



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV FYZIKÁLNÍHO INŽENÝRSTVÍ

INSTITUTE OF PHYSICAL ENGINEERING

SPECIÁLNÍ TEORIE RELATIVITY

THEORY OF SPECIAL RELATIVITY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Radovan Sokol

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Mgr. Jakub Bělín, Ph.D.

BRNO 2024

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav fyzikálního inženýrství
Student: **Radovan Sokol**
Studijní program: Fyzikální inženýrství a nanotechnologie
Studijní obor: bez specializace
Vedoucí práce: **Mgr. Jakub Bělín, Ph.D.**
Akademický rok: 2023/24

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Speciální teorie relativity

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Moderní fyzikální teorie využívají teorii grup ke studiu symetrií uvažovaného systému. Grupovou strukturu například vykazují i Lorentzovy transformace, které tvoří základní pilíř speciální teorie relativity. Navíc, známé jevy ze speciální teorie relativity je možné odvodit ze struktury této grupy.

Cíle bakalářské práce:

Student ve své bakalářské práci prozkoumá speciální teorii relativity z pohledu teorie grup. Prozkoumá strukturu Lorentzovy grupy, její možné reprezentace a odvodí některé odpovídající fyzikální důsledky. Zároveň aplikuje získané výsledky do vývoje optické soustavy, simulující Lorentzovu transformaci.

Seznam doporučené literatury:

CARROLL, Sean M. Spacetime and Geometry. Cambridge University Press, 2019. ISBN 9781108488396. Dostupné z: <https://doi.org/10.1017/9781108770385>.

JONES, H. F. Groups, representations and physics. CRC Press, 2020. ISBN 9781420050295.

GRAY, Norman; O'DONNELL, Ruairidh; MACSPORRAN, Ross; OXBURGH, Stephen a COURTIALL, Johannes. Relativistic photography with a wide aperture. Journal of the Optical Society of America A. 2020, roč. 37, č. 1. ISSN 1084-7529. Dostupné z: <https://doi.org/10.1364/JOSAA.37.000123>.

BĚLÍN, Jakub; FERENCZI, Gergely a COURTIALL, Johannes. Skew-lens image rotator. Optics Express. 2022, roč. 30, č. 15. ISSN 1094-4087. Dostupné z: <https://doi.org/10.1364/OE.458158>.

SOBOŇA, Matůš a BĚLÍN, Jakub. Skew-Lens Window to Special Relativity. In Imaging Systems and Applications (pp. ITh4C-4). 2023. Optica Publishing Group.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2023/24

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Tomáš Šikola, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

V tejto bakalárskej práci sa budeme zaoberať špeciálnou relativitou. Ukážeme si, ako vyzerá Lorentzova transformácia, relativistické javy a grupová štruktúra Lorentzovej transformácie pre 3+1 a 2+1 rozmerný časopriestor. Tieto vlastnosti využijeme pre výpočet optickej sústavy, ktorej Lieova algebra bude ekvivalentná s $so(2, 1)$.

Summary

In this bachelor thesis we will focus on special relativity. We will show how the Lorentz transformation looks like, relativistic effects and group structure of Lorentz transformation for 3+1 and 2+1 dimensional spacetime. We will then use these qualities to calculate an optical system, which has Lie algebra equivalent to $so(2, 1)$.

Klíčová slova

Špeciálna relativita, Lorentzova grupa, relativistické zobrazovanie, Wignerova rotácia, nerovnoobežné šošovky.

Keywords

Special relativity, Lorentz group, relativistic imaging, Wigner rotation, skew lenses

SOKOL, R. *SPECIÁLNÍ TEORIE RELATIVITY*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2024. 24 s. Vedoucí bakalárskej práce Mgr. Jakub Bělín, Ph.D.

Prehlasujem, že túto prácu som vypracoval samostatne s využitím uvedených zdrojov.

Radovan Sokol

Ďakujem môjmu vedúcemu práce Mgr. Jakubovi Bělínovi Ph.D za jeho trpezlivosť a pomoc pri vypracovaní tejto práce. Taktiež by som chcel poďakovať môjmu otcovi, za to, že sedel pri mne keď som kontroloval výpočty a sledoval či som nezabudol nejaké mínus.

Radovan Sokol

Citace tištěné práce:

SOKOL, Radovan. Speciální teorie relativity. Brno, 2024. Dostupné také z: <https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/158276>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav fyzikálního inženýrství. Vedoucí práce Jakub Bělín.

Citace elektronického zdroje:

SOKOL, Radovan. Speciální teorie relativity [online]. Brno, 2024 [cit. 2024-05-23]. Dostupné z: <https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/158276>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav fyzikálního inženýrství. Vedoucí práce Jakub Bělín.

Obsah

1	Zoznam publikácií	2
2	Úvod	3
3	Lorentzova transformácia	4
4	Relativistické dôsledky	7
4.1	Kontrakcia dĺžky, dilatácia času	7
4.2	Rebríkový paradox	7
4.3	Relativistická aberácia svetla	8
5	Wignerova rotácia	10
6	Grupy $SO(3, 1)$ a $SO(2, 1)$	12
6.1	Lorentzova grupa $SO(3, 1)$	12
6.2	Grupa $SO(2, 1)$	13
7	Grupa $SO(3, \mathbb{R})$ a Lieova algebra $\mathfrak{so}(2, 1)$ pomocou šikmých šošoviek	15
7.1	Zobrazovanie šikmými šošovkami	15
7.2	grupa $SO(3, \mathbb{R})$	15
7.3	Rotácia pomocou šikmých šošoviek	16
7.4	Lorentzova transformácia pomocou šikmých šošoviek	17
7.5	Wignerova rotácia pre šikmé šošovky	19
7.6	Lieova algebra $\mathfrak{so}(2, 1)$ pomocou šikmých šošoviek	22
8	Záver	23
9	Literatura	24

1. Zoznam publikácií

Výsledky tejto práce budú použité v nasledujúcich článkoch:

1. Soboňa, M., Sokol, R.& Bělín, J.(2024). Wigner Rotation Performed by a System of Skew Lenses. Conference paper accepted for oral presentation at *Optica Imaging and Applied Optics Congress*.
2. Soboňa, M., Sokol, R., Locher, M& Bělín, J.(2024). Special Relativity made Accessible with Skew Lenses. In preparation.

2. Úvod

Pre ľubovoľný systém musí platiť princíp invariantnosti, teda medzi dvomi systémami existuje lineárna transformácia, pokiaľ sa voči sebe pohybujú konštantnou rýchlosťou. Prvým riešením bola Galileiho transformácia, ktorá bola pre danú dobu postačujúca. Pri práci s elektromagnetickým vlnením zistil nemecký fyzik Heinrich R. Hertz, že keď použil Galileiho transformáciu a dosadil do Maxwellových rovníc, tak výsledok nekorešpondoval s experimentom. Riešila sa tak otázka, kde je chyba v Maxwellových rovniciach. Ukázalo sa však, že boli správne a problém bol v Galileiho transformácii. Zistilo sa, že vlnová rovnica musí byť invariantná voči transformácii, čo Galileiho transformácia nespĺňala. Koncom 19. storočia holandský fyzik Hendrik Lorentz formuloval Lorentzovu transformáciu, pre ktorú bola vlnová rovnica invariantná. Samotný koncept špeciálnej relativity neskôr formuloval Albert Einstein v roku 1905.

Ukázalo sa, že pre popis niektorých fyzikálnych javov je vhodné použiť matematickú štruktúru nazývanú grupa a pre popis špeciálnej relativity sa dá použiť tzv. Lorentzova grupa $SO(3, 1)$.

Špeciálna realtivity sa často spája s časticovou optikou, ale v tejto práci ukážeme, ako sa dajú dosiahnuť a využiť relativistické javy na optickom systéme, ktorý je zostrojený zo štandardných šošoviek. Zároveň dôsledky špeciálnej relativity sú do istej miery neintuitívne a náročnejšie na predstavu. Javy ako kontrakcia dĺžky, dilatácia času a narušenie simultánnosti sa dajú popísať krátkym výpočtom, ale pre bežného človeka je pre jednoduché vysvetlenie lepšie to len zobrazit.

3. Lorentzova transformácia

Majme vnútorného pozorovateľa, čo sleduje nejaký objekt, ktorý sa pohybuje rýchlosťou v . Potom môžeme povedať, že jeho poloha je:

$$x = vt \quad (3.1)$$

Ďalej majme vonkajšieho pozorovateľa, ktorý sleduje ten istý objekt a vnútorný pozorovateľ sa voči nemu pohybuje rýchlosťou u . Pre vonkajšieho pozorovateľa je poloha telesa:

$$x' = (u + v)t \quad (3.2)$$

Rovnicu 3.2 si vieme pre zjednodušenie zapísať v tvare:

$$x' = ut + x \quad (3.3)$$

Túto transformáciu nazývame Galileiho transformácia. Ak si povieme, že čas pre vonkajšieho aj vnútorného pozorovateľa je rovnaký, tak potom $t' = t$ a môžeme zapísať túto transformáciu v maticovom tvare:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Podľa experimentu by mala byť vlnová rovnica pre svetlo invariantná voči transformácii, ale pre Galileiho transformáciu nie je. Dá sa to jednoducho ukázať tak, že ak máme funkciu $\phi(x, y, z, t)$ a riešime vlnovú rovnicu:

$$\square\phi(x, y, z, t) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.5)$$

Ak budeme vychádzať z 3.3 a platí $y = y'$, $z = z'$ a $t = t'$ tak budeme riešiť:

$$\square\phi(x', y, z, t) = \square\phi(x + ut, y, z, t) = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2\phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - 2\frac{v}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t \partial x'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.6)$$

Na opravu musíme urobiť dve úvahy, najprv musíme zaviesť zmenu, že pre oboch pozorovateľov plynie čas inak. Druhou úvahou bude, že rýchlosť svetla c je vždy konštantná. Túto transformáciu si zapíšeme v maticovom tvare takto:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Označme si maticu udávajúcu túto transformáciu Λ . Keďže existuje transformácia z x do x' , tak musí existovať aj inverzná transformácia. Pomocou Kramerovho pravidla sa dá ukázať, že bude mať tvar:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(\Lambda)} \begin{pmatrix} h & -f \\ -g & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Z rovnice (5) si vyjadríme x a x'

$$x' = gct + hx \quad (3.9)$$

3. LORENTZOVA TRANSFORMÁCIA

$$x = \frac{(x' - gct)}{h} \quad (3.10)$$

Bod, ktorý je pre vonkajšieho pozorovateľa stacionárny sa pohybuje pre vnútorného pozorovateľa rýchlosťou u a bude sa nachádzať na mieste $x = ut + x_1$. To keď spojíme s rovnicou (8) zistíme, že musí platiť $u = -\frac{g}{h}c$. Podobne môže byť stacionárny bod v sústave vnútorného pozorovateľa, ktorý sa voči vonkajšiemu pozorovateľovi bude pohybovať rýchlosťou $-u$. Jeho poloha bude $x' = -ut' + x'_1$ a z toho $u = -\frac{g}{c}$, z čoho plynie $e = h$. Vyjadríme si z rovnice (5) x' a ct' :

$$x' = gct + hx = h(x - ut) \quad (3.11)$$

$$ct' = ect + fx = h(ct + \frac{f}{h}x) \quad (3.12)$$

Rýchlosť v' v sústave vonkajšieho pozorovateľa sa vypočíta ako:

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d(x - ut)}{d(\frac{f}{hc}x + t)} = \frac{dx - udt}{\frac{f}{hc}dx + dt} = \frac{v - u}{1 + \frac{f}{h} \frac{v}{c}} \quad (3.13)$$

Keďže rýchlosť svetla musí byť pre obe sústavy rovnaká, tak v prípade, že $v = c$, potom $v' = c$ z tadiaľ:

$$\frac{f}{h} = -\frac{u}{c} \quad (3.14)$$

Môžeme si všimnúť, že $\frac{g}{h} = -\frac{f}{h} = -\frac{u}{c}$, vďaka čomu si vieme vyjadriť $\det \Lambda = h^2(1 - (\frac{u}{c})^2)$. Ak si napíšeme vzťahy pre x a x' dosadíme za $\det \Lambda$ dostávame:

$$x' = h(x - ut) \quad (3.15)$$

$$x = \frac{1}{h(1 - (\frac{u}{c})^2)}(x' + ut') \quad (3.16)$$

Transformácia musí byť symetrická, lebo ak by sme zostali v tej istej vzťažnej sústave, ale otočili by sme smer rýchlosti, tak by sa malo zmeniť u na $-u$ a preto dostaneme:

$$h = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}} \quad (3.17)$$

Výsledná transformácia bude teda vyzeráť takto:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}} \frac{u}{c} \\ \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}} \frac{u}{c} & \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Platí tak:

$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}} ct + \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}} \frac{u}{c} x \quad (3.19)$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}} \frac{u}{c} ct + \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}} x \quad (3.20)$$

Ak u je o mnoho menšie ako c môžeme povedať, že $\frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}} \approx 1$ a pokiaľ x nie je veľmi veľké bude člen $\frac{u}{c}x \approx 0$ a dostávame:

$$ct' = ct \quad (3.21)$$

$$x' = ut + x \quad (3.22)$$

čo je Galileiho transformácia. Nakoniec by sme chceli byť schopný zapísať Lorentzovu transformáciu stručnejšie a preto povieme, že $\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} = \gamma$, čo nazývame gamma faktor a $\frac{u}{c} = \beta$ sa nazýva beta faktor. Ak by sme túto transformáciu zapísali pre priestor dimenzie $3 + 1$ dostaneme:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Inverznú transformáciu vieme dostať krátkou úvahou. Pre čiarkovanú sústavu sa bude nečiarkovaná sústava hýbať rýchlosťou $-u$. Keďže v γ sa rýchlosť vyskytuje v ako u^2 , tak sa nezmení a $\beta \rightarrow -\beta$. Transformácia z čiarkovanej sústavy do nečiarkovanej tak bude:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

4. Relativistické dôsledky

4.1. Kontrakcia dĺžky, dilatácia času

Majme dva body x'_1 a x'_2 , ktoré sa nachádzajú v kludovej sústave. Ak sa budeme voči tejto sústave pohybovať rýchlosťou v , tak sa tie dva body transformujú do x_1 a x_2 takto[6]:

$$\begin{aligned}x'_1 &= \gamma(x_1 + vt_1) \\x'_2 &= \gamma(x_2 + vt_2)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Dĺžku úseku, daného x'_1 a x'_2 , si označíme $l' = x'_2 - x'_1$. Táto dĺžka sa nám bude javiť ako $l = x_2 - x_1$. Meranie vzdialenosti dvoch stacionárnych bodov sa odohráva v tom istom čase takže $t_1 = t_2$ a tak dĺžka tohto úseku bude pre nás:

$$l = \frac{l'}{\gamma}\tag{4.2}$$

Vidíme tento úsek teda γ -krát kratší.

Otočme náš prípad naopak, takže $x'_1 = x'_2$ a $t'_1 \neq t'_2$. Budeme tak merať, ako dlhý čas prebehol medzi dvomi udalosťami, ktoré sa odohrali na rovnakom mieste, ale v iný čas. Čas, ktorý prešiel medzi nimi označíme $T' = t'_2 - t'_1$. Transformujme čas z kludovej sústavy do našej.

$$\begin{aligned}t'_1 &= \gamma\left(t_1 + \frac{v}{c^2}x_1\right) \\t'_2 &= \gamma\left(t_2 + \frac{v}{c^2}x_2\right)\end{aligned}\tag{4.3}$$

Pre nás doba medzi tými dvomi udalosťami bola:

$$T = \frac{T'}{\gamma}\tag{4.4}$$

Tento jav sa nazýva dilatácia času.

Posledný jav, na ktorý sa pozrieme je narušenie simultánnosti. Majme dve udalosti v kludovej sústave, ktoré nastanú v tom istom takže $T = t_2 - t_1 = 0$, ale na inom mieste $x_1 \neq x_2$. Ak sa budeme voči tejto sústave pohybovať, čas sa transformuje rovnako ako v 4.3. V našej sústave bude tak čas, ktorý uplynie medzi týmito dvomi udalosťami:

$$T' = \gamma\left(\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\right)\tag{4.5}$$

Tieto dve udalosti sa pre nás odohrajú v iných časoch, medzi ktorými prejde doba $\gamma\left(\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\right)$. Tieto javy sme zobrazili simuláciou v neskoršej kapitole. Kontrakcia dĺžky je zobrazená na obr. 7.2. Dilatácia času a narušenie simultánnosti sú zobrazené na 7.3

4.2. Rebríkový paradox

Prepojenie týchto troch javov sa dá ukázať na príklade rebríkového paradoxu. Pozorujeme človeka, čo drží rebrík a vbieha do garáže. Človek, čo drží rebrík, vníma svoj rebrík, že má

4.3. RELATIVISTICKÁ ABERÁCIA SVETLA

dĺžku L' a pohybuje sa voči garáži dĺžky L_g rýchlosťou v . Ak vbehne dnu do garáže, tak zistí, že narazil. To, že narazil, si však uvedomí neskôr, ako niekto stacionárny voči garáži, kto by to sledoval. Ten by povedal, že informácia letí oproti nemu rýchlosťou svetla. Ak chceme určiť dĺžku garáže, tak aby sa do nej vošiel rebrík a stále sa dali zatvoriť dvere a dostávame:

$$L' = L'_g + vt' = ct' \quad (4.6)$$

Musíme zistiť, kedy sa dostane informácia o náraze ku koncu rebríka na druhej strane garáže, píšeme teda:

$$t' = \frac{L'_g}{c - v} \quad (4.7)$$

Dĺžka rebríka bude tak:

$$L' = L_g \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} \quad (4.8)$$

Ak chceme, aby za sebou zatvoril dvere musí platiť, že $L' \leq L'_g$. Kvôli kontrakcii dĺžky vieme, že $L_g = \gamma L'_g$ takže garáž sa bude rebríku javiť kratšia. Dôvod prečo sa rebrík zmestí do garáže sa dá vysvetliť práve tak, že si povieme, že náraz sa odohrá až potom, ako čo vošiel do garáže.

4.3. Relativistická aberácia svetla

Vráťme sa ešte k rebríkovému paradoxu. Ak vbieha do garáže, ktorá je preňho kratšia, ale taktiež je schopný do nej vložiť rebrík, ktorý je dlhší aj v stacionárnej sústave, človek si môže položiť otázku čo teda vidí. Stojaci pozorovateľ pozoruje objekt v čase t_1 , ktorý má voči nemu polohu \vec{r}_1 . Pohybujúci sa pozorovateľ uvidí tento lúč v čase t_2 v polohe \vec{r}_2 voči pohybujúcemu sa pozorovateľovi. Vektory \vec{r}_1 a \vec{r}_2 sa dajú rozložiť na zložku rovnobežnú so smerom pohybu a kolmú. Transformovať sa bude iba rovnobežná zložka. Toto platí univerzálne a tak použijeme vektorovú Lorentzovu transformáciu.

$$\begin{aligned} \vec{r}'_{\perp} &= \vec{r}_{\perp} \\ \vec{r}'_{\parallel} &= \gamma (\vec{r}_{\parallel} - \vec{\beta}t) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Platí tak:

$$\vec{r}'_{\parallel} + \vec{r}'_{\perp} = \vec{r}' = \vec{r}_{\perp} + \gamma (\vec{r}_{\parallel} - \vec{\beta}t) \quad (4.10)$$

Upravíme pravú stranu rovnice tak že:

$$\vec{r}_{\perp} + \gamma (\vec{r}_{\parallel} - \vec{\beta}t) = \vec{r}' + (\gamma - 1)\vec{r}_{\parallel} - \gamma\vec{\beta}t \quad (4.11)$$

Keďže platí $\vec{r}'_{\parallel} = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{\beta})\vec{\beta}}{\beta^2}$ dosadením do rovnice dostávame:

$$\vec{r}' = \vec{r} + (\gamma - 1) \frac{(\vec{r} \cdot \vec{\beta})\vec{\beta}}{\beta^2} - \gamma\vec{\beta}t \quad (4.12)$$

Vzdialenosť medzi spomínanými bodmi je bodmi je $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ a pre pohybujúceho pozorovateľa $\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2$. Z rovnice 4.12 tak plynie:

$$\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2 = \vec{r}_1 + (\gamma - 1) \frac{(\vec{r}_1 \cdot \vec{\beta})\vec{\beta}}{\beta^2} - \gamma\vec{\beta}t_1 - \vec{r}_2 - (\gamma - 1) \frac{(\vec{r}_2 \cdot \vec{\beta})\vec{\beta}}{\beta^2} + \gamma\vec{\beta}t_2 \quad (4.13)$$

Medzi \vec{r}_1 a \vec{r}_2 nastal posun o vzdialenosť a v smere nejakého jednotkového vektoru \vec{n} . Platí tak:

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 &= \vec{r}_1 - a\vec{n} \\ t_2 &= t_1 + \frac{a}{c} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dosadením do 4.13 dostávame:

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_1 + (\gamma - 1) \frac{(\vec{r}_1 \cdot \vec{\beta})\vec{\beta}}{\beta^2} - \gamma\vec{\beta}ct_1 + a(\vec{n} + (\gamma - 1) \frac{(\vec{n} \cdot \vec{\beta})}{\beta^2} + \gamma\vec{\beta}) \quad (4.15)$$

Pohybujúci sa pozorovateľ tak uvidí objekt vo väčšej vzdialenosti.

Teraz zvolíme rýchlosť tak, že sa pohybujúci pozorovateľ pohybuje len v smere osy x , takže $\vec{v} = (v, 0, 0)$. Vyjadríme si dx' a dt' ako:

$$\begin{aligned} dx' &= \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ dt' &= \frac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ak svetlo bude prichádzať z nejakého miesta, ktoré je voči pohybujúcemu sa pozorovateľovi posunuté v smere osy y a $z = 0$, tak rýchlosť svetla bude:

$$\vec{u} = c(\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad (4.17)$$

Rýchlosť svetla v smere osy x bude pre pohybujúceho sa pozorovateľa:

$$v'_x = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{v}{c^2}dx} \quad (4.18)$$

Platí, že $\frac{dx}{dt} = u \cos \theta$. Dostávame tak rovnicu:

$$c \cos \theta' = \frac{c \cos \theta - v}{1 - \frac{v \cos \theta}{c}} \quad (4.19)$$

Podelením tejto rovnice c dostaneme:

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v \cos \theta}{c}} \quad (4.20)$$

Svetlo pre pohybujúceho pozorovateľa prichádza pod uhlom, ktorý je θ' .

5. Wignerova rotácia

Pozorujme sústavu, ktorá sa voči nám pohybuje rýchlosťou $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$. Ak by sme použili Galileiho transformáciu tak môžeme použiť zápis:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ v_y & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

V našom prípade najprv transformujeme v smere osy x a potom v smere osy y . Ak by sme poradie transformácií prehodili, nič sa nezmení, lebo sa dá ľahko ukázať, že platí:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ v_y & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ v_y & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Očividne je možné zapísať túto transformáciu pomocou jednej matice, ktorú by sme získali vynásobením matíc z 5.2. Takýto rozklad umožňuje trochu zdĺhavejšie, ale jednoduché riešenie. Ak by sme ale použili Lorentzovu transformáciu nebudeme schopní použiť takýto postup. Ak by sme rozdelili rýchlosť na dve zložky a transformovali najprv v smere x a potom y dostaneme:

$$\begin{pmatrix} \gamma_y & 0 & \gamma_y \beta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma_y \beta_y & 0 & \gamma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_x & \gamma_x \beta_x & 0 \\ \gamma_x \beta_x & \gamma_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_x \gamma_y & \gamma_x \gamma_y \beta_x & \gamma_y \beta_y \\ \gamma_x \beta_x & \gamma_x & 0 \\ \gamma_x \gamma_y \beta_y & \gamma_x \gamma_y \beta_x \beta_y & \gamma_y \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Prehodením poradia týchto dvoch matíc sa zmení aj výsledná matica a teda dostávame inú transformáciu. Všeobecný tvar Lorentzovho boostu je odvodený v [2]. Teraz sa pozrime znovu na rovnicu 5.3. Miesto toho, aby sme považovali výslednú maticu za zloženie dvoch boostov, budeme ju považovať za zloženie boostu a rotácie. Ak chceme určiť o akú rotáciu a aký boost sa jedná, stačí na ňu pôsobiť spätnou rotáciou o nejaký uhol α . Takto dostávame:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_x \gamma_y & \gamma_x \gamma_y \beta_x & \gamma_y \beta_y \\ \gamma_x \beta_x & \gamma_x & 0 \\ \gamma_x \gamma_y \beta_y & \gamma_x \gamma_y \beta_x \beta_y & \gamma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_x \gamma_y & \gamma_x \gamma_y \beta_x & \gamma_y \beta_y \\ \gamma_x \beta_x \cos(\alpha) - \gamma_x \gamma_y \beta_y \sin(\alpha) & \gamma_x \cos(\alpha) - \gamma_x \gamma_y \beta_x \beta_y \sin(\alpha) & -\gamma_y \sin(\alpha) \\ \gamma_x \beta_x \sin(\alpha) + \gamma_x \gamma_y \beta_y \cos(\alpha) & \gamma_x \sin(\alpha) + \gamma_x \gamma_y \beta_x \beta_y \cos(\alpha) & \gamma_y \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Keďže vieme, že boost by mal byť symetrický môžeme určiť uhol α tak, že položíme:

$$\gamma_x \sin(\alpha) + \gamma_x \gamma_y \beta_x \beta_y \cos(\alpha) = -\gamma_y \sin(\alpha) \quad (5.5)$$

Presunutím členov s $\sin(\alpha)$ na ľavú stranu, členov s $\cos(\alpha)$ na pravú stranu a podelením tejto rovnice $\cos \alpha$ dostaneme:

$$\gamma_x \tan(\alpha) + \gamma_y \tan(\alpha) = -\gamma_x \gamma_y \beta_x \beta_y \quad (5.6)$$

Odtiaľ sa ľahko vyjadří vťah:

$$\tan(\alpha) = \frac{-\gamma_x \gamma_y \beta_x \beta_y}{\gamma_x + \gamma_y} \quad (5.7)$$

Na dopočítanie hľadaného boostu je potreba určiť tvar $\cos(\alpha)$ a $\sin(\alpha)$, ktoré sú:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{\gamma_x + \gamma_y}{\gamma_x \gamma_y + 1} \\ \sin(\alpha) &= \frac{-\gamma_x \gamma_y \beta_x \beta_y}{\gamma_x \gamma_y + 1}\end{aligned}\tag{5.8}$$

Dosadením 5.8 do 5.4 získame:

$$\Lambda_{xy} = \begin{pmatrix} \gamma_x \gamma_y & \gamma_x \gamma_y \beta_x & \gamma_y \beta_y \\ \gamma_x \gamma_y \beta_x & 1 + \frac{\gamma_x \gamma_y \beta_x}{\gamma_x^2 - \gamma_y^2 \beta_x^2 \beta_y^2 - 1} & \frac{\gamma_x \gamma_y^2 \beta_x \beta_y}{\gamma_x \gamma_y + 1} \\ \gamma_y \beta_y & \frac{\gamma_x \gamma_y + 1}{\gamma_x \gamma_y + 1} & \frac{(\gamma_x + \gamma_y) \gamma_y}{\gamma_x \gamma_y + 1} \end{pmatrix}\tag{5.9}$$

Jav Wignerovej rotácie môžeme chápať tak, že zložením dvoch boostov dostaneme rotáciu a boost v smere skladaných boostov. Môžeme ho interpretovať aj opačným spôsobom, ľubovoľný boost sa dá rozložiť na dva boosty a rotáciu. Wignerovou rotáciou sa budeme zaoberať ešte raz v neskoršej kapitole, kde ju aj zobrazíme na obr.7.4.

6. Grupy $SO(3, 1)$ a $SO(2, 1)$

Teraz sa pozrieme na viacej matematickú formuláciu 3 + 1 rozmerného časopriestoru a Lorentzovej transformácie.

Minkovského priestor je štvorrozmerný priestor, ktorého vektory budeme značiť $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. V kartézskom súradnicovom systéme by sme ho zapísali ako $x^\mu = (ct, x, y, z)$ a norma tohto vektoru je $|x^\mu| = -x^{0^2} + x^{i^2}$, kde index i referuje na priestorovú zložku. Pre Lorentzove transformácie platí, že držia normu vektoru $|x^\mu|$ invariantnou, takže:

$$|x^\mu| = |x'^\mu|, \quad (6.1)$$

kde $x'^\mu = \Lambda x^\mu$.

Dá sa ukázať, že Lorentzove transformácie tvoria matematickú štruktúru nazývanú grupa, definovanú ako [8]: Povieme, že množina G tvorí grupu, ak existuje operácia \cdot nazývaná grupové násobenie, ktoré prideluje každej dvojici prvkov $a, b \in G$ produkt $a \cdot b$, ktorý je taktiež prvkom G tak, že spĺňa:

a) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ pre každé $a, b, c \in G$

b) Existuje taký prvok $e \in G$ nazývaný neutrálny prvok, že $a \cdot e = a$ pre každé $a \in G$

c) Pre každé $a \in G$ existuje prvok $a^{-1} \in G$ taký, že $a \cdot a^{-1} = e$

6.1. Lorentzova grupa $SO(3, 1)$

Transformácie, ktoré držia normu priestoru sú dané ortogonálnymi grupami. Keďže Lorentzova transformácia drží normu Minkovského priestoru, tak ju môžeme popísať pomocou Lorentzovej grupy definovanej ako:

Grupa všetkých lineárnych transformácií na štvordimenzionálnom Minkovského priestore (t, x, y, z) , ktoré držia hodnotu $c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ invariantnou.

Táto grupa sa označuje $O(3, 1)$ a nazýva sa Lorentzova grupa. Ak máme vektor $\mathbf{x} = (ct, x, y, z)$, tak môžeme písať:

$$\mathbf{x}^T \eta \mathbf{x} = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (6.2)$$

Kde $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, je matica, ktorá drží normu Minkovského priestoru. Tieto transformácie spĺňajú podmienku [2]:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (6.3)$$

Spôsob, ako dopočítať ľubovoľnú inverznú transformáciu plynie práve z tejto rovnice. Keďže $\eta = \eta^{-1}$ môžeme písať:

$$\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta \quad (6.4)$$

Toto si vieme rýchlo overiť tak, že ak si dosadíme za Λ boost v smere osy x dostaneme:

$$\Lambda^{-1} = \eta \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \eta = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

čo je rovnaký výsledok ako sme dostali v 3.24.

Pre jednoduchšiu prácu s touto grupou a štúdium jej vlastností sa používa Lieova algebra [4]. Lieovou algebrou je vektorový priestor G , na ktorom je zavedená operácia Lieových zátvoriek, čo je bilinéarne zobrazenie, také že $[x, y] \rightarrow z$, kde $x, y, z \in G$. Toto zobrazenie musí spĺňať Jacobiho identitu. My použijeme ako operáciu Lieových zátvoriek komutátor. Generátory Lieovej algebry $\mathfrak{so}(3, 1)$ dostaneme z jej tangenciálnej algebry. Jej generátory sú [2]:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

Tieto matice sú zodpovedné za priestorové rotácie. Za boosty je zodpovedná ďalšia trojica matíc, ktorá je:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

Komutátory sú tak:

$$\begin{aligned} [J_i, K_i] &= \epsilon_{ijk} K_k \\ [K_i, K_j] &= -\epsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, J_k] &= \epsilon_{ijk} J_k \end{aligned} \quad (6.8)$$

Prvky grupy $SO(3, 1)$ dostaneme pomocou exponenciálneho zobrazenia, kde rotácie a boosty sa získajú ako:

$$\Lambda = \exp(K_i)\Lambda = \exp(J_i) \quad (6.9)$$

Dá sa ukázať, že determinant ľubovoľnej matice Lorentzovej grupy má determinant ± 1 a rotácie sú nespojité[8]. Limitovaním sa na také transformácie, ktoré majú determinant 1, dostaneme grupu $SO(3, 1)$, ktorá má spojité rotácie. Táto grupa sa nazýva poriadna Lorentzova grupa a transformácie, ktoré ju tvoria, sa nazývajú poriadne Lorentzove transformácie.

6.2. Grupa $SO(2, 1)$

Ak chceme vizualizovať Lorentzovu transformáciu tak, že použijeme jednu priestorovú dimenziu ako reprezentáciu polohy v čase je nutné sa redukovať na 3 dimenzie, takže budeme pracovať v $2 + 1$ rozmernom časopriestore. Jednou možnosťou, ako by sa to dalo riešiť je, že by sme použili prvky grupy $SO(3, 1)$ a "zanedbali"by sme jeden rozmer. Avšak existuje iné riešenie, ktoré sme sa rozhodli použiť, tým je grupa $SO(2, 1)$. Je to grupa tvorená poriadnymi Lorentzovými transformáciami pre $2 + 1$ rozmerný časopriestor. Je definovaná ako:

6.2. GRUPA $SO(2,1)$

Grupa všetkých lineárnych transformácií s jednotkovým determinantom, ktoré držia orientáciu a zachovávajú normu $2 + 1$ rozmerného Minkovského priestoru

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 \quad (6.10)$$

invariantnou.

Podobne ako pre grupu $SO(3,1)$ vieme nájsť generátory Lieovej algebry. V [3] ukázali, že sa jedná o trojparametrovú grupu, ktorej generátory sú:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

J_1 sa mapuje na priestorovú rotáciu a K_1, K_2 na boosty v smere osy x a y . Komutátory sú:

$$\begin{aligned} [K_1, K_2] &= -\epsilon_{i,j} J_1 \\ [J_1, K_i] &= \epsilon_{i,j} K_j \end{aligned} \quad (6.12)$$

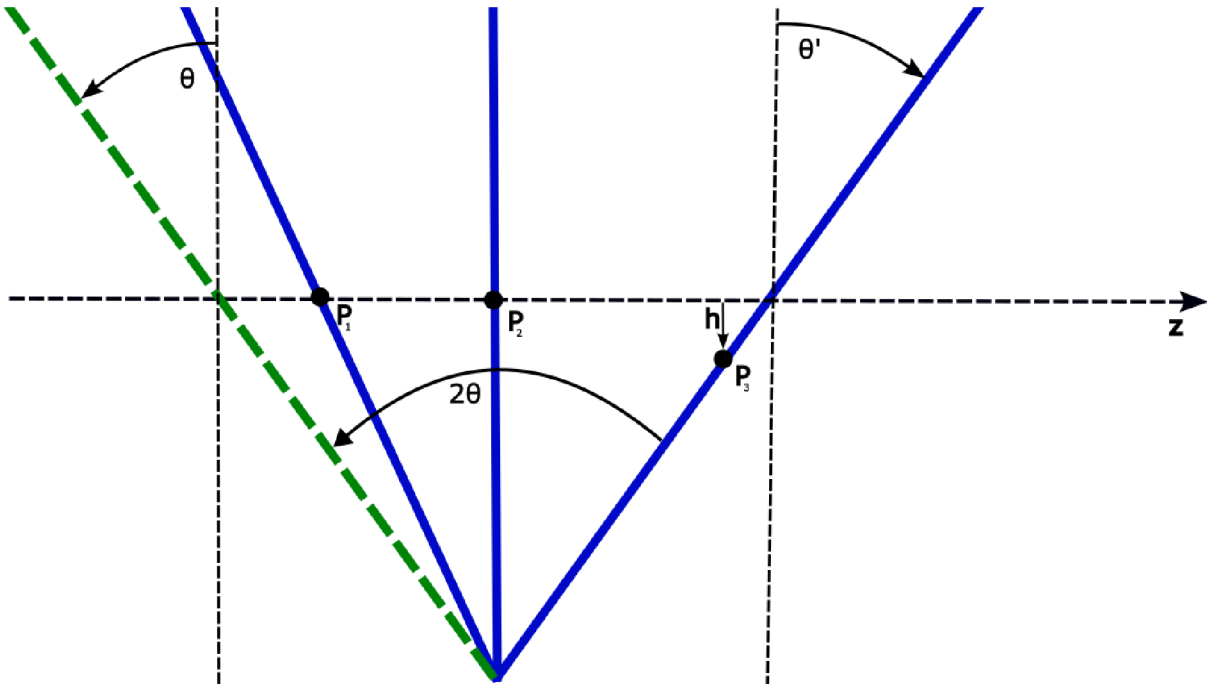
7. Grupa $SO(3, \mathbb{R})$ a Lievoa algebra $\mathfrak{so}(2, 1)$ pomocou šikmých šošoviek

7.1. Zobrazovanie šikmými šošovkami

Budeme vychádzať z článku [1], kde odvodili vzťah pre zobrazovanie systémom troch šikmých šošoviek. Celé odvodenie je veľmi dlhé, takže nás bude zaujímať len, ako rovnica popisujúca tento systém vizerá a čo znamenajú jednotlivé komponenty, systém je zobrazený na obr. 7.1.

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{h}{f_D} \tan \theta & 0 & -\frac{h}{f_D} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\tan \theta' + \tan \theta + \frac{h}{f_D} \tan \theta \tan \theta' & 0 & 1 + \frac{h}{f_D} \tan \theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' - P'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - P_z \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

Ohnisková vzdialenosť tohto systému je f_D . Kladeným podmienok na parametre tejto sústavy šošoviek sme schopní získať rôzne transformácie.



Obr. 7.1: Nákres systému troch šikmých šošoviek. Body P_1 , P_2 a P_3 zodpovedajú stredom šošoviek a h je kolmá vzdialenosť P_3 od optickej osy

7.2. grupa $SO(3, \mathbb{R})$

Keďže Lorentzova transformácia sa skladá z rotácie a boostu je potrebné určiť, ako tieto zložky budú vyzerať. Pre ľubovoľnú Lorentzovu transformáciu nám stačí rotácia okolo osy

7.3. ROTÁCIA POMOCOU ŠIKMÝCH ŠOŠOVIEK

x , ale ukážeme, že skladaním systémov troch šošoviek sa dá zostrojiť ľubovoľná rotácia v trojrozmernom Euklidovskom priestore. Podobne ako Lorentzova transformácia, má aj rotácia grupovú štruktúru. Táto grupa je nekomutatívna, značí sa $SO(3, \mathbb{R})$ a je definovaná ako [8]:

Grupa všetkých spojitých lineárnych transformácií na trojrozmernom Euklidovskom priestore, ktorá zanecháva dĺžku všetkých súradnicových vektorov invariantnú.

Je to teda grupa 3×3 matíc R , takých že platí:

$$R^{-1} = R^T$$

$$\det R = 1$$

Ak vieme popísať smer pohybu v smere osy x , y a z sme schopní ich skladaním popísať ľubovoľný pohyb v trojrozmernom priestore. Dá sa tak intuitívne očakávať, že ak vieme popísať rotáciu okolo každej z týchto ôs sme schopní z nich zložiť ľubovoľnú rotáciu a teda aj ľubovoľný člen $SO(3, \mathbb{R})$, čo platí a jedná sa o tzv. Eulerove uhly [8].

7.3. Rotácia pomocou šikmých šošoviek

Odvodenie urobíme pre rotáciu okolo y počas čoho optickou osou je osa z , ale je možné otočením systému ju zmeniť. Rotáciu pomocou šikmých šošoviek vieme teda dostať tak, že budeme klásť dve podmienky. Najprv budeme požadovať:

$$1 - \frac{h}{f_D} \tan \theta = 1 + \frac{h}{f_D} \tan \theta' \quad (7.2)$$

Táto rovnica sa dá veľmi jednoducho riešiť tak, že položíme $\theta = -\theta'$. Druhá podmienka je:

$$\frac{h}{f_D} = -\tan \theta' + \tan \theta + \frac{h}{f_D} \tan \theta \tan \theta' \quad (7.3)$$

Tú vieme vyriešiť tak, že položíme:

$$\frac{h}{f_D} = \frac{\sin(\theta - \theta')}{\cos(\theta + \theta')} \quad (7.4)$$

Dosadením dostaneme transformáciu:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' - P'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 2\theta & 0 & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - P_z \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Správnou voľbou súradnicového systému dostaneme $P_z = P'_z = 0$. Aby sme dostali rotáciu okolo osy x nám stačí otočiť tento systém o 90°

7.4. Lorentzova transformácia pomocou šikmých šošoviek

Teraz si ukážeme, ako môžeme z matice v 7.1 dostať prvok množiny $SO(2, 1)$ [7]. Ak by sme urobili prechod v súradniciach ako $(x, y, z) \rightarrow (ct, x, y)$ potom prepíšeme 7.1 na:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{h}{f_D} \tan \theta & 0 & -\frac{h}{f_D} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\tan \theta' + \tan \theta + \frac{h}{f_D} \tan \theta \tan \theta' & 0 & 1 + \frac{h}{f_D} \tan \theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

Maticu udávajúcu túto transformáciu si označíme ako Λ_y a budeme klásť:

$$\Lambda_y = \begin{pmatrix} 1 - \frac{h}{f_D} \tan \theta & 0 & -\frac{h}{f_D} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\tan \theta' + \tan \theta + \frac{h}{f_D} \tan \theta \tan \theta' & 0 & 1 + \frac{h}{f_D} \tan \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

Musíme teda riešiť dve rovnice:

$$1 - \frac{h}{f_D} \tan \theta = 1 + \frac{h}{f_D} \tan \theta' \quad (7.8)$$

$$-\frac{h}{f_D} = -\tan \theta' + \tan \theta + \frac{h}{f_D} \tan \theta \tan \theta' \quad (7.9)$$

Pre 7.8 sa dá riešenie nájsť jednoducho tak, že budeme požadovať $\theta = -\theta'$. To nám taktiež zjednoduší riešenie 7.9 tak, že dostaneme:

$$\frac{h}{f_D} = 2 \tan \theta + \frac{h}{f_D} \tan^2 \theta \quad (7.10)$$

Odkiaľ dostávame:

$$\frac{h}{f_D} = \tan 2\theta' \quad (7.11)$$

Spätným dosadením dostávame tvar:

$$\Lambda_y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos 2\theta'} & 0 & -\tan 2\theta' \\ 0 & 1 & 0 \\ -\tan 2\theta' & 0 & \frac{1}{\cos 2\theta'} \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

Porovnaním 7.7 a 7.12 dostávame, že gamma-faktor je pre nás teda $\frac{1}{\cos 2\theta'}$ a beta-faktor je $-\sin 2\theta'$. Takto môžeme určiť rýchlosť pre ktorú máme transformáciu ako:

$$v = -c \sin 2\theta' \quad (7.13)$$

Ak by sme chceli dosiahnuť transformáciu v smere osy x , teda v tvare:

$$\Lambda_x = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos 2\theta'} & -\tan 2\theta' & 0 \\ -\tan 2\theta' & \frac{1}{\cos 2\theta'} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

7.4. LORENTZOVA TRANSFORMÁCIA POMOCOU ŠIKMÝCH ŠOŠOVIEK

stačí nám otočiť súradnicový systém tak, že x bude optická osa. Ak chceme otočiť súradnicový systém, tak musíme prehodiť osy x a z . Toto prehodenie si vyjadríme ako:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

Spojením 7.6, 7.12 a 7.15 dostaneme:

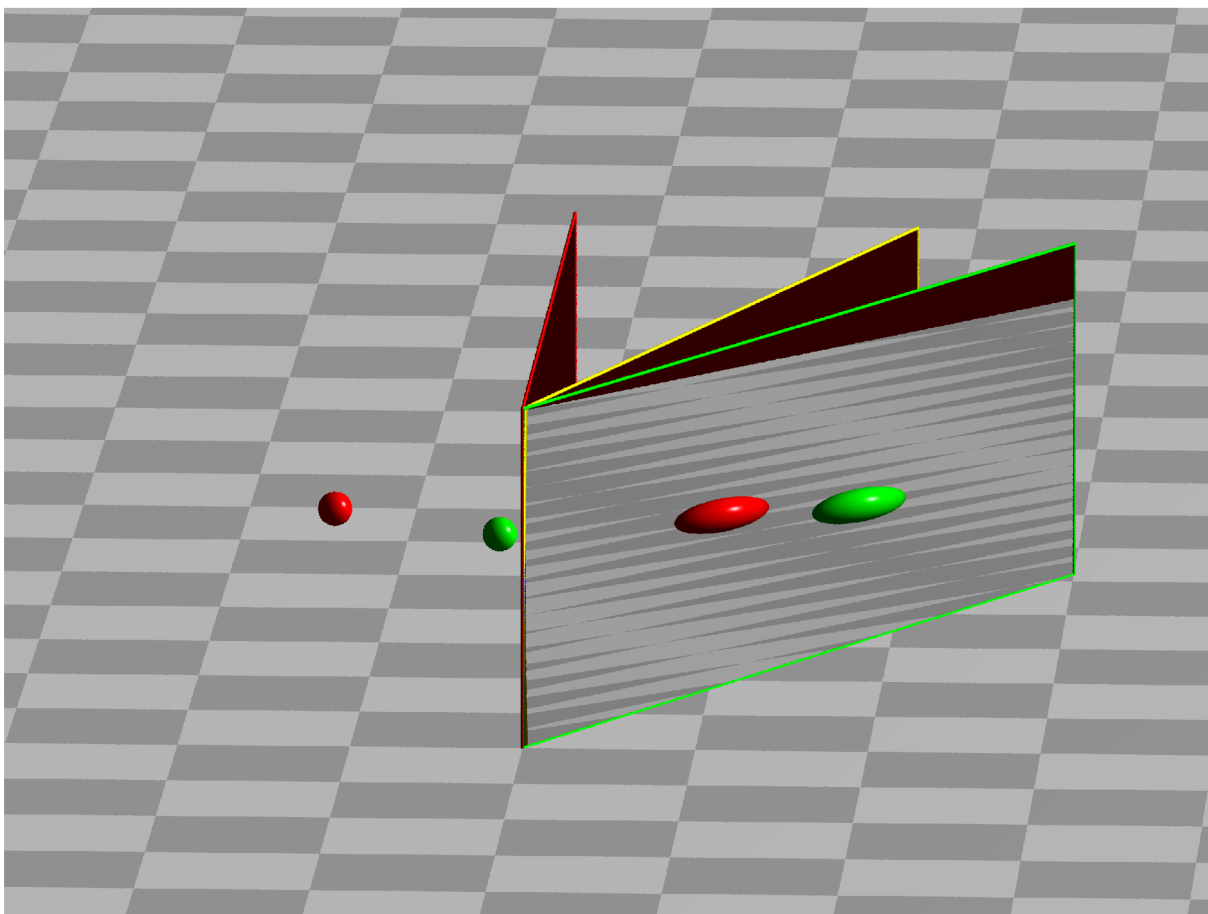
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z' \\ y' \\ x' \end{pmatrix} = \Lambda_y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

Úpravou dostaneme:

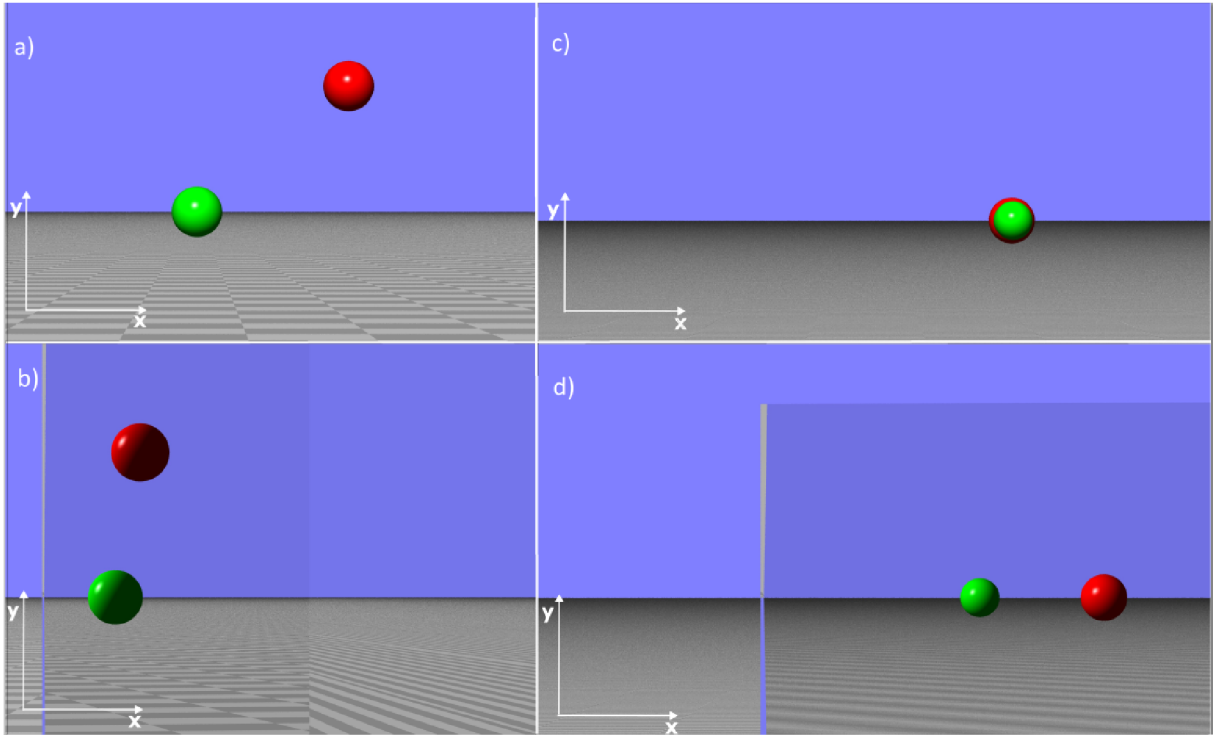
$$\begin{pmatrix} z' \\ y' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Lambda_y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

Roznásobením matic dostaneme:

$$\begin{pmatrix} z' \\ y' \\ x' \end{pmatrix} = \Lambda_y \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} \quad (7.18)$$



Obr. 7.2: Simulácia zobrazenia kontrakcie dĺžky pomocou systému troch šošoviek pre $2\theta' = -60^\circ$



Obr. 7.3: Simulácie zobrazovania systémom troch šošoviek. Osa x reprezentuje polohu v čase. V častiach a), c) je zobrazený netransformovaný systém. Na b) je zobrazená dilatácia času pre systém a) transformovaný systémom troch šošoviek s $2\theta' = -80^\circ$. Na d) je znázornené narušenie simultánnosti transformovaním systému c) pre $2\theta' = -40^\circ$.

Simulácie na obrázkoch 7.2, 7.3 a 7.4 boli robené pomocou open source programu Dr TIM [5]

7.5. Wignerova rotácia pre šikmé šošovky

V predchádzajúcich kapitolách sme ukázali, ako dostaneme Wignerovu rotáciu a taktiež sme ukázali ako pomocou šikmých šošoviek vieme dostať matice, ktoré spĺňajú podmienky pre $2 + 1$ dimeziálnu Lorentzovu transformáciu v smere osy x a y . Teraz ich prepojením ukážeme, ako bude vyzeráť Wignerova rotácia pre šikmé šošovky. Začneme vynásobením matíc transformácie v smere osy x a y :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\cos 2\phi'} & 0 & -\tan 2\phi' \\ 0 & 1 & 0 \\ -\tan 2\phi' & 0 & \frac{1}{\cos 2\phi'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos 2\theta'} & -\tan 2\theta' & 0 \\ -\tan 2\theta' & \frac{1}{\cos 2\theta'} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos 2\theta' \cos 2\phi'} & \frac{-\tan 2\theta'}{\cos 2\phi'} & -\tan 2\phi' \\ -\tan 2\theta' & \frac{1}{\cos 2\theta'} & 0 \\ \frac{-\tan 2\phi'}{\cos 2\theta'} & \tan 2\theta' \tan 2\phi' & \frac{1}{\cos 2\phi'} \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

Túto výslednú maticu si označíme Λ'_{xy} a aplikujeme na ňu spätnú rotáciu o uhol α , ktorú označíme R_α^T . Dostávame tak výslednú maticu:

7.5. WIGNEROVA ROTÁCIA PRE ŠIKMÉ ŠOŠOVKY

$$\Lambda_{xy} = R_\alpha^T \Lambda'_{xy} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos 2\theta' \cos 2\phi'} & \frac{-\tan 2\theta'}{\cos 2\phi'} & -\tan 2\phi' \\ -\tan 2\theta' \cos \alpha + \frac{\tan 2\phi'}{\cos 2\theta'} \sin \alpha & \frac{\cos \alpha}{\cos 2\theta'} - \tan 2\theta' \tan 2\phi' \sin \alpha & \frac{-\sin \alpha}{\cos 2\phi'} \\ -\tan 2\theta' \sin \alpha - \frac{\tan 2\phi'}{\cos 2\theta'} \cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{\cos 2\theta'} + \tan 2\theta' \tan 2\phi' \cos \alpha & \frac{\cos \alpha}{\cos 2\phi'} \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

Z požiadavky na symetriu dostávame rovnicu:

$$\frac{-\sin \alpha}{\cos 2\phi'} = \frac{\sin \alpha}{\cos 2\theta'} + \tan 2\theta' \tan 2\phi' \cos \alpha \quad (7.21)$$

Z nej si vieme vyjadriť:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{-\sin(2\theta') \sin(2\phi')}{\cos(2\theta') + \cos(2\phi')} \\ \sin(\alpha) &= \frac{-\sin(2\theta') \sin(2\phi')}{\sqrt{(\sin(2\theta') \sin(2\phi'))^2 + (\cos(2\theta') + \cos(2\phi'))^2}} \\ \cos(\alpha) &= \frac{\cos(2\theta') + \cos(2\phi')}{\sqrt{(\sin(2\theta') \sin(2\phi'))^2 + (\cos(2\theta') + \cos(2\phi'))^2}} \end{aligned} \quad (7.22)$$

Dosadením do 7.20 sme schopní získať, ako by vyzeral celkový boost Λ_{xy} . Jeho tvar nebudeme uvádzať, lebo je príliš dlhý a pre nasledujúce výpočty nám stačí 7.20. Posledná vec, čo potrebujeme určiť je ako bude vyzerat rýchlosť v oboch smeroch. Budeme klásť:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2}{c^2}}} \frac{v_x}{c} = \frac{-\tan 2\theta'}{\cos 2\phi'} \quad (7.23)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2}{c^2}}} \frac{v_y}{c} = -\tan 2\phi' \quad (7.24)$$

Kedže obe časti obsahujú γ , tak ak si ju vyjadríme v 7.23 a 7.24 a porovnáme dostaneme:

$$\frac{-\tan 2\theta'}{\cos 2\phi'} \frac{c}{v_x} = -\tan 2\phi' \frac{c}{v_y} \quad (7.25)$$

Vyjadríme si závislosť medzi v_x a v_y , ktorá je:

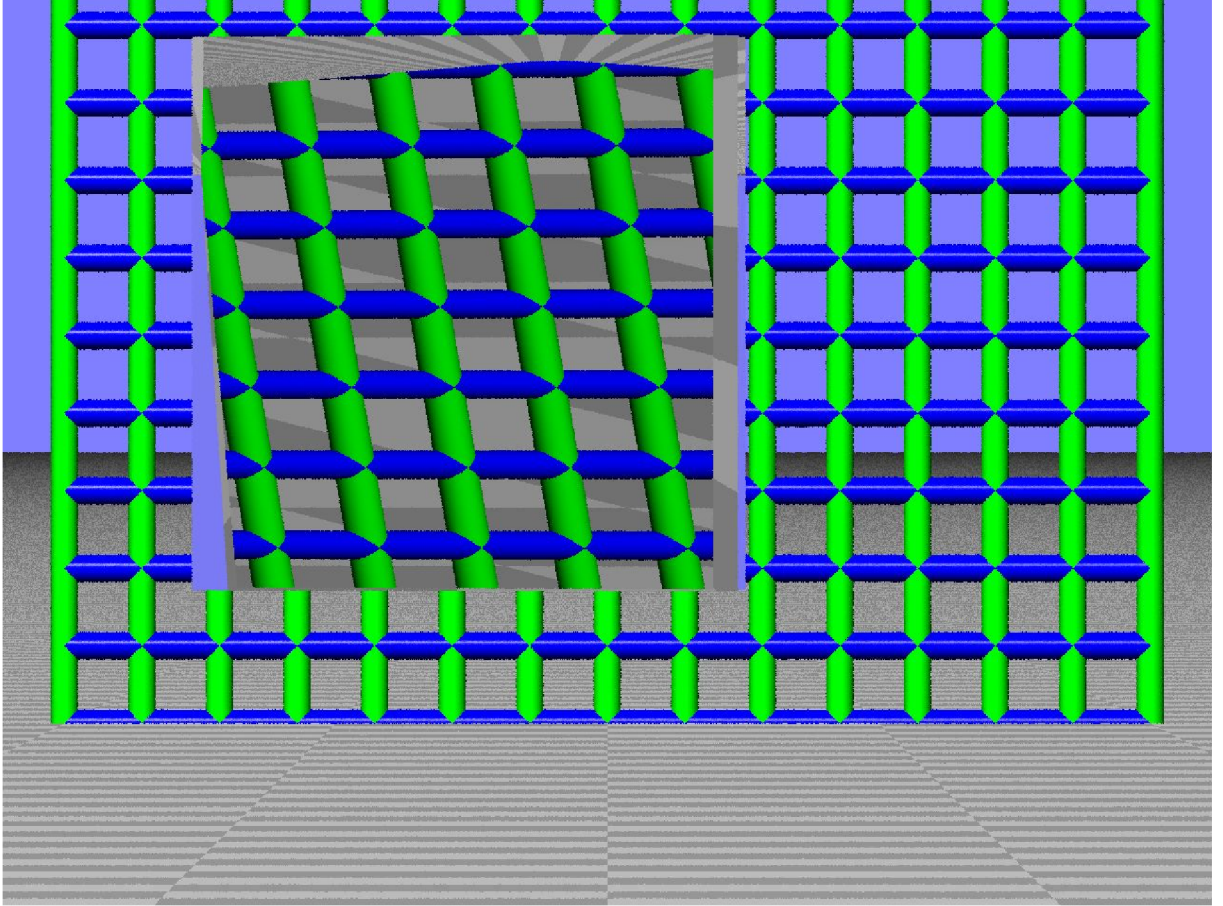
$$v_y = \frac{\sin 2\phi'}{\tan 2\theta'} v_x \quad (7.26)$$

To dosadíme do 7.24:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + (\frac{\sin 2\phi'}{\tan 2\theta'} v_x)^2}{c^2}}} \frac{\frac{\sin 2\phi'}{\tan 2\theta'} v_x}{c} = -\tan 2\phi' \quad (7.27)$$

Túto rovnicu prenásobíme $\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + (\frac{\sin 2\phi'}{\tan 2\theta'} v_x)^2}{c^2}}$ a umocníme ju na druhú, čo nám dá:

$$\frac{(\frac{\sin 2\phi'}{\tan 2\theta'} v_x)^2}{c^2} = \tan^2 2\phi' \left(1 - \frac{v_x^2 + (\frac{\sin 2\phi'}{\tan 2\theta'} v_x)^2}{c^2}\right) \quad (7.28)$$



Obr. 7.4: Simulácia Wignerovej rotácie pomocou systému šikmých šošoviek pre $2\theta' = 12^\circ$ a $2\theta' = -40^\circ$

Roznásobením a presunutím člena $\frac{(\sin 2\phi')^2}{\tan^2 2\theta'}$ na pravú stranu dostaneme

$$v_x^2 = c^2 \frac{\tan^2 2\theta'}{\cos^2 2\phi'} - v_x^2 \frac{\tan^2 2\theta'}{\cos^2 2\phi'} - v_x^2 \frac{\tan^2 2\theta'}{\cos^2 2\phi'} - v_x^2 \frac{\tan^2 2\theta'}{\cos^2 2\phi'} \frac{\sin^2 2\phi'}{\tan^2 2\theta'} \quad (7.29)$$

Z tejto rovnice sa dá určiť v_x , ktoré bude mať tvar:

$$v_x = \pm \frac{c \tan 2\theta'}{\sqrt{1 + \tan^2 2\theta'}} \quad (7.30)$$

Rýchlosť v_y získame dosadením do 7.26 a dostaneme:

$$v_y = \pm \frac{c \sin 2\phi'}{\sqrt{1 + \tan^2 2\theta'}} \quad (7.31)$$

Ak by sme sa chceli zbaviť \pm , ktoré tam figuruje stačí dosadiť späť do 7.23 a 7.24. Posledná vec, ktorá nám chýba k tomu, aby sme boli schopní vytvoriť ľubovoľný prvok grupy $SO(3, \mathbb{R})$ je rotácie okolo optickej osy. Boost Λ_{xy} môžeme chápať aj ako boost v smere osy x otočený o uhol ρ stačí nám tak zostrojiť inverznú transformáciu a systém troch šošoviek, ktorý je za ňu zodpovedný otočiť o uhol ρ . Celkový výpočet urobíme len názorne, takže neukážeme presný tvar matíc. Pre Wignerovu rotáciu platí:

$$\Lambda_y \Lambda_x = R \Lambda'_{xy} \quad (7.32)$$

7.6. LIEOVA ALGEBRA $\mathfrak{so}(2, 1)$ POMOCOOU ŠIKMÝCH ŠOŠOVIEK

Prenásobením $\Lambda_{xy}'^{-1}$ by sme dostali izolovanú rotáciu, ale túto transformáciu musíme najprv nejako určiť. Zvolením súradnicovej sústavy tak, že $\mathbf{v}' = (v'_x, v'_y)$ bude mať iba zložku v smere osy x tvaru $v''_x = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2}$. Táto sústava je otočená okolo optickej osy o uhol $\tan \rho = \frac{v'_y}{v'_x}$ a platí tak:

$$\Lambda'_{xy} = R^T(\rho)\Lambda''_x R(\rho) \quad (7.33)$$

Toto natočenie dostaneme jednoducho tak, že iba otočíme náš systém troch šošoviek o uhol ρ . Celkový zápis tak vyzerá:

$$R = \Lambda_y \Lambda_x R(\rho) \Lambda_x''^{-1} R(\rho)^T \quad (7.34)$$

Takto sme dostali poslednú rotáciu, ktorú sme potrebovali k vytvoreniu grupy $SO(3, \mathbb{R})$. Je tak možné skladaním týchto systémov zostrojiť ľubovoľnú optickú rotáciu v trojrozmernom Euklidovskom priestore.

7.6. Lieova algebra $\mathfrak{so}(2, 1)$ pomocou šikmých šošoviek

Na záver ukážeme, že pomocou 7.12, 7.14 a rotácie o uhol α daný 7.34 sme schopní dostať Lieovu algebru ekvivalentnú s $\mathfrak{so}(2, 1)$. Tangenciálnu algebru dostaneme tak, že urobíme Taylorov rozvoj pre $2\theta', \alpha \rightarrow 0$ a zanedbáme členy vyšších rádov:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos 2\theta'} & 0 & -\tan 2\theta' \\ 0 & 1 & 0 \\ -\tan 2\theta' & 0 & \frac{1}{\cos 2\theta'} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\theta' \\ 0 & 0 & 0 \\ -2\theta' & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos 2\theta'} & -\tan 2\theta' & 0 \\ -\tan 2\theta' & \frac{1}{\cos 2\theta'} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2\theta' & 0 \\ -2\theta' & 0 & 0 \\ \theta' & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \quad (7.35) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} + \dots \end{aligned}$$

Generátory Lieovej algeby sú pre nás tak:

$$J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, K_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.36)$$

Toto sú tie isté generátory, ako má Lieova algebra $\mathfrak{so}(2, 1)$, naše komutátory tak budú 6.12.

8. Záver

V tejto práci sme ukázali jeden z viacerých spôsobov, ako odvodiť Lorentzovu transformáciu. Pomocou nej sme ukázali, ako dochádza ku kontrakcii dĺžky, dilatácii času, narušeniu simultánnosti, relativistickej aberácii svetla a Wignerovej rotácii. Ďalej sme sa zaoberali Lorentzovou grupou, teda grupou, čo drží normu Minkovského priestoru a grupou $SO(2, 1)$, čo je grupa všetkých poriadnych Lorentzových transformácií pre $2 + 1$ rozmerný časopriestor a naznačili sme ako dostaneme ich Lieove algebry.

Využitím týchto znalostí sme ukázali, ako dokážeme dostať prvky grupy $SO(2, 1)$ pomocou systému šikmých šošoviek a spočítali sme Wignerovu rotáciu spojením dvoch týchto systémov. Ďalej sme ukázali, ako dokážeme dosiahnuť rotáciu okolo optickej osy a tak byť schopní zostrojiť ľubovoľný prvok grupy $SO(3, \mathbb{R})$, grupy všetkých rotácií trojrozmerného priestoru. Nakoniec sme ukázali, že Lieova algebra matíc z grupy zostrojených skladaním systémov troch šikmých šošoviek, takých, že sú prvkami $SO(2, 1)$ je ekvivalentná s Lieovou algebrou $\mathfrak{so}(2, 1)$.

9. Literatura

- [1] BĚLÍN, Jakub; FERENCZI, Gergely; COURTIAL, Johannes. Skew-lens image rotator. *Opt. Express*. 2022, roč. 30, č. 15, s. 25958–25973. Dostupné z DOI: 10.1364/OE.458158.
- [2] NOVOSAD, Patrik. *Spinory ve speciální teorii relativity*. 2014. Bakalářská práce. MASARYKOVA UNIVERZITA PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA ÚSTAV TEORETICKÉ FYZIKY ASTROFYZIKY, Brno.
- [3] O., Barut A.; C., Fronsdal. On non-compact groups. II. Representations of the 2+1 Lorentz group. *Opt. Express*. 1965, roč. 287, s. 532–548. Dostupné z DOI: 10.1098/rspa.1965.0195.
- [4] ONISHCHIK, A.L.; VINBERG, E.B. *Lie groups and algebraic groups*, SpringerLink. Springer, 1990. Dostupné tiež z: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-74334-4>.
- [5] OXBURGH, Stephen; TYC, Tomáš; COURTIAL, Johannes. Dr TIM: Ray-tracer TIM, with additional specialist scientific capabilities. *Computer Physics Communications*. 2014, roč. 185, č. 3, s. 1027–1037.
- [6] SEMERÁK, Oldřich. *SPECIÁLNÍ TEORIE RELATIVITY text k přednášce pro MFF UK*. Praha : Ústav teoretické fyziky Matematicko-fyzikální fakulta Univerzita Karlova v Praze, 2012.
- [7] SOBOŇA Matuš a BĚLÍN, Jakub. Skew-Lens Window to Special Relativity. In Imaging Systems and Applications. *Optica Publishing Group*. 2023. Dostupné tiež z: <https://doi.org/10.1364/JOSAA.37.000123>..
- [8] TUNG, W-K.; AIVAZIS, M. *Group Theory in Physics*. Singapore u.a. : World Scientific, 1985.