{ (Pa)}$ $Q_{20} = 0,601 \text{ (l/s)}$

Okrajové podmínky

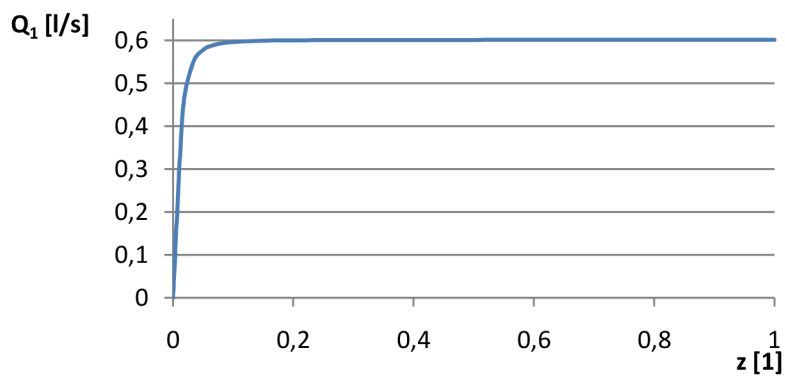
- Počáteční výpočtový bod (uzel 1)	ventil, $Q_1 = Q_1(z)$
- Koncový výpočtový bod (uzel 20)	konstantní tlak, $p_{20} = 75\,127 \text{ (Pa)}$



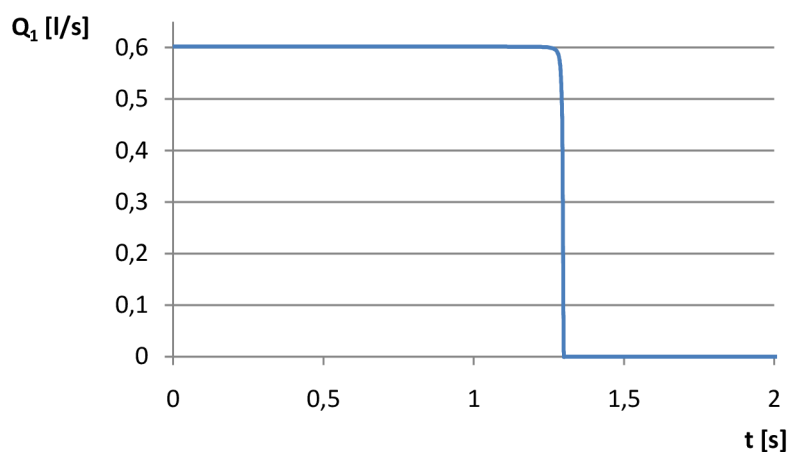
6.2.2 Grafické vyhodnocení výsledků experimentu a matematického modelu



Obrázek 14. Průběh zavírání ventilu V_1 na čase, $T_z = 0,3$ (s)



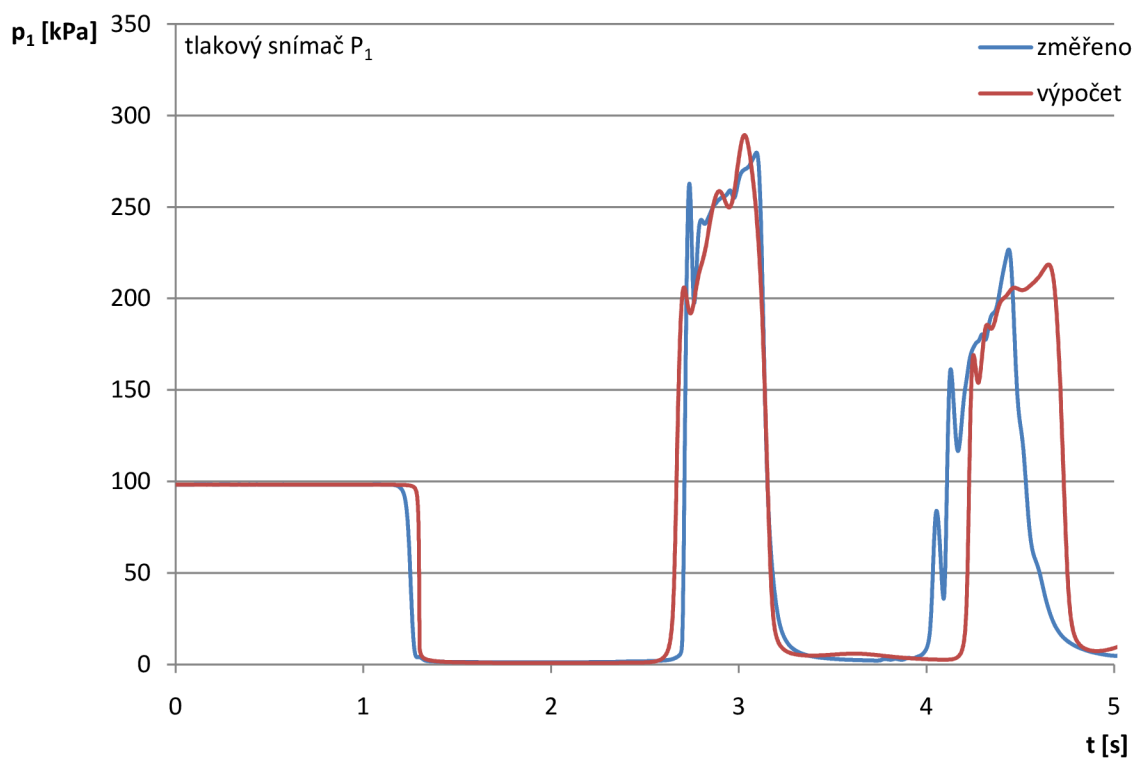
Obrázek 15. Závislost průtoku ventilem V_1 na zavírání, $T_z = 0,3$ (s)



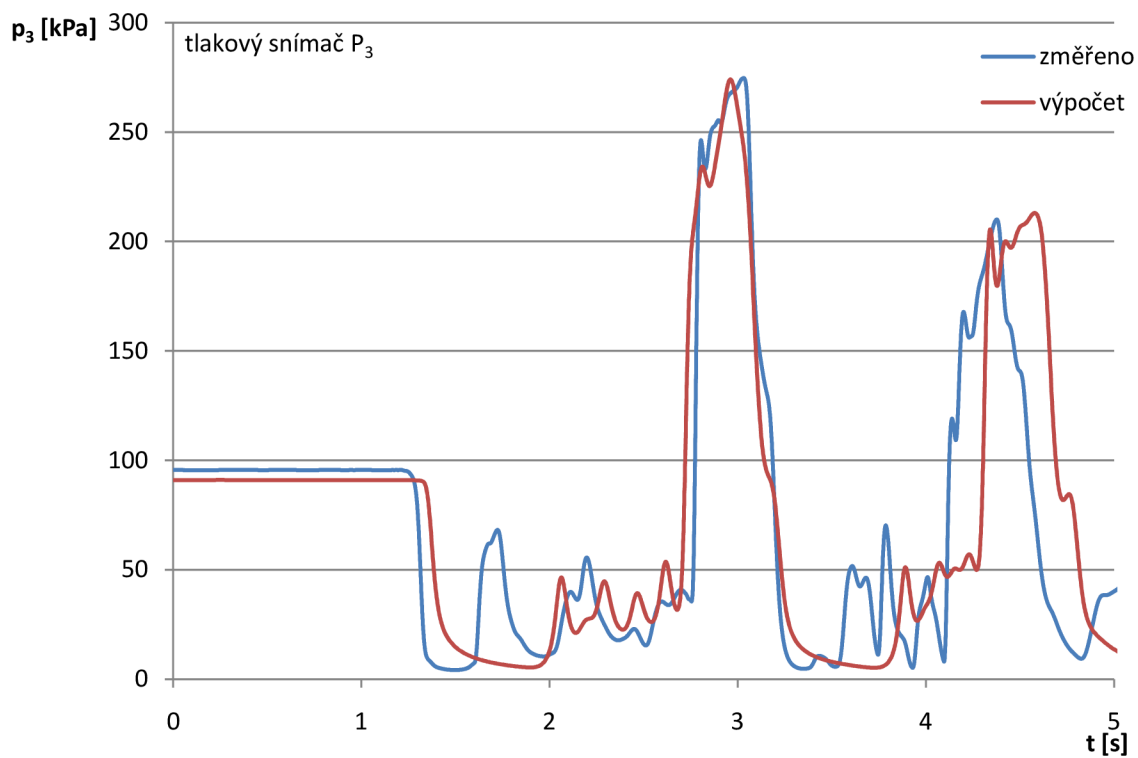
Obrázek 16. Změna průtoku ventilem V_1 v čase, $T_z = 0,3$ (s)



DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12



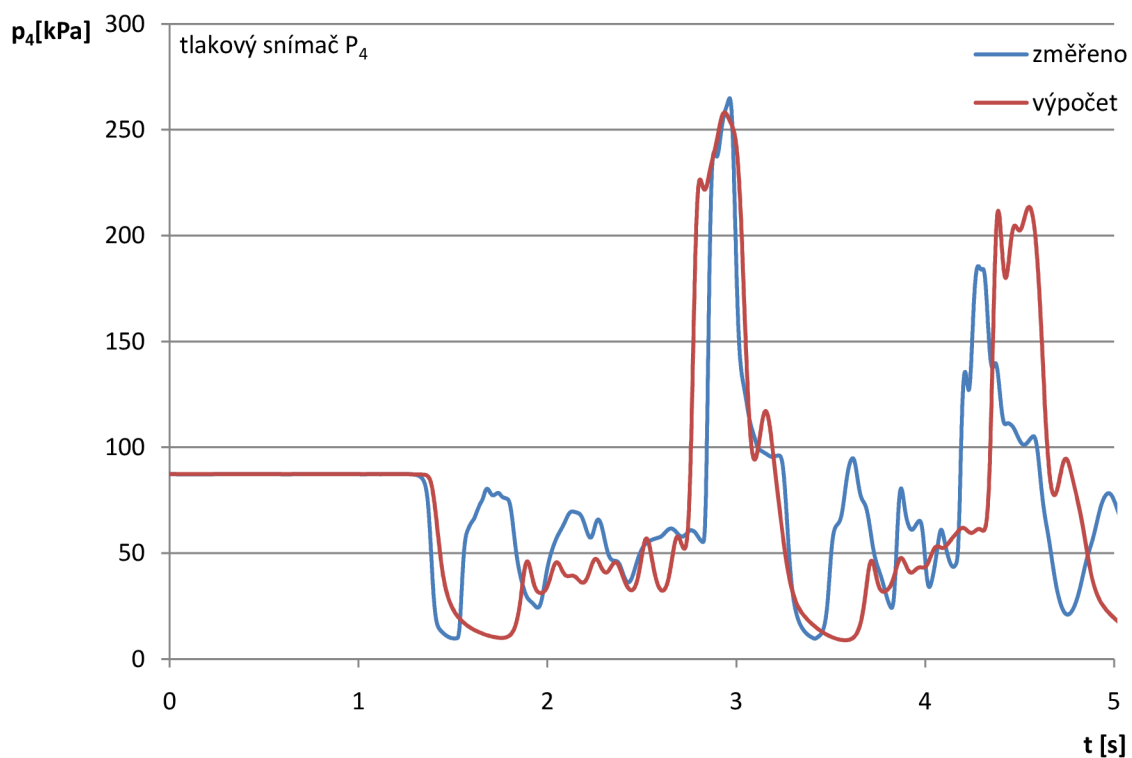
Obrázek 17. $p_1(t)$, časový průběh tlaku na pozici snímače P_1



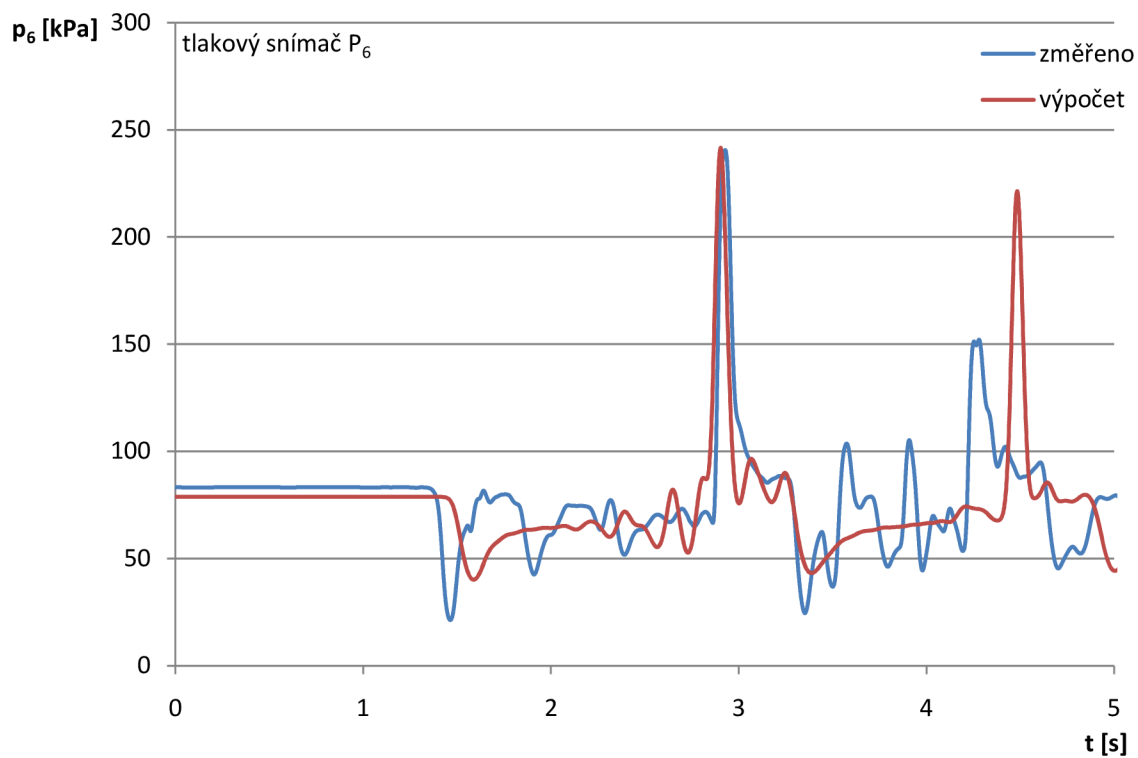
Graf 18. $p_3(t)$, časový průběh tlaku na pozici snímače P_3



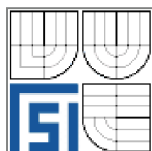
DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12



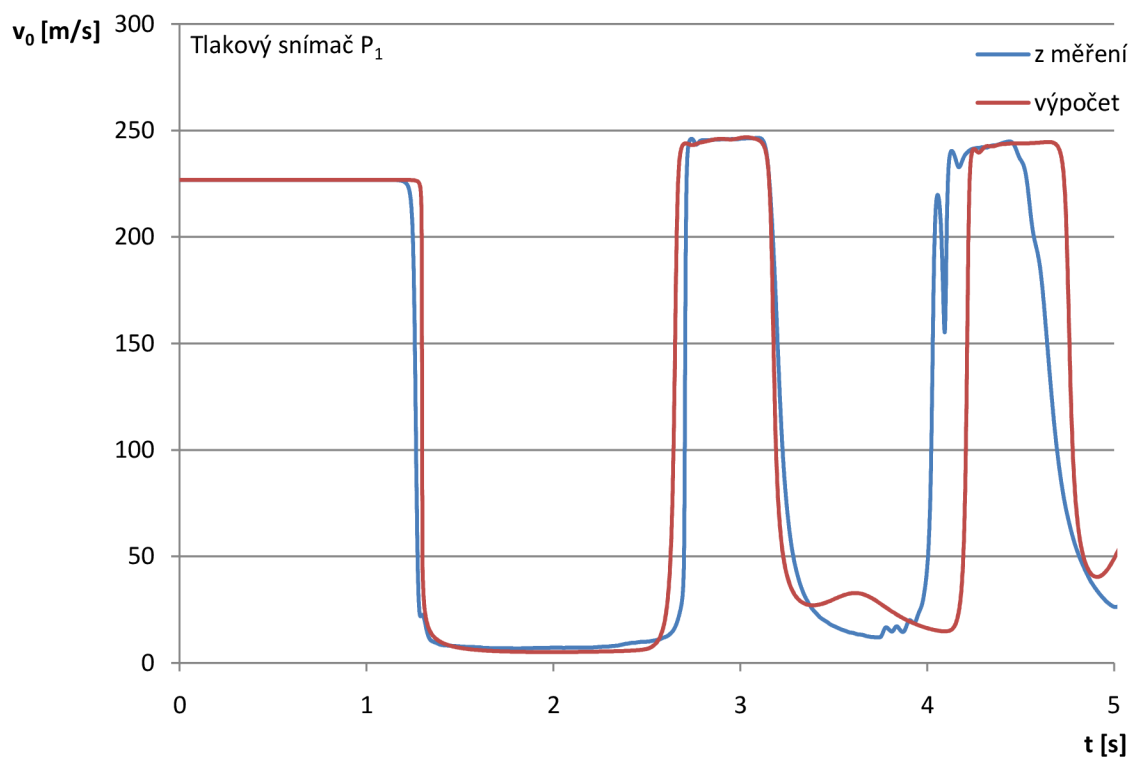
Obrázek 19. $p_4(t)$, časový průběh tlaku na pozici snímače P_4



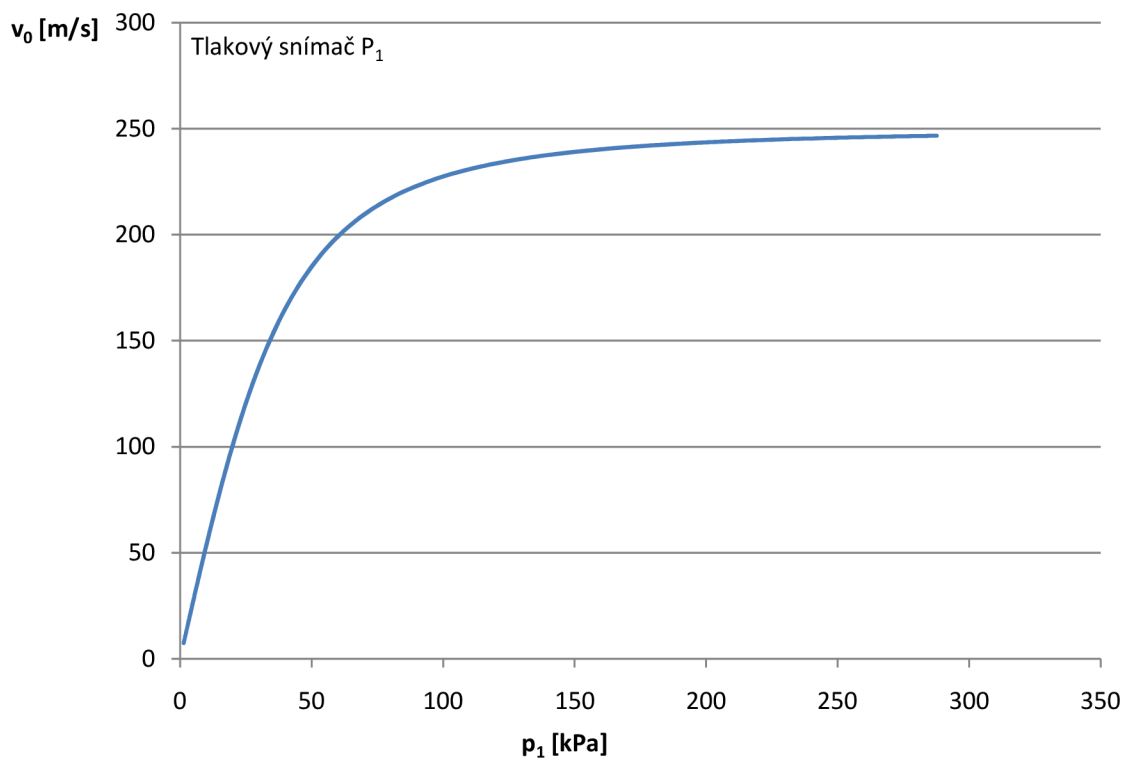
Obrázek 20. $p_6(t)$, časový průběh tlaku na pozici snímače P_6



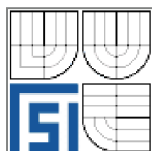
DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12



Obrázek 21. $v_0(t)$, průběh rychlosti zvuku v závislosti na čase na pozici snímače P_1



Obrázek 22. $v_0(p_1)$, Rychlost zvuku v závislosti na tlaku (pro první 4s od zavírání)



7 MATEMATICKÝ MODEL TRHÁNÍ VODNÍHO SLOUPCE S VLIVEM VÍROVÉHO COPU

Jako vstupní parametry jsou použity hodnoty z optimalizovaného modelu podle experimentu. Vírový cop budeme v rámci teoretické úvahy předpokládat v uvedeném potrubí. Umožní nám to tak porovnání vlivu poddajného vírového copu vyplněného vzduchem na tlakové pulzace při vodním rázu.

V nastavených parametrech se nachází konstanty, které budeme pro jednotlivá řešení měnit, jsou odlišeny tučně. Z těchto konstant budou vyplívat grafická vyhodnocení. Každé grafické vyhodnocení pak bude v legendě obsahovat, za jakých parametrů bylo výsledků dosaženo.

Matematický model byl nastaven na parametry:

- Délka potrubí:	$l_p = 58$ (m)
- Vnitřní průměr potrubí	$D = 0,029$ (m)
- Tloušťka stěny potrubí	$\Delta = 0,005$ (m)
- Hustota kapaliny	$\rho = 998$ (kg/m ³)
- Součinitel ztrát po délce	$\lambda = 0,028$ (1)
- Počet uzlových bodů	$N = 21$ (1)
- Uvažovaná délka copu	$\Delta x_c = 0,5$ (m)
- Doplněk do délkového kroku	$\Delta x_d = \Delta x - \Delta x_c = 2,553$ (m)
- Délkový krok	$\Delta x = l_p / (20 - 1) = 58 / 19 \approx 3,053$ (m)
- Velikost časového kroku výpočtu	$\Delta t = 0,001$ (s)
- Rychlost zvuku v polyetylenovém potrubí	$v_{op} = 250$ (m/s)
- Hmotnostní zlomek vzduchu ve vodě	$M_{vz} = 5,5 \cdot 10^{-7}$ (1)
- Maximální průtokový součinitel ventilu V_1	$K_{vmax1} = 0,05$ (m ³ /s)
- Maximální průtokový součinitel ventilu V_2	$K_{vmax2} = 0,05$ (m ³ /s)
- Doba zavírání ventilu V_1	$T = 0,3$ (s)
- Ventil začíná zavírat v čase	$t = 1$ (s)

Měněné parametry pro vyhodnocení vlivu copu

- Tlak ve vírovém copu	p_0 (kPa)
- Obvodová rychlost na povrchu copu	v (m/s)
- Poměr průřezu potrubí a průřezu copu	S/S_{c0} (1)

Počáteční podmínky

- Počáteční výpočtový bod (uzel 1)	$p_1 = 98\,320$ (Pa) $Q_1 = 0,601$ (l/s)
- Koncový výpočtový bod (uzel 20)	$p_{20} = 75\,127$ (Pa) $Q_{20} = 0,601$ (l/s)

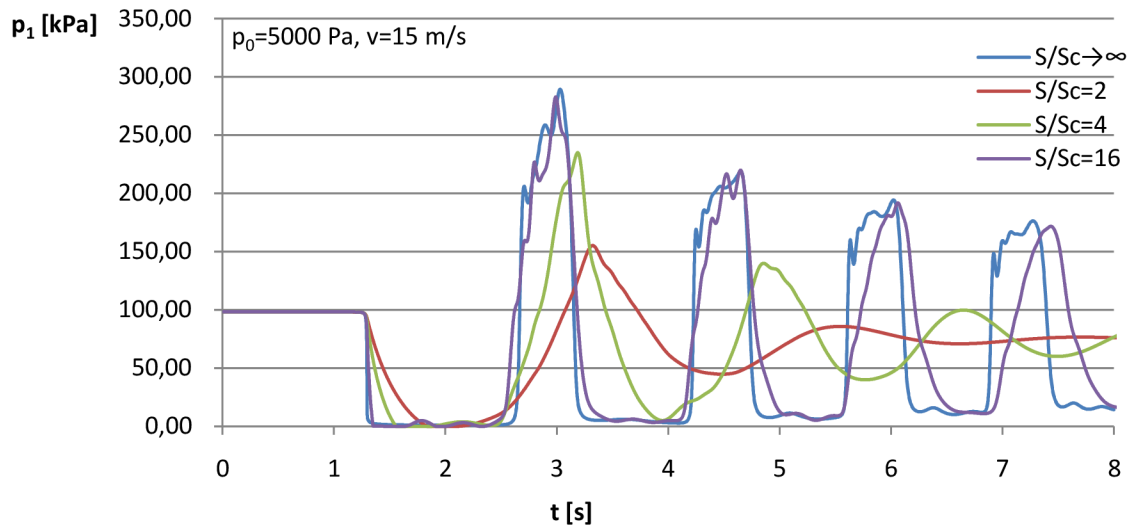


DIPLOMOVÁ PRÁCE VUT-EU-ODDI-13303-15-12

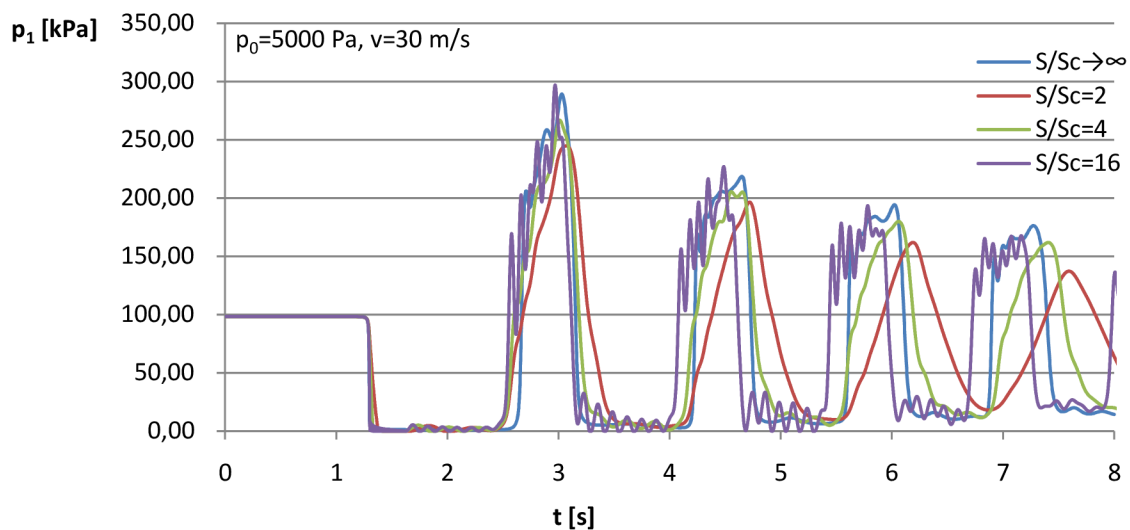
Okrajové podmínky

- Počáteční výpočtový bod (uzel 1) ventil, $Q_1 = Q_1(z)$
- Koncový výpočtový bod (uzel 20) konstantní tlak, $p_{20} = 75\,127$ (Pa)

7.1 Grafické vyhodnocení výsledků matematického modelu



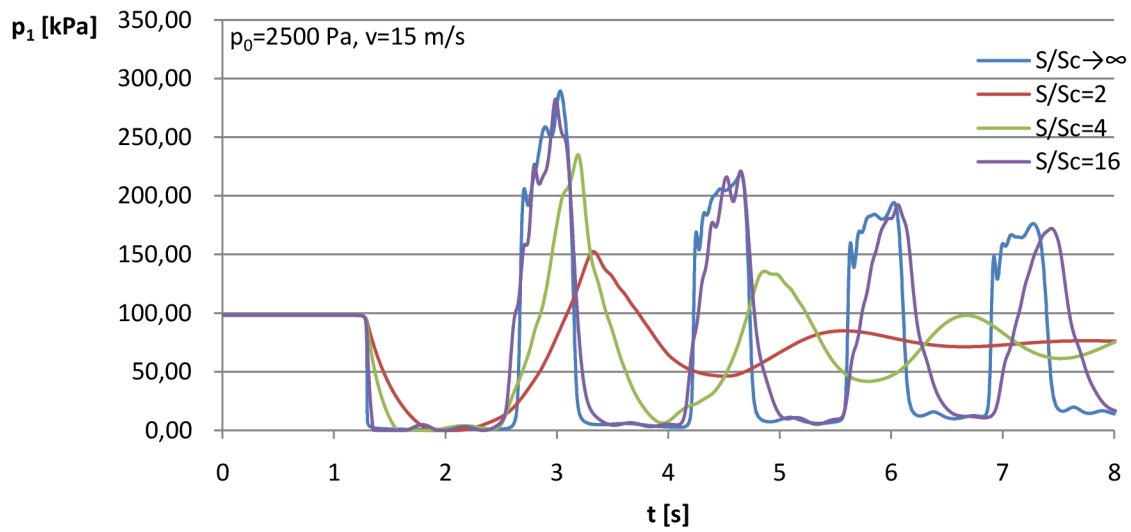
Obrázek 23. $p_1(t)$, Průběh tlaku na čase v počátečním bodě výpočtové sítě při parametrech dle legendy



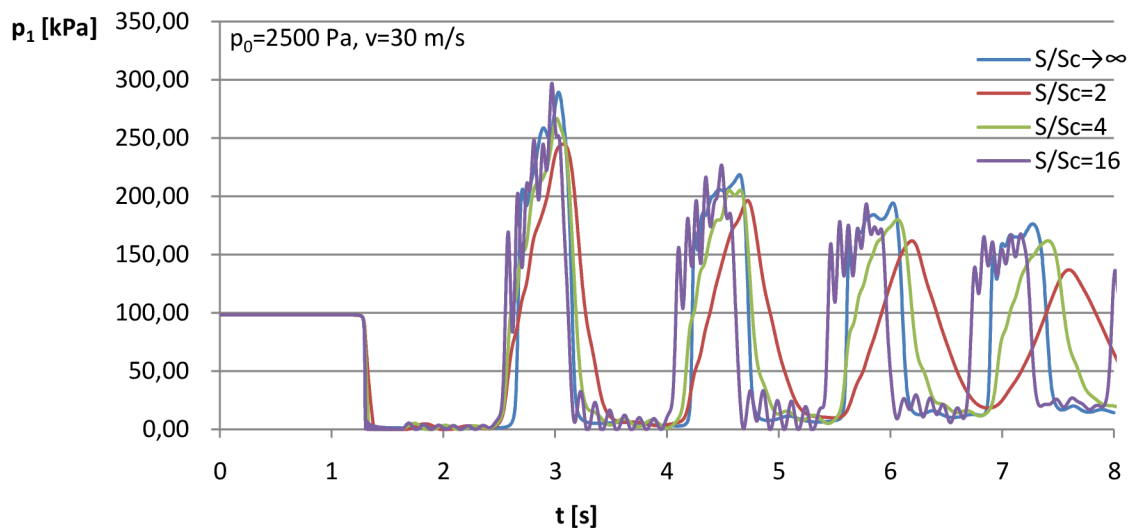
Obrázek 24. $p_1(t)$, Průběh tlaku na čase v počátečním bodě výpočtové sítě při parametrech dle legendy



DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12



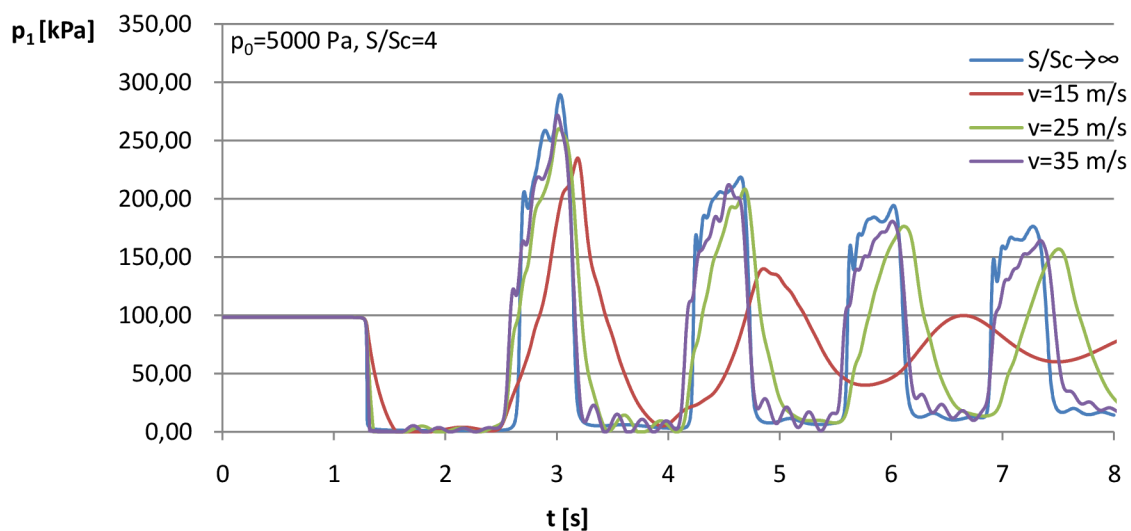
Obrázek 25. $p_1(t)$, Průběh tlaku na čase v počátečním bodě výpočtové sítě při parametrech dle legendy



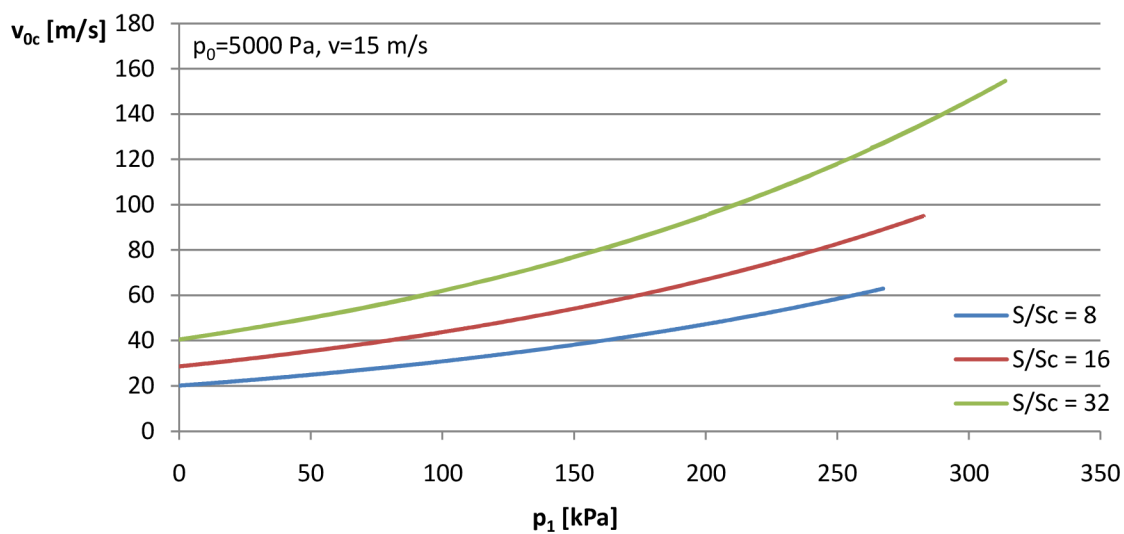
Obrázek 26. $p_1(t)$, Průběh tlaku na čase v počátečním bodě výpočtové sítě při parametrech dle legendy



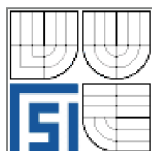
DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12



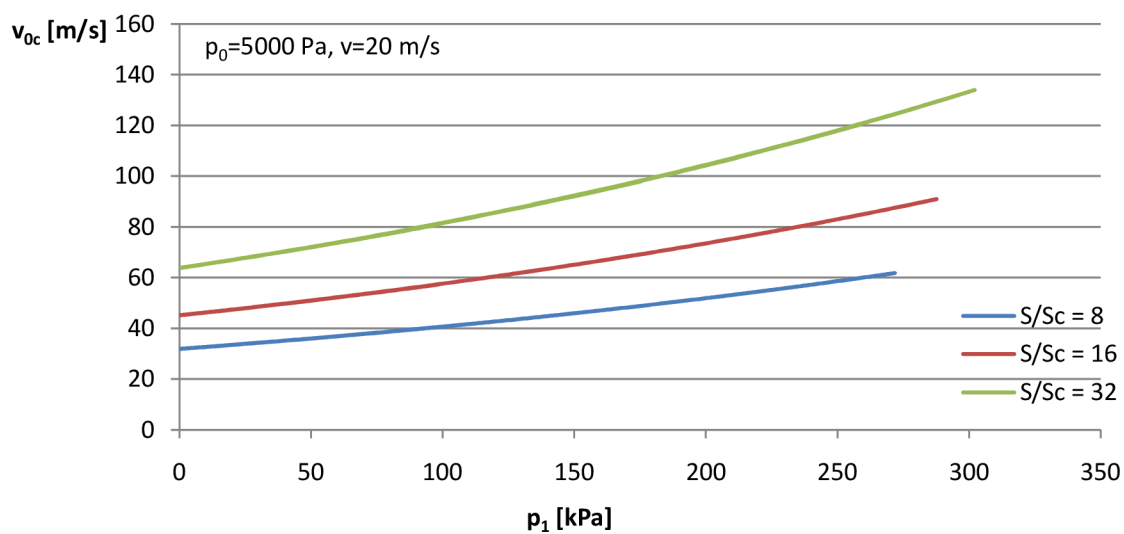
Obrázek 27. $p_1(t)$, Průběh tlaku na čase v počátečním bodě výpočtové sítě při parametrech dle legendy



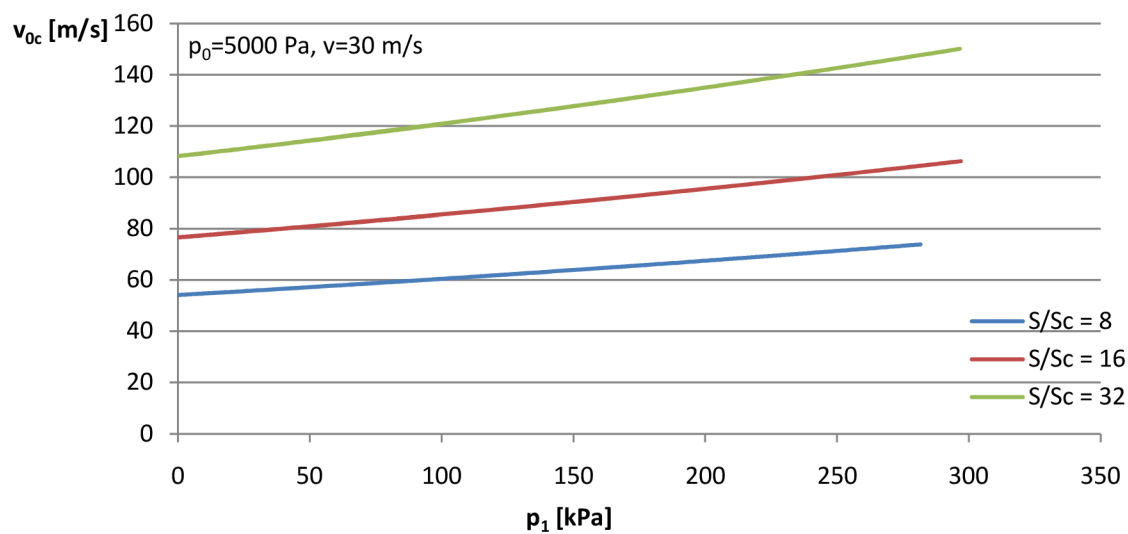
Obrázek 28. $v_{0c}(p_1)$, Průběh rychlosti zvuku na tlaku v počátečním bodě výpočtové sítě při parametrech dle legendy



DIPLOMOVÁ PRÁCE VUT-EU-ODDI-13303-15-12



Obrázek 29. $v_{0c}(p_1)$, Průběh rychlosti zvuku na tlaku v počátečním bodě výpočtové sítě při parametrech dle legendy



Obrázek 30. $v_{0c}(p_1)$, Průběh rychlosti zvuku na tlaku v počátečním bodě výpočtové sítě při parametrech dle legendy



8 ZÁVĚR

V diplomové práci byla uvedena odvození vztahů pro sestavení matematického modelu zpětného hydraulického rázu v potrubí. Odvození vychází ze základních rovnic, tedy rovnice silové rovnováhy a rovnice kontinuity, upravených pro jednodimenzionální proudění. Pro řešení matematického modelu bylo využito numerického schématu Lax-Wendroff, které nám umožní uvažovat rozdílnou rychlost zvuku v systému během rázové vlny. Rychlost zvuku v systému je ovlivněna poddajností potrubí a dále vzduchem ve formě nerozpuštěných bublinek. Rychlost zvuku, jinak vyjádřená modulem pružnosti směsi voda-vzduch, je v práci uvažována jako funkce statického tlaku.

Na základě uvedených numerických odvození byl vypracován v prostředí MS Excel program pro řešení zpětného hydraulického rázu.

Experimentální měření provedené pro tuto diplomovou práci mělo za úkol ověřit platnost numerického modelu. To se v jistých mezích podařilo. Hodnoty z měření a experimentu jsou v části práce 6.2.2 vyneseny v grafických závislostech. Grafickým porovnáním hodnot měření a výpočtu lze říci, že vypracovaný matematický model je schopen predikce pro první dvě amplitudy tlaku. Důvodem proč se nám řešení dále neshoduje je několik:

- trubici neuvažujeme ve smyslu Voigt – Kelvinova modelu tělesa
- narostl obsah vzduchu v potrubí vlivem netěsností (utěsnění snímačů, spoje, kapající ventily)
- neuvažujeme, že obsah vzduchu se může ve vodě měnit samovolně při různých tlacích (může být z vody vytěšňován, nebo se v ní rozpouští)

Porovnání výsledků je uvedeno pro více izolovaných bodů modelu, které svojí polohovou souřadnicí odpovídají polohám tlakových snímačů na experimentální trati. Tak jsme se přesvědčili, že matematický model je schopen předpovědi průběh tlaku nejen bezprostředně za uzavíracím prvkem, ale i po celé délce potrubí.

Optimalizací matematického modelu byly zjištěny důležité parametry kterými je rychlost zvuku v polyethylenovém potrubí $v_{0P} = 250 \text{ m/s}$, obsah vzduchu ve vodě vyjádřený hmotnostním zlomkem $M_{vz} = 5,5 \cdot 10^{-7}$, při rychlosti zavírání ventilu $T_z = 0,3 \text{ s}$. Hodnoty rychlosti zvuku v potrubí při zpětném hydraulickém rázu se pak pohybují v rozmezí $v_0 = 5 - 248 \text{ m/s}$.

Poslední kapitola diplomové práce je věnována grafickému vyhodnocení výsledků numerického modelu, kdy v části potrubí za uzavíracím ventilem předpokládáme rotující proudění, které vede ke vzniku vírového copu. Pro předpoklad vírového copu vyjdeme ze stejného potrubí, na jakém byly ověřeny parametry pro matematický model bez copu. Základní parametry také ponecháme. Měněnými vstupními hodnotami bude tlak uvnitř copu p_0 , průměr copu, respektive poměr ploch příčných průřezů potrubí a copu S/S_c a velikost rychlosti na obvodu copu v . Pro tyto měněné vstupní hodnoty jsou vykresleny grafy v kapitole 7.1.

Poddajnost copu by měla způsobovat rychlé ztlumení tlakových pulzací vzhledem k nízkým hodnotám rychlosti zvuku v oblasti s copem. Tak je tomu ale v omezené míře. Z grafů je patrné, že největší vliv na průběh tlakových pulzací a rychlost zvuku má obvodová rychlost na povrchu copu. Tlak uvnitř copu má dle výsledků a zvolených parametrů matematického modelu zanedbatelný vliv. Při poměru $S/S_c = 16$ začínají vycházet průběhy tlakových pulzací stejně, jako bychom cop neuvažovali.

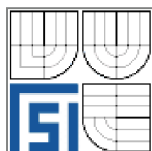
Otázka řešení zpětného hydraulického rázu samotného i rázu s úvahou vírového copu, zůstává i po zpracování této práce nadále otevřená.



DIPLOMOVÁ PRÁCE VUT-EU-ODDI-13303-15-12

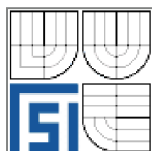
Abychom byli schopni určit, jak nám vírový cop ovlivňuje chování dynamického systému, bylo by zapotřebí provést množství experimentů vedoucích k jeho bližšímu poznání. Od experimentů by se následně odvíjely charakterizující parametry vírového copu pro matematický model. Jistý problém nastává, jak vírový cop v dané oblasti zkoumat a provádět měření. Možností může být vizuální pozorování kavitujícího copu skrze hledí v potrubí. Je možné využít některou metodu měření pomocí laserového paprsku (LDA, PIV). Předmětem dalšího zkoumání by také mohlo být určení množství syté vodní páry a vzduchu uvnitř vírového copu.

Vírový cop je problematika velice složitá a v této práci je jeho vliv objasněn ve velice omezené míře. Na tento svojí povahou rozsáhlý problém je tedy možno v budoucnu navázat.



POUŽITÉ ZDROJE

- [1] KOUTNÍK, J. *Tlakové pulzace v hydraulických systémech vodních turbin*. Brno, 1998. Disertační práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Energetický ústav. Vedoucí práce Prof. Ing. František Pochyl, CSc.
- [2] HABÁN, V. *Vysokofrekvenční pulsace ve vodních strojích*. Brno, 2010. Zkrácená verze habilitační práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Energetický ústav. ISBN 978-80-214-4169-9
- [3] SKOTÁK, A. *Vírové struktury v savce vodní turbíny*. Brno, 2004. 68 s. Dizertační práce. Vysoké učení technické, Fakulta strojního inženýrství, Energetický ústav. Vedoucí práce Prof. Ing. František Pochylý, CSc.
- [4] *École Polytechnique Fédérale de Lausanne* [online]. c2011 [cit. 2011-04-30]. Electricity and Electrical Mobility. Dostupné z WWW: <http://energycenter.epfl.ch/electricity_mobility>.
- [5] PANKO, M. *Tlumení tlakových pulsací v pružných potrubích*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2008. 61 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Vladimír Habán, Ph.D.
- [6] KOYŠ, J. *Modelování tlakových pulsací v pružných potrubích*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2006. 58 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Vladimír Habán, Ph.D.
- [7] HIMR, D. *Řešení nelineárních hydraulických sítí*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 53 s. Vedoucí disertační práce Prof. Ing. František Pochylý, CSc.
- [8] ZÁRUBA, J. *Hydraulický ráz v soustavách potrubí*. Praha: Academia, 1984.
- [9] HAINDL, K. *Hydraulický ráz ve vodovodních a průmyslových potrubích*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1963.
- [10] IAPWS. Equations of IAPWS-IF97 [online]. International Association for the Properties of Water and Steam (IAPWS), 2008. [cit. 2012-05-10]. Dostupné z: <<http://www.iapws.org>>.
- [11] JANALÍK, J; ŠTÁVA, P. *Mechanika tekutin* [online]. [cit. 2012-05-10]. Dostupné z: <<http://www.338.vsb.cz>>.
- [12] HABÁN, V; POCHYLÝ, F; FOLDYNA, J. Vliv vzduchu na rychlost zvuku v trubici bez rotace a s rotací kapaliny v trubici. Vysoké učení technické v Brně: Energetický ústav
- [13] POCHYLÝ, F. *Podmínky vedoucí ke vzniku kavitujičícího copu v savce turbíny*. Výzkumná zpráva. Brno, 2010.



DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12

- [14] Himr, D; Hudec, M; Habán, V. *Analýza a numerická simulace vodního rázu v kavitující oblasti na zkušebním okruhu OFI*. Technická zpráva VUT- EU13303 –QR-06-12. Brno 2012



SEZNAM SYMBOLŮ

Symbol	Jednotka	Popis
Δ	(m)	tloušťka potrubí
Δp	(Pa)	tlaková diference
Δp_{ref}	(Pa)	referenční tlaková diference
Δr	(m)	přírůstek poloměru
Δt	(s)	časový krok výpočtu
Δx	(m)	délkový krok výpočtu
Δx_c	(m)	délka oblasti s vírovým copem
Δx_d	(m)	délka doplňková oblasti
α	(1)	opravný koeficient
a_Q	(m ⁴ ·s/kg)	konstanta pro výpočet průtoku
b_Q	(s/m ³)	konstanta pro výpočet průtoku
c	(m/s)	rychlost kapaliny v trubici
c_Q, d_Q, e_Q	(m ² ·s/kg)	konstanta pro výpočet průtoku
c_r	(m/s)	rychlost ve směru vnitřní normály
D	(m)	vnitřní průměr potrubí
D_v	(m)	vnější průměr potrubí
E	(Pa)	modul pružnosti potrubí
f_Q	(s/m ⁶)	konstanta pro výpočet průtoku
g_p	(s/m ³)	konstanta pro výpočet tlaku
h_p, i_p	(m·s ² /kg)	konstanta pro výpočet tlaku
j_p	(s ² /m ⁶)	konstanta pro výpočet tlaku
K	(Pa)	modul pružnosti kapaliny
κ	(-)	adiabatický exponent
K_s	(Pa)	modul pružnosti směsi
K_{sc}	(Pa)	modul pružnosti směsi v oblasti copu
K_v	(m ³ /s)	průtokový součinitel
λ	(1)	součinitel délkových ztrát
l_p	(m)	délka potrubí
M_{vz}	(1)	hmotnostní zlomek vzduchu
N	(1)	počet uzlových bodů výpočetní sítě
p	(Pa)	tlak
π	(1)	Ludolfovo číslo



DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12

Symbol	Jednotka	Popis
p_0	(Pa)	tlak uvnitř vírového copu
p_1	(Pa)	tlak v prním výpočtovém bodě
p_{20}	(Pa)	tlak v posledním výpočtovém bodě
p_{IN}	(Pa)	tlak na vstupu do potrubí před ventilem
p_{OUT}	(Pa)	tlak na výstupu z potrubí za ventilem
Q_1	(m ³ /s)	průtok v prvním výpočtovém bodě
Q_{20}	(m ³ /s)	průtok v posledním výpočtovém bodě
Q_{IN}	(m ³ /s)	vstupní průtok před ventilem
Q_{OUT}	(m ³ /s)	výstupní průtok za ventilem
ρ	(kg/m ³)	hustota vody
R	(1/m ⁴)	odpor
r	J/(kg·K)	specifická plynová konstanta
r_c	(m)	poloměr vírového copu
ρ_{ref}	(kg/m ³)	referenční hustota vody
S	(m ²)	průtočná plocha
S_c	(m ²)	plocha průřezu vírového copu
t	(s)	čas
T	(K)	teplota
T_z	(s)	doba zavírání
v	(m/s)	obvodová rychlost na povrchu copu
v_0	(m/s)	skutečná rychlost zvuku v potrubí
v_{0c}	(m/s)	rychlost zvuku v oblasti vírového copu
v_{0K}	(m/s)	rychlost zvuku ve vodě
v_{0P}	(m/s)	rychlost zvuku v potrubí
w, K, B	(-)	matice
x_j	(m)	prostorová souřadnice
z	(1)	zavření ventilu
ξ	(1)	součinitel místních ztrát



DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12

SEZNAM PŘÍLOH

Fotografie 1. Experiment - rozmístění snímačů tlaku $P_2 - P_6$

Fotografie 2. Experiment – detail uzávěru V_1 s tlakovým snímačem P_1

CD 1. Diplomová práce

CD 2. Data z měření, matematický model



DIPLOMOVÁ PRÁCE
VUT-EU-ODDI-13303-15-12

PŘÍLOHY



Fotografie 1. Experiment – rozmístění snímačů tlaku $P_2 - P_6$



Fotografie 2. Experiment – detail uzávěru V_1 s tlakovým snímačem P_1