Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

POZIČNÍ A NEPOZIČNÍ NUMERAČNÍ SOUSTAVY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vedoucí práce

RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

Vypracovala

Lenka Vopálenská

České Budějovice, duben 2013

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Poziční a nepoziční numerační soustavy jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 15. 4. 2013

…………………………..

Lenka Vopálenská

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucí mé bakalářské práce RNDr. Libuši Samkové, Ph.D. za ochotu při spolupráci, věcné připomínky a důležité rady, které mi poskytla. Také děkuji rodině a kamarádům, kteří mi byli po dobu studia oporou.

Anotace

Cílem bakalářské práce bylo v první části zpracovat přehlednou studii o pozičních a nepozičních numeračních soustavách (různé typy, jejich historie, způsoby zápisu, převody, apod.).

V druhé části práce vytvořit sadu příkladů (řešených), které by svým pojetím přiblížily nedesítkové soustavy žákům ZŠ.

Abstract

The goal of my bachelor work was at first to do clearly arranged study about positional and nonpositonal numeral system (various types, its history, type of notation, transmission, etcetera).

And in the second part of my work I tried to do set of examples which would describe with it´s explanation nondecimal systems to pupils in the primary school.

Obsah

1 Úvod

Číslo je základem každé číselné soustavy. Užívá se pro vyjádření pořadí, množství a pro mnoho dalších účelů. Číselné soustavy jsou součástí nejen matematiky, ale například i informatiky.

Cílem této bakalářské práce je osvětlit historii vzniku jak pozičních tak nepozičních numeračních soustav, díky kterým je položen základ pochopení desítkové soustavy a tím i přirozených čísel. Dále bych ráda osvětlila vztahy mezi jednotlivými soustavami, jejich převody, ale také i početní operace v daných soustavách.

Každá číselná soustava má určené znaky, které vyjadřují dané hodnoty. V dnešní době se většinou jedná o arabské číslice a u soustav, které mají větší základ, jak deset se dále ještě používají písmena abecedy. Není tomu tak však vždy, například u římských číslic se používá pouze třináct daných písmen či jejich kombinací. Máme dva druhy numeračních soustav a to soustavy poziční a nepoziční. To znamená, že u pozičních soustav záleží na pořadí jednotlivých symbolů, nemůžeme si symboly zapisovat, jak se nám zachce, protože potom bychom zapsali jiné číslo, než jsme chtěli. Naopak u soustav nepozičních na daném pořadí nezáleží, tudíž můžeme symboly různě přehazovat a dané zapisované číslo nijak nezměníme.

Dnes se nejvíce používá soustava desítková, možná z důvodu, že člověk má deset prstů na rukou a v dřívějších dobách, kdy neexistovali žádné početní přístroje, používali lidé právě jako početní přístroj prsty na rukou. Ale i ostatní nedesítkové soustavy mají dnes své upotřebení, například soustava dvojková je používána v oblasti informatiky a to z důvodu její praktičnosti, počítače díky dvojkové soustavě rozlišují pouze dva případy, které mohou nastat, kdyby však pracovali se soustavou desítkovou, museli by umět rozlišit případů deset.

Budu se snažit, aby tato práce pomohla studentům pochopit, jak v daných soustavách pracovat a orientovat se v nich. Aby se studenti seznámili s tím jak provádět dané početní úkony i v jiných soustavách ne pouze v dekadické.

2 Historie numeračních soustav

2.1 Numerace jeskynního člověka

O počítání jeskynního člověka víme málo, ale jistě neuděláme velkou chybu, když předpokládáme, že jeho aritmetika byla velmi primitivní. V podstatě se asi jednalo o počítání typu zjištění, kolik má ovcí, kolik je nepřátel, proti kterým se vypravil, kolik je obyvatel v jeho osadě apod.

Neznal názvy čísel a ani je nepotřeboval. Je domněnka, že na určitém stupni svého kulturního vývoje dovedl určit např. počet ovcí, které ráno vyháněl na pastvu, tím, že za každou ovci položil na hromádku kamínek a večer opět pomocí kamínků zkontroloval, zda se všechny ovce vrátily.

Je-li tato domněnka správná, pak tento způsob zjišťování počtu je matematicky velmi zajímavý. Tvořil vlastně relaci vzájemně jednoznačného přiřazování mezi dvěma množinami: mezi stádem ovcí a hromádkou kamínků. Dovedl „spočítat" své ovce, aniž znal jejich počet.

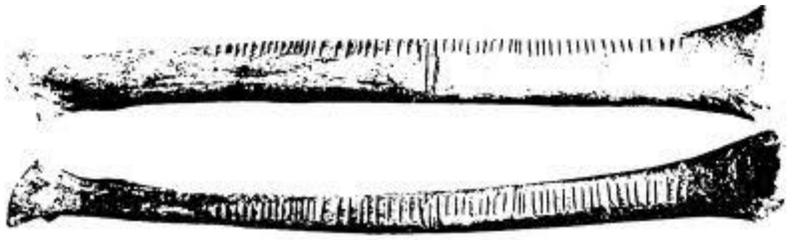
Jiný způsob, jak člověk zjišťoval počet věcí, bylo pomocí zářezů neboli vrubů, které dělal do hole nebo do kosti. Při větších číslech byly zápisy nepřehledné, a proto velkým pokrokem bylo sdružovat zářezy po skupinách. Že se tak dělo, svědčí snad jeden z nejstarších zápisů čísla, který se našel ve vykopávkách v Dolních Věstonicích na Moravě. Zápis, který je starý asi 30 000 let, je proveden na stehenní kosti a obsahuje 25 a 30 zářezů sdružených po pěti.

Jako další pomůcku při počítání používal jeskynní člověk obyčejný provázek, na který postupně dělal uzly. Například nejprve udělal na jeden provázek deset uzlů, odložil ho a vzal si další, na který opět udělal deset uzlů. Tyto provázky poté postupně sdružoval do skupinek.

Nevíme, které početní výkony jeskynní člověk prováděl. Prováděl-li vůbec nějaké, pak to byly jistě velmi jednoduché operace: sčítání, odečítání, dělení na několik stejných částí. Samozřejmě, že primitivní, člověk takto nepočítal. Své poznatky získával postupně z praktické činnosti a trvalo ještě celá tisíciletí, než člověk dospěl k matematické teorii.

Shrňme nyní zásady, na kterých byla – patrně neuvědoměle vybudována tato primitivní numerace, které se užívalo po několik desítek tisíc let.

1) Při tomto způsobu numerace se užíval jeden číselný znak, čárka nebo zářez, který značil číslo jedna.
2) Opakováním čárky se dalo zapsat číslo větší než jedna.
3) Při větším čísle se čárky sdružovaly do skupin po pěti, čímž se dosáhlo toho, že zápis byl přehlednější. (Jelínek, [5])



Obr. č. 1 Věstonická vrubovka [13]

2.2 Numerace starých egypťanů

Egyptský způsob zapisování čísel je velmi starý, byl užíván již před 5 000 lety. Vyvinul se z jednoduchého způsobu jeskynního člověka. Také staří Egypťané zapisovali čísla pomocí čárek, ale rozhodli se tvořit skupiny po deseti. Čím větší číslo, tím více skupin, a tím by se byl zápis stal opět nepřehledným. Egypťané rozřešili tento problém skvělým nápadem, že zavedli pro skupinu deseti čárek nový číselný znak.

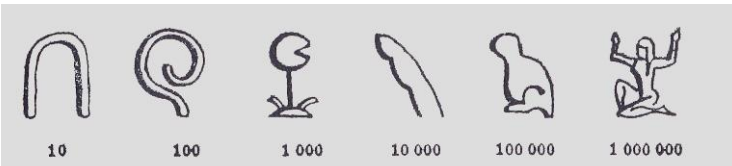
Při zápisu ještě většího čísla, kde již znak pro deset by mnohokrát opakoval, začali tento znak opět sdružovat do skupin po deseti a tuto novou větší skupinu označili novým znakem.

Opakovaným sdružením po deseti dostávali stále větší a větší skupiny, pro něž zaváděli další číselné znaky. Původně každý znak zobrazoval nějaký předmět; tak např. znak pro 1 000 byl květ lotosu, což byl symbol hojnosti. Číslo 100 000 byl prý obrázek pulce, kterých se rojilo po každé záplavě Nilu obrovské množství.

Psaní pomocí hieroglyfů bylo nesnadné, a proto byly později nahrazeny jednodušším písmem, jehož znalost se rozšířila mezi lidi. Nyní si shrňme zásady, které využívali staří Egypťané.

1) Jediný symbol mohl označovat i velký počet věcí.

2) Týž symbol byl opakován, bylo-li nutno zapsat několik skupin stejné velikosti.
3) Prvky se sdružují do skupin po deseti. Deset jednotek tvoří jednu desítku, deset desítek jednu stovku atd.
4) Při psaní větších a větších čísel bylo nutno zavádět další a další číselné znaky pro označování velkých skupin. Teoreticky řečeno, tato soustava by vyžadovala nekonečné množství číselných znaků.
5) V egyptské numeraci nezáleželo na tom, v jakém seskupení byly znaky uspořádány. V zapisování čísel byly určité zvyklosti, ale nezáleželo na tom, zda se psalo odprava doleva, či jinak. Často byly znaky umisťovány do geometrických tvarů.
6) Egypťané nepotřebovali znak pro nulu. Bez obtíží mohli zapisovat čísla, kde je v naší numeraci nula nutná.
7) Sčítání a odčítání je v této soustavě jednoduché. Při sčítání se znaky v obou sčítancích shrnou dohromady a výsledek se pak zjednoduší tím, že deset stejných znaků se nahradí znakem vyšším o jeden stupeň. Naopak u odečítání je někdy nutno některý znak nahradit deseti znaky nižšího stupně. (Jelínek, [5])



Obr. č. 2 Egyptské hieroglyfy [12]

2.3 Numerace národů Mezopotámie

Asi 3000 let př. n. l. psali Sumerové v jižní Mezopotámii na hliněné tabulky pomocí dřevěných tyčinek, konec tyčinky byl seříznut do tvaru klínku. Značka vytisknutá do měkkého jílu takto seříznutou tyčinkou znamenala číslo jedna. Opakováním dostávali postupně čísla 2, 3 až 9. Pro číslo deset zavedli nový číselný znak, který se dal jednoduše vytvářet stejnou tyčinkou.

Po Sumerech převzali tento způsob zapisování čísel Babyloňané, kteří ovládli asi kolem 1800 př. n. l. celou Mezopotámii. Po nich se nazývá tento způsob zapisování čísel babylonský.

Opakováním těchto dvou znaků zapisovali čísla od 1 do 59. Na prvním místě odprava se zapisovaly jednotky, nalevo od nich desítky. Při zapisování větších čísel než 59 užívali Babyloňané soustavy se základem 60. Šedesát jednotek tvořilo jednotku vyšší skupiny, šedesátku, 60 šedesátek tvořilo další skupinu, 60 x šedesátku (tj. 3600) atd. K označování těchto vyšších skupin užívali stejných symbolů jako pro označování čísel od 1 do 59. Číselný znak znamenal jednotky, šedesátky nebo 60 x šedesátky podle toho, kde byl umístěn.

Samozřejmě zápis čísla nebyl vpisován do tabulky, a bylo tedy nutno při čtení čísla rozhodnout, do které skupiny každý znak patří.

Babylonská numerační soustava byla vybudována na dvou základech, 10 a 60, přičemž soustava se základem 10 byla starší. Kombinací obou základů našli Babyloňané účinný způsob, jehož pomocí mohli zapisovat i velká čísla. Přitom učinili velký objev, neboť první zavedli tzv. **poziční numerační soustavu**.

Číselný znak znamenal jednotky, šedesátky a vyšší skupiny podle svého umístění (pozice) v zápisu čísla. V případě, že se střídaly v zápisu čísla znaky pro jednotky a desítky, bylo přečtení čísla celkem snadné. Obtíže činila čísla, kde skupiny nebyly zřetelně odděleny. To vznikalo všude tam, kde my bychom použili nulu. Babyloňané totiž neznali nulu jako číslo, a neměli proto pro ni zvláštní znak.

Babyloňané cítili tento nedostatek a v pozdějších dobách si všelijak pomáhali. Někdy nechávali na místě, kde bychom psali nulu, mezeru, jinde vkládali různá znaménka, ale nikdy ne na konci zápisu. Protože prázdné místo na konci nemůže být označeno mezerou. Shrňme si nyní principy babylonské numerační soustavy.

1) Babylonská numerace byla vybudována na dvou základech. Vznikaly skupiny po deseti a šedesáti.
2) Pro zapsání jakkoli velkého čísla stačily pouze dva číselné znaky.
3) Babylonská soustava byla soustava poziční. Umístění a seřazení znaků, hrálo rozhodující úlohu.
4) Velkým nedostatkem bylo, že Babyloňané neznali nulu a nezavedli pro ni symbol, ačkoli ho potřebovali. Proto čtení babylonských zápisů čísel bylo a je často nejisté.

S touto numerační soustavou Sumeřané a Babyloňané učinili velký pokrok v matematice. Znali zlomky, druhé a třetí mocniny a odmocniny, které sestavovali do tabulek, uměli řešit lineární rovnice a znali tzv. Pythagorovu větu asi 1000 let před Pythagorem. (Jelínek, [5])

Obr. č. 3 Klínové číslice [12]

2.4 Řecká a římská numerace

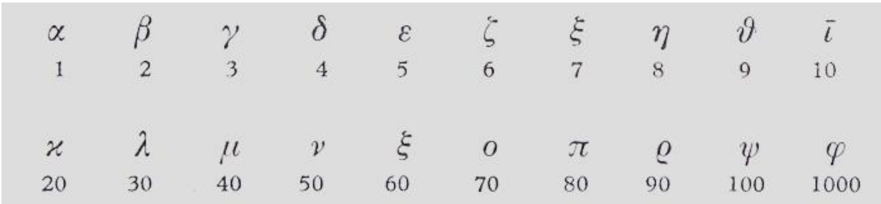
Existovaly ještě mnohé další způsoby zapisování čísel, Řekové a Římané, Číňané a Indiáni a jiní vytvořili své vlastní soustavy. Ale pro náš výklad desítkové soustavy, které se nyní užívá po celém světě, není nutné zabývat se těmito numeracemi. Spíše jen pro úplnost všimněme si ještě zcela zběžné řecké a římské numerace.

Je zajímavé a s podivem, že Řekové a Římané, jimž vděčíme za mnohé, nepřispěli ničím novým ke způsobu zapisování čísel. Nepochopili výhody poziční soustavy babylonské, a dokonce i jednoduchou desítkovou soustavu egyptskou komplikovali vkládáním nových číselných znaků.

Řekové po jistých počátečních úpravách užívali složité soustavy s 27 písmeny své abecedy ve významu číselných znaků. Tisíce se vyjadřovaly pomocí apostrofu na prvních devíti znacích (které označovali naše číslice 1-9). Desetitisíce se označovaly pomocí velkého písmene M, nad které se zapsalo určité písmeno řecké abecedy.

Římské číslice jsou dosud v užívání. Můžeme je vidět na budovách, na starých hodinách, při označování kapitol v knize a na pomnících. Římského způsobu zapisování čísel se užívalo po dlouhou dobu pro praktické účely, obchod a bankovnictví až do 16. stol. Ve středověku byl způsob zapisování čísel poněkud upraven, např. násobek tisíce se označoval vodorovnou čárkou nad číselným znakem. Římané užívali sedmi základních znaků. Pomocí kterých dokázali vyjádřit jakékoliv číslo. Využívali opakování znaků jako např. při egyptské numeraci. Pořadí číslic bylo stanoveno: číslice zapisující zleva doprava podle velikostí čísel.

Sčítání a odečítání bylo poměrně jednoduché. Znaky sčítanců se při sčítání sdružily a zjednodušení se provedlo pomocí určených vztahů. Zpočátku se zápisy čísel tvořily pouze pomocí sčítání. Teprve později se částečně užívalo principu odečítání. Nikdy však nebyla vypracována přesná pravidla pro užívání principu odčítání. Jeho důsledné užívání by vedlo k nejasnostem. (Jelínek, [5])



Obr. č. 4 Řecká abeceda - čísla [12]

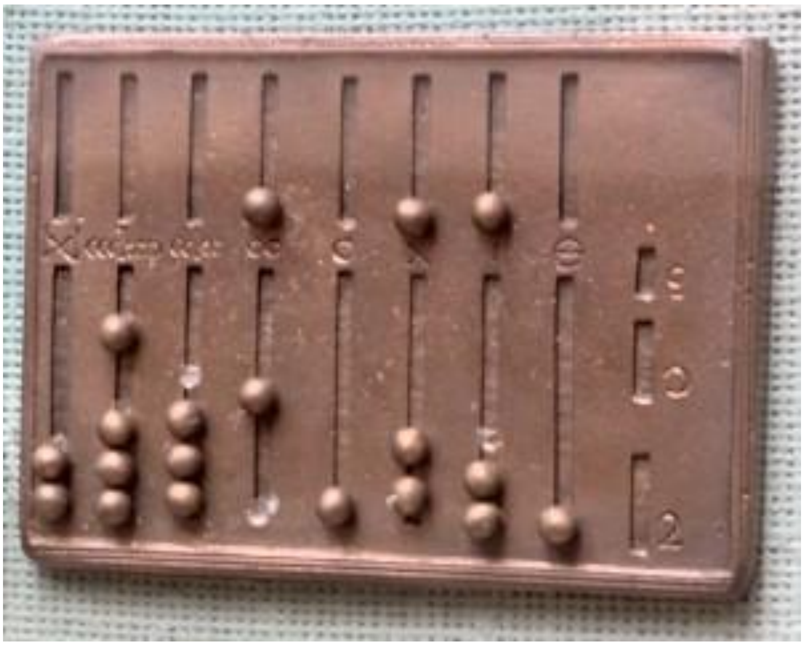
Obr. č. 5 Řecké číslice [12]

Obr. č. 6 Původní římská čísla [12]

2.5 Kuličkové počítadlo

Kuličkové počítadlo neboli abakus můžeme zařadit jak do poziční, tak do nepoziční numerační soustavy. Jedná se o jednoduchou pomůcku, která usnadňuje výpočty. Používají se k lepšímu porozumění naší numerační soustavy. Jsou to velmi staré učební pomůcky, kterých se odedávna užívalo ve školách i při praktickém počítání. Počítadlo se skládá z kuliček, jejichž přesouváním po drátku z jedné strany na druhou pomáhá při výpočtech, stejně jako počítání na prstech.

Počítadlo se používalo již v Babylóně, ve starověkém Řecku, Římě či ve středověké Evropě. Dnes se používá zejména v prvních ročnících základní školy. [5] [8]



Obr. č. 7 Rekonstrukce římského abaku. Národní knihovna v Paříži [14]

3 Nepoziční numerační soustavy

U nepozičních numeračních soustav **nezáleží** na umístění číslice (znaku) v číselném zápisu. V tzv. *aditivních nepozičních soustavách*, se číslo prezentuje sečtením hodnot všech číslic, ze kterých se skládá.

Mějme např. nepoziční číselnou soustavu, která obsahuje pouze znaky X a Y. Řekněme, že X vyjadřuje jednu desítku a Y jednu jednotku. Poté např. zápis čísla 22 je XXYY, ale stejně tak lze číslo 22 díky tomu, že nezáleží na pořadí zapsat také jako YYXX, YXYX či XYXY

Nepoziční typ číselných soustav umožňuje provádět jednoduše operace sčítání a odčítání. Obtížně se násobí a dělí. Nevýhodou nepozičních soustav je délka zápisu, díky které se soustava stává nepřehledná. Malou výhodou je zase jen malá změna hodnoty čísla v případě nechtěného připsání nebo odebrání znaku.

Tento typ soustav byl používán např. v Egyptě, jako nejznámější nepoziční soustava je soustava římských číslic, která ale není čistě aditivní.

3.1 Římské číslice

Původní pravidla pro zápis římských číslic:

a) Zapisují se kombinací základních znaků I, V, X, L, C, D, M kdy:

I = 1	C = 100
V = 5	D = 500
X = 10	M = 1000
L = 50	

b) Čísla se skládají od nejvyšší hodnoty k nejnižší např. MXI = 1011. Většinou se kombinují nejvýše 3 stejné číslice (CCC = 300, III = 3). Na starých slunečních hodinách byly kombinovány i čtyři stejné číslice (IIII = 4)

c) Jestliže je větší římská číslice před nižší, pak se jednotlivé cifry sčítají např. MLXV = 1000 + 50 + 10 + 5 → 1065.

Pravidla pro odečítání a nově zavedené dvojznaky:

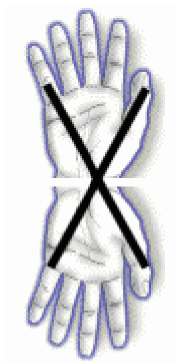
a) Jestliže se menší římská číslice zapsala před větší, pak to znamenalo odečet např. IV = 4 (-1 + 5). Odečítá se jen jedna číslice, v ojedinělých případech dvě např. CCM = 800. Pro odečítání se používají pouze číslice I, X, C, v matematickém kontextu zcela výjimečně také M. Nesprávně je zápis VC = 95, správně se číslo 95 zapíše jako XCV.

b) Ke zkrácení zápisu dlouhých čísel se používá zejména pravidel pro odečítání. Ve středověku se pravidlo pro odečítání stalo obecně používaným. Toto pravidlo dovoluje použití šesti složených symbolu, kdy se menší číslice předchází větší. Těmito symboly jsou:

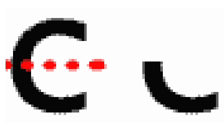
IV = 4	XC = 90
IX = 9	CD = 400
XL = 40	CM = 900

c) Číslice I se pro odečítání většinou užívá jen před V a X. Není tedy správně DID pro 999, správný zápis čísla 999 je CMXCIX. [9] [16]

Obr. č. 8
Římská číslice V je vyjádřením dlaně s pěti prsty – V tvoří tvar mezi palcem a malíčkem [15]



Obr. č. 9
Římská číslice X jsou dvě dlaně u sebe (10 prstů) [15]



Obr. č. 10
Římská číslice L vznikla rozpůlením C (100 = latinsky centum) [15]

Obr. č. 11
Římská číslice D vznikla rozpůlením M (1000 = latinsky mille) [15]

4 Poziční numerační soustavy

4.1 Základní informace

Lidé se snažili staré soustavy dále zlepšovat. Jeden z nejdůležitějších objevů byl nápad tvořit skupiny se stejným počtem prvků, jak jsme to poznali u egyptské numerace. Podstata tohoto nápadu je jednoduchá.

Máme-li spočítat velký počet předmětů, rozdělíme je do skupin, např. po desíti. Říkejme těmto skupinám **skupiny prvního řádu**. Může se stát, že všechny předměty se rozdělí po deseti a žádný nezbude. Častěji však nastane případ, že poslední skupina nebude úplná. Bude tam **méně prvků než deset**.

Máme-li mnoho skupin po deseti, sdružíme tyto desítky opět po deseti. Tvoříme tím větší skupiny po deseti desítkách, tj. po stovkách. Tyto skupiny nazveme **skupiny druhého řádu.**

V seskupování můžeme pokračovat a tvořit skupiny po deseti stovkách, neboli po tisícovkách; tím vzniknou **skupiny třetího řádu**. Důležité je, že mezi skupinami stejného řádu je zpravidla jedna skupina neúplná, která má méně prvků než deset.

Užijeme-li naší soustavy, v které tvoříme skupiny po deseti, můžeme dostat např. seskupení, jež vyjádříme takto: tři tisícovky pět stovek osm desítek a jednotka jsou názvy skupin a čísla tři, pět, osm a šest udávají počet prvků v neúplných skupinách. Za skupinu řádu tedy považujeme: třetího, druhého a prvního stupně, za název skupiny: tisícovka, stovka, desítka, jednotka a za počet prvků v neúplné skupině: tři, pět, osm a šest.

Protože je nekonečně mnoho čísel, potřebovali Egypťané teoreticky nekonečně mnoho symbolů pro označení všech druhů skupin. Náš systém potřebuje pouze **deset symbolů** a to 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a 0, které nazýváme číslice. Dohodneme-li se o místech, kam tisíce, sta, desítky budeme psát, pak názvy skupin můžeme vynechat.

Poziční soustava je zadána tzv. základem nebo bází, které obvykle reprezentuje celé číslo definující maximální počet číslic, jež jsou v dané soustavě k dispozici. Poziční soustavy (mimo jedničkové) se také nazývají polyadické, což značí vlastnost, že číslo v nich zapsané je možno vyjádřit součtem mocnin základu dané soustavy vynásobených příslušnými platnými číslicemi.

Nejčastější poziční soustavy jsou: Desítková (decimální)
Dvojková (binární)
Osmičková (oktální)
Šestnáctková (hexadecimální)
Dvanáctková
Šedesátková
Jedničková (unární)

Číslo vyjádřené v poziční soustavě (mimo jedničkové) může mít celočíselnou a zlomkovou část (např. u desítkové soustavy desetinnou část). Části jsou odděleny znakem, který nazýváme desetinná čárka (přestože obecně nejde o desetiny). Místo desetinné čárky se v anglosaských zemích používá desetinná tečka. (Jelínek, [5])

Číselná soustava je způsob vyjádření počtu základních jednotek. K vyjádření velikosti čísla se užívá tzv. číslic a jejich kombinací. Daný počet základních jednotek v určité kombinaci se nazývá kód. Soustavou též nazýváme množinu čísel s definovanými aritmetickými operacemi.

Rozlišujeme dva hlavní druhy číselných soustav podle způsobu určení hodnoty čísla z dané reprezentace: Poziční číselné soustavy
Nepoziční číselné soustavy

4.2 Vyjádření přirozeného čísla v číselné soustavě

„Každé přirozené číslo a, pro které platí $z^n \leq a < z^{n+1}$, lze vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru:

$$a = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

přičemž $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ jsou přirozená čísla menší než z, a pro přirozená čísla z, a_n platí: $z > 1, 0 < a_n < z$.“

(Drábek, Križalkovič, Liška, Viktora, [2])

Definice: „Jestliže pro přirozená čísla $a, z, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ platí :

$z > 1$, $0 \leq a_i < z$, pro i = 0, 1, 2,…, n, $a_n > 0$,

$a = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, pak říkáme, že jsme přirozené číslo a vyjádřili v číselné soustavě o základu z nebo též v z-adické číselné soustavě. Zkráceně píšeme $a = (a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)$. Číslo z nazýváme základem číselné soustavy." (Drábek, Križalkovič, Liška, Viktora, [2], str. 158)

Symboly $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ se nazývají číslice nebo též cifry. Číslo a je (n+1)-ciferné v číselné soustavě o základu z. O číslici a_1 říkáme, že je i-tého řádu nebo též řádu i. Číslo z^i se nazývá jednotka řádu i. (Drábek, Križalkovič, Liška, Viktora, [2])

Mnohočlen $a = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ nazýváme z-adický mnohočlen. Nezáporná celá čísla a_i, pro která platí nerovnost $0 \leq a_i < z$, nazýváme základní čísla z-adické číselné soustavy. O číslici a_k v z-adickém mnohočlenu říkáme, že je řádu k-tého. Číslo $1 \cdot z^k$ nazýváme jednotkou řádu k v soustavě o základu z. (Mačát, [6])

4.2.1 Desítková soustava (decimální)

Přirozených čísel je nekonečně mnoho, není tedy možné každé vyjádřit svým vlastním symbolem z hlediska početního a nebylo by ani reálné zapamatování těchto symbolů. Již na základní škole jsme se všichni naučili jednoduchému způsobu, který nám umožňuje každé přirozené číslo zapsat užitím pouze desíti základních znaků neboli čísel či cifer: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Když přidáme ještě znaky: mínus, zlomková čára, desetinná čárka, imaginární jednotka, lze pak zapsat každé číslo, celé, racionální, reálné i komplexní. Tomuto zápisu čísel říkáme desítková soustava nebo dekadická soustava.

Zřejmě proto, že počet prstů na obou rukou člověka je deset, dostala desítková soustava přednost před jinými se základem z = 10. Číslu 10 říkáme základ desítkové soustavy, pak lze každé přirozené číslo a vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru mnohočlenu, jehož každý člen má tvar $a_k \cdot 10^k$, *kde* a_k je jedna z číslic 0, 1, .., 9 a exponent k je přirozené číslo nebo nula. Desítkový systém je založen na celých mocninách deseti. Pokud máme exponent z oboru přirozených čísel, tak nám vyjde číslo celé (např. $2 \cdot 10^1 = 2$). Pokud bude exponent celé záporné číslo, tak výsledkem bude číslo desetinné (např. $2 \cdot 10^{-3} = 0{,}002$). (Jelínek, [5]; Mačát, [6])

4.2.2 Dvojková soustava (binární)

Základem soustavy je $z = 2$. Dvojková soustava se dnes využívá v informatice a to z důvodu, že desítková soustava není pro počítače vhodná. Počítače a různá číslicová zařízení by musela umět rozlišit deset různých situací, což by kladlo vysoké nároky na přesnost a kvalitu. Dvojková soustava je založená na mocninách dvou, pracuje jen se dvěma symboly neboli s číslicemi 0 a 1, což představuje pouze dvě situace. Například si můžeme představit spínač v elektrickém obvodu, který má pouze dvě možnosti a to: rozepnuto = 0 nebo sepnuto = 1. Stejně jako u desítkové soustavy má v binárním zápisu každá číslice význam odpovídající jejímu umístění. Číslo vyjádřené v binární soustavě je několikrát delší než číslo vyjádřené v dekadické soustavě. Proto se nehodí k ručním výpočtům a je určeno výhradně pro použití v počítačích. (Sobotka, [7])

4.2.3 Osmičková soustava (oktální)

Základem soustavy je $z = 8$. Díky tomu, že číslo z osmičkové soustavy lze snadno převést do soustavy dvojkové ($8 = 2^3$, viz. kapitola 3.4.4.1) používala se v začátkách počítačové techniky, ale dnes se téměř nepoužívá. Jedna trojice čísel v soustavě dvojkové vyjadřuje jedno číslo v soustavě osmičkové. V této soustavě využíváme těchto symbolů: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. (Jakešová, [4])

4.2.4 Šestnáctková soustava (hexadecimální)

Základem soustavy je $z = 16$. K zápisu čísla v šestnáctkové soustavě nám nestačí pouze deset číslic jako je tomu v desítkové soustavě, proto se používají následující znaky: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a poté A, B, C, D, E, F (kde písmena A-F postupně reprezentují hodnoty 10 – 15, viz. Tab. č. 1).

Číslo v hexadecimální soustavě lze jednoduše převést do binární soustavy ($16 = 2^4$, viz. kapitola 3.4.4.3). Čtyři znaky soustavy dvojkové vyjadřují jedno číslo (resp. písmeno) v soustavě šestnáctkové. Díky tomu je šestnáctková soustava často využívána v informatice, zejména v programování, kdy se jejím zápisem vyjadřují binární čísla, která jsou velmi dlouhá a nepraktická.

Písmenko	A	B	C	D	E	F
Hodnota	10	11	12	13	14	15

Tab. č. 1

4.2.5 Dvanáctková soustava

Základem soustavy je $z = 12$. Dvanáctková soustava byla zavedena už za Sumerů. Byla vytvořená ve spojitosti s lidskou rasou, která měla šest prstů a vyskytuje se v mýtech různých národů. Dále lze dvanáctkovou soustavu snadno rozdělit na třetiny oproti dekadické soustavě. Používají se v ní tyto znaky: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B.

Dvanáctková soustava byla využívána také při tzv. „kupeckých počtech“. Kdy kupci na trhu počítali pomocí prstů na ruce. Obrátili si dlaň proti sobě, palec použili jako „ukazovátko“ a postupně si ukazovali na články jednotlivých prstů, kterých bylo dohromady 12 neboli **tucet**. Pokud se dostali k poslednímu článku, tak si na druhé ruce ukázali palcem na první článek, při dalším přechodu na první ruce přes dvanáctý článek ukázali palcem na druhé ruce na další článek atd. Pokud tedy prošli na ruce první dvanáctkrát přes všech dvanáct článků, tak už byli na počtu 144 neboli **veletucet**. (Jakešová, [4])

4.2.6 Šedesátková soustava

Základem soustavy je $z = 60$. V šedesátkové soustavě se číslice zapisují desítkovou soustavou jako 00-59 a řády se oddělují dvojtečkou. Využívá se pro měření času. Často se také používají první dva řády neboli **kopa** = 60 ks a **velekopa** = 3600 ks. [11]

4.3 Způsob zápisu

V užívaných číselných soustavách se jednotlivé číslice zapisují hned za sebe, nijak se neoddělují. Celou a zlomkovou část čísla od sebe odděluje desetinná čárka. Pro přehlednost se někdy oddělují také významnější řády, jako jsou např. tisíce, milióny apod.

Základem pro vyjádření přirozeného čísla $x \geq 1$ v libovolné poziční soustavě o libovolném základu z > 1 je algoritmus postupného dělení číslem z.

Jestliže máme přirozené číslo z > 1. Potom každé přirozené číslo x ≥ 1 se dá vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru rozvoje:

$$a_i z^i = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z^1 + a_0,$$

kde všechna přirozená čísla $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots ,a_2, a_1, a_0,$ jsou menší než z a $a_n \neq 0$. Přitom tyto čísla lze určit algoritmem postupného dělení. (Blažek, Koman, Kussová, [1])

Definice postupného dělení:

Nechť jsou daná přirozená čísla $x \geq 1$ a $z > 1$. Potom postup, kterým určíme neúplné podíly $x_0, x_1, \dots , x_n$ a zbytky $a_0, a_1, \dots , a_n$ splňující následující formule nazýváme algoritmem postupného dělení číslem z.

Formule:

$x = z \cdot x_0 + a_0 \quad \wedge \quad 0 \leq a_0 < z \quad \wedge \quad x_0 > 0$

$x_0 = z \cdot x_1 + a_1 \quad \wedge \quad 0 \leq a_1 < z \quad \wedge \quad x_1 > 0$

$x_1 = z \cdot x_2 + a_2 \quad \wedge \quad 0 \leq a_2 < z \quad \wedge \quad x_2 > 0$

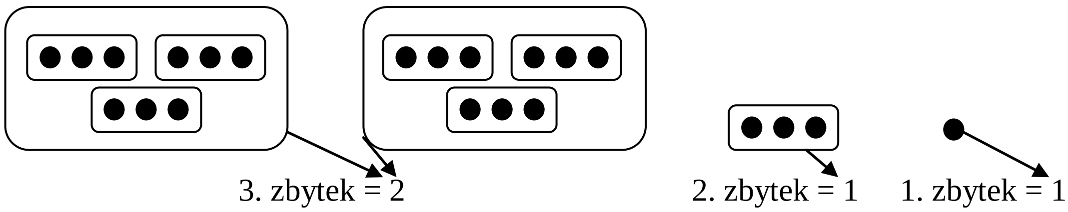
………………………………………………………………..

$x_{n-2} = z \cdot x_{n-1} + a_{n-1} \quad \wedge \quad 0 \leq a_{n-1} < z \quad \wedge \quad x_{n-1} > 0$

$x_{n-1} = z \cdot x_n + a_n \quad \wedge \quad 0 \leq a_n < z \quad \wedge \quad x_n > 0$

(Blažek, Koman, Kussová, [1])

Například číslo 22 v trojkové soustavě = $(211)_3$



Díky vyjáření čísla pomocí rozvoje nám umožňuje nalézt vhodnou abecedu k označení přirozených čísel. Každé sebevětší přirozené číslo můžeme zapsat pomocí konečného počtu znaků, tzv. číslic. Tzn. zápis přirozeného čísla v poziční soustavě.

Číslo nazvané v desítkové soustavě „pět tisíc čtyři sta tři“ je součtem pěti jednotek řádu třetího, čtyř jednotek řádu druhého, žádné jednotky řádu prvního a tří jednotky řády nultého.

Zapíšeme tedy: $5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 5000 + 400 + 3 = 5403$

Obecné vyjádření: $a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0; a_n \neq 0$. Všechna přirozená čísla $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$, jsou menší než $z = 10$ a můžeme je zapsat pomocí číslic 0-9. Pokud bychom měli základ soustavy $z = 5$, tedy číslo v pětkové soustavě, můžeme jej zapsat pomocí číslic 0-4.

Z toho vyplývá, máme-li základ mocnin $z > 1$, pak k zápisu pomocí mnohočlenu potřebujeme pro označení koeficientů pouze čílice: 0, 1, … , z-1.

Tento zápis pomocí mnohočlenu je příliš dlouhý. Známe zkrácený zápis, ve kterém píšeme pouze číslice uvádějící počet jednotek jednotlivých řádů i když se tento počet rovná nule. Číslice seřadíme tak, že zcela vpravo v zápisu čísla uvedeme číslici udávající počet jednotek řádu nultého, od ní o jedno místo doleva uvedeme číslici udávající počet jednotek řádu prvního atd. Obecně lze každé přirozené číslo a, které je vyjádřeno mnohočlenem zapsat ve zkráceném tvaru: $a = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_z$. (Mačát, [6])

Číslo, které je v jiné než v desítkové soustavě se čte postupně po jednotlivých číslicích. Například číslo $(143)_5$ nepřečteme sto čtyřicet tři v pětkové soustavě, ale jedna čtyři tři v pětkové soustavě.

Dle konvence zapisujeme číslo do kulatých závorek a za závorku uvedeme jako spodní index základ soustavy. Např. $(255)_7$, které se čte „dva pět pět“ je v sedmičkové soustavě. V případě desítkové soustavy se číslo neuvádí do závorek, ani není nutné k němu psát jeho základ.

4.4 Převody v pozičních soustavách

Převody v pozičních soustavách můžeme provádět dvěma způsoby a to přímo anebo nepřímo. Přímé převody provádíme z jedné soustavy z_1 do soustavy z_2, kdežto u nepřímého převodu používáme ještě soustavu z_3. Kdy nejprve číslo o základu z_1 převedeme do soustavy z_3 a teprve ze z_3 do požadované soustavy základu z_2. Nejčastěji je nepřímý převod prováděn přes soustavu $z_3 = 10$.

4.4.1 Převod zápisu z desítkové do jiné soustavy

Pro převod z desítkové soustavy, se využívá algoritmu postupného dělení, kdy se dělí základem soustavy, do které číslo převádíme. Jednotlivé zbytky nám potom udávají číslo v požadované soustavě.

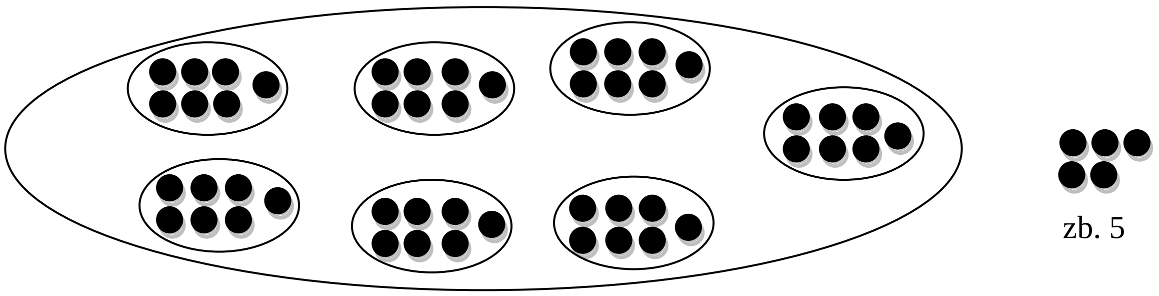
Pro lepší názornost si to ukážeme na příkladu: Zapište číslo 84 v sedmičkové soustavě.

54 : 7 = 7 (zb. 5)
7 : 7 = 1 (zb. 0)
1 : 7 = 0 (zb. 1)

$84 = (1\ 0\ 5)_7$

Zbytky tedy zapisujeme směrem od spodu nahoru.

Grafické znázornění:



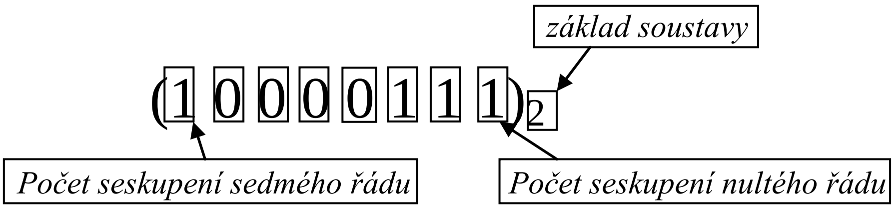
Další zbytek je nula, protože nám nezůstala žádná volná sedmičlenná skupinka. A poslední zbytek je 1, protože máme pouze jednu skupinu s 49 prvky.

4.4.2 Převod zápisu z jiné do desítkové soustavy

Pro převod do desítkové soustavy, využíváme postupného násobení jednotlivých položek daného čísla základem soustavy, ze které vycházíme. Základ soustavy je postupně umocněn řádem dané položky.

Pro lepší názornost si to ukážeme na příkladu: Převeďte číslo $(10000111)_2$ do dekadické soustavy.

Nejprve si určíme řády čísla (které jsou od 0 do *n*, kdy *n= 0, 1, 2 … n)*

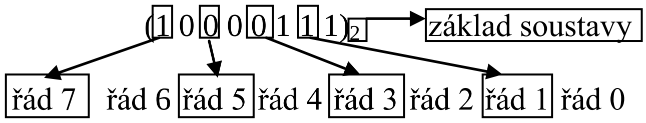


Seskupení nultého řádu čísla 1 znamená: je to jedno seskupení, které ve dvojkové soustavě v sobě zahrnuje dvě seskupení nultého řádu po dvou prvcích. Tedy $1 \cdot 2^0 = 1$

Seskupení sedmého řádu čísla 1 znamená: je to jedno seskupení, které ve dvojkové soustavě v sobě zahrnuje dvě seskupení sedmého řádu po dvou prvcích. Tedy $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1 \cdot 2^7 = 128$

Vynásobíme tedy každou položku v daném čísle základem$^{\text{řád číslice}}$.

Tedy:



Celý zápis bude vypadat takto:

$1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$

$= 128 + 0 + 0 + 0 + 0 + 4 + 2 + 1 = 135$

$(10000111)_2 = 135$

4.4.3 Převod z jedné nedesítkové soustavy do jiné nedesítkové

Při převádění mezi nedesítkovými soustavami se využívá nepřímého převodu. Nejprve tedy číslo převedeme do desítkové soustavy (do soustavy dvojkové v případě převodu mezi osmičkovou, šestnáctkovou a dvojkovou soustavou viz. kapitola 3.4.4) a až z té převádíme dále do požadované soustavy. Zkoušku zda jsme převod provedli správně, můžeme ověřit tak, že číslo převedeme zpět do původní soustavy opět před soustavu desítkovou (resp. dvojkovou).

Pro lepší názornost si to ukážeme na příkladu: Převeďte číslo $(1348)_9$ do pětkové soustavy. Nejprve tedy musíme číslo $(1348)_9$ převést do soustavy dekadické, využijeme tedy postupného násobení základem soustavy umocněné na řád dané položky.

$(1348)_9 = 1 \cdot 9^3 + 3 \cdot 9^2 + 4 \cdot 9^1 + 8 \cdot 9^0 = 1 \cdot 729 + 3 \cdot 81 + 4 \cdot 9 + 8 \cdot 1 = 1016$

Nyní číslo 1016 převedeme do požadované pětkové soustavy. Využijeme algoritmus postupného dělení.

1016 : 5 = 203 (zb. 1)
203 : 5 = 40 (zb. 3)
40 : 5 = 8 (zb. 0)
8 : 5 = 1 (zb. 3)
1 : 5 = 0 (zb. 1)
$(1348)_9 = (13031)_5$

U druhého příkladu si ukážeme, že lze v daných příkladech využít k převodu soustavy dvojkové místo desítkové. Převeďte číslo $(5746)_8$ do soustavy šestnáctkové. Dle Tab. č. 2 v kapitole 3.4.4.1 číslo z osmičkové soustavy lehce převedeme do soustavy dvojkové.

$(5746)_8 = (101\ 111\ 100\ 110)_2$

A odtud dle postupu z kapitoly 3.4.4.3 číslo převedeme do soustavy hexadecimální.

$(1011\ 1110\ 0110)_2 = (BE6)_{16}$

4.4.4 Vztah mezi dvojkovou, osmičkovou a šestnáctkovou soustavou

Převod mezi těmito soustavami je ulehčen díky tomu, že čísla 8 a 16 jsou mocniny čísla 2. Proto pro převod mezi dvojkovou – osmičkovou a dvojkovou – šestnáctkovou lze provést přímo. Pro převod mezi osmou a šestnáctkovou pak potom lze využít nepřímý převod přes soustavu dvojkovou.

4.4.4.1 Osmičková → binární soustava

Když převedeme číslice 0-7, které se používají pro osmičkovou soustavu, do soustavy dvojkové získáme tyto hodnoty:

0	1	2	3	4	5	6	7
000	001	010	011	100	101	110	111

Tab. č. 2

Díky tomu, že $8=2^3$ můžeme jednoduše nahradit každou číslici její binární reprezentací. [10]

Například tedy $(5712)_8 = (101\ 111\ 000\ 010)_2$

4.4.4.2 Binární → osmičková

Převod provedeme tím, že binární číslo rozdělíme do skupinek do tří (protože 8 je třetí mocnina 2) zprava do leva. Pokud nám nalevo zůstane skupinka, která nebude mít tři prvky, doplníme tyto volné prvky nulami. Poté vytvořené trojice převedeme pomocí postupného násobení nebo můžeme využít Tab. č. 2. [10]

Například: doplníme prázdné místo nulou

$$(\boxed{\_11}\ |\ \boxed{101}\ |\ \boxed{011}\ |\ \boxed{110})_2$$

$$\boxed{0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0} \qquad \boxed{1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0}$$

$$\boxed{1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0} \qquad \boxed{0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0}$$

$(1101011110)_2 = (3536)_8$

4.4.4.3 Binární → hexadecimální

Převod do hexadecimální soustavy, provedeme stejným způsobem jako do soustavy osmičkové, však s tím rozdílem, že číslo rozdělujeme do skupinek po čtyřech (protože 16 je čtvrtá mocnina 2) zprava do leva. Pokud nám nalevo zůstane skupinka, která nebude mít čtyři prvky, doplníme tyto volné prvky nulami. Poté vytvořené skupinky převedeme pomocí postupného násobení.

Například:

$$(1001\ |\ 1110)_2$$

$$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0\ \ |\ 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

$(10010110)_2 = (9D)_{16}$

4.4.4.4 Osmičková → hexadecimální

Pro převod z osmičkové do hexadecimální soustavy použijeme soustavu binární. Nejprve převedeme číslo z osmičkové do binární a poté do hexadecimální.

Například: Převeďte $(2457)_8$ do šestnáctkové soustavy.

Pro převod z osmičkové do dvojkové soustavy využijeme hodnot z Tab. č. 2. A pro převod z dvojkové do šestnáctkové soustavy využijeme vztah pro převod z binární do hexadecimální soustavy.

$(2457)_8 = (0101 \mid 0010 \mid 1111)_2 = 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \mid 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 +$
$+ 1 \cdot 2^0 \mid 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (5 \mid 2 \mid F)_{16}$

Tento převod neplatí pouze mezi binární, osmičkovou a hexadecimální soustavou. Podobně lze převádět mezi soustavou trojkovou a devítkovou. Například: Převeďte číslo $(12112212)_3$ do soustavy devítkové.

$(12 \mid 11 \mid 22 \mid 12)_3 = 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 \mid \dots \mid 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = (5\ 4\ 8\ 5)_9$

4.5 Početní výkony s přirozenými čísly v desítkové soustavě

4.5.1 Sčítání

Sčítáme-li dvě přirozená čísla zapsaná v dekadické soustavě, sdružíme nejprve na základě komutativnosti a asociativnosti sčítání ty sčítance, kteří obsahují číslice téhož řádu. K jejich sečtení užijeme distributivnosti sčítání vzhledem k násobení. (Hruša, Dlouhý, Mencl, [6])

Například: $241 + 754 = (2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0) + (7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0) =$

$= (2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^2) + (4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^1) + (1 + 4) =$

$= (2 + 7) \cdot 10^2 + (4 + 5) \cdot 10^1 + (1 + 4) =$

$= 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 5 = 995$

Jestliže součty všech číslic téhož řádu jsou čísla menší než 10, máme tzv. *sčítání bez přechodu* přes základ. Jestliže je však některý součet číslic téhož řádu roven 10 či větší jak 10, pak máme tzv. *sčítání s přechodem* přes základ, u kterého je třeba další úpravy. (Hruša, Dlouhý, Mencl, [6])

Například: $547 + 284 = (5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0) + (2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0) =$

$= (5 + 2) \cdot 10^2 + (4 + 8) \cdot 10^1 + (7 + 4) =$

$= 7 \cdot 10^2 + \mathbf{12} \cdot 10^1 + 11 =$

$= 7 \cdot 10^2 + (\mathbf{10 + 2}) \cdot 10^1 + (10 + 1) =$

$= 7 \cdot 10^2 + (\mathbf{10^2 + 2 \cdot 10^1}) + (10 + 1) =$

$= (7 \cdot 10^2 + \mathbf{10^2}) + (\mathbf{2 \cdot 10^1} + 10) + 1 =$

$= (7 + \mathbf{1}) \cdot 10^2 + (\mathbf{2} + 1) \cdot 10^1 + 1 =$

$= 8 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 = 831$

Součet 7 + 4 (jednotek řádu 0) jsme převedli na tvar 10 + 1, sčítanec 1 znamená počet jednotek řádu 0 a 10 jednotek řádu 0 neboli 1 jednotku řádu 1 připočteme k součtu 8 + 4 (jednotek řádu 1) s nímž zacházíme obdobně.

Ke sčítání víceciferných čísel, musíme znát součty všech dvojic jednociferných čísel, které se někdy označují názvem *základní spoje sčítání*. Mezi tyto spoje sčítání patří i součty, jejichž jedním sčítancem je nula a druhým sčítancem také nula nebo jednociferné číslo, někdy se také mezi spoje počítá i součet, jejichž jedním sčítancem je číslo 10 a druhým sčítancem jednociferné číslo či číslo10. (Hruša, Dlouhý, Mencl, [3]) V praxi se sčítání provádí dvojím způsobem, buďto *písemným sčítáním* (*sčítání podle algoritmu*) nebo *sčítáním zpaměti*. U písemného sčítání se postupuje od sčítání 0 řádu k jednotkám vyšších řádů. Výpočet se zapisuje známým způsobem do sloupce pod sebe

547	sčítanec
284	sčítanec
831	součet

4.5.2 Odčítání

Základní spoje sčítání umožňují odčítat každé jednociferné číslo, je-li výsledkem opět jednociferné číslo. Například 9 – 3 = 6 neboli 6 + 3 = 9. Odečítání víceciferných čísel převádíme na několikeré použití těchto základních spojů obdobně, jako při sčítání.

Například: $789 - 543 = (7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0) - (5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0) =$

$= (7 \cdot 10^2 - 5 \cdot 10^2) + (8 \cdot 10^1 - 4 \cdot 10^1) + (9\text{-}3) =$

$= (7 - 5) \cdot 10^2 + (8 - 4) \cdot 10 + (9\text{-}3) =$

$= 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 6 = 246$

U odečítání jednotek mohou nastat dva případy a to menšenec je větší než menšitel nebo mu je roven. Druhá možnost je, že menšenec je menší než menšitel. Pokud je menšenec větší či roven menšiteli bude jejich rozdílem jednociferné číslo nebo nula, která je ve výsledku číslicí příslušného řádu. A nastane tzv. *odčítání bez přechodu* přes základ. Jestliže je menšenec menší než menšitel je poté rozdíl jednotek příslušného řádu v oboru přirozených čísel rozšířeném o nulu neexistující a jedná se o *odečítání přes přechod přes základ*.

Například:

$654 - 482 = (6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0) - (4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0)$

Upravíme menšence:

$654 = (\mathbf{5 + 1}) \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4$

$= \mathbf{5 \cdot 10^2} + (\mathbf{1 \cdot 10^2} + 5 \cdot 10) + 4$

$= 5 \cdot 10^2 + (\mathbf{10 + 5}) \cdot \mathbf{10} + 4$

$= 5 \cdot 10^2 + \mathbf{15 \cdot 10} + 4$

A pokračujeme takto:

$654 - 482 = (5 \cdot 10^2 + 15 \cdot 10 + 4) - (4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 2) =$

$= (5 - 4) \cdot 10^2 + (15 - 8) \cdot 10 + (4 - 2) =$

$= 1 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 2 = 172$

Jako u sčítání tak i u odečítání se v praxi setkáváme se dvěma odlišnými způsoby. U prvního postupujeme od řádu 0 k jednotkám vyšších řádů a zapisujeme do sloupce. Jedná se o *písemné odečítání* neboli *odečítání podle algoritmu*.

654	menšenec
-482	-menšitel
172	rozdíl

4.5.3 Násobení

U násobení přirozených čísel v desítkové soustavě užíváme distributivnosti sčítání vzhledem k násobení. (Hruša, Dlouhý, Mencl, [3])

Například: $534 \cdot 7 = (5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4) \cdot 7 = 5 \cdot 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 7 \cdot 10 + 4 \cdot 7 =$

$= 35 \cdot 10^2 + 21 \cdot 10 + 28 =$

$= (30 + 5) \cdot 10^2 + (20 + 1) \cdot 10 + (20 + 8) =$

$= (3 \cdot 10 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^2) + (2 \cdot 10 \cdot 10 + 1 \cdot 10) + (2 \cdot 10 + 8) =$

$= 3 \cdot 10^3 + (5 + 2) \cdot 10^2 + (1 + 2) \cdot 10 + 8 =$

$= 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 8 = 3738$

U násobení je tedy třeba znát součiny všech dvojic jednociferných čísel, tyto součiny tvoří *základní spoje násobení* a jejich souhrn se často označuje názvem *násobilka*. Patří k nim ovšem i součiny, jejichž jeden činitel je nula a druhý také nula nebo jednociferné číslo, a často se do násobilky počítají i součiny, jejich jedním činitelem je číslo 10 a druhým činitelem jednociferné číslo nebo číslo 10. (Hruša, Dlouhý, Mencl, [3] str. 120)

V praxi se můžeme setkat buďto s *písemným násobením* (*násobením podle algoritmu*):

534	činitel
· 7	násobek
3738	součin

nebo s *násobením zpaměti*, kdy postupujeme od nejvyššího řádu k číslicím nižšího řádu.

534 · 7 = (500 + 34) · 7 = 500 · 7 + 34 · 7 = 3500 + (30 + 4) · 7 = 3500 + 30 · 7 + 4 · 7 =
= (3500 + 210) + 28 = 3710 + 28 = 3738

Násobení víceciferným číslem převádíme na několik násobení jednociferným číslem. Například u 534 · 342 postupně násobíme 534 · 2, 534 · 4, 534 · 3. V praxi zpravidla násobíme podle algoritmu a začínáme jednotkami řádu 0, částečné součiny pak píšeme vždy o jedno místo dále vlevo. Tedy:

534	činitel
· 342	· násobek
1068	částečný součin
2136	částečný součin
1602	částečný součin
182628	součin

4.5.4 Dělení

Dělení můžeme rozdělit na *dělení beze zbytku* a *dělení se zbytkem*, obě varianty se provádějí stejně. Pracujeme vlastně v oboru přirozených čísel rozšířeném o nulu. Od dělence odčítáme co největší násobek dělitele, který ještě lze odečíst v oboru přirozených čísel rozšířeném o nulu. (Hruša, Dlouhý, Mencl, [3])

Například: v obou příkladech budeme dělit 6

744 = 600 +120 + 24 = 6 · 100 + 6 · 20 + 6 · 4 = (100 + 20 + 4) · 6 = 124 · 6

664 = 600 + 60 + 4 = 6 · 100 + 6 · 10 + 4 = (100 + 10) · 6 + 4 = 110 + 4

A proto při dělení čísla 664 číslem 6 dostaneme neúplný podíl 110 a zbytek 4. (Hruša, Dlouhý, Mencl, [3])

Rozklad dělence v součet násobků dělitele lze provádět zpaměti jen tehdy, je-li dělitelem takové číslo, jehož násobky známe zpaměti (například u čísel známých z násobilky), nebo jehož násobky zpaměti snadno stanovíme. (dle Hruša, Dlouhý, Mencl, [3] str. 122)

Není-li tomu tak, počítáme písemně a zapisujeme takto:

214 : 4 = 53 zbytek 2 dělenec : dělitel = podíl
-20
 14
-12
  2

4.6 Početní výkony s přirozenými čísly v nedesítkové soustavě

4.6.1 Sčítání

Pří sčítání v jiných číselných soustavách je postup stejný jako v soustavě desítkové. Budou zde jiné základní spoje sčítání. Například tabulka spojů v osmičkové soustavě vypadá takto:

+ (z=8)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Tab. č. 3

Kdy v tabulce pro osmičkovou soustavu píšeme 10 místo $(10)_8$ atd.. (Mačát, [6])

Například: $(442)_8 + (154)_8$, využijeme Tab. č. 3, píšeme 472 místo $(472)_8$ apod. Tedy zápis 10 označuje číslo 8, 100 číslo 64 atd.. (Mačát, [6])

$$\begin{aligned} 442 + 154 &= (4 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0) + (1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0) = \\ &= (4 + 1) \cdot 10^2 + (4 + 5) \cdot 10^1 + (2 + 4) \\ &= 5 \cdot 10^2 + 11 \cdot 10^1 + 6 \\ &= 5 \cdot 10^2 + (1 \cdot 10 + 1) \cdot 10^1 + 6 \\ &= (5 + 1) \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 6 \\ &= 6 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 6 = 616 \end{aligned}$$

Obecný postup při součtu dvou čísel v z-adické soustavě. Nechť:

$a = a_n \cdot z^n + \ldots + a_1 \cdot z + a_0,\ a_n \neq 0,$

$b = b_m \cdot z^m + \ldots + b_1 \cdot z + b_0,\ bm \neq 0.$ Pokud $n = m$, mají obě čísla týž počet číslic, pokud je $n \neq m$, např. $n > m$, upravíme z-adický mnohočlen vyjadřující číslo b tak, že

$b_n = b_{n-1} = \dots = b_{m+1} = 0$. Číslo b se samozřejmě touto úpravou z-adického mnohočlenu nezmění. (Mačát, [6], str. 51)

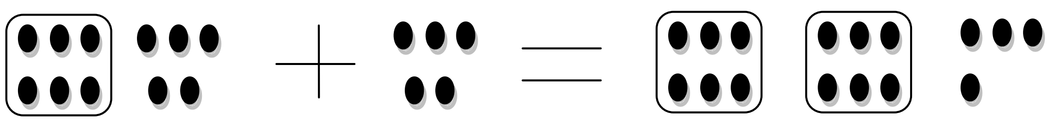
Užijeme-li asociativního zákona pro sčítání, pak komutativního zákona pro sčítání, znovu asociativního zákona pro sčítání a nakonec distributivního zákona, dostáváme:

$$a + b = (a_n + b_m) \cdot z^n + \dots + (a_1 + b_1) \cdot z + \dots + (a_0 + b_0). \qquad (1)$$

Jsou dvě možnosti:

Buďto součet počtu jednotek každého řádu je menší než základ. Tedy $a_i + b_i < z$ pro kažé $i = 0, 1, \dots, n$. Pak $a_i + b_i = c_i$, kde c_i je základním číslem z-adické soustavy. Dosadíme-li tedy do mnohočlenu (1) ve všech závorkách za $a_i + b_i$ výraz c_i, dostáváme z-adický mnohočlen: $a + b = c_n \cdot z^n + \dots + c_1 \cdot z + c_0$ což se rovná $(c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0)_z$. V tomto případě říkáme, že jde o sčítání bez přechodu přes základ. (Mačát, [6], str. 51)

Nebo pro alespoň jedno i platí $a_i + b_i \geq z$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Pak ovšem mnohočlen (1) po provedení součtu ve všech závorkách není z-adický. Proveďme tuto úpravu: Nechť $a_i + b_i \geq z$ (jistě je $a_i + b_i < 2z$, protože $a_i < z$, $b_i < z$). Pak $a_i + b_i = d_i$, kde $z \leq d_i \leq 2z$. Lze tedy psát $d_i = 1 \cdot z + c_i$, kde c_i je základním číslem z-adické soustavy ($0 \leq c_i \leq z$). Proto je $a_i \cdot z^i + b_i \cdot z^i = (z + c_i) \cdot z^i = 1 \cdot z^i + c_i \cdot z^i$. Při výpočtu je tedy počet jednotek řádu i-tého roven c_i, a k jednotkám řádu $i + 1$ připočteme 1. Tuto úpravu provedeme pro počet jednotek všech řádů i, pro které $a_i + b_i \geq z$. Tomuto sčítání říkáme sčítání s přechodem přes základ. Při součtu více než dvou sčítanců je postup obdobný. (Mačát, [6], str. 52)



4.6.2 Odčítání

Rozdíl dvou přirozených čísel *b, a* existuje v oboru přirozených čísel právě tehdy, když $b > a$ (v oboru nezáporných celých čísel, pokud $b \geq a$). Je-li $b < a$ není rozdíl čísel v oboru přirozených čísel definován. Pokud rozdíl čísel *b, a* je v daném číselném oboru definován, je menšencem a menšitelem určen jednoznačně. (Mačát, [6], str. 66)

Například: Odečtěte v osmičkové soustavě: $(546)_8 - (373)_8$. Užijeme Tab. č. 3

$546 - 373 = (5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0) - (3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0) =$

$= (5 - 3) \cdot 10^2 + (4 - 7) \cdot 10 + (6 - 3)$

První úprava:

$[\mathbf{5 - (3 + 1)}] \cdot 10^2 + [\mathbf{(4 + 10)} - 7] \cdot 10 + (6 - 3) = 1 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 3 = 173$

Druhá úprava: menšenec:

$546 = (\mathbf{4 + 1}) \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 6 = \mathbf{4} \cdot 10^2 + (\mathbf{1 \cdot 10^2} + 4 \cdot 10) + 6 = 4 \cdot 10^2 + \mathbf{14} \cdot 10 + 6.$

$546 - 373 = (4 \cdot 10^2 + \mathbf{14} \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0) - (3 \cdot 10^2 + \mathbf{7} \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0) =$

$= (4 - 3) \cdot 10^2 + (14 - 7) \cdot 10 + (6 - 3) = 1 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 3 = 173$

Obecný postup při odečítání v z-adické soustavě. Nechť:

Menšenec: $b = (b_n \cdot z^n + \ldots + b_1 \cdot z + b_0)_z$,

menšitel: $a = (a_m \cdot z^m + \ldots + a_1 \cdot z + a_0)_z$. Aby byl rozdíl $b - a$ nezáporné celé číslo, musí být $b \geq a$, tedy $n \geq m$. Je-li $n = m$, pak:

$$b - a = (b_n - a_n) \cdot z^n + \ldots + (b_1 - a_1) \cdot z + (b_0 - a_0) \qquad (2)$$

Pokud je $n > m$, upravíme menšitele a takto:

$$a = 0 \cdot z^n + \ldots + 0 \cdot z^{m+1} + a_m \cdot z^m + \ldots + a_1 \cdot z + a_0.$$

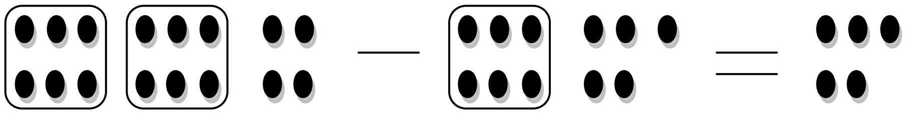
Pak rozdíl je:

$$b - a = b_n \cdot z^n + \ldots + b_{m+1} \cdot z^{m+1} + (b_m - a_m) \cdot z^m + \ldots + (b_1 - a_1) \cdot z + (b_0 - a_0) \qquad (2‘)$$

V praxi nám mohou nastat dvě možnosti. Rozdíl počtu jednotek všech řádů v mnohočlenu (2), popř. (2‘), je větší nebo roven nule. Pak hovoříme o odčítání bez přechodu přes základ a označíme-li $c_i = b_i - a_i$ pro každé $i = n, \ldots, 1, 0$, jsou čísla c_i základními čísly z-adické soustavy a mnohočlen (2), popř. (2‘), je po odečtení ve všech závorkách z-adická:

$$b - a = c_n \cdot z^n + \ldots + c_1 \cdot z + c_0 = (c_n \ldots c_1 c_0)_z.$$

Rozdíl počtu jednotek alespoň jednoho řádu je celé záporné číslo, a proto není v oboru nezáporných celých čísel definován. (Alespoň pro jedno $i = n, \dots , 1, 0$ platí $b_i < a_i$). Pak je nutno mnohočlen (2), popř. (2‘), upravit. Pak hovoříme o odčítání s přechodem přes základ. (Mačát, [6], str. 69)



4.6.3 Násobení

K násobení čísel v z-adické soustavě musíme znát tedy vedle početních zákonů, vztahů mezi z-adickým mnohočlenem a z-adickým zápisem a úprav mnohočlenů v mocninách základu z na z-adické mnohočleny ještě součiny všech dvojic základních čísel příslušné soustavy. Těmto součinům říkáme základní spoje násobení nebo násobilka příslušné číselné soustavy. Násobení víceciferným číslem provádíme užitím distributivního zákona. (Mačát, [6], str. 57)

Například: Znásobte v osmičkové soustavě: $(341)_8 \cdot (5)_8$.

$345 \cdot 5 = (3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0) \cdot 5 = 17 \cdot 10^2 + 24 \cdot 10^1 + 31 \cdot 10^0 =$

$= 17 \cdot 10^2 + (24 + 3) \cdot 10^1 + 1 = 17 \cdot 10^2 + 27 \cdot 10^1 + 1 =$

$= 17 \cdot 10^2 + (2 \cdot 10 + 7) \cdot 10 + 1 = 17 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 1 =$

$= (17 + 2) \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 1 = 21 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 1 =$

$= (2 \cdot 10 + 1) \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 1 = 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 1 =$

$= 2171$

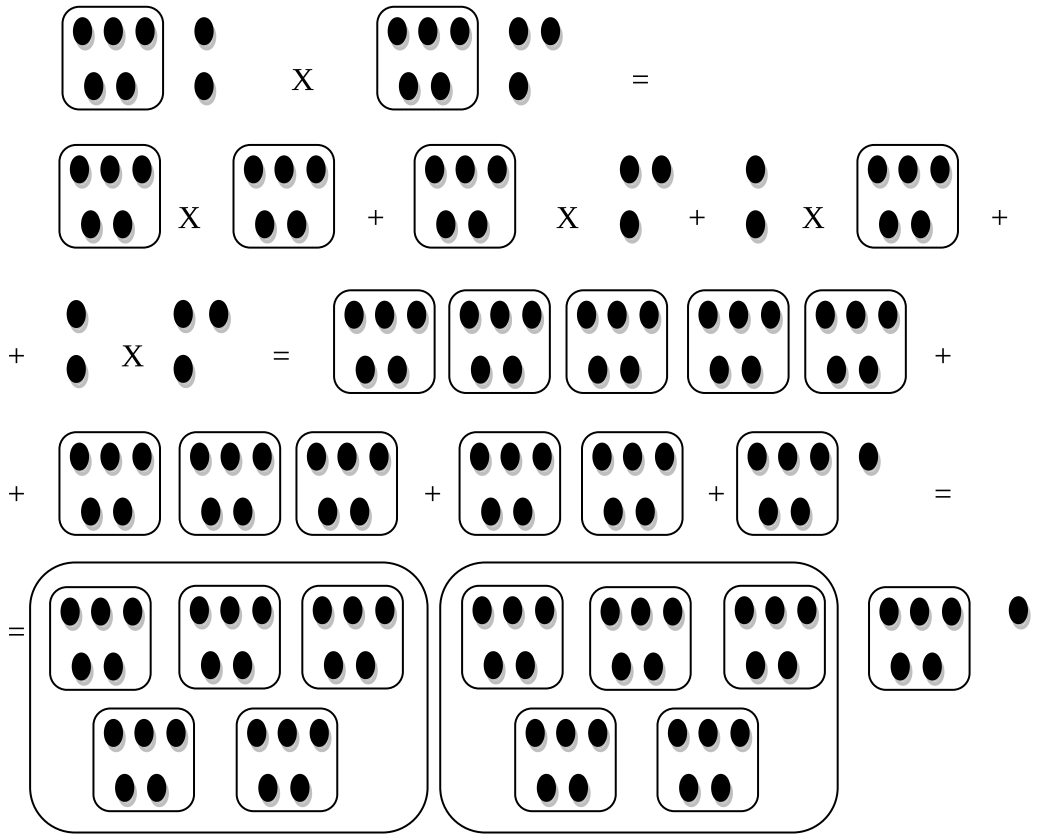
Násobení v z-adických soustavách je založeno na distributivním zákonu. Označíme-li z-adický zápis čísla a jako (a_z), $b = (b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0)_z$, $b_n \neq 0$,

pak: $a \cdot b = (a)_z \cdot b_n \cdot z^n + (a)_z \cdot b_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + (a)_z \cdot b_1 \cdot z^1 + (a)_z \cdot b_0$.

Stačí tedy pro určení součinu dvou libovolných přirozených čísel zapsaných v z-adické soustavě znát: násobení jednociferným číslem, násobení mocninou základu z, úpravu mnohočlenů v mocninách základu z na z-adické mnohočleny, umět z-adické mnohočleny sčítat.

Například: $(215)_5$
$\underline{\cdot\ (43)_5}$
113
$\underline{134}$
$(2003)_5$

V pětkové soustavě vynásobme $(12)_5$ X $(13)_5$



$= (211)_5$

U násobení v nedesítkových soustavách je výhodnější nejprve činitele převést do desítkové soustavy, vynásobit a poté převést zpět do soustavy původní.

5 Sada příkladů

5.1 Převody z desítkové soustavy do soustavy o jiném základu

Použijeme algoritmus postupného dělní viz. kapitola 3.4.1.

Příklad 1: Převeďte číslo 135 do dvojkové soustavy.

Pozn.: dvojková soustava obsahuje pouze číslice 0, 1.

135 : 2 = 67 zb. 1
67 : 2 = 33 zb. 1
33 : 2 = 16 zb.1
16 : 2 = 8 zb. 0
8 : 2 = 4 zb. 0
4 : 2 = 2 zb. 0
2 : 2 = 1 zb. 0
1 : 2 = 0 zb. 1

$135 = (10000111)_2$

Příklad 2: Převeďte číslo 276 do osmičkové soustavy.

Pozn.: osmičková soustava obsahuje číslice 0-7

276 : 8 =34 zb. 4
34 : 8 = 4 zb. 2
4: 8 = 0 zb. 4

$276 = (424)_8$

Příklad 3: Převeďte číslo 1357 do šestnáctkové soustavy.

Pozn.: šestnáctková soustava obsahuje nejenom číslice od 0 do 9, ale navíc ještě písmena od A po F, které mají tyto hodnoty:

Písmeno	A	B	C	D	E	F
Hodnota	10	11	12	13	14	15

1357 : 16 = 84 zb. 13
84 : 16 = 5 zb. 4
5 : 16 = 0 zb. 5

$1357 = (54D)_{16}$

Příklad 4: Převeďte číslo 13415 do šestkové soustavy.

Pozn.: šestková soustava obsahuje číslice 0-5.

13415 : 6 = 2235	zb. 5
2235 : 6 = 372	zb. 3
372 : 6 = 62	zb. 0
62 : 6 = 10	zb. 2
10 : 6 = 1	zb. 4
1 : 6 = 0	zb. 1

$13415 = (142035)_6$

Příklad 5: Převeďte číslo 3446 do dvanáctkové soustavy.

Pozn.dvanáctková soustava obsahuje číslice 0-9 a písmena A,B.

3446 : 12 = 287	zb. 2
287 : 12 = 23	zb.11
23 : 12 = 1	zb.11
1 : 12 = 0	zb. 1

$3446 = (1BB2)_{12}$

Příklad 6: Převeďte číslo 231 do třináctkové soustavy.

Pozn. Třináctkou soustava obsahuje číslice 0-9 a písmena A, B, C.

231 : 13 = 17	zb. 10
17 : 13 = 1	zb. 4
1 : 13 = 0	zb. 1

$231 = (14A)_{13}$

Příklad 7: Převeďte číslo 99 do pětkové soustavy.

99 : 5 = 19	zb. 4
19 : 5 = 3	zb. 4
3 : 5 = 0	zb. 3

$99 = (344)_5$

5.2 Převody z nedesítkové do desítkové (dekadické) soustavy

Využijeme postup, který jsme si znázornili v kapitole 3.4.2.

Příklad 8: Převeďte číslo $(10110101101)_2$ do dekadické soustavy.

$(10110101101)_2 = 1 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1024 + 0 + 256 + 128 + 0 + 32 + 0 + 8 + 4 + 1 = 1453$

Příklad 9: Převeďte číslo $(2457)_8$ do dekadické soustavy.

$(2457)_8 = 2 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 2 \cdot 512 + 4 \cdot 64 + 5 \cdot 8 + 7 \cdot 1 = 1024 + 256 + 40 + 7 = 1327$

Příklad 10: Převeďte číslo $(212211)_3$ do dekadické soustavy.

$2 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 2 \cdot 243 + 81 + 2 \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 3 + 1 = = 643$

Příklad 11: Převeďte číslo $(31046)_7$ do dekadické soustavy.

$3 \cdot 7^4 + 1 \cdot 7^3 + 0 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0 = 3 \cdot 2401 + 343 + 0 + 4 \cdot 7 + 6 = 7580$

Příklad 12: Převeďte číslo $(5CB)_{16}$ do dekadické soustavy.

$5 \cdot 16^2 + C \cdot 16^1 + B \cdot 16^0 = 5 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = 5 \cdot 256 + 192 + 11 = 1483$

Příklad 13: Převeďte číslo $(132230)_4$ do dekadické soustavy.

$1 \cdot 4^5 + 3 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0 = 1024 + 3 \cdot 256 + 2 \cdot 64 + 32 + 12 + 0 = = 1964$

Příklad 14: Převeďte číslo $(ABCDEF)_{16}$ do dekadické soustavy.

$A \cdot 16^5 + B \cdot 16^4 + C \cdot 16^3 + D \cdot 16^2 + E \cdot 16^1 + F \cdot 16^0 =$

$= 10 \cdot 1048576 + 11 \cdot 65536 + 12 \cdot 4096 + 13 \cdot 256 + 14 \cdot 16 + 15 \cdot 1 =$

$= 10485760 + 720896 + 49152 + 3328 + 224 + 15 = 11259375$

5.3 Převody z jedné nedesítkové soustavy do druhé

Využijeme postup z kapitoly 3.4.3.

<u>Příklad 15:</u> Převeďte číslo $(5612)_7$ do šestkové soustavy.

Nejprve převedeme číslo do desítkové soustavy a poté z desítkové do šestkové.

$(5612)_7 = 5 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0 = 5 \cdot 343 + 6 \cdot 49 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 1 = 2018$

2018 : 6 = 336 zb. 2

336 : 6 = 56 zb. 0

56 : 6 = 9 zb. 2

9 : 6 = 1 zb. 3

1 : 6 = 0 zb. 1

$(5612)_7 = (13202)_6$

<u>Příklad 16:</u> Převeďte číslo $(1010101)_2$ do dvanáctkové soustavy.

Nejprve převedeme číslo do desítkové soustavy a poté z desítkové do dvanáctkové.

$(1010101)_2 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$

$= 64 + 0 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = 77$

85 : 12 = 7 zb. 1

7 : 12 = 0 zb. 7

$(1010101)_2 = (71)_{12}$

<u>Příklad 17:</u> Převeďte číslo $(A379)_{11}$ do soustavy pětkové.

Nejprve převedeme číslo do desítkové soustavy a poté z desítkové do pětkové.

$(A379)_{11} = A \cdot 11^3 + 3 \cdot 11^2 + 7 \cdot 11^1 + 9 \cdot 11^0 = 10 \cdot 1331 + 3 \cdot 121 + 7 \cdot 11 + 9 =$

$= 13310 + 363 + 77 + 9 = 13759$

13759 : 5 =2751 zb. 4

2751 : 5 = 550 zb. 1

550 : 5 = 110 zb. 0

110 : 5 = 22 zb. 0

22 : 5 = 4 zb. 2

4 : 5 = 0 zb. 4

$(A379)_{11} = (420014)_5$

Příklad 18: Převeďte číslo $(20714)_8$ do soustavy šestnáctkové.

Použijeme postup z kapitoly 3.4.4.4. Nejprve číslo převedeme do soustavy dvojkové (dle Tab. č. 2) a poté do soustavy šestnáctkové.

$(20714)_8 = (010\ 000\ 111\ 001\ 100)_2$

$(0010 \mid 0001 \mid 1100 \mid 1100)_2 =$

$=0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \mid 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \mid 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 +$

$+ 0 \cdot 2^0 \mid 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (2\ 1\ C\ C)_{16}$

$(20714)_8 = (21CC)_{16}$

Příklad 19: Převeďte číslo $(210112101)_3$ do devítkové soustavy.

V tomto případě nemusíme číslo nejprve převádět do desítkové soustavy. Můžeme použít přímého převodu (viz. Kapitola 3.4.4.4).

$(02 \mid 10 \mid 11 \mid 21 \mid 01)_3 =$

$= 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 \mid 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 \mid 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 \mid 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 \mid 0 \cdot 0^1 + 1 \cdot 3^0 =$

$= (24371)_9$

Příklad 20: Převeďte číslo $(624C)_{14}$ do šestnáctkové soustavy.

Nejprve převedeme číslo do desítkové soustavy a poté z desítkové do šestáctkové.

$(624C)_{14} = 6 \cdot 14^3 + 2 \cdot 14^2 + 4 \cdot 14^1 + C \cdot 14^0 = 6 \cdot 2744 + 2 \cdot 196 + 4 \cdot 14 + 12 =$

$= 16924$

16924 : 16 = 1057	zb. 12
1057 : 16 = 66	zb. 1
66 : 16 = 4	zb. 2
4 : 16 = 0	zb. 4

$(624C)_{14} = (421C)_{16}$

Příklad 21: Určete číslo o 1 vyšší:

$(244)_5 = (244 + 1)_5 = (300)_5$

$(545)_6 = (545 + 1)_6 = (550)_6$

$(AF)_{16} = (AF + 1)_{16} = (B0)_{16}$

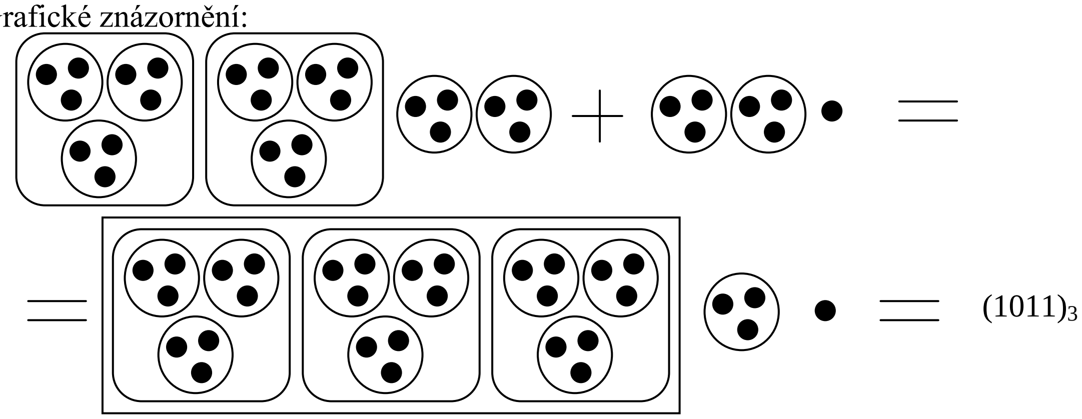
$(111)_2 = (111 + 1)_2 = (1000)_2$

5.4 Početní výkony v nedesítkové soustavě

<u>Příklad 22:</u> V trojkové soustavě sečtěte $(212)_3$ a $(21)_3$ (dle kapitoly 3.6.1).

$$\begin{array}{r} (220)_3 \\ \underline{(21)_3} \\ (1011)_3 \end{array}$$

Grafické znázornění:



<u>Příklad 23:</u> V pětkové soustavě sečtěte $(4231)_5$ a $(321)_5$ (dle kapitoly 3.6.1).

$$\begin{array}{r} (4221)_5 \\ \underline{(321)_5} \\ (10042)_5 \end{array}$$

<u>Příklad 24:</u> V osmičkové soustavě sečtěte $(7544)_8$ a $(2145)_8$ (dle kapitoly 3.6.1).

$$\begin{array}{r} (7544)_8 \\ \underline{(2145)_8} \\ (11711)_8 \end{array}$$

<u>Příklad 25:</u> Ve dvojkové soustavě sečtěte $(101001)_2$ a $(11101)_2$. U dvojkové soustavy lze snadno a rychle vytvořit tabulku základních spojů sčítání (dle kapitoly 3.6.1).

$$\begin{array}{r} (101001)_2 \\ \underline{(11101)_2} \\ (1000110)_2 \end{array}$$

z=2	**0**	**1**
0	0	1
1	1	10

Příklad 26: V šestnáctkové soustavě sečtěte $(CCA)_{16}$ a $(91)_{16}$ (dle kapitoly 3.6.1).

$(CCA)_{16}$	1 + A = 11 = B
$\underline{(91)_{16}}$	9 + C = 21 = (16 + 5) → o 1 zvýšíme druhý řád
$(D5B)_{16}$	1 + C = 13 = D

Příklad 27: Ve čtyřkové soustavě sečtěte $(32112)_4$ a $(132232)_4$ (dle kapitoly 3.6.1).

$$\begin{array}{r} (132232)_4 \\ \underline{(32112)_4} \\ (231010)_4 \end{array}$$

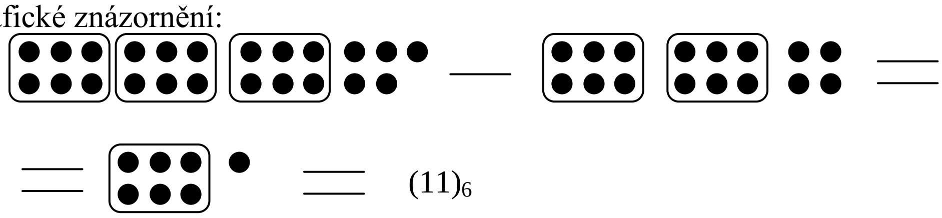
Příklad 28: V sedmičkové soustavě sečtěte $(35654)_7$ a $(453165)_7$ (dle kapitoly 3.6.1).

$$\begin{array}{r} (453165)_7 \\ \underline{(35654)_7} \\ (522152)_7 \end{array}$$

Příklad 29: V šestkové soustavě odečtěte $(24)_6$ od $(35)_6$ (dle kapitoly 3.6.1).

$$\begin{array}{r} (35)_6 \\ \underline{-\ (24)_6} \\ (11)_6 \end{array}$$

Grafické znázornění:



Příklad 30: V trojkové soustavě odečtěte $(2112)_3$ od $(211112)_3$ (dle kapitoly 3.6.2).

$$\begin{array}{r} (221212)_3 \\ \underline{-\ (2112)_3} \\ (212100)_3 \end{array}$$

Příklad 31: V pětkové soustavě odečtěte $(2434)_5$ od $(4221)_5$ (dle kapitoly 3.6.2).

$$\begin{array}{r} (4221)_5 \\ \underline{-\ (2434)_5} \\ (1232)_5 \end{array}$$

Příklad 32: V dvanáctkové soustavě odečtěte $(A893)_{12}$ od $(25741)_{12}$ (dle kapitoly 3.6.2).

$$\begin{array}{r} (25741)_{12} \\ \underline{-\ (A893)_{12}} \\ (16A6A)_{12} \end{array}$$

Příklad 33: V šestnáctkové soustavě odečtěte $(BC94)_{16}$ od $(AF5943)_{16}$ (dle kapitoly 3.6.2).

$$\begin{array}{r} (AF5943)_{16} \\ \underline{-\ (BC92)_{16}} \\ (AE9CB1)_{16} \end{array}$$

Příklad 34: V devítkové soustavě odečtěte $(2457)_9$ od $(8842)_9$ (dle kapitoly 3.6.2).

$$\begin{array}{r} (8842)_9 \\ \underline{-\ (2457)_9} \\ (6374)_9 \end{array}$$

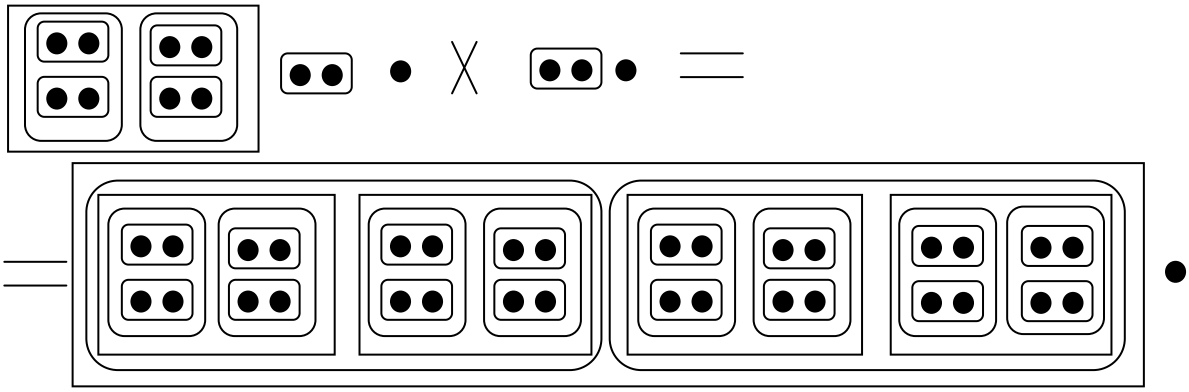
Příklad 35: V osmičkové soustavě odečtěte $(754)_8$ od $(4321)_8$ (dle kapitoly 3.6.2).

$$\begin{array}{r} (4321)_8 \\ \underline{-\ (754)_8} \\ (3345)_8 \end{array}$$

Příklad 36: Ve dvojkové soustavě vynásobte $(1011)_2$ a $(11)_2$ (dle kapitoly 3.6.3).

$$
\begin{array}{r}
(1011)_2 \\
\underline{\cdot\ (11)_2} \\
(1011)_2 \\
\underline{(1011)_2} \\
(100001)_2
\end{array}
$$

Grafické znázornění:



Příklad 37: V trojkové soustavě vynásobte $(221)_3$ a $(22)_3$ (dle kapitoly 3.6.3).

$$
\begin{array}{r}
(221)_3 \\
\underline{\cdot\ (12)_3} \\
(1212)_3 \\
\underline{(221)_3} \\
(11122)_3
\end{array}
$$

V nedesítkové soustavě se násobí zpaměti obtížně, proto je lepší nejdříve si čísla převést do soustavy desítkové, mezi sebou vynásobit a poté převést zpět do soustavy původní.

$(221)_3 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 1 = 25$

$(12)_3 = 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 3 + 2 = 5$

$25 \cdot 5 = 125$

$125 : 3 = 41$	zb. 2
$41 : 3 = 13$	zb. 2
$13 : 3 = 4$	zb. 1
$4 : 3 = 1$	zb. 1
$1 : 3 = 0$	zb. 1

$125 = (11122)_3$

Příklad 38: V osmičkové soustavě vynásobte $(734)_8$ a $(253)_8$ (dle kapitoly 3.6.3).

$(734)_8 = 7 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = 7 \cdot 64 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 1 = 448 + 24 + 4 = 476$

$(253)_8 = 2 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 2 \cdot 64 + 5 \cdot 8 + 3 \cdot 1 = 128 + 40 + 3 = 171$

476	81396 : 8 = 10174	zb. 4
· 171	10174 : 8 = 1271	zb. 6
476	1271 : 8 = 158	zb. 7
3332	158 : 8 = 19	zb. 6
476	19 : 8 = 2	zb. 3
81396	2 : 8 = 0	zb. 2

$(734)_8 \cdot (253)_8 = (236764)_8$

Příklad 39: V dvanáctkové soustavě znásobte $(AB)_{12}$ a $(34)_{12}$ (dle kapitoly 3.6.3).

$(AB)_{12} = A \cdot 12^1 + B \cdot 12^0 = 10 \cdot 12 + 11 \cdot 1 = 131$

$(34)_{12} = 3 \cdot 12^1 + 4 \cdot 12^0 = 3 \cdot 12 + 4 \cdot 1 = 40$

131	5240 : 12 = 436	zb. 8
· 40	436 : 12 = 36	zb. 4
000	36 : 12 = 3	zb. 0
524	3 : 12 = 0	zb. 3
5240		

$(AB)_{12} \cdot (34)_{12} = (3048)_{12}$

Příklad 40: V šestnáctkové soustavě vynásobte $(ACD)_{16}$ a $(FE)_{16}$ (dle kapitoly 3.6.3).

$(ACD)_{16} = A \cdot 16^2 + C \cdot 16^1 + D \cdot 16^0 = 10 \cdot 256 + 12 \cdot 16 + 13 \cdot 1 = 2765$

$(FE)_{16} = F \cdot 16^1 + E \cdot 16^0 = 15 \cdot 16 + 14 \cdot 1 = 254$

2765	702310 : 16 = 43894	zb. 6
· 254	43894 : 16 = 2743	zb. 6
11060	2743 : 16 = 171	zb. 7
13825	171 : 16 = 10	zb. 11 = B
5530	10 : 16 = 0	zb. 10 = A
702310		

$(ACD)_{16} \cdot (FE)_{16} = (AB766)_{16}$

6 Závěr

Úkolem této bakalářské práce bylo zpracovat přehlednou studii o pozičních a nepozičních numeračních soustavách, tak aby z ní bylo jasné a zřetelné jak se v daných soustavách orientovat. Přiblížit studentům vývoj numeračních soustav od historie až po současnou dobu, seznámit studenty s tím, jak se zapisovali číslice před zavedením dnešních arabských číslic. Dále objasnit jak provádět v daných soustavách početní úkony, jak převádět číslice mezi danými soustavami. Také vysvětlit jakých symbolů se v jednotlivých soustavách používá.

Doufám, že prostudování této práce poskytne studentům ucelený pohled na číselné soustavy a zároveň pomůže při vyučovacím procesu, tak aby studenti nepřijímali informace o soustavách pouze formálně, ale aby jim i porozuměli.

V druhé části bakalářské práce je vytvořena sbírka úloh, která je sestavená z příkladů, které by měli sloužit pro objasnění práce v daných soustavách.

7 Literatura

[1] Blažek, J., Koman, M., Kussová, B.: *Algebra a teoretická aritmetika*, str. 47, 49, Praha, SPN, 1981.

[2] Drábek, J., Križalkovič, K., Liška, J., Viktora, V.: *Základy elementární aritmetiky pro učitelství prvního stupně ZŠ,* str. 158, 159, Praha, SPN, 1984.

[3] Hruša, K., Dlouhý, Z., Mencl, J.: *Aritmetika a algebra pro pedagogické fakulty*, str. 117-123, Praha, SPN, 1964.

[4] Jakešová, O.: Bakalářská práce: *Vybrané partie z algebry a jejich aplikace*, 2010, vedoucí práce: Tlustý, P..

[5] Jelínek, M.: *Numerační soustavy 3*, str. 17-35, 40, Praha, SPN, 1974.

[6] Mačát, M.: *Číselné soustavy*, str. 18,20, Praha, SPN, 1971.

[7] Sobotka, Z.: *Kurs číslicové techniky*, str. 11, 13, 21-22, Praha, SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1974.

Internetové zdroje

[8] http://cs.wikipedia.org/wiki/Kuličkové_počítadlo

[9] http://www.converter.cz/prevody/rimska-cisla.htm

[10] http://cs.wikipedia.org/wiki/Osmičková_soustava]

[11] http://cs.wikipedia.org/wiki/Šedesátková_soustava

[12] http://www.geneze.info/pojmy/subdir/historie_cisel.htm

[13] http://www.historie-vypocetni-techniky.cekuj.net/obdobi-prehistorie/

[14] http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:RomanAbacusRecon.jpg

[15] http://www.converter.cz/prevody/rimska-cisla.htm

[16] http://cs.wikipedia.org/wiki/Římské_číslice