UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

KATEDRA EXPERIMENTÁLNÍ FYZIKY

Sbírka příkladů ze speciální teorie relativity

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jaroslav Fričer

Vedoucí práce: RNDr. Renata Holubová, CSc.

Olomouc 2013

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Renaty Holubové, CSc. a že jsem použil zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci ……………….   ………………………………......

Poděkování

Děkuji vedoucí mé práce paní RNDr. Renatě Holubové, CSc. a panu Mgr. Lukáši Richterkovi, Ph.D., za cenné rady a připomínky v průběhu psaní bakalářské práce. Také děkuji své rodině za podporu.

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Jaroslav Fričer
Název práce	Sbírka úloh ze speciální teorie relativity
Typ práce	Bakalářská
Pracoviště	Katedra experimentální fyziky
Vedoucí práce	RNDr. Renata Holubová, CSc.
Rok obhajoby práce	2013
Abstrakt	Úkolem bakalářské práce je sestavit sbírku řešených úloh ze speciální teorie relativity. Sbírka bude obsahovat příklady na středoškolské úrovni různé obtížnosti a stane se doplňkem existující sbírky řešených úloh z fyziky nakladatelství Prometheus. Sbírka bude využívána jednak v rámci výuky studentů učitelství fyziky v rámci didaktiky fyziky – Řešení fyzikálních úloh, budou ji moci využívat i učitelé a žáci středních škol.
Klíčová slova	Speciální teorie relativity, sbírka řešených příkladů,
Počet stran	44
Počet příloh	0
Jazyk	Český

Bibliographical identification

Firstname surname	Jaroslav Fričer
Title	A collection of examples of special relativity
Type of thesis	Bachelor
Department	Department of Experimental Physics
Supervisor	RNDr. Renata Holubová, CSc.
The year of presentation	2013
Abstract	The task of the thesis is to assemble a collection of solved problems of the special theory of relativity. The collection will include excercises on the secondary school level in various difficulties and it will become a part of the existing collection of solved problems in Physics from the Prometheus publishing company. The collection will be used within the education of students of a teaching profession aimed on Physics – The solutions of physical problems, and also it will be able to teachers and pupils of secondary schools.
Keywords	Special theory of relativity, collection of solved problems,
Number of pages	44
Number of appendices	0
Language	Czech

Obsah

Úvod

Cílem této bakalářské práce je vytvořit sbírku řešených příkladů na úrovni středních škol, která by doplňovala již existující učebnice speciální teorie relativity. Tato sbírka obsahuje mnoho poutavých a zajímavých příkladů, které čtenáře mohou motivovat k dalšímu studiu problematiky. Příklady jsou určeny nejen pro žáky středních škol a studenty učitelství fyziky, ale i pro všechny, kteří mají zájem o pochopení principů relativity. Po pročtení a propočítání názorných úloh by čtenáři měli plně pochopit problematiku speciální teorie relativity na středoškolské úrovni.

Bakalářská práce je rozdělena do dvou bloků – teoretické části a samotné sbírky řešených příkladů. V teoretické části jsou uvedeny důležité vztahy a vzorce. Pro názornost a lepší pochopení teorie jsou některé vztahy odvozeny přímo z klasických fyzikálních zákonů a z Einsteinových postulátů. Ve druhém bloku bakalářské práce je 19 řešených úloh a příkladů rozdělených do pěti kapitol. Prioritou příkladů je názornost, zajímavost a zapojení představivosti čtenáře. Každý příklad se skládá ze stručného zadání, podrobného řešení a závěru, ve kterém je vše shrnuto a zajímavosti či důležitá fakta jsou vyzdvižena.

Teoretická část

1. Inerciální vztažná soustava

Inerciální vztažné soustavy jsou takové soustavy, které se pohybují buď rovnoměrným přímočarým pohybem, nebo zůstávají v klidu. Jinými slovy v každé inerciální vztažné soustavě platí Newtonovy pohybové zákony.

Př.: Automobil jedoucí konstantní rychlostí po hladké rovné silnici můžeme považovat za inerciální vztažnou soustavu, jelikož žádným mechanickým pokusem uvnitř auta nemůžeme určit rychlost automobilu. Dokonce ani nedokážeme rozhodnout, jestli se vůbec pohybuje, nebo je vůči vozovce v klidu. Změna situace nastane, potkáme-li po cestě překážku, kvůli které musíme brzdit, zatáčku, horizont (stoupání, klesání) či výmoly na silnici. Při těchto situacích se projeví setrvačná síla našeho těla a začneme se vzhledem k autu pohybovat. Tato síla ovšem nepůsobí v inerciální vztažné soustavě (vzhledem k vnitřku automobilu tyto síly prakticky neexistují), je důsledkem vnějších projevů. Představme si, že na těleso nepůsobíme žádnou silou, a ono se i přesto začne pohybovat. Tímto procesem porušujeme první i třetí Newtonův zákon. A tudíž nemůžeme vnitřek automobilu považovat za inerciální vztažnou soustavu. Tuto vztažnou soustavu nazveme neinerciální. Planetu Zemi považujeme za inerciální vztažnou soustavu i přesto, že rotuje kolem své osy a obíhá kolem Slunce. Tyto děje se na povrchu planety příliš neprojevují a můžeme je zanedbat.

Přechod od souřadnic jedné inerciální vztažné soustavy S k souřadnicím druhé soustavy S', která se pohybuje vzhledem k první rychlostí v ve směru osy x, lze matematicky zapsat. Do doby vzniku speciální teorie relativity byla známa pouze Galileova transformace:

$$x = x' + vt; y = y'; \ z = z' \tag{1}$$

Pro zohlednění Einsteinových postulátů, které si uvedeme v následující kapitole, bylo potřeba odvodit jinou transformaci. Tohoto úkolu se chopil nizozemský fyzik Hendrik Antoon Lorentz a spolu se speciální teorií relativity spatřily světlo světa i tzv. Lorentzovy transformace. Ty si ukážeme poté, co si vysvětlíme principy speciální teorie relativity.

2. Einsteinovy postuláty

Speciální teorie relativity byla publikována v roce 1905 v práci nazvané „K elektrodynamice pohybujících se těles". Její autor Albert Einstein ve svých 26 letech přišel se dvěma základními postuláty, ze kterých vyvodil další důsledky.

a) Princip relativity: Ve všech inerciálních vztažných soustavách platí **všechny** fyzikální zákony stejně.

Do této doby platil obecně za pravdivý Galileův princip relativity, který říká, že všechny inerciální vztažné soustavy jsou pro popis mechanických dějů rovnocenné. O dějích elektromagnetických byla představa jiná. Předpoklad existence éteru jako prostředí, ve kterém se šíří elektromagnetické pole, vedlo k různým pokusům o změření absolutní rychlosti vůči tomuto nehybnému prostředí. Einsteinův postulát říká, že všechny inerciální soustavy jsou navzájem rovnocenné, a nelze tedy žádným pokusem provedeným uvnitř vztažné inerciální soustavy zjistit, je-li tato soustava v pohybu, ani jakou rychlostí se pohybuje.

b) Princip stálé rychlosti světla: Ve všech inerciálních vztažných soustavách má rychlost světla ve vakuu stejnou velikost, nezávislou na směru šíření a na pohybu zdroje.

Tento postulát je na první pohled velice snadno pochopitelný. Rychlost světla je konečná a pro každého pozorovatele stejně velká. Ve vakuu má velikost $299\,792\,458\ \mathrm{m/s}$.

Když se ale doopravdy zamyslíme nad tímto tvrzením, není až tak samozřejmé a může odporovat zdravému rozumu. Vezměme si příklad, kdy pozorovatel, který je v určité klidové soustavě, měří rychlost světla. Rychlost tohoto stejné fotonu potom změří pozorovatel letící ve směru šíření paprsku rychlostí 200 000 km/s. V klasické fyzice by pozorovatel v klidu naměřil rychlost $c = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$ a druhý by vnímal jak jej foton „předjíždí" rychlostí $v = 100\,000\ \mathrm{km/s}$. Ve skutečnosti oba pozorovatelé naměří paprsku stejnou rychlost. S něčím takovým se v životě běžně nesetkáváme a připadá nám to nepřirozené.

Z těchto dvou základních axiomů (princip relativity a princip stálé rychlosti světla) se odvozují všechny ostatní důsledky, jako dilatace času, kontrakce délek atp. Většina z nich nám opět může připadat odporující zdravému rozumu a našemu vnímání světa, nicméně teorie nikde nepokulhává a je potvrzována mnoha experimenty.

3. Lorentzova transformace

Nyní si ukážeme dříve slíbenou Lorentzovu transformaci. Mějme dány dvě inerciální souřadnicové soustavy S a S', jejichž osy x a x' spolu splývají. Osy y a y' jsou navzájem rovnoběžné, stejně tak osy z a z'. Nechť se soustava S' pohybuje vzhledem k soustavě S ve směru osy x konstantní rychlostí v. Pro vztah mezi souřadnicemi těchto vztažných soustav platí Lorentzova transformace:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{2}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{2.1}$$

kde $\beta = \frac{v}{c}$. Toto platí pro přechod mezi souřadnicemi, pohybuje-li se v soustavě S' nějaké těleso rychlostí $\overrightarrow{u'} = (u'_x, u'_y, u'_z)$, pak složky rychlosti $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ jsou v soustavě S dány vztahy:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}, \quad u_y = \frac{u'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}, \quad u_z = \frac{u'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}. \tag{3}$$

Pro opačný přechod od S k S' stačí zaměnit čárkované veličiny za nečárkované a naopak a za rychlost v dosadit $-v$. K těmto vztahům jsme dospěli úpravou vztahů pro transformaci souřadnic. Víme, že $u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \dots, u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, kde $\mathrm{d}t$ je derivace výrazu $t = \frac{t' - \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Podobnou úpravou jsme přešli k transformaci složek zrychlení:

$$a_x = \left(\frac{1-\beta^2}{1+\frac{u'_x v}{c^2}}\right)^3 a'_x,$$

$$a_y = (1-\beta^2)\frac{\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right)a'_y - \frac{u'_y v}{c^2}a'_x}{\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right)^3}, \tag{4}$$

$$a_z = (1-\beta^2)\frac{\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right)a'_z - \frac{u'_z v}{c^2}a'_x}{\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right)^3} \text{ [7].}$$

4. Dilatace času

Světelné hodiny jsou aparát dvou proti sobě namířených zrcadel o délce jednoho metru, mezi nimiž kmitá paprsek světla. Jedna perioda je rovna času, za který paprsek urazí cestu od jednoho zrcadla k druhému a zpět.

Ve dvou inerciálních vztažných soustavách S a S´jsou umístěny shodně orientované, stejné světelné hodiny H a H´, které jsou uvedeny do chodu v okamžiku, kdy spolu splývají osy těchto hodin. Soustava S´ se pohybuje vzhledem k soustavě S ve směru kolmém na osy hodin rychlostí $v < c$. V momentě, kdy paprsek v hodinách H dorazil k druhému zrcátku, urazil paprsek v H´ stejnou dráhu $c\Delta t$, ovšem v jiném směru. Musel totiž urazit navíc vzdálenost $v\Delta t$ doprava vzhledem k soustavě S, a jelikož má omezenou rychlost, mohl urazit pouze část vzdálenosti mezi zrcátky v hodinách H´. Z této skutečnosti plyne fakt, že se hodiny H´ spožďují oproti hodinám H. Světelný paprsek se pohyboval po přeponě pravoúhlého trojúhelníku o délce $c\Delta t$, jeho odvěsny jsou dlouhé $v\Delta t$ a $c\Delta t'$, kde $\Delta t'$ značí čas, který uplynul na hodinách H´, zatímco na hodinách H uplynul čas Δt. Vyjádřeme si jej pomocí Pythagorovy věty, a odvoďme vztah pro dilataci času:

$$(c\Delta t')^2 = (c\Delta t)^2 - (v\Delta t)^2,$$

$$\Delta t' = \Delta \mathrm{t}\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}} = \Delta t\sqrt{1-\beta^2}.$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ [2].} \tag{5}$$

5. Kontrakce délek

Vezměme nyní téměř stejnou situaci, jako v předchozím odvozování dilatace času, s tím rozdílem, že světelné hodiny otočíme o 90° a soustava S´ se pohybuje vzhledem k S vpravo ve směru osy hodin H´. Pro pozorovatele v soustavě S´ paprsek v hodinách urazí vzdálenost od jednoho zrcátka k druhému a zpět za dobu

$$t' = \frac{2l_0}{c}.$$

Vzhledem k soustavě S urazí paprsek za dobu t_1 dráhu $ct_1 = l + vt_1$ od jednoho konce hodin k druhému ve směru zleva doprava. Při cestě zpět se levé zrcátko pohybuje proti směru paprsku a za dobu t_2 tedy paprsek urazí menší vzdálenost $ct_2 = l - vt_2$. Pro celkovou periodu v těchto hodinách z pohledu pozorovatele v soustavě S platí:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2}.$$

Dále známe vztah mezi t a t', $t = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Tedy:

$$\frac{2lc}{c^2 - v^2} = \frac{2l_0}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

odtud si úpravami vyjádříme l a dostaneme vzorec, který nazýváme vztahem pro kontrakci délek:

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,[2]. \tag{6}$$

6. Skládání rychlostí

Na střeše vagónu jedoucím rychlostí v, stojí střelec, který střílí směrem k lokomotivě. Rychlost jeho střely vzhledem k vagónu je u'. Jakou rychlostí poletí střela vzhledem k nádraží?

Podle klasické fyziky je příklad jasný a rychlost střely v soustavě nádraží je rovna $u = v + u'$. Co se ale stane, budeme-li se pohybovat rychleji? Například vesmírná loď s rychlostí $v = 0{,}5\mathrm{c}$, vystřelí raketu rychlostí $u' = 0{,}5\mathrm{c}$. Z klasického vztahu získáme rychlost $u = c$. Což je nepopiratelný rozpor s druhým Einsteinovým postulátem. Chyba je v klasickém sčítání rychlostí. Odvoďme si obecnější vztah:

Mějme objekt v soustavě S’, ten se v této soustavě pohybuje rychlostí u'. Je zřejmé, že rychlost je podíl uražené vzdálenosti v určitém čase, v rámci jedné soustavy lze tedy psát $u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$. V soustavě S se tento objekt pohybuje zase rychlostí $u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Ale přechod mezi souřadnicemi a mezi časy v jednotlivých soustavách nám už řeší Lorentzova transformace (2):

$$u = \frac{x}{t} = \frac{\frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}}{\frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{x' + vt'}{t' + \frac{x'v}{c^2}} = \frac{\frac{x'}{t'} + v}{1 + \frac{x'v}{t'c^2}} = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}.$$

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}. \tag{7}$$

Vidíme, že naší jednoduchou úvahou jsme přešli od transformace souřadnic ke vzorci pro skládání rovnoběžných rychlostí, část vzorce (3).

7. Relativistická dynamika

V klasické Newtonovské fyzice platí tvrzení: Jestliže na těleso působí konstantní síla, je toto těleso rovnoměrně urychlováno ve směru síly. Tedy $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ ($\vec{F}$ je síla; $m = konst.$), ze vztahu $\vec{v} = \vec{a}t$ potom plyne $\vec{v} = \frac{\vec{F}t}{m}$. Kdyby tedy tato síla působila dostatečně dlouho, mohla by rychlost tělesa překročit rychlost světla. Rychlost světla je ovšem mezní rychlostí a žádný hmotný objekt jí nemůže dosáhnout. My však víme, že síla je definována jako velikost změny hybnosti tj.: $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$. Logickou úvahou z definice hybnosti, jako součinu hmotnosti a rychlosti, dospějeme k následujícímu tvrzení: Při neustálém působení konstantní síly bude těleso zvyšovat svoji hybnost nade všechny meze. Rychlost se působením této síly bude limitně blížit rychlosti světla. Hmotnost tohoto tělesa se bude zvyšovat neomezeně. Albert Einstein odvodil vztah pro nárůst hmotnosti v závislosti na rychlosti tělesa:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{8}$$

kde m_0 je klidová hmotnost a m je tzv. relativistická hmotnost tělesa. Přitom však potvrdil zákon zachování hybnosti jako jeden z nejobecnějších fyzikálních zákonů:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v} \text{ [1].} \tag{9}$$

8. Hmotnost a energie

V předchozím odstavci jsme si ukázali, že roste-li rychlost tělesa, roste i jeho hmotnost. Důsledkem této skutečnosti je jistý, široké veřejnosti dobře známý, vztah mezi energií a hmotností tělesa. V relativistické fyzice se energie (práce) definuje naprosto stejně jako ve fyzice klasické, a to jako síla působící po určité dráze. Tedy

$$\mathrm{d}E = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}, \quad \text{tj.: } \mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})\mathrm{d}\vec{s},$$

jelikož $\frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}$, tak

$$\mathrm{d}E = \vec{v} \cdot \mathrm{d}(m\vec{v}) = v^2\mathrm{d}m + m\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v}.$$

Dále ze vztahu $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, dostaneme úpravami $m^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2$, a poté

$$m^2c^2 = m_0^2c^2 + m^2v^2.$$

Tento výraz nyní zderivujeme (m_0 a c jsou konstanty)

$$c^2\mathrm{d}m = v^2\mathrm{d}m + vm\mathrm{d}v,$$

pravé strany tohoto vzorce a vztahu pro přírůstek energie se rovnají, dosaďme tedy

$$\mathrm{d}E = c^2\mathrm{d}m.$$

Celkovou energii tělesa tedy obdržíme integrací

$$E = mc^2. \tag{10}$$

Celková energie je součtem energie klidové (potenciální) a kinetické $E = E_P + E_K$. Kinetickou energii vyjádříme tedy jako

$$E_K = E - E_P = c^2(m - m_0) = c^2 m_0(\gamma - 1) \text{ [4].}$$

9. Dopplerův jev

V roce 1842 profesor Christian Doppler odvodil velice důležitou větu, mající značný dopad na celou fyziku, zejména na astronomii, akustiku nebo optiku. Dopplerův princip lze vyslovit takto: Jestliže se pozorovatel a zdroj libovolného vlnivého děje vůči sobě pohybují, zjistí pozorovatel při vzájemném přibližování zvýšení kmitočtu vlnění. Při vzájemném vzdalování zjistí pokles kmitočtu.

Nyní si ve zkratce odvodíme klasický vztah pro změnu frekvence. Vezměme zdroj elektromagnetického vlnění (ne nutně, pouze pro značení rychlosti šíření vln c). Platí vztah $\left(f = \frac{c}{\lambda}\right)$, kde λ je vlnová délka a f je frekvence vlnění. Jsou-li pozorovatel i zdroj vlnění vzájemně v klidu, je zřejmé, že pozorovatel přijme za 1 s tolik kmitů, kolik jich zdroj za 1 s vyšle, tedy $n_1 = \frac{ct}{\lambda_0}$. Pohybuje-li se však pozorovatel směrem ke zdroji, přijme navíc ještě počet vln $n_2 = \frac{vt}{\lambda_0}$. Pro frekvenci, kterou zaznamená pozorovatel, tedy platí:

$$f_1 = \frac{n_1 + n_2}{t} = \frac{ct + vt}{\lambda_0 t} = \frac{c + v}{\lambda_0} = f_0\left(1 + \frac{v}{c}\right). \tag{11}$$

Pokud by se pozorovatel pohyboval směrem od zdroje, počet vln by se úměrně k jeho rychlosti zmenšil a dospěli bychom k podobnému vzorci $f_1 = f_0\left(1 - \frac{v}{c}\right)$.

Doposud se pohyboval pozorovatel, nyní se bude přibližovat zdroj vlnění k pozorovateli. Vzhledem k našim znalostem o inerciálních soustavách můžeme očekávat stejnou závislost, ovšem jak uvidíme, klasické odvození poněkud pokulhává.

Rychlost šíření vlny je c, za dobu t vyšle zdroj $f_0 t$ kmitů na dráhu $d = ct$. Ve stejné době se ale posune o dráhu $x = vt$ směrem k pozorovateli. Vlnoplochy tedy nejsou soustředné kulové plochy, ve směru pohybu je totiž vlnová délka kratší, v opačném směru se prodlouží. Počet $f_0 t$ vlnových délek bude tedy vysláno na dráhu dlouhou

$x = ct - vt$, vlnová délka je tedy $\lambda_1 = \frac{(c-v)t}{f_0 t}$. A jelikož platí $\lambda_1 = \frac{c}{f_1}$ získáme výsledný vzorec:

$$f_1 = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}. \tag{12}$$

Analogicky pro zdroj vzdalující se od pozorovatele dostaneme vztah $f_1 = \frac{f_0}{1+v/c}$. Vidíme jistý rozdíl mezi případem, kdy se hýbe pozorovatel a kdy se hýbe zdroj, ovšem pro rychlosti $v \ll c$, platí

$$\frac{1}{1 - \frac{v}{c}} \approx 1 + \frac{v}{c}.$$

Pokud ale bude vzájemná rychlost srovnatelná s rychlostí šíření vlny, přestane nám teorie fungovat. Najděme proto obecnější relativistický vzorec.

Nechť je v soustavě S´zdroj příčného vlnění o frekvenci f, šířící se rychlostí u'. Soustava S´ se vzdaluje od soustavy S rychlostí v v kladném směru osy x. Zdroj vysílá vlnění šířící se vzhledem k S rychlostí u. Pozorovatel v soustavě S naměří frekvenci f'. Dále víme, že okamžitá výchylka vlnění je stále kolmá na rychlost v, tudíž se její velikost v důsledku pohybu soustavy nemění, a můžeme psát:

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t'}{T'} - \frac{x'}{\lambda'}\right) = y',$$

a proto je výraz $2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 2\pi \left(\frac{t'}{T'} - \frac{x'}{\lambda'}\right)$ invariantem (nemění se změnou vztažné soustavy). A dále víme, že $f = \frac{1}{T} = \frac{u}{\lambda}$, tedy:

$$f'\left(t' - \frac{x'}{u'}\right) = f\left(t - \frac{x}{u}\right).$$

Nyní nechť je záření elektromagnetické, tj. $u = u' = c$. Použitím Lorentzovy transformace získáme:

$$f'\left[\frac{\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) - \frac{x - vt}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right] = f\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

dále úpravami přes

$$f'\left(t-\frac{x}{c}\right)\left(1+\frac{v}{c}\right)=f\left(t-\frac{x}{c}\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

$$f'\left(1+\frac{v}{c}\right)=f\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

až ke konečnému obecnému relativistickému vzorci pro změnu frekvence v případě vzájemného vzdalování zdroje a pozorovatele:

$$f'=f\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}=f\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}. \tag{13}$$

V případě přibližování se do tohoto vztahu dosadí záporná rychlost, tedy pokud se S´ k S přibližuje rychlostí v, platí: $f'=f\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}=f\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ [4].

Sbírka řešených úloh

10. Skládání rychlostí

10.1. Urychlování protonu klasickým vztahem

Spočítejte hodnotu urychlovacího napětí, které by podle klasické Newtonovské mechaniky urychlilo proton na rychlost světla. Na jakou rychlost toto napětí proton ve skutečnosti urychlí? $m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg; $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C [6].

Řešení: Ze zákona zachování energie podle klasické fyziky plyne vztah:

$$QU = \frac{1}{2}mv^2.$$

Po vyjádření napětí ze vzorce a dosazení hodnot získáme urychlovací napětí:

$$U = \frac{m_p c^2}{2e} = \frac{1{,}673 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}} = 469{,}944,$$

$$U = 469{,}944 \text{ MV}.$$

Nyní budeme urychlovat proton tímto napětím a pomocí relativistických vztahů zjistíme jeho rychlost:

$$E_k = mc^2(\gamma - 1) \;\Rightarrow\; eU = m_p c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right).$$

Odtud vyjádříme výraz v/c:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\frac{eU}{m_p c^2} + 1} \right)^2} = 0{,}7454.$$

Závěr: Výsledná rychlost, kterou se proton urychlený napětím U pohybuje, je $v = 0{,}745c$.

10.2. Závod dvou částic

Dvě částice se pohybují vysokou rychlostí v urychlovači částic. Pomalejší částice má náskok před rychlejší $s = 5\ \mathrm{m}$ měřenou v soustavě této částice. Rychlost obou částic je měřená ve vztažné soustavě laboratoře. Za jakou dobu vzhledem k pozorovateli v laboratoři rychlejší částice dožene pomalejší? $v_1 = 0{,}8c$; $v_2 = 0{,}9c$.

Řešení: Zadané rychlosti částic známe vzhledem k pozorovateli v laboratoři, to by šlo samozřejmě spočítat pomocí soustavy pohybových rovnic těchto částic při užití Lorentzovy transformace. Ovšem výpočet si značně zjednodušíme, pokud vyjádříme rychlost jedné částice vzhledem k druhé částici, přičemž nezáleží na tom, kterou částici si vybereme jako „klidovou" a kterou jako pohybující se. Spočtěme tedy rychlost rychlejší částice vzhledem k pomalejší:

$$v = \frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_2 v_1}{c^2}} = \frac{0{,}9 - 0{,}8}{1 - 0{,}8 \cdot 0{,}9} = \frac{5}{14} = 1{,}07 \cdot 10^8$$

Rychlejší částice dohání pomalejší rychlostí $v = 1{,}07 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$, pomalejší částice má náskok $5\ \mathrm{m}$. Čas, za který budou obě částice na stejné úrovni, lze tedy vyjádřit:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{5}{\frac{5}{14} 3 \cdot 10^8} = 46{,}67 \cdot 10^{-9}.$$

Závěr: Rychlejší částice tedy překoná pětimetrový náskok druhé částice během $46{,}67\ \mathrm{ns}$.

10.3. Mimozemský nálet

Nepřátelská vesmírná loď útočí na Zemi. Při náletu se pohybuje směrem k Zemi rychlostí $v_L = 180\,000\ \mathrm{km/s}$. Ovšem Země se brání a vystřeluje projektily obřími elektromagnetickými děly. Rychlost projektilu dosahuje $v_P = 200\,000\ \mathrm{km/s}$. Nepřátelská loď reaguje okamžitým ústupem a letí od Země stejnou rychlostí, jakou se k ní blížila. Vysvětlete, proč se loď ihned otočila (berme v potaz, že to dokáže). Jaký je rozdíl rychlostí projektilu vzhledem k lodi při náletu u_N a při ústupu u_U? Názorně vypočítejte kinetickou energii projektilu vzhledem k lodi, jestliže je klidová hmotnost projektilu $5\ \mathrm{kg}$.

Řešení: Jestliže vesmírná loď letí proti směru rychlosti projektilu, získáme vzájemnou rychlost relativistickým součtem, pokud poletí po směru, musíme rychlosti odečíst. Pro součet rychlostí tedy platí:

$$u_N = \frac{v_L + v_P}{1 + \frac{v_L v_P}{c^2}} = \frac{180\,000 + 200\,000}{1 + \frac{180\,000 \cdot 200\,000}{300\,000^2}} = 271\,429,$$

$$u_N = 271\,429 \text{ km/s}.$$

Na druhou stranu pro jejich rozdíl

$$u_U = \frac{v_P - v_L}{1 - \frac{v_L v_P}{c^2}} = \frac{200\,000 - 180\,000}{1 - \frac{180\,000 \cdot 200\,000}{300\,000^2}} = 33\,333,$$

$$u_U = 33\,333 \text{ km/s}.$$

Rozdíl rychlostí při náletu a ústupu je tedy $\Delta u = u_N - u_U = 238\,096 \text{ km/s}$.

Pro kinetickou energii projektilu platí vztah $E_K = m_0 c^2(\gamma - 1)$, kinetická energie pro rychlost u_N se tedy rovná:

$$E_{K_N} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_N^2}{c^2}}} - 1 \right) = 5 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{271\,429^2}{300\,000^2}}} - 1 \right) = 6{,}07 \cdot 10^{17},$$

$$E_{K_N} = 6{,}07 \cdot 10^{17} \text{ J}.$$

Pro rychlost u_U bude kinetická energie projektilu vůči lodi rovna:

$$E_{K_U} = 5 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{33\,333^2}{300\,000^2}}} - 1 \right) = 2{,}8 \cdot 10^{15},$$

$$E_{K_U} = 2{,}8 \cdot 10^{15} \text{ J}.$$

Závěr: Z podílu energií $\frac{E_{K_N}}{E_{K_U}} = 216{,}8$ vidíme, že energie projektilu vůči útočící lodi je více než 216 × větší než vůči lodi dávající se na ústup. Obě hodnoty energií jsou obrovské a při střetu s vesmírnou lodí by byly účinky jistě devastující, ovšem šance na záchranu při ústupu je značně větší než při přímém útoku.

10.4. Soustava vozíků

Představme si dlouhý vozík pohybující se vzhledem k povrchu rychlostí v. Po tomto vozíku se pohybuje v témže směru další vozík, opět rychlostí v vzhledem k vozíku pod ním. Na něm se pohybuje ve stejném směru třetí vozík rychlostí v vzhledem k druhému vozíku, atd. až po n vozíků. Vypočítejte rychlost n-tého vozíku v_n a hodnotu výrazu $\lim_{n\to\infty} v_n$.

Řešení: Vyjádřeme si nejprve rychlost druhého vozíku:

$$\begin{aligned} v_1 &= v, \\ v_2 &= \frac{v_1 + v}{1 + \frac{v_1 v}{c^2}} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}, \\ &\vdots \\ v_{n+1} &= \frac{v_n + v}{1 + \frac{v_n v}{c^2}}. \end{aligned}$$

Nyní si zavedeme novou veličinu r, kterou nazveme rapidita a pro kterou platí:

$$\tanh r = \beta = vc.$$

Vyjádřeme si tuto novou veličinu:

$$\begin{aligned} \frac{e^r - e^{-r}}{e^r + e^{-r}} = \frac{e^{2r} - 1}{e^{2r} + 1} &= \beta, \\ e^{2r} - 1 &= \beta(e^{2r} + 1), \\ e^{2r} &= \frac{1+\beta}{1-\beta}, \\ r &= \ln\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}. \end{aligned}$$

Pro rapiditu prvního vozíku tedy platí: $r_1 = \ln\sqrt{\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}}$. Pro poměr rychlosti druhého vozíku a rychlosti světla platí vztah $\beta_2 = \frac{v_2}{c} = \frac{2\beta_1}{1+\beta_1^2}$.

Nyní vyjádřeme rapiditu pro druhý vozík:

$$r_2 = \ln\sqrt{\frac{1+\frac{2\beta_1}{1+\beta_1^2}}{1-\frac{2\beta_1}{1+\beta_1^2}}} = \ln\sqrt{\frac{1+\beta_1^2+2\beta_1}{1+\beta_1^2-2\beta_1}} = 2\ln\sqrt{\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}}.$$

Vidíme, že využití rapidity nám výpočet značně zjednoduší a můžeme psát $r_2 = 2r_1$. Proveďme nyní důkaz využitím principu matematické indukce, jestli tento vztah platí pro všechna n. Předpokládejme tedy, že $r_n = nr_1$ a vyjádřeme si r_{n+1}. K tomu potřebujeme β_{n+1}.

$$\beta_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{c} = \frac{\frac{v_n}{c}+\frac{v}{c}}{1+\frac{v_n v}{c^2}} = \frac{\beta_n+\beta}{1+\beta_n\beta},$$

$$r_{n+1} = \ln\sqrt{\frac{1+\frac{\beta_n+\beta}{1+\beta_n\beta}}{1-\frac{\beta_n+\beta}{1+\beta_n\beta}}} = \ln\sqrt{\frac{1+\beta_n+\beta+\beta_n\beta}{1-\beta_n-\beta+\beta_n\beta}} = \ln\sqrt{\frac{(1+\beta_n)(1+\beta)}{(1-\beta_n)(1-\beta)}},$$

$$\mathrm{r}_{\mathrm{n+1}} = \ln\sqrt{\frac{1+\beta_n}{1-\beta_n}} + \ln\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = r_n + r_1 = nr_1 + r_1 = (n+1)r_1.$$

Tím jsme dokázali platnost $r_n = nr_1$. Chceme-li znát rychlost v_n, vypočítáme ji pomocí rapidity r_n:

$$v_n = c\tanh r_n = c\tanh\ln\sqrt{\left(\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}\right)^n}.$$

Jelikož je β_1 kladné číslo, je výraz $\left(\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1}\right)$ jednoznačně větší než 1, a tudíž logaritmus na pravé straně pro rostoucí n roste nade všechny meze. Jelikož platí $\lim_{x\to\infty}\tanh x = 1$, musí platit:

$$\lim_{n\to\infty} v_n = c.$$

Závěr: Ukázali jsme si novou veličinu, která nám může zjednodušit některé výpočty, skládání rychlostí se nám převede na pouhé sčítání rapidit. Bijekce mezi množinami všech rychlostí a rapidit zobrazuje rychlost $v \in <0;c)$ na rapiditu $r \in <0;\infty)$.

11. Dilatace času

11.1. Vesmírný cestovatel

Vesmírný cestovatel Han Solo se pohybuje ve svém Falconu podsvětelnou rychlostí 0,999c z planety na okraji Galaxie ke hvězdě vzdálené 15 světelných let. O kolik roků cestovatel zestárne? Jak dlouho bude trvat tato cesta pro pozorovatele na planetě a pro pozorovatele v cíli? Jak bude situace vypadat po návratu zpět na planetu?

Řešení: Ze vztahu pro dilataci času jasně plyne, že pohybuje-li se vesmírné plavidlo vysokou rychlostí, plyne v něm čas pomaleji v porovnání s klidovou vztažnou soustavou. Předpokládáme proto tedy, že Han Solo nestráví v lodi plných 15 let. Přesvědčme se:

$$t = t_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 15 \cdot \sqrt{1-0{,}999^2} = 0{,}67065,$$

$$t = 0{,}67 \text{ roku}.$$

I přesto, že pozorovatelé na planetě, i v cílové oblasti prožili 15 let, Han Solo byl ve své lodi pouze něco přes dvě třetiny roku. Stejná situace nastane i při návratu na planetu. Lidé na planetě budou o 30 let starší, Han Solo o necelé dva roky.

Poznámka: Tento problém se v historii objevuje pod názvem *paradox dvojčat.* Mnozí fyzikové se v době vzniku speciální teorie relativity domnívali, že jestliže vztáhneme rychlost k vesmírnému cestovateli, bude efekt opačný. Tj.: planeta se začne vzdalovat od lodě a na planetě bude čas plynout pomaleji. Takovéto vztažení lze udělat právě díky tomu, že jsou podle principu teorie relativity všechny inerciální vztažné soustavy rovnocenné. Chyba se nachází v tvrzení, že vesmírná loď je inerciální vztažná soustava. Tato loď se musí u planety urychlit na rychlost blízkou rychlosti světla a u cíle opět zpomalit. Tato soustava je tedy neinerciální a Han Solo bude po absolvování této cesty opravdu mladší než jeho vrstevníci, kteří zůstali na planetě.

11.2. Doba života μ^--mionu

Miony jsou nestabilní částice, vznikající ve vrchních vrstvách atmosféry (10 km a výš) rozpadem pionů (π-mezonů). Dobu od vzniku po rozpad částice určuje tzv. *střední* *doba života*, ta je pro mion v jeho vztažné soustavě $T_0 = 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s. Poté se rozpadá na elektron, elektronové antineutrino a mionové neutrino. Vypočítejte, jakou vzdálenost mion urazí od času vzniku do rozpadu podle klasické fyziky a podle speciální teorie relativity, jestliže je jeho rychlost $v = 0{,}9997$ c. Počítejme, že mion vznikl ve výšce 20 km nad mořem. Můžeme tuto částici zachytit i v laboratoři na zemském povrchu? Jak se změní doba života mionu vzhledem k soustavě s částicí spojené? Vysvětlete zdánlivý paradox (řešte v soustavě mionu) [1].

Řešení: Podle klasického vztahu pro rychlost $s = vt$, by takovýto mion urazil dráhu $s = 0{,}9997 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-6} = 659{,}8\ \mathrm{m}$. Nemohl by tedy z 20km výšky na zem doletět. Ovšem zohledněním dilatace času při šíření vysokou rychlostí ubíhá čas v soustavě spojené s mionem pomaleji než v klidové soustavě. Tudíž se doba života částice z pohledu pozorovatele na Zemi prodlouží:

$$T = \frac{\mathrm{T_0}}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$T = \frac{2{,}2 \cdot 10^{-6}\mathrm{s}}{\sqrt{1 - 0{,}9997^2}} = 8{,}98 \cdot 10^{-5}\mathrm{s}.$$

A pro délku dráhy mionu tedy platí:

$$s = v \cdot T = \frac{vT_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{0{,}9997 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1 - 0{,}9997^2}} = 26\,938,$$

$$s = 26\,938\ \mathrm{m}.$$

Jestliže tato částice vznikla 20 km nad povrchem Země, můžeme ji celkem bez problémů v pozemní laboratoři detekovat.

Rychlost mionu je vzhledem k soustavě s ním spojené nulová, tedy doba života se nijak nezmění. Jak je tedy možné, že mion opravdu urazí delší dráhu? Soustava spojená se Zemí se vzhledem k mionu pohybuje stejně velkou opačně orientovanou rychlostí, a tudíž celková vzdálenost mezi mionem a povrchem Země podléhá relativistické kontrakci délek. Spočítejme dráhu mionu vzhledem k jeho soustavě:

$$s = s_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 26\,938\sqrt{1 - 0{,}9997^2} = 659{,}8.$$

Závěr: Vědec v laboratoři může zachytit mion i v takové vzdálenosti. Doba života mionu naměřená v laboratoři je $T = 8{,}98 \cdot 10^{-5}$ s. V soustavě mionu zůstává doba života stále $T_0 = 2{,}2 \cdot 10^{-6}$. V soustavě mionu se změní jeho vzdálenost od Země, ta se zkrátí na 659,8 metrů.

11.3. Rozcházení palubních hodin

Vypočítejte dobu, za kterou se budou palubní hodiny na vesmírné sondě a hodiny na Zemi rozcházet o jednu minutu. Vesmírná sonda letí sluneční soustavou a má třetí kosmickou rychlost $v = 42\ \mathrm{km/s}$ potřebnou k překonání gravitačního pole Slunce. Přitom její motory jsou stále v chodu tak, že tuto rychlost udržují konstantní, a počítejme, že tato rychlost zůstává konstantní i vzhledem k Zemi.

Řešení: Známe relativistický vztah mezi časovým úsekem na Zemi a ve vesmírné sondě, dále víme, že se tyto dva časy musí lišit o 60 sekund. Sestavme soustavu rovnic a tu vyřešme:

$$\Delta t = \Delta t' + 60,$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

$$\Delta t = -\frac{60}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1} = 6{,}122 \cdot 10^9$$

$$\Delta t = 6{,}122 \cdot 10^9\ \mathrm{s} = 194{,}14\ \mathrm{let}.$$

Závěr: Hodiny se budou o jednu minutu rozcházet za více než 194 let. I při mnohem nižších rychlostech, jakými se pohybují kupříkladu družice systému GPS, musí docházet k relativistickým úpravám času. Pro nás zanedbatelný časový údaj může v navigaci způsobit odchylku v řádu stovek metrů.

12. Kontrakce délek

12.1. Vesmírná loď tvaru kosočtverce

Vesmírná loď tvaru kosočtverce o úhlopříčkách $u_1 = 150$ m a $u_2 = 200$ m a hmotnosti 9 500 t se pohybuje ve směru delší úhlopříčky a míří k Zemi.

a) Vypočítejte rychlost a relativistickou hmotnost této lodi, jestliže pozorovatel na Zemi zjišťuje, že loď má tvar čtverce.

b) Vypočítejte rychlost a relativistickou hmotnost lodi, jestliže pozorovatel ze Země naměřil úhel ve špici lodi 80°.

Řešení: a) Ze znalosti zákona o kontrakci délek víme, že čím rychleji se těleso pohybuje, tím více se zkracuje jeho rozměr ve směru pohybu. Aby se loď jevila jako čtvercová, musí být obě úhlopříčky stejně dlouhé. Tedy podle vzorce (6):

$$150 = 200 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{150}{200}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4} c = 1{,}984 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Vesmírná loď se tedy pohybuje téměř 2/3 rychlosti světla. Její hmotnost se podle vzorce (7) spočítá:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{9500}{\sqrt{1 - \frac{7}{16}}} = 12\,667,$$

$$m = 12\,667 \text{ t}.$$

b) Klidový úhel ve špici je:

$$\tan \frac{\alpha_0}{2} = \frac{\frac{u_1}{2}}{\frac{u_2}{2}} = \frac{75}{100} \Rightarrow \frac{\alpha_0}{2} = 36°52'11.63''.$$

Pro zjednodušení výpočtů budeme počítat s úhlem $\frac{\alpha}{2} = 40°$. Víme, že kontrakce délky tělesa se projevuje pouze na rozměr tělesa, který je rovnoběžný se směrem pohybu.

Vesmírná loď se pohybuje pouze ve směru úhlopříčky u_2. To znamená, že úhlopříčka $u_1$zachovává stále svoji velikost a zkracuje se pouze u_2:

$$\frac{75}{\frac{u_2}{2}} = \tan 40°,$$

$$u_2 = \frac{2 \cdot 75}{\tan 40°} = 178{,}76.$$

Delší úhlopříčka se tedy zkrátí na $178{,}76\ \mathrm{m}$, nyní pokračujeme stejně jako v prvním případě a zjistíme velikost rychlosti lodi:

$$178{,}76 = 200 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{178{,}76}{200}\right)^2} = 0{,}44847c = 1{,}345\ \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}.$$

Nyní stejným způsobem spočítáme hmotnost lodi:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{9\ 500}{\sqrt{1 - 0{,}44847^2}} = 10\ 629.$$

Závěr: a) Aby loď měla čtvercový tvar, musí se vzhledem k pozorovateli pohybovat rychlostí $v = 1{,}984 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$. Při této rychlosti má hmotnost $m = 12\ 667$ t.

b) Aby pozorovatel naměřil úhel ve špici lodi 80°, musí se loď pohybovat rychlostí $v = 1{,}345 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$. Relativistická hmotnost je $m = 10\ 629$ t.

12.2. Průměr planety Země

Uvažujme astronoma nacházejícího se na stanici obíhající kolem Venuše, který pozoruje planetu Zemi vynikajícím dalekohledem. Vypočítejte, jaký naměří nejužší průměr Země v případě, bude-li Venuše nejblíže Zemi a když bude Zemi nejdále. Rychlost oběhu kolem Slunce je pro Venuši $v_V = 35\ \mathrm{km/s}$ a pro Zemi $v_Z = 30\ \mathrm{km/s}$. Klidový průměr Země je $d = 2 \cdot 6\ 378\ \mathrm{km} = 12\ 756\ \mathrm{km}$.

Řešení: Naše Sluneční soustava s největší pravděpodobností vznikla z uceleného protoplanetárního disku, to znamená, že se všechny planety otáčejí kolem Slunce stejným směrem. Vzájemná rychlost obou planet v případě, kdy je Venuše nejblíže Zemi, se vzhledem k nízkým rychlostem může vypočítat pomocí klasického vztahu:

$$u_1 = v_V - v_Z = 5\ \mathrm{km/s}.$$

Pozorovaný průměr pro tuto rychlost je roven

$$d_1 = d\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}},$$

vzhledem k nízké rychlosti v_1 k tomuto výpočtu využijeme následující aproximaci:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2},$$

$$d_1 = 12\,756\ \mathrm{km} \cdot \left(1 - \frac{25^2}{2 \cdot 9 \cdot 10^{10}}\right) = (12\,756 - 4{,}43 \cdot 10^{-5})\ \mathrm{km}.$$

Průměr d_1 je tedy o 44,3 milimetru kratší než klidový průměr.

Pro rychlost Země vzhledem k Venuši v případě, že jsou od sebe nejdál, platí:

$$v_2 = v_V + v_Z = 65\ \mathrm{km/s}.$$

Pro průměr planety Země vzhledem k pozorovateli na Venuši potom platí:

$$d_2 = d\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}} \approx d\left(1 - \frac{v_2^2}{2c^2}\right),$$

$$d_2 = 12\,756\ \mathrm{km} \cdot \left(1 - \frac{65^2}{2 \cdot 9 \cdot 10^{10}}\right) = (12\,756 - 2{,}99 \cdot 10^{-4})\ \mathrm{km}.$$

Závěr: Vidíme, že i pro rychlosti na naše poměry vysoké, je relativistická kontrakce délek vcelku zanedbatelná úprava, na celém průměru planety činí v prvním případě úbytek $44{,}3\ \mathrm{mm}$ a v druhém případě $30\ \mathrm{cm}$.

12.3. Směr rychlosti v jiné soustavě

Vesmírná loď, pohybující se od Země rychlostí $v = 0{,}8$c, vypustí průzkumnou sondu k cizí hvězdě ve směru odchylujícím se od směru rychlosti o úhel $\gamma' = 45°$. Jakým směrem bude sonda mířit z pohledu pozorovatele na Zemi? Rychlost sondy vzhledem k lodi je $u' = 0{,}5$c.

Řešení: Pro následující výpočty budeme potřebovat rozložit rychlost sondy na složky rovnoběžné s osami, ty následně transformujeme pomocí Lorentzovy transformace (3) do soustavy se Zemí, a z nich vypočítáme hledaný úhel. Tedy:

$$u'_x = u' \cos\gamma',$$
$$u'_y = u' \sin\gamma'.$$

Ze vzorce (3) vypočteme:

$$u_x = \frac{u' \cos\gamma' + v}{1 + \frac{vu' \cos\gamma'}{c^2}},$$

$$u_y = \frac{u' \sin\gamma' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu' \cos\gamma'}{c^2}}.$$

Nyní stačí pouze vyjádřit tangens úhlu γ:

$$\tan\gamma = \frac{u_y}{u_x} = \frac{u' \sin\gamma' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{u' \cos\gamma' + v}.$$

Dosadíme a vypočteme úhel γ:

$$\tan\gamma = \frac{0{,}5c \sin 45° \sqrt{1 - 0{,}5^2}}{0{,}5c \cos 45° + 0{,}8c} = 0{,}26543,$$

$$\gamma = 14{,}865° = 14°51'55''.$$

Závěr: Odchýlení směru rychlosti sondy od směru rychlosti vesmírné lodi je ve vztažné soustavě Země rovno $\gamma = 14°51'55''$.

13. Dynamika, hmotnost, energie

13.1. Hmotnost, hustota

Kvádr o hranách 10, 30 a 50 metrů má hmotnost 36 000 tun. Vypočítejte poměr klidové a relativistické hmotnosti a poměr klidové a relativistické hustoty. Zjistěte tyto poměry pro rychlosti $0{,}5c; 0{,}8c;\ 0{,}9c$ a $0{,}999c$. Vedle těchto poměrů spočítejte i reálné hodnoty pro tento kvádr.

Řešení: Pro poměry hmotností (klidové a relativistické) nám postačí pouze základní vzorec pro nárůst hmotnosti v závislosti na rychlosti (8):

$$m = m_0 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} => \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Z tohoto vztahu už lze poměry hmotností snadno spočítat, pro poměry hustot bude výpočet o málo složitější. Klidový objem V_0 se zmenší pouze v jednom rozměru, rovnoběžném se směrem rychlosti:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{V_0 \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{V_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\ ;$$

$$\rho_0 = \frac{m_0}{V_0} = \frac{36\,000}{10 \cdot 30 \cdot 50} = 2{,}4$$

$$\rho_0 = 2\,400\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}.$$

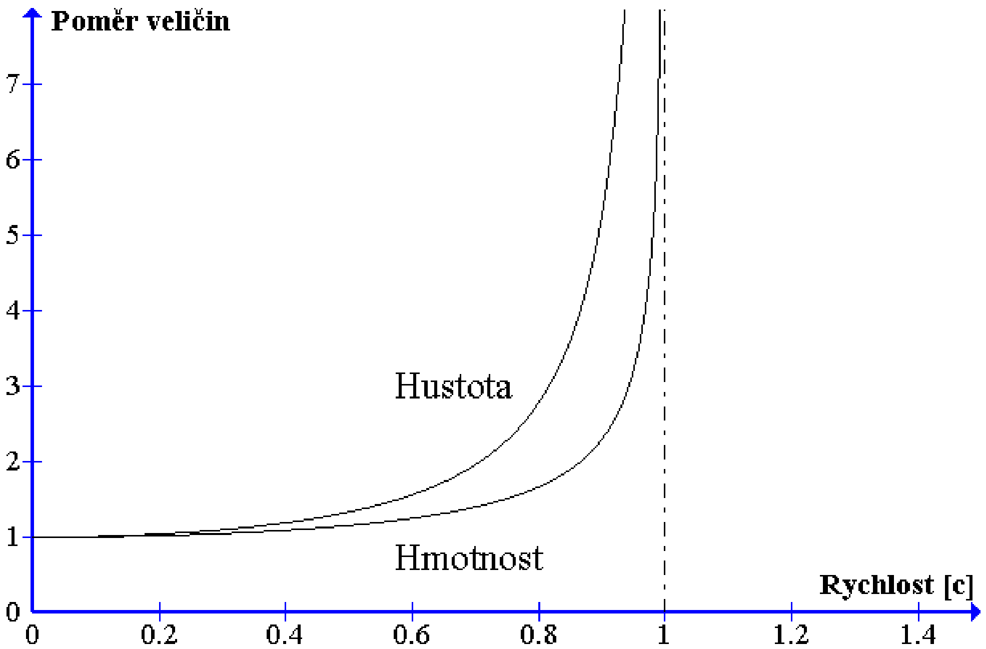
Tedy poměr relativistické a klidové hustoty nám vychází takto:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

Poměry relativních a klidových hustot a hmotností si zapíšeme do přehledné tabulky, vedle nich si spočteme také hodnoty pro kvádr.

	Poměry relativní/ klidová		Reálné hodnoty pro kvádr	
Rychlost	hmotnost	hustota	hmotnost $[\mathrm{t}]$	Hustota $[\mathrm{kg/m^3}]$
0,00 c	1	1,00	36 000	800
0,50 c	1,15	1,33	41 569	1 066
0,80 c	1,67	2,78	60 000	2 222
0,90 c	2,29	5,26	82 589	4 210
0,999 c	22,37	500,25	805 185	400 200

Tab. 1.: Výsledné hodnoty hmotnosti a hustoty pro různé rychlosti



Obr. 1.: Názorný graf závislosti poměrů veličin na rychlosti. Obrázek byl vytvořen v programu Graph.

Závěr: Vidíme zcela zřetelně, že přibližuje-li se rychlost tělesa k rychlosti světla, roste hmotnost limitně k nekonečnu a hustota dokonce kvadraticky.

13.2. Srážka dvou částic

Částice o klidové hmotnosti m_1 narazí rychlostí v do částice o hmotnosti m_2, která je v klidu. Předpokládejme, že se po srážce obě částice spojí a pokračují v pohybu. Vypočítejte rychlost této nové částice a kvadrát její klidové hmotnosti M^2[1].

Řešení: Označme M klidovou hmotnost nové částice a u její rychlost. Ze zákona zachování hmotnosti plyne vztah:

$$\frac{m_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+m_2=\frac{M}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

A ze zákona zachování hybnosti:

$$\frac{m_1 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{Mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

Po vydělení druhé rovnice první rovnicí dostaneme explicitní vyjádření rychlosti u:

$$u = \frac{\frac{m_1 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{\frac{m_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m_2} = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$M = \frac{m_1 v}{u}\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Po úpravě na druhou mocninu klidové hmotnosti dostaneme:

$$M^2 = m_1^2 \frac{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{c^2}}{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}}.$$

Dosazením za u a upravením se dostaneme až k pěknému výsledku:

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1 m_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Závěr: Zákon zachování hybnosti je nejobecnější fyzikální zákon a platí v každé izolované soustavě. Zákon zachování relativistické hmotnosti z tohoto zákona taktéž vychází. Vidíme, že pro rychlosti $v \ll c$ přechází vzorec na sčítání klidových hmotností $M^2 = (m_1 + m_2)^2$. Pro vyšší rychlosti a malé částice má tento výpočet uplatnění i přesto, že k dokonale nepružným srážkám nedochází.

13.3. Energie částice

Vypočítejte energii pionu π^+, který urazí od místa svého vzniku k místu svého rozpadu dráhu dlouhou 30 m v laboratorní soustavě. Střední doba života takovéto částice je $\tau_0 = 2{,}6 \cdot 10^{-8}\mathrm{s}$. Jeho klidová hmotnost je $m = 139{,}6\ \mathrm{MeV/c^2}$.

Řešení: Pro výpočet energie nejprve potřebujeme znát rychlost tohoto pionu, nemůžeme zanedbat fakt, že doba života částice se s vyšší rychlostí prodlužuje podle relativistického vztahu:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{s \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\tau_0},$$

Vyjádřením rychlosti v z tohoto vztahu získáme:

$$v = \frac{s}{\tau_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{\tau_0 c}\right)^2}} = 290\,346\,752,$$

$$v = 290\,347\ \mathrm{km/s}\ = 0{,}968\ c.$$

Pomocí této rychlosti a klidové hmotnosti už snadno dopočítáme energii částice:

$$Ue = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = 139{,}6 \cdot (3{,}974 - 1) = 415{,}18.$$

Závěr: Pion π^+, který urazí dráhu 30 metrů, má energii $415{,}18\ \mathrm{MeV}$.

13.4. Urychlené elektrony v magnetickém poli

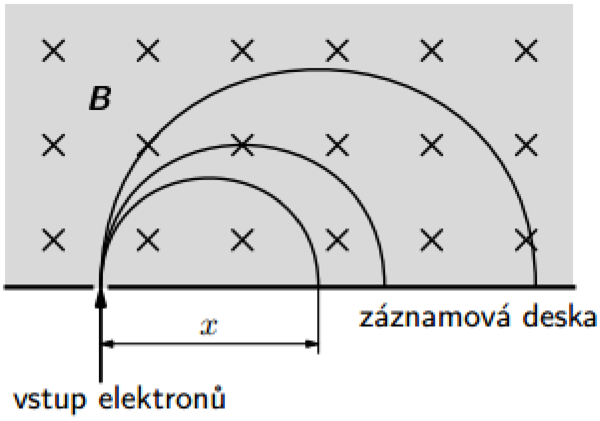
3. příklad celostátního kola 46. ročníku fyzikální olympiády (2004-2005): Elektrony urychlené určitým napětím pronikají štěrbinou do magnetického pole kolmo na magnetické indukční čáry. Toto pole zakřivuje dráhu elektronů a ty dopadají kolmo na záznamovou desku, na které se zobrazí jejich stopy (obr. 2). Ze zakřivení trajektorie elektronů můžeme spočítat jejich kinetickou energii. Při urychlení elektronu napětím $U_1 = 350\ \mathrm{kV}$ se stopa elektronu zobrazila ve vzdálenosti $x_1 = 35\ \mathrm{mm}$ od štěrbiny [10].

a) Určete velikost magnetické indukce B.

b) Určete, jakým nejvyšším napětím U_{max} můžeme urychlit elektron, aby dopadl do krajní meze záznamové desky (maximální měřitelná energie E_{Kmax}), jestliže je tato mez $x_{max} = 300\ \mathrm{mm}$.

c) Určete velikost rychlosti v_{max} elektronu urychleného napětím s kinetickou energií E_{Kmax}.

Klidová hmotnost elektronu je $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, elementární náboj je roven $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$.



Obr. 2.: Názorné dráhy elektronů v magnetickém poli pro tři různé energie. Převzato z [10].

Řešení: a) Na elektron působí dostředivá magnetická síla a stejně velká odstředivá síla.

$$\frac{m_0 v^2}{r\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = Bev\,; r = \frac{x}{2}\,;\ m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

Odtud vyjádříme velikost hybnosti elektronu:

$$p = mv = Ber = \frac{Bex}{2}.$$

Nyní si potřebujeme vyjádřit kinetickou energii elektronu. Známe vztah mezi hybností, potenciální a celkovou energií

$$E^2 = E_0^2 + p^2c^2 = m_0^2c^4 + \left(\frac{Bexc}{2}\right)^2,$$

$$E_K = E - E_0 = \sqrt{m_0^2c^4 + \left(\frac{Bexc}{2}\right)^2} - m_0c^2,$$

$$m_0^2c^4 + \left(\frac{Bexc}{2}\right)^2 = E_K^2 + 2E_Km_0c^2 + m_0^2c^4.$$

Pro zjištění velikosti magnetického pole tedy stačí vyjádřit B, za kinetickou energii dosadit urychlovací napětí $U_1 = 350\ \mathrm{kV}$ vynásobené nábojem elektronu, tedy $E_K = U_1 e; x = x_1 = 35\ \mathrm{mm}$.

$$B = \frac{2\sqrt{U_1^2 e^2 + 2U_1 e m_0 c^2}}{e x_1 c} = 0{,}1326,$$

$$B = 0{,}1326\ \mathrm{T}.$$

b) Nyní známe magnetickou indukci a vzdálenost, do které elektron dopadne. Stačí tedy vyjádřit E_K , a dosadit $B = 0{,}1326\ \mathrm{T}$ a $x = x_{max} = 300\ \mathrm{mm}$. Při řešení kvadratické rovnice má fyzikální smysl pouze kladný kořen.

$$E_K^2 + 2E_K m_0 c^2 - \left(\frac{Bexc}{2}\right)^2 = 0,$$

$$E_{Kmax} = \frac{-2m_0c^2 + \sqrt{4m_0^2c^4 + (Bex_{max}c)^2}}{2} = 8{,}775 \cdot 10^{-13},$$

$$E_{Kmax} = 8{,}775 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J} = 5{,}477\ \mathrm{MeV}.$$

Tedy maximální měřitelné urychlovací napětí je $U_{max} = 5{,}477\ \mathrm{MV}$.

c) Nyní zjistíme, jak velkou rychlost má takový elektron. Z relativistického vztahu si vyjádříme rychlost v a pomocí maximální kinetické energie $E_{Kmax} = 8{,}775 \cdot 10^{-13}$ J ji spočteme.

$$mc^2 = m_0c^2 + E_K \Rightarrow m = m_0 + \frac{E_K}{c^2},$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m_0^2}{m^2},$$

$$v_{max} = c\sqrt{1 - \frac{m_0^2}{m^2}} = c\sqrt{1 - \frac{m_0^2}{\left(m_0 + \frac{E_{Kmax}}{c^2}\right)^2}} = 0{,}99635c = 298\,904\,902\ \mathrm{m/s}.$$

Závěr: Magnetická indukce v komoře, do které vstupují elektrony, má velikost $B = 0{,}1326\ \mathrm{T}$. Mezní rychlost elektronu, který ještě záznamová deska zachytí, je

$v_{max} = 0{,}99635c$. Maximální napětí, které jej na tuto mezní rychlost urychlí je $U_{max} = 5{,}477\ \mathrm{MV}$.

13.5. Hmotnostní úbytek Slunce

Vypočítejte, kolik své hmotnosti Slunce vyzáří každou sekundu, jestliže hustota toku slunečního záření na Zemi je rovna $J = 1\,327\ \mathrm{W/m^2}$. Vzdálenost Země od Slunce je $1\ \mathrm{AU} = 150 \cdot 10^6\ \mathrm{km}$ [9].

Řešení: Na Zemi dopadá pouze minimální část energie vyrobené Sluncem, zbytek je rovnoměrně vyzářen do všech směrů. Známe-li hustotu toku v určité vzdálenosti, stačí vypočítat povrch koule o tomto poloměru a jednoduchým výpočtem získáme celkový světelný výkon Slunce. Povrch koule spočteme jako $S = 4\pi r^2$. Celkový výkon Slunce je pak roven

$$P = S \cdot J = 4 \cdot \pi r^2 J.$$

Z relativistického vztahu mezi energií a hmotností (10) získáme:

$$m = \frac{E}{c^2} \;\Leftrightarrow\; \frac{m}{t} = \frac{E}{tc^2} = \frac{P}{c^2}.$$

Tedy celkový hmotnostní úbytek za sekundu se vypočítá:

$$\frac{m}{t} = 4 \cdot \frac{\pi r^2 J}{c^2} = \frac{4 \cdot \pi (150 \cdot 10^9)^2 \cdot 1327}{9 \cdot 10^{16}} = 4\,168\,893\,451 = 4{,}2 \cdot 10^9,$$

$$\frac{m}{t} = 4{,}2 \cdot 10^9\ \mathrm{kg/s}.$$

Závěr: Celkový hmotnostní úbytek Slunce činí téměř 4 200 000 tun za sekundu! Toto číslo je ohromné, a i přesto se doba života Slunce odhaduje na několik miliard let. Hmotnost Slunce je přibližně $M = 2 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$, pokud by v tomto úbytku pokračovala i nadále, vydržela by svítit asi ještě 10^{13} let.

13.6. Počet jaderných přeměn ve Slunci

Nyní známe hmotnostní úbytek za jednu sekundu ve Slunci, známe též hmotnost jádra vodíku a hmotnost jádra helia. Kolik jaderných přeměn se v jádru slunce odehraje během jedné sekundy? $m_H = 1{,}0079u$, $m_{He} = 4{,}0026u$, kde $u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\mathrm{kg}$ je atomová hmotnostní konstanta [9].

Řešení: První stupeň termojaderné fůze probíhající v jádrech hvězd je přeměna čtyř protonů na jádro hélia, z dvou protonů se tedy Beta přeměnou stanou neutrony a všechny čtyři částice se spojí do jednoho jádra helia za vzniku velkého množství energie:

$$4H \rightarrow 1He + \Delta E,$$

$$4 \cdot 1{,}0079u = 4{,}0026u + \Delta m.$$

Nyní vyjádříme hmotnostní přebytek:

$$\Delta m = 4{,}0316u - 4{,}0026u = 0{,}029u = 4{,}814 \cdot 10^{-29}\mathrm{kg}.$$

To tedy znamená, že při jedné reakci je do okolí vyzářeno množství energie ekvivalentní $\Delta m = 4{,}814 \cdot 10^{-29}$ kg hmotnosti. My už víme, že během jedné sekundy ztratí Slunce hmotnost $m_u = 4{,}169 \cdot 10^9\mathrm{kg}$. Počet reakcí v jádře je tedy:

$$N = \frac{m_u}{\Delta m} = \frac{4{,}169 \cdot 10^9}{4{,}818 \cdot 10^{-29}} = 8{,}653 \cdot 10^{37}.$$

Závěr: V naší nejbližší hvězdě, probíhá každou sekundu $8{,}653 \cdot 10^{37}$ jaderných reakcí. To odpovídá energii $E = 4 \cdot 10^{26}\mathrm{J}$ každou sekundu.

14. Dopplerův jev

14.1. Rudý posuv

Astronomové objevili hvězdu, jejíž spektrální analýza odhalila, že námi naměřená vlnová délka $\lambda = 766\ \mathrm{nm}$ ve skutečnosti odpovídá třetí spektrální čáře vodíku o vlnové délce $\lambda_0 = 383\ \mathrm{nm}$. Vypočtěte vzájemnou rychlost Země a této hvězdy, porovnejte výpočet pomocí klasického a relativistického vztahu [5].

Řešení: Nejdříve vyzkoušíme výpočet klasickým vztahem, ten rozlišuje případy, kdy se pohybuje zdroj a kdy se pohybuje pozorovatel. Už zde nalézáme chybu, protože logicky z principu relativity nelze rozhodnout, jestli se pohybuje hvězda, nebo se pohybujeme my. Vyberme například nejprve vzorec (11) pro pohyb pozorovatele. Ten si upravíme pro vlnové délky. Jelikož známe vztah $\lambda = \frac{c}{f}$, můžeme psát:

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}\left(1 + \frac{v}{c}\right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0}\left(1 + \frac{v}{c}\right),$$

tedy:

$$v = c\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} - 1\right) = 3 \cdot 10^8 \left(\frac{383}{766} - 1\right) = -1{,}5 \cdot 10^8.$$

Rychlost nám vyšla záporně $v = -1{,}5 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$. Použili jsme vzorec pro přibližování pozorovatele, znamená to, že se touto rychlostí od hvězdy vzdalujeme. Vezměme nyní vzorec (12) pro případ přibližování zdroje:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0\left(1 - \frac{v}{c}\right)},$$

vyjádřením rychlosti v a následným dosazením získáme:

$$v = c\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right) = 3 \cdot 10^8 \left(1 - \frac{766}{383}\right) = -3 \cdot 10^8.$$

Tento výsledek opět říká, že se hvězda vzdaluje, ovšem vzdaluje se údajně rychlostí $v = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$, což je rychlost světla, a nastává rozpor s druhým Einsteinovým postulátem.

Vypočtěme nyní rychlost vzdalování této hvězdy pomocí relativistického vztahu (13):

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0}\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}},$$

vyjádřením β a následným dosazením dostaneme požadovanou rychlost v podobě poměru v/c.

$$\beta = \frac{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}{1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

Závěr: Pro větší posuvy a vyšší rychlosti nelze použít klasické vztahy, ze vztahu pro pohyb pozorovatele vyšla rychlost $\beta = 0{,}5$, pro pohyb zdroje $\beta = 1$. Ani jedna hodnota není správná, pouze relativistický vztah nám dá dobrý výsledek. Vzájemná rychlost Země a této hvězdy vyšla $v = 0{,}6c$, což je nezvykle rychlý objekt. Ovšem teorie o rozpínání vesmíru nikterak nevylučuje takto rychlé vzdalování objektů, dokonce je podle Hubbleova zákona možné, že se galaxie, které jsou od sebe dostatečně daleko, od sebe vzdalují rychlostí vyšší než je rychlost světla. O těchto galaxiích ovšem nic nevíme, světlo od nich k nám nikdy nedorazí.

14.2. Letecká komunikace

Řídící věž využívá ke komunikaci s letadly amplitudovou modulaci na frekvencích v rozmezí $118 - 137\ \mathrm{MHz}$. Některá letadla se mohou pohybovat i rychlostmi jen o málo menšími, než je rychlost zvuku ($v_{zvuk} = 340\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$). V důsledku Dopplerova jevu by se mohlo teoreticky stát, že letadlo, ačkoliv má vysílačku naladěnou na svůj komunikační kanál, zachytí kanál cizí a ztratí spojení se svou řídící věží. Ke ztrátě spojení nesmí v letecké komunikaci dojít. Vypočítejte minimální šířku frekvenčního píku, na kterém bude řídící věž komunikovat s určitým letadlem, aby ani při rychlosti zvuku v atmosféře neměl dopplerovský posuv vliv na spojení. Vypočítejte, na kolika kanálech se potom může teoreticky vysílat v rozmezí $118 - 137\ \mathrm{MHz}$ [11].

Řešení: Vzhledem k tomu, že rychlost zvuku v atmosféře je mnohem menší než rychlost světla, můžeme se omezit pouze na klasický vztah (11):

$$f = f_0\left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Pomocí tohoto vztahu vypočítáme maximální možný dopplerovský posuv pro krajní body pásma, a to jak pro přibližující (f^+), tak i pro vzdalující se (f^-) letadla. Z rozdílu frekvencí mezi přibližujícím a vzdalujícím se letadlem určíme šířku píku. Vzhledem k bezpečnosti budeme za minimální možnou šířku brát větší z rozdílů. Zamyslete se, bude-li rozdíl frekvencí menší u spodní hranice pásma, u horní hranice pásma, nebo jestli mohou být šířky stejné.

$$f_{118}^+ = 118\left(1 + \frac{340}{3 \cdot 10^8}\right) = 118\,000{,}1337\ \mathrm{kHz},$$

$$f_{118}^{-} = 118\left(1 - \frac{340}{3\cdot 10^8}\right) = 117\,999{,}8663\ \mathrm{kHz},$$

$$f_{137}^{+} = 137\left(1 + \frac{340}{3\cdot 10^8}\right) = 137\,000{,}1553\ \mathrm{kHz},$$

$$f_{137}^{-} = 137\left(1 - \frac{340}{3\cdot 10^8}\right) = 136\,999{,}8447\ \mathrm{kHz}.$$

Tedy $\Delta f_{118} = 267{,}4\ \mathrm{Hz}$, $\Delta f_{137} = 310{,}6\ \mathrm{Hz}$.

Závěr: Z vypočítaných hodnot vidíme, že pro zachování dobrého signálu a zabránění ztráty spojení musí věž i letadlo vysílat na společném kanálu s frekvenční šířkou $\Delta f = 310{,}6\ \mathrm{Hz}$. Budeme-li předpokládat, že jsou jednotlivé komunikační frekvence odstupňovány po $311\ \mathrm{Hz}$, může se v civilním leteckém pásmu vysílat naráz na $N = \frac{(137-118)\cdot 10^6}{311} = 61\,093$ frekvencích. Na místo $311\ \mathrm{Hz}$ se ve skutečnosti používá krokování $8{,}33\ \mathrm{kHz}$, dříve $25\ \mathrm{kHz}$. A tudíž se v tomto pásmu může vyskytovat jen asi 2 280 kanálů, což je ale naprosto dostačující a je zaručena bezpečnost letového provozu.

14.3. Světlomety vesmírných lodí

Pozemské vesmírné lodě používají na přídi světlomety (koherentní lasery) vyzařující světlo červené barvy o vlnové délce $\lambda_1 = 700\ \mathrm{nm}$. Na zádi svítí zeleným světlem s vlnovou délkou $\lambda_2 = 555\ \mathrm{nm}$. Loď cestuje nejvyšší povolenou rychlostí $v = 0{,}23c$ ze Země na planetu u Proximy Centauri. Jakou barvu uvidí pozorovatel ze Země a jakou mimozemšťan? Logicky mimozemšťan detekuje světlo z přídi a pozemšťan světlo ze zádi. Jak se změní situace, bude-li tato loď do svého cíle (Proxima Centauri) couvat? Proč to mezihvězdné protokoly zakazují?

Řešení: Při rychlosti srovnatelné s rychlostí světla musíme zohlednit relativistické korekce a použít vztah (12). Do vzorce dosadíme $f = \frac{c}{\lambda}$ a výraz převrátíme:

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

Znamená to, že pro případ, kdy se zdroj a pozorovatel navzájem vzdalují, se vlnová délka zvětšuje. Pro přibližování dosadíme $\beta = -0{,}23$. Vypočtěme nejprve pohyb vpřed:

$$\lambda_{Země} = 555 \text{ nm} \sqrt{\frac{1+0{,}23}{1-0{,}23}} = 701{,}45 \text{ nm},$$

$$\lambda_{Centauri} = 700 \text{ nm} \sqrt{\frac{1-0{,}23}{1+0{,}23}} = 553{,}85 \text{ nm}.$$

Nyní případ, kdy loď stejnou rychlostí couvá:

$$\lambda_{Země} = 700 \text{ nm} \sqrt{\frac{1+0{,}23}{1-0{,}23}} = 884{,}72 \text{ nm},$$

$$\lambda_{Centauri} = 555 \text{ nm} \sqrt{\frac{1-0{,}23}{1+0{,}23}} = 439{,}12 \text{ nm}.$$

Závěr: V prvním případě, kdy loď letěla přídí napřed, jak je zvykem, pozorovali na Zemi na zádi lodi světlo odpovídající červené barvě. Na vzdálené hvězdě registrovali barvu zelenou, jak by bylo pro nás přirozené. Ovšem při couvání, by na Zemi neviděli barvu žádnou, neboť by se červené světlo posunulo do infračerveného spektra. Na Proximě Centauri by pozorovali barvu modrou, kterou používá vesmírná policie, nebo která značí překročení povolené rychlosti.

Závěr

V první části této bakalářské práce jsem zpracoval různé zdroje a vytvořil přehledný, komplexní a podrobný teoretický základ speciální teorie relativity. Tato teorie obsahuje základní pojmy a k nim příslušné vzorce a vztahy, mnohé z nich jsou pro lepší porozumění odvozeny. Například v kapitole Dopplerův jev jsou pro pochopení tohoto jevu odvozeny i klasické vztahy. Tento teoretický základ je pro řešení příkladů nezbytný a často samotná teorie a odvozování osvětlí problematiku mnoha příkladů. Druhou část práce tvoří samotná sbírka, která obsahuje 19 řešených příkladů, rozdělených do pěti kapitol. Inspiraci k vytváření příkladů jsem čerpal, vedle literatury uvedené na konci práce, také z přednášek a cvičení předmětu *Teorie relativity* vedených panem Mgr. Lukášem Richterkem, Ph.D.

Některé příklady, např. 11.1, 13.5, jsou velmi časté, objevují se téměř v každé sbírce, a proto nemohou chybět ani zde, jedná se o stěžejní příklady. Naopak jiné, např. 10.4, 11.3, 12.3, 13.4, nejsou příklady příliš obvyklé a pro střední školu jsou poměrně složité. Největším přínosem této sbírky jsou příklady 10.3, 12.1, 13.1, 14.2, 14.3, které nemají přímou inspiraci v žádné literatuře a které jsou originální.

Literatura

[1] Bartuška, K.: *Deset kapitol ze speciální teorie relativity.* Praha: SPN, 1980.

[2] Bartuška, K.: *Fyzika pro gymnázia: speciální teorie relativity.* Praha: Prometheus 2010.

[3] Feynman, R. P.; Leighton R. B.; Sands M.: *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 1/3.* Praha: Fragment, 2000.

[4] Fuka, J.: *Úvod do teorie relativity.* Olomouc: Univerzita Palackého. 1970.

[5] Halliday D.; Resnick R.; Walker J.: *Fyzika. Vysokoškolská učebnice fyziky. Část 4: Elektromagnetické vlny - optika - relativita.* Brno: VUTIUM, Praha: Prometheus, 2000.

[6] Lightman, A. P.; Press, W. H.; Price, R. H.; a kol.: *Problem Book in Relativity and Gravitation.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1975.

[7] Machala, L.: *Cvičení z atomové a jaderné fyziky.* Olomouc: Univerzita Palackého 2005.

[8] Nahodil, J.: *Sbírka úloh z fyziky kolem nás.* Praha: Prometheus 2011.

[9] Syrový A.: *Sbírka příkladů z fyziky.* Praha: SNTL, 1971.

[10] Teoretické úlohy celostátního kola 46. ročníku FO. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/archiv/46/fo46a3_z.pdf> [cit. 19. 4. 2013]

[11] Letecká rádiová komunikace. Dostupné z: <http://www.kmitocty.cz/?p=206> [cit. 18. 4. 2013]