Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta
Katedra algebry a geometrie

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BCI-algebry

Vypracoval:	**Tomáš Bucher**
Studijní program:	B0114A170003 Matematika pro vzdělávání
Studijní obor:	Matematika pro vzdělávání / Fyzika pro vzdělávání
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí bakalářské práce:	prof. RNDr. Jan Kühr, Ph.D.
Termín odevzdání práce:	červen 2022

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením prof. RNDr. Jana Kühra, Ph.D., a že jsem v seznamu literatury uvedl všechny zdroje použité při zpracování této práce.

V Olomouci dne 23. června 2022

. . . .

Tomáš Bucher

Poděkování

Chtěl bych tímto poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce, prof. RNDr. Janu Kührovi, Ph.D., bez jehož pomoci, trpělivosti, rad a připomínek bych tuto práci nikdy nemohl dokončit.

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Tomáš Bucher
Název práce	BCI-algebry
Typ práce	bakalářská
Pracoviště	katedra algebry a geometrie
Vedoucí práce	prof. RNDr. Jan Kühr, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2022

Abstrakt	Předložená bakalářská práce se zabývá BCI-algebrami, jejich základními vlastnostmi a souvislostmi mezi některými jejich důležitými podmnožinami. První kapitola slouží jako úvod do problematiky, rozebíráme v ní aritmetické vlastnosti BCI-algeber. Druhá kapitola uvádí s BCI-algebrami související reziduované komutativní monoidy. Třetí kapitola shrnuje poznatky o relativních kongruencích a uzavřených filtrech BCI-algeber. Ve čtvrté kapitole ukazujeme některé důležité poznatky o integrální a grupové části BCI-algeber.

Klíčová slova	BCI-algebra, BCK-algebra
Počet stran	38
Počet příloh	0
Jazyk	český

Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Tomáš Bucher
Title	BCI-algebras
Type of thesis	Bachelor
Department	Department of Algebra and Geometry
Supervisor	prof. RNDr. Jan Kühr, Ph.D.
The year of presentation	2022
Abstract	This bachelor thesis deals with BCI-algebras, their basic properties and connections between them and their certain important subsets. Chapter 1 serves as an introduction to the problematics, in which we survey arithmetic properties of BCI-algebras. Chapter 2 introduces residuated commutative monoids, which are closely linked to BCI-algebras. Chapter 3 summarizes known properties of relative congruences and closed filters of BCI-algebras. In chapter 4, we show some important properties of group and integral parts of BCI-algebras.
Keywords	BCI-algebra, BCK-algebra
Number of pages	38
Number of appendices	0
Language	Czech

Obsah

Základní použité symboly a značení

A, M	množina A, množina M
x, y, z, a, b, c	prvky množiny A
$\mathbf{A}$	algebra $\mathbf{A}$
ϕ, θ	kongruence ϕ, θ
$[x]_\theta$	třída rozkladu podle kongruence θ určená prvkem x
f, g	zobrazení f,g
$I_\mathbf{A}$	integrální část $\mathbf{A}$
$G_\mathbf{A}$	grupová část $\mathbf{A}$
i, j	prvky $I_\mathbf{A}$
g, h	prvky $G_\mathbf{A}$

Úvod

BCI-algebry poprvé zavádí Iséki v roce 1966 v článku *An algebra related with a propositional calculus*. V následující práci si BCI-algebry představíme a rozebereme některé jejich důležité vlastnosti. V kapitole 1 rozebereme aritmetické vlastnosti BCI-algeber a uvedeme si některé jejich příklady. V kapitole 2 si krátce představíme reziduované komutativní jakožto algebry úzce související s BCI-algebrami. V kapitole 3 rozebereme souvislost relativních kongruencí a uzavřených ideálů na BCI-algebrách. V kapitole 4 se budeme zabývat strukturou BCI-algeber, přesněji řečeno jejich grupovou a integrální částí.

Kapitola 1

Aritmetické vlastnosti

V následující kapitole uvedeme BCI-algebry a jejich vlastnosti. Jako zdroje pro tuto kapitolu využíváme [1], [2], [3].

Definice 1.1

Algebru $\mathbf{A} = (A, \rightarrow, 1)$ nazýváme BCI-algebra, právě když operace $\rightarrow$ splňuje následující axiomy pro každé x, y, $z \in A$:

A1: $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1$,

A2: $1 \rightarrow x = x$,

A3: $x \rightarrow y = 1 \;\&\; y \rightarrow x = 1 \Rightarrow x = y$.

Definujme binární relaci $\leq$ takto:

$$x \leq y \Leftrightarrow x \rightarrow y = 1.$$

Binární relace $\leq$ je uspořádání, 1 je maximální prvek A. Tuto skutečnost dokážeme později.
Algebru, která kromě axiomů A1–A3 splňuje také

A4: $x \rightarrow 1 = 1$

pro každé $x \in A$, nazýváme BCK-algebra a pro takovou algebru je 1 prvek největší. Jako úvod k BCI-algebrám si uveďme jejich aritmetické vlastnosti a tyto vlastnosti dokažme:

Lemma 1.2

Nechť **A** je BCI-algebra. Pak pro každé x, y, $z \in A$ platí následující:

a) $x \to x = 1$,

b) $x \to y \leq (y \to z) \to (x \to z)$,

c) $x \leq (x \to y) \to y$,

d) $x \leq y \Rightarrow y \to z \leq x \to z$,

e) $z \to (y \to x) = y \to (z \to x)$,

f) $z \leq y \to x \Leftrightarrow y \leq z \to x$,

g) $x \to y \leq (z \to x) \to (z \to y)$,

h) $x \leq y \Rightarrow z \to x \leq z \to x$,

i) $(x \to y) \to 1 = (x \to 1) \to (y \to 1)$,

j) $((x \to y) \to y) \to y = x \to y$.

Důkaz:

a) Opakovaným využitím A2 v rovnosti

$$(1 \to 1) \to ((1 \to x) \to (1 \to x)) = 1$$

vychází

$$x \to x = 1.$$

b) Jde o reformulaci A1.

c) Dosazením do A1 dostaneme

$$(1 \to x) \to ((x \to y) \to (1 \to y)) = 1$$

a po užití A2 zůstává

$$x \to ((x \to y) \to y) = 1,$$

což je c).

d) Dosadíme-li

$$x \le y$$

do A1, vychází

$$1 \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1,$$

takže

$$y \to z \le x \to z,$$

což je právě d).

e) Z b) plyne

$$x \to (y \to z) \le ((y \to z) \to z) \to (x \to z).$$

Podle c) platí

$$y \le (y \to z) \to z,$$

z čehož podle d) dále plyne

$$((y \to z) \to z) \to (x \to z) \le y \to (x \to z).$$

Z tranzitivity $\le$ tedy vyplývá

$$x \to (y \to z) \le y \to (x \to z).$$

Stejně tak ale platí i nerovnosti

$$\begin{aligned} y \to (x \to z) &\le ((x \to z) \to z) \to (y \to z), \\ x &\le (x \to z) \to z, \\ ((x \to z) \to z) \to (y \to z) &\le x \to (y \to z), \end{aligned}$$

takže to znamená, že rovnost e) platí.

f) Vychází přímo z e).

g) Podle b) a f) platí

$$x \to y \le (y \to z) \to (x \to z) \Leftrightarrow y \to z \le (x \to y) \to (x \to z),$$

takže g) platí.

h) Z A1 a A2 je jasné, že jestliže

$$y \le z,$$

pak

$$(x \to y) \to (x \to z) = 1,$$

což je h).

i) Začneme pravou stranou a 1 v členu $y \to 1$ napíšeme jako $(x \to y) \to (x \to y)$ a použijeme e):

$$(x \to 1) \to (y \to 1) = (x \to y) \to ((x \to 1) \to (x \to (y \to y)))$$

Nakonec použijeme dvakrát vlastnost a) a dostáváme

$$(x \to y) \to ((x \to 1) \to (x \to (y \to y))) = (x \to y) \to 1,$$

což je právě i).

j) Podle d)

$$x \leq (x \to y) \to y \Rightarrow ((x \to y) \to y) \to y \leq x \to y.$$

Podle c) je zase jasná nerovnost

$$x \to y \leq ((x \to y) \to y) \to y,$$

a z obou nerovností plyne přímo j).

□

Dále si uveďme některé příklady BCI a BCK-algeber:

1) Nechť $(G,\ \cdot\ ,\ ^{-1}, e)$ je komutativní grupa. Pak $(G,\ \to\ , e)$ je BCI-algebra, kde operace $\to$ je definovaná jako $x \to y = x^{-1}y$ a $\leq$ je triviální uspořádání $x \leq y \Leftrightarrow x = y$.
Ověřme, že $(G,\ \to\ , 1)$ je BCI-algebra:

A1: Z vlastností grupy opravdu platí, protože

$$(x^{-1}y)^{-1}((y^{-1}z)^{-1}(x^{-1}z)) = (x^{-1}y)^{-1}(x^{-1}y) = 1.$$

A2: samozřejmě platí, protože

$$1 \to x = 1^{-1}x = x.$$

A3: $x^{-1}y = 1$ v grupách platí, právě když $x = y$, takže A3 je také splněn.

Pro $(G,\ \to\ , 1)$ platí samozřejmě stejné vlastnosti. Vidíme tedy, že obě algebry jsou opravdu BCI-algebry.

2) Nechť A je $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Q}^-$ nebo $\mathbb{R}^-$ a $\rightarrow$ je definováno jako $x \rightarrow y = \min\{y - x, 0\}$. Pak $(A, \rightarrow, 0)$ je BCK-algebra s lineárním uspořádáním a 0 je její největší prvek. Platnost ověřme opět pro $(\mathbb{R}^-, \rightarrow, 0)$:

A1: Nejdříve si napíšeme, jak bude A1 vypadat v aditivním tvaru:

$$(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) = ((z - x) - (z - y)) - (y - x)$$

Výpočet je už snadný, protože

$$((z - x) - (z - y)) - (y - x) = (y - x) - (y - x) = 0.$$

takže $(A, \rightarrow, 0)$ je BCK-algebra pro všechny tři množiny.

A2: Platí, protože
$$1 \rightarrow x = x - 0 = x.$$

A3: Předpokládejme, že $x \neq y$, bez újmy na obecnosti $y < x$. To znamená, že platí rovnost
$$x \rightarrow y = 0,$$
ale zároveň
$$y \rightarrow x = x - y \neq 0.$$

A4: $0 - x \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^-$, takže $0 - x = x$.

$(A, \rightarrow, 0)$ je tedy BCK-algebra.

3) Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina s největším prvkem 1. Definujme operaci $\rightarrow$ jako

$x \rightarrow y = 1$, pokud $x \leq y$,

$x \rightarrow y = y$ pro každý jiný příklad.

Pak je $(A, \rightarrow, 1)$ BCK-algebra. Ověřme:

A1: Tento axiom budeme muset ověřit pro všechny možnosti uspořádání prvků $x, y, z \in A$:

$x \leq y \leq z$:

$$(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow ((x \rightarrow z)) = 1 \rightarrow (1 \rightarrow 1) = 1,$$

$x \leq z \leq y$:

$$(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow ((x \rightarrow z)) = 1 \rightarrow (z \rightarrow 1) = 1,$$

$y \leq x \leq z$:

$$(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow ((x \rightarrow z)) = y \rightarrow (1 \rightarrow 1) = 1,$$

$y \leq z \leq x$:

$$(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow ((x \rightarrow z)) = y \rightarrow (1 \rightarrow z) = 1,$$

$z \leq x \leq y$:

$$(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow ((x \rightarrow z)) = 1 \rightarrow (z \rightarrow z) = 1,$$

$z \leq y \leq x$:

$$(x \to y) \to ((y \to z) \to ((x \to z)) = y \to (z \to z) = 1.$$

Odtud platí, že A1 platí pro všechny možná uspořádání srovnatelných prvků x, y, $z \in A$. Pro nesrovnatelné výše uvedené rovnosti platí také. Pro každé dva nesrovnatelné prvky x, y stačí uvažovat obě možnos $x \to y = y$ a $y \to x = x$.

A2: Jelikož $x \leq 1$ pro každé $x \in A$, A2 je splněna.

A3: Kdyby $x \neq y$, pak platí $x \to y = y$, nebo $y \to x = x$.

A4: $x \to 1 = 1$ je triviální.

$(A, \to, 1)$ je tedy opravdu BCK-algebra.

4) Nechť $(A, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ je Booleova algebra. Definujme $x \to y = x' \vee y$. Pak $(A, \to, 1)$ je BCK-algebra se stejným uspořádáním, jaké je na dané Booleově algebře. Opět ověřme:

A1: Z vlastností operací $\vee$ a $\wedge$ na Booleově algebře plynou rovnosti

$$\begin{aligned}
(x' \vee y)' \vee ((y' \vee z)' \vee (x' \vee z)) &= (x' \vee y)' \vee (x' \vee ((y \wedge z') \vee z)) \\
&= (x' \vee y)' \vee (x' \vee (y \vee z)) \\
&= x' \vee ((x' \vee y)' \vee (y \vee z)) \\
&= x' \vee ((x \wedge y') \vee (y \vee z)) \\
&= x' \vee (((x \wedge y') \vee y) \vee z) \\
&= x' \vee ((x \vee y) \vee z) \\
&= (x' \vee x) \vee (y \vee z) \\
&= 1 \vee (y \vee z) = 1
\end{aligned}$$

A2: Platí, protože

$$1 \to x = 1' \vee x = 0 \vee x = x.$$

A3: Předpokládejme, že $x \neq y$. Jestliže platí

$$x \to y = 1,$$

pak pro n-tice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ existuje $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že $x_i = 0, y_i = 1$ a proto

$$y \to x \neq 1.$$

A4: Jasné, protože

$$x \to 1 = x' \vee 1 = 1.$$

Proto výše definovaná algebra $(A, \to, 1)$ je opravdu BCK-algebra.

Nyní dokážeme, že $\leq$ je opravdu uspořádání:

Věta 1.3:

Binarní relace $\leq$ definovaná výše je uspořádáním

Důkaz:

Reflexivita: Jde o vlastnost a) z lemmatu 1.2,

Antisymetrie: Antisymetrie vychází přímo z A3.

Tranzitivita: Když $x \to y = 1$ a $y \to z = 1$, tak podle A1 platí

$$1 \to (1 \to (x \to z)) = 1$$

a použitím A2 konečně dostáváme

$$x \to z = 1.$$

□

Věta 1.4:

Nechť $(A, \to, 1)$ je BCI-algebra. Pak 1 je maximální prvek.

Důkaz:

Jestliže

$$1 \to x = 1,$$

pak podle A2 je $x = 1$, a proto je 1 maximální prvek.

□

Kapitola 2

Reziduované komutativní monoidy

Jelikož BCI-algebry jsou podredukty reziduovaných komutativních monoidů, krátce si je v této kapitole představme. V této kapitole čerpáme z [2], [6], [9].

Definice 2.1

Algrebraickou strukturu $(M, \ \cdot\ , \ \rightarrow\ , e)$, kde $(M, \ \cdot\ , e)$ je komutativní monoid a $\rightarrow$ je binární operace, která splňuje axiomy A1–A3, spolu s axiomem

A5: $(x \cdot y) \rightarrow z = x \rightarrow (y \rightarrow z)$.

nazýváme reziduovaný komutativní monoid. Definujme uspořádání $\leq$ stejně, jako na BCI-algebrách, tedy

$$x \leq y \Leftrightarrow x \rightarrow y = 1.$$

Stejně jako dělíme BCI a BCK-algebry, obdobné rozlišení děláme i u reziduovaných komutativních monoidů, a to následovně:

Definice 2.2

Reziduovaný komutativní monoid takový, že e je maximální prvek, nazýváme semiintegrální reziduovaný komutativní monoid. V případě, že e je prvek největší, nazýváme takovou strukturu integrální reziduovaný komutativní monoid.

Pro integrální reziduovaný komutativní monoid platí samozřejmě také A4. Začněme opět důkazem stejných vlastností, jako v kapitole 1.

Definice 2.3:

Říkáme, že algebra **A** je redukt algebry **B**, když každá operace na **A** je také operace na **B**. **A** je podredukt **B**, pokud **A** je podalgebra reduktu **B**.

Lemma 2.4

Nechť $(M, \cdot, \rightarrow, e)$ je reziduovaný semiintegrální komutativní monoid. Pak pro každé x, y, $z \in M$ platí následující:

a) $x \rightarrow x = 1$,

b) $x \rightarrow y \leq (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$,

c) $x \leq (x \rightarrow y) \rightarrow y$,

d) $x \leq y \Rightarrow y \rightarrow z \leq x \rightarrow z$,

e) $z \rightarrow (y \rightarrow x) = y \rightarrow (z \rightarrow x)$,

f) $z \leq y \rightarrow x \Leftrightarrow y \leq z \rightarrow x$,

g) $x \rightarrow y \leq (z \rightarrow x) \rightarrow (z \rightarrow y)$,

h) $x \leq y \Rightarrow z \rightarrow x \leq z \rightarrow x$,

i) $(x \rightarrow y) \rightarrow 1 = (x \rightarrow 1) \rightarrow (y \rightarrow 1)$,

j) $((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow y = x \rightarrow y$,

k) $z \leq x \rightarrow y \Leftrightarrow z \cdot x \leq y$.

Důkaz:

Důkazy l vlastnostem a), g), h), i), j) rozebírat nebudeme, protože jsou identické s Lemmou 1.2.

b) Přepis A1.

c) Z komutativity a A5 plynou rovnosti

$$\begin{aligned} x \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y) &= (x \cdot (x \rightarrow y)) \rightarrow y \\ &= ((x \rightarrow y) \rightarrow x) \rightarrow y \\ &= (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y) = 1. \end{aligned}$$

d) Jasné podle A1.

e) Z A5 plyne

$$\begin{aligned} z \rightarrow (y \rightarrow x) &= (z \cdot y) \rightarrow x \\ &= (y \cdot z) \rightarrow x \\ &= y \rightarrow (z \rightarrow x). \end{aligned}$$

f) Vychází přímo z e).

k) Vychází z A5.

$\square$

Vidíme, že všechny vlastnosti, které platí v BCI-algebře, platí také v semiintegrálním reziduovaném monoidu. Z definice podreduktu dokonce vidíme, že BCI-algebry jsou podredukty semiintegrálních komutativních monoidů.

Uveďme si nyní některé příklady komutativních reziduovaných monoidů:

1) Nechť $(G, \cdot, 1)$ je komutativní grupa. Pak $(G, \cdot, \rightarrow, 1)$, kde $\rightarrow$ definujeme jako $x \rightarrow y = x^{-1}y$ a $\leq$ jako triviální uspořádání, je semiintegrální reziduovaný komutativní monoid. Stačí ukázat A5, protože A1–A3 jsme ukazovali v první kapitole:

   Z vlastností grupy platí
$$(x \cdot y)^{-1}z = x^{-1}(y^{-1}z),$$
   takže A5 je splněno a $(G, \cdot, \rightarrow, 1)$ je semiintegrální reziduovaný komutativní monoid.

2) Nechť $\mathbb{Z}^-$ je množina všech nekladných celých čísel. Pak $(\mathbb{Z}^-, +, \rightarrow, 0)$ je reziduovaný komutativní monoid, kde $\rightarrow$ je definována jako
   $x \rightarrow y = \min\{0, y - x\}$.

   A1–A4 jsme ukázali v kapitole 1, stačí tedy dokázat, že platí A5:
$$z - (x + y) = (z - x) - y,$$
   takže $(\mathbb{Z}^-, +, \rightarrow, 0)$ je integrální reziuovaný komutativní monoid.

3) Nechť $\mathbb{R}$ je množina reálných čísel. Pak $(\langle 0,1 \rangle, \cdot, \rightarrow, 1)$ je reziduovaný komutativní monoid s lineárním uspořádáním, kde $\rightarrow$ je definována jako
   $x \rightarrow y = \min\{1, x^{-1}y\}$. Dokažme:

   A1: Z vlastností komutativní grupy platí rovnosti
$$\begin{aligned}(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) &= (x^{-1}y)^{-1}((y^{-1}z)^{-1}(x^{-1}z)) \\ &= (y^{-1}x) \cdot ((z^{-1}y) \cdot (x^{-1}z)) \\ &= (y^{-1}x) \cdot (x^{-1}y) = 1.\end{aligned}$$

   A2: $1 \rightarrow x = 1^{-1}x = x$.

   A3: Na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ existuje jediný prvek, pro který na tomto intervalu existuje i jeho inverzní prvek, a to je právě 1.

   A5: Z distributivity vyplývají rovnosti
$$\begin{aligned}(x \cdot y) \rightarrow z &= (x \cdot y)^{-1}z \\ &= x^{-1}(y^{-1}z) \\ &= x \rightarrow (y \rightarrow z),\end{aligned}$$
   takže výše uvedená struktura je opravdu integrální komutativní reziduovaný monoid.

Ke konci této kapitoly zkonstruujeme integrální reziduovaný komutativní monid, který využijeme i v následující kapitole.

Mějme komutativní grupu $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, +, (0, 0))$. Na této grupě definujeme lexikografické uspořádání $\leq$ takto:

$$(k, x) \leq (l, y) \Leftrightarrow k < l \text{ nebo } k = l \text{ a } x \leq y$$

Dále budeme pracovat pouze s intervalem $\langle(-2, 0), (0, 0)\rangle$.

Definujme nyní operace $\odot$ a $\rightarrow$:

- $(0, x) \odot (0, y) = (0, x + y)$,
- $(-1, x) \odot (-1, y) = (-2, \max\{x + y, 0\})$,
- $(-2, x) \odot (-2, y) = (-2, 0)$,
- $(0, x) \odot (-1, y) = (-1, x + y)$,
- $(0, x) \odot (-2, y) = (-2, \max\{x + y, 0\})$,
- $(-1, x) \odot (-2, y) = (-2, 0)$,
- $(k, x) \rightarrow (l, y) = (0, 0)$ pro $(k, x) \leq (l, y)$,
- $(0, x) \rightarrow (0, y) = (0, y - x)$,
- $(-1, x) \rightarrow (-1, y) = (0, y - x)$,
- $(-2, x) \rightarrow (-2, y) = (0, y - x)$,
- $(0, x) \rightarrow (-1, y) = (-1, y - x)$,
- $(0, x) \rightarrow (-2, y) = (-2, y - x)$,
- $(-1, x) \rightarrow (-2, y) = (-1, y - x)$.

Dále místo $(-1, x)$ zaveďme nesrovnatelné dvojice (a, x), (b, x), pro které dále platí

- $(a, x - 1) \leq (b, x) \leq (a, x + 1)$,
- $(b, x - 1) \leq (a, x) \leq (b, x + 1)$,

pro každé $x \in \mathbb{Z}$. Pro tyto nové prvky uvažujme výše zmíněné operace

- $(0, x) \odot (a, y) = (0, x) \odot (b, y) = (0, x) \odot (-1, y)$,
- $(a, x) \odot (-2, y) = (b, x) \odot (-2, y) = (-1, x) \odot (-2, y)$,
- $(a, x) \odot (a, y) = (b, x) \odot (b, y) = (-1, x) = (-1, y)$.

Dále dodefinujeme operace $\odot$ a $\rightarrow$ mezi dvojicemi (a, x), (b, y):

- $(a, x) \odot (b, y) = (-2, \max\{x + y + 1{,}0\})$,
- $(a, x) \rightarrow (b, y) = (b, x) \rightarrow (a, y) = (0, \min\{y - x - 1{,}0\})$.

Operace $\odot$, $\to$ můžeme na $(\{0\} \times \mathbb{Z}) \cup (\{-1\} \times \mathbb{Z}) \cup (\{-2\} \times \mathbb{Z})$ definovat i jiným způsobem, a to tímto:

- $(k, x) \odot (l, y) = (k + l, x + y) \vee (-2, 0)$,
- $(k, x) \to (l, y) = (l - k, y - x) \wedge (0, 0)$.

$\vee$ je maximum a $\wedge$ je minimum vzhledem k lexikografickému uspořádání. Stejně jako výše pak dodefinujeme prvky (a, x),(b, x).

Věta 2.5:

Výše definovaná struktura je integrální komutativní reziduovaný monoid.

Důkaz:

A1: $((k, x) \to (l, y)) \to (((l, y) \to (m, z)) \to ((k, x) \to (m, z))) =$

$$\begin{aligned} &= (l - k, y - x) \to ((m - l, z - y) \to (m - k, z - x)) \wedge (0, 0) \\ &= (l - k, y - x) \to (((m - k) - (m - l), (z - x) - (z - y))) \wedge (0, 0) \\ &= ((l - k) - (l - k), (y - x) - (y - x)) \wedge (0, 0) \\ &= (0, 0). \end{aligned}$$

A2: $(0, 0) \to (k, x) = (k - 0, x - 0) \wedge (0, 0) = (k, x)$

A3: Nechť $(k, x) \neq (l, y)$. Bez újmy na obecnost $(k, x) < (l, y)$. Pak buď $k < l$ nebo $k = l$ a $x < y$ a $(k, x) \to (l, y) = 1$. Pro $k < l$ ale $(l, y) \to (k, x) \neq (0, 0)$, protože $k - l < 0$. Pro $k = l$ a $x < y$, takže $x - y < 0$ a tedy $(l, y) \to (k, x) = (0, k - l) \neq (0, 0)$.

A4: $(k, x) \to (0, 0) = (0 - k, 0 - x) \wedge (0, 0) = (0, 0)$

A5: Využitím komutativity + dostáváme rovnosti

$$\begin{aligned} ((k,x) \odot (l,y)) \to (m,z) &= ((k + l,x + y) \vee (-2,0)) \to (m,z) \\ &= (m - (k + l), z - (x + y)) \wedge (0, 0) \\ &= (m - k - l, z - x - y) \wedge (0, 0) \\ &= (k, x) \to ((m - l, z - y) \wedge (0, 0)) \\ &= (k, x) \to ((l, y) \to (m, z)). \end{aligned}$$

Dokázali jsme, že tato struktura je integrální reziduovaný komutativní monoid.

□

Mějme rozklad $R = \{\{0\} \times \mathbb{Z}^-,\{a\} \times \mathbb{Z},\{b\} \times \mathbb{Z},\{-2\} \times \mathbb{Z}^+\}$. Tento rozklad určuje kongruenci ϕ. Faktorová algebra podle této kongruence už ale není integrální reziduovaný komutativní monoid, protože

$$[(a, 0)]_\phi \to [(b, 0)]_\phi = [(0, 0)]_\phi,$$

$$[(b, 0)]_\phi \to [(a, 0)]_\phi = [(0, 0)]_\phi,$$

a přitom $[(a, 0)]_\phi \neq [(b, 0)]_\phi$. Axiom A3 tedy není splněn. Touto problematikou se budeme hlouběji zabývat v následující kapitole.

Kapitola 3

Relativní kongruence a uzavřené filtry

V následující kapitole budeme mluvit o relativních kongruencích na BCI-algebrách a proč jsou důležité. V této kapitole čerpáme z [1], [2], [4].

Pro BCI-algebry nutně nemusí platit, že jejich faktorová algebra je opět BCI-algebrou. To si ukážeme na následujícím příkladu [4]:

Zkonstruujme nejprve BCK-algebru U:
Nechť $\mathbb{Z}^- = \{..., -2, -1, 0\}$, $A = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$ a $B = \{b_0, b_1, b_2, ...\}$ jsou množiny a U je jejich sjednocením.
Operaci $\to$ definujeme následujícím způsobem:

- $m \to n = 0$, jestliže $n \leq m$, nebo $m \to n = n - m$, jestliže $n > m$ pro každé $m, n \in \mathbb{Z}^-$,
- $a_m \to n = b_m \to n = 0$ pro každé $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{Z}^-$,
- $n \to b_m = b_{m-n}$ pro každé $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{Z}^-$,
- $n \to a_m = a_{m-n}$ pro každé $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{Z}^-$,
- $a_m \to a_n = b_m \to b_n = 0$ pro $n > m$, nebo $n - m$ pro $n \leq m$,
- $b_m \to a_n = a_{m+1} \to a_n$,
- $a_m \to b_n = b_{m+1} \to b_n$.

Tato algebra je vlastně podreduktem struktury, kterou jsme konstruovali v předchozí kapitole.

Nyní mějme faktorovou algebru U/ϕ, kde ϕ je ekvivalence daná rozkladem $R = \{A, B, \mathbb{Z}^-\}$. Zjistíme, jestli ϕ je kongruence:

Relace ϕ je kongruencí, když platí

$$(x, y) \in \phi \Rightarrow (x \to z, y \to z) \in \phi \ \& \ (z \to x, z \to y) \in \phi.$$

To ověříme postupným dosazením za všechny možnosti, které mohou nastat.

1) $x,\, y \in A$

Mohou nastat tři různé možnosti, a to $z \in A$, $z \in B$, $z \in \mathbb{Z}^-$. Pro $z \in A$ dostáváme

$$(x,\, y) \in \phi \Rightarrow (x \to z,\, y \to z) \in \phi,$$

což platí, protože

$$x \to z \in \mathbb{Z}^-,\, y \to z \in \mathbb{Z}^-$$

což je prvek z třídy $\mathbb{Z}^-$. Stejným způsobem odvodíme i pro $z \in B$.

$$x \to z \in \mathbb{Z}^-,\, y \to z \in \mathbb{Z}^-.$$

Dále nechť $z \in \mathbb{Z}^-$, pak

$$x \to z \in \mathbb{Z}^-,\, y \to z \in \mathbb{Z}^-$$

a také

$$z \to x \in A,\, z \to y \in A,$$

takže pro $x,\, y \in A$ opravdu platí,

$$(x,\, y) \in \phi \to (x \to z,\, y \to z) \in \phi \;\&\; (z \to x,\, z \to y) \in \phi.$$

2) $x,\, y \in B$

Tato možnost je stejná, jako možnost 1)

3) $x,\, y \in \mathbb{Z}^-$

Nechť $z \in A$. Pak

$$x \to z \in A,\, y \to z \in A,$$

$$z \to x \in \mathbb{Z}^-,\, z \to y \in \mathbb{Z}^-.$$

Nechť $z \in B$. Pak

$$x \to z \in B,\, y \to z \in B,$$

$$z \to x \in \mathbb{Z}^-,\, z \to y \in \mathbb{Z}^-.$$

Nechť $z \in \mathbb{Z}^-$. Pak

$$x \to z \in \mathbb{Z}^-,\, y \to z \in \mathbb{Z}^-,$$

takže opravdu pro všechna x,y,$z \in U$ platí

$$(x,\, y) \in \phi \Rightarrow (x \to z,\, y \to z) \in \phi \quad (z \to x,\, z \to y) \in \phi.$$

Relace ϕ je tedy opravdu kongruence.

Teď ukážeme, že $(U/\phi,\ \to\ ,\, \mathbb{Z}^-)$ není BCK-algebra:

A1: $([x]_\phi \to [y]_\phi) \to (([y]_\phi \to [z]_\phi) \to ([x]_\phi \to [z]_\phi)) = \mathbb{Z}^-$.

A2: $\mathbb{Z}^- \to [x]_\phi = [x]_\phi$, to samozřejmě platí také.

A3: $[x]_\phi \to [y]_\phi = \mathbb{Z}^- \;\&\; [y]_\phi \to [x]_\phi = \mathbb{Z}^- \Rightarrow [x]_\phi = [y]_\phi$, to ale neplatí, protože $A \to B = \mathbb{Z}^- \;\&\; B \to A = \mathbb{Z}^-$ a zároveň $A \neq B$.

Proto $(U/\phi, \to, [0]_\phi)$ už BCK-algebra není.

V této kapitole se tedy budeme zabývat faktorovými algebrami BCI-algeber, které jsou stále BCI-algebrami. Třídu všech BCI-algeber budeme označovat BCIA a třídu všech BCK-algeber budeme označovat BCKA.

Definice 3.1:

Kongruence θ na BCI-algebře $\mathbf{A}$ se nazývá relativní kongruence, když $\mathbf{A}/\theta \in$ BCIA. Množinu všech relativních kongruencí na $\mathbf{A}$ značíme $\mathrm{Con}_{BCIA}\mathbf{A}$, ta tvoří vzhledem k množinové inkluzi úplný svaz $\mathbf{Con}_{BCIA}\mathbf{A}$.

Definice 3.2:

Podmnožinu $F \subseteq A$ nazýváme uzavřený filtr, když $F = [1]_\phi$ pro nějaké $\phi \in \mathrm{Con}_{BCIA}\mathbf{A}$. Množinu všech uzavřených filtrů $\mathbf{A}$ značíme $\mathrm{CF}_{BCIA}\mathbf{A}$ a spolu s množinovou inkluzí tvoří úplný svaz $\mathbf{CF}_{BCIA}\mathbf{A}$.

Věta 3.3:

Nechť θ je relativní kongruence. Pak pro filtr F daný kongruencí θ platí

$$(a,\, b) \in \theta \Leftrightarrow a \to b,\, b \to a \in F$$

Důkaz:

Nechť $\theta \in \mathrm{Con}_{BCIA}\mathbf{A}$ a $(a,\, b) \in \theta$. Pak platí

$$[a]_\theta \to [b]_\theta = [a \to b]_\theta = [1]_\theta,$$

$$[b]_\theta \to [a]_\theta = [b \to a]_\theta = [1]_\theta,$$

a tedy $a \to b,\, b \to a \in [1]_\theta = F$.

Nechť $a \to b,\, b \to a \in F$. Pak podle A3 je $[a]_\theta = [b]_\theta$, tedy $(a,\, b) \in \theta$.

$\square$

Věta 3.4:

Uzavřené filtry jsou neprázdné podmnožiny $F \subseteq A$, pro které platí: Jestliže b, $b \to a \in F$, pak $a \in F$ & $b \to 1 \in F$.

Důkaz:

Nechť $a \in F$. Pro kongruenci indukovanou filtrem F platí

$$(a,\, b) \in \theta_F \Leftrightarrow a \to b,\, b \to a \in F.$$

Proto z $(a,\, 1) \in \theta_F$ plyne $a \to 1 \in F$.

Nechť $a \in F = [1]_{\theta_F}$, $a \to b \in F = [1]_{\theta_F}$. Z A2 plyne $b \in F$, protože

$$[1]_{\theta_F} \to [b]_{\theta_F} = [1]_{\theta_F}$$

implikuje $b \in [1]_{\theta_F}$.

$\square$

Věta 3.5:

Nechť $\theta \in \mathrm{Con}_{BCIA}\mathbf{A}$. Pak zobrazení $f : \theta \mapsto [1]_\theta$ je izomorfismus svazu $\mathbf{Con}_{BCIA}\mathbf{A}$ na $\mathbf{CF}_{BCIA}\mathbf{A}$.

Důkaz:

Mějme $f(\theta) = [1]_\theta = F_\theta$. K uzavřenému filtru F přiřazujeme kongruenci θ_F zobrazením

$$g : F \mapsto \theta_F,$$

které je invezní k zobrazení f. Platí pro něj

$$(a,\, b) \in \theta_F \Leftrightarrow a \to b,\, b \to a \in F$$

Ověřme nejdříve, jestli je takto definované zobrazení korektní, tedy že θ_F je skutečně relativní kongruence.

1) Ekvivalence: Nejprve musíme dokázat, že θ_F je ekvivalence.

a) Reflexivita:

$$(a,\, a) \in \theta_F \Leftrightarrow a \to a \in F,$$

což samozřejmě platí, protože

$$a \to a = 1 \in F.$$

b) Tranzitivita:

$$(a,\, b) \in \theta_F \;\&\; (b,\, c) \in \theta_F \Rightarrow (a,\, c) \in \theta_F$$

což platí právě když

$$a \to b,\, b \to a,\, b \to c,\, c \to b \in F \Rightarrow a \to c,\, c \to a \in F.$$

Jestliže jednotlivé členy dosadíme do A1, získáváme

$$(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1 \in F,$$

což platí. Jelikož $a \to b \in F$, pak také

$$(b \to c) \to (a \to c) \in F.$$

Stejně tak jelikož $b \to c \in F$, pak

$$a \to c \in F.$$

Že $c \to a \in F$ dokážeme obdobným způsobem použitím vlastnosti g) z Lemmy 1.2: Podle g) platí

$$(b \to a) \to ((c \to b) \to (c \to a)) = 1 \in F,$$

a jelikož $b \to a \in F$ a $c \to b \in F$, pak také

$$c \to a \in F.$$

Relace θ_F je tedy tranzitivní.

c) Symetrie:

$$[(a,\, b) \in \theta_F \Rightarrow (b,\, a) \in \theta_F] \Leftrightarrow [a \to b,\, b \to a \in F \Rightarrow b \to a,\, a \to b \in F],$$

což samozřejmě platí.

2) Kongruence: Teď, když víme, že θ_F je ekvivalence, musíme také dokázat, že θ_F je relativní kongruence. Začněme pouze s tím, že θ_F je kongruence:
θ_F je kongruence, právě když platí

$$(a,\, b) \in \theta_F \Rightarrow (a \to c,\, b \to c) \in \theta_F \;\&\; (c \to a,\, c \to b) \in \theta_F.$$

Stejně jako u tranzitivity použijeme stejným způsobem A1 a g):

Jestliže

$$(a,\, b) \in \theta,$$

pak podle A1 platí

$$(a \to c,\, b \to c) \in \theta,$$

protože $a \to b \in F$, podle A1 platí

$$(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)) = 1 \in F,$$

takže i

$$(b \to c) \to (a \to c) \in F.$$

Stejně tak dokážeme i

$$(a \to c) \to (b \to c) \in F.$$

Že

$$(c \to a, c \to b) \in \theta$$

dokážeme pomocí g) z lemmatu 1.2. Podle g) platí

$$(a \to b) \to ((c \to a) \to (c \to b)) = 1 \in F,$$

takže opět pokud platí

$$a \to b \in F,$$

pak platí také

$$(c \to a) \to (c \to b) \in F,$$

podobným způsobem odvodíme i

$$(c \to b) \to (c \to a) \in F,$$

z čehož plyne, že

$$(a,\, b) \in \theta,$$

implikuje

$$(a \to c,\, b \to c) \in \theta \;\&\; (c \to a,\, b \to c) \in \theta.$$

3) Relativní kongruence: Předpokládejme, že $(a \to c,\, b \to c) \in \theta_F$,$(c \to a,\, c \to b) \in \theta_F$. Pak také
$$(1 \to a,\, 1 \to b) \in \theta_F,$$
a tedy i $(a,\, b) \in \theta_F$.

Tímto jsme zjistili, že $g(F)$ je relativní kongruence.

4) Dále musíme dokázat, že $[1]_{\theta_F} = F$.
$$a \in [1]_{\theta_F} \Leftrightarrow (a,\, 1) \in \theta_F \Leftrightarrow a \in F,$$
takže $f(g(F)) = [1]_{\theta_F} = F$.

Stejně tak $g(f(\theta)) = g(F_\theta) = \theta_{F_\theta}$, a jelikož
$$(a,\, b) \in \theta_{F_\theta} \Leftrightarrow a \to b,\, b \to a \in F_\theta \Leftrightarrow (a,\, b) \in \theta,$$
pak platí $\theta_{F_\theta} = \theta$.

5) Nakonec dokážeme
$$\theta_1 \subseteq \theta_2 \Leftrightarrow [1]_{\theta_1} \subseteq [1]_{\theta_2}.$$
$\Rightarrow$ platí, protože když
$$\theta_1 \subseteq \theta_2,$$
pak také platí
$$(a,\, 1) \in \theta_1 \Rightarrow (a,\, 1) \in \theta_2,$$
což znamená $[1]_{\theta_1} \subseteq [1]_{\theta_2}$.

$\Leftarrow$: Jestliže $[1]_{\theta_1} \subseteq [1]_{\theta_2}$, pak také pro každé $(a,b) \in \theta_1$ platí
$$a \to b,\, b \to a \in [1]_{\theta_1} \subseteq [1]_{\theta_2},$$
a tedy
$$(a,\, b) \in \theta_1 \Rightarrow (a,\, b) \in \theta_2.$$

Zjistili jsme tedy, že zobrazení $f : \theta \mapsto [1]_\theta$ je opravdu izomorfismus $\mathbf{Con}_{BCIA}\mathbf{A}$ na $\mathbf{CF}_{BCIA}\mathbf{A}$ s inverzním zobrazením g.

$\square$

Teď, když už jsme dokázali, že f je izomorfismus, můžeme pokračovat v rozboru příkladu z úvodu této kapitoly.

První zkonstruujeme kongruenci, která je relativní:

Mějme faktorovou množinu $U/\theta = \{\mathbb{Z}^-,\ A \cup B\}$, kde θ je kongruence daná rozkladem $R = \{\mathbb{Z}^-,\ A \cup B\}$

Zjistíme nejdřív, jestli je θ kongruence:

1) $x,\ y \in \mathbb{Z}^-$
Jestliže $z \in \mathbb{Z}^-$, pak

$$x \to z \in \mathbb{Z}^-,\ y \to z \in \mathbb{Z}^-,$$

a tedy

$$(x \to z,\ y \to z) \in \theta.$$

Stejně tak platí

$$(z \to x,\ z \to y) \in \theta.$$

Pro $z \in A \cup B$ platí

$$x \to z \in A \cup B,\ y \to z \in A \cup B,\ z \to x \in \mathbb{Z}^-,\ z \to y \in \mathbb{Z}^-.$$

Proto také platí

$$(x \to z,\ y \to z) \in \theta \ \&\ (z \to x,\ z \to y) \in \theta.$$

2) $x,\ y \in A \cup B$
Pro $z \in \mathbb{Z}^-$ platí

$$x \to z \in \mathbb{Z}^-,\ y \to z \in \mathbb{Z}^-,\ z \to x \in A \cup B,\ z \to y \in A \cup B,$$

takže opravdu

$$(x \to z,\ y \to z) \in \theta \ \&\ (z \to x,\ z \to y) \in \theta.$$

Pokud $z \in A \cup B$, pak platí

$$x \to z \in \mathbb{Z}^-,\ y \to z \in \mathbb{Z}^-,\ z \to x \in \mathbb{Z}^-,\ z \to y \in \mathbb{Z}^-,$$

což znamená, že

$$(x \to z,\ y \to z) \in \theta \ \&\ (z \to x,\ z \to y) \in \theta$$

a relace θ je tedy opravdu kongruence.

Jako další krok dokážeme, že θ je relativní kongruence. Chceme tedy dokázat, že platí

$$(x,\, y) \in \theta \Leftrightarrow (x \to z,\, y \to z) \in \theta \ \&\ (z \to x,\, z \to y) \in \theta$$

1) $z \in A \cup B$
Kdyby $x \in A \cup B$ a

$$(x \to z,\, y \to z) \in \theta \ \&\ (z \to x,\, z \to y) \in \theta,$$

pak $x \to z \in \mathbb{Z}^-$ a proto $y \in A \cup B$. Jinak by totiž $(x \to z,\, y \to z) \notin \theta$, což je spor. Proto také platí $(x,\, y) \in \theta$.
Kdyby $x \in \mathbb{Z}^-$, pak $x \to z \in A \cup B$. Proto musí platit $y \in \mathbb{Z}^-$, a proto $(x,\, y) \in \theta$.

2) $z \in \mathbb{Z}^-$
Kdyby $x \in A \cup B$, pak $z \to x \in A \cup B$. Proto také $z \to y \in A \cup B$, a tedy i $(x,\, y) \in \theta$.
Pokud $x \in \mathbb{Z}^-$, pak také $z \to x \in \mathbb{Z}^-$ a pro y musí platit $y \in \mathbb{Z}^-$. Proto $(x,\, y) \in \theta$.

Vidíme tedy, že opravdu platí

$$(x,\, y) \in \theta \Leftrightarrow (x \to z,\, y \to z) \in \theta \ \&\ (z \to x,\, z \to y) \in \theta$$

a θ je relativní kongruence.

Kapitola 4

Struktura BCI-algeber

V následující kapitole se budeme zabývat některými důležitými podmnožinami BCI-algeber. Čerpáme z [1], [2], [5], [7], [8].

První z těchto důležitých podmnožin je množina

$$I_{\mathbf{A}} = \{x \in A : x \leq 1\}.$$

Tuto množinu nazýváme integrální část **A** a spolu s operací $\rightarrow$ je to největší podalgebra **A** taková, že $\mathbf{I_A}$ je BCK-algebra.

Druhá množina, kterou budeme popisovat, je množina

$$G_{\mathbf{A}} = \{x \rightarrow 1 : x \in A\}.$$

Tuto množina nazýváme grupová část **A**.

Věta 4.1:

$\mathbf{I_A}$ a $\mathbf{G_A}$ jsou podalgebry algebry **A**.

Důkaz:

Podle i) z lemmatu 1.2 platí

$$(x \rightarrow 1) \rightarrow (y \rightarrow 1) = (x \rightarrow y) \rightarrow 1,$$

takže $G_{\mathbf{A}}$ je uzavřená na operaci $\rightarrow$ a $\mathbf{G_A}$ je tedy podalgebra algebry **A**.
Stejně tak je $\rightarrow$ na $I_{\mathbf{A}}$ uzavřená, protože jestli $x \rightarrow 1 = 1$ a $y \rightarrow 1 = 1$, pak $(x \rightarrow y) \rightarrow 1 = 1$.

□

Jestliže definujeme operace

$$x \cdot y = (x \to 1) \to y,$$

$$x^{-1} = x \to 1,$$

pak algebra $(G_A,\ \cdot\ ,\ ^{-1},\ 1)$ je komutativní grupa. Ještě než toto tvrzení dokážeme, uveďme si pojem, který k důkazu využijeme.

Věta 4.2:

Prvek $x \in A$ je maximální prvek, právě když platí

$$x = (x \to 1) \to 1$$

Důkaz:

$\Rightarrow$ Podle c) z lemmatu 1.2 platí

$$x \leq (x \to 1) \to 1,$$

a jelikož x je maximální prvek, pak

$$x = (x \to 1) \to 1.$$

$\Leftarrow$ Nechť x, $y \in A$ takové, že $x \to y = 1$. Pak platí

$$\begin{aligned} y \to x &= y \to ((x \to 1) \to 1) \\ &= (x \to 1) \to (y \to 1) \\ &= (x \to y) \to 1 = 1. \end{aligned}$$

Proto x je maximální prvek.

□

Věta 4.3:

$G_{\mathbf{A}}$ je množina maximálních prvků algebry $\mathbf{A}$.

Důkaz:

Podle j) z lemmatu 1.2 platí

$$x \to 1 = ((x \to 1) \to 1) \to 1,$$

takže $x \to 1$ je maximální prvek A.

Nechť a je maximální prvek A. Pak platí

$$a = (a \to 1) \to 1.$$

Pokud $a \to 1 = x$, pak také

$$a = x \to 1.$$

$G_{\mathbf{A}}$ je tedy právě množina všech maximálních prvků algebry $\mathbf{A}$.

□

Definice 4.4:

Nechť $\mathbf{A}$ je BCI-algebra. Jestliže je $I_{\mathbf{A}}$ jednoprvková množina, pak se $\mathbf{A}$ nazývá polojednoduchá.

Následující věta nám pomůže dokázat, že $(G_{\mathbf{A}}, \ \cdot\ , {}^{-1}, 1)$ je opravdu komutativní grupa a že $\mathbf{G_A}$ je polojednoduchá.

Věta 4.5:

Nechť $\mathbf{A}$ je BCI-algebra. Pro každé $x,\ y \in A$ jsou následující vlastnosti $\mathbf{A}$ jsou ekvivalentní:

1) $\mathbf{A}$ je polojednoduchá,
2) pro každé $x \in A$ platí: $x \to 1 = 1$ implikuje $x = 1$,
3) pro každé $x \in A$ platí $(x \to 1) \to 1 = x$,
4) pro každé $x,\ y \in A$ platí $(x \to 1) \to y = (y \to 1) \to x$.

Důkaz:

Nechť platí 1) a $x \to 1 = 1$. Z polojednoduchosti tedy plyne $x = 1$ a 2) je splněna. Předpokládejme, že platí 2). Podle a) z lemmatu 1.2 platí

$$\begin{aligned} (x \to 1) \to (x \to 1) &= 1 && \text{podle a) z lemmatu 1.2,} \\ x \to ((x \to 1) \to 1) &= 1 && \text{podle c) z lemmatu 1.2.} \end{aligned}$$

Dále také platí

$$\begin{aligned} (((x \to 1) \to 1) \to x) \to (x \to x) &= 1 && \text{podle b) z 1.2,} \\ (((x \to 1) \to 1) \to x) \to 1 &= 1 && \\ ((x \to 1) \to 1) \to x &= 1 && \text{z předpokladu 2),} \end{aligned}$$

takže tedy

$$(x \to 1) \to 1 = x.$$

Jestliže platí 3), pak platí rovnosti

$$\begin{aligned} (x \to 1) \to y &= (x \to 1) \to ((y \to 1) \to 1) \\ &= (y \to 1) \to ((x \to 1) \to 1) && \text{podle e) Lemma 1.2} \\ &= (y \to 1) \to x. \end{aligned}$$

Nyní nechť platí 4). Jestliže prvek x je prvek z integrální části I_A, pak platí

$$\begin{aligned} x \to 1 &= 1 && \text{podle A4,} \\ x &= (1 \to 1) \to x && \text{podle A2,} \\ &= (x \to 1) \to 1 && \text{z předpokladu 4),} \\ &= 1 && \text{podle A4.} \end{aligned}$$

Proto $x = 1$. Z toho plyne, že $I_{\mathbf{A}} = \{1\}$, což znamená, že $\mathbf{A}$ je polojednoduchá. Jestliže tedy platí jedna z vlastností 1)–4), platí všechny.

$\square$

S těmito novými poznatky máme konečně dostatek znalostí k tomu, abychom dokázali následující větu.

Věta 4.6:

Nechť $G_{\mathbf{A}}$ je grupová část BCI-algebry $\mathbf{A}$. Pak $(G_{\mathbf{A}},\ \cdot,\ ^{-1},\ 1)$ je komutativní grupa, kde

$$x \cdot y = (x \to 1) \to y$$

a

$$x^{-1} = x \to 1.$$

Důkaz:

První dokážeme asociativitu. Jistě platí rovnosti

$$\begin{aligned}
(x \cdot y) \cdot z &= (((x \to 1) \to y) \to 1) \to z \\
&= (z \to 1) \to ((x \to 1) \to y) && \text{podle 4) z věty 4.3,} \\
&= (x \to 1) \to ((z \to 1) \to y) && \text{podle e) z lemmatu 1.2,} \\
&= (x \to 1) \to ((y \to 1) \to z) && \text{podle 4) z 4.3,} \\
&= x \cdot (y \cdot z).
\end{aligned}$$

Asociativita tedy platí. Komutativita plyne přímo z věty 4.3 bodu 4), protože

$$x \cdot y = (x \to 1) \to y = (y \to 1) \to x = y \cdot x.$$

Dále 1 je jednotkovým prvkem v $G_{\mathbf{A}}$, protože

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = (1 \to 1) \to x = x.$$

Nakonec dokažme, že prvek $x^{-1} = x \to 1$ je opravdu inverzní.

$$x^{-1} \cdot x = ((x \to 1) \to 1) \to x,$$

z toho můžeme podle 4) ve větě 4.3 odvodit

$$(x \to 1) \to (x \to 1) = 1,$$

takže x^{-1} je opravdu inverzní prvek k prvku x. Tím je dokázáno, že $(G_{\mathbf{A}},\cdot,^{-1},1)$ je komutativní grupa.

$\square$

Hlavním cílem této kapitoly je dokázat, kdy je direktní součin $(I_{\mathbf{A}},\ \to,\ 1) \times (G_{\mathbf{A}},\ \to,\ 1)$ je izomorfní s $\mathbf{A}$. Než dokážeme tuto skutečnost, popišme si ještě některé vlastnosti množin $G_{\mathbf{A}}$ a $I_{\mathbf{A}}$.

Nyní uvažujme operaci $\cdot$ stejně definovanou jako na začátku kapitoly, ale definovanou na celé množině A. Je nutno podotknout, že $(A,\cdot)$ tentokrát není komutativní grupa. V A totiž nemusí být 1 nutně pravým jednotkovým prvkem a $x \to 1$ nemusí být nutně inverzním prvkem zleva.

Věta 4.7:

Nechť $(A, \rightarrow, 1)$ je BCI-algebra. Definujeme-li operaci $\cdot$ na A jako

$$x \cdot y = (x \rightarrow 1) \rightarrow y,$$

pak operace $\cdot$ na $(A, \cdot)$ není nutně asociativní a platí

$$(x \cdot y) \cdot z \leq x \cdot (y \cdot z).$$

Důkaz:

Z c) a e) z lemmatu 1.2 plynou rovnosti

$$\begin{aligned}((x \cdot y) \cdot z) \rightarrow (x \cdot (y \cdot z)) &= (((((x \rightarrow 1) \rightarrow y) \rightarrow 1) \rightarrow z) \rightarrow ((x \rightarrow 1) \rightarrow ((y \rightarrow 1) \rightarrow z)),\\ &= (x \rightarrow 1) \rightarrow ((y \rightarrow 1) \rightarrow (((((x \rightarrow 1) \rightarrow y) \rightarrow 1) \rightarrow z) \rightarrow z)),\\ &\leq (x \rightarrow 1) \rightarrow ((y \rightarrow 1) \rightarrow (((((x \rightarrow 1) \rightarrow y) \rightarrow 1) \rightarrow z) \rightarrow z)),\\ &\leq (x \rightarrow 1) \rightarrow (((x \rightarrow 1) \rightarrow y) \rightarrow y) = 1,\end{aligned}$$

a proto

$$(x \cdot y) \cdot z \leq x \cdot (y \cdot z).$$

□

V následující větě zjistíme, za jakých podmínek je operace $\cdot$ asociativní.

Věta 4.8:

Nechť $\mathbf{A}$ je BCI-algebra. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1) operace $\cdot$ je na A asociativní,

2) $(g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ pro každé $g,h \in G_{\mathbf{A}}$ a $x \in A$,

3) $g^{-1} \rightarrow (g \rightarrow x) = x$ pro každé $g \in G_{\mathbf{A}}$ a $x \in A$.

Důkaz:

Jestliže platí 1), pak zajisté platí i 2).

Nechť platí 2). Jelikož platí

$$g \cdot g^{-1} = 1,$$

pak platí rovnosti

$$x = 1 \cdot x = (g \cdot g^{-1}) \cdot x.$$

Jelikož 2) platí, pak můžeme psát

$$g \cdot (g^{-1} \cdot x) = (g \rightarrow 1) \rightarrow ((g^{-1} \rightarrow 1) \rightarrow x),$$

a z toho už získáme

$$g^{-1} \rightarrow (g \rightarrow x).$$

To znamená, že 3) platí.

Nechť platí 3). Uvažujme

$$\begin{aligned}
x \cdot (y \cdot z) &= (x \to 1) \to ((y \to 1) \to z) \\
&\leq ((y \to 1)^{-1} \to (x \to 1)) \to ((y \to 1)^{-1} \to ((y \to 1) \to z) && \text{podle g) z 1.2} \\
&= (x \to ((y \to 1)^{-1} \to 1)) \to z && \text{předpoklad 3)} \\
&= (x \to (y \to 1)) \to z, \\
&= ((x \cdot y) \to 1) \to z = (x \cdot y) \cdot z.
\end{aligned}$$

Můžeme tedy říct, že

$$x \cdot (y \cdot z) \leq (x \cdot y) \cdot z,$$

a jelikož jsme výše dokázali opačnou nerovnost, znamená to, že opravdu platí

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

□

Věta 4.9:

Nechť $x \in A$. Pak $((x \to 1) \to 1) \to x \in I_{\mathbf{A}}$.

Důkaz:

$$\begin{aligned}
x &\leq (x \to 1) \to 1 && \text{podle c) z lemmatu 1.2} \\
((x \to 1) \to 1) \to x &\leq x \to x && \text{podle d) z lemmatu 1.2,} \\
((x \to 1) \to 1) \to x &\leq 1.
\end{aligned}$$

□

Nyní konečně můžeme ukázat, kdy je $(A, \to, 1)$ izomorfní s $(I_{\mathbf{A}}, \to, 1) \times (G_{\mathbf{A}}, \to, 1)$.

Věta 4.10:

Nechť $\mathbf{A}$ je BCI-algebra. Následující vlastnosti jsou ekvivalentní.

1) operace $\cdot$ je na A asociativní,

2) $\mathbf{A}$ je izomorfní s $(I_{\mathbf{A}}, \to, 1) \times (G_{\mathbf{A}}, \to, 1)$,

3) $G_{\mathbf{A}}$ je uzavřený filtr $\mathbf{A}$.

Důkaz:

Jestliže platí 1), pak podle 3) z věty 4.8 platí pro každé $g \in G_{\mathbf{A}}$, $a \in A$

$$\begin{aligned}
a &= g^{-1} \to (g \to a) \\
&= (g \to 1) \to (g \to a) \\
&= g \to ((g \to 1) \to a),
\end{aligned}$$

přičemž pokud $g = x \to 1$, $a = x$, pak také platí

$$x = (x \to 1) \to (((x \to 1) \to 1) \to x),$$

pro každé $x \in A$. $x \to 1 \in G_{\mathbf{A}}$ splňuje $x = (x \to 1) \to 1$ a $(((x \to 1) \to 1) \to x \in I_A$ pro každé $x \in A$. Proto zobrazení $\gamma : I_{\mathbf{A}} \times G_{\mathbf{A}} \to A$ definované jako

$$\gamma(i, g) = g \to i,$$

kde $g = x \to 1$, $i = ((x \to 1) \to 1) \to x$, je surjektivní. Nyní dokážeme, že γ je injektivní. Jestliže $i \in I_{\mathbf{A}}$ a $g \in G_{\mathbf{A}}$, pak jestli platí

$$g \to i = 1,$$

pak $i = g = 1 \in I_{\mathbf{A}} \cap G_{\mathbf{A}}$, protože g je maximální prvek. Proto je γ injektivní. Nakonec ukážeme, že γ je homomorfismus. Musí pro každé $g, h \in G_{\mathbf{A}}$, $i, j \in I_{\mathbf{A}}$ platit

$$(h \to g) \to (j \to i) = (h \to j) \to (g \to i).$$

Uvažujme tedy $i, j \in I_{\mathbf{A}}$ a $g, h \in G_{\mathbf{A}}$. Jelikož $(h \to g) \in G_{\mathbf{A}}$, můžeme uvažovat rovnosti

$$\begin{aligned}
(h \to g) \to (j \to i) &= ((h \to g) \to 1) \cdot (j \to i) \\
&= (h \cdot (g \to 1)) \cdot (j \to i) \\
&= h \cdot ((g \to 1) \cdot (j \to i)) && \text{2) z věty 4.5,} \\
&= (h \to 1) \to (g \to (j \to i)) \\
&= j \to ((h \to 1) \to (g \to i)) \\
&= (((h \to 1) \to h) \to j) \to ((h \to 1) \to (g \to i)) \\
&\leq (h \to j) \to (g \to i),
\end{aligned}$$

a tedy také

$$(h \to g) \to (j \to i) \leq (h \to j) \to (g \to i).$$

Opačně platí rovnosti

$$\begin{aligned}
(h \to j) \to (g \to i) &= (h \to j) \to ((h \to (h \to 1)) \to (g \to i)), \\
&\leq (j \to (h \to 1)) \to (g \to i), \\
&= ((h \to 1) \to g) \to (j \to i), \\
&= (h \to g) \to (j \to i).
\end{aligned}$$

Z toho nám plyne

$$(h \to j) \to (g \to i) \leq (h \to g) \to (j \to i)$$

a z nerovnosti výše tedy konečně plyne

$$(h \to g) \to (j \to i) = (h \to j) \to (g \to i),$$

a γ je tedy izomorfismus.

Nechť platí 2). Nechť $\mathbf{B}$ je direktní součin $\mathbf{I_A} \times \mathbf{G_A}$. Grupová část BCI-algebry $\mathbf{B}$ je $G_{\mathbf{B}} = \{(1, g) : g \in G_{\mathbf{A}}\}$ a protože $G_{\mathbf{A}}$ je množina maximálních prvků, jakýkoliv izomorfismus $\eta : \mathbf{A} \mapsto \mathbf{B}$ zobrazí $G_{\mathbf{A}}$ na $G_{\mathbf{B}}$. Nyní, jestliže π je projekce $\mathbf{B}$ na $\mathbf{I_A}$, pak $G_{\mathbf{A}}$ je jádro složeného homomorfismu $\pi \circ \eta$ z $\mathbf{A}$ na $\mathbf{I_A}$. Proto $G_{\mathbf{A}} \in \mathrm{CF}_{BCIA}\mathbf{A}$.

Nechť platí 3). Dále nechť $g \in G_{\mathbf{A}}$.

Platí nerovnosti

$$\begin{aligned} 1 \to x &\leq (g \to 1) \to (g \to x) && \text{podle e) z lemmatu 1.2,} \\ &= g^{-1} \to (g \to x) \end{aligned}$$

Oba prvky g a $g^{-1} \in G_{\mathbf{A}}$, což je filtr a proto také

$$(g^{-1} \to (g \to x)) \to x \in G_A.$$

Navíc

$$\begin{aligned} 1 \to x &\leq (g \to 1) \to (g \to x) && \text{podle g),} \\ (g^{-1} \to (g \to x)) \to x &\leq x \to x = 1 && \text{podle d),} \end{aligned}$$

takže

$$g^{-1} \to (g \to x) \leq x$$

a z tohoto a opačné nerovnosti platí

$$g^{-1} \to (g \to x) = x.$$

Podle věty 4.8 to ale znamená, že na $\mathbf{A}$ je operace $\cdot$ asociativní. Tím jsme dokázali, že jestliže platí jedna z vlastností 1)–3), platí všechny tři vlastnosti.

Závěr

V této bakalářské práci jsme se zabývali BCI-algebrami.

Cílem práce bylo dokázat základní vlasnosti BCI-algeber a souvislosti mezi hlavními uvedenými pojmy. Tyto cíle jsme splnili, hlavně v kapitolách 3 a 4, kde byly využity základní poznatky k důkazu důležitých tvrzení o BCI-algebrách.

V úvodní první kapitole se zabýváme základními aritmetickými vlastnostmi, plynoucí z axiomů BCI-algeber. Tyto vlastnosti jsme dokázali. Dále jsme uvedli některé příklady BCI-algeber.

Druhá kapitola předsavuje strohý úvod do problematiky reziduovaných komutativních monoidů. Cílem této kapitoly bylo ukázat, že BCI-algebry a reziduované komutativní monoidy mají stejné vlastnosti. Kapitolu jsme ukončili příkladem, na kterém jsme ukázali, že třída reziduovaných komutativních monoidů nejsou uzavřené na faktorizaci.

V třetí kapitole uvádíme čtenáře do problematiky relativních kongruencí a jejich souvislosti s uzavřenými filtry. Hlavním cílem kapitoly bylo dokázat, že svaz všech relativních kongruencí je izomorfní se svazem všech uzavřených filtrů.

V poslední kapitole se zabýváme grupovou a integrální částí BCI-algebry. Dokázali jsme některé jejich důležité vlastnosti. Cílem této kapitoly bylo dokázat, za jakých podmínek je BCI-algebra izomorfní s direktním součinem její integrální a grupové části. Ukázali jsme, že tento izomorfismus existuje, právě když je její grupová část i uzavřeným filtrem dané BCI-algebry.

Celý text byl vysázen pomocí programu LaTeX.

Literatura

[1] P. Emanovský, J. Kühr: *Some properties of pseudo-BCK- and pseudo-BCI-algebras.* Fuzzy Sets Syst. 339 (2018), 1–16.

[2] J. G. Raftery, C. J. van Alten: *Residuation in commutative ordered monoids with minimal zero.* Rep. Math. Log. 34 (2000), 23–57.

[3] Y. Huang: *BCI-Algebra*, Beijing: Science press (2007), 1–23

[4] A. Wronski: *BCK-algebras do not form a variety,* Math. Japonica 28 (1983), 211–213

[5] T. Lei, C. Xi,: *P-radical in BCI-algebras,* Math. Japonica 30 (1985), 511–517

[6] J. G. Raftery: *On the variety generated by involutive pocrims,* Rep. Math. Log. 42 (2007), 71–86

[7] G. Dymek: *Atoms and ideals of pseudo-BCI-algebras,* Comment. Math. 52 (2012), 73–90

[8] G. Dymek: *p-semisimple pseudo-BCI-algebras,* J. Mult.-Val. Log. Soft Comput. 19 (2012), 461–474.

[9] D. Stanovsky *Idempotent Subreducts of Semimodules over Commutative Semirings,* Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, Tome 121 (2009), 1–7.