VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNE
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÉHO INŽINIERSTVA
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV AUTOMATIZÁCIE A INFORMATIKY
INSTITUTE OF AUTOMATION AND COMPUTER SCIENCE

Optimalizácia delenia materiálu
Optimization of the cutting stock problem

BAKALÁRSKA PRÁCA
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR
Lukáš Horniak

VEDÚCI PRÁCE
SUPERVISOR
Ing. Jakub Kůdela, Ph.D.

BRNO 2022

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav automatizace a informatiky
Student:	**Lukáš Horniak**
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Aplikovaná informatika a řízení
Vedoucí práce:	**Ing. Jakub Kůdela, Ph.D.**
Akademický rok:	2021/22

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Optimalizace dělení materiálu

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Problém optimalizace dělení materiálu (občas označovaný jako řezná úloha) je významnou inženýrskou optimalizační úlohou. Úkolem na nalezení dělení materiálu (tyče nebo desky) na dané komponenty tak, aby se minimalizovalo množství odpadního materiálu. Student se seznámí s touto problematikou a implementuje řešení názorných příkladů ve vhodném programovacím jazyku (Julia, Matlab, Python, ...).

Cíle bakalářské práce:

Popsání a rozbor problému optimalizace dělení materiálu.
Rešerše používaných přístupů a algoritmů.
Implementace vybraného algoritmu.

Seznam doporučené literatury:

CHVÁTAL, Vašek. Linear Programming. New York: W.H. Freeman, 1983. ISBN 978-0-7167-1587-0.

KELLER, Hans, PFERSCHY, Ulrich a PISINGER, David. Knapsack Problems. Berlin: Springer, 2004. ISBN 978-3-642-07311-3.

DELORME, Maxence, IORI, Manuel a MARTELLO, Silvano. Bin packing and cutting stock problems: Mathematical models and exact algorithms. European Journal of Operational Research. 2016, 255 (1), 1-20.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2021/22

V Brně, dne

L. S.

doc. Ing. Radomil Matoušek, Ph.D. ředitel ústavu	doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D. děkan fakulty

ABSTRAKT

Problém delenia materiálu tvorí jeden z významných optimalizačných problémov, ktorý zasahuje do širokej škály oblastí priemyslu kde sa spracúva alebo vyrába materiál. Na úvod sú stručne uvedené základy lineárneho a celočíselného programovania ako aj popísanie typologického rozdelenia rezných a baliacich problémov podľa piatich kritérií, ktoré upresňujú definíciu problému delenia materiálu. Zo širokého množstva prístupov a algoritmov je vybraných niekoľko typov, ktoré sú popísané. Následne sú vybrané dva prístupy na riešenie jednorozmernej a 1,5-dimenzionálnej problematiky.

ABSTRACT

The Cutting stock problem is one of the major optimization problems that affects a wide variety of industrial fields where material is processed or manufactured. At the beginning the basics of linear and integer programming are briefly presented, as well as a description of the typological division of cutting and packaging problems according to five criteria, which specify the definition of the cutting stock problem. From a wide range of approaches and algorithms, a few are selected, which are described. Subsequently, two approaches are selected to solving one-dimensional and 1.5-dimensional.

KĽÚČOVÉ SLOVÁ

problém delenia materiálu, optimalizácia, lineárne programovanie, celočíselné programovanie

KEYWORDS

cutting stock problem, optimization, linear programming, integer programming

2022

BIBLIOGRAFICKÁ CITÁCIA

HORNIAK, Lukáš. Optimalizace dělení materiálu. Brno, 2022 [cit. 2022-05-19]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/140062. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav automatizace a informatiky. Vedoucí práce Jakub Kůdela.

POĎAKOVANIE

Chcel by som hlavne poďakovať vedúcemu práce pánu Ing. Jakubovi Kůdelovi, Ph.D. za cenné rady a pripomienky, ktoré mi pomohli pri spracovaní práce.

ČESTNÉ PREHLÁSENIE

Prehlasujem, že táto práca je mojím pôvodným dielom, vypracoval som ju samostatne, pod vedením vedúceho práce a s použitím odbornej literatúry a ďalších informačných zdrojov, ktoré sú všetky citované v práci a uvedené v zozname literatúry.

Ako autor uvedenej práce ďalej prehlasujem, že v súvislosti s vytvorením tejto práce som neporušil autorské práva tretích osôb, najmä som nezasiahol nedovoleným spôsobom do cudzích autorských práv osobnostných a som si plne vedomý následkov porušenia ustanovení § 11 a nasledujúcich autorského zákona č. 121/2000 Sb., vrátane možných trestne právnych dôsledkov.

V Brne dňa 19. 5. 2022 ……………………………………………

Lukáš Horniak

OBSAH

1 ÚVOD

Optimalizácia delenia materiálu (Cutting Stock Problem, CSP), občas označovaná aj ako rezná úloha, je jeden z významných optimalizačných problémov, ktorý sa viaže k širokej škále oblastí spracovania alebo výroby materiálu. Hlavné dôvody pre zaoberania sa problémom optimalizácie delenia materiálu, vyplývajú z ekonomických aspektov a to hľadania toho najefektívnejšieho riešenia, ktoré ušetrí náklady na spracovanie a výrobu v rozličných priemysloch. Podstatou tejto optimalizácie je nájdenie najvýhodnejšieho riešenia pre vyrezanie požadovaných kusov a tvarov z materiálu tak, aby sa čo najviac materiálu ušetrilo. Minimalizovať sa tak dá, či už to odpad z orezania materiálu alebo celková cena potrebná na zakúpenie základného materiálu, ktorý sa ďalej spracováva.

Prvá zmienka tohto problému sa viaže k práci ruského ekonóma Kantorovicha [1] už v roku 1960. Avšak významnejší pokrok v oblasti rezných problémov sa udial o rok neskôr a to pri vydaní práce od Gilmora a Gomoryho v rokoch 1961 a 1963 [2,3], v ktorej opísali techniku oneskoreného generovania vzorov s pomocou lineárneho programovania na riešenie jednorozmerných problém s minimalizovaním strát odpadného materiálu. Hoci v dnešnej dobe, už existuje nespočetne veľa prístupov a algoritmov na riešenie problematiky delenia materiálu, či už sa jedná o jednorozmerné alebo dvojrozmerné úlohy, technika, ktorú vytvorili je stále používaná.

V uvedenej práci je stručné charakterizovanie základov lineárneho a číslicového programovania. Všeobecné kategorizovanie rezných a baliacich problémov pre presnejšie definovanie problému delenia materiálu, ako aj niektoré prístupy a algoritmy na riešenie rozličných typov problémov spojených s delením materiálu. Pre dva typy zjednodušených problémov sú názorne implementované algoritmy v programovacom jazyku Matlab.

2 ZÁKLADY LINEÁRNEHO A CELOČÍSELNÉHO PROGRAMOVANIA

Lineárne programovanie (LP) sa zaoberá problémami súvisiacimi s hľadaním viazaných extrémov lineárnych funkcií o viacerých premenných, ktorých obmedzujúce podmienky majú tvar lineárnych rovníc a nerovníc [4]. Cieľom kapitoly je zavedenie nevyhnutých definícií, na ktoré sa nadväzuje v ďalších kapitolách práce.

2.1 Všeobecná formulácia úloh lineárneho programovania

Všeobecná formulácia lineárneho programovania popisuje maximalizačné a minimalizačné úlohy pre všeobecný tvar LP.

Nech $aij\,, bi\,, cj\ (i\ =\ 1, 2, \ldots, m;\ j\ =\ 1, 2, \ldots, n)$ sú dané reálne čísla a nech $I_1\ \subset\ I\ =\ \{1, 2, \ldots, m\}, J1\ \subset\ J\ =\ \{1, 2, \ldots, n\}$[1].

Úloha maximalizácie funkcie

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

pre množinu riešení sústavy lineárnych rovníc a nerovníc

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (\, i \in I_1) \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (\, i \in I - I_1) \tag{3}$$

$$X_j \geq 0, \qquad (j \in J_1) \tag{4}$$

nazývame maximalizačnou úlohou lineárneho programovania v zmiešanom tvare, ak $I_1 \neq 0,\ I_1 \neq I,\ J_1 \neq J.$

Z uvedenej formulácie rovnice sa dajú ďalej zostaviť rovnako maximalizačná a minimalizačná úloha LP v rovnicovom a nerovnicovom tvare [4]. Uvedená formulácia tvorí základ pre riešenia problémov lineárneho programovania, ktoré sa ďalej v práci použili na riešenie jednorozmernej problematiky.

2.2 Simplexová metóda

Metódu v roku 1955 odvodil Dantzig [5] s využitím Jordanovej modifikácie Gaussovej eliminačnej metódy na riešenie sústavy lineárnych algebraických rovníc. Geometricky ju možno popísať, ako predpoklad pre ktorý poznáme krajný bod x_0 množiny prípustných riešení M. Z krajného bodu poznáme konečné množstvo hrán množiny M, pre ktoré každá buď obsahuje jeden ďalší krajný bod alebo je neobmedzená.

Ak sa na neobmedzenej hrane nachádza bod, pre ktorý je hodnota účelovej (kriteriálnej) funkcie väčšia ako $c^T x_0$, potom úloha nemá optimálne riešenie a postup sa ukončí. Ak takáto situácia nenastane hľadá sa susedný krajný bod, pre ktorý hodnota účelovej funkcie je väčšia ako $c^T x_0$. Bod sa označí ako krajný bod x_1 a rovnaký postup sa opakuje. Pokiaľ neexistuje susedný krajný bod $c^T x > c^T x_0$ tak x_0 je hľadané optimálne riešenie [4].

2.3 Dualita

Pre všetky úlohy lineárneho programovania je svojím spôsobom spojená iná lineárna úloha, ktorá je pôvodnou úlohou jednoznačne definovaná. Takáto úloha sa označuje ako duálna, pričom maximalizačnej úlohe pripadá úloha minimalizačná a naopak. Úlohy lineárneho programovania sa tým pádom vyskytujú vo dvojiciach, *duálne združených úlohách*. Existuje teda primárna úloha, z ktorej sa odvádza tá duálna. Na teórií duality sa zakladajú niektoré metódy pre riešenie problémov LP, napríklad duálne simplexová metóda. Namiesto primárnej úloha sa často môže riešiť duálna, pre prípady keď primárna úloha má obmedzený tvar nerovností, ktorých je oveľa viac ako premenných [4].

2.4 Celočíselné programovanie

Veľká oblasť úloh rieši problémy optimalizácie v ktorých rozhodovacie premenné sú reálne hodnoty. Existujú však prípady kedy rozhodovacie premenné sú fyzicky nedeliteľné. Označované sú ako úlohy s nedeliteľnosťami. Celočíselné programovanie umožňuje takéto riešenie úloh s nedeliteľnosťami ale taktiež slúži na výpočet rôznych komplikovaných problémov, ktoré nemôžu byť inak efektívne riešené. Medzi takéto prípady patria kombinatorické problémy, v ktorých sa z konečnej množiny riešení hľadá riešenie optimalizujúce účelovú funkciu [4]. Problematikou celočíselného programovania sa zaoberajú autori ako napríklad Alexejev [6] alebo Nemhaser, Wolsey [7]. Príklad kombinatorickej úlohy je riešený v kapitole implementácie ako jeden z možných problémov delenia materiálu.

3 PROBLÉM DELENIA MATERIÁLU

Na pochopenie problematiky spojenej s reznými úlohami slúžia kritériá, podľa ktorých sa zostavujú jednotlivé typy problémov. Zjednotenie uvádzaných kritérií je popísané v práci Waschera a kol. [8], ktorá je rozšírením prvého pokusu o sumarizovanie hodnotiacich kritérií v práci Dyckhoffa [9].

3.1 Kritériá delenia rezných a baliacich problémov

Päť kritérií slúži na zostavenie daného typu problému a to: dimenzia, spôsob priradenia, triedenie malých objektov, triedenie veľkých objektov a tvar malých objektov.

Kritérium dimenzie určuje jedno-, dvoj- alebo troj-dimezionálne zadanie úlohy, prípadne teoreticky vymedzené N-dimenzionálne.

Spôsob priradenia rozlišuje dva typy a to maximalizácia výstupu alebo minimalizácia vstupu. Maximalizácia výstupu definuje pevne danú množinu veľkých objektov, pričom sa predpokladá, že nie je reálne možné na ňu umiestniť množinu malých objektov. Je teda nutné vybrať iba podmnožinu množiny malých objektov, pričom všetky veľké objekty sú použité. Minimalizácia vstupu naopak hľadá rozmiestnenie pevne dané množiny malých objektov na podmnožinu daných veľkých objektov. Predpokladá sa s možnosťou kombinácie oboch prístupov.

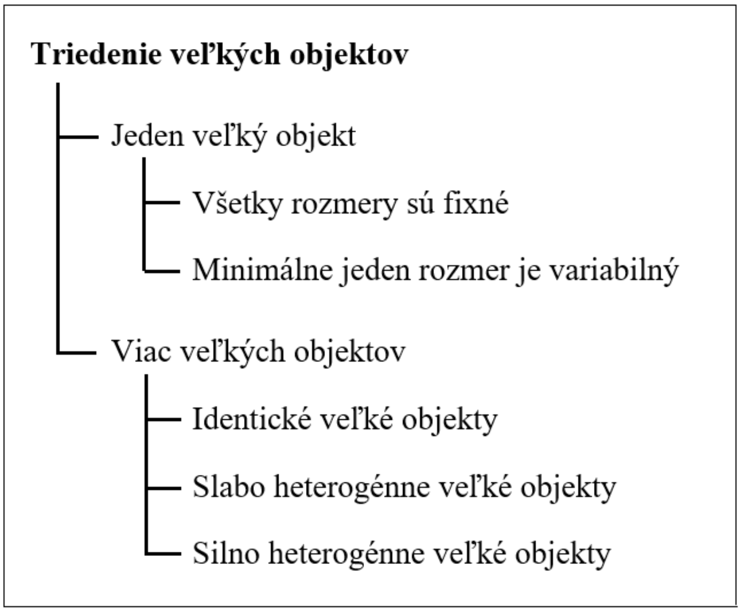
Triedenie malých objektov definuje homogenitu množiny malých objektov, rozlišujú sa tri prípady a to identické, slabo heterogénna množina objektov a silne heterogénna množina objektov. Pre identické objekty platí predpoklad zhodnosti tvaru a rozmerov vo všetkých dimenziách. Pokiaľ je množina objektov slabo heterogénna, dá sa rozdeliť vzhľadom k celkovému počtu objektov do relatívne malého počtu tried, v ktorých sú z hľadiska tvaru a rozmerov identické objekty. Ďalej vzniká predpokladá, že pri objektoch, pri ktorých sa dá uvažovať odlišné otočenie, je toto otočenie považované za nový typ objektu (dimenzie objektov nie sú voľne zameniteľné). Pri silne heterogénnej množine malých objektov sa predpokladá, že len veľmi málo objektov má zhodné rozmery a tvary [8]. Uvedené rozdelenie je zobrazené na obr. č.1.

Triedenie malých objektov

- Identické malé objekty
- Slabo heterogénna množina malých objektov
- Silno heterogénna množina malých objektov

Obrázok č.1 – Rozdelenie kritéria triedenia malých objektov [8]

Pre **kritérium triedenia veľkých objektov** platí rozlíšenie buď to na jeden veľký objekt alebo viac veľkých objektov. V prípade problému s jednoprvkovou množinou veľkých objektov typológia ďalej člení problém podľa toho, či má tento veľký objekt variabilný alebo fixný rozmery. V prípade viacerých veľkých objektov je možné rozlišovať vlastnosti tejto množiny podobne ako vlastnosti množiny malých objektov, teda opäť na identické veľké objekty, slabo heterogénne množinu veľkých objektov a silne heterogénnu množinu veľkých objektov. Rovnako ako v predchádzajúcom prípade sú
v rámci základnej typológie položené určité požiadavky na vlastnosti veľkých objektov, konkrétne že veľké objekty sú obdĺžnikového tvaru (resp. majú všetky hrany kolmé v prípade problémov vyšších dimenzií), zároveň pozostávajú z jednoliateho materiálu. Ak tieto predpoklady nie sú splnené, problémy sú považované iba za varianty problému [8]. Uvedené rozdelenie je zobrazené na obr. č.2.

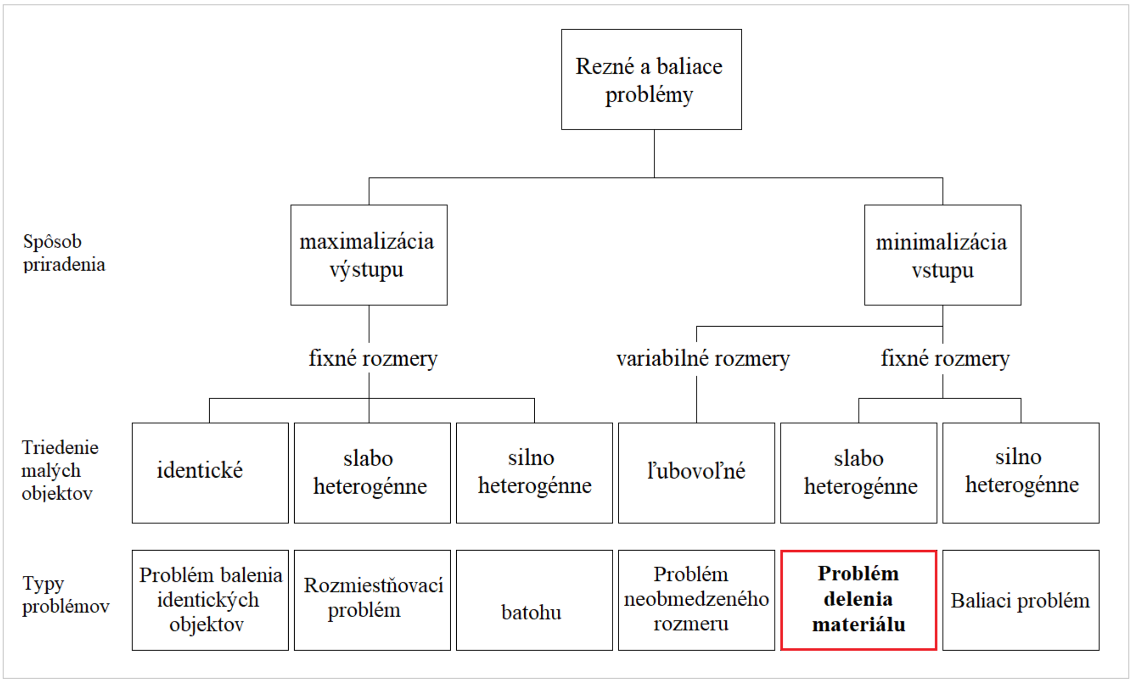


Obrázok č.2 – Rozdelenie kritéria triedenia veľkých objektov [8]

Kritérium tvaru malých objektov sa zavádza pre bližšie rozlíšenie problému, kde majú objekty dve a viac geometrických dimenzií. V typológií sa rozlišujú dva prípady. Pravidelné (obdĺžniky, kruhy, kvádre, valce, gule) a nepravidelné objekty. Predpokladá sa, že obdĺžnikové objekty musia byť na veľké objekty položené kolmo (ortogonálne), a že množina malých objektov je homogénna v zmysle, že obsahuje buď pravidelné, nebo nepravidelné objekty. Problémy, ktoré umožňujú neortogonálne rozmiesťovanie objektov, prípadne u ktorých sú v množine malých objektov oba typy (pravidelné i nepravidelné) objektov, sú opäť považované iba za varianty problému [8].

3.2 Základné, prechodné a upresnené typy problémov

Jednotlivé typy problémov sú zostavené ako kombinácie vyššie uvedených kritérií. Takzvané „základné typy problémov" sú zostavené iba z dvoch kritérií a to spôsobu priradenia a triedenia malých objektov. Zo základných typov sa ďalej odvíjajú, buď to „prechodné typy problémov" a to pridaním kritéria triedenia veľkých objektov alebo „upresnené typy problémov" pridaním zvyšných dvoch kritérií [8]. Rozdelenie základných typov problému je znázornené na obr. č.3.

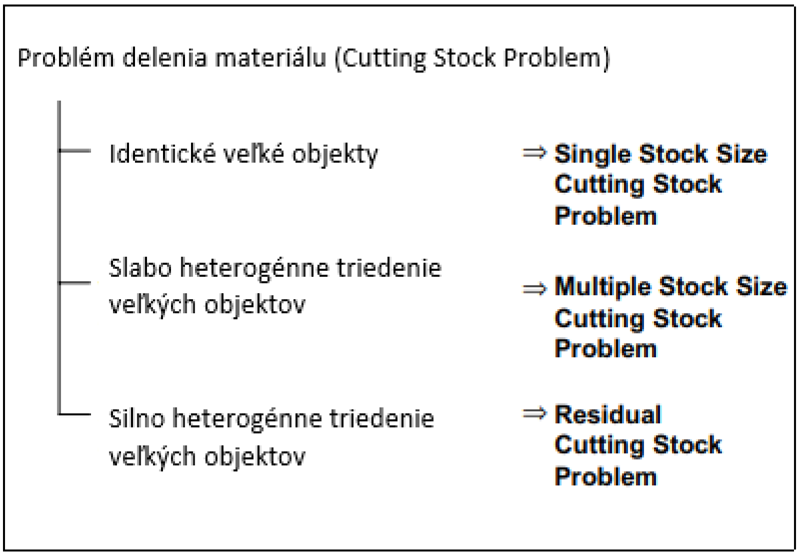


Obrázok č.3 – Rezné a baliace problémy [8]

Problém delenia materiálu (CSP) je uvádzaný ako jeden zo základných typov problémov a definovaný ako problém, pre ktorý sa množina slabo heterogénnych malých objektov umiestňuje na podmnožinu množiny veľkých objektov [8].

Uvedená typológia je použitá pre popis jednorozmernej a dvojrozmernej problematiky. Existuje aj špecifický prípad, ktorý sa označuje ako 1,5-dimenzionálny problém, ktorému sa práca venuje v časti implementácie.

Aby bolo možné definovať homogénnejšie typy problémov, vyššie uvedené základné typy problémov sú ďalej štruktúrované na „prechodné typy problémov". Dosahuje sa to zohľadnením sortimentu veľkých predmetov ako dodatočného rozlišovacieho kritéria [8]. Na obr. č.4 sú znázorňujú iba prechodné typy problémov súvisiace s minimalizáciou vstupu k čomu sa viaže daný problém delenia materiálu.



Obrázok č.4 – Prechodné typy problému delenia materiálu [8]

Každému prechodnému typu problému delenia materiálu je priradený názov a skratka, ktorá ho v rámci danej typológie jednoznačne identifikuje. K jednotlivým názvom nie sú jednoznačne určené, či už české alebo slovenské ekvivalenty. V dôsledku toho sú ďalej už len v anglických tvaroch.

3.3 Single Stock-Size Cutting Stock Problem (SSSCSP)

Problémy tohto typu zahŕňajú klasické jednorozmerné delenie materiálu, v ktorom sa štandardný materiál špecifickej jedinej nemennej dĺžky l musí rozrezať na slabo heterogénny súbor dĺžok menších položiek. Pre klasický problém dvojrozmerného rezného materiálu sa slabo heterogénny súbor obdĺžnikov musí vyrezať z daného počtu obdĺžnikových dosiek špecifickej, jedinej veľkosti dĺžky l a šírky w. V oboch problémoch je potrebné minimalizovať počet alebo hodnotu potrebných veľkých predmetov (tyčí pre 1D alebo dosiek 2D). Príklady trojrozmerného („obdĺžnikového“) problému tohto typu zahŕňajú nakladanie viacerých paliet (Multi-Pallet Loading Problem) a problém nakladania viacerých kontajnerov (Multi-Container Loading Problem), v ktorom slabo heterogénny sortiment nákladu (t.j. súbor škatúľ) je potrebné zabaliť na minimálny počet paliet alebo do minimálneho počtu kontajnerov (popísané v práci Bortfeldta [8].

3.4 Multiple Stock-Size Cutting Stock Problem (MSSCSP)

Uvedený problém zahrňuje rozšírenie problémov jednorozmerných a dvojrozmerných rezných materiálov na viac ako jednu veľkosť (dĺžku, šírku) počiatočného materiálu. Problém jednorozmerného Multiple Stock-Size Cutting stock problém sa v literatúre zvažoval aj pod názvom „Problém orezania papiera“ (Paper Trim

Problem). Ako trojrozmerný prípad MSSCSP sa uvádza jeden z problémov nakladania kontajnerov (container-loading problems). Oba kontajnery a boxy môžu byť zoskupené do tried, pričom je potrebné minimalizovať umiestnenie boxov na kontajnery. S každým typom kontajnera sú spojené špecifické náklady, celkové náklady na umiestnenie [8].

3.5 Residual Cutting Stock Problem (RCSP)

V uvedenej typológií sa označuje RCSP ako problém, ktorý nastáva vždy, keď sa majú použiť veľké objekty reprezentujúce nepoužitú časť materiálu, "zvyšky" ("left-overs"). Je to problém rezného materiálu so silne heterogénnym sortimentom veľkých predmetov z predchádzajúcich procesov rezných a baliacich problémov(C&P) [8].

4 PRÍSTUPY A ALGORITMY RIEŠENIA CSP

V nasledujúcej kapitole je uvedených niekoľko prístupov a algoritmov používaných na riešenie rozličných typov rezných problémov.

4.1 Jednorozmerné rezné problémy

Jednorozmerné rezné problémy tvoria najzákladnejšie a zároveň najjednoduchšie typy problémov, ktoré sa vyskytujú v súvislosti s potrebou optimalizácie. Ako typický príklad pre jednorozmerný problém delenia materiálu sa uvádza súbor oceľových tyčí danej dĺžky z ktorých sa majú odrezať požadované menšie kusy o rozličnej dĺžke a počte podľa požiadavky zákazníka. Podľa vyššie uvedenej typológie sa jedná o Single Stock-Size Cutting Stock Problem, kde máme len jeden typ dĺžky oceľovej tyče. Cieľom je použiť čo najmenší počet počiatočných tyčí, z ktorých sa bude ďalej rezať. Minimalizuje sa môže buď to odpad odrezaného materiálu alebo celková cena použitého materiálu.

Nech R_i sú nominálne požiadavky na počet kusov tyčí dĺžky L_i, i $= 1, \dots,$ m, ktoré sa majú odrezať zo základných tyčí použitej dĺžky UL. RL a RU sú dolná a horná hranica požiadavky na objednávku. Pre objednávku zákazníka to odráža všeobecnú priemyselnú prax povoľovania prekročenia v rámci špecifikovaných limitov. Matematicky sa tento problém môže formulovať nasledovne [10]:

$$Min \quad \sum_{j=1}^{n} T_j X_j \tag{5}$$

$$RL_i \leq \sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_j \leq RU_i \tag{6}$$

$$X_j \geq 0, \qquad j = 1, \dots, n \tag{7}$$

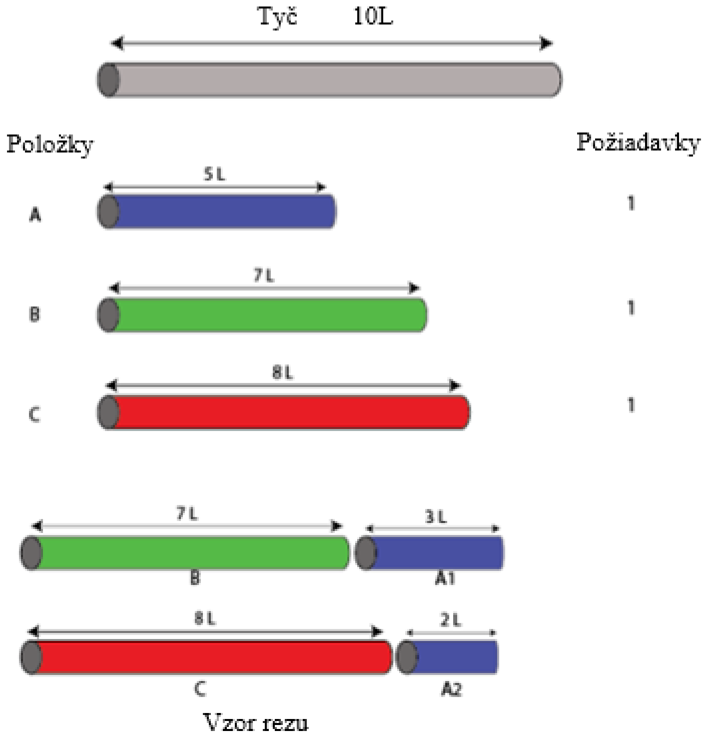
kde A_{ij} je počet tyčí dĺžky L, ktoré sa majú odrezať z každej základnej tyče a spracovať pomocou vzoru j. Aby prvky A_{ij}, i $= 1, \dots,$ m, tvorili realizovateľný vzor rezu, musia byť splnené tieto obmedzenia [10]:

$$\sum_{i=1}^{m} A_{ij} L_i \leq UL \tag{8}$$

$$A_{ij} \geq 0, \qquad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \tag{9}$$

$$T_j = UL - \sum_{i=1}^{n} A_{ij} L_i , \qquad j = 1, \dots, n \tag{10}$$

x_j je počet použitých tyčí, ktoré sa majú rozrezať pomocou vzoru j a T_j je strata orezania spôsobená vzorom j. Cieľom v tomto príklade je minimalizovať stratu orezania materiálu [10]. Ukážkové zobrazenie prípadu LP je na obr. č.5.



Obrázok č.5 Ukážkové zobrazenie LP úlohy [11]

Vo väčšine priemyselných aplikácií je potrebné okrem straty orezania zvážiť aj ďalšie faktory. Napríklad môžu existovať náklady spojené so zmenami vzorov, a preto by kontrola počtu vzorov použitých na splnenie požiadaviek objednávky bola dôležitým faktorom.

Na riešenie takéhoto problému s jednorozmerným rezným materiálom sa používajú dva typy heuristických postupov. Jeden prístup využíva riešenie lineárneho programovania. Druhým prístupom je sekvenčné heuristický postup, kde sa generujú vzory rezu postupne, aby sa uspokojila určitá časť zo zostávajúcich požiadaviek. Existuje aj tretí typ postupov, ktorý sa snaží skombinovať najlepšie vlastnosti oboch zmienených heuristických postupov [10,12].

4.1.1 Metóda oneskoreného generovania vzoru pre LP

Takmer všetky postupy riešenia založené na LP s rezaním možno vysledovať späť k autorom Gilmorovi a Gomorymu [2,3]. Určili, ako by sa dal nájsť ďalší vzor (pattern) na zadanie základu LP vyriešením súvisiaceho problému s batohom (knapsack problem). To umožnilo vyriešiť problém minimalizácie straty orezania lineárnym programovaním bez toho, aby bolo potrebné najprv vymenovať každý možný vzor rezu. Toto je mimoriadne dôležité, pretože môže existovať veľký počet uskutočniteľných vzorov. Pretože je potrebné vziať do úvahy iba malý zlomok všetkých možných vzorov riešenia s minimálnou stratou orezania, technika oneskoreného generovania vzoru umožnila vyriešiť problémy s minimalizáciou straty orezania v oveľa kratšom čase [10].

4.1.2 Metóda cutting plane

V práci Scheithauera a kol. z roku 2001 [13] sa predstavil cutting plane algoritmus na riešenie jednorozmernej CSP reznej úlohy. Základnou myšlienkou je odrezanie časti realizovateľnej oblasti relaxácie LP, aby sa optimálne celočíselné riešenie stalo extrémnym bodom a preto sa dá nájsť simplexnou metódou. Cutting plane je prvý algoritmus vyvinutý pre celočíselné programovanie, u ktorého sa dalo dokázať, že konverguje v konečnom počte krokov. Aj keď sa algoritmus považuje za neefektívny, poskytol pohľad na celočíselné programovanie, ktoré viedlo k iným efektívnejším algoritmom [13].

4.1.3 Sekvenčný heuristický postup

Pre SHP riešenie sa vytvára jeden vzor po druhom, kým nie sú splnené všetky požiadavky na objednávku. Prvý zdokumentovaný SHP schopný nájsť lepšie riešenia ako tie, ktoré požívali algoritmy lineárneho programovania, opísal Haessler [14].

Vzory vybrané na začiatku by mali mať nízku stratu orezania, vysoké využitie a tvoriť akýsi základ pre budúce vzory, ktoré sa budú dobre kombinovať bez nadmerného bočného orezania. Procedúra je schopná robiť efektívne výbery vzorov v rôznych situáciách.

Cieľ používania vzoru poskytuje hornú hranicu počtu, koľkokrát sa môže veľkosť objaviť vo vzore. Ak po vyčerpávajúcom hľadaní žiadny vzor nespĺňa stanovené ciele, potom aspoň jeden cieľ, najčastejšie používaného vzoru, musí byť uvoľnený. To zvyšuje počet vzorov, ktoré je potrebné zvážiť. Primárnou výhodou SHP je schopnosť kontrolovať iné faktory ako stratu orezania a eliminovať problémy so zaokrúhľovaním tým, že pracuje iba s celočíselnými hodnotami. Napríklad, ak existujú náklady spojené so zmenou vzoru, sekvenčná heuristická procedúra, ktorá hľadá vzory s vysokým využitím, môže poskytnúť riešenie, ktoré má menej ako polovicu počtu vzorov, ktoré vyžaduje riešenia LP na rovnaký problém. Hlavnou nevýhodou SHP je to, že môže generovať riešenie, ktoré výrazne zvýši stratu orezania materiálu [10].

4.1.4 Hybridné riešenie

Okrem použitia SHP na pomoc pri prevode riešenia LP na celočíselné hodnoty, ako bolo popísané vyššie, existuje množstvo spôsobov, ktorými možno tieto prístupy použiť spoločne na získanie najlepšej možnej odpovede na danú triedu jednorozmerného systému. Postup hybridného riešenia funguje nasledovne. Problém sa najskôr rieši ako problém LP s cieľom získať optimálne duálnej ceny. Tieto duálne ceny sa používajú ako dodatočný test pred prijatím vzoru v SHP, aby sa zabezpečilo, že vzor nebude obsahovať neúmerný podiel veľkostí s relatívne nízkymi duálnymi cenami.

Keď sa SHP blíži k dokončeniu a rozhodnutie o výbere vzoru sa stáva zložitejším, vzory pre všetky zvyškové požiadavky sa generujú pomocou LP. Ak zvyškové riešenie LP nespĺňa určitú cieľovú hodnotu, ktorá je založená na pôvodnom riešení LP celého problému, sekvenčne generované vzory sa vypustia jeden po druhom v opačnom poradí generovania a rozšírený zvyškový problém sa vyrieši pomocou LP. Tento proces vypúšťania sekvenčne generovaných vzorov pokračuje, kým sa buď nezíska uspokojivé riešenie, alebo sa vypustia všetky vzory, kedy sa vygeneruje LP riešenie s najlepšou možnou stratou orezania.

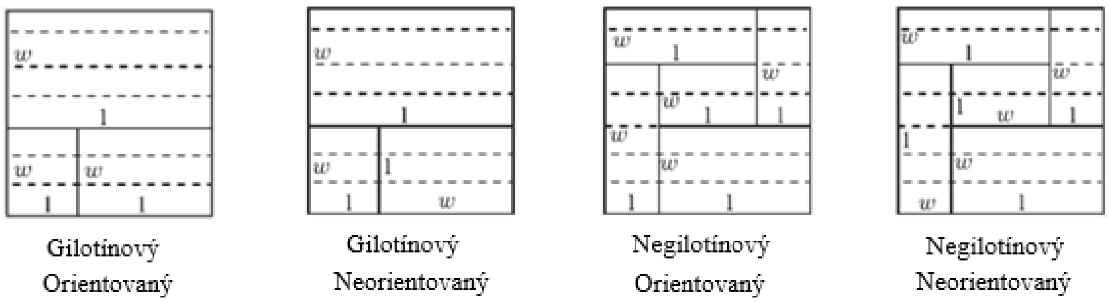
Výhodou tohto prístupu je, že spája schopnosť SHP zvážiť faktory, ako sú zmeny rezu a postup LP, aby sa minimalizovala strata orezania do jedného postupu. Tento postup je schopný poskytnúť buď čisto SHP alebo LP riešenie v závislosti od toho, čo je najlepšie. Najdôležitejšia je však jeho schopnosť vytvárať riešenia, ktoré sú čiastočne SHP a čiastočne LP, a preto budú pravdepodobne lepšie [10].

4.2 Dvojrozmerné rezné problémy

Na rozdiel od jednorozmerných reznych problémov sa problémy s dvojrozmerným rezným materiálom riešia ťažšie a to kvôli väčšej zložitosti definovania realizovateľných vzorov rezania. Preto sa pri dvojrozmerných problémoch zameriavame skôr na proces generovania vzoru než na samotný problém rezného materiálu. Formulácia tohto problému rezného materiálu s dvomi rozmermi, prípadne vyššími rozmermi, je rovnaká ako v prípade jednorozmerného problému uvedeného v (5)-(7). Pridaná zložitosť prichádza v snahe definovať a generovať, už spomínané vzory rezu. Dvojrozmerné rezné problémy (2DCSP) možno rozdeliť na pravidelné obdĺžnikové, kruhové alebo nepravidelné tvary [10].

4.2.1 Dvojrozmerné obdĺžnikové rezné problémy

Pre 2DCSP sa snažíme vyrezať rozličné obdĺžnikové kusy z daného počtu väčších obdĺžnikov, ktoré majú fixne stanovené rozmery. Minimalizujeme celkovú cenu použitých obdĺžnikov. Obdĺžnikové tvary možno získať gilotínovým alebo negilotínovým, orientovaným alebo neorientovaným rezaním. Gilotínový rez znamená, že každý rez musí ísť z jednej strany obdĺžnika rovno na opačnú. Takže každý rez vytvorí dva čiastkové obdĺžniky. Orientovaný rez znamená, že dĺžky obdĺžnikov sú zarovnané rovnobežne s dĺžkou rezaného polotovaru. Takže kus dĺžky l a šírky w sa líši od kusu dĺžky w a šírky l, keď $l \neq w$ [15]. Obr. č.6 znázorňuje vyššie popísané typy rezov.



Obrázok č.6- Typ rezov [15]

Tento problém riešili už Gilmore a Gomory (1965) [16]. Je potrebné odrezať sadu kusov s použitím, čo najmenšieho počtu potrebných obdĺžnikov materiálu. Riešením je celočíselný programovací model s postupným generovaním stĺpcov. Každý stĺpec predstavuje vzor rezu a v každej iterácii sa generuje stĺpec, ktorý znižuje počet použitých obdĺžnikov. Modely celočíselného lineárneho programovania pre ortogonálnu gilotínu CSP zvažovali už skôr viacerí autori (Gilmore a Gomory 1961; Farley, 1990) [2,17]. Keďže modely celočíselného lineárneho programovania nie sú praktické na riešenie veľkých problémov, boli navrhnuté niektoré heuristiky na generovanie dobrých rezných vzorov na vytvorenie stĺpcov problému celočíselného programovania. Napríklad rezací vzor môže byť generovaný dynamickým programovaním (Farely, 1990) [17] alebo konštruktívnym generovaním gilotínových rezov (Wang, 1983) [18].

Benati (1997) [19] vyvinul rýchlu heuristiku založenú na čiastočnom vymenovaní všetkých realizovateľných vzorov. Požadované obdĺžnikové kusy sú narezané z kotúčovitých roliek materiálu. Iní výskumníci navrhli dvojstupňový prístup pre celočíselné programovanie, založený na procedúre zaokrúhľovania po uvoľnení lineárneho programu. Na zostavenie matice obmedzení Suliman (2001) [20] navrhol metódu generovania vetvených a viazaných stĺpcov pre jednorozmerný CSP, ktorú možno premietnuť aj do 2DCSP. Suliman (2005) [21] vyvinul trojstupňovú sekvenčnú heuristiku. V prvej fáze sa určí vzor rezu na šírku. V druhej fáze sa určia dĺžky a rozloženie kusov po dĺžke na vytvorenie dobrého rezného vzoru. V záverečnej fáze sa určí, koľkokrát sa vygenerovaný rezný vzor použije [15].

4.2.2 Nepravidelné dvojrozmerné rezné problémy

Tento problém pripúšťa akékoľvek možné tvary, čo sťažuje riešenie danej problematiky. Jediný spôsob, ktorý je v istom zmysle optimálny, navrhol Adamowicz (1969) [22]. Táto metóda zahŕňa iteračné riešenie problému celočíselného programovania, po ktorom nasleduje takzvaná nastavovacia procedúra, ktorá generuje nové obmedzenia pre ďalšiu iteráciu, kým sa nevytvorí optimálne riešenie. Tento prístup je však natoľko zložitý, že experimentálny program buď nie je úplne použiteľný, alebo implementuje veľmi zjednodušenú verziu metódy. Ďalšie metódy známe pre daný problém sú heuristiky využívajúce rôzne prístupy k problému. Tieto algoritmy, aj keď sú polynomické a približné, zaberajú veľa času s náročnými numerickými výpočtami. Z tohto faktu môžeme vyvodiť závery: existuje kompromis medzi časom riešenia a kvalitou riešenia. V tejto súvislosti narastá význam hybridno-poloautomatických metód, kde sa predbežné riešenie generujú automaticky a interaktívne vylepšenia sú umožnené konverzačnou zobrazovacou jednotkou.

Jedna z metód riešenia je algoritmus od Albano-Sapuppo (1980) [23]. Tento algoritmus je založený na metóde hľadania optimálneho riešenia v orientovanom grafe všetkých čiastkových riešení pomocou niekoľkých heuristických techník, ktoré zvyšujú vyhľadávanie. Predpokladá sa, že kusy sú nepravidelné mnohouholníky bez otvorov, použitý materiál na rezanie je obdĺžnik, pričom sú povolené rotácie. Cieľom je minimalizovať odpad.

Mnohé problémy v umelej inteligencii a operačnom výskume rieši technika založená na hľadaní „priestoru" kandidátskych riešení. Vyššie uvedený prístup využíva túto techniku [24].

5 IMPLEMENTÁCIA

Pre implementáciu optimalizačných úloh sa použil programovací jazyk Matlab. Na optimalizáciu sa využili dve funkcie linprog a intlinprog. Funkcia linprog rieši problémy lineárneho programovania, nájde minimum f^T problému určeného ako:

$$A \cdot x \leq b \tag{11}$$

$$Aeq \cdot x = beq \tag{12}$$

$$lb \leq x \leq ub \tag{13}$$

Kde f, x, beq, lb, ub sú vektory a A, Aeq matice. A, b sú obmedzenia lineárnej nerovnosti, Aeq, beq obmedzenia lineárnej rovnosti, lb, ub vymedzujú interval hodnôt spodnou a hornou hranicou. Použité volanie funkcie je tvaru [25]:

$$[x, fval, exitflag, output] = linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb, ub)$$

Pre všetky vstupné argumenty vráti hodnotu účelovej funkcie, navyše vráti hodnotu exitflag, ktorá popisuje podmienku ukončenia, output obsahuje informácie o procese optimalizácie. V štruktúre lambda polia obsahujú Lagrangeove multiplikátory v riešení x [25].

Funkcia intlinprog rieši lineárne programovanie so zmiešaným celým číslom (Mixed-integer). Nájde minimum problému určeného pomocou rovníc (11)-(13), pričom obsahuje vektor $x(intcon)$, ktorý pozostáva len z celých čísel. Volanie s všetkými výstupmi je tvaru [26]:

$$[x, fval, exitflag, output] = intlinprog(f, intcon, A, b, Aeq, beq, lb, ub)$$

Použitie týchto dvoch funkcií vyžaduje Optimalization Toolbox.

5.1 LP algoritmus generovania vzoru

Tento príklad ukazuje, ako vyriešiť problém rezného materiálu pomocou lineárneho programovania s celočíselným lineárnym programovaním.
Oceľová tyč má pevne stanovenú dĺžku, z ktorej nože budú ďalej rezať požadované menšie kusy vhodné na ďalšie spracovanie. Problémom je, ako urobiť rezy tak, aby sa uspokojil súbor zákaziek s čo najmenším počtom počiatočných oceľových tyčí.

Uvažovaná úloha je typu single stock-size CSP s využutím algorimu na generovanie vzorov rezu.

Počiatočný materiál je tyč dĺžky 100 cm. Kusy, ktoré sa odrežú majú dĺžky 12, 25, 33 a 46 cm, pričom počet týchto kusov je 90, 111, 55, 30. Predpokladajme, že pri rezaní nedochádza k žiadnej strate materiálu a nevznikajú ani žiadne náklady na rezanie.

Namiesto toho aby sa vygenerovali všetky možnosti vzorov rezu pre danú úlohu lineárneho programovania je efektívnejšie vytvárať vzory rezov ako riešenie čiastkového podproblému [2].

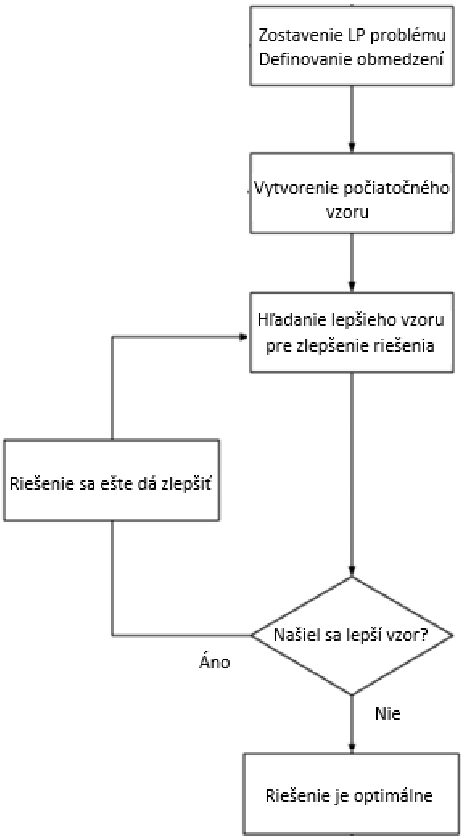
Na začiatku sa vytvorí základná sada vzorov rezu, ktoré sa použijú na vyriešenie problému minimalizácie lineárneho programovania so splnením obmedzenia, a to neprekročením dĺžky počiatočnej tyče. Najjednoduchši vzor (pattern) rezu je zobrazený na obr. č.7.

8	0	0	0
0	4	0	0
0	0	3	0
0	0	0	2

Obrázok č.7 – Počiatočný vzor

Vzor je v tejto formulácii vektorom celých čísel, pričom sa použije maximálny počet kusov tyčí z každého typu. Napríklad, tyč dĺžky 12 cm sa môže odrezať maximálne 8-krát z počiatočnej tyče o dĺžke 100 cm atď.

Po vyriešení tohoto problému sa vygeneruje nový vzor vyriešením podproblému celočíselného lineárneho programovania. Čiastkovým problémom je nájsť najlepší nový vzor, ktorý skombinuje rozličné dĺžky tak aby sa naplnila požiadavka na daný počet objednávky. Súčet dĺžok nesmie presiahnuť celkovú dĺžku počiatočnej tyče. Množstvo, ktoré treba optimalizovať, sú znížené náklady na nový vzor, čo je jedna mínus súčet Lagrangeových multiplikátorov pre súčasné riešenie krát nový vzor rezu. Ak je toto množstvo záporné, začlenenie tohto vzoru do lineárneho programu zlepší jeho cieľ. Ak nie, potom neexistuje lepší vzor rezu a doteraz používané vzory poskytujú optimálne riešenie lineárneho programovania [2,27]. Obr. č.8 ukazuje diagram optimalizácie zadaného príkladu. Obrázok č.9 ukazuje konečný výsledok.



Obrázok č.8 – Diagram postupu

```
Using 72.3333 rods
Optimal solution uses 74 rods
Cut 12 rods with pattern
   8 cuts(s) of length 12
   Waste of this patterns is 4
Cut 28 rods with pattern
   4 cuts(s) of length 25
   Waste of this patterns is 0
Cut 19 rods with pattern
   3 cuts(s) of length 33
   Waste of this patterns is 1
Cut 15 rods with pattern
   2 cuts(s) of length 46
   Waste of this patterns is 8
Total Waste of this patterns is 176
```

Obrázok č.9 – Výsledky optimalizácie príkladu 1

Na splnenie požadovaného množstva kusov pre štyri rôzne typy dĺžok sa použije 74 tyčí dĺžky 100 cm, vzniknutý odpad materiálu bude 176 cm. Celkové programové riešenie uvedeného príkladu je v prílohe.

5.2 1,5-dimenzionálny problém CSP

Existuje veľké množstvo problémov rezného materiálu, ktoré sú zložitejšie ako jednorozmerné problémy spomínané vyššie, ale nie sú skutočnými dvojrozmernými problémami. Tieto problémy sú všeobecne označované ako 1,5-rozmerné úlohy. Haessler a Talbot [28] diskutovali o prípade tohto typu problému, ktorý sa vyskytuje napríklad pri výrobe prepravných kontajnerov z vlnitej lepenky (corrugated shipping containers.). V uvažovanej situácii je objednávka zákazníka na rezy R_i šírky w a dĺžky l. Vlnitý materiál sa vyrába kontinuálne z rôznych dostupných šírok kotúčov. Rezačky a odrezávacie nože možno nastaviť tak, aby vyrábali polotovary vhodnej veľkosti. Počet odrezávacích nožov, ktoré sú bežne dva, určuje počet rôznych objednávok, ktoré je možné kombinovať po celej šírke zvlňovacieho priestoru. Hoci sa režú obdĺžnikové polotovary, nejde o dvojrozmerný problém, pretože strata orezania pozdĺž dĺžky zvlňovača nie je rozmerovým problémom. Problém je zložitejší ako jednorozmerný problém kvôli snahe zosúladiť objednávky po šírke aj po dĺžke [10].

5.2.1 Popis problematiky

Pomerne veľký súbor faktorov ovplyvňuje zostavenie potrebných vzorov rezu materiálu. Základné problémy, ktoré treba zvážiť sú nasledovné:

1. Využitie šírky vlnitej lepenky. Produktivita zvlňovacieho stroja je čiastočne riadená šírkou vyrábaného materiálu. Využitím väčšej kapacity šírky možno skrátiť čas potrebný na výrobu danej sady objednávok. Je potrebné poznamenať, že hodnota času sa bude líšiť v závislosti od situácie ponuky a dopytu.

2. Zbytočné odrezanie materiálu. Pre niektoré šírky kotúčov vzniknú zbytočne veľké straty orezania, ak sa napríklad na kotúči so šírkou 87 cm majú použiť tri rezy so šírkou 25 cm vznikne odpad z orezanie 12 cm široký. Avšak, ak by sa použila iná veľkosť napríklad 77 cm široký kotúč vzniknuté orezanie by bolo len 2 cm. Vzniknuté straty materiálu teda závisia aj od dostupných typov, ktoré sa potom používajú častejšie pre rozličné veľkosti.

3. Vzor rezu sa mení. Pretože polotovary sú rezané na samotnom zvlňovacom stroji (corrugator), dochádza pri zmene veľkosti polotovarov k strate času aj materiálu.

4. Rozdelenie objednávky. Náklady na manipuláciu a spracovanie sa môžu podstatne zvýšiť, ak sa celá zákazka nevyrába kontinuálne počas série.

5. Šírka kotúčov na vlnitú lepku sa mení. Pri výmene rozličných kotúčov a zmene pre nastavenia nožov vznikajú časové a teda aj cenové náklady.

6. Dostupnosť zásob. Niekedy môžu byť v skladoch obmedzené množstvá konkrétnej veľkosti kotúča a teda dochádza k situácií kedy sa použijú iné veľkosti, ktoré nezabezpečujú žiadané minimálne náklady [28].

5.2.2 Algoritmus riešenia

Ak je problém formulovaný pomocou vzoru, zostaveného z vyššie uvedených faktorov, tak výsledný vzor rezu je mimoriadne zložitý. Namiesto formulovania problému z hľadiska potrebných vzorov rezu je možné vyvinúť oveľa lepšiu formuláciu zameraním sa na riešenie takzvaných „prvkov“(solution elements). „Prvok riešenia“ je špecifikácia spôsobu, ktorým je možné kompletne vyrobiť jednu alebo viacero objednávok z jednej veľkosti použitých kotúčov vlnitej lepky. Uvádzajú sa štyri typy, o ktorých sa uvažuje[28]:

1. Samostatná výroba jednej objednávky, napríklad vyrezanie troch polotovarov so šírkou 25 cm zo 77 cm širokého kotúča.

2. Výroba dvoch objednávok s použitím jedného vzoru rezu, napríklad rezanie dvoch 20 cm širokých polotovarov a dvoch 18 cm širokých polotovarov zo 77 cm širokého kotúča. Toto je možné vykonať iba vtedy, ak sú požiadavky na množstvo také, aby sa obe objednávky súčasne dokončili v rámci prípustných toleranciách. Typickou hodnotou v tomto odvetví je vyrobiť dve objednávky v rozsahu tolerancie plus 10%

3. Výroba dvoch objednávok za použitia dvoch vzorov rezania pre jednu veľkosť kotúča, napríklad vyrezanie jedného 25 cm širokého polotovaru a jedného 51 cm širokého polotovaru zo 77 cm širokého kotúča, kým sa objednávka na polotovary s veľkosťou 51 cm nesplní, následne sa potom dokončí objednávka pre tri 25 cm široké polotovary.

4. Výroba troch objednávok z dvoch vzorov rezania jednej veľkosti, napríklad rezanie dvoch 25 cm širokých polotovarov a jedného 26 cm širokého polotovaru zo 77 cm šírky kotúča, kým sa nedokončí 26 cm objednávka, a potom sa môžu rezať dva 25 cm polotovary a dva 13 cm polotovary, kým sa tieto dve objednávky nesplnia. Opäť sa vyžaduje špecifický vzťah medzi objednanými množstvami. Rozličné objednávky sa musia dokončiť v istej tolerancií.

Pre tretí a štvrtý spôsob sa objednávka rozloží na dve zostavy vzorov pre rovnakú veľkosť kotúča. Toto sa však nepovažuje za rozdelenie objednávky, pretože vzory sa spúšťajú postupne. Pomocou vyššie uvedených prvkov riešenia sa problém orezania zvlnenia matematicky definuje ako [28]:

$$Min \quad \sum_{j}^{n} c_j x_j + \sum_{k}^{K} s_k y_k \tag{14}$$

$$\sum_{i}^{m} a_{ij} x_j = 1 \tag{15}$$

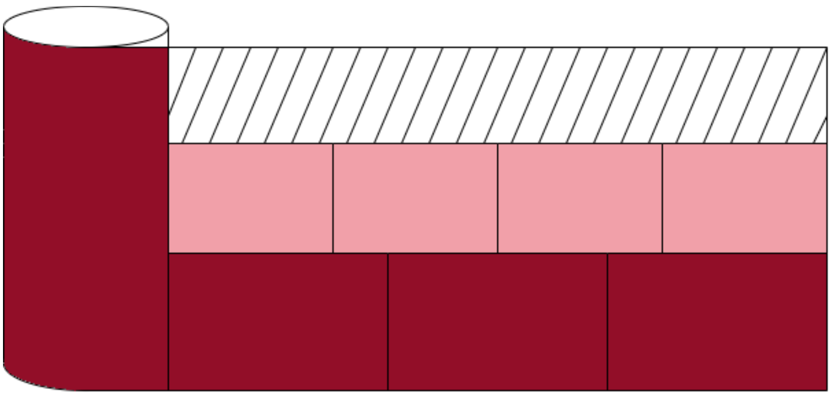
$$\sum_{j}^{n} u_{jk} x_j < A_k y_k, \qquad k = 1, \dots, K \tag{16}$$

$$x_j = 0\ alebo\ 1 \ \ y_k = 0\ alebo\ 1 \tag{17}$$

Kde:
n je počet objednávok
K je počet použitých kotúčov rôznej šírky
x_j je 1 ak je prvok j použitý a 0 ak nie je
y_k je 1 ak je kotúč k použitý a 0 ak nie je
a_{ij} je 1 ak objednávka i je zobrazená v prvku j a 0 ak nie je
u_{jk} je šírka kotúča k požadovaná prvkom j
A_k je šírka kotúča k dostupná na sklade
c_j je celková cena nákladov na použitie prvku j
s_k sú náklady spojené s naloženie kotúča k na stroj.

5.2.3 Riešenie názorného príkladu

Na riešenie 1,5-dimenzionálnej optimalizačnej úlohy sa použije vyššie uvedený algoritmus, pričom sa využili prvé 3 typy prvkov riešenia na kombinovanie použiteľných rezov materiálom. Na obr. č.10 je ukázaný typ prvku 2, kedy sa rozmiestňujú na rolu papiera dve objednávky.



Obrázok č.10 – 1,5-dimenzionálny problém

Riešenie minimalizuje cenu spotrebovaného materiálu. Jednotlivé ceny c_j pre kombinácie požitých typov sa uvažujú ako súčin použitej šírky zvoleného kotúča, spotrebovanej dĺžky a počtu danej objednávky vydelené maximálnym počtom objednávok daného typu usporiadaných na šírku kotúča. Koeficient s_k sme stanovili ako plochu, ktorú tvoria jednotlivé šírky a dĺžky kotúčov. Ak napríklad zoberieme dĺžku objednávky A, čo je 62,25 cm a máme vyrezať 4000 kusov, pričom na kotúč napríklad o šírke 69 cm sa zmestia na šírku maximálne dve objednávky A, tak celková plocha rezaného materiálu bude na dĺžku 124500 cm. Neuvádzame celkový počet kusov danej šírky papierového kotúča dostupného na sklade ale celkovú dĺžku kotúčov každého typu, ktorú sme preto stanovili na 300000 cm.

Príklad obsahuje 15 objednávok nazvaných písmenami A až Z . Vstupné dáta s hodnotami šírky, dĺžky a počtu kusov sú uvedené v tabuľke č.1. V tabuľke č.2 sú zobrazené niektoré z troch typov kombinácií, ktoré vznikli použitým algoritmom. Uvažuje sa možné použitie desiatich kotúčov so šírkou 67 cm až 87 cm, pričom rozdiel medzi každými dvomi je 2 cm.

Tabuľka č.1 – Hodnoty pre 1,5-dimenzionálneho príkladu

Objednávka	Šírka [cm]	Dĺžka [cm]	Počet objednávok
A	24,625	62,250	4000
B	22,500	66,625	5000
C	19,4375	54,500	2000
D	19,1875	57,250	3500
E	19,9375	63,250	4000
F	18,0625	47,500	5000
G	19,9375	47,500	5000
H	20,5625	55,000	3600
I	21,6250	48,250	2400
J	16,8125	83,750	3000
K	21,6875	55,750	3000
L	21,5625	63,000	2000
M	16,5625	49,250	5000
N	42,0000	37,875	750
O	43,3125	59,625	250

Celkovo sa vygenerovalo 1527 kombinácií možných rezov, z každého typu je niekoľko uvedených v tab.č.2. Celkový výsledok optimalizácie je uvedený na obr.č.11.

Tabuľka č.2 – Výsledné kombinácie rezov

Prvky riešenia		
Typ 1	Typ 2	Typ 3
'4J size: 69'	'1C 2D size: 87'	'3C 1J second cut: 5J size: 87'
'3L size: 71'	'2B 1K size: 85'	'2K 1O second cut: 4K size: 87'
'3C size: 73'	'1C 2G size: 81'	'3C 1L second cut: 3L size: 83'
'3A size: 75'	'1A 1E size: 79'	'2E 1I second cut: 3E size: 79'
'4F size: 77'	'2G 1I size: 77'	'3E 1J second cut: 4J size: 77'
'4M size: 81'	'1I 1L size: 75'	'1B 1N second cut: 2B size: 75'

Formát zápisu je: 'počet rezov objednávky A-Z zo šírky kotúča 69-87'

```
    nodes      total   num int        integer       relative
 explored   time (s)  solution           fval        gap (%)
       35       0.90        12   1.253194e+08   6.214434e+00
      363       1.40        13   1.246100e+08   3.311165e-01
      426       1.44        14   1.246038e+08   1.143350e-03
      481       1.46        14   1.246038e+08   4.460138e-04
      484       1.46        14   1.246038e+08   0.000000e+00

Optimal solution found.
```

Obrázok č.11 – Výsledky príkladu 2

Bežná cena vlnitej lepenky sa môže pohybovať okolo 7,07 korún za meter štvorcový. Výsledok optimalizácie uvažovaného príkladu vyšiel na $1{,}246 \cdot 10^8$ halierov , čo je 1 246 000 CZK.

6 ZÁVER

Práca sa zaoberá popisom problému a riešením optimalizácie delenia materiálu. Najprv sú stručne popísané základy lineárneho a celočíselného programovania. Uvedená je aj všeobecná typológia pre definovanie problému delenia materiálu, pomocou niekoľkých kritérií. V práci sú slovne popísané prístupy a algoritmy na riešenie rezných problémov, z ktorých sa použili dva na riešenie jednorozmerného a 1,5-dimenzionálneho problému. Obe úlohy sú vypracované v programovacom jazyku Matlab, pričom sa využili funkcie na optimalizovanie (linprog a intlinprog).

Prvý riešený problém pozostáva z celočíselného lineárneho programovania, kde sa použil algoritmus na generovanie vzoru. Ako názorný príklad sa riešilo rozrezanie oceľovej tyče s pevne stanovenú dĺžkou, z ktorej nože budú ďalej rezať požadované menšie kusy, ktoré budú napríklad vhodné na ďalšie spracovanie. Problémom bolo vykonanie rezov s čo najmenším počtom počiatočného materiálu, aby sa naplnili požiadavky na počty kusov daných dĺžok.

Druhý typ problému sa zvolil 1,5-dimenzionálna úloha, ktorá je zložitejšia ako predchádzajúci jednorozmerný problém. Haessler a Talbot [28] popísali algoritmus, ktorý sa zameriava na riešenie tohoto typu. Namiesto formulovania problému za pomoci potrebných vzorov rezu vyvinuli lepšiu formuláciu zameraním sa na riešenie takzvaných „prvkov“. Uvádzané štyri typy týchto prvkov sa dajú kombinovať na zostavenie požadovaného riešenia. Tri typy týchto prvkov riešenia sa použili na vytvorenie možných kombinácií vzorov rezu, z ktorých sa zistila minimálna cena materiálu.

7 ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

[1] Kantorovich, Leonid V., *Mathematical methods of organizing and planning production*. Management Science 6.4, 366-422, (1960)

[2] Gilmore, P.C., Gomory, R.E.: *A linear programming approach to the cutting-stock problem.* Operations Research. 9, 849-859, (1961)

[3] Gilmore, P.C., Gomory, R.E.: *A linear programming approach to the cutting-stock problem Part II.* Operations Research. 11, 863-888, (1963)

[4] Jindřich Klapka; Pavel Popela; Jiří Dvořák, *Metody operačního výzkumu*, Vysoké učení technické v Brně, Brno: VUTIUM, 2001

[5] G. B. DANTZIG, A. ORDEN, P. WOLFE. *The Generalized Simplex Methods for Maximizinga Linear Form under Linear Inequality Restraints.* Paci,fic J. Math., Vol.5, pp.183-195, 1955

[6] O. G. ALEXEJEV' *Kompleksnoje pr,irneněnije metodou diskretnoj optimizacii*. Nauka, Moskva, 1987.

[7] G. L. NEMHAUSER, L. A. WOLSEY. *Integer and Combi,natori,al Opti,mi,zati,on.* John Wiley & Sons, New York, 1988.

[8] Wascher, Gerhard & Haußner, Heike & Schumann, Holger, 2007. *An improved typology of cutting and packing problems,* European Journal of Operational Research, Elsevier, vol. 127(3), pages 1109-1130, December.

[9] Dyckhoff, H.: *A typology of cutting and packing problems.* European Journal of Operational Research. 44, 145-159, (1990).

[10] Robert W. Haessler and Paul E. *Cutting stock problems and solution procedures*, European Journal of Operational Research 54 (1991) 141-150 North-Holland

[11] Deniz Tanir, Onur Ugurlu, Asli Guler, and Urfat Nuriyev Ege University, Izmir, Turkey, *One-dimensional Cutting Stock Problem with Divisible Items*

[12] C.H. Cheng, BR Feiring, TCE Cheng, *The cutting stock problem* - A survey, International Journal of Production Economics 36 (I 994) 29 l-305

[13] Scheithauer, G., Terno, J., Muller, A., Belov, G.: *Solving one-dimensional cuttingstock problems exactly with a cutting plane algorithm*. Journal of the Operational Research Society. 52, 1390-1401, (2001)

[14] Haessler, R.W. (1971), *A heuristic programming solution to a nonlinear cutting stock problem*, Management Science 17, 793-802.

[15] Ahmed Mellouli, Abdelaziz Dammak, *An Algorithm for the Two-Dimensional Cutting-Stock Problem Based on a Pattern Generation Procedure*, International Journal of Information and Management Sciences volum 19, number 2,pp.201-218,2008

[16] Gilmore, P.C., and Gomory R.E. (1965), *Multistage cutting stock problems of two and more dimensions*, Operations Research 13, 94-120.

[17] Farley, A.A., 1990. *A note on bounding a class of linear programming problems, including cutting stock problems*. Oper. Res., 38: 922-933.

[18] Wang, P.Y. (1983), *Two algorithms for constrained two-dimensional cutting stock problems*, Operations Research 3l, 573-586.

[19] Benati, S. *An algorithm for a cutting stock problem on a strip*. J Oper Res Soc 48, 288–294 (1997)

[20] Saad M.A. Suliman, *Pattern generating procedure for the cutting stock problem*, Int. J. Production Economics 74 (2001) 293-301

[21] Saad M.A. Suliman, *A sequential heuristic procedure for the two-dimensional cutting-stock problem*, International Journal of Production Economics Volume 99, Issues 1–2, January–February 2006, Pages 177-185

[22] M. Adamowicz. *The Optimal Two-Dimensional Allocation of Irregular Multiply Connected Shapes with Linear Logical and Geometric Constraints*. N.Y. Univ. Tech. Report 403-9, New York 1969.

[23 A. Albano, G. Sapuppo. *Optimal Allocation of Two-Dimensional Shapes Using Heuristic Search Methods*. IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, vol. SMC10, No. 5, May 1980.

[24] Btaiewicz, M. Drozdowski, B. Soniewicki, R. Walkowiak, *Two-Dimensional Cutting Problem*, CP-91-009 June 1991

[25] https://www.mathworks.com/help/optim/ug/linprog.html

[26] https://www.mathworks.com/help/optim/ug/intlinprog.html

[27] Jaya Thomas, Narendra Chaudhari, *An Analytical Approach for Column Generation for One-Dimensional Cutting Stock Problem*

[28] Robert W.Haessler, F.Brian Talbot, *A 0-1 Model for solving the corrugator Trim Problem*, Management Science, Vol.29, No. 2, February 1983

8 ZOZNAM SKRATIEK, SYMBOLOV, OBRÁZKOV A TABULIEK

Skratky a symboly:

CSP	Cutting Stock Problem
SSSCSP	Single Stock-Size Cutting Stock Problem
MSSCSP	Multiple Stock-Size Cutting Stock Problem
RCSP	Residual Cutting Stock Problem
R_i	Počet kusov
L	Dĺžka
W	Šírka
Ul	Použitá dĺžka
RL	Dolná hranica
RU	Horná hranica
T_j	Strata orezania spôsobená vzorom j
x_j	Počet použitých týči, ktoré sa režú podľa vzoru j
a_{ij}	Počet tyčí dĺžky L, ktoré sa spracujú podľa vzoru j
LP	lineárne programovanie
SHP	sekvenčný heuristický postup
2DCSP	dvojrozmerne CSP
m	počet objednávok
K	počet použitých kotúčov rôznej šírky
x_j	je 1, ak je prvok j použitý a 0 ak nie je (j = 1,...,n)
y_k	je 1 ak je kotúč k použitý a 0 ak nie je
a_{ij}	je 1 ak objednávka i je zobrazená v prvku j a 0 ak nie je
u_{jk}	šírka kotúča k požadovaná prvkom j
A_k	šírka kotúča k dostupná na sklade
c_j	celková cena nákladov na použitie prvku j
s_k	náklady spojené s naložením kotúča k na stroj.

Obrázky:

Tabuľky:

9 ZOZNAM PRÍLOH

1. Zdrojový kód algoritmu pre LP generovania vzoru
2. Zdrojový kód algoritmu pre 1,5-dimenzionálny problém