Univerzita Palackého v Olomouci

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Pavel Šustr

Soustavy lineárních rovnic a jejich řešení pomocí matic

Olomouc 2015 Vedoucí práce: Mgr. Jitka Hodaňová Ph. D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci na téma „*Soustavy lineárních rovnic a jejich řešení pomocí matic*“ vypracoval samostatně, s použitím veškeré uvedené literatury, ze které jsem čerpal.

V Olomouci dne …………………… …………………………

Pavel Šustr

Poděkování

Velice moc děkuji paní Mgr. Jitce Hodaňové za vedení a pomoc při tvorbě bakalářské práce, a také velice děkuji panu doc. RNDr. Tomáši Zdráhalovi, CSc., který mi vždy pomohl a poradil, a ke kterému jsem chodil na konzultace v nepřítomnosti paní Hodaňové ve škole.

Obsah

Úvod

Bakalářská práce je zaměřena na popis různých typů matic a jejich využití k výpočtům v různých oborech. Toto téma jsem si vybral, abych ukázal, jak velice obsáhlé toto téma je. Bakalářská práce neobsahuje praktickou část, zaměřil jsem se především na teoretickou část.

Práci jsem rozdělil do tří částí a malého dodatku. V první části, která je nejobsáhlejší, se zabývám maticemi, které mají obrovské využití v matematice a fyzice. Jedná se o Wronského matici a její determinant Wronskián, Hessovu matici a Jacobiho matici, jejíž determinant se nazývá Jakobián. U těchto matic je napsán i krátký životopis jejich „zakladatelů." Na závěr první kapitoly se zabývám maticemi v kvantové mechanice a zmíním Pauliho matici.

Druhá část této bakalářské práce se zabývá maticemi, které se využívají ve stavebnictví. Zde nezmíním matice, které jsou zcela běžné a jaké známé z matematiky, i když i ty se ve stavebnictví hojně využívají. Stavebnictví není můj obor studia a některé pojmy, které se používají ve stavebnictví, jsou velmi speciální a překračují rámec matematického zaměření mého studia. Proto jsem vybral typy matic, které jsou zajímavé z hlediska jejich využití. Zde píši o maticích využívaných v přípravné fázi výstavbového projektu a o maticích kriteriálních, které jsou využívány ve znaleckém oceňování.

Třetí část zahrnuje téma kontingenčních tabulek, což je druh matic, které se využívají ve statistice.

Na závěr jsem zmínil problém, který matice provází ve všech oborech, a tím je jejich špatná podmíněnost.

Cílem bakalářské práce bylo studovat využití matic k některým praktickým výpočtům. Také jsem ukázal, že ne vždy musí mít matice matematický tvar. Při zpracování bakalářské práce jsem si vytvořil komplexní pohled na problematiku matic.

1 Využití matic v matematice a fyzice

V této kapitole se budu věnovat využití matic, které mají své důležité uplatnění v matematice a fyzice a bez kterých by tyto dva obory nemohly být na takové úrovni, na které jsou. Nebudu zde popisovat naprosto všechny případy matic, kdy se vyskytují v těchto oborech, ale zaměřím se na tři typy, které jsou pojmenovány po svých „objevitelích" a které mají jistě jednu z nejdůležitějších rolí. Jedná se o Wronského matici a její determinant zvaný Wronskián, Hessovu matici a Jacobiho matici a její determinant Jakobián.

1.1 Josef Maria Hoëne-Wronski

Následující text života Josefa Maria Hoëne-Wronského jsem čerpal z internetového zdroje *Wronski biography – University of St. Andrews*[1]

Josef Maria Hoëne-Wronski, narozen 24. srpna 1776 v Wolsztynu, byl polský matematik, fyzik, filozof, ekonom a právník. Jeho původní jméno bylo pouze Josef Hoën. Po smrti své matky, když mu bylo 16 let, utekl z domova a dal se ke školnímu dělostřeleckému sboru, kde si změnil jméno, aby ho otec nemohl najít. Po vypuknutí Kościuszkova povstání velel baterii dělostřelectva, za své úspěchy byl ohodnocen zlatými hodinkami. Krátce nato se dal k armádě, kde se vypracoval do pozice kapitána. Nicméně, kvůli výčitkám svědomí a také touze získat znalosti, z armády odešel.

Zlom ve Wronského životě nastal při jeho vizi, kterou zažil 15. srpna 1803 na plese na oslavu narozenin Napoleona. Popisoval, že měl pocit strachu a zároveň důvěry. Věřil, že pochopil podstatu absolutna a zná odpovědi na otázky týkající se počátku celého Vesmíru. Od této doby se snažil reformovat člověka a vytvořit univerzální filozofický systém, který by nabízel odpovědi na vše.

Roku 1810 se Josef Maria Hoëne-Wronski oženil s dcerou chudého markýze Victorií Henryka Sarrazin a téhož roku se odstěhoval do Paříže. Publikoval své výsledky výzkumu. Říkal, že čísla a jejich vlastnosti jsou zásadní oporou všeho ve Vesmíru. Jeho teorie však nebyly příznivě přijaty, byly spíše odmítány, a to jako obrovský odpad. Dokonce se pokoušel vyvrátit Lagrangeovu teorii funkční analýzy.

---

[1] *Wronski biography – University of St. Andrews*
URL: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Wronski.html, publikováno: červenec 2007

Jako chudý člověk, roku 1820, odjel do Anglie, aby se zúčastnil soutěže o nejlepší přístroj pro stanovení délky na moři. Jeho účast však byla odmítnuta. Jako úplný chudák se roku 1823 vrátil opět do Paříže, kde dále pokračoval ve svých matematických pracích a navíc vynalézal nové věci, např. moderní kalkulačky, univerzální účetní nástroj, nebo vylepšení systému parních motorů. Jeho vědecké práce se však záhy mění na práce a studium metafyziky a filozofii dějin myšlení, sociální a náboženské.

Za svůj život napsal více jak sto spisů, všechny ve francouzštině. Byl velice kritizován za velmi povýšený přístup k životnímu prostředí. Podílel se na matematické analýze, zejména v rozvíjení funkcí na mocninnou řadu a zabýval se diferenciálními rovnicemi. Mezi jeho nejvýznamnější díla patří vývoj indikátoru funkce rovnic, který je dodnes nazýván Wronskiánem. Nicméně, za jeho života byla většina děl odmítnuta jako nesmysl. Opravdovou hodnotu jim začali lidé dávat až po jeho smrti.

Zemřel 9. srpna 1853 v pařížském předměstí *Neuilly sur Seine*. Říká se, že těsně před tím, než zemřel, pošeptal své manželce: „*Bože všemohoucí, je ještě spoustu víc věcí, které jsem chtěl říct.*“

1.1.1 Wronského matice, Wronskián

Text, který pojednává o využití Wronského matice a Wronskiánu v praxi jsem čerpal ze zdrojů: *Lineární diferenciální rovnice – úvod do teorie*[2], *Časopis pro pěstování matematiky*[3] a *Sbírka příkladů z matematiky II ve strukturovaném studiu*[4].

Důležitým nástrojem v matematice a fyzice je určitě Wronského matice a její determinant, zvaný Wronskián. Používá se při zkoumání lineární závislosti funkcí. Nejlépe to lze ukázat a popsat na lineární závislosti vektorů. Máme-li například vektor $\underline{u}$, vektor $\underline{v}$ a vektor $\underline{w}$ v prostoru dimenze 3 a máme zjistit, jsou-li tyto vektory lineárně závislé nebo nezávislé. Lineárně závislé znamená, že jeden je lineární kombinací toho druhého. Podle

[2] HERKRDLA, Josef. *Lineární diferenciální rovnice* [online]. Publikováno: 13.3.2008. https://math.feld.cvut.cz/hekrdla/Teaching/X01MA2/Prednasky/OLDR.pdf.

[3] JARNÍK, Vojtěch. *Časopis pro pěstování matematiky* [online]. Vol. 80 (1955), No. 1, 32-43 c. Institut of Mathematics AS CR, 1955. http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/117146/CasPestMat_080-1955-1_3.pdf

[4] DUBCOVÁ Miroslava, PURMOVÁ Lucie, SIMERSKÁ Carmen, *Sbírka příkladů z matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1. vydání, Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4

definice pak musí platit: $\alpha \underline{u} + \beta \underline{v} + \gamma \underline{w} = 0$, kde α, β a γ jsou libovolné konstanty, u kterých platí, že $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 0$. Dostáváme tedy $\alpha(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3) + \gamma(w_1, w_2, w_3) = 0$. Po roznásobení a sečtení dostaneme vektor $(\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1, \beta u_2 + \alpha v_2 + \gamma w_2, \alpha u_3 + \beta v_3 + \gamma w_3)$ = $(0, 0, 0)$, z čehož si určíme soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých. (v prostoru dimenze n platí, že dostaneme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých).

$\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = 0$
$\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 = 0$
$\alpha u_3 + \beta v_3 + \gamma w_3 = 0$

Stačí vyřešit tuto soustavu rovnic, a pokud bychom soustavu vyřešili, znamenalo by to, že vektory jsou lineárně závislé. V opačném případě, kdy bychom zjistili, že soustava nemá řešení, nebo by všechny neznámé vyšly rovny nule, znamenalo by to, že vektory jsou lineárně nezávislé.

Nicméně, dělat tento postup pokaždé, když potřebuji ověřit lineární závislost vektorů je velmi pracné. Snad možná v prostoru dimenze 2 to je ještě možné, ale jistě tento postup nebudeme aplikovat v prostoru dimenze n. Tuhle práci nám velice zpříjemňuje a usnadňuje právě Wronského matice, kterou můžeme použít i pro prostory dimenze n. Vektory samotné nám totiž představují řádky matice, stačí je tudíž jen přepsat. Použiji stejné vektory jako výše. Matice tedy bude vypadat následovně: $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$. No a pak už stačí jakoukoliv metodou, například Gaussovou eliminační metodou, matici upravit a zjistit její hodnost. Připomeňme si, jaké jsou povolené úpravy, které můžeme pro zjednodušení matice použít a co je vlastně Gaussova eliminační metoda. V jakékoliv matici můžeme libovolně zaměňovat řádky mezi sebou, výhodné je, pokud je to možné, mít v prvním řádku na prvním místě číslo 1. Dále můžeme vynásobit libovolný řádek libovolným číslem, třetí povolená úprava je vyškrtnutí řádku, který je lineární kombinací ostatních řádků, no a poslední a nejdůležitější úprava – můžeme k libovolnému řádku přičíst lineární kombinaci ostatních řádků. Gaussova eliminační metoda spočívá v tom, že pod hlavní diagonálu matice dostaneme různými ekvivalentními úpravami samé nuly. Upravíme takto tedy naši matici, pokud se hodnost matice nezměnila, znamená to, že vektory jsou lineárně nezávislé. Stalo se však, že nám během počítání nějaký řádek vypadl, vyškrtli jsme ho, či nějak jinak se nám změnila hodnost dané matice, můžeme s jistotou říct, že dané vektory jsou lineárně závislé.

Vektory jsem zde uvedl na začátek, abychom si dokázali představit, co se myslí lineární závislostí. Nicméně Wronského matice a její determinant mají mnohem významnější užití, co se týče zjištění lineární nezávislosti, a to v okruhu lineárních diferenciálních rovnic.

Lineární diferenciální rovnice jsou rovnice, které mají tvar: $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f_{(x)}$, kde y je neznámá funkce, n je řád diferenciální rovnice, x je neznámá proměnná, $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou koeficienty, a $f_{(x)}$ představuje pravou stranu rovnice. Pokud by se f_x rovnalo nule, byla by diferenciální rovnice homogenní. Běžně se lineární diferenciální rovnice vyskytují i parciální, to je s více nezávislými proměnnými. Jejich řešením je vektorový prostor. Naprosto stručně můžeme lineární diferenciální rovnici napsat pomocí diferenciálního operátoru L, který musí být samozřejmě lineární. Zápis pak vypadá následovně:L_y= f. Do závorky můžeme dopsat povahu funkce, například funkci času: $L_{f(t)}$ = f_t. V praxi se například pomocí lineární diferenciální rovnice počítá rychlost rozpadu radioaktivních atomů. Uvádět si přesnou rovnici a výpočet však nebudeme.

Před uvedením definice Wronského matice je zapotřebí uvést, co je soustava rovnic nulových funkcí. Máme nulovou lineární kombinaci: $c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n = 0$. Nulová funkce je diferencovatelná a všechny její derivace jsou taktéž nulové funkce. Tímto způsobem nám může vzniknout spousty rovnic, které pak uspořádáme do soustavy:

$$\begin{array}{ccccccccc}
c_1f_1 & + & c_2f_2 & + & \dots & + & c_nf_n & = & 0 \\
c_1f'_1 & + & c_2f'_2 & + & \dots & + & c_nf'_n & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \dots & & \vdots & & \vdots \\
c_1f_1^{(n-2)} & + & c_2f_2^{(n-2)} & + & \cdots & + & c_nf_n^{(n-2)} & = & 0 \\
c_1f_1^{(n-1)} & + & c_2f_2^{(n-1)} & + & \cdots & + & c_nf_n^{(n-1)} & = & 0
\end{array}$$

V maticové formě má soustava tvar:

$$\begin{pmatrix}
f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\
f'_1 & f'_2 & \cdots & f'_{n-1} & f'_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
f_1^{(n-2)} & f_2^{(n-2)} & \cdots & f_{n-1}^{(n-2)} & f_n^{(n-2)} \\
f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_{n-1}^{(n-1)} & f_n^{(n-1)}
\end{pmatrix} * \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{n-1} \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definice Wronského matice zní: „Jestliže funkce $f_1, f_2, \dots, f_n$ jsou diferencovatelné na intervalu I až do řádu n-1 včetně, pak na daném intervalu I je definována tzv. Wronská matice. Je to matice soustavy rovnic nulových funkcí, tj. funkce definována na I, která k danému $x \in I$přiřadí dále uvedenou matici: $W[f_1, \dots, f_n](x) =$

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_{n-1}(x) & f_n(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & \cdots & f'_{n-1}(x) & f'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-2)}(x) & f_2^{(n-2)}(x) & \cdots & f_{n-1}^{(n-2)}(x) & f_n^{(n-2)}(x) \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_{n-1}^{(n-1)}(x) & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$.“ Její determinant se nazývá Wronskián.

Jak už bylo řečeno na začátku, Wronskián je velice užitečný nástroj při zkoumání lineární nezávislosti funkcí. Tuhle jeho funkci popisují i následující věta: Nechť funkce $f_1, \dots, f_n$ jsou diferencovatelné na intervalu I až do řádu n-1 včetně, pak platí:

a) Jestliže $\exists x \in I(W[f_1, \dots, f_n](x) \neq 0)$, pak funkce $f_1, \dots, f_n$ jsou lineárně nezávislé na intervalu I.

b) Jestliže $\exists x \in I(W[f_1, \dots, f_n](x) = 0)$, pak funkce $f_1, \dots, f_n$ jsou lineárně závislé na intervalu I.

Na závěr udávám příklad, na kterém prakticky ukážu využití Wronského matice a jejího determinantu.

<u>Ukažte, že funkce $e^{\alpha x}$ a $xe^{\alpha x}$ jsou lineárně nezávislé na libovolném neprázdném intervalu I pro libovolné α</u>

Jako první si určíme derivace těchto dvou funkcí. Stačí nám prvního řádu.

$(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$

$(xe^{\alpha x})' = e^{\alpha x} + x\alpha e^{\alpha x}$

Nyní funkce a jejich derivace napíšeme do Wronského matice

W($e^{\alpha x}$, $xe^{\alpha x}$) = $\begin{pmatrix} e^{\alpha x} & xe^{\alpha x} \\ \alpha e^{\alpha x} & e^{\alpha x} + x\alpha e^{\alpha x} \end{pmatrix}$. Vypočítáme Wronskián, ten je roven číslu $e^{2\alpha x} \neq 0$. Jelikož Wronskián není roven nule, podle věty platí, že funkce jsou lineárně nezávislé na libovolném intervalu I.

1.2 Ludwig Otto Hesse

Život Ludwiga Otto Hesseho jsem čerpal z elektronického zdroje *Hesse biography – MacTutor history of mathematics*.[5]

Ludwig Otto Hesse, narozen dne 22. dubna 1811 v Königsbergu, byl německý matematik. Narodil se jako syn obchodníka a sládka. Vystudoval univerzitu ve svém rodném městě Königsbergu, kde byl vyučován profesorem Carlem Gustavem Jacobi Jacobim. Jeho dalšími učiteli byli například Friedrich Wilhelm Bessel nebo Friedrich Julius Richelot. Kromě přednášek z matematiky navštěvoval také přednášky z fyziky, které vyučoval profesor Ludwig Moser a Franz Ernst Neumann. Roku 1837 se stal vedoucím zkoušejícím učitelem matematiky a fyziky. Podnikl cestu přes Německo, Rakousko a Švýcarskou, kterou absolvoval pěšky. Na nově založené průmyslové škole Köningsberg učil fyziku a chemii.

V roce 1841 si vzal za ženu Marii Sophii Emilii Dulk, nejstarší dceru lékárníka a chemika, profesora Friedricha Philippa Dulka a sestru tehdejšího dramatika Alberta Dulka. Spolu měli jednoho syna a pět dcer.

Hesse začal učit roku 1840. Začínal jako odborný asistent na univerzitě Albertina. Roku 1845 se stal docentem, zpočátku nedostával žádný vládní plat. Při německé revoluci, roku 1848, se Hesse podílel na organizaci královské milice. Roku 1850 se stal zástupcem radního v Königsbergu. V roce 1855 se stal profesorem, nicméně tuto funkci zastával pouze rok. Když mu bylo nabídnuto křeslo v Heidelburgu, neváhal a přijal nabídku.

Zabýval se analytickou geometrií a determinanty. Zavedl Hessovu matici a její determinant.

1.2.1 Hessova matice

Následující text jsem čerpal z materiálů *Lokální extrémy funkcí více proměnných*, které využívají studenti ČVUT ke studiu[6] a *Matematika III: Základy optimalizace.*[7]

---

[5] *Hesse biography – MacTutor history of mathematics.* URLhttp://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Hesse.html, publikováno: srpen 2006

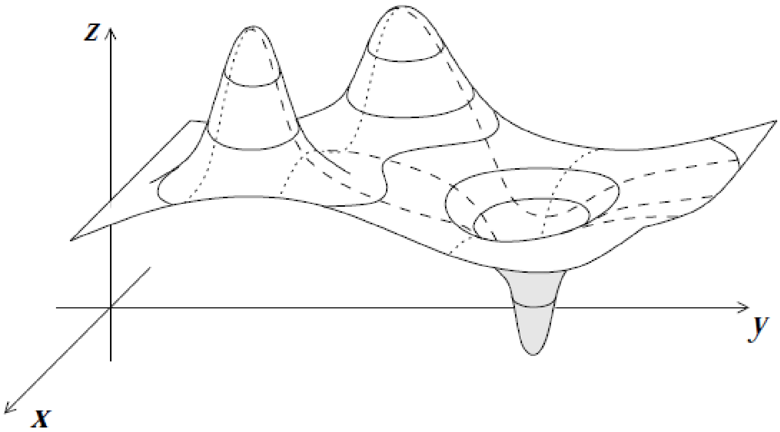
[6] *Funkce více proměnných – Lokální extrémy.* URL http://math.feld.cvut.cz/habala/teaching/mv/mv3.pdf, datum publikování není uvedeno.

[7] TURZÍK D., *Matematika III: Základy optimalizace.* 3. vydání Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999. ISBN 80-7080-363-0

Hessova matice se v matematické analýze používá k určení lokálních extrémů funkce. Definice lokálních extrémů funkce více proměnných zní: Nechť f je funkce definovaná na nějakém okolí bodu $x \in R^n$.

Řekneme, že f má v x lokální maximum nebo že $f_{(x)}$ je lokální maximum, jestliže existuje $U = U_{(x)}$ takové, že $f_{(x)} \geq f_{(c)}$ pro všechna $c \in U$.

Řekneme, že f má v x lokální minimum nebo že $f_{(x)}$ je lokální minimum, jestliže existuje $U = U_{(x)}$ takové, že $f_{(x)} \leq f_{(c)}$ pro všechna $c \in U$.



Graf č. 1 – graf funkce dvou proměnných

Na obrázku výše vidíme na levé straně dvě lokální maxima, na straně pravé jedno lokální minimum. Mezi dvěma lokálními maximy se nalézá „údolí“, které se nazývá sedlo. Body, které sedla tvoří, se běžně připlétají do vyšetřování lokálních extrémů, takže se berou jako součást šetření lokálních extrémů funkce.

Postup pro nalezení lokálních extrémů je jednoduchý. Prvním krokem je nalezení stacionárních bodů. Ty nalezneme tak, že určíme první derivaci funkce f‘x a první derivaci funkce f‘y. Pak již zderivované funkce položíme rovny nule a úpravami pro soustavu rovnic vypočítáme x a y. Vznikne nám tak bod nebo body, které mají souřadnice [x,y]. Tohle jsou stacionární body, které jsou podezřelé z lokálního extrému, musíme však ověřit, jestli se o extrém vůbec jedná, protože v opačném případě se jedná o sedlo.

Určíme derivace druhého řádu funkce f‘‘xx, f‘‘yy a smíšenou derivaci f‘‘xy. Stačí jen jedna, protože dle Schwarzovy věty víme, že jsou-li parciální derivace spojité, pak se smíšené derivace rovnají. Pro celé zjednodušení se zde budeme zabývat pouze spojitými funkcemi a spojitými parciálními derivacemi. Jakmile máme derivace druhého řádu spočítané, stačí dosadit do vzorce: f‘‘xx * f‘‘yy – (f‘‘xy)^2 Vyjde-li výsledek, který je větší než nula, pak nastává v tomto bodě extrém. Vyjde-li menší než nula, extrém nenastává, jedná se tudíž o sedlo. Pokud se stane, že výsledek je roven nule, nemůžeme určit, zda extrém nastává či ne, a musíme použít mnohem složitější metody ke zkoumání průběhu funkce, které zde však rozebírat nebudeme. Zda se jedná o maximum či minimum se dozvíme podle znaménka druhé derivace funkce f‘‘xx. Jestliže je hodnota větší než nula, v bodě nastává minimum, je-li hodnota menší než nula, nastává v bodě maximum.

Pro demonstraci postupu zde uvádím jeden příklad na počítání lokálních extrému funkce dvou proměnných.

Př. Najděte lokální extrémy funkce: f(x,y) = 1 + 6y – y^2 –xy – x^2

Nalezení stacionárních bodů: parciální derivace 1. řádu rovny nule.

f’x: -y – 2x = 0

f’y: 6 – 2y –x = 0

Dostaneme, že y = 4, x = -2. Stacionární bod, podezřelý z lokálního extrému, je tedy A = [-2,4]

Parciální derivace druhého řádu: f‘‘xx = -2, f‘‘yy = -2, f‘‘xy = -1.

Dosadíme do vzorce: D(x,y) = f‘‘xx * f‘‘yy – (f‘‘xy)^2 = -2 * (-2) – (-1)^2 = 3.

3 > 0 … V bodě A = [-2,4] nastává extrém.

Ověříme, zda se jedná o minimum či maximum. f‘‘xx(-2,4) = -2. -2 < 0 … v bodě A nastává maximum.

Vzorec, který zde uvádím pro určení, zda extrém nastává nebo nenastává, je v podstatě spočítání hodnoty determinantu. Všechny druhé derivace funkce jsou totiž uskupeny v tzv. Hessově matice, která má tvar: $\begin{pmatrix} f''xx & f''xy \\ f''yx & f''yy \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. V našem případě, kdy vyšetřujeme funkci dvou proměnných, se jedná o čtvercovou matici 2 x 2. Po určení znaménka determinantu výše zmíněné matice a následného určení znaménka derivace x podle x, můžeme celkem rychle a snadno vyšetřit lokální extrémy funkcí, a to nejen pro dvě proměnné, ale n proměnných. Hessova matice je vždy čtvercová, počet řádků a sloupců je závislý na počtu proměnných dané funkce a její obecný tvar vypadá následovně:

$$H(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} f''x_1x_1 & f''x_1x_2 & \cdots & f''x_1x_n \\ f''x_2x_1 & f''x_2x_2 & \cdots & f''x_2x_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f''x_nx_1 & f''x_nx_2 & \cdots & f''x_nx_n \end{pmatrix}.$$

Matici si můžeme rozdělit na tzv. subdeterminanty, které budeme značit Δ_n, kde n označuje hodnost daného subdeterminantu. Tak jako Hessova matice je vždy čtvercová, i všechny tyto subdeterminanty budou čtvercového tvaru. Začneme od levého horního rohu, $\Delta_1 = (f''x_1x_1)$,

$\Delta_2 = \begin{pmatrix} f''x_1x_1 & f''x_1x_2 \\ f''x_2x_2 & f''x_2x_2 \end{pmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{pmatrix} f''x_1x_1 & f''x_1x_2 & f''x_1x_3 \\ f''x_2x_1 & f''x_2x_2 & f''x_2x_3 \\ f''x_3x_1 & f''x_3x_2 & f''x_3x_3 \end{pmatrix}$ a tak dál až do Δ_n. A s těmito subdeterminanty budeme dále pracovat. Máme-li určené stacionární body, můžeme je ověřit právě v těchto subdeterminantech Hessovy matice. Je to obrovské ulehčení práce, zvláště když máme funkci více jak dvou proměnných. Sestavíme Hessovu matici, do které zapíšeme parciální derivace druhého řádu funkce. Dosadíme koeficienty stacionárního bodu a zjistíme znaménko všech daných subdeterminantů. Vyjde-li u všech subdeterminantů kladné znaménko, nastává v daném stacionárním bodu extrém, a konkrétně se jedná o lokální minimum. Jestliže ve stacionárním bodě nastává maximum, u daných subdeterminantů se budou znaménka střídat. $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, a tak to bude pokračovat až do Δ_n. Vyjde-li jakákoliv jiná kombinace znamének, pak v daném bodě extrém nenastává. U funkce dvou proměnných bychom takový stav nazvali sedlem. Výše zmíněné kritérium, které jsem nyní popsal, se nazývá Sylvestrovo kritérium:

Nechť f je definováno a má spojité derivace druhého řádu na nějakém okolí bodu c, který je pro f stacionární, tedy $\Delta f_{(c)} = 0$.

Nechť H je Hessova matice f v bodě c, nechť Δ_i jsou její levé horní subdeterminanty.

Jestliže $\Delta_i > 0$ pro všechna i, pak v bodě c nastává lokální minimum.

Jestliže $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$ a tak dál až do $(-1)^n\ \Delta_n > 0$ pak nastává v bodě c lokální maximum.

Opět zde uvádím příklad, ve kterém prakticky uvidíme shrnutí výše uvedené teorie.

<u>Příklad: $f(x, y, z) = 2xy^2 - 4xy + x^2 + z^2 - 2z$</u>

Jako první opět nalezneme stacionární body – parciální derivace prvního řádu rovny nule.

f'x: $2y^2 - 4y + 2x = 0$

f'y: $4xy - 4x = 0$

f'z: 2z – 2 = 0

Ze třetí rovnice můžeme ihned odvodit, že z = 1. Ve druhé rovnici vytkneme x, a dostáváme: x* (4y – 4) = 0, z čehož dostáváme, dvě možnosti, a to x = 0 nebo y = 1.

Dosadíme do první rovnice za y= 1, a dostaneme: 2 – 4 + 2x = 0, z čehož plyne, že x = 1.

Máme první stacionární bod: A = [1,1,1].

Dosadíme do první rovnice za x = 0, a dostáváme: $2y^2 - 4y = 0$. Zde dostáváme dvě řešení, a to y = 0 nebo y = 2. Dostáváme tedy další dva stacionární body: B = [0,0,1] a C = [0,2,1].

Určíme si parciální derivace druhého řádu, díky vlastnosti, že smíšené derivace jsou stejné, stačí nám, když si jich určíme jen šest.

f''xx = 2, f''xy = 4y – 4, f''xz = 0

f''yy = 4x, f''yz = 0

f''zz = 2

Napíšeme Hessovu matici: H(x,y,z) = $\begin{pmatrix} 2 & 4y-4 & 0 \\ 4y-4 & 4x & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. A nyní dosadíme bod podezřelý z extrému a určíme znaménka jednotlivých subdeterminantů.

A = [1,1,1,], H(1,1,1) = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, Δ_1 =(2) = 2, Δ_2 = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ = 8, Δ_3 = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ = 16.

Všechna tři znaménka jsou kladné, v bodě A = [1,1,1] nastává extrém a jedná se o minimum.

B = [0,0,1], H(0,0,1) = $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, Δ_1 =(2) = 2, Δ_2 = $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ = -16, Δ_3 = $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ = -32. Znaménka jsou v pořadí plus, mínus, mínus. V tomto bodě tedy extrém nenastává.

C = [0,2,1], H(0,2,1) = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, Δ_1 =(2) = 2, Δ_2 = $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ = -16, Δ_3 = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ = -32.

Znaménka jsou opět v pořadí plus, mínus, mínus, stejně jako v předchozím bodě. I tady extrém nenastává.

Vyšetřili jsme tedy, že daná funkce tří proměnných má v bodě A = [1,1,1] lokální minimum. V ostatních dvou bodech extrém nenastává. U funkce dvou proměnných bychom tohle chování definovali jako sedlo.

1.3 Carl Gustav Jacob Jacobi

Životopis Carla Gustava Jacobiho jsem čerpal z internetového zdroje *Jacobi biography – MacTutor history of mathematics.*[8]

Carl Gustav Jacob Jacobi se narodil 10. prosince 1804 v Postupimi, na území tehdejšího Pruska. Byl židovského původu. Vystudoval Humboldtovu univerzitu v Berlíně, kde roku 1825 získal titul doktora filozofie. Svou disertační práci psal na téma „Analytické rozebírání teorie zlomků.“ O pár let později na Königsberské univerzitě, získal místo řádného profesora.

Roku 1843 prodělal Carl Gustav Jacob Jacoobi kolaps následkem přepracování. Odjel se zotavit do Itálie, kde se seznámil s německým matematikem Dirichletem. Jacobi studoval matematiku na základě prací Eulera, Lagrangea a Laplacea. Jeho práce se dotýkají mnoha oblastí matematiky – teorie funkcí, teorie čísel lineární algebry, teorie diferenciálních rovnic, analytické mechaniky.

Jeho první práce nesla název: „Nové základy eliptických funkcí.“ Byla tehdy velice užitečná pro tehdejší matematickou fyziku. Jako první své poznatky o eliptických křivkách začal využívat v teorii čísel. Roku 1830 získal za svou práci ocenění pařížské Académice des Sciences. Téhož roku se také stal členem petrohradské Imperátorské akademie věd, a roku roku 1832 získal členství v londýnské Royal Society.

Velice významná je i Jacobiho práce „O tvorbě a vlastnostech determinantů“, kde popsal funkcionální determinant, v dnešní době zvaný Jacobián. Dále v matematice přispěl mnoha pojmy, a také zavedl systém značení parciálních derivací vyšších řádů. Věnoval se i mechanice, kde se zabýval řešením problému dvou těles.

Jacobi zemřel 18. ledna 1850 v Berlíně. Osudné se mu staly neštovice. Hrob má v Berlíně blízko hrobu Johanna Enckeho – známého astronoma. V dnešní době je také po Jacobim pojmenován kráter na Měsíci – „Jacobi.“

---

[8] *Jacobi biography – MacTutor history of mathematics*
URL http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Jacobi.html, publikováno: leden 2000

1.3.1 Jacobiho matice, Jacobián

Následující text jsem čerpal ze zdrojů *Diferencovatelná zobrazení a transformace souřadnic*[9], *Substituce v dvojném integrálu* (materiály pro studenty ČVUT)[10] a *Matematika II ve strukturovaném studiu.*[11]

Poslední maticí, o které budu mluvit, využívající se v matematice a fyzice, je Jacobiho matice a její determinant zvaný Jacobián, který má své rozsáhlé využití zejména v problematice vícerozměrných integrálů a aproximace složité funkce funkcí jednodušší. Pomocí integrálů můžeme snadno spočítat obsah dané oblasti, nicméně máme-li počítat s dvojnými integrály, výpočet nemusí být vždy až tak úplně jednoduchý. V mnoha případech se proto místo klasických kartézských souřadnic pro popsání bodu v rovině, používají jiné, a to polární souřadnice. Bod je tak určen vzdáleností δ od počátku a orientovaným úhlem φ. Ten svírá polohový vektor bodu s kladnou částí osy x. Vztah mezi [x,y] a $[\delta, \varphi]$ je dán následovně: x = $\delta \cos \varphi$ a y = $\delta \sin \varphi$, kde platí, že $\delta\ > 0, \varphi\ \in < 0{,}2\pi >$. Na polární souřadnice můžeme pohlížet jako na zobrazení roviny do roviny ($R^2 \rightarrow R^2$). Dostáváme tedy $\sigma(\delta, \varphi) = (\delta \cos \varphi, \delta \sin \varphi)$, což v našem případě je zápis vektoru v rovině.

Nyní se již dostáváme přímo k Jacobiho matici a Jakobiánu. Definice říká: „Nechť G c R^n je otevřená množina a nechť $\sigma\colon G \rightarrow R^n$ je zobrazení, $\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \sigma_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \sigma_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ \sigma_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$. Jestliže všechny složky $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ mají spojité parciální derivace prvního řádu podle všech proměných $x_1, x_2, \dots, x_n$, říkáme, že zobrazení σ je třídy C^1 na G. Je-li σ třídy C^1 na G,

matice $J_\sigma = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \sigma_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \sigma_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \sigma_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ se nazývá Jacobiho matice zobrazení σ. Funkce

$\Delta_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = \ |\det J_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n|$ se nazývá Jakobián zobrazení σ.

---

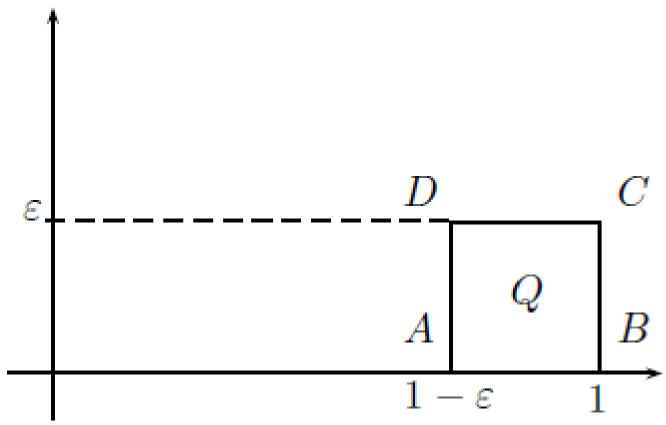
[9] *Diferencovatelná zobrazení a transformace souřadnic,* kapitola 10.
URL http://analyza.kma.zcu.cz/PREDMETY/M2_MA2/zaznamy/MA2_Xhh_Transformace_souradnic.pdf, vydáno: 2009, analyza.KMA.zcu.cz

[10] *Substituce v dvojném intergrálu,* kapitola 3.
URL https://math.feld.cvut.cz/tiser/iweb3.pdf, datum publikování není uvedeno.

[11] TURZÍK D. *Matematika II ve strukturovaném studiu.* 1. vydání Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2005. ISBN 80-7080-555-2

Jak jsem již psal na začátku, díky Jacobiho matici můžeme aproximovat složitou funkci jednodušší funkcí. Typickým příkladem může být například rozvoj funkce do Taylorovy řady. Taylorův vzorec má tvar: $f_{(x)} = f_{(x_0)} + f'_{(x)} * (x - x_0) + R(x - x_0)$. Pro naše účely postačí tyto první dva členy. Taylorův polynom samozřejmě pokračuje dál, kdy další člen je

$\frac{f''_{(x)}}{2!} * (x - x_0)^2 + \frac{f'''_{(x)}}{3!} * (x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}_{(x)}}{n!} * (x - x_0)^n$. Pro naše účely je ale zbytečné, abych tu psal další členy. $R(x - x_0)$ je chyba v nahrazení vzorce, která vzniká právě tím zjednodušením složité funkce. $f'_{(x)} * (x - x_0)$ je afinní funkce a nahrazuje téměř přesné chování funkce. Ve vícerozměrných případech nám tuhle funkci může nahradit právě Jacobiho matice. Funkce pak vypadá následovně: $\sigma_{(x)} = \sigma_{(x_0)} + J_\sigma(x_0) * (x - x_0) + R(x - x_0)$. V rovině, v zobrazení $R^2 \rightarrow R^2$ vypadá zobrazení následovně. Díky tomuto jednoduchému dosazení a nahrazení, můžeme velice snadno aproximovat souřadnice (body), díky čemuž budeme schopni snadněji spočítat obsah zadaného obrazce.



Graf č. 2 – zadaný obrazec v rovině

Máme zobrazení σ: $R^2 \rightarrow R^2$, které má předpis $\sigma_{(x,y)} = (x^2 - y^2, 2xy)$ a čtverec Q o straně ε, $Q = < 1 - \varepsilon, 1 > \times < 0, \varepsilon >$. Čtverec Q je vyobrazený na obrázku s vrcholy ABCD. Body AB jsou tvaru $< t, 0 >$, kde $t \in < 1 - \varepsilon, 1 >$. Zobrazení těchto bodů je potom rovno $\sigma_{(t,0)} = (t^2, 0)$. Body BC mají tvar $(1, t), t \in < 0, \varepsilon >$. Jejich obraz má tvar $\sigma_{(1,t)} = (1 - t^2, 2t)$. V tomto případě se jedná o parametrický zápis oblouku paraboly. Dále body CD, ty mají tvar (t, ε), kde $t \in < 1 - \varepsilon, 1 >$, jejich zobrazení je $\sigma_{(t,\varepsilon)} = (t^2 - \varepsilon^2, 2t\varepsilon)$. A poslední body DA, ty mají tvar $(1-\ \varepsilon, t)$, pro $t\ \in <0, \varepsilon>$. Obraz bodů DA má následující tvar: $\sigma_{(1-\varepsilon,t)} = [(1-\ \varepsilon)^2 - \ t^2, 2t(1-\ \varepsilon)]$.

Pro lepší přehled zde výše spočítané zobrazení zopakuji:

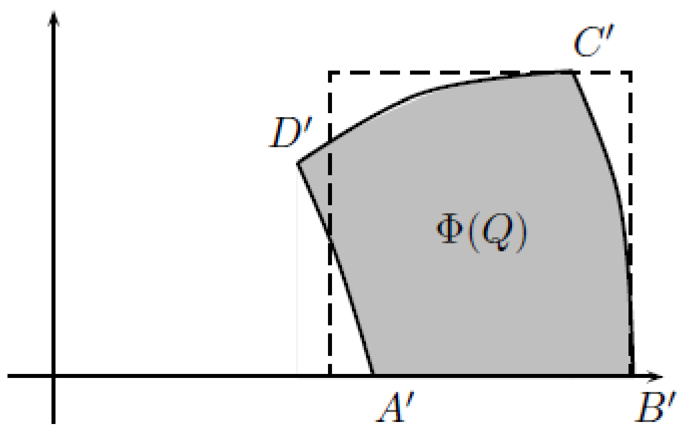
Obraz bodů AB: $\sigma_{(t,0)} = (t^2, 0)$.

Obraz bodů BC: $\sigma_{(1,t)} = (1-\ t^2, 2t)$.

Obraz bodů CD: $\sigma_{(t,\varepsilon)} = (t^2 -\ \varepsilon^2, 2t\varepsilon)$.

Obraz bodů DA: $\sigma_{(1-\varepsilon,t)} = [(1-\ \varepsilon)^2 - \ t^2, 2t(1-\ \varepsilon)]$.

Na obrázku se můžeme podívat, jak vypadá náš zobrazený čtverec. Ten čárkovaný je aproximované zobrazení.



Graf č. 3 – obraz obrazce, aproximované zobrazení

Nyní nahradíme σ na čtverci Q afinním přiblížením. Zvolíme si libovolný pevný bod, může to být opravdu jakýkoliv bod ze čtverce. Například bod $[x_0, y_0] = \ [1, 0]$, což je v našem případě vrchol B. Z vlastností afinního prostoru víme, že zobrazený čtverec bude rovnoběžník, proto stačí, když si určíme, kam se zobrazí vrcholy ABCD zadaného čtverce Q. Jacobiho matice má v tomto případě tvar $J_\sigma(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 & -2y_0 \\ 2y_0 & 2x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Položíme $\sigma_0(x, y) = \ \sigma(x_0, y_0) + \ J_\sigma(x_0, y_0) * (x -\ x_0, y -\ y_0)$. Takže, když dosadíme, dostáváme následující funkci: $\sigma_{(x,y)} = \ \sigma_{(1,0)} + \ J_\sigma(1, 0) * (x-1, y-0) = (1, 0) + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} * (x-1, y) = (1, 0) + (2x-2, 2y) = (2x-1, 2y)$.

Poté dosadíme původní body, z čehož snadno určíme, že: $\sigma_0(A) = (1 - 2\varepsilon, 0), \sigma_0(B) = (1, 0), \sigma_0(c) = (1, 2\varepsilon), \sigma_0(D) = (1 - 2\varepsilon, 2\varepsilon)$.

Můžeme si všimnout na obrázku, že čím menší bude zadaný čtverec Q, tím menší budou i rozdíly mezi zobrazeným obrazcem a aproximovaným obrazcem, z čehož vyplývá, že bude menší i rozdíl mezi jejich obrazci.

Jacobiho matice má ještě mnoho dalších využití, kterými se zde zabývat nebudu. Samotná Jacobiho matice by stačila jako téma na bakalářskou práci. Jen v kostce uvedu, že se díky Jakobiánu dá vyvodit obecný vzorec pro transformaci souřadnic. To, co jsme si ukazovali výše je jen takový úvod, takové nakousnutí celého tohoto velkého tématu. Nicméně, pro tuto práci bude stačit popsané největší využití Jakobiánu, a to je právě při transformaci souřadnic a aproximaci složité funkce jednodušší.

1.4 Matice v kvantové mechanice

Následujíc text jsem čerpal z internetového zdroje *Základy kvantové teorie*[12]

Kvantová mechanika je teoretický model, zabývá se kvantovým modelem atomů a molekul. Jako každá teorie, i teorie kvantové mechaniky vychází z několika výroku, v této situaci nazývanými jako postuláty, které se společnost nesnaží nijak dokazovat, ale jsou definovány tak, aby byly srozumitelné a bez nějakých vnitřních rozporů. V této kapitole představím právě některé z postulátů, při kterých se vždy matice vyskytují, a také zmíním Pauliho matici, která s kvantovou mechanikou hodně souvisí.

1.4.1 Postulát č. 1 – Stav soustavy a stavový vektor

„Stav soustavy lze popsat vektorem z Hilbertova prostoru." Tohle je znění prvního postulátu. Vlastně nám říká, že chceme-li popsat fyzikální soustavu v reálném čase, stačí nám k tomu jeden vektor, který definujeme v nějakém prostoru. Tomuto vektoru se říká stavový vektor, a od klasických vektorů, které známe z matematiky, se liší hned ve dvou základních vlastnostech. Prostor, ve kterém je definovaný stavový vektor může mít jakýkoliv počet dimenzí, klidně i nekonečný, a na rozdíl od klasických reálných vektorů jsou stavové vektory vždy v komplexním tvaru. Společnou vlastnost mají takovou, že stejně jako můžeme klasický vektor v trojrozměrném prostoru vyjádřit lineární kombinací tří nějakých vektorů, i stavový vektor můžeme vyjádřit lineární kombinací určitého počtu stavových vektorů. Chceme-li tedy zapsat stavový vektor jako lineární kombinaci jiných stavových vektorů, použijeme k tomu právě maticového zápisu, který poté usnadňuje další kroky.

$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 cos\varphi_1 + ia_1 sin\varphi_1 \\ a_2 cos\varphi_2 + ia_2 sin\varphi_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$. Podle počtu zvolených vektorů můžeme potom určit dimenzi Hilbertova prostoru. Jednotlivé prvky matice mají komplexní tvar zejména proto, protože popisují amplitudy pravděpodobnosti pro jednotlivé pozorovatelné veličiny elementárních částic.

Velmi důležitou vlastností vektorového prostoru je skalární součin, který je v Hilbertově prostoru definovaný obdobně jako v reálném prostoru. Celý skalární součin můžeme velice jednoduše vyjádřit pomocí matic. Zde se ještě trošku pozastavím, protože pro lehčí a kratší zápis vektorů v komplexním tvaru, budu tyto vektory zapisovat v následujícím

[12] *Základy kvantové teorie,* http://www.ncbr.muni.cz/~lzidek/C6770/C6770_intro_cz.pdf, datum publikování není uvedeno

tvaru: $a_1 cos\varphi_1 + i a_1 sin\varphi_1 = a_1 e^{i\varphi_1}$. Skalární součin lze tedy zapsat takto:

$\langle b|c\rangle = (a_{b1}e^{-i\varphi_{b1}} \quad a_{b2}e^{-i\varphi_{b2}} \quad \cdots) * \begin{pmatrix} a_{c1}e^{i\varphi_{c1}} \\ a_{c2}e^{i\varphi_{c2}} \\ \vdots \end{pmatrix}$. První vektor je nahrazen, místo původního sloupcového vektoru je v skalárním součinu dosazen vektor řádkový, což je k vektoru v jeho komplexně sdružený vektor b*. Z toho vyplývá důležitá vlastnost, a to ta, že $\langle b|c\rangle \neq \langle c|b\rangle$, ale oba skalární součiny jsou vzájemné komplexně sdružené.

1.4.2 Postulát č. 2 – Měřitelná veličina a hermitovský operátor

Druhý postulát říká, že měřitelnou fyzikální veličinu lze popsat hermitovským operátorem působícím v Hilbertově prostoru. Operátorem rozumíme matematický předpis, který přiřazuje vektor k druhému vektoru. Tento vztah je pak dán násobením matic, kdy operátor je vždy čtvercová matice. Počet jejích prvků je závislý na dimenzi Hilbertova prostoru. V matematickém zápisu tedy může daná operace pro dvojstavovou situaci vypadat následovně: $\begin{pmatrix} b_\alpha \\ b_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} C_\alpha \\ C_\beta \end{pmatrix}$. Stejně jako pro stavové vektory platí, že jejich prvky jsou v komplexním tvaru, jsou i prvky operátoru ve tvaru komplexním a také se pro ně očekává, že bude platit: $A_{ij} = A_{ji}^*$. Hermitovské operátory jsou takové operátory, pro které platí tato rovnost.

Z definice pro sčítání matic vyplývá, že každý operátor můžeme získat lineární kombinací matic, které nejsou vzájemně lineárně závislé, pro náš případ se tedy jedná o 4 matice. Jako příklad si můžeme uvést: $\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} =$

$= A_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + A_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tímto můžeme definovat lineární prostor operátorových matic, který bude vždy druhá mocnina dimenze příslušného prostoru stavových vektorů.

1.4.3 Postulát č. 3 – Možné výsledky měření a vlastní hodnoty operátorů

Třetí postulát říká, že naměřená hodnota veličiny A musí být jednou z vlastních hodnot operátoru $\hat{A}$, který ji reprezentuje. Působením operátoru na stavový vektor můžeme dostat vektor nulový, nicméně existují vektory, které se příliš nezmění. Takové se nazývají vlastní vektory operátoru a násobící konstanty jsou nazývány vlastními hodnotami operátoru. Ukážeme-li si tento vztah v maticovém tvaru, vypadá následovně:

$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{v_1} \\ \delta_{v_2} \end{pmatrix}$, kde po úpravě odstaneme: $\begin{pmatrix} A_{11} - \delta & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \delta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0.$ Vlastní hodnoty δ_1 a δ_2 jsou kořeny kvadratické rovnice. Vlastní hodnoty jsou vždy reálné číslo, je to z důvodu, že každá dvojice A_{ij} a A_{ji} je komplexně sdružená, proto musí být diagonální prvky reálné.

1.4.4 Pauliho matice

Dalšími postuláty se již zabývat nebudu, mým cílem v této bakalářské práci není psát o všech využitích matic a popsat naprosto vše, kde se matice využívají, mým cílem je ukázat široké využití matic, popsat nějaké základy, kde se matice využívají, aby si člověk pak sám udělal obrázek, jak velké pojetí matice vlastně představují.

Na závěr této kapitoly ještě zmíním Pauliho matici, která se také používá v kvantové mechanice. Je pojmenována po Wolfgangu Paulim. Pauliho matice představují množinu 2 x2 komplexních hermitovských matic, které jsou ve tvaru:
$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ a $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Tyto matice mají tu vlastnost, že pokud jakoukoliv z nich vynásobíme sebou samou, dostaneme vždy matici jednotkovou. Determinant těchto matic je -1. Pokud se k těmto třem Pauliho maticím přidá jednotková matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, společně tvoří ortogonální bázi.

Ve fyzice představuje každá tato matice pozorovatelnou popisující orientaci spinu (kvantová vlastnost elementárních částic, jedná se o vnitřní moment hybnosti částice) částice se spinem $\frac{1}{2}$.

2 Využití matic ve stavebnictví

Od oboru matematika a fyzika se nyní vzdálíme, ne však daleko, protože si nyní popíšeme nějaké případy, kde se matice využívají ve stavebnictví. Opět zde nebudu uvádět naprosto všechny případy, kdy se ve stavebnictví vyskytují matice, ale zaměřím se na matice ve stavebním inženýrství, statice a pak pro zajímavost uvedu matici, která se využívá v předinvestiční fázi výstavbového projektu.

2.1 Matice v přípravné fázi výstavbového projektu

Následující text jsem čerpal z internetového článku *Bezpečnost a rizika ve výstavbě*.[13]

Rizika staveb a obor stavebnictví jsou spolu velmi úzce spjaty. Rizika jsou přítomna při jakémkoliv novém i starém projektu, při nové výstavbě, rekonstrukci, ale i demolici. Nás bude především zajímat právě rekonstrukce či výstavba. Z obecného hlediska lze rizika, které pracovníky potkávají, rozdělit do dvou základních skupin, a to rizika technická (rizika staveb) a rizika sociální, politická, ekonomická a demografická. U rizik technických si jistě každý snadno domyslí, že se jedná o rizika spjaté s úrovní dané budovy, s jejím technickým stavem, bezpečností atd. Do druhé skupiny rizik spadá spíše okolí staveb. Musí se vzít v potaz lidé a jejich zvyklosti, pro které má budova plnit nějaký účel. Musíme zhodnotit riziko spojené s politickou situací v dané oblasti, a různé další. Bez toho by se mohlo klidně stát, že se postaví supermarket v oblasti, kam lidé vůbec nejezdí ani v okolí nebydlí, popřípadě by budova nebyla ani povolena k výstavbě, protože by neodpovídala danému politickému režimu, atd. Je tedy důležité před začátkem projektu, ať už se jedná o novostavbu nebo rekonstrukci, zvážit celková rizika, která jsou s projektem spojená. Jistě to znamená to, že investoři nepřijdou zbytečně o své peníze.

Velmi často využívanou metodou je tak zvaná riziková analýza. Jedná se o metodu, kterou používáme každý z nás, každý den. I když podvědomě. Pracovně se tato metoda nazývá UMRA – univerzální matice rizikové analýzy. (anglicky: universal matrix of risk analysis). Obecně řečeno se dá říct, že je tato metoda založena na principu srovnávací logicko-numerické analýzy hodnocení závažnosti nebezpečí pro projekt nebo jeho dílčí část týmem expertů. V praxi může být i více týmů, které pracují na stejném objektu, ale přitom

---

[13] KUBEČKA, Karel, *Bezpečnost a rizika ve výstavbě* [online]. Časopis *Stavebnictví*, vydáno: únor 2010.
URL http://www.casopisstavebnictvi.cz/vyuziti-metod-analyzy-rizik-v-procesu-rozhodovani-o-vhodnosti-sanace_N3101

nezávisle na sobě. Každý tým je veden jedním rizikovým analytikem. Naprosto nejjednodušší situace, která může nastat, je tým složený pouze z jednoho experta, a ten je i zároveň rizikovým analytikem. Celé zhodnocení je rozděleno do dvou etap, které jsou pracovně pojmenovány jako UMRA 1 a UMRA 2.

První fáze (UMRA 1), které je odborně nazývané jako identifikace ohrožených segmentů a identifikace zdrojů nebezpečí, začíná tím, že se rizikový analytik detailně seznámí s projektem, co se týče hlavně technické stránky (statická způsobilost objektu, atd.). Dále s projektem seznámí svůj tým expertů, hlavně jim vysvětlí podstatu metody a úkol metody. Je to proto, že experti jsou zkrátka profesionálové ve svém oboru, ale nemají znalosti a mnohdy ani představu o různých metodách, které využívá riziková analýza. Od toho je tady právě rizikový analytik, který zde vystupuje jako osoba znalá. Svůj tým seznámí s významem jednotlivých segmentů projektu včetně zásad členění a taky s významem zdrojů nebezpečí včetně zásad členění, vysvětlí jim způsob vyplnění formuláře a různé další věci, které jsou nezbytné pro hladké splnění práce expertů. Formulář vytváří vždy rizikový analytik, dá ho svému týmu a nechá ho, aby do formuláře doplňoval různé své připomínky a poznámky, až dokud nevytvoří finální podobu dotazníku, na kterém se všichni shodnou. Jednotlivé části projektu být na sobě existenčně nebo sekvenčně závislé, nikdy však ne fyzicky. Naopak je tomu u zdrojů, ty mohou být na sobě závislé pouze existenčně. Rizikový analytik nechá svůj tým dotazník vyplnit a poté jej sám vyhodnotí. Tímto je ukončená první etapa (UMRA 1), kdy má rizikový analytik definované segmenty hodnoceného projektu a fáze stavebního procesu, ve kterých je zvýšené riziko poruchy a následně kolapsu celého projektu, což nepochybně vede i k obrovské ekonomické ztrátě.

První krok ve druhé fázi (UMRA 2) je vytvoření či úprava stupnice závažnosti nebezpečí. Může obsahovat 1, 2, …, n stupňů nebezpečí, kdy jednotlivý stupeň je zaškatulkován do určitého kritéria. Například stupeň bude znamenat mírné nebezpečí, jeho kritérium bude mírný vliv na cenu nebo lhůtu rekonstrukce, nevyžaduje více než běžnou opravu nemovitosti. Takhle rizikový analytik vytvoří n počet stupňů, podle toho, jak uzná za vhodné, přičemž může použít i stupeň 0, který bude znamenat, že nevyžaduje žádná opatření a jakýkoliv vliv je zanedbatelný. Je však na analytikovi, jakou číslicí začne. Taková tabulka může vypadat např. následovně:

Nebezpečí	Realizace nebezpečí	Stupeň závažnosti Sv
Nepatrné	Konstrukce je v pořádku, nevyžaduje prakticky žádná opatření, není nutná sanace na zajištění statické bezpečnosti stavby.	0
Malé	Konstrukce je takřka v pořádku, bezvadného stavebně-technického a statického stavu lze dosáhnout běžnou údržbou a ekonomicky odůvodnitelnými náklady	1
Střední	Vyžaduje zvýšené náklady na sanaci, která má zajistit statickou bezpečnost stavby, ekonomické náklady jsou vysoké, na samé hranici ekonomické odůvodnitelnosti.	2
Velké	Konstukce je ve velmi špatném, stavebně-technickém a statickém stavu, není vyloučen havarijní stav konstrukce. Sanace vyžaduje velmi vysoké náklady, které jsou ekonomicky neodůvodnitelné a pravděpodobně převyšují náklady na novou stavbu.	3

tabulka č. 1 – tabulka obsahující stupně závažnosti nebezpečí

Dále už je to na expertech, jak daný formulář vyplní podle těchto stupňů rizik. V praxi mají možnost nechat buňku prázdnou, a to pokud nastane situace, že expert nedokáže nebezpečí korektně zhodnotit nebo když současný souběh segmentu x zdroje není logicky možný. Po vyplnění formuláře se spočítá individuální součinitel vnímání nebezpečí, který lze stanovit pro každého experta zvlášť. Individuální součinitel vnímání nebezpečí je dán vztahem: $P_{c_k} = \frac{\overline{\sum_{\iota J} S^E_{v_{\iota J k}}}}{S_{v_{max}} * n^E_{act,k}}$.

k označuje jednoho z expertů

i, j, je daná buňka v matici

S_v označuje stupeň závažnosti

$S_{v_{max}}$ je nejvyšší hodnota (nejvyšší stupeň) závažnosti

$n^E_{act,k}$ značí počet vyplněných buněk matice

$\overline{\sum S_v}$ značí, že se budou sčítat jen hodnoty buněk, které jsou vyplněny.

Vyplněný formulář může mít např. následující podobu:

Projekt	Obytné domy										
Aspekt	**Posouzení stavebně konstrukčního a statického stavu objektu**										
	Zdroje nebezpečí										
Experti	Deska stropu nad 1. PP mezi trámy	Deska stropu nad 1. PP ve vetknutí	Trámy stropu nad 1. PP	Věnec z interiéru v místě vetknutí desky	Obvodová betonová stěna suterénu	Štítová betonová stěna	Střední nosná betonová stěna v suterénu	Komínová tělesa v suterénu	Věnce a ostění okenních otvorů z exteriéru	Zdivo schodišťového prostoru	Součet
Expert 1	1	1	2	1	2	1	2	3	2	0	15
Expert 2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	0	17
Expert 3	1	2	2	2	2	2	2	2	2	0	17
Expert 4	1	1	2	1	2	2	3	3	2	1	18

Tabulka č. 2 – formulář pro ocenění hodnoty závažnosti nebezpečí pro jednotlivé části projektu

Po dosazení a spočítání výše uvedeného vztahu dostane analytik koeficient, který označuje míru, do jaké se danému expertovi zdá, že je projekt rizikový. Nevýhodou zde je, že tento výsledek není objektivní, ale je subjektivně ovlivněn vnímáním a vlastními zkušenostmi daného experta. Tato subjektivita se dá však zčásti eliminovat větším týmem expertů popřípadě více skupinami pracujícím na stejném projektu, ale nezávisle na sobě.

Po vypočtení individuálního součinitele vnímaného nebezpečí pro každého experta následuje vyhodnocení celé této metody, kde dojde i ke zvážení, zda stojí za to daný objekt rekonstruovat nebo raději zbourat. Postup vyhodnocení zde popisovat nebudu, ale uvedu zde, že se v praxi využívají dvě metody, a to Hodnocení souboru objektů ze staticko-konstrukčního pohledu metodou UMRA, kde se bere v potaz hlavně procento opotřebení daného objektu, a na základě toho se investor a tým rozhodne, co s danou nemovitostí udělat, nebo druhá metoda, Hodnocení staticko-konstrukčního pohledu pravděpodobnostní metodou, což je hodnocení pomocí histogramů, tedy podle zásad pravděpodobnosti.

2.2 Kriteriální matice ve znaleckém oceňování stavebních objektů

Text o kriteriální matici a různých metodách spojených s kriteriální maticí jsem čerpal z internetových zdrojů *Kriteriální matice ve znaleckém oceňování stavebních objektů,* Jaroslav Chovanec[14] a *Vícekriteriální hodnocení variant – metody*, Jana Klicnarová[15]

V této kapitole se budu zabývat maticí variant a kritérií, které se běžně říká matice kriteriální, a jejím využitím ve znaleckém oceňování stavebních objektů. Na úvod, si myslím, že je nejvhodnější popsat, co vlastně kriteriální matice je. Můžeme si ji představit jako množinu všech variant a kritérií, kdy sloupce představují kritéria a řádky varianty. V praxi je naprosto jedno, jestli to bude tak nebo jestli řádky za sloupce zaměníme, záleží na daném člověku, jak kriteriální matici vytvoří. Důležité ale je, že jedna skupina bude představovat kritéria a druhá varianty. Jednotlivé složky dané matice pak tvoří tzv. váhy, čímž je vlastně vyjádřena síla kritéria, kterou ovlivňuje posuzovanou variantu. Můžeme i říci, že díky váhám se od sebe odlišují kritéria dle své významnosti. Čím je nějaké kritérium významnější, tím větší má váhu. Běžně v praxi se pracuje s nezápornými čísly vah, a často se i klade důraz na to, aby byly váhy tzv. normované, což znamená, že jejich součet musí být roven 1.

Matice má tu skvělou vlastnost, že když do ní napíšu všechny kritéria a varianty, a pak vyplňuji dané váhy, tak vždy budu porovnávat každý s každým, takže každá varianta je hodnocena dle každého kritéria. Každé přidělení vah je učiněno na základě prozkoumání míry působení daného kritéria na danou variantu. Některé varianty si mohou být i blízké, tudíž i jejich váhy budou velmi podobné. V praxi to určuje i to, že výsledné hodnoty dosažené při jejich použití se o moc neliší.

Běžným problémem, který se objevuje právě při sestavování kriteriálních matic, je stanovení variant a kritérií. V matici se nám totiž mohou vyskytnout varianty, které nejsou ovlivněny nějakým kritériem, těmto je pak přidělena váha nula. Jako jeden z důležitých cílů, který by si měl člověk, co sestavuje kriteriální matici dát, je, aby dokázal napsat úplný výčet kritérií, což však v praxi není někdy úplně možné. A pokud už ano, tak je to hodně vyčerpávající a zdlouhavé. Chce to tedy jistě pevné nervy a spoustu času. Proto jsou mnohdy

---

[14] Ing. CHOVANEC Jaroslav, *Soudní inženýrství,* kapitola: *Kriteriální matice ve znaleckém oceňování stavebních objektů.* *http://www.sinz.cz/archiv/docs/si-2005-04-237-239.pdf. Publikováno jako příspěvek doktorandské konference JUNIORSTAV na fakultě stavební VUT v Brně, dne 2. 2. 2005.*

[15] KLICNAROVÁ Jana, *Vícekriteriální hodnocení variant – metody*, Katedra aplikované matematiky a informatiky, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Ekonomická fakulta. http://home.ef.jcu.cz/~janaklic/oa_zsf/VHV_II.pdf. Publikováno r. 2010

kritéria konzultovány s více odborníky, kteří mají třeba i mnohaleté zkušenosti, a dokáží snadněji popsat všechny vlivy, které působí na varianty. I přes tyto všechny opatření se však může stát, že výčet kritérií není kompletní, a ani nebude. V takovém případě lze učinit rozhodnutí s určitou pravděpodobností, což vyjádří procento optimálního rozhodnutí.

Pokud chce tvůrce kriteriální matice uplatnit některou z metod vícekriteriální optimalizace, musí stanovit váhy. Je-li ve složitější situaci, může použít různých podpůrných metod pro stanovení vah. Navíc, díky těmto metodám, je možné přidělit váhy k jednotlivým variantám a odbourat subjektivní náhled zadavatele na daný problém. Díky metodám vícekriteriální optimalizace se navíc můžeme dozvědět i to, jakou důležitost mají jednotlivé kritéria, a také jaké kritérium preferuje právě zadavatel. Pomocí metod získáváme kardinální a ordinální informace. Ordinální informace nám udává, jaké varianty jsou před jinými variantami, dostaneme tzv. uspořádání variant, nicméně, už se z ordinální informace nedozvíme, o kolik je nějaká varianta před jinou variantou. Proto je důležité znát i kardinální informaci, která právě udává o kolik je daná varianta před jinou. Máme-li totiž k dispozici pouze ordinální informaci, nemá smysl provádět jakékoliv aritmetické operace.

2.2.1 Metoda stejné důležitosti

Může nastat i situace, kdy se zadavatel nedokáže rozhodnout, které ze zadaných kritérii je pro něj důležitější, nebo třeba nechce poskytnout potřebně údaje, potom nezbývá, než přidělit všem stejnou váhu. Pokud má být součet vah roven číslu 1, pak vzorec pro spočítání váhy pro každé kritérium je $\frac{1}{n}$, kde n je právě počet kritérií.

2.2.2 Metoda pořadí

V této metodě si musíme jasně ujasnit, které kritérium je pro nás přednější, a které naopak pro nás není přednější vůbec. Postupně si kritéria očíslujeme od 1 až po n, kde n je počet kritérií. Nejdůležitějšímu kritériu dáme nejvyšší číslo, nejméně důležitému kritériu přiřadíme číslo 1. Jakmile tak budeme mít, všechny body sečteme, a tímto součtem podělíme zvlášť každý bod kritéria. Dostaneme tak normované váhy.

2.2.3 Metoda bodovací

Tato metoda je velice podobná metodě pořadí, liší se však tím, že každému kritériu není přiděleno číslo podle pořadí, ale je mu přidělen určitý počet bodů, podle toho, jakou velkou má důležitost. Čím víc bodů, tím důležitější je. Poté se opět body sečtou a podělí se jimi zvlášť každé kritérium, aby se dosáhlo normovaných vah.

2.2.4 Fullerova metoda

Vychází z metody bodovací, používá se v situacích, kdy je potřeba obodovat velké množství kritérií, což by bylo jak časově, tak energicky náročné. Metoda spočívá v tom, že se vždy porovnávají dvojice kritérií, přičemž každá dvojice právě jednou, a je možné dát i stejnou váhu oběma kritériím. Na závěr se opět všechny váhy normují.

Běžně má množina rozhodovacích variant v úlohách vícekriteriálního rozhodování konečný počet prvků. Po různých úpravách, které byly zmíněny výše, lze snadno sestavit kriteriální matici, kde si zvolíme např. sloupce jako kritéria, a řádky jako varianty. Prvky neboli váhy kriteriální matice si označíme $y_{ij}, kde\ i = 1,2,\dots,k, j = 1,2,\dots,l$. Kriteriální matice má potom takový tvar: $\begin{pmatrix} & f_1 & f_2 & \cdots & f_k \\ a_1 & y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1k} \\ a_2 & y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_l & y_{l1} & y_{l2} & \cdots & y_{lk} \end{pmatrix}$. $f_1, f_2, \dots, f_k$ představuje různé druhy kritérií. $a_1, a_2, \dots, a_l$ jsou varianty. A jednotlivé $y_{11}, y_{l1}, \dots, y_{lk}$ jsou jednotlivé váhy.

Zadané data se dále zpracovávají až po dosažení výsledku. Pokud je kriteriální matice moc velká, existují různé metody, které ji zredukují na menší matici, tím, že se redukuje celkový počet řádků na menší. Existuje dost metod na úpravu kriteriální matice, nicméně zmiňovat se o žádné již nebudu, protože mým cílem není zacházet do hloubky nějakého tématu, ale spíše popsat určité věci, které se často vyskytují a hojně využívají v praxi. Delší rozpracování, ať už tohoto tématu nebo jakéhokoliv jiného by mohlo dát nejméně další bakalářskou práci. Uvedu zde však fotografii přímo z praxe. Jedná se o nevyplněnou kriteriální matici, která je předložena odborníkovi pro znalecké ocenění stavebních objektů. Slouží pro zjištění obvyklé ceny novostavby. Fotografii jsem našel v disertační práci Ing. Jaroslava Chovance, která nese název: *Metoda vícekriteriální optimalizace při znaleckém oceňování stavebních objektů.*[16]

---

[16] Ing. CHOVANEC Jaroslav, *Soudní inženýrství,* kapitola: *Kriteriální matice ve znaleckém oceňování stavebních objektů.* http://www.sinz.cz/archiv/docs/si-2005-04-237-239.pdf. *Publikováno jako příspěvek doktorandské konference JUNIORSTAV na fakultě stavební VUT v Brně, dne 2. 2. 2005.*

Varianty / Kriteria		Reprodukční hodnota					Výnosová hodnota		Porovnávací (srovnávací, komparační) metoda				
		Cenová kalkulace	Položkový rozpočet	Agregované položky	Přepočet ceny THU	Vyhláškou	Vyhláškou	Dle skutečností na trhu	Vyhláškou	Podle Klimeše	Podle neupravené jednotkové ceny	Podle standardní jednotkové ceny	Prosté porovnání
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Vlastní stavba	Stavební práce – z hlediska kvality												
	Stavební práce – z hlediska kvantity												
	Kvalita použitého materiálu												
	Kvantita použitého materiálu												
	Modernost materiálu												
	Kvalita vybavení stavby												
	Kvantita vybavení stavby												
	Výnosy z pronájmu												
Příslušenství stavby	Velikost stavebního pozemku												
	Další pozemky příslušející ke SO												
	Kvalita půdy												
	Velikost zahrady												
	Využití zahrady												
	Garáž												
	Další stavební objekty příslušející ke stavbě												

Tabulka č. 3 – Kriteriální matice pro znalecké oceňování stavebních objektů

Na závěr je třeba ještě zmínit pojmy týkající se obecné kriteriální matice, se kterými se pak pracuje ve všech oborech, které tyto matice využívají, no a ukážu zde také, jak může vypadat grafické řešení obecné kriteriální matice. Při psaní následujícího textu jsem se inspiroval internetovým zdrojem *Kriteriální matice a hodnocení variant*.[17]

2.2.5 Typy kritérií

Kritéria v matici mohou být dvojího typu, a to buď maximalizační nebo minimalizační. Jak napovídá jejich název, v typech minimalizačních budeme mít hodnoty co nejmenší, v typech maximalizačních se zase vyskytují hodnoty nejvyšší. Pro další zpracování kriteriální matice je ale důležité, aby všechny kritéria byly stejného typu. Naštěstí to není vůbec žádný problém, protože jednoduchými úpravami můžeme dosáhnout toho, že z kritéria

[17] *Kriteriální matice a hodnocení variant*, [online] http://jana.kalcev.cz/vyuka/kestazeni/EKO422-KriterialniMatice.pdf

minimalizačního typu uděláme kritérium maximalizačního typu. Máme na výběr dva způsoby, jakými je možné tuto změnu provést.

1. Jestliže máme danou stupnici, ze které vycházíme, klasickým příkladem jsou známky ve škole, kdy máme prostě stupnici od 1 do 5. V takovém případě vezmeme tu nejvyšší hodnotu, které zde můžeme dosáhnout, a od ní odečteme postupně jednotlivé váhy. Takovým jednoduchým postupem můžeme převést každé minimalizační kritérium na maximalizační.
2. Pokud ale nemáme žádnou stupnici, která by nám udávala, v jakém bodovém rozmezí se pohybujeme, např. pokud se jen bodují různá kritéria na základě toho, co je přednější, pak vezmeme tu nejvyšší hodnotu, kterou máme v matici uvedenou a od ní odečteme postupně ostatní hodnoty.

2.2.6 Varianty dominované a nedominované

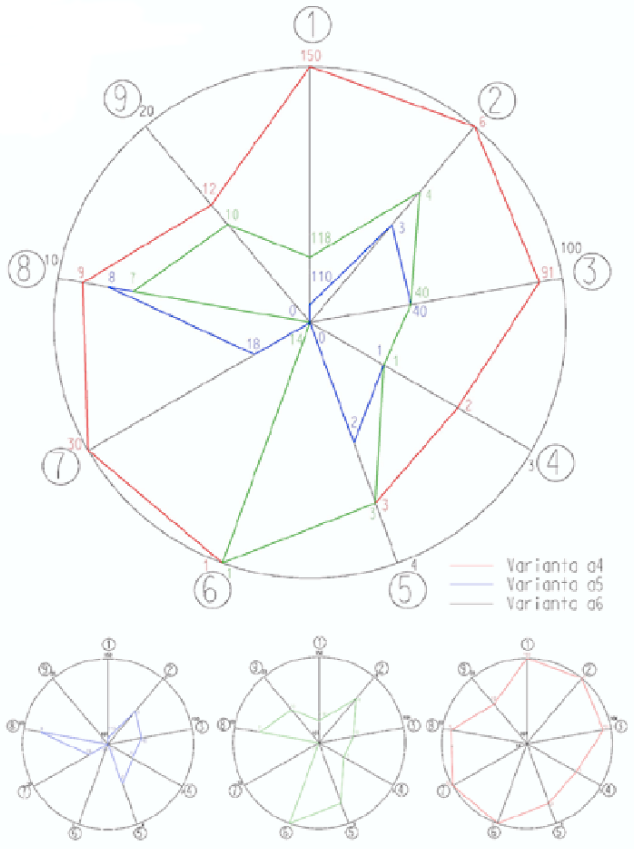
Dominovaná varianta je taková varianta, pokud k ní existuje nějaká jiná varianta, která má všechny hodnoty kritérií alespoň stejně dobré, přičemž alespoň jednu hodnotu má lepší. A co se týče nedominované varianty, tak to je taková varianta, ke které neexistuje žádná jiná varianta, která by byla lepší. Lepší ve smyslu, že by bylo možné alespoň jednu hodnotu zlepšit, ale žádnou hodnotu zhoršit.

2.2.7 Ideální varianta a bazální varianta

Ideální a bazální varianta jsou naprosto opačné pojmy. Ideální varianta je ta nejlepší varianta, které můžeme dosáhnout, dělí se na absolutní a relativní. Relativní ideální varianta je nejlepší varianta, která je v kriteriální matici uvedena, ta absolutní je taková varianta, které lze teoreticky nejlépe dosáhnout. No, a když jsem výše psal, že bazální varianta je opak ideální varianty, znamená to tedy, že bazální varianta je ta nejhorší možná varianta, které lze dosáhnout. Má stejné rozdělení na absolutní a relativní. Jaký je rozdíl mezi absolutní a relativní bazální variantou zde již popisovat nebudu, protože je to zcela analogické k popisu rozdělení ideální varianty.

2.2.8 Grafické zobrazení variant

Dostáváme se na konec kapitoly o kriteriálních maticích, kterou zakončím ukázkou grafického zobrazení variant. Existují pouze dva typy grafického zobrazení, a to hvězdicový typ nebo polygonální typ. Při grafickém zobrazení začínáme vždy stejně, ať už se rozhodneme pro jakýkoliv typ zobrazení. Jako první si narýsujeme jednotkovou kružnici, do které vepíšeme hvězdu s k paprsky, kde k značí počet kritérií uvedených v kriteriální matici. Z každého paprsku tak vytvoříme osu pro jedno kritérium. Na jednotkové kružnici se nachází ideální hodnota vždy pro příslušné kritérium, bazální hodnota se nalézá uprostřed. A na každou osu vyneseme lineární měřítko. Variantu můžeme zobrazit buď hvězdicí nebo k-úhelníkem.



Graf č. 4 – grafické zobrazení variant

3 Kontingenční tabulky

Inspiraci pro následující text jsem čerpal ze zdroje *Kontingenční tabulky a grafy.*[18]

Kontingenční tabulky představují svou podobou a strukturou matici. Jsou široce využívány ve statistice, snad ve všech testech statistických hypotéz, mezi které se nejvíce řadí hypotéza o nezávislosti znaků, hypotéza o shodnosti struktury, hypotéza o symetrii vztahu. Díky kontingenční tabulce si můžeme danou hypotézu přehledně vizualizovat a díky tomu i lépe vyhodnotit. Řádky kontingenční tabulky odpovídají příslušným hodnotám prvního znaku, sloupce pak příslušným hodnotám druhého znaku. Tím znakem se ve statistice myslí jisté rozdělení např. dotazovaných respondentů a tak podobně. Například rozdělení podle pohlaví na muže a ženy, a dále třeba podle věku na mladší padesáti let a starší padesáti let. Tím máme dva znaky – pohlaví, věk. Po sestavení příslušné kontingenční tabulky bychom se dozvěděli počet mužů a počet žen s více než padesáti lety a s méně než padesáti lety. Jde o to, že z kontingenčních tabulek dostaneme vždy počet. Taková kontingenční tabulka může mít například takovou podobu:

	Muži	**Ženy**	**celkem**
Starší padesáti let	29	31	60
Mladší padesáti let	33	36	69
celkem	62	67	129

Tabulka č. 4 – Kontingenční tabulka

Jednou z důležitých vlastností kontingenční tabulky je nezávislost hodnot. To znamená, že všechna data, která jsou uvedená, se vzájemně nijak neovlivňují. V tabulce, která je zmíněna výše to znamená, že u respondentů nezávisí na jejich pohlaví, zda jsou starší nebo mladší padesáti let. Další důležitou vlastností je homogenita, a to znamená, že očekávané četnosti jsou v políčcích každého řádku ve stejném vzájemném poměru bez ohledu na konkrétní volbu řádku. V naší tabulce to tedy znamená, že mužů a žen starších padesáti let je stejně jako mužů a žen mladších padesáti let.

V praxi se běžně nezůstává u dvou rozměrných kontingenčních tabulek, ale místo dvou znaků lze sledovat jakékoliv množství znaků. Na vytváření kontingenční tabulka nemá tato změna žádný vliv, tvoří se stále stejným způsobem, nicméně na znázornění to již není

[18] MYŠÁK Milan, *Kontingenční tabulky a grafy, výukový průvodce.* Vydavatelství Computer Press 2013. ISBN 9788025141137

úplně jednoduché. Proto si ji zde ani nebudeme uvádět, ale píšu to zde jako informační doplnění, že existuje i něco víc než bylo zmíněno výše. Navíc, pokud používáme vícerozměrnou kontingenční tabulku, tak v ní můžeme testovat mnohem více závislostí mezi jednotlivými znaky, řekl bych, že nám to dává větší svobodu, ale na druhou stranu, veškeré testování je technicky mnohem komplikovanější než u jednoduché dvojrozměrné kontingenční tabulky.

4 Špatná podmíněnost soustav

Následující text jsem čerpal z internetového zdroje *Numerické řešení soustav lineárních rovnic*, Mirko Navara.[19]

V souvislosti s numerickým řešením soustav rovnic, můžeme narazit na dost zásadní problém, který se běžně vyskytuje v praxi a není snadné ho odstranit, a tím je právě špatná podmíněnost soustav. Díky špatné podmíněnosti se může člověku klidně stát, že dlouholeté bádání a výpočty může zahodit a začít naprosto od začátku. Nejvíc častá je špatná podmíněnost u soustav, jejíž rovnice jsou téměř závislé, tzn., že jejich závislost se liší jen např. setinami nebo ještě menšími hodnotami.

Máme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých a naším úkolem je nalézt jejich kořeny. $\begin{matrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{matrix}$. Matice je ve tvaru $Ax = b$,

kde $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ je matice soustavy.

$b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ představuje vektor pravých stran,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ je vektor neznámých.

Použití Cramerova pravidla je při obsáhlejších soustavách celkem nemožné. Dá se použít při malém počtu rovnic, ale se zvyšujícím se počtem narážíme na tvrdé problémy, které s sebou nese použití Cramerova pravidla. Jedná se hlavně o velkou výpočetní složitost a numerické chyby. Obecné řešení n lineárních rovnic o n neznámých je v tomto tvaru: $x = A^{-1}b$. Dostáváme se však k problematice chyby, kterou s sebou nese velká mohutnost soustavy. Může totiž nastat situace, kdy nepatrnou změnou koeficientů soustavy popřípadě nepatrnou změnou pravé strany, můžeme způsobit velkou změnu v celém řešení.

Při zpětném dosazení do soustavy vypočteného řešení x_c (nepřesného, at už z důvodu zaokrouhlování či jakéhokoliv jiného), dostáváme tzv. reziduum řešení, a to má tvar $r = b - Ax_c$. Pokud v matici počítáme s prvky, které mají velkou hodnotu, může reziduum nabývat malé hodnoty, i když se vektor x_c výrazně liší od přesného řešení $\bar{x}$. Čím menší hodnoty budeme mít v matici, tím bude reziduum nabývat vyšší hodnoty již při jemnějších

[19] NAVARA Mirko, *Numerické řešení soustav lineárních rovnic*, Centrum strojového vnímání, katedra kybernetiky, elektrotechnická fakulta ČVUT Praha. http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/nm/linear_print.pdf. Publikováno: 21. listopadu 2014

rozdílech nepřesného řešení od řešení přesného. A naopak, máme-li v matici prvky velkých hodnot, může i malá složka vektoru r způsobit velký rozdíl mezi nepřesným a přesným výsledkem. Z toho vyplývá, že malé reziduum nám nezaručuje i malou chybu řešení.

Špatně podmíněné soustavy jsou právě takové soustavy, ve kterých se při jakékoliv nepatrné změně, změní i řešení soustavy, a to ne nepatrně, ale o velkou hodnotu. Jak jsem již zmínil na začátku, mezi takové soustavy, které jsou špatně podmíněné, patří hlavně ty, které jsou téměř závislé, jako příklad zde jednu uvedu. Soustava

$2x + 6y = 8$

$2x + 6{,}00001y = 8{,}00001$

je téměř závislá, protože její koeficienty se liší jen nepatrně, nýbrž zůstává nezávislou. Pro jednoduchost jsem uvedl pouze takovou jednoduchou soustavu o dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Výše uvedená soustava má řešení $x = 1\ a\ y = 1$. Jestliže však nepatrně pozměníme koeficienty, takže dostaneme soustavu

$2x + 6y = 8$

$2x + 5{,}99999y = 8{,}00002,$

změní se i celé řešení soustavy. Nyní dostaneme $x = 10\ a\ y = -2$. Tohle je typický příklad špatně podmíněné soustavy, protože nepatrnou změnou jsme dostali velkou změnu výsledku. Pokud bychom sestrojili inverzní matici k oběma soustavám, zjistili bychom, že mají prvky řádově 10^5, což už také ukazuje na jejich špatnou podmíněnost.

Zde jsem ukázal na příklad jen jednoduchou soustavu, ale v praxi se běžně počítá s daleko složitějšími a většími. Běžně se objevují soustavy čítající třeba sto rovnic, pak jistě není příliš těžké udělat někde chybu, například v zaokrouhlování a tím změnit celý výsledek. Navíc, i když my ve škole počítáme vždy s celými popřípadě racionálními čísly, v praxi se člověk jen málokdy setká s tím, že má přesně číslo, přesně danou hodnotu něčeho. Obvykle se právě počítá s písmeny, která představují odhad, takže jsou nepřesná, nebo zaokrouhlení, protože není možné vypsat číslo celé. Velice častým krokem, který také vede ke špatné podmíněnosti, je nahrazení nekonečného procesu konečným. To se může často stát zejména u iteračních metod řešení.

Závěr

Cílem práce, jak jsem již na začátku uvedl, bylo seznámit se s obecnou problematikou matic a jejím širokým využitím. V bakalářské práci jsem se zaměřil na typy matic využívající se v matematice, fyzice, stavebnictví a statistice. V úvodu jsem uvedl stručný přehled problematiky daného tématu a zaměřil jsem se na situace, kde se tyto matice využívají a popsal jsem jejích využití v příslušném oboru. V bakalářské práci jsem se snažil vytvořit přehled různých typů matic a získal jsem širší přehled o celé problematice. Nezabýval jsem se žádným typem matice do hloubky, protože každý typ matice je samostatné rozsáhlé téma.

Zabýval jsem se Wronského maticí a jejím determinantem Wronskiánem, Hessovou maticí, Jacobiho maticí a jejím determinantem Jakobiánem, poznal jsem široké využití matic v kvantové fyzice. Seznámil jsem se s maticemi, které jsou využívány ve výpočtech ve stavebnictví. I když se nejednalo o matice odborné, vybral jsem matice, které jsou svým využitím hodně zajímavé. Nakonec jsem se seznámil s kontingenčními tabulkami a nahlédl do problematiky špatné podmíněnosti soustav, což je běžný problém, který se v praxi vyskytuje.

Seznam Tabulek a grafů

Seznam použitých zdrojů

1. *Wronski biography – University of St. Andrews*
URL: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Wronski.html, publikováno: červenec 2007

2. HERKRDLA, Josef. *Lineární diferenciální rovnice* [online]. Publikováno: 13.3.2008. https://math.feld.cvut.cz/hekrdla/Teaching/X01MA2/Prednasky/OLDR.pdf.

3. JARNÍK, Vojtěch. *Časopis pro pěstování matematiky* [online]. Vol. 80 (1955), No. 1, 32-43 c. Institut of Mathematics AS CR, 1955.
http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/117146/CasPestMat_080-1955-1_3.pdf

4. DUBCOVÁ Miroslava, PURMOVÁ Lucie, SIMERSKÁ Carmen, *Sbírka příkladů z matematiky II ve strukturovaném studiu.* 1. vydání, Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2009. ISBN 978-80-7080-706-4

5. *Hesse biography – MacTutor history of mathematics.*
URLhttp://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Hesse.html, publikováno: srpen 2006

6. *Funkce více proměnných – Lokální extrémy.*
URL http://math.feld.cvut.cz/habala/teaching/mv/mv3.pdf, datum publikování není uvedeno.

7. TURZÍK D., *Matematika III: Základy optimalizace.* 3. vydání Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999. ISBN 80-7080-363-0

8. *Jacobi biography – MacTutor history of mathematics.* URL http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Jacobi.html, publikováno: leden 2000

9. *Diferencovatelná zobrazení a transformace souřadnic,* kapitola 10. URL http://analyza.kma.zcu.cz/PREDMETY/M2_MA2/zaznamy/MA2_Xhh_Transformace_souradnic.pdf, vydáno: 2009, analyza.KMA.zcu.cz

10. *Substituce v dvojném intergrálu,* kapitola 3.
URL https://math.feld.cvut.cz/tiser/iweb3.pdf, datum publikování není uvedeno.

11. TURZÍK D. *Matematika II ve strukturovaném studiu.* 1. vydání Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2005. ISBN 80-7080-555-2

12. *Základy kvantové teorie,* http://www.ncbr.muni.cz/~lzidek/C6770/C6770_intro_cz.pdf, datum publikování není uvedeno

13. KUBEČKA, Karel, *Bezpečnost a rizika ve výstavbě* [online]. Časopis *Stavebnictví*, vydáno: únor 2010. URL http://www.casopisstavebnictvi.cz/vyuziti-metod-analyzy-rizik-v-procesu-rozhodovani-o-vhodnosti-sanace_N3101

14. Ing. CHOVANEC Jaroslav, *Soudní inženýrství,* kapitola: *Kriteriální matice ve znaleckém oceňování stavebních objektů. http://www.sinz.cz/archiv/docs/si-2005-04-237-239.pdf.*
Publikováno jako příspěvek doktorandské konference JUNIORSTAV na fakultě stavební VUT v Brně, dne 2. 2. 2005.

15. KLICNAROVÁ Jana, *Vícekriteriální hodnocení variant – metody*, Katedra aplikované matematiky a informatiky, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Ekonomická fakulta. http://home.ef.jcu.cz/~janaklic/oa_zsf/VHV_II.pdf. Publikováno r. 2010

16. Kriteriální matice a hodnocení variant, [online] http://jana.kalcev.cz/vyuka/kestazeni/EKO422-KriterialniMatice.pdf

17. MYŠÁK Milan, *Kontingenční tabulky a grafy, výukový průvodce.* Vydavatelství Computer Press 2013. ISBN 9788025141137

18. NAVARA Mirko, *Numerické řešení soustav lineárních rovnic*, Centrum strojového vnímání, katedra kybernetiky, elektrotechnická fakulta ČVUT Praha. http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/nm/linear_print.pdf. Publikováno: 21. listopadu 2014

Anotace

Jméno a příjmení	Pavel Šustr
Katedra nebo ústav	Katedra matematiky
Vedoucí práce	Mgr. Jitka Hodaňová, Ph. D.
Rok obhajoby	2015

Název práce	Soustavy lineárních rovnic a jejich řešení pomocí matic
Název v angličtině	systems of linear equations and solving them with the matrices
Anotace práce	Cílem bakalářské práce bylo studovat využití matic k některým praktickým výpočtům a ukázat, že ne vždy musí mít matice matematický tvar. V práci je zmíněn problém, který matice provází ve všech oborech, a tím je jejich špatná podmíněnost.
Klíčová slova	Matice, determinanty, lineární soustavy, tabulky
Anotace v angličtině	The aim of this thesis was to study usiyng matrices to some practical calculations and to show, that not always matrices have to have a mathematical form. In this thesis, there is mentioned a problem, that accompanies matrices in every specialization. This problem is a bad conditionality.
Klíčová slova v angličtině	Matrices, determinants, linear systems, tables
Přílohy vázané v práci	
Rozsah práce	44 stran
Jazyk práce	Český jazyk